УДК 512.53

Тетяна В. Волошина, к. ф.-м. н., доцент

Котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n.

Описано котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n. Встановлено зв'язок котранзитивності піднапівгрупи із її S_n-нормальністю.

Ключові слова: котранзитивна піднапівгрупа, напівгрупа перетворень.

E-mail: vtv_lutsk@rambler.ru

Tatiana V. Voloshyna, PhD, Associate Professor

Cotransitive subsemigroups of the full transformation semigroup T_n.

Cotransitive subsemigroups of the full transformation semigroup T_n are described. The relations of a cotransitivity of the subsemigroup with its S_n-normality are established.

Key words: cotransitive subsemigroups, transformation semigroup.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.

Вступ. Поняття котранзитивної піднапівгрупи для напівгруп перетворень було введено Сулліваном у роботі [1] і використовувалося для опису ідеалів у інверсній симетричній напівгрупі $IS(X)$, повній напівгрупі перетворень $T(X)$ та напівгрупі усіх часткових перетворень $PT(X)$ множини X. Ми у цій роботі обмежимося розглядом повної напівгрупи T_n перетворень скінченної множини. Кожен її двосторонній ідеал буде котранзитивною піднапівгрупою. Метою роботи буде опис всіх її котранзитивних піднапівгруп.

Нехай $N=\{1,2,\dots,n\}$. Повну напівгрупу всіх відображень множини N в саму себе будемо позначати T_n. Для $\alpha\in T_n$ через $ran\,\alpha$ позначимо область значень відображення α. *Рангом* $rank\,\alpha$ перетворення α будемо називати потужність його області значень. Зауважимо, що елемент $\alpha\in T_n$ буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли обмеження α на множину $ran\,\alpha$ є тотожним перетворенням [2]. Для $x\in ran\,\alpha$ через $\alpha^{-1}(x)$ будемо позначати *повний прообраз* x *при відображенні* α. З кожним елементом α напівгрупи T_n пов'язане розбиття $\pi_\alpha=\alpha\circ\alpha^{-1}$ множини N на класи еквівалентності $N=\bigcup_{x\in ran\alpha}\alpha^{-1}(x)$, тобто $y_1\ \pi_\alpha\, y_2$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha(y_1)=\alpha(y_2)$.

Означення відношень Гріна $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{I}$ на множині елементів напівгрупи можна знайти у [2].

Лема 1 [2]. Для $\alpha,\beta\in T_n$ $\alpha\,\boldsymbol{L}\,\beta$ тоді і тільки тоді, коли $ran\alpha=ran\beta$; $\alpha\,\boldsymbol{R}\,\beta$ тоді і тільки тоді, коли $\pi_\alpha=\pi_\beta$; $\alpha\,\boldsymbol{D}\,\beta$ тоді і тільки тоді, коли $rank\alpha=rank\beta$. Для напівгрупи T_n $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$.

Клас еквівалентності відношення $\boldsymbol{D}$, що містить елементи рангу k будемо позначати через D_k.

Лема 2 [2]. Кожен ідеал напівгрупи T_n – головний; має вигляд $I_k=\{\alpha\in T_n \mid rank\alpha\le k\}$, $k=\overline{1,n}$. При цьому $I_1\subset I_2\subset\cdots\subset I_{n-1}\subset I_n=T_n$.

Зауважимо, що $I_k=\bigcup_{i=1}^{k}D_i$.

1. Котранзитивні піднапівгрупи з T_n

Нехай $ran\alpha=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subseteq N$, $A_i=\alpha^{-1}(x_i)$. Відображення $\alpha\in T_n$ будемо скорочено записувати $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\x_i\end{pmatrix}$.

Піднапівгрупа $S\subseteq T_n$ називається *котранзитивною*, якщо для кожного перетворення $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\x_i\end{pmatrix}\in S$ рангу k виконуються дві умови:

(1) для кожного $\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}\subseteq N$ $\mu=\begin{pmatrix}A_i\\b_i\end{pmatrix}\in S$;

(2) для кожного $\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}\subseteq N$ існує $\lambda\in S$, таке що, $y_i\in\lambda^{-1}(x_i)$, $i=\overline{1,k}$.

Як було вже зазначено, кожен ідеал $I_k, k=\overline{1,n}$, є котранзитивною піднапівгрупою в

T_n. Легко бачити, що підгрупа S_n також задовольняє умови котранзитивності.

Лема 3. Котранзитивна піднапівгрупи S з T_n разом із кожним своїм елементом α містить весь $\boldsymbol{R}$-клас R_α, якому належить α.

▲ З умови (1) випливає, що $\pi_\alpha = \pi_\mu$. Тому, за лемою 1, $\mu \in R_\alpha$. Оскільки із $\mu \in R_\alpha$ випливає, що $\mu \in S$, то $R_\alpha \subseteq S$. ■

Лема 4. Якщо котранзитивна піднапівгрупа S з T_n містить елемент α рангу k, то існує такий набір розбиттів $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in S\}$ множини N, що розділяє довільні її k елементів.

▲ З умови (2) випливає, що для довільних k елементів $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} \subseteq N$ існує таке відображення $\lambda \in S$, що y_i містяться у різних класах розбиття π_λ множини N, тобто π_λ розділяє ці елементи. ■

Лема 5. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in T_n$. Рівність $rank\alpha = rank\alpha^2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $|A_i \bigcap ran\alpha| = 1$ для всіх $i = \overline{1,k}$. Якщо s – кількість таких A_i, для яких $A_i \bigcap ran\alpha = \varnothing$, то $rank\alpha^2 = rank\alpha - s$.

▲ Якщо всі класи розбиття π_α містять рівно по одному елементу з $ran\alpha$, то кожен клас A_i можна ототожнити з цим елементом. Тоді відображення α задає бієкцію на $ran\alpha$. У цьому випадку відображення α^2 також буде бієкцією на $ran\alpha$. Тому $ran\alpha = ran\alpha^2$, а тому і ранги у α та α^2 однакові.

Нехай тепер існує такий клас розбиття π_α, у якому більше одного елемента з $ran\alpha$. Тоді знайдеться і такий клас розбиття A_i, у якому немає жодного елемента із $ran\alpha$. Розглянемо $x_i = \alpha(A_i) \in ran\alpha$. Доведемо, що $x_i \notin ran\alpha^2$. Нехай існує $z \in X$, такий, що $\alpha^2(z) = x_i$. Тоді $\alpha(z) \in A_i$. З іншого боку, $\alpha(z) \in ran\alpha$. Але $A_i \bigcap ran\alpha = \varnothing$. Прийшли до суперечності. Отже, $x_i \notin ran\alpha^2$. Із $ran\alpha^2 \subseteq ran\alpha$ тоді випливає, що $rank\alpha^2 < rank\alpha$.

Кожному A_i, для якого $A_i \bigcap ran\alpha = \varnothing$, відповідає такий $x_i = \alpha(A_i) \in ran\alpha$, що $x_i \notin ran\alpha^2$. Якщо ж у A_i міститься хоча б один елемент із $ran\alpha$, наприклад $x_j \in A_i$, то для довільного $z \in A_j$ $\alpha^2(z) = \alpha(x_j) = x_i$. Отже, у цьому випадку $x_i \in ran\alpha^2$. Тому рівність $rank\alpha^2 = rank\alpha - s$ виконується. ■

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ будемо називати *однотипними*, якщо набори $(|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_k|)$ та $(|B_1|, |B_2|, \ldots, |B_k|)$ розрізняються лише порядком елементів.

Лема 6. Нехай $\varepsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in T_n$ – ідемпотент. Тоді для кожного $g \in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix}$ також ідемпотент. Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ – однотипні, а $b_i = g(a_i)$, $B_i = g(A_i)$, $i = \overline{1,k}$.

▲ Твердження леми випливає із того, що для кожного $g \in S_n$ відображення $\alpha \mapsto g^{-1}\alpha g$ є автоморфізмом напівгрупи T_n. ■

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ будемо називати *меншим* за розбиття $N = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$, якщо кожен блок B_i другого розбиття є об'єднанням кількох блоків першого розбиття. Решітку всіх розбиттів множини N позначимо через $PartN$.

Теорема 1. Піднапівгрупа $S \subseteq T_n$ буде котранзитивною тоді і тільки тоді, коли вона належить до одного з таких типів:

1. $S = S_n$.
2. Нехай $(\rho(k)_j)_{j \in J}$ – така родина розбиттів множини N на k блоків, яка розділяє довільні її k елементів, а $Q_k = \{\rho \in PartN \mid \rho(k)_j \le \rho \text{ для деякого } j \in J\}$. Тоді $S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in \bigcup_{i=1}^{k} Q_k\}$.
3. Нехай $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ – набір розбиттів множини N на k блоків, $(\rho_j)_{j \in J}$ – родина всіх розбиттів множини N, однотипних одному з $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, а $Q = \{\rho \in PartN \mid \rho_j \le \rho \text{ для деякого } j \in J\}$. Тоді $S = S_n \bigcup \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in Q\}$.

▲ Очевидно, що S_n – котранзитивна піднапівгрупа з T_n. Якщо у котранзитивній піднапівгрупі S міститься хоча б один елемент α

рангу n, то, за лемою 3, вона містить і весь R_α. Але усі елементи S_n складають єдиний $\boldsymbol{R}$-клас, бо в них однакове тривіальне розбиття на одноелементні класи. Отже, якщо S – котранзитивна піднапівгрупа з T_n, то вона або містить S_n повністю, або не містить жодного елемента рангу n.

Нехай тепер найбільший ранг елемента із котранзитивної піднапівгрупи S дорівнює $k<n$. Тоді, за лемою 4, то існує такий набір розбиттів $\{\pi_\alpha \mid \alpha\in S\}$ множини N, що розділяє довільні її k елементів. Позначимо його $(\rho(k)_j)_{j\in J}$. Для елементів $\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}\subseteq N$ існує таке $\lambda\in S$, що кожен усі y_i містяться у різних класах розбиття π_λ. Разом з елементом $\lambda\in S$ у цій напівгрупі міститься весь $\boldsymbol{R}$-клас R_λ, що відповідає цьому розбиттю. Отже, в S містяться всі $\boldsymbol{R}$-класи, відповідні розбиттям із родини $(\rho(k)_j)_{j\in J}$. Всі ці $\boldsymbol{R}$-класи містяться в одному $\boldsymbol{D}$-класі D_k. Тому $D_k\bigcap S=\{\alpha\in T_n \mid \pi_\alpha\in(\rho(k)_j)_{j\in J}\}$.

При множенні між собою їх елементів із $D_k\bigcap S$ можна отримати елемент рангу $k-1$. Доведемо це. Нехай $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\ x_i\end{pmatrix}\in S$ – елемент рангу $k<n$. Виберемо у кожній підмножині A_i по одному представнику $a_i\in A_i$. Тоді $\varepsilon=\begin{pmatrix}A_i\\ a_i\end{pmatrix}\in S$ – ідемпотент того самого рангу. Для всіх $i=\overline{1,k}$ $|A_i\bigcap ran\varepsilon|=1$. Оскільки $k<n$, існує така A_j, що $|A_j|>1$. Виберемо у A_j елемент z, відмінний від a_j. Для деякої $A_l\neq A_j$ замінимо a_l на z. Отримаємо $\mu=\begin{pmatrix}A_1&\cdots&A_j&\cdots&A_l&\cdots&A_k\\ a_1&\cdots&a_j&\cdots&z&\cdots&a_k\end{pmatrix}$. У підмножині A_l немає жодного елемента із $ran\mu$. У всіх інших A_i існує принаймні один елемент із $ran\mu$. Тому, за лемою 5, $rank\mu^2=rank\mu-1=k-1$. За умовою (1), $\mu\in S$, а тому і $\mu^2\in S$. Отже, в S існує елемент рангу $k-1$. Для довільних двох A_m,A_l, відмінних від A_j розглянемо елемент

$$\mu_{ml}=\begin{pmatrix}A_1&\cdots&A_j&\cdots&A_l&\cdots&A_m&\cdots&A_k\\ a_1&\cdots&a_m&\cdots&z&\cdots&a_j&\cdots&a_k\end{pmatrix}.$$

За умовою (1), $\mu_{ml}\in S$, а тому і $\mu_{ml}^2\in S$. Оскільки $a_j,z\in A_j$, один із блоків розбиття $\mu_{ml}^2\in S$ є об'єднанням вибраних блоків A_m,A_l розбиття $\mu_{ml}\in S$. Отже, разом із кожним елементом $\alpha\in D_k\bigcap S$ в S міститься підмножина $\{\beta\in T_n\bigcap D_{k-1} \mid \pi_\alpha\le\pi_\beta\}$.

Далі аналогічно доводимо, що в S містяться елементи рангів $k-2,k-3,\cdots,2,1$, а також, що в S містяться ті елементи $\alpha\in T_n$, розбиття π_α яких задовольняють умову $\rho(k)_j\le\pi_\alpha$ для деякого $j\in J$. Провівши аналогічні міркування для елементів рангу $k-1,k-2,\cdots,2$, отримуємо, що $S=\{\alpha\in T_n \mid \pi_\alpha\in\bigcup_{i=1}^{k}Q_k\}$.

Нехай тепер $S_n\subset S$, і в котранзитивній підніпівгрупі S існують елементи меншого за n рангу. Нехай k – найбільший відмінний від n ранг елемента із S, а $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\ x_i\end{pmatrix}\in S$ – елемент рангу k. Для α розглянемо ідемпотент $\varepsilon_\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\ a_i\end{pmatrix}\in S$, вибравши по одному представнику $a_i\in A_i$. За лемою 6, для кожного $g\in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon_\alpha g=\begin{pmatrix}B_i\\ b_i\end{pmatrix}\in S$ також ідемпотент. Розбиття $N=\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$ – однотипні, а $b_i=g(a_i)$, $B_i=g(A_i)$, $i=\overline{1,k}$. Застосувавши всі елементи $g\in S_n$, отримаємо ідемпотенти виду $g^{-1}\varepsilon_\alpha g\in S$ із всіма можливими розбиттями множини N, що однотипні з розбиттям елемента $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\ x_i\end{pmatrix}\in S$. За лемою 3, піднапівгрупа S містить усі $\boldsymbol{R}$-класи, що відповідають розбиттям, однотипним із π_α. Далі доведення подібне до відповідного фрагменту попереднього випадку.

Зауважимо насамкінець, що для усіх трьох типів $S\subseteq T_n$ є об'єднанням $\boldsymbol{R}$-класів, а тому задовольняють умову (1). Якщо $D_k\bigcap S\neq\varnothing$, то $\boldsymbol{R}$-класам із D_k відповідають розбиття, що утворюють набір, яким можна розділити довільні елементи $\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}\subseteq N$. Тому і умова (2) для S також виконується. Замкненість множення на S випливає із того, що для довільних $\alpha,\beta\in T_n$ $\pi_\alpha\le\pi_{\alpha\beta}$. ■

Наслідок. Ідеал I_1 міститься у кожній відмінній від S_n котранзитивній піднапівгрупі з T_n.

Зауваження. Якщо із піднапівгруп третього типу вилучити підгрупу S_n, то отримаємо піднапівгрупу другого типу. Зворотнє твердження хибне.

Приклад 1. У напівгрупі T_4 піднапівгрупа S містить усі елементи рангу 1 і всі ті елементи рангу 2, для яких розбиттями є $\{1,2\}\bigcup\{3,4\}$ та $\{1,3\}\bigcup\{2,4\}$. Це котранзитивна піднапівгрупа другого типу. У ній 28 елементів.

Приклад 2. У напівгрупі T_4 піднапівгрупа U містить усі елементи рангу 1 і всі ті елементи рангу 2, для яких розбиттями є $\{1,2,3\}\bigcup\{4\}$, $\{1,2,4\}\bigcup\{3\}$, $\{1,3,4\}\bigcup\{2\}$ та $\{2,3,4\}\bigcup\{1\}$. Це котранзитивна піднапівгрупа другого типу. В ній 52 елемента.

Наступне поняття було введено І. Леві [3]. Піднапівгрупа S із T_n називається S_n-*нормальною*, якщо для довільного $g\in S_n$ $g^{-1}Sg=S$.

Теорема 2. Котранзитивна піднапівгрупа S із T_n буде S_n-нормальною тоді і тільки тоді, коли вона належить або до третього типу, або до третього типу із вилученою підгрупою S_n.

▲ Якщо котранзитивна піднапівгрупа S із T_n є S_n-нормальною і в ній є елемент $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\x_i\end{pmatrix}\in S$ рангу k, то в S існує ідемпотент $\varepsilon_\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\a_i\end{pmatrix}\in S$, $a_i\in A_i$. За лемою 6, для кожного $g\in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon_\alpha g=\begin{pmatrix}B_i\\b_i\end{pmatrix}\in S$ також ідемпотент. Розбиття $N=\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$ – однотипні. Застосувавши всі елементи $g\in S_n$, отримаємо, що в S містяться ідемпотенти із всіма можливими розбиттями множини N, що однотипні з розбиттям елемента $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\x_i\end{pmatrix}$.

Нехай тепер для котранзитивної піднапівгрупи S із того, що $S\bigcap D_k\neq\varnothing$, випливає, що вона разом із кожним своїм елементом $\alpha=\begin{pmatrix}A_i\\x_i\end{pmatrix}\in D_k$ містить усі елементи, розбиття яких однотипне із π_α. Розглянемо довільний $g\in S_n$. Позначимо $B_i=g(A_i)$. Тоді $|B_i|=|A_i|$. Отже, розбиття $N=\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$ – однотипні. Позначимо $b_i=g(x_i)$, $i=\overline{1,k}$. Доведемо рівність $g^{-1}\alpha g=\begin{pmatrix}B_i\\b_i\end{pmatrix}$. Справді,

$$(g^{-1}\alpha g)(B_i)=g(\alpha(g^{-1}(B_i)))=g(\alpha(A_i))=$$
$$=g(x_i)=b_i \text{ для } i=\overline{1,k}.$$

Оскільки у S містяться елементи із усіма можливими розбиттями такого ж типу, як $N=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$, то в S існує принаймні один елемент із розбиттям $N=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$. Нехай це $\beta=\begin{pmatrix}B_i\\c_i\end{pmatrix}\in S$. Із котранзитивності S випливає, що і $g^{-1}\alpha g=\begin{pmatrix}B_i\\b_i\end{pmatrix}\in S$. Отже, S є S_n-нормальною. ■

Зауваження. Котранзитивна піднапівгрупа S із T_4 (приклад 1) не містить елементів із розбиттям $\{1,4\}\bigcup\{2,3\}$, яке є однотипним із розбиттями $\{1,2\}\bigcup\{3,4\}$ та $\{1,3\}\bigcup\{2,4\}$. Вона не є S_n-нормальною, бо для $g=(2\,4)$, елемент $g^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&2\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&4&1\end{pmatrix}\notin S$. Натомість котранзитивна піднапівгрупа U із T_4 (приклад 2) містить елементи із усіма можливими розбиттям типу $1\leq 3$ і є S_n-нормальною.

Список використаних джерел

1. *R.P. Sullivan,* Ideals in transformation semigroups // Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae. – V.**19**, 3 (1978), 431-446.

2. *А. Клиффорд, Г. Престон.* Алгебраическая теория полугрупп: Пер. с англ. В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1. –283 с.

3. *I. Levi*, Congruences on normal transformation semigroups // Math. Jap. **52** (2), 2000, 247-261.

Надійшла до редколегії 29.04.2010 р.