DOC. 069/94

Mª DEL MAR ARENAS PARRA

Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA

PROGRAMACIÓN CLÁSICA Y TEORÍA DEL CONSUMIDOR

Indice

1.- Programación Matemática y Teoría Económica.

El problema básico de la ciencia económica consiste en adecuar la distribución de recursos -escasos y de usos alternativos- entre objetivos que compiten entre sí.

La Economía debe analizar la "mejor" asignación de esos bienes entre los distintos fines o metas que se quieren alcanzar; surge así un nuevo problema, el de "seleccionar el criterio" con el que llevar a cabo esta labor. Dicho criterio tiene que caracterizarse por ser "racional", entendiendo por elección racional no sólo la que se realiza de forma "coherente", sino también la "mejor" de todas ellas.

En este sentido Lange [18] establece el *principio de explotación económica racional* en sus dos vertientes:

1. El *principio del efecto mayor* o *principio de mayor rendimiento* que se cumplirá cuando con un gasto determinado se obtiene el grado máximo del objetivo asignado.
2. El *principio del gasto mínimo* o *principio de ahorro de los medios disponibles*, con el que se trata de lograr un cierto grado prefijado de realización del objetivo a partir de un gasto mínimo de medios.

La forma de utilización de los recursos conforme a este principio es "óptima" respecto al aprovechamiento de los mismos. Una actividad no óptima podría dar lugar a un consumo de los recursos de modo que no se obtenga el grado máximo de realización del objetivo perseguido o a que se consiga un nivel determinado del mismo mediante un gasto de recursos mayor de lo necesario. Ambas situaciones implican la utilización inadecuada de los medios, es decir, el "despilfarro".

La formulación matemática de esta conducta optimizadora plantea ciertos tipos de problemas de cuyo estudio se ocupa la *Teoría de la Optimización* que se define como la elección de valores de ciertas variables de tal modo que maximicen o minimicen una función sujeta a restricciones.

Muchos autores han considerado que la optimización sujeta a restricciones define la naturaleza esencial de la ciencia económica. Así, para Lange [18], la optimización constituye la teoría matemática del principio de explotación económica racional y para Robbins [17] la Economía es prácticamente una formulación del problema general de la optimización:

> **"La Economía es la ciencia que estudia el comportamiento humano como una relación entre fines y medios escasos que admiten usos alternativos".**

En términos matemáticos, cada distribución particular de los recursos viene determinada por la elección de un vector de variables de decisión; la escasez de los recursos está representada por el conjunto factible que refleja las restricciones que pesan sobre las decisiones; y la competitividad entre los fines está recogida en la función objetivo la cual indica el valor asignado a cada una de las posibles alternativas.

En el tema que presentamos, centraremos nuestra atención en aquella parte de la Teoría de la Optimización que se ocupa de los problemas estáticos deterministas con un único decisor y en los que las restricciones son del tipo de igualdad: PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA CLÁSICA CONDICIONADA.

Los programas matemáticos con restricciones de tipo igualdad forman parte, junto con los programas sin restricciones, de la denominada *Teoría clásica de la Optimización.* Especialmente importante es el papel instrumental que ha desempeñado esta teoría en el desarrollo de la microeconomía y en particular en el estudio del comportamiento del consumidor y de la empresa.

2.- Programación Clásica Condicionada.

2.1.- Introducción.

El objetivo del tema es resolver el problema general de Programación Matemática con restricciones de igualdad.

El estudio de este problema presenta tres aspectos claramente diferenciados:

1. Obtención de condiciones (teoremas de realización) bajo las cuales podemos asegurar que existe un punto que es solución del problema. Un ejemplo es el Teorema de Weierstrass que nos proporciona condiciones suficientes, pero no necesarias, de

existencia de máximos globales.

2. Búsqueda de formulaciones alternativas con el objeto de hacer más fácil la determinación del máximo o el estudio de sus propiedades.

   Como veremos, esta cuestión se aborda introduciendo la "funcion lagrangiana", que facilita el estudio del problema restringido al permitir extender conceptos análogos de los problemas libres, como son las condiciones de primer y segundo orden, que nos caracterizan los puntos óptimos.

3. Cálculo del punto de máximo. Proceso que, en la actualidad, se ha visto potenciado con la aparición de los ordenadores que han hecho posible la aplicación práctica de los algoritmos de resolución.

Trás esta breve introducción, y siguiendo las consideraciones que en ella hemos recogido, desarrollaremos el resto del tema en los siguientes epígrafes:

En primer lugar, expondremos el planteamiento matemático del problema, destacando los elementos fundamentales que intervienen en él. Presentaremos, a continuación, los distintos métodos de resolución de un programa con restricciones de igualdad, centrándonos en el "Método de Lagrange" que, si bien aumenta el número de variables del programa, es uno de los más eficaces y además aporta una valiosa información sobre el grado de sensibilidad en el óptimo de la función objetivo respecto a cambios en las constantes de restricción que, como veremos, tiene interesantes interpretaciones económicas. Finalizaremos la exposición analizando cómo el estudio realizado proporciona la base matemática a las teorías neoclásicas del consumidor y de la empresa, desarrollando, como ejemplo, la teoría de la elección del consumidor individual.

2.2.- Modelo Matemático.

FORMULACIÓN DEL PROGRAMA.

La formulación general de un programa matemático con restricciones de igualdad es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(\bar{\mathrm{x}}) \\ \text{s.a.} & \bar{\mathrm{g}}(\bar{\mathrm{x}}) = \bar{\mathrm{b}} \end{array}\right\} \quad \textbf{(II)}$$

donde:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \bar{\mathbf{g}} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\bar{\mathbf{g}} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)\,, \quad \bar{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

La función f, es la *"función objetivo"*, es decir, la descripción matemática del objetivo final del problema planteado. La variable $\bar{\mathbf{x}}$, es un vector n-dimensional a cuyas componentes les llamaremos *"instrumentos"*.

Llamaremos *"conjunto de oportunidades"* a la intersección de los conjuntos que satisfacen las restricciones y del dominio de la función objetivo. Sus puntos los llamaremos *"factibles"* o admisibles: $\mathcal{M} = \left\{ \bar{\mathbf{x}} \in D \;/\; \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{b}} \right\}$; siendo $b_1, b_2, \ldots, b_m$ las *"constantes de restricción"*.

Se supone que el número $\mathbf{m}$ de restricciones de igualdad es menor que el número $\mathbf{n}$ de instrumentos, siendo la diferencia $\mathbf{n} - \mathbf{m}$ el número de *grados de libertad* del problema. Vamos, entonces, a definir *máximo condicionado.*

Geométricamente, cada una de las restricciones de igualdad,

$$g_j(\bar{\mathbf{x}}) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

define un conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$. Económicamente, una restricción representa la limitación de los recursos disponibles propia de las actividad económica.

En el estudio de los problemas con restricciones de igualdad se aplican técnicas y conceptos del cálculo diferencial por lo que es imprescindible la noción de "localidad" aplicada al problema en estudio.

Definición 1.- Diremos que la función f posee un *máximo local sobre* $\mathcal{M}$ en un punto $\bar{\mathbf{x}}^0 \in \mathcal{M}$ si existe un entorno del punto $\bar{\mathbf{x}}^0$ en el que la función toma valores menores o iguales que $f(\bar{\mathbf{x}}^0)$ para todos los puntos factibles del mismo.

Diremos que la función f posee un *máximo global* sobre $\mathcal{M}$ en un punto $\bar{\mathbf{x}}^0 \in \mathcal{M}$ cuando

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right) \qquad \forall\, \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}$$

Si las desigualdades se verifican estrictamente, los máximos serán estrictos.

La obtención de condiciones de optimalidad global y el diseño de métodos de cálculo que permitan localizar óptimos globales sólo es posible en programas con una característica muy concreta: la *convexidad*. La convexidad de un programa implica un conjunto de propiedades de las funciones y de los conjuntos que intervienen en su formulación. La verificación de estas propiedades supone un conocimiento adicional, muy importante, del problema tratado puesto que tales propiedades garantizan que cualquier óptimo local es también global: *Teorema local-global*. Estas condiciones de convexidad del programa son especialmente importantes porque la mayoría de las funciones típicas a maximizar en Economía las satisfacen.

Por otra parte, sabemos por el Teorema de Weierstrass que, al ser la función objetivo continua y el conjunto de oportunidades cerrado, existe una solución óptima condicionada global si el conjunto de oportunidades es no vacío y acotado.

RESOLUCIÓN DEL PROGRAMA.

Conocidos los aspectos generales de un programa con restricciones de igualdad vamos a ocuparnos, en esta sección, de la resolución del mismo. Para resolver **(II)** parece natural intentar reducir el problema a otro problema de maximización no restringido. Vamos a referirnos, en primer lugar, a un método de resolución asociado directamente al hecho de la pérdida de grados de libertad de un problema restringido clásico.

Método directo de solución por eliminación de variables.

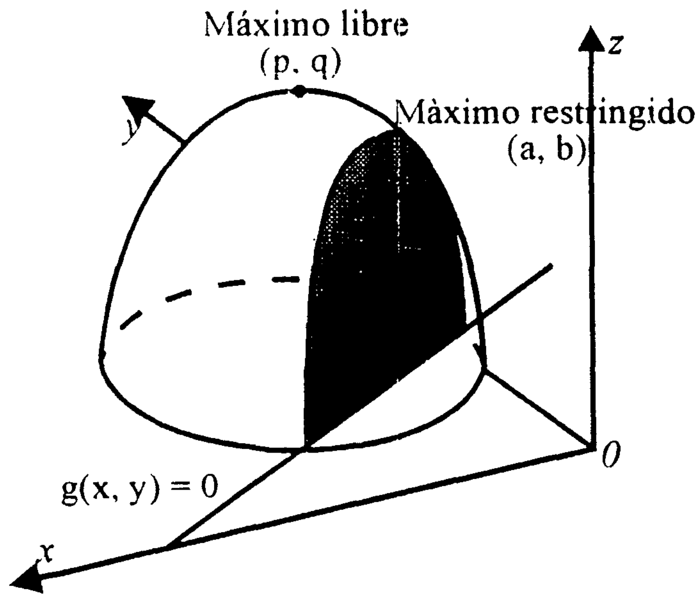
Si el jacobiano de la función $\bar{\mathbf{g}}$ tiene rango $\mathbf{m}$ en $\mathcal{M}$ y podemos despejar $\mathbf{m}$ variables en función de las $\mathbf{n}-\mathbf{m}$ restantes y sustituirlas en la función objetivo entonces **(II)** queda reducido a otro programa sin restricciones y con $\mathbf{n}-\mathbf{m}$ variables cuya resolución podemos abordar con los resultados ya conocidos.

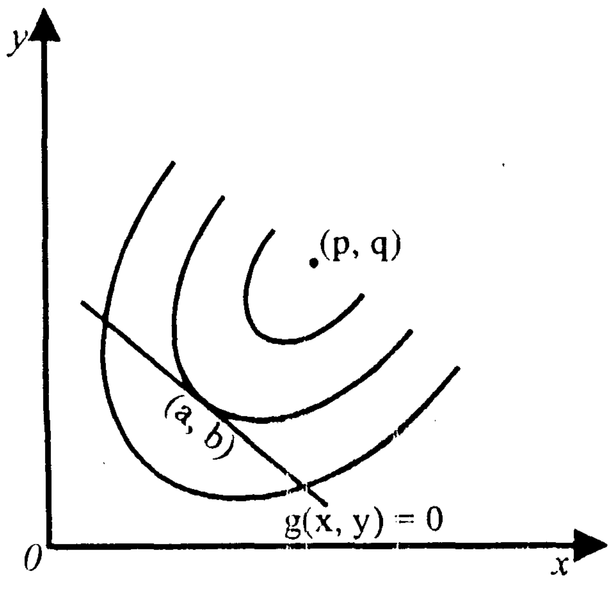
Este método de sustitución directa presenta importantes problemas respecto a la información, bien porque se pierden condiciones iniciales que aparecían implícita o explícitamente en el problema inicial o porque se generan otras que no son ciertas. Además, no puede aplicarse en muchos problemas con restricciones no lineales al no ser posible despejar las variables. Por otra parte, al calcular la solución –como se han eliminado las restricciones y se ha resuelto un problema libre– no se genera información adicional que permita valorar económicamente el efecto de la existencia de las restricciones. Por ello, si bien en ocasiones es cómodo de aplicar, estudiaremos otra alternativa mejor para resolver **(II)**.

Método gráfico de resolución.

Cuando tenemos un programa matemático con dos o tres variables de decisión, su resolución gráfica nos informa sobre la existencia o no de solución y, en caso de que ésta exista, de su localización y de si dicha solución es local o global.

El método de resolución gráfica presenta un importante problema de cara a su aplicación: la representación gráfica de las funciones que aparecen en el mismo sólo es posible para $\mathbf{n = 1, 2}$.





Cuando no es posible utilizar el método de eliminación de variables o el método gráfico podemos plantearnos la forma alternativa más "razonable" de abordar el problema. Si el sistema de ecuaciones formado por las $\mathbf{m}$ restricciones verifica el Teorema de la Función Implícita en un entorno de la solución óptima, puede realizarse una generalización del método de sustitución directa.

Método de los multiplicadores de Lagrange: LA FUNCIÓN DE LAGRANGE.

A partir del programa **(II)** construimos una función que llamaremos *función de Lagrange* como:

$$\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}},\bar{\lambda}\right) = f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) - \bar{\lambda}^t \left[\, \bar{\mathbf{g}}\left(\bar{\mathbf{x}}\right) - \bar{\mathbf{b}} \,\right]$$

donde $\bar{\mathbf{x}}$ toma valores en $\mathcal{M}$ y $\bar{\lambda}$ en $\mathbb{R}^m$. Hemos introducido $\mathbf{m}$ nuevas variables, λ_j, una por cada restricción, llamadas *multiplicadores de Lagrange* asociados a las $\mathbf{m}$ restricciones.

Obsérvese que, si $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto factible, coinciden los valores de la función objetivo y de la correspondiente función de Lagrange.

Teorema 1.- (*Teorema de Lagrange*). Sean f y $\bar{\mathbf{g}}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en D y sea $\bar{\mathbf{x}}^0$ un punto interior de D. Si el punto $\bar{\mathbf{x}}^0 \in \mathcal{M}$ es un óptimo local de f sobre el conjunto $\mathcal{M}$ y además el rango de la matriz jacobiana de la función $\bar{\mathbf{g}}$ en el punto $\bar{\mathbf{x}}^0$ es $\mathbf{m}$, entonces existen $\mathbf{m}$ únicos números $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ tales que en $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ se anula el gradiente de la función de Lagrange[1]. Es decir:

$$\bar{\mathbf{0}} = \nabla\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right) = \begin{pmatrix} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right) \\ \\ \nabla_{\bar{\lambda}}\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla f\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \nabla g_j\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right) \\ \\ -\bar{\mathbf{g}}\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right) + \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_n \\ \\ \mathbf{O}_m \end{pmatrix} \tag{1}$$

[1] $\mathcal{L}$ es de clase uno por serlo f y $\bar{\mathbf{g}}$.

Obsérvese que, si calculamos el vector gradiente de esta función y lo igualamos a cero, obtenemos el siguiente sistema de $\mathbf{n}+\mathbf{m}$ ecuaciones con $\mathbf{n}+\mathbf{m}$ incógnitas:

$$\begin{aligned} -g_j(\bar{\mathbf{x}}) + b_j &= 0 \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,m \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) &= 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{2}$$

Por tanto, si un punto $\bar{\mathbf{x}}^0$ es solución de **(II)**, es preciso que sea solución de (2) obteniéndose de esta forma sus multiplicadores de Lagrange asociados.

Las condiciones (1) que se obtienen en este teorema se conocen con el nombre de *"condiciones necesarias de primer orden de Lagrange"*. Los puntos $\bar{\mathbf{x}}^0$ que las verifican, entre los que se encuentran las soluciones de **(II)**, se denominan *"puntos críticos"* del programa.

Interpretación geométrica del Teorema de Lagrange. Consideremos un programa clásico con dos variables de decisión, (x_1, x_2), y un grado de libertad:

La restricción genera un curva en el plano $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : g(x_1,x_2) = b\}$. Sobre el mismo plano dibujaremos las curvas de nivel de la función objetivo

$$\left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1,x_2) = k\right\},\ k \in \mathbb{R}$$

Obsérvese que si $\bar{\mathbf{x}}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ un punto que cumple las condiciones necesarias de Lagrange:

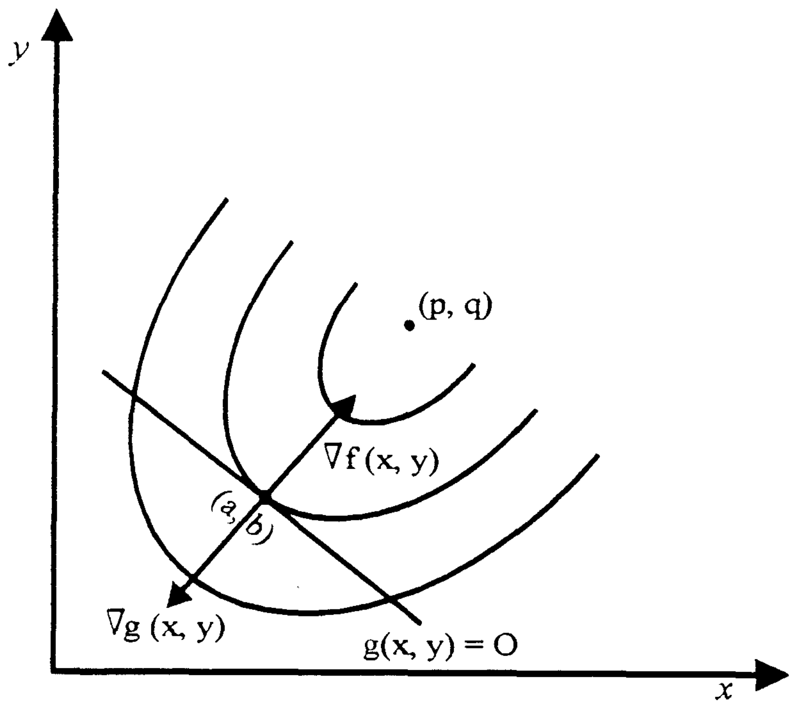
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^0,x_2^0\right) = \lambda^0 \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(x_1^0,x_2^0\right) \qquad i = 1,2$$

despejando λ^0 se cumple:

$$\lambda^0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0\right)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0\right)} \tag{3}$$

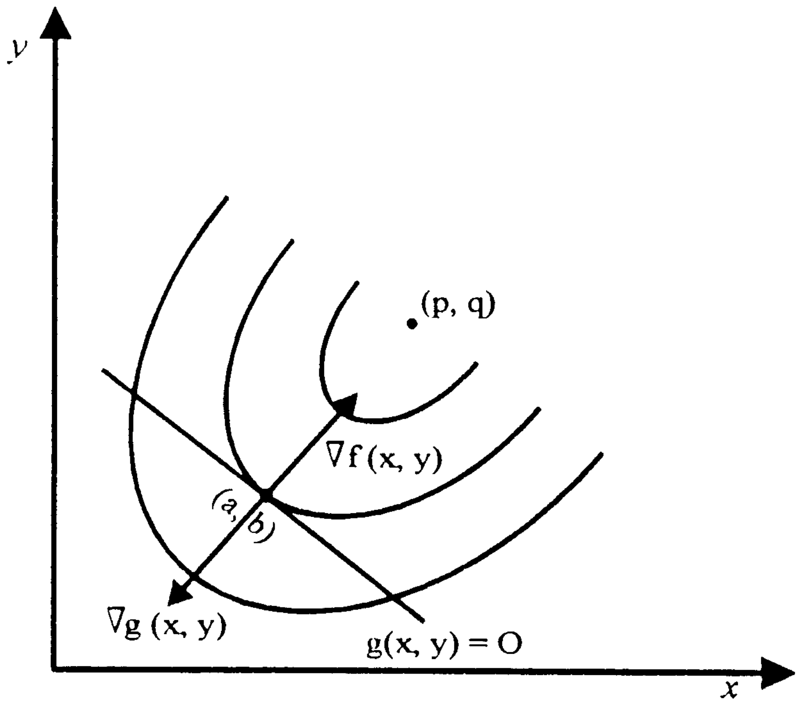
es decir, la curva de la restricción y la curva de nivel de f que pasa por el punto $\bar{\mathbf{x}}^0$ son tangentes en dicho punto, como podemos observar en el gráfico.



<u>**Condiciones suficientes de optimalidad de segundo orden.**</u>

Una vez obtenidas las condiciones necesarias para la existencia de óptimos locales restringidos, hemos de encontrar condiciones suficientes que nos permitan distinguir, entre los puntos que verifican las condiciones necesarias cuáles son óptimos y de qué tipo. Como veremos en el **Teorema 2**, estas condiciones se reducen al cálculo del signo de una forma cuadrática restringida: se exige que el hessiano de la función de Lagrange, respecto a las variables de decisión, sea definido negativo, no en cualquier punto próximo a $\bar{\mathbf{x}}^0$ sino únicamente en los puntos factibles.

es decir, la curva de la restricción y la curva de nivel de f que pasa por el punto $\bar{\mathbf{x}}^0$ son tangentes en dicho punto, como podemos observar en el gráfico.



Condiciones suficientes de optimalidad de segundo orden.

Una vez obtenidas las condiciones necesarias para la existencia de óptimos locales restringidos, hemos de encontrar condiciones suficientes que nos permitan distinguir, entre los puntos que verifican las condiciones necesarias cuáles son óptimos y de qué tipo. Como veremos en el **Teorema 2**, estas condiciones se reducen al cálculo del signo de una forma cuadrática restringida: se exige que el hessiano de la función de Lagrange, respecto a las variables de decisión, sea definido negativo, no en cualquier punto próximo a $\bar{\mathbf{x}}^0$ sino únicamente en los puntos factibles.

Necesitamos, por tanto, caracterizar los movimientos a partir del punto crítico que no cambien el valor de la función $\bar{\mathbf{g}}$, es decir, que mantengan la factibilidad.

Proposición 1.- Una condición necesaria y suficiente para que $\bar{\mathbf{g}}\left(\bar{\mathbf{x}}^0+\bar{\mathrm{h}}\right) = \bar{\mathbf{b}}$, con $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{x}}^0)=\bar{\mathbf{b}}$ y $\bar{\mathrm{h}}$ suficientemente pequeño es:

$$\mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}}\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right)\,\bar{\mathrm{h}} = \mathbf{0}$$

Teorema 2.- Sean f y $\bar{\mathbf{g}}$ funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $\bar{\mathbf{x}}^0$ un punto interior de D que satisface las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange del programa **(II)**. Una condición suficiente para que la función objetivo f posea un máximo local estricto en $\bar{\mathbf{x}}^0$ es que la forma cuadrática

$$\bar{\mathrm{h}}^t\,\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right)\,\bar{\mathrm{h}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i\partial x_j}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right)\,h_j\,h_i$$

restringida a

$$\mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}}\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right)\,\bar{\mathrm{h}} = \mathbf{0} \qquad \forall\,\bar{\mathrm{h}} \neq \bar{\mathbf{0}}$$

sea **definida negativa**, siendo $\bar{\lambda}^0$ el vector de los multiplicadores de Lagrange asociado a $\bar{\mathbf{x}}^0$ y $\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right)$ la submatriz de la matriz hessiana de $\mathcal{L}$ que corresponde a las derivadas parciales segundas respecto a las variables de decisión.

Las condiciones suficientes de optimalidad local plantean el problema de la obtención del signo de una forma cuadrática sujeta a un sistema de restricciones lineales. Con la aplicación de lo estudiado acerca de formas cuadráticas restringidas, en el programa de Algebra Lineal, se resuelve el problema en términos de los signos de los menores principales de la hessiana orlada o bien de forma directa mediante el cálculo de los valores propios.

Proposición 2.- En las condiciones del **Teorema 2** son equivalentes:

1) $\forall\,\bar{\mathrm{h}} \neq \bar{\mathbf{0}}$, $\bar{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}}(\bar{\mathbf{x}}^0)\;\bar{\mathrm{h}} = 0$ se verifica

$$\bar{\mathrm{h}}^t\,\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\mathcal{L}\left(\bar{\mathbf{x}}^0,\bar{\lambda}^0\right)\,\bar{\mathrm{h}} < 0$$

2) Los últimos $\mathbf{n-m}$ menores principales de la matriz hessiana orlada:

$$\widehat{H} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0_m} & \mathcal{J}_{\bar{g}} \\ \hline \mathcal{J}_{\bar{g}}^t & \mathcal{H}_{\bar{x}}\,\mathcal{L} \end{array}\right)$$

son de signos alternos, siendo el signo del primero $(-1)^{m+1}$.

3) Si las raíces de

$$\begin{vmatrix} \mathcal{H}_{\bar{x}}\,\mathcal{L} - \lambda\,\mathbf{I} & \mathcal{J}_{\bar{g}}^t \\ \mathcal{J}_{\bar{g}} & \mathbf{O}_m \end{vmatrix} = 0$$

son negativas.

Tanto las condiciones necesarias de Lagrange como las que acabamos de obtener se apoyan en el cálculo diferencial por lo que, como ya habíamos comentado al principio, son condiciones de optimalidad local, que en los casos de existencia de óptimo global, nos conducirían a la localización del mismo a partir del análisis de todos los óptimos locales obtenidos tras la aplicación de estas condiciones y de los posibles óptimos de frontera. Si estamos interesados en localizar óptimos globales directamente e hipótesis bajo la cuales sean suficientes las condiciones necesarias, necesitamos que el programa sea convexo.

Condiciones de optimalidad en programas convexos.

Teorema 3.- Sean f, $\bar{g}$ y $\bar{x}^0$ como en el **Teorema 1**. Supongamos además que f es una función cóncava en D y $\mathcal{M} = \left\{\bar{x} \in D \;/\; \bar{g}\,(\bar{x}) = \bar{b}\right\}$ es un conjunto convexo. Entonces $\bar{x}^0$ es solución de **(II)** si y sólo si $\bar{x}^0$ satisface las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange.

La condición necesaria de este teorema es evidente a partir del Teorema de Lagrange por lo que nos faltará probar que también es suficiente:

Por ser $\mathcal{M}$ convexo sabemos que

$$\forall\, t \in [0,1],\;\; \forall\,\bar{h} \in I\!R^n \;\; \forall\;\bar{x}^0 \in \mathcal{M} \quad \text{tal que} \quad \bar{x}^0 + \bar{h} \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}^0 + t\bar{h} \in \mathcal{M}$$

y por tanto,

$$g_j(\bar{x}^0 + t\,\bar{h}) = g_j(\bar{x}^0) = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

luego

$$\nabla g_j(\bar{x}^0)\,\bar{h} = D_{\bar{h}}\, g_j(\bar{x}^0) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

Finalmente, por ser f cóncava, por las condiciones necesarias de Lagrange y por (4), tendremos

$$f(\bar{x}^0 + \bar{h}) - f(\bar{x}^0) \le \nabla f(\bar{x}^0)\,\bar{h} = \bar{\lambda}^0\, \nabla \bar{g}(\bar{x}^0)\,\bar{h} = 0 \qquad \forall\, \bar{h}\ :\ \bar{x}^0 + \bar{h} \in \mathcal{M}$$

esto es, $\bar{x}^0$ es un máximo global de f sobre $\mathcal{M}$.

Por tanto, para programas convexos, la condición necesaria de optimalidad local se convierte en una condición necesaria y suficiente de optimalidad global.

El método de los multiplicadores de Lagrange, además de resolver el problema de optimización clásica, proporciona un análisis de post-óptimo que nos permite estudiar, a través del valor de cada uno de los multiplicadores, el grado de sensibilidad, en el óptimo, de la función objetivo frente a cambios en la constante de la restricción correspondiente; este análisis de sensibilidad tiene gran importancia en el contexto económico.

3.- Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange.

En los problemas económicos de optimización, las funciones que aparecen dependen de ciertos parámetros (precios, niveles de realización, etc.) que se mantienen constantes durante el proceso de optimización pero que cambiarán dependiendo de la situación económica. Surge entonces una importante cuestión: *¿Qué sucede con la solución óptima si la situación económica cambia?*, para responder a esta pregunta vamos a analizar que ocurriría si suponemos que las constantes de las restricciones son parámetros variables. Tratamos de encontrar una medida de la variación inducida en la solución del programa **(II)** debida a cambios de los valores de b_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Consideremos el programa **(II)** y supongamos que, aplicando las condiciones necesarias y suficientes a la función de Lagrange, obtenemos que el punto $\bar{x}^0$ es solución óptima de dicho programa. En general, $\bar{\mathbf{x}}^0$ dependerá de los valores de $b_1, b_2, \ldots, b_m$; se puede demostrar aplicando el teorema de la función implícita al sistema:

$$\begin{cases} \Gamma_j\left(\bar{\mathbf{b}}, \bar{\lambda}, \bar{\mathbf{x}}\right) = g_j(\bar{\mathbf{x}}) - b_j = 0 & j = 1, 2, \ldots, m \\ \Gamma_{m+i}\left(\bar{\mathbf{b}}, \bar{\lambda}, \bar{\mathbf{x}}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

que $\bar{\mathbf{x}}^0$ y $\bar{\lambda}^0$ se pueden expresar como funciones diferenciables de $\bar{\mathbf{b}}$ en un entorno del punto óptimo:

$$\bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)$$

$$\bar{\lambda}^0 = \bar{\lambda}^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)$$

entonces los valores de la función objetivo y de los multiplicadores de Lagrange asociados a $\bar{\mathbf{x}}^0$ también dependerán de $\bar{\mathbf{b}}$:

$$f\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right) = f\left(\bar{\mathbf{x}}^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)\right) = f^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right) \tag{5}$$

donde f^0 es la función objetivo indirecta.

Si derivamos[2] (5), respecto a b_k, $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\frac{\partial f^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(\mathbf{x}^0(\mathbf{b})\right)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)}{\partial b_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{6}$$

Por las condiciones necesarias de Lagrange en $\bar{\mathbf{x}}^0$ y teniendo en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j\left(\bar{\mathbf{x}}^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)\right)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)}{\partial b_k} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial f^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)}{\partial b_k} = \frac{\partial f\left(\bar{\mathbf{x}}^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)\right)}{\partial b_k} = \lambda_k^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{7}$$

[2] Como f y $\bar{\mathbf{x}}^0\left(\bar{\mathbf{b}}\right)$ son funciones diferenciables podemos aplicar la derivación de la función compuesta: la regla de la cadena.

que nos indica que los multiplicadores de Lagrange miden la sensibilidad de la función objetivo en el óptimo respecto a las variaciones en las constantes de las restricciones.

Observación: Para llegar a este resultado ha sido necesario suponer que $\bar{\mathbf{x}}^0$ cumplía las condiciones suficientes de Lagrange, es decir, la matriz orlada

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}} \\ \hline \mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}}^t & \mathcal{H}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\mathcal{L} \end{array}\right)$$

es una matriz regular en el punto crítico $\left(\bar{\mathbf{x}}^0, \bar{\lambda}^0\right)$ y con esto se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Esto no siempre es así, ya que las condiciones suficientes no son necesarias y puede haber óptimos que no las cumplan.

A menudo, en los problemas económicos, las restricciones nos expresan limitaciones en las cantidades de los recursos disponibles para su utilización y la función objetivo representa beneficios, costes, ..., por lo que suele venir definida a partir de precios o costes unitarios multiplicados por cantidades; esto justifica que al multiplicador de Lagrange, λ_j, asociado a la j-ésima restricción se le denomine *precio sombra* o *valor marginal* asociado a una unidad de ese recurso ya que, al medir la variación del valor de la función objetivo (precio x cantidad) respecto a la constante b_j (cantidad), tiene dimensión de precio (pseudo-precio).

Evidentemente no se trata de precios de mercado, sino de precios de oportunidad para el sistema que utiliza estos recursos limitados, en el sentido de que no reflejan lo que cuestan tales recursos sino lo que "valen". Si los precios de mercado son superiores a estos precios, no resulta interesante añadir más cantidad del recurso analizado al proceso productivo, puesto que lo que obtendríamos de su utilización óptima no compensaría el coste adicional en el que incurriríamos.

A partir de esta interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange, se obtiene que las condiciones necesarias de optimalidad:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \frac{\partial g_j\left(\bar{\mathbf{x}}^0\right)}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

no son más que la exigencia de que, en un máximo condicionado, el "beneficio marginal" de cada una de las "actividades" sea igual al "costo marginal" atribuido a esa actividad.

4.- Programa dual.

Llamaremos al programa **(II)**, consistente en maximizar la función objetivo sometida a ciertas restricciones, **problema primal**. Este planteamiento correspondería al principio de mayor rendimiento. Si nos apoyamos en el principio de gasto mínimo o de ahorro de los medios disponibles, podemos plantear este problema como el de minimizar la suma de las restricciones para obtener un valor dado de la función objetivo, que ahora actuará como restricción. A este nuevo programa lo llamaremos **programa dual de (II)** y tendrá la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & u\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[g_j\left(\bar{\mathbf{x}}\right) - b_j\right] \\ \text{sujeto a} & f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) = z_0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(IV)}$$

Las restricciones representan, como ya hemos mencionado, cantidades de recursos o medios, por lo que vendrán expresadas en distintas unidades y, en principio, no es posible realizar una suma de las mismas; es necesario introducir un "peso" asociado a cada restricción que las unifique respecto a las unidades para poder sumarlas. Utilizaremos para ello los multiplicadores de Lagrange que, como hemos visto, ponderan la importancia de las restricciones en el programa y tienen dimensión de precios.

La función $u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$ "mide", en cierto modo, la cantidad total de los gastos de medios, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, necesarios para alcanzar un cierto grado de realización de la función objetivo, f, de ahí que la denominemos *función de gasto de medios.*

Está claro que ambos problemas, primal y dual, son las dos variantes del *principio de explotación económica racional* [18] para un mismo programa clásico condicionado. Por lo tanto podemos afirmar que:

> **"maximizar la función objetivo para un determinado gasto de medios, expresada por las restricciones, es equivalente a minimizar la función de gasto de medios para un nivel determinado de realización de la función objetivo".**

Examinando la función de gasto de medios se observa que ésta es nula para los puntos del conjunto factible de (II). Sólo en el caso de que no se cumplan las restricciones la función u es no nula.

Si $g_j(\bar{\mathbf{x}}) - b_j > 0$ diremos que el límite de disponibilidad del recurso j-ésimo se ha rebasado; el multiplicador λ_j imparte un peso determinado a este rebasamiento. Así, la función u es la suma ponderada del rebasamiento de los límites de disponibilidades de los recursos, siendo los multiplicadores de Lagrange los coeficientes de ponderación correspondientes al rebasamiento de los distintos límites.

Si u es positiva, nos indica la utilización no óptima de los recursos y, por tanto, podemos interpretarla como la medida del *"despilfarro"* que se produce por alcanzar el mínimo fuera de la región factible $\mathcal{M}$.

5.- Aplicación económica: LA TEORÍA DEL CONSUMIDOR.

De entre las aplicaciones de la Programación Clásica nos centraremos en la teoría de la conducta del consumidor. Se supone que todo consumidor, bajo las hipótesis de racionalidad habituales, intentará maximizar su utilidad dentro de sus posibilidades presupuestarias. Un desarrollo análogo se podría hacer para la teoría de la producción donde el empresario pretende maximizar su beneficio condicionado por las restricciones técnicas impuestas por su función de producción.

Vamos a analizar la modelización de la elección del consumidor individual enfrentado a una serie de bienes y que dispone de una renta monetaria determinada para gastar en su adquisición. Esta elección se estudiará en términos de un marco institucional específico en el que las acciones del consumidor no afectan a los precios del sistema que constituyen, para él, datos.

Supondremos además que el consumidor tiene libertad plena para adquirir las cantidades que desee de los bienes y que no existen costes de transacción[3].

[3] La no existencia de costes de transacción implica una simplificación de la restricción presupuestaria que será un hiperplano al no existir ni descuentos por cantidades, ni costes por elegir entre distintas calidades, etc.

La función de utilidad.

El punto de partida en la formulación del problema de la elección del consumidor es el postulado de su *racionalidad*: se supone que el consumidor escoge, entre todas las alternativas de consumo posibles, aquella que le proporciona la máxima satisfacción. Toda la información relativa a la satisfacción que el consumidor obtiene de las diferentes cantidades de bienes por él consumidos se halla recogida en su *función de utilidad*[4].

Sea $\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la función de utilidad de un consumidor que consume n artículos, siendo $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ el vector de las cantidades consumidas de los n bienes.

Supondremos que:

1. $\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}^0) > \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}^1)$ si y sólo si $\bar{\mathbf{x}}^0$ es estrictamente más deseable para el consumidor que $\bar{\mathbf{x}}^1$. $\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}^0) = \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}^1)$ si y sólo si $\bar{\mathbf{x}}^0$ y $\bar{\mathbf{x}}^1$ son indiferentes, es decir, igualmente deseables para el consumidor.
2. $\mathcal{U} \in \mathcal{C}^2$,
3. Un aumento en x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ incrementará el valor de la función de utilidad[5]: $\mathcal{U}$ es monótona creciente respecto a cada una de sus variables.
4. $\mathcal{U}$ es estrictamente cóncava[6]. De esta forma los conjuntos $\{\bar{\mathbf{x}} / \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}^0)\}$ son convexos.

Las propiedades de la función de utilidad reflejan que se trata de un indicador ordinal del grado de satisfacción que al consumidor le reportan las distintas combinaciones

[4]Hay infinitas funciones de utilidad, lo único que se precisa es una representación de las preferencias que preserve el orden de las mismas; el análisis del comportamiento del consumidor no se ve afectado por la función de utilidad elegida.

[5]El consumidor no se sacia con ningún artículo, por tanto, las utilidades marginales son positivas sobre el dominio, sobreentendiéndose que sus magnitudes no tienen sentido, sólo sus signos.

[6]Bastaría con que $\mathcal{U}$ fuese estrictamente cuasicóncava, es decir, que cumpliese:

$$\mathcal{U}(\lambda \bar{\mathbf{x}}_1 + (1-\lambda)\bar{\mathbf{x}}_2) > \min(\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}_1), \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}_2)), \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

de bienes. Las propiedades **3.-** y **4.-** implican que las curvas de indiferencia del consumidor son estrictamente convexas[7]. Supondremos también, que estas curvas no tocan a los ejes de coordenadas; de esta forma evitaremos que la cantidad empleada de uno de los bienes sea nula.

Equilibrio del consumidor.

El consumidor busca aquella combinación $\bar{\mathbf{x}}^0$ de bienes con la que obtenga el nivel de satisfacción más alto: su problema es, pues, de maximización condicionado al gasto de la renta disponible. Si

$$\bar{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ tal que } p_i > 0 \; \forall \, i = 1, 2, \dots, n$$

es el vector de precios de los bienes e y la renta del consumidor. Para unos valores dados $\bar{\mathbf{p}}^0$ e y^0, el problema será:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \text{s.a.} & \bar{\mathbf{p}}^0 \, \bar{\mathbf{x}} = y^0 \end{array}\right\} \quad (\mathbf{V})$$

cuya función auxiliar de Lagrange es:

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) = \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda \left(\bar{\mathbf{p}}^0 \bar{\mathbf{x}} - y^0\right) \tag{8}$$

siendo λ el multiplicador de Lagrange. Las condiciones necesarias del problema **(V)** son:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{U}_i(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda p_i^0 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ -\bar{\mathbf{p}}^0 \, \bar{\mathbf{x}} + y^0 = 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

sistema de $\mathbf{n+1}$ ecuaciones con $\mathbf{n+1}$ incógnitas que nos permiten despejar los valores de equilibrio de $\bar{\mathbf{x}}$ y λ.

Las ecuaciones (9) son las *condiciones de equilibrio del consumidor* de las que se obtienen

$$\lambda^0 = \frac{\mathcal{U}_i(\bar{\mathbf{x}}^0)}{p_i^0} = \frac{\mathcal{U}_j(\bar{\mathbf{x}}^0)}{p_j^0} \qquad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{10}$$

[7]Principio de relación marginal de sustitución decreciente, lo que significa que las cantidades en que hay que disminuir $\mathbf{X_i}$ ante aumentos iguales y sucesivos de $\mathbf{X_j}$ son cada vez menores para mantener el mismo nivel de utilidad.

o bien

$$\frac{\mathcal{U}_j\left(\bar{\mathrm{x}}^0\right)}{\mathcal{U}_i\left(\bar{\mathrm{x}}^0\right)} = \frac{p_j^0}{p_i^0} = \mathrm{RSM}_j^i\left(\bar{\mathrm{x}}^0\right) \tag{11}$$

$\mathrm{RSM}_j^i\left(\bar{\mathrm{x}}^0\right)$ es la relación marginal de sustitución entre los bienes i-ésimo y j-ésimo en el punto de equilibrio.

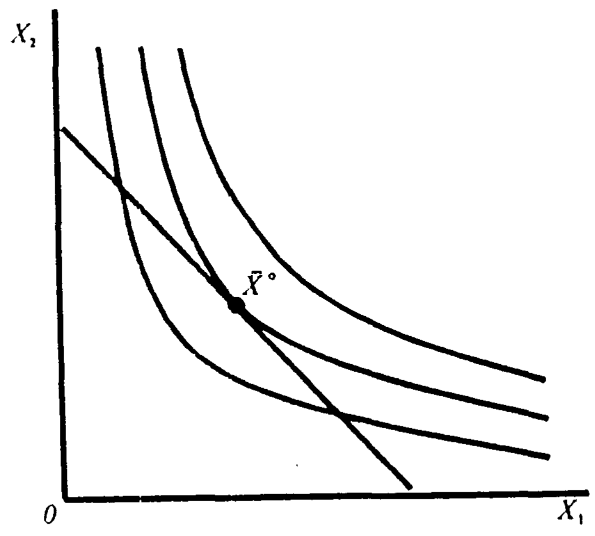
La expresión (10) se conoce, en Microeconomía, con el nombre de *"ley de la igualdad de utilidades marginales ponderadas"* y nos dice que, en el equilibrio, la aportación que a la utilidad total hace la última unidad monetaria gastada en la adquisición de un bien debe ser igual para todos ellos. Esto es evidente ya que, si el consumidor pudiese obtener mayor satisfacción gastando una unidad monetaria adicional en un bien $\mathbf{X_i}$ en vez de en $\mathbf{X_j}$, no estaría maximizando su utilidad. Podría aumentar su satisfacción trasladando parte de su gasto de $\mathbf{X_j}$ a $\mathbf{X_i}$.

La (11) nos indica que, en el equilibrio, la relación de intercambio subjetiva entre dos bienes, es decir, la *relación marginal de sustitución* entre $\mathbf{X_i}$ y $\mathbf{X_j}$, debe igualarse a la relación real de intercambio determinada por el cociente entre los precios.

En el caso de dos bienes $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$ podríamos representar gráficamente las curvas de indiferencia del consumidor (curvas de nivel de la función de utilidad, $\mathcal{U}(x_1, x_2)$) y la recta presupuestaria $p_1x_1 + p_2x_2 = y^0$. La relación [11] nos indica la igualdad en el óptimo de las pendientes de ambas:

$$-\frac{dx_i}{dx_j} = -RMS_j^i = -\frac{p_j}{p_i}$$

es decir, su tangencia.



Puesto que p_i es proporcional a $\mathcal{U}_i$, en el equilibrio, las condiciones suficientes son:

$$d^2\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{ij} h_i h_j < 0$$

sujeto a:

$$du = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \, h_i = 0 \quad \bar{\mathrm{h}} \neq 0, \ \bar{\mathrm{h}} \in I\!R^n$$

Vamos a analizar algunas propiedades que se obtienen a partir del equilibrio obtenido:

Propiedad 1.- Aplicando la interpretación del multiplicador de Lagrange sabemos que el multiplicador de Lagrange representa la *"utilidad marginal de la renta"*.

$$\frac{\partial\, \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}})}{\partial y} = \lambda$$

Propiedad 2.- Las cantidades demandadas de cada bien y el multiplicador de Lagrange son funciones de los precios y de la renta monetaria en el óptimo.

Consideremos los precios y la renta como variables exógenas y $\bar{\mathbf{x}}$ y $\bar{\lambda}$ como variables endógenas del modelo. Fijando los valores de las variables exógenas $\bar{\mathbf{p}}^0$ e y^0 en el máximo local $\bar{\mathbf{x}}^0$ expresaremos las condiciones de equilibrio como:

$$\begin{aligned} \psi^i(\bar{\mathbf{x}}^0, \lambda^0, \bar{\mathbf{p}}^0, y^0) &= \mathcal{U}_i(\bar{\mathbf{x}}^0) - \lambda^0 \bar{\mathbf{p}}^0 = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \psi^{n+1}(\bar{\mathbf{x}}^0, \lambda^0, \bar{\mathbf{p}}^0, y^0) &= -\sum_{i}^{n} p_i^0 x_i^0 + y^0 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Sabiendo que $\bar{\mathbf{x}}^0$ satisface las condiciones suficientes (Teorema 2) de las que se deduce la regularidad del jacobiano relevante para aplicar el Teorema de las Funciones Implícitas al sistema (12) en un entorno del punto $(\bar{\mathbf{x}}^0, \lambda^0, \bar{\mathbf{p}}^0, y^0)$ tendremos que:

Existe un entorno (n+1)-dimensional $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{p}}^0, y^0)$ y un conjunto de funciones diferenciables definidas sobre $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{p}}^0, y^0)$ tal que

$$\mathrm{x_i} = \mathrm{x_i}(\bar{\mathbf{p}}, y) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lambda = \lambda(\bar{\mathbf{p}}, y)$$

Las ecuaciones $\mathbf{x_i} = \mathbf{x_i}(\bar{\mathbf{p}}, y)$ son las *funciones de demanda del consumidor* (marshallianas) que nos indican la cantidad de un bien que éste comprará en función de los precios de todos los bienes y de su renta.

Las funciones de demanda son homogéneas de grado cero en $(\bar{\mathbf{p}}, y)$; si consideramos nuevos precios y renta monetaria:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\mathbf{p}}^* = k\bar{\mathbf{p}} \\ y^* = ky^0 \end{array}\right\} (k > 0)$$

como la restricción presupuestaria es la misma, las condiciones de equilibrio no resultan alteradas, siendo $\lambda^* = k\lambda^0$. Por tanto, si todos los precios y la renta varían en la misma proporción, las cantidades demandas permanecen invariables.

La dualidad en el consumo.

El equilibrio del consumidor se ha planteado como el resultado de la maximización de la función de utilidad, $\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}})$ sometida a la restricción de balance. Si fijamos a priori un determinado nivel de utilidad, $\mathcal{U}^0$, podemos plantearnos el problema dual, es decir, cuál será el gasto mínimo en que se habrá de incurrir para alcanzar ese nivel de utilidad. Este nuevo problema puede formularse como:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \bar{\mathbf{p}}^0\bar{\mathbf{x}} \\ \\ \text{sujeto a} \quad \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{U}^0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(VI)}$$

cuya función auxiliar de Lagrange es:

$$\widehat{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{x}}, \widehat{\lambda}) = \bar{\mathbf{p}}^0\bar{\mathbf{x}} - \widehat{\lambda}(\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathcal{U}^0)$$

y condiciones de primer orden son:

$$\begin{array}{l} p_i^0 - \widehat{\lambda}\mathcal{U}_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \\ \mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{U}^0 \end{array} \tag{13}$$

de donde se obtienen las condiciones (10), es decir, la ley de la igualdad de las utilidades marginales ponderadas.

Igual que en el problema primal, de las condiciones de optimalidad del dual se desprende que existirán funciones de demanda (hicksianas) del tipo:

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{p}}, \mathcal{U}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

no observables, que nos indican las cantidades de bienes que se demandarán para alcanzar un nivel de satisfacción determinado a unos precios dados de forma que el gasto sea mínimo. Si en (14) consideramos que el coste de adquisición es la renta que el consumidor ha de tener para poder acceder a dicha combinación de bienes, está claro que (14) mide los efectos de una variación compensada de los precios o el efecto de sustitución cruzado. Esta es la razón por la que se llama *función de demanda compensada.* Al igual que en el caso primal, resulta evidente que las funciones de demanda compensada son homogéneas de grado cero respecto a los precios.

De todo lo anterior se deduce fácilmente que primal y dual utilizan la misma combinación de bienes para obtener sus respectivos óptimos, $\mathcal{U}^0$ e y^0, siempre que las relaciones sean las adecuadas, es decir, si para unos precios y rentas dados $(\bar{\mathbf{p}}^0, y^0)$ el nivel de utilidad máxima alcanzable en el primal es $\mathcal{U}(\bar{\mathbf{x}}^0) = \mathcal{U}^0$ y para los mismos precios y un nivel de utilidad $\mathcal{U}^0$, el gasto mínimo en que se incurre en el dual es y^0.

Bibliografía

[1] ALLEN, R. (1967): *Economía Matemática.* Aguilar, Madrid.

[2] BALBAS, A.; GIL, J. A. (1987): *Programación Matemática.* Editorial AC, Madrid.

[3] BARBOLLA, R.; CERDÁ, E. SANZ, P. (1991): *Optimización Matemática: teoría, ejemplos y contraejemplos.* Espasa Calpe, Madrid.

[4] BENAVIE, A. (1973): *Técnicas Matemáticas del Análisis Económico.* Prentice-Hall, Madrid.

[5] BORRELL FONTELLES, J. (1982): *Métodos Matemáticos para la Economía: Programación Matemática.* Pirámide, Madrid.

[6] BRENNAN, M. J. (1974): *Teoría de la Economía Estática.* Prentice-Hall, New Jersey.

[7] CABALLERO, R. Y OTROS (1991): *Seminario de Optimización Estática y Dinámica en Economía.* Edinford S.A., Málaga.

[8] CABALLERO, R. Y OTROS (1992): *Métodos Matemáticos para la Economía.* MacGraw-Hill, Madrid.

[9] COLIN GLASS, J. (1982): *Métodos Matemáticos para Economistas.* McGraw-Hill, Bogotá.

[10] COSTA REPARAZ, E. (1989): *Matemáticas para Economistas.* Pirámide, Madrid.

[11] CHIANG, A. (1977): *Métodos fundamentales de Economía Matemática.* Amorrortu editores, Buenos Aires.

[12] GARCÍA GÜEMES, A. (1992):*Matemáticas aplicadas a la Empresa.* Editorial AC, Madrid.

[13] HENDERSON, J. M.; QUANT, R. E. (1978): *Teoría Microeconómica.* Ariel, Barcelona.

[14] HERAS, A.; GUTIERREZ, S. Y OTROS (1990): *Programación Matemática y Modelos Económicos: un enfoque teórico-práctico.* Editorial AC, Madrid.

[15] INTRILLIGATOR, M. D. (1973): *Optimización Matemática y Teoría Económica.* Prentice-Hall, Madrid.

[16] LAMBERT, P. J. (1992): *Advanced Muthematics for Economists: Static and Dynamic Optimization.* Blackwell, Oxford.

[17] LANCASTER, K. (1972): *Economía Matemática.* Bosch, Barcelona.

[18] LANGE, O. (1971): *Teoría General de la Programación.* Colección Demos. Ariel, Barcelona.

[19] NIKAIDO, H. (1978): *Métodos Matemáticos del Análisis Económico Moderno.* Vicens Vives, Barcelona.

[20] RAO, S. S. (1984): *Optimization: Theory and Applications.* Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[21] RÍOS INSUA, S. (1990): *Investigación Operativa. Optimización.* Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

[22] SEGURA, J. (1986): *Análisis Microeconómico.* Alianza Universidad Textos, Madrid.

[23] SYDSAETER, K. (1981): *Mathematical Analysis for Economics.* Academic-Press, Londrés.

[24] VILLALVA VILA, D.; JERÉZ MÉNDEZ, M. (1990): *Sistemas de optimización para la planificación y toma de decisiones.* Pirámide, Madrid.

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
RELACIÓN DE DOCUMENTOS DE TRABAJO:

Doc. 001/1988 ***JUAN A. VAZQUEZ GARCIA***.- *Las intervenciones estatales en la minería del carbón.*

Doc. 002/1988 ***CARLOS MONASTERIO ESCUDERO***.- *Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.*

Doc. 003/1988 ***ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA***.- *Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.*

Doc. 004/1988 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *Una propuesta para la integración multijurisdiccional.*

Doc. 005/1989 ***LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO***.- *La modernización del sector agrario en la provincia de León.*

Doc. 006/1989 ***JOSE MANUEL PRADO LORENZO***.- *El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.*

Doc. 007/1989 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).*

Doc. 008/1989 ***FELIX LOBO ALEU***.- *El gasto público en productos industriales para la salud.*

Doc. 009/1989 ***FELIX LOBO ALEU***.- *La evolución de las patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.*

Doc. 010/1990 ***RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES***.- *Investigación de las preferencias del cosnumidor mediante análisis de conjunto.*

Doc. 011/1990 ***ANTONIO APARICIO PEREZ***.- *Infracciones y sanciones en materia tributaria.*

Doc. 012/1990 ***MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA***.- *Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.*

Doc. 013/1990 ***EQUIPO MECO***.- *Medidas de desigualdad: un estudio analítico*

Doc. 014/1990 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *Una estimación de las necesidades de gastos para los municipios de menor dimensión.*

Doc. 015/1990 ***ANTONIO MARTINEZ ARIAS***.- *Auditoría de la información financiera.*

Doc. 016/1990 ***MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ***.- *La población como variable endógena*

Doc. 017/1990 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *La redistribución local en los países de nuestro entorno.*

Doc. 018/1990 ***RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO***.- *"Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.*

Doc. 019/1990 ***RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ***.- *La política de precios en los establecimientos detallistas.*

Doc. 020/1990 ***CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ***.- *La demarcación de la economía (seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).*

Doc. 021/1990 ***JOAQUIN LORENCES***.- *Margen precio-coste variable medio y poder de monopolio.*

Doc. 022/1990 ***MANUEL LAFUENTE ROBLEDO; ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ***.- *El T.A.E. de las operaciones bancarias.*

Doc. 023/1990 ***ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ***.- *Amortización y coste de préstamos con hojas de cálculo.*

Doc. 024/1990 ***LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JEAN-MARC BUIGUES***.- *Un ejemplo de política municipal: precios y salarios en la ciudad de León (1613-1813).*

Doc. 025/1990 ***MYRIAM GARCIA OLALLA***.- *Utilidad de la teorías de las opciones para la administración financiera de la empresa.*

Doc. 026/1991 ***JOAQUIN GARCIA MURCIA***.- *Novedades de la legislación laboral (octubre 1990 - enero 1991)*

Doc. 027/1991 ***CANDIDO PAÑEDA***.- *Agricultura familiar y mantenimiento del empleo: el caso de Asturias.*

Doc. 028/1991 ***PILAR SAENZ DE JUBERA***.- *La fiscalidad de planes y fondos de pensiones.*

Doc. 029/1991 ***ESTEBAN FERNANDEZ SANCHEZ***.- *La cooperación empresarial: concepto y tipología (*)*

Doc. 030/1991 ***JOAQUIN LORENCES***.- *Características de la población parada en el mercado de trabajo asturiano.*

Doc. 031/1991 ***JOAQUIN LORENCES***.- *Características de la población activa en Asturias.*

Doc. 032/1991 ***CARMEN BENAVIDES GONZALEZ***.- *Política económica regional*

Doc. 033/1991 ***BENITO ARRUÑADA SANCHEZ***.- *La conversión coactiva de acciones comunes en acciones sin voto para lograr el control de las sociedades anónimas: De cómo la ingenuidad legal prefigura el fraude.*

Doc. 034/1991 ***BENITO ARRUÑADA SANCHEZ***.- *Restricciones institucionales y posibilidades estratégicas.*

Doc. 035/1991 ***NURIA BOSCH; JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *Seven Hypotheses About Public Chjoice and Local Spending. (A test for Spanish municipalities).*

Doc. 036/1991 ***CARMEN FERNANDEZ CUERVO; LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ***.- *De una olvidada revisión crítica sobre algunas fuentes histórico-económicas: las ordenanzas de la gobernación de la cabrera.*

Doc. 037/1991 ***ANA JESUS LOPEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ***.- *Indicadores de desigualdad y pobreza. Nuevas alternativas.*

Doc. 038/1991 ***JUAN A. VAZQUEZ GARCIA; MANUEL HERNANDEZ MUÑIZ***.- *La industria asturiana: ¿Podemos pasar la página del declive?.*

Doc. 039/1992 ***INES RUBIN FERNANDEZ***.- *La Contabilidad de la Empresa y la Contabilidad Nacional.*

Doc. 040/1992 ***ESTEBAN GARCIA CANAL***.- *La Cooperación interempresarial en España: Características de los acuerdos de cooperación suscritos entre 1986 y 1989.*

Doc. 041/1992	**ESTEBAN GARCIA CANAL.**- *Tendencias empíricas en la conclusión de acuerdos de cooperación.*
Doc. 042/1992	**JOAQUIN GARCIA MURCIA.**- *Novedades en la Legislación Laboral.*
Doc. 043/1992	**RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.**- *El comportamiento del consumidor y la estrategia de distribución comercial: Una aplicación empírica al mercado de Asturias.*
Doc. 044/1992	**CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.**- *Un marco teórico para el estudio de las fusiones empresariales.*
Doc. 045/1992	**CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.**- *Creación de valor en las fusiones empresariales a través de un mayor poder de mercado.*
Doc. 046/1992	**ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.**- *Influencia relativa de la evolución demográfica en le futuro aumento del gasto en pensiones de jubilación.*
Doc. 047/1992	**ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.**- *Aspectos demográficos del sistema de pensiones de jubilación español.*
Doc. 048/1992	**SUSANA LOPEZ ARES.**- *Marketing telefónico: concepto y aplicaciones.*
Doc. 049/1992	**CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.**- *Las influencias familiares en el desempleo juvenil.*
Doc. 050/1992	**CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.**- *La adquisición de capital humano: un modelo teórico y su contrastación.*
Doc. 051/1992	**MARTA IBAÑEZ PASCUAL.**- *El orígen social y la inserción laboral.*
Doc. 052/1992	**JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.**- *Estudio del sector comercial en la ciudad de Oviedo.*
Doc. 053/1992	**JULITA GARCIA DIEZ.**- *Auditoría de cuentas: su regulación en la CEE y en España. Una evidencia de su importancia.*
Doc. 054/1992	**SUSANA MENENDEZ REQUEJO.**- *El riesgo de los sectores empresariales españoles: rendimiento requerido por los inversores.*
Doc. 055/1992	**CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.**- *Una valoración económica de la obtención de productos derivados del petroleo a partir del carbón*
Doc. 056/1992	**IGNACIO ALFREDO RODRIGUEZ-DEL BOSQUE RODRIGUEZ.**- *Consecuencias sobre el consumidor de las actuaciones bancarias ante el nuevo entorno competitivo.*
Doc. 057/1992	**LAURA CABIEDES MIRAGAYA.**- *Relación entre la teoría del comercio internacional y los estudios de organización industrial.*
Doc. 058/1992	**JOSE LUIS GARCIA SUAREZ.**- *Los principios contables en un entorno de regulación.*
Doc. 059/1992	**Mª JESUS RIO FERNANDEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.**- *Cuantificación de la concentración industrial: un enfoque analítico.*
Doc. 060/94	**Mª JOSE FERNANDEZ ANTUÑA.**- *Regulación y política comunitaria en materia de transportes.*

Doc. 061/94 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *Factores determinantes de la afiliación sindical en España.*

Doc. 062/94 **VICTOR FERNANDEZ BLANCO.-** *Determinantes de la localización de las empresas industriales en España: nuevos resultados.*

Doc. 063/94 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** *La crisis de la estructura multidivisional.*

Doc. 064/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** *Metodología de la investigación econométrica.*

Doc. 065/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** *Análisis Cualitativo de la fecundidad y participación femenina en el mercado de trabajo.*

Doc. 066/94 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** *La supervision colectiva de los actos de contratación: la Ley 2/1991 de información a los representantes de los trabajadores.*

Doc. 067/94 **JOSE LUIS GARCIA LAPRESTA; Mª VICTORIA RODRIGUEZ URIA.-** *Coherencia en preferencias difusas.*

Doc. 068/94 **VICTOR FERNANDEZ; JOAQUIN LORENCES; CESAR RODRIGUEZ.-** *Diferencias interterritoriales de salarios y negociacion colectiva en España.*

Doc. 069/94 **Mª DEL MAR ARENAS PARRA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Programación clásica y teoría del consumidor.*

Doc. 070/94 **Mª DE LOS ÁNGELES MENÉNDEZ DE LA UZ; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Tantos efectivos en los empréstitos.*

Doc. 071/94 **AMELIA BILBAO TEROL; CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Matrices especiales. Aplicaciones económicas.*

Doc. 072/94 **RODOLFO GUTIÉRREZ.-** *La representación sindical: Resultados electorales y actitudes hacia los sindicatos.*

Doc. 073/94 **VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** *Economías de aglomeración y localización de las empresas industriales en España.*

Doc. 074/94 **JOAQUÍN LORENCES RODRÍGUEZ; FLORENTINO FELGUEROSO FERNÁNDEZ.-** *Salarios pactados en los convenios provinciales y salarios percibidos.*

Doc. 075/94 **ESTEBAN FERNÁNDEZ SÁNCHEZ; CAMILO JOSÉ VÁZQUEZ ORDÁS.-** *La internacionalización de la empresa.*

Doc. 076/94 **SANTIAGO R. MARTÍNEZ ARGÜELLES.-** *Análisis de los efectos regionales de la terciarización de ramas industriales a través de tablas input-output. El caso de la economía asturiana.*

Doc. 077/94 **VÍCTOR IGLESIAS ARGÜELLES.-** *Tipos de variables y metodología a emplear en la identificación de los grupos estratégicos. Una aplicación empírica al sector detallista en Asturias.*

Doc. 078/94 **MARTA IBÁÑEZ PASCUAL; F. JAVIER MATO DÍAZ.-** *La formación no reglada a examen. Hacia un perfil de sus usuarios.*

Doc. 079/94 ***IGNACIO A. RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE RODRÍGUEZ***.- *Planificación y organización de la fuerza de ventas de la empresa.*

Doc. 080/94 ***FRANCISCO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ***.- *La reacción del precio de las acciones ante anuncios de cambios en los dividendos.*

Doc. 081/94 ***SUSANA MENÉNDEZ REQUEJO***.- *Relaciones de dependencia de las decisiones de inversión, financiación y dividendos.*