DOC. 083/95

Mª CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA
Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA

MATRICES SEMIPOSITIVAS Y ANÁLISIS INTERINDUSTRIAL. APLICACIONES AL ESTUDIO DEL MODELO DE SRAFFA-LEONTIEF

INDICE:

1. INTRODUCCION 3

2. ANALISIS INTERINDUSTRIAL: EL MODELO DE LEONTIEV-SRAFFA 4

3. MATRICES SEMIPOSITIVAS. GENERALIDADES . . 9

4. EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS . . . 11

5. SOLUCION SEMIPOSITIVA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. CONDICIONES DE HAWKINS-SIMON . . 14

6. APLICACIONES AL ESTUDIO DEL MODELO DE LEONTIEV-SRAFFA.

  a. EL MODELO DE DEMANDA . . 23

  b. EL MODELO DE PRECIOS . . . 26

7. BIBLIOGRAFIA . 29

1. INTRODUCCION

Las magnitudes económicas son frecuentemente representadas por medio de variables reales. Sin embargo, la mayoría de las variables que intervienen en los modelos económicos (precios, cantidades, salarios etc.) sólo tienen significado económico si alcanzan valores no negativos. Este hecho proporciona una característica singular en el análisis de los modelos económicos que no debe ser ignorada.

En este trabajo nos ocuparemos de los modelos lineales en los que intervienen variables económicas no negativas. Éstos constituyen una forma de análisis susceptible de ser tratada mediante un instrumental potente y de propiedades bien conocidas: el álgebra lineal. La utilización del algebra de matrices facilita enormente el tratamiento matemático de estos modelos. Sin embargo, por lo general, las matrices que aparecen en el análisis económico se caracterizan por el hecho de que sus elementos son no negativos. En el desarrollo de este documento, se establecerá el concepto de matriz semipositiva y algunas de sus propiedades entre las que destacan las referentes al mayor de sus autovalores (Teorema de Perron-Frobenius). Además se estudiarán las condiciones bajo las cuales es posible asegurar que un sistema de ecuaciones no lineales tiene solución económicamente significativa, esto es, admite una solución no negativa, conocidas como las condiciones de Hawkins-Simons. Todos los conceptos y teoremas matemáticos a los que hemos hecho referencia tienen múltiples aplicaciones en economía. Quizá una de las más importantes sea el estudio del modelo de análisis interindustrial de Leontief-Sraffa a la que nos vamos a referir a continuación.

2. EL ANALISIS INTERINDUSTRIAL.

En una primera descripción, una tabla input-output podría concebirse como una desagregación por industrias o ramas de actividad de la cuenta de producción de una economía, que además nos presenta los destinos de la producción de cada rama y sus estructuras de coste o inputs necesarios para producir dicho output.

Por medio de dicha tabla es posible ofrecer una visión cuantitativa de la interdependencia entre las diversas partes de un sistema económico, así como de las magnitudes más representativas del mismo.

Consideremos una economía cerrada y sin sector público. Podemos describir el conjunto de relaciones de producción e intercambio establecidas en dicha economía durante un período mediante una tabla de transacciones intersectoriales. Para ello designaremos por X_j a la producción efectiva de la rama j (en unidades físicas) y D_j a los destinos de la rama j a la demanda final. Sea x_{ij} el consumo de productos del sector i por parte del sector j, P_i el precio de la mercancía i, y VA_i el valor añadido en el sector.

Sector 1	Sector 2		Sector n	D. final	Total
$P_1.x_{11}$	$P_1.x_{12}$	...	$P_1.x_{1n}$	$P_1.D_1$	$P_1.X_1$
$P_2.x_{21}$	$P_2.x_{22}$	...	$P_2.x_{2n}$	$P_2.D_2$	$P_2.X_2$
...	...	...	...	...	...
$P_n.x_{n1}$	$P_n.x_{n2}$	...	$P_n.x_{nn}$	$P_n.D_n$	$P_n.X_n$
VA_1	VA_2	...	VA_n		
$P_1.X_1$	$P_2.X_2$	...	$P_n.X_n$		

En el análisis input-output es posible establecer dos modelos (el modelo de demanda y el modelo de precios) que si bien guardan entre sí estrecha relación pueden ser analizados de forma independiente.

Pero antes de entrar en la descripción de estos dos modelos veamos cuáles son las hipótesis que subyacen bajo este planteamiento. Consideremos una economía cerrada y sin sector público, en la que se producen n mercancías, en base a procesos productivos que verifican los siguientes supuestos:

1. Cada proceso productivo produce una única mercancía; esto es, no existe producción conjunta. Todo el capital empleado en el proceso productivo es capital circulante.
2. El trabajo (que suponemos homogéneo) constituye el único input primario de la producción, cuya participación se requiere en todos los procesos. Consideramos que prevalecen condiciones competitivas en el mercado de trabajo, de modo que el salario es uniforme.
3. Existen rendimientos constantes a escala.
4. Cualquier número real no negativo puede representar cierta cantidad de cualquier mercancía (supuesto de divisibilidad de los bienes).
5. Sólo hay disponible un proceso para la producción de cada mercancía.

- El modelo de demanda.

La utilidad del mismo estriba en establecer la cuantía del output bruto de cada rama necesario para satisfacer una demanda final determinada exógenamente. Este problema surge por el hecho de que cuando se establecen determinados objetivos de demanda final, dichos objetivos no pueden lograrse a menos que se produzcan, a la vez, los inputs intermedios necesarios para satisfacer determinadas demandas finales.

Las filas de la tabla I-O indican como se ha distribuido la producción de cada rama de actividad entre los distintos usos posibles. Para cualquier rama o sector productivo la suma de los destinos intermedios (consumos de otras ramas) más los destinos finales (consumo final) ha de coincidir con el volumen de la producción bruta.

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + D_1 = X_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + D_2 = X_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + D_n = X_n$$

Los parámetros estructurales que permiten elaborar el modelo de Leontief son los coeficientes técnicos a_{ij} tales que:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j} \quad ó \quad x_{ij}=a_{ij}.X_j$$

y representan la cantidad de mercancía i necesaria para producir una unidad de j. La función de producción de la economía es una función lineal de modo que el consumo total de mercancía i por parte del sector j, x_{ij}, se obtiene multiplicando los consumos de i que se necesitan para producir una unidad de j, a_{ij}, por el número de unidades producidas X_j.

La existencia de los coeficientes fijos de producción, los a_{ij}, implica que no existe sustitución entre los factores, de forma que para producir una unidad del bien j son necesarias a_{ij} unidades del bien i, y además a_{kj} unidades del bien k.

Sustituyendo dichos coeficientes en el anterior sistema de ecuaciones, obtenemos nuevo sistema que puede ser expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ .. \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_n \end{pmatrix}$$

y que de modo más compacto escribimos como:

$$A.X + D = X$$

o más comúnmente

$$(I-A).X=D$$

Interesa analizar, desde el punto de vista matemático, si este sistema tiene solución. Pero además, y dado el significado que se atribuye a las variables que en él intervienen, interesa estudiar las condiciones que han de verificarse para que dicha solución sea significativa económicamente, esto es, cuáles son los requisitos que ha de verificar la matriz de Leontief para que, en una economía, sea posible satisfacer una determinada estructura de demanda.

Supongamos que el sistema admite solución no negativa para un vector D^0 considerado. Entonces cabe preguntarse: ¿es, esta economía, capaz de satisfacer cualquier otro vector de demanda?, esto es, ¿sería posible afrontar el paso de una economía de guerra a una economía de paz?

-<u>El modelo de precios.</u>

A partir de la tabla de transacciones interindustriales podemos obtener un nuevo conjunto de ecuaciones. Sus columnas indican la estructura productiva de cada rama de actividad. Los costes en que incurre cada sector son de dos tipos: inputs intermedios y valor añadido (fundamentalmente costes laborales y excedente bruto de explotación).

$$P_1x_{11} + P_2x_{21} + \ldots + P_nx_{n1} + VA_1 = P_1X_1$$
$$P_2x_{12} + P_2x_{22} + \ldots + P_nx_{n2} + VA_2 = P_2X_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_1x_{1n} + P_2x_{2n} + \ldots + P_nx_{nn} + VA_n = P_nX_n$$

Sustituyendo los coeficientes estructurales en el sistema, de forma que $x_{ij}=a_{ij}.X_j$ y llamando $v_i=VA_i/X_i$ al valor añadido por unidad de producción, podemos reescribir el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & .. & a_{n2} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ .. \\ P_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ .. \\ P_n \end{pmatrix}$$

que de forma más compacta expresaremos como:

$$A^t.P + V = P \quad ó$$
$$(I-A^t).P = V$$

Esta formulación permite estudiar cómo se ven afectados los precios de cada rama de actividad cuando algunos de los elementos del valor añadido (salarios o beneficios) experimentan una variación en sus precios. Asimismo permite analizar cómo la variación en los precios de los productos de una rama inciden en los precios de los sectores restantes.

De nuevo se plantea la cuestión de si existe solución no negativa para este sistema. Dadas unas ciertas condiciones tecnológicas, que vienen representadas por la matriz A ¿ existe una estructura de precios bajo la cual es posible conseguir un determinado vector de valores añadidos unitarios ?. Supuesto que la economía sea capaz de generar un determinado vector V, ¿qué sucede si éste se altera?.

Preocupado por estas cuestiones, Leontief establece ya en uno de sus primeros trabajos ciertas condiciones que debe cumplir la matriz A para que el sistema sea factible y es que

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} \leq 1$$

y que exista algún sector para el que se de la desigualdad en sentido estricto esto es,

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} < 1.$$

La interpretación de esta condición resulta más sencilla si multiplicamos los dos miembros por X_i

$$a_{i1}.X_i + a_{i2}.X_i + \ldots + a_{in}.X_i \leq X_i;$$

para alguno de los sectores de actividad la producción bruta ha de ser superior a los destinos intermedios, esto es, alguno de los sectores ha de ser capaz de satisfacer una demanda final positiva.

Tanto Fisher como Brauer y Solow trabajaron con planteamientos parecidos llegando a establecer algunas condiciones suficientes para asegurar la existencia de solución no negativa en los modelos lineales. Sin embargo, es posible establecer un grupo de condiciones más fuertes (necesarias y suficientes) que son a las que se hará referencia en el desarrollo de este tema.

3. MATRICES SEMIPOSITIVAS. GENERALIDADES.

Definiciones:

Sea A una matriz de elementos reales, con m filas y n columnas $A=\{a_{ij}\}$, $i=1,2,..,m$ $j=1,2,..,n$. Diremos que A es positiva si y sólo si $a_{ij}>0$ $\forall i,j$. Diremos que A es semipositiva, y escribiremos $A\geq 0$ cuando $a_{ij}\geq 0$ pero $A\neq 0$. Por último, diremos que A es no negativa, y escribiremos $A\geqq 0$ cuando $a_{ij}\geq 0$ $\forall i,j$ (en este caso A puede ser la matriz nula).

Trabajaremos con matrices cuadradas de orden n (que normalmente denotamos con las letras A o B) y con vectores de $\mathbb{R}^n$ o matrices columna (X ó Y).

Expondremos algunas de las propiedades referentes a las operaciones con este tipo de matrices y vectores. Sean $A\geq 0$, $B\geq 0$ dos matrices semipositivas y sean $X\geq 0$ e $Y\geq 0$ vectores semipositivos; entonces se verifica

- $\lambda.A\geq 0$ y $\lambda.X\geq 0$ siendo λ un número real $\lambda>0$
- $A+B\geq 0$ $X+Y\geq 0$
- $A.X\geqq 0$, $A.B\geqq 0$
- el producto escalar $(X,Y)>0$

Los signos de desigualdad también pueden aplicarse a dos vectores o a dos matrices. Los definimos como sigue:

$X\geqq Y$ cuando $X-Y\geqq 0$	$A\geqq B$ cuando $A-B\geqq 0$
$X\geq Y$ cuando $X-Y\geq 0$	$A\geq B$ cuando $A-B\geq 0$
$X>Y$ cuando $X-Y>0$	$A>B$ cuando $A-B>0$

Descomponibilidad e indescomponibilidad.

Diremos que π es una matriz de permutación cuando se ha obtenido permutando las columnas (o las filas) de la matriz unidad. Toda matriz de permutación es ortogonal.

Una matriz cuadrada se dice descomponible si existe una matriz de permutación π tal que

$$\pi^{-1}.A.\pi = \pi'.A.\pi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde A_{11} y A_{22} son dos matrices cuadradas no necesariamente del mismo orden.

El concepto de descomponibilidad implica que se puede hacer una reordenación de los índices tanto sobre las filas como sobre las columnas que conduce a una matriz del tipo indicado.

Si A es la matriz de coeficientes técnicos de una economía el concepto de descomponibilidad tiene una interpretación sencilla. Sea I el conjunto de índices que intervienen en A_{11} y sea J el conjunto de índices que intervienen en A_{22}. Supongamos, por comodidad que, tras la reordenación, I={1,2,..,m} y J={m+1,m+2,..,n}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1m} & | & a_{1,m+1} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2m} & | & a_{2,m+1} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & | & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mm} & | & a_{m,m+1} & .. & a_{mn} \\ - & - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & .. & 0 & | & a_{m+1,m+1} & .. & a_{m+1,n} \\ .. & .. & .. & .. & | & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 & | & a_{n,m+1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si A es descomponible ninguna de las mercancías listadas en J intervienen en la producción de las mercancías listadas en I. Las de primer grupo (I) son llamadas productos básicos del sistema, y las del segundo (J) productos no básicos.

Una matriz cuadrada se dice indescomponible cuando no es descomponible. La indescomponibilidad significa que todas las mercancías que se producen son mercancías básicas, todas son utilizadas como input (directa o inderectamente) e cada uno de los n sectores de actividad.

Veamos algunas una de las propiedades de las matrices semipositivas indescomponibles que nos serán de utilidad:

1. Sea A≥0 e indescomponible y sea X un vector columna, X≥0, entonces A.X≥0.
2. Sea A≥0 e inversible y sea X un vector columna, X≥0, entonces A.X≥0.

4. EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS.

En esta sección analizaremos algunas de las propiedades del espectro (o conjunto de valores propios) de una matriz cuadrada semipositiva. Los resultados que aquí se obtienen guardan relación con la existencia de solución no negativa en los sistemas de ecuaciones lineales.

En 1907 Perron obtuvo un importante resultado para matrices positivas. Más tarde, en 1913, Frobenius generalizó los resultados para el caso de las matrices semipositivas indescomponibles al que no vamos a referir con el nombre de teorema de Perron-Frobenius:

- Teorema de Perron. Una matriz cuadrada positiva $A>0$, posee siempre un valor propio positivo $\lambda^*(A)$, simple, que excede en módulo a todos los restantes valores propios de A. A este valor propio maximal $\lambda^*(A)$ le corresponde un vector propio X^* con todas sus componentes positivas ($X^*>0$).

- Teorema de Perron- Frobenius. Sea A una matriz $A\geq 0$ semipositiva e indescomponible. En estas condiciones:

i. A posee un valor propio $\lambda^*(A)$ positivo llamado "raíz de Frobenius" de A.
ii. $\lambda^*(A)$ es simple.
iii. $\lambda^*(A)$ crece cuando alguno de los elementos de A aumenta.
iv. El módulo de las restantes raíces características de A *no excede* a $\lambda^*(A)$.
v. Asociado a $\lambda^*(A)$ existe un vector propio X^* con todas sus componentes positivas.
vi. Si λ es otro valor propio de A, $\lambda\neq\lambda^*(A)$, no existe ningún vector propio asociado a λ con todas sus componentes positivas.

Demostración:

i. A posee un valor propio positivo $\lambda^*(A)$.

Sea $K=\{X\in\mathbb{R}^n / X\geq 0\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1\}$. K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ convexo y compacto.

Si $X\in K$, $X\geq 0$. Entonces si A es semipositiva e indescomponible $A.X\geq 0\ \forall X\in K$.

Sea $Z=A.X$ y consideremos $M(X)= z_1+z_2+\ldots+z_n$. Evidentemente $M(X)>0$ pues $Z\neq 0\ \forall X\in K$.

Consideremos la aplicación

$$f: K \longrightarrow K$$

$$X \longrightarrow f(X)=\frac{1}{M(X)}.AX$$

Dicha aplicación es continua $\forall X\in K$, por ser $M(X)\neq 0$ y ser A lineal. Podemos entonces aplicar el teorema del punto fijo de Brouwer y concluir que f posee un punto fijo, esto es, $\exists X\in K$ tal que $f(X^*)=X^*$. En el caso que nos ocupa, ello significa que $f(X^*)=\frac{1}{M(X^*)}.AX^*=X^* \Rightarrow A.X^*=M(X^*).X^*$

esto es, $M(X^*)$ es un valor propio de la matriz A con un vector propio asociado X^*. Además, y tal como habíamos visto, $M(X^*)>0$ con lo que queda demostrado que A posee un valor propio positivo al que llamaremos raíz de Frobenius y designaremos por $\lambda^*(A)$.

v. Asociado a $\lambda^*(A)$ existe un vector propio X^* con todas sus componentes positivas, esto es, $X^*>0$.

Sabemos que $X^*\geq 0$ pues $X^*\in K$. Si X^* tiene alguna componente nula, mediante alguna reordenación conveniente de sus coordenadas dada por cierta permutación π podemos escribir:

$$X^*=\begin{pmatrix} Y^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad Y^*>0$$

Realizando la misma permutación sobre las filas y las columnas de A, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y^* \\ 0 \end{pmatrix}=\lambda^*(A).\begin{pmatrix} Y^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando vemos que $A_{21}.Y^*=0$ lo que necesariamente implica que $A_{21}=0$ lo cual iría en contra de la indescomponibilidad de A, luego no es posible $X^*\geq 0$, ha de ser $X^*>0$.

iv. El módulo de las restantes raíces características de A no excede a $\lambda^*(A)$.

Sea B una matriz cuadrada semipositiva del mismo orden que A: $A\geq B\geq 0$ y sea β un valor propio de B con un vector asociado Z: $BZ=\beta Z$.

Las componentes de Z pueden ser reales (de signo arbitrario) o complejas (si lo es β).

Consideremos el vector

$$\underline{Z}=\begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2| \\ .. \\ |z_n| \end{pmatrix}$$

Tomando valores absolutos en el sistema $BZ=\beta Z$ y aplicando la desigualdad triangular se verifica

$$|\beta|.\underline{Z}\leq B.\underline{Z}\leq A.\underline{Z}$$

Sea A^t la transpuesta de A. Como A es indescomponible, A^t también lo e, por lo que tiene un valor propio positivo $\lambda^*(A^t)$ con un autovector asociado $Y^*>0$:

$A^t.Y^*=\lambda^*(A^t).Y^* \longrightarrow Y^{*t}.A=\lambda^*(A^t).Y^{*t}$

Multiplicando la anterior desigualdad por Y^{*t}

$$Y^{*t}.|\beta|.\underline{Z}\leq Y^{*t}.B.\underline{Z}\leq Y^{*t}.A.\underline{Z}=\lambda^*(A^t).Y^{*t}.\underline{Z} \qquad (1)$$

$$|\beta|.Y^{*t}.\underline{Z}\leq \lambda^*(A^t).Y^{*t}.\underline{Z}$$

$$|\beta|\leq \lambda^*(A^t)$$

por otra parte, y puesto que el mismo razonamiento puede hacerse para la matriz A, llegamos a que

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A^t)$$

y mediante un razonamiento simétrico se obtiene $\lambda^*(A^t) \leq \lambda^*(A)$, luego $\lambda^*(A^t)= \lambda^*(A)$. Con ello demostramos que $|\beta| \leq \lambda^*(A)$ siendo β cualquier autovalor de la matriz B. Puesto que $A \geq B \geq 0$, queda también demostrado en el caso de que A=B que la raíz de Frobenius de A no excede en módulo a los restantes autovalores de A.

iii. $\lambda^*(A)$ crece cuando alguna componente de A aumenta.

Supongamos que existe un valor propio de B, β tal que $|\beta|=\lambda^*(A)$. En este caso las desigualdades (1) se convierten en igualdades, ya que coinciden primer y último término.

$$Y^{*t}.|\beta|.\underline{Z} = Y^{*t}.B.\underline{Z} = Y^{*t}.A.\underline{Z} = \lambda^*(A^t).Y^{*t}.\underline{Z}$$

Pero entonces, como $Y^*>0$, se tendría que

$$|\beta|.\underline{Z} = B.\underline{Z} = A.\underline{Z} = \lambda^*(A^t).\underline{Z} =\lambda^*(A).\underline{Z}$$

ii. $\lambda^*(A)$ es simple.

Si no fuera simple, sería raíz de alguna submatriz principal de A, y por tanto sería raíz de la matriz

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq A$$

y $B \neq A$ en contra de la proposición anterior.

vi. Si λ es otro valor propio de A, $\lambda \neq \lambda^*(A)$, no existe ningún vector propio asociado a λ con todas sus componentes del mismo signo.

Sea μ un autovalor cualquiera de A: $A.Y=\mu.Y$. (2)

Sea $\lambda^*(A^t)$ la raíz de Frobenius de A^t, y Y^* es autovector asociado $Y^*>0$: .

$$A^t.Y^*=\lambda^*(A^t).Y^* \longrightarrow Y^{*t}.A=\lambda^*(A).Y^{*t} \qquad (3)$$

Multiplicando (2) por Y^{*t} y (3) por Y

$$Y^{*t}.A.Y= Y^{*t}.\mu.Y.$$

$$Y^{*t}.A.Y=\lambda^*(A).Y^*.Y$$

obtenemos

$$\mu Y^{*t}.Y=\lambda^*(A).Y^{*t}.Y$$

Si $\mu \neq \lambda^*(A)$ para que se de la igualdad ha de ser $Y^{*t}.Y=0$, es decir, Y e Y^* han de ser ortogonales. Y esto no puede suceder si Y tiene todas sus componentes del mismo signo ($Y^*>0$).

Este teorema puede ser generalizado; así por ejemplo, en el caso en que A sea una matriz semipositiva y *descomponible* se puede afirmar que A posee un valor propio *no negativo* y además el vector asociado a dicho valor propio es un vector *semipositivo.*

Decimos que una matriz cuadrada semipositiva es <u>productiva</u> si y sólo si $\lambda^*(A)<1$. Más adelante se verá como esta característica constituye una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de solución semipositiva en un sistema de ecuaciones lineales.

5. SOLUCION SEMIPOSITIVA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. CONDICIONES HAWKINS-SIMON.

Partiendo de la tabla de transacciones interindustriales de una economía hemos establecido dos modelos -el modelo de demanda y el modelo de precios- que pueden ser expresados, respectivamente, mediante dos sistemas de ecuaciones: $(I-A)X=D$, y $(I-A^t).P=V$. Estudiaremos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de solución no negativa para estos sistemas de ecuaciones.

Dadas ciertas condiciones tecnológicas representadas por la matriz A, surge la necesidad de distinguir dos situaciones:

- El sistema $(I-A)X=D$ tiene solución semipositiva $X\geq 0$ para algún vector de demanda concreto $(D>0)$.
- El sistema $(I-A)X=D$ tiene solución semipositiva para cualquier vector de demanda final $(D\geq 0)$.

En el caso de que se verifique la primera condición se dice que el sistema es débilmente resoluble; si se verifica la segunda, el sistema es fuertemente resoluble.

El modelo de demanda y el de precios tienen características comunes. En los dos casos, la matriz de los coeficientes del sistema es lo que se denomina una N matriz, esto es, una matriz en la que los elementos situados fuera de la diagonal principal son no positivos. (Una matriz cuadrada B, se dice que es una N-matriz si $b_{ij}\leq 0$ $\forall i\neq j$).

Para mayor comodidad trabajaremos con el sistema $B.Z=C$ donde B es una N-Matriz y $C\geq 0$, al que denotaremos simplificadamente por {S}. Resulta claro que los sistemas que nos proponemos estudiar no son sino casos particulares de este caso general.

Se dice que {S} es *débilmente resoluble* cuando para algún $C>0$ exista solución semipositiva $Z\geq 0$.

{S} es *fuertemente resoluble* si para todo $C\geq 0$ existe solución semipositiva $Z\geq 0$.

Vamos a enunciar la condición Hawkins-Simon, que nos permite establecer un teorema a través del cual se observa que la resolubilidad débil y la resolubilidad fuerte (aparentemente distintas) son en realidad condiciones equivalentes.

Condición Hawkins-Simon. Diremos que B verifica la condición H-S si todos los menores principales superiores izquierdos de B son positivos.

Teorema de Hawkins-Simon. Para el sistema $\{S\}=\{\ B.Z=C\ /\ C\geq 0\}$ las condiciones siguientes son equivalentes:

- el sistema {S} es débilmente resoluble.
- el sistema {S} es fuertemente resoluble.
- la matriz B verifica la condición H-S..

Demostración.

$$\mathbf{DR \Rightarrow H\text{-}S \Rightarrow FR \Rightarrow DR}$$

a. DR ⇒ H-S

El sistema B.Z=C es débilmente resoluble si para algún C>0 existe solución semipositiva $Z\geq 0$.

Realicemos la demostración por inducción.

n=1 $b_{11}.z_1=c_1$

Si es DR tendrá solución semipositiva $z_1\geq 0$ para algún $c_1>0$

$$b_{11}.z_1=c_1>0 \Rightarrow b_{11}>0\ z_1>0$$

El único menor principal superior izquierdo de B, $|b_{11}|>0$,luego se verifica H-S.

n=2

$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ con $b_{ij}\leq 0$ si $i\neq j$, $c_i>0$ y $Z\geq 0$ pues por ser el sistema DR, existe solución semipositiva para algún C>0.

$b_{11}.z_1 = c_1 - b_{12}.z_2 >0 \Rightarrow b_{11}>0\ z_1>0$

Por ser $b_{11}>0$ es posible dividir las ecuaciones del sistema por dicho número y transformarlo en otro equivalente.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21}-b_{11}.\dfrac{b_{21}}{b_{11}} & b_{22}-b_{12}.\dfrac{b_{21}}{b_{11}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2-c_1.\dfrac{b_{21}}{b_{11}} \end{pmatrix}$$

que de forma más simplificada representaremos por

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c'_2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos únicamente la segunda ecuación, $b'_{22}.z_2=c'_2$, se verifica que es DR por serlo el sistema original, y tal como vimos en el caso de n=1 esto implica $b'_{22}>0$

$$b'_{22} = b_{22} - b_{21}.\frac{b_{12}}{b_{11}} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0$$

y además, según ya habíamos visto $b_{11}>0$ luego, para n=2 DR $\Rightarrow$H-S.

Supongamos que la implicación es cierta para sistemas con k-1 ecuaciones y veamos que, en estas condiciones la implicación es cierta para sistemas con k ecuaciones.

<u>n=k</u> $$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{k1} & b_{k2} & .. & b_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .. \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_k \end{pmatrix}$$ con $b_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$, $c_i>0$ y $Z \geq 0$ por ser el sistema DR.

La primera ecuación será

$b_{11}.z_1+...+b_{1k}.z_k=c_1$ de donde $b_{11}.z_1= c_1- b_{12}.z_2 -...- b_{1k}.z_k >0$.

De aquí se deduce que $b_{11}>0$ lo que permite dividir por b_{11} y reducir el sistema a otro equivalente del tipo:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & .. & b'_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & b'_{k2} & .. & b'_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .. \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ .. \\ c'_k \end{pmatrix}$$

$$\text{con} \quad b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{i1}.b_{1j}}{b_{11}}$$

$$c'_i = c_i - \frac{b_{i1}.c_1}{b_{11}}$$

El sistema formado por las k-1 últimas ecuaciones es del mismo tipo que el original: B' es una N matriz ($b'_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $C>0$). Además, si el sistema original tiene una solución semipositiva $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0,..,z_k \geq 0$, entonces $z_2 \geq 0,..,z_k \geq 0$ es solución del sistema reducido (es una transformación del original).

A este sistema se le puede aplicar la hipótesis de inducción, por lo que tendríamos que la matriz B' verifica la condición H-S y todos sus menores principales superiores izquierdos son positivos ($|B'|>0$).

Volvamos al sistema original. Los pasos seguidos para transformar la matriz original $B=\{b_{ij}\}$ en la matriz $B'=\{b'_{ij}\}$ son simplemente combinaciones lineales de sus filas por lo que

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{k1} & b_{k2} & .. & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & .. & b'_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & b'_{k2} & .. & b'_{kk} \end{vmatrix} = b_{11}\cdot \begin{vmatrix} b'_{22} & .. & b'_{2k} \\ .. & .. & .. \\ b'_{k2} & .. & b'_{kk} \end{vmatrix} >0$$

y el sistema original, con k ecuaciones verifica la condición H-S.

b. H-S $\Rightarrow$ FR

Por inducción.

<u>n=1</u> $b_{11}.z_1=c_1$ con $c_1\geq 0$.

Si se verifica H-S: $b_{11}>0$ entonces $z_1=\dfrac{c_1}{b_{11}}\geq 0$ para cualquier $c_1\geq 0$ y entonces el sistema es **FR**.

<u>n=k</u>

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{k1} & b_{k2} & .. & b_{kk} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .. \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_k \end{pmatrix}$$

con $b_{ij}\leq 0$ si $i\neq j$, $c_i>0$ $\forall i$.

Se verifica la condición H-S, luego todos los menores principales superiores izquierdos son positivos: $b_{11}>0$. Por consiguiente podemos transformar el sistema original en uno con k-1 variables por el método de eliminación.

La relación entre los menores principales es:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{k1} & b_{k2} & .. & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & .. & b'_{2k} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & b'_{k2} & .. & b'_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b'_{22} & .. & b'_{2k} \\ .. & .. & .. \\ bk2' & .. & b'_{kk} \end{vmatrix} >0$$

$|B'| = (1/b_{11}).\ |B|$. Si $|B|>0$ y $b_{11}>0 \Rightarrow |B'|>0$

luego, el sistema transformado satisface la condición H-S y tiene una solución no negativa $z_2 \geq 0, .., z_n \geq 0$ para cualesquiera términos c'_i, en virtud dd la hipótesis inductiva.

Sustituyendo esta solución en la ecuación 1:

$z_1 = 1/b_{11} . (c_1 - b_{12}.z_2 - ... - b_{1k}z_k)$

tenemos que $x_1 \geq 0$, lo que demuestra que el sistema de k ecuaciones tiene solución no negativa para cualesquiera c_i

c. FR $\Rightarrow$ DR.

Es evidente a partir de la definición.

La verificación de cualquiera de las condiciones equivalentes (DR), (FR), (H-S) asegura no sólo la existencia de solución $Z \geq 0$ para el sistema {S} sino también la unicidad de tal solución. (Se trata de un sistema de Cramer con $|B| > 0$ por lo que está definida la inversa de B, B^{-1}).

Es interesante destacar la importancia de la implicación DR $\Rightarrow$ FR que aparece en el teorema anterior. El hecho que la resolubilidad débil del sistema sea suficiente para asegurar la resolubilidad fuerte quiere decir que, si para unos ciertos niveles de demanda final $D > 0$ se ha encontrado la solución $X \geq 0$ (X=niveles de output de equilibrio), se puede asegurar la posibilidad de satisfacer cualquier otra estructura de demanda, siempre que los recursos necesarios no excedan a los disponibles.

Vamos a enunciar una nueva condición -necesaria y suficiente- que establece la existencia de solución semipositiva en este tipo de sistemas.

- Teorema. Para el sistema {S} la condición de que exista B^{-1} y además sea semipositiva, $B^{-1} \geq 0$, -condición que llamo (I)- es equivalente a las condiciones (DR), (FR), (H-S).

Demostración:

Probaremos que la condición (I) implica una de las condiciones equivalentes y es implicada por cualquiera de las otras dos.

a. H-S $\Rightarrow$ I

La condición H-S nos dice que $|B| > 0$, luego $\exists B^{-1}$.

Queda por ver que B^{-1} es semipositiva.

La implicación H-S $\Rightarrow$ FR nos dice que $Z \geq 0$ para cualquier vector $C \geq 0$. La solución del sistema es, para cada C, $Z=B^{-1}.C$ Supongamos $C=e_i$ (i-ésimo vector de la base canónica). Entonces el producto $B^{-1}.e_i$ resulta ser la i-ésima columna de la matriz B^{-1} cuyos elementos son, en consecuencia, no negativos. De aquí se deduce que la matriz B^{-1} es semipositiva.

b. I $\Rightarrow$ FR

Es trivial: si $\exists B^{-1}$ y $B^{-1} \geq 0$ resulta evidente que $Z=B^{-1}.C \geq 0$ $\forall C \geq 0$, por lo que {S} es FR.

Cuando la matriz A de coeficientes técnicos es indescomponible, B=I-A también lo es. En este caso, algunos de los resultados pueden ser, parcialmente, afinados:

Consideremos el sistema {S} para el cual la matriz *B es indescomponible*. Si el sistema {S} es débilmente resoluble puede afirmarse que, para cada $C \geq 0$ posee solución positiva $Z>0$. El significado económico de esta propiedad es que, cuando la matriz A es indescomponible (lo cual sucede si y sólo si B=I-A es descomponible) todos los procesos de producción operan sea cual sea el vector de demandas finales. La demanda interindustrial necesita, para ser cubierta, que todos los procesos de producción se pongan en marcha, incluso aunque no exista demanda final de alguna de las mercancías.

RESOLUBILIDAD DEL SISTEMA {S1}= {(I-A).Z=C}. CONVERGENCIA Y PRODUCTIVIDAD DE LA MATRIZ A.

Una vez vistas algunas de las condiciones que con carácter general nos permiten asegurar la resolubilidad para sistemas del tipo {S}={B.Z=C} haremos una nueva formulación. Vamos a considerar los sistemas S1 cuya expresión genérica es la siguiente: {S1}={(I-A).Z=C} y estudiar su resolubilidad en relación con algunas de las propiedades de la matriz A.

Habíamos visto como, para resolver el modelo de demanda, basta conencontrar la solución del sistema $X=(I-A)^{-1}.D$. La obtención de la inversa de Leontief puede hacerse por el método tradicional de los adjuntos, o bien a través de un procedimiento iterativo. Éste permite ver cómo la expansión de la demanda final en una determinada cuantía ocasiona sucesivas demandas intermedias a las distintas ramas, que a su vez provocan demandas adicionales de las demás ramas para poder satisfacer dichos requerimientos, y así sucesivamente.

La igualdad $(I-A)(I+A+A^2+..+A^p) = I - A^{p+1}$

permite afirmar, en el supuesto que la serie de matrices $I+A+A^2+...$ sea sumable ($\lim_{n\to\infty} A^n=0$), que $(I-A)(I+A+A^2+...) = I$ luego, bajo estas hipótesis, la matriz (I-A) tiene inversa y además esta inversa es precisamente la suma de la serie $I+A+A^2+...$ Dicha igualdad permite asegurar, no sólo la existencia de la inversa de (I-A), sino también la semipositividad de dicha inversa al ser suma de matrices semipositivas. Vemos que todo este razonamiento está ligado al hecho de que $\lim_{n\to\infty} A^n=0$, condición necesaria y suficiente para que la serie geométrica converja.

Llamamos matrices convergentes a las que verifican esta propiedad, esto es A es convergente si y sólo si $\lim_{n\to\infty} A^n=0$. Recordemos que una matriz cuadrada semipositiva se dice productiva si y sólo si $\lambda^*(A)<1$.

Veamos un resultado que nos relaciona estos dos conceptos con el grupo de condiciones DR, FR, H-S, I:

"Para el sistema {S1}={ (I-A).Z=C} las condiciones siguientes son equivalentes:

- (PR) la matriz A es productiva
- (C) la matriz A es convergente

y son además equivalentes la grupo de condiciones (DR), (FR), (H-S) (I)".

Demostración.

Seguiremos el siguiente esquema de razonamiento:

$$I \Rightarrow PR \Rightarrow C \Rightarrow I$$

a. I ⇒ PR.

Por hipótesis $\exists (I-A)^{-1}$ y es semipositiva.

La existencia de $(I-A)^{-1}$ implica que $|I-A|\neq 0$, luego 1 no es uno de los autovalores de A. Veamos que $\lambda^*(A)<1$.

Puesto que $\lambda^*(A)$ es la raíz de Frobenius podemos encontrar un vector propio $X^*\geq 0$ tal que $A.X^*=\lambda^*(A).X^*$.

$$X^* - A.X^* = X^* - \lambda^*(A).X^*$$

$$(I - A).X^* = [1 - \lambda^*(A)].X^*$$

Premultiplicando por $(I-A)^{-1}$ que según la hipótesis existe y es semipositiva

$$X^* = (I-A)^{-1}.[1-\lambda^*(A)].X^*$$

$$X^* = [1-\lambda^*(A)].(I-A)^{-1}.X^*$$

Al ser $X^*\geq 0$ alguna de sus componentes $x^*_i>0$, y la i-ésima igualdad anterior sólo puede darse si

$[1-\lambda^*(A)]>0$, esto es, si $\lambda^*(A)<1$ (la matriz es productiva).

b. PR $\Rightarrow$ C

Si la matriz es productiva, esto es, $\lambda^*(A)<1$, entonces el módulo de los restantes autovalores no excede la unidad: $|\lambda|<1$.

Si llamamos J a la forma canónica de Jordan de la matriz A, se tendría:

$A=P.J.P^{-1}$, con P regular, y

$$A^p=P.J^p.P^{-1}$$

Pero si todos los $\lambda_i<1$ $\lim\limits_{p\to\infty} J^p=0$ por lo que $\lim\limits_{p\to\infty} A^p=0$ y la matriz A es convergente.

c. C $\Rightarrow$ I

Si A es convergente, se tendría que $\lim\limits_{p\to\infty} A^p=0$, con lo que $\lim\limits_{p\to\infty} J^p=0$. Pero la convergencia a cero de J^p está vinculada a que se satisfaga que $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda^p=0$ para todo λ autovalor de A. La semipositividad de A indica que esta condición se verifica si y sólo si $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda^*(A)^p=0$ lo cual sucede a su vez, si y sólo si, $\lambda^*(A)<1$.

Pero si A es productiva $|\lambda|<1$ para todo autovalor de A y por tanto, se tiene asegurada la convergencia de la serie

$1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots$ con lo que la serie de matrices $1 + J + J^2 + \ldots$ sería también convergente, y asimismo sería convergente la serie de matrices $1 + A + A^2 + \ldots$. En este caso, en la igualdad $(I-A)(I+A+A^2+..+A^p) = I - A^{p+1}$ se podría realizar el paso al límite, y se tendría probada la validez de $(I-A)(I+A+A^2+\ldots) = I$ con lo cual la existencia y semipositividad de la matriz $(I-A)^{-1}$ estaría asegurada.

RESOLUBILIDAD DEL SISTEMA {S2} ={ (ρI-A)Z=C }

Para finalizar este apartado estudiaremos la resolubilidad de sistemas del tipo {S2} ={ $(\rho I-A)Z=C$ } con $A\geq 0$, $C\geq 0$, los cuales se vincularán posteriormente al análisis de precios de equilibrio. En este caso, la N-matriz del sistema, $B(\rho)= (\rho I-A)$, depende de un parámetro ρ. Analizaremos cuáles son los valores del parámetro ρ compatibles con la resolubilidad del sistema.

Si escribimos $\rho(I- 1/\rho\ A)Z =C$ y suponiendo $\rho>0$, el nuevo sistema puede fácilmente vincularse a un sistema del tipo {S1} ya que $1/\rho.A$ es una matriz cuadrada semipositiva. Por tanto, para estudiar su resolubilidad basta con analizar la convergencia y productividad de la matriz $1/\rho A$.

Los valores del parámetro ρ para los cuales el sistema es resoluble coinciden con los que hacen la matriz $1/\rho A$ convergente, que además coinciden con aquellos para los cuales existe la inversa y es semipositiva.

- Teorema: Siendo A una matriz cuadrada semipositiva, llamamos $H(A)= \{\rho\varepsilon R \,/\, \exists(\rho I-A)^{-1}$ y $(\rho I-A)^{-1}\geq 0\}$. Entonces se verifica que:

- $H(A)\neq\varnothing$.
- Si $\rho\varepsilon H(A)$ y $\sigma>\rho$ entonces $\sigma\varepsilon H(A)$.
- $\lambda^*(A) = \inf H(A)$.
- $\lambda^*(A)$ no pertenece a $H(A)$.

Demostración:

- $H(A)\neq\varnothing$, porque siempre existe algún $\rho>0$, para el cual la matriz $1/\rho.A$ sea convergente ya que todos los elementos de A son no negativos y finitos.

Dada la equivalencia entre las condiciones (C) e (I) para sistemas del tipo {S1}, para ese valor de $\rho>0$ existe la inversa de $(I- 1/\rho A)$, y es semipositiva, por lo que también existe la inversa de $(\rho I-A)$ y es, asimismo, semipositiva.

$$|I- 1/\rho A|\neq 0 \Rightarrow |\rho I-A|\neq 0$$

$$(I- 1/\rho A)^{-1}\geq 0 \;\Rightarrow (I- 1/\rho A)Z=C \text{ es FR} \Rightarrow (\rho I-A)Z=\rho C \;\; \rho>0 \text{ es FR} \Rightarrow (\rho I-A)^{-1}\geq 0$$

- Si $\rho\varepsilon H(A)$ y $\sigma>\rho$ entonces $\sigma\varepsilon H(A)$. Trivial.
- $\lambda^*(A)$ no pertenece a $H(A)$. Al ser $\lambda^*(A)$ un autovalor de A, el determinante $|\lambda^*(A)I-A|=0$, por lo que no existe la inversa de $(\lambda^*(A)I-A)$ y, por tanto, $\lambda^*(A)$ no pertenece a $H(A)$.
- $\lambda^*(A) = \inf H(A)$.

Por ser $H(A)$ no vacío y acotado inferiormente ($H(A)\subset\mathbf{R}^+$) posee ínfimo. Sea $\gamma=\inf H(A)$. Vamos a ver que $\gamma=\lambda^*(A)$.

Si $\delta\in H(A)$, existe $(I-1/\delta.A)^{-1}$ y es semipositiva, por lo que debido a la equivalencia entre las condiciones (I) y (PR) para sistemas del tipo {S1} no lleva a afirmar que la matriz $1/\delta.A$ es productiva, esto es, $\lambda^*(1/\delta.A)<1$, lo cual equivale a que $\delta>\lambda^*(A)$. Así $\lambda^*(A)$ resulta ser la cota inferior del conjunto $H(A)$ y además, puesto que esta condición resulta ser necesaria y suficiente $\lambda^*(A)=\inf H(A)$.

Este teorema permite acotar los valores del parámetro ρ para los cuales el sistema $\{S2\} = \{(\rho.I-A)Z=C\}$ es resoluble, que son aquéllos $\rho\in(\lambda^*(A), +\infty)$.

6. APLICACIONES AL ESTUDIO DEL MODELO DE LEONTIEF-SRAFFA.

EL MODELO DE DEMANDA.

Tal y como hemos visto, si en el sistema $(I-A).X=D$ la matriz A es productiva, entonces el sistema es FR, esto es, tiene solución semipositiva X para cualquier vector de demandas finales.

Veamos el significado de la productividad de A. Si $\lambda^*(A)<1$ y X^* es el vector propio asociado a la raíz de Frobenius de A ($X^*\geq 0/\ \lambda^*(A).X^*=AX^*$) entonces, en el sistema de cantidades es posible encontrar un vector de producciones brutas tal que $X^*\geq AX^*$. Se verifica, por tanto, que $X^*-AX^*\geq 0$. Puesto que X es el vector que representa las producciones brutas y AX el volumen de outputs destinados a usos intermedios, la diferencia X-AX serían las producciones netas de cada sector. Si la matriz es productiva, la economía es capaz de producir un producto neto positivo. Puesto que sólo estamos interesados en las economías que posean esta característica, añadimos un nuevo supuesto al modelo considerado: la matriz tecnológica A es productiva.

La solución del sistema viene dada por $X=(I-A)^{-1}.D$. Veamos cuál es el significado económico de los elementos de $(I-A)^{-1}=\{\beta_{ij}\}$.

Los coeficientes técnicos a_{ij} representan las relaciones directas entre las ramas. Pero cada rama se relaciona con las demás no sólo de forma directa sino también indirectamente. Analicemos cuales son los outputs brutos necesarios para dedicar una unidad del bien j a usos finales: $D=e_j$. Sustituyendo en el sistema obtenemos un vector columna,

$$X = (I-A)^{-1}.e_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ .. \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}$$

donde cada β_{ij} representa la cantidad total de mercancía i que la economía debe producir para poder destinar una unidad de mercancía j a usos finales. Sirviéndonos de esta relación podemos cuantificar el efecto que un incremento en la demanda del bien j tiene sobre la producción del i-ésimo bien (suponemos que la demanda del resto de los bienes permanece inalterada):

$$\Delta X_i = \beta_{ij} . \delta d_j.$$

Una vez vistas las condiciones bajo las cuales el sistema de cantidades es resoluble tiene interés el analizar cómo cambia X cuando se modifica la demanda.

Si en esta economía se incrementa, al menos, la demanda de una de las mercancías - $D^1 \geq D^2$ -entonces para cubrir las nuevas demandas finales es necesario incrementar la producción bruta de alguna de las mercancías (al menos de una de ellas), esto es, $X^1 \geq X^2$ (siendo X^i la solución del sistema $\{(I-A).X=D\}$ para $D=D^i$).

Cuando la matriz de coeficientes técnicos es indescomponible, un incremento en la demanda final de la mercancía k-ésima, $D^1 \geq D^0$, provoca un incremento en las necesidades brutas de todas las mercancías $X^1 > X^0$.

Analicemos ahora el impacto relativo de una variación en una de las componentes de la demanda final sobre la producción bruta en cada sector, para lo cual nos valemos del concepto de elasticidad.

La elasticidad de la producción bruta de la mercancía i respecto a la demanda final de la mercancía k en el punto $D=D_0$ viene dada por el cociente

$$\varepsilon_{ik}(D^0) = \frac{\Delta x_i}{\Delta d_k} . \frac{d_k^0}{x_i^0}$$

$$\text{donde} \quad \Delta x_i = x_i^1 - x_i^0; \quad \Delta d_k = d_k^1 - d_k^0$$

Teniendo en cuenta el significado de los términos de la matriz $(I-A)^{-1}$ la elasticidad puede expresarse como:

$$\varepsilon_{ik}(D^0) = \beta_{ik} \frac{d_k^0}{x_i^0}$$

Sea A (indescomponible) la matriz de coeficientes técnicos de la economía es indescomponible, y supongamos que se produce un incremento en la demanda final del bien k, Δd_k, sin que ningún otro componente de la misma varíe ($\Delta d_j = 0$ si $j \neq k$), entonces se puede demostrar que:

a. el aumento generado en la producción de la mercancía k resulta proporcionalmente mayor al de cualquier otra mercancía $j \neq k$:

$\varepsilon_{kk}(D^0) > \varepsilon_{jk}(D^0)$ para todo $j \neq k$ y para todo $D^0 \geq 0$

b. $\varepsilon_{ik}(D^0) \leq 1$, $i=1,2,..,n$ y para todo $D^0 \geq 0$

Tal y como vismos en el anterior resultado, ante un incremento en la demanda del bien k hace crecer el output bruto de todos los sectores. Pero además, sabemos que si se incrementa la demanda del bien k entonces la producción del bien k es la que crece en mayor porcentaje. Por otra parte, como indica el resultado b, siempre es menor la variación porcentual ocasionada en la producción del bien i que la variación experimentada por la demanda de la mercancía k.

EL MODELO DE PRECIOS.

Consideremos las ecuaciones del sistema de precios:

$$P=A^t.P + V$$

La existencia de solución no negativa para este sistema está vinculada a la productividad de la matriz A, hipótesis que ya hemos añadido al conjunto de supuestos de los que partíamos. La productividad de A significa que, al menos una de las ramas de actividad de la economía, es capaz de generar un valor añadido unitario estrictamente positivo: $P^* - A^t.P^* \geq 0$.

Vamos a realizar ahora una nueva hipótesis y es que prevalecen condiciones competitivas y, por tanto, la tasa de beneficio es constante en todos los sectores productivos.

La productividad de la matriz A nos permite asegurar que el sistema es FR, esto es, dado cualquier vector de valores añadidos $V\geq 0$, existe un único vector de precios $P\geq 0$ solución de este sistema. Sea V^i un vector de valores añadidos y P^i la solución del sistema de precios para $V=V^i$. Si se produce una incremento en el valor añadido unitario generado por uno de los sectores, $V^1\geq V^0$ entonces, para que el sistema esté en equilibrio, se ha de incrementar al menos el precio de una de las mercancías, $P^1\geq P^0$.

En el caso de que todas las mercancías del sistema sean mercancías básicas (la matriz A sea indescomponible), entonces un incremento en el valor añadido de una de las mercancías $V^1\geq V^0$ trae consigo un aumento de todos los precios $P^1>P^0$.

Los precios de equilibrio del sistema vendrán dados por $P=(I-A^t)^{-1}.V$. La interpretación económica de los elementos de $(I-A^t)^{-1} =\{\alpha_{ij}\}$ puede obtenerse de forma similar al caso anterior. Si hacemos $V=e_i$ (i-ésimo vector de la base canónica) y sustituimos en el modelo de precios $P=(I-A^t)^{-1}.e_i$ obtendremos el vector de precios asociado a $V=e_i$ que coincide con la i-ésima columna de la matriz $(I-A^t)^{-1}$: $P= (\alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \alpha_{in})^t$ que representa cual ha de ser el vector de precios P para que el sector i pueda obtener un valor añadido unitario (y bajo el supuesto de que, en los demás sectores de actividad, el valor añadido es nulo). Cada α_{ij} mide el impacto sobre el precio de la mercancía j-ésima por unidad de valor añadido de la mercancía i-ésima.

La elasticidad del precio de la mercancía i-ésima con respecto al valor añadido de la mercancía k-ésima (en V^0) viene dada por:

$$\eta_{ik}(V^0) = \frac{\Delta p_i}{\Delta v_k} \cdot \frac{v_k^0}{p_i^0}$$

siendo $\Delta P = P^1 - p^0, \quad \Delta V = V^1 - V^0 = (0,..,0,v_k^1 - v_k^0,0,..,0)$

La interpretación que hemos hecho de los elementos de la matriz $(I-A^t)^{-1}$ permite escribir:

$$\eta_{ik}(V^0) = \alpha_{ik} \frac{v_k^0}{p_i^0}$$

Es posible establecer una proposición acerca de las nuevas elasticidades precio-valor añadido, análoga a la enunciada para el sistema de demanda:

Sea A indescomponible, y sea Δv_k un incremento en el valor añadido del bien k sin que ningún otro componente del vector V varíe ($\Delta v_j = 0$ si $j \neq k$), entonces:

a. el aumento relativo del precio de la mercancía k, resulta mayor que el de cualquier otra mercancía $j \neq k$:

$\eta_{kk}(V^0) > \eta_{jk}(V^0)$ para todo $j \neq k$ y para todo $d^0 \geq 0$

b. $\eta_{ik}(V^0) \leq 1$, $i=1,2,..,n$ y para todo $V0 \geq 0$

Hasta este momento hemos llamado V_i al valor añadido generado por el sector i, siendo el valor añadido de un sector la suma de beneficios y salarios. Al estudiar el modelo de precios con más detalle, podemos obtener interesantes conclusiones.

Sea $P - A^tP = V$ el modelo de demanda. El valor añadido del sector j es, en general, suma de beneficios y salarios.

$$v_j = \pi_j + l_j . w$$

donde l_j representa la cantidad de trabajo para producir una unidad de la j-ésima mercancía, w es el salario (precio unitario del factor trabajo) y π_j el beneficio empresarial en dicho sector.

En virtud de estas nuevas relaciones tenemos, para el sector j:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, p_i + l_j w + \pi_j \qquad (j=1,2,..,n)$$

Sean $\Pi = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ .. \ \pi_n)^t$ y $L=(l_1 \ \ l_2 \ .. \ l_n)^t$. Entonces podemos reescribir el sistema y tenemos

$$P = A^tP + w.L + \Pi$$

La suma de $A^tP + wL$ es el coste de producción total, incluyendo los salarios. Podemos considerar el beneficio en cada sector π_j como un porcentaje respecto a su coste de producción. Designamos por β_j la tasa de beneficios en el sector j que , según acabamos de exponer, será:

$$\pi_j = \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + l_j w \right) \quad (j=1,2,..,n)$$

Para que el mercado esté en equilibrio es condición necesaria que la tasa de beneficio sea igual en todos los sectores, esto es, $\beta_1=\beta_2=..=\beta_n=\beta$. En notación matricial tenemos que

$$\Pi=\beta(A^tP + w.L)$$

de forma que sustituyendo en el sistema $P = A^tP + w.L + \Pi$ obtenemos:

$$(\rho I-A^t)P = wL \text{ donde } \rho=1/(1+\beta)$$

Vemos que se trata de un sistema del tipo {S2}. Por tanto, si llamamos $\lambda^*(A^t)$ a la raíz de Frobenius de A^t este sistema tiene solución para cualquier $\rho>\lambda^*(A^t) \Rightarrow 1/(1+\beta)>\lambda^*(A^t)$.

Podemos concluir diciendo que si $\beta<\dfrac{1}{\lambda^*(A)}-1$ es posible la condición de equilibrio competitivo, esto es, resulta posible alcanzar una tasa de beneficio constante en todos los sectores.

7. BIBLIOGRAFIA.

AHIJADO, M. *Notas de microeconomía, asignación y distribución. Vol II.* Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid, 1988.

BELLMAN, R. *Introducción al Análisis Matricial.* Reverté. Barcelona, 1965.

BERMAN, A. PLEMMONS, R.J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York, 1979.

CABALLERO FERNANDEZ, R.E., A. GONZALEZ PAREJA y F.A. TRIGUERO RUIZ. *Métodos matemáticos para la economía I.* Ed. Alhambra Universidad. Madrid, 1982.

CARBO CARRE,R. HERNANDEZ BASORA, J.A. *Introducción a la teoría de matrices.* Ed. Alhambra. Madrid, 1976.

CHENERY, H.B. CLARK, P.G. *Economía interindustrial. Insumo-producto y programación lineal.* Ed. Fondo de Cultura Económica. México, 1963.

DEBREU, G. HERSTEIN, I.N. "Nonnegative square matrices" *Econometrica,* vol. 21, 1953.

DORFMAN, R., P. SAMUELSON y R. SOLOW. *Programación lineal y análisis económico.* Ed. Aguilar. Madrid, 1972.

FISHER, F. "Choice of units, column sums, and stability in linear dinamics systems with nonnegative square matrices" *Econometrica,* vol. 33, 1965.

FUJIMOTO, T. HERRERO, C. VILLAR, A. "A sensivity Analysis for Linear Systems invoiving M-matrices and its Application to the Leontief Model" *Linear Algebra and its Aplications,* 1983.

GANTMACHER, F.R. *Théorie des Matrices. Tome 2.* Ed. Dunod. París, 1966.

GUTIERREZ VALDEON, S. *Algebra lineal para la economía.* Ed. AC. Madrid, 1986.

HAWKINS, D. SIMON, H.A. "Note: Some Conditions on Macroeconomic Stability", *Econometrica,* vol. 17, pp 245-248, 1949.

HERRERO, C. SILVA, J.A. VILLAR, A. *Matrices semipositivas y modelos lineales.* Ed. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante. 1984.

HERRERO, C. "Análisis de la Existencia de solución con significado económico para sistemas lineales". *Cuadernos de Economía,* vol. 33, 1984.

LANCASTER, K. *Economía matemática.* Ed. Bosch. Barcelona, 1972.

LEONTIEF, W. *Análisis económico input-output.* Ed. Orbis. Barcelona, 1984.

MINC, H. *Nonnegative Matrices.* Wiley Interscience Publication. New York, 1988.

MUÑOZ CIDAD, C. *Introducción a la economía aplicada.* Ed. Espasa Calpe. Madrid, 1989.

NIKAIDO, H. *Métodos matemáticos del análisis económico moderno*. Ed. Vicens-Universidad. Barcelona, 1978.

RASMUSSEN, P.N. *Relaciones intersectoriales*. Ed. Aguilar. Madrid, 1963.

SOLOW,R. "On the structure on linear models" *Econometrica*. vol 20, nº1, 1952.

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
RELACIÓN DE DOCUMENTOS DE TRABAJO:

Doc. 001/88	***JUAN A. VAZQUEZ GARCIA**.- Las intervenciones estatales en la minería del carbón.*
Doc. 002/88	***CARLOS MONASTERIO ESCUDERO**.- Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.*
Doc. 003/88	***ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA**.- Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.*
Doc. 004/88	***JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- Una propuesta para la integración multijurisdiccional.*
Doc. 005/89	***LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO**.- La modernización del sector agrario en la provincia de León.*
Doc. 006/89	***JOSE MANUEL PRADO LORENZO**.- El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.*
Doc. 007/89	***JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).*
Doc. 008/89	***FELIX LOBO ALEU**.- El gasto público en productos industriales para la salud.*
Doc. 009/89	***FELIX LOBO ALEU**.- La evolución de las patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.*
Doc. 010/90	***RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES**.- Investigación de las preferencias del cosnumidor mediante análisis de conjunto.*
Doc. 011/90	***ANTONIO APARICIO PEREZ**.- Infracciones y sanciones en materia tributaria.*
Doc. 012/90	***MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA**.- Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.*
Doc. 013/90	***EQUIPO MECO**.- Medidas de desigualdad: un estudio analítico*
Doc. 014/90	***JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- Una estimación de las necesidades de gastos para los municipios de menor dimensión.*
Doc. 015/90	***ANTONIO MARTINEZ ARIAS**.- Auditoría de la información financiera.*
Doc. 016/90	***MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ**.- La población como variable endógena*
Doc. 017/90	***JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- La redistribución local en los países de nuestro entorno.*
Doc. 018/90	***RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO**.- "Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.*
Doc. 019/90	***RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ**.- La política de precios en los establecimientos detallistas.*
Doc. 020/90	***CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ**.- La demarcación de la economía (seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).*

Doc. 021/90 **JOAQUIN LORENCES**.- *Margen precio-coste variable medio y poder de monopolio.*

Doc. 022/90 **MANUEL LAFUENTE ROBLEDO; ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ**.- *El T.A.E. de las operaciones bancarias.*

Doc. 023/90 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ**.- *Amortización y coste de préstamos con hojas de cálculo.*

Doc. 024/90 **LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JEAN-MARC BUIGUES**.- *Un ejemplo de política municipal: precios y salarios en la ciudad de León (1613-1813).*

Doc. 025/90 **MYRIAM GARCIA OLALLA**.- *Utilidad de la teorías de las opciones para la administración financiera de la empresa.*

Doc. 026/91 **JOAQUIN GARCIA MURCIA**.- *Novedades de la legislación laboral (octubre 1990 - enero 1991)*

Doc. 027/91 **CANDIDO PAÑEDA**.- *Agricultura familiar y mantenimiento del empleo: el caso de Asturias.*

Doc. 028/91 **PILAR SAENZ DE JUBERA**.- *La fiscalidad de planes y fondos de pensiones.*

Doc. 029/91 **ESTEBAN FERNANDEZ SANCHEZ**.- *La cooperación empresarial: concepto y tipología (*)*

Doc. 030/91 **JOAQUIN LORENCES**.- *Características de la población parada en el mercado de trabajo asturiano.*

Doc. 031/91 **JOAQUIN LORENCES**.- *Características de la población activa en Asturias.*

Doc. 032/91 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ**.- *Política económica regional*

Doc. 033/91 **BENITO ARRUÑADA SANCHEZ**.- *La conversión coactiva de acciones comunes en acciones sin voto para lograr el control de las sociedades anónimas: De cómo la ingenuidad legal prefigura el fraude.*

Doc. 034/91 **BENITO ARRUÑADA SANCHEZ**.- *Restricciones institucionales y posibilidades estratégicas.*

Doc. 035/91 **NURIA BOSCH; JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- *Seven Hypotheses About Public Chjoice and Local Spending. (A test for Spanish municipalities).*

Doc. 036/91 **CARMEN FERNANDEZ CUERVO; LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ**.- *De una olvidada revisión crítica sobre algunas fuentes histórico-económicas: las ordenanzas de la gobernación de la cabrera.*

Doc. 037/91 **ANA JESUS LOPEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ**.- *Indicadores de desigualdad y pobreza. Nuevas alternativas.*

Doc. 038/91 **JUAN A. VAZQUEZ GARCIA; MANUEL HERNANDEZ MUÑIZ**.- *La industria asturiana: ¿Podemos pasar la página del declive?.*

Doc. 039/92 **INES RUBIN FERNANDEZ**.- *La Contabilidad de la Empresa y la Contabilidad Nacional.*

Doc. 040/92 **ESTEBAN GARCIA CANAL**.- *La Cooperación interempresarial en España: Características de los acuerdos de cooperación suscritos entre 1986 y 1989.*

Doc. 041/92 **ESTEBAN GARCIA CANAL**.- *Tendencias empíricas en la conclusión de acuerdos de cooperación.*

Doc. 042/92 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** *Novedades en la Legislación Laboral.*

Doc. 043/92 **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.-** *El comportamiento del consumidor y la estrategia de distribución comercial: Una aplicación empírica al mercado de Asturias.*

Doc. 044/92 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.-** *Un marco teórico para el estudio de las fusiones empresariales.*

Doc. 045/92 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.-** *Creación de valor en las fusiones empresariales a través de un mayor poder de mercado.*

Doc. 046/92 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.-** *Influencia relativa de la evolución demográfica en le futuro aumento del gasto en pensiones de jubilación.*

Doc. 047/92 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.-** *Aspectos demográficos del sistema de pensiones de jubilación español.*

Doc. 048/92 **SUSANA LOPEZ ARES.-** *Marketing telefónico: concepto y aplicaciones.*

Doc. 049/92 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *Las influencias familiares en el desempleo juvenil.*

Doc. 050/92 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *La adquisición de capital humano: un modelo teórico y su contrastación.*

Doc. 051/92 **MARTA IBAÑEZ PASCUAL.-** *El orígen social y la inserción laboral.*

Doc. 052/92 **JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.-** *Estudio del sector comercial en la ciudad de Oviedo.*

Doc. 053/92 **JULITA GARCIA DIEZ.-** *Auditoría de cuentas: su regulación en la CEE y en España. Una evidencia de su importancia.*

Doc. 054/92 **SUSANA MENENDEZ REQUEJO.-** *El riesgo de los sectores empresariales españoles: rendimiento requerido por los inversores.*

Doc. 055/92 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.-** *Una valoración económica de la obtención de productos derivados del petroleo a partir del carbón*

Doc. 056/92 **IGNACIO ALFREDO RODRIGUEZ-DEL BOSQUE RODRIGUEZ.-** *Consecuencias sobre el consumidor de las actuaciones bancarias ante el nuevo entorno competitivo.*

Doc. 057/92 **LAURA CABIEDES MIRAGAYA.-** *Relación entre la teoría del comercio internacional y los estudios de organización industrial.*

Doc. 058/92 **JOSE LUIS GARCIA SUAREZ.-** *Los principios contables en un entorno de regulación.*

Doc. 059/92 **Mª JESUS RIO FERNANDEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.-** *Cuantificación de la concentración industrial: un enfoque analítico.*

Doc. 060/94 **Mª JOSE FERNANDEZ ANTUÑA.-** *Regulación y política comunitaria en materia de transportes.*

Doc. 061/94 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *Factores determinantes de la afiliación sindical en España.*

Doc. 062/94 **VICTOR FERNANDEZ BLANCO.-** Determinantes de la localización de las empresas industriales en España: nuevos resultados.

Doc. 063/94 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** La crisis de la estructura multidivisional.

Doc. 064/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** Metodología de la investigación econométrica.

Doc. 065/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** Análisis Cualitativo de la fecundidad y participación femenina en el mercado de trabajo.

Doc. 066/94 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** La supervision colectiva de los actos de contratación: la Ley 2/1991 de información a los representantes de los trabajadores.

Doc. 067/94 **JOSE LUIS GARCIA LAPRESTA; Mª VICTORIA RODRIGUEZ URIA.-** Coherencia en preferencias difusas.

Doc. 068/94 **VICTOR FERNANDEZ; JOAQUIN LORENCES; CESAR RODRIGUEZ.-** Diferencias interterritoriales de salarios y negociacion colectiva en España.

Doc. 069/94 **Mª DEL MAR ARENAS PARRA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** Programación clásica y teoría del consumidor.

Doc. 070/94 **Mª DE LOS ÁNGELES MENÉNDEZ DE LA UZ; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** Tantos efectivos en los empréstitos.

Doc. 071/94 **AMELIA BILBAO TEROL; CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** Matrices especiales. Aplicaciones económicas.

Doc. 072/94 **RODOLFO GUTIÉRREZ.-** La representación sindical: Resultados electorales y actitudes hacia los sindicatos.

Doc. 073/94 **VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** Economías de aglomeración y localización de las empresas industriales en España.

Doc. 074/94 **JOAQUÍN LORENCES RODRÍGUEZ; FLORENTINO FELGUEROSO FERNÁNDEZ.-** Salarios pactados en los convenios provinciales y salarios percibidos.

Doc. 075/94 **ESTEBAN FERNÁNDEZ SÁNCHEZ; CAMILO JOSÉ VÁZQUEZ ORDÁS.-** La internacionalización de la empresa.

Doc. 076/94 **SANTIAGO R. MARTÍNEZ ARGÜELLES.-** Análisis de los efectos regionales de la terciarización de ramas industriales a través de tablas input-output. El caso de la economía asturiana.

Doc. 077/94 **VÍCTOR IGLESIAS ARGÜELLES.-** Tipos de variables y metodología a emplear en la identificación de los grupos estratégicos. Una aplicación empírica al sector detallista en Asturias.

Doc. 078/94 **MARTA IBÁÑEZ PASCUAL; F. JAVIER MATO DÍAZ.-** La formación no reglada a examen. Hacia un perfil de sus usuarios.

Doc. 079/94 **IGNACIO A. RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE RODRÍGUEZ.-** Planificación y organización de la fuerza de ventas de la empresa.

Doc. 080/94 **FRANCISCO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ.-** *La reacción del precio de las acciones ante anuncios de cambios en los dividendos.*

Doc. 081/94 **SUSANA MENÉNDEZ REQUEJO.-** *Relaciones de dependencia de las decisiones de inversión, financiación y dividendos.*

Doc. 082/95 **MONTSERRAT DÍAZ FERNÁNDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ; Mª del MAR LLORENTE MARRÓN.-** *Una aproximación empírica al comportamiento de los precios de la vivienda en España.*

Doc. 083/95 **Mª CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Matrices semipositivas y análisis interindustrial. Aplicaciones al estudio del modelo de Sraffa-Leontief.*

Doc. 084/95 **ESTEBAN GARCÍA CANAL.-** *La forma contractual en las alianzas domésticas e internacionales.*

Doc. 085/95 **MARGARITA ARGÜELLES VÉLEZ; CARMEN BENAVIDES GONZÁLEZ.-** *La incidencia de la política de la competencia comunitaria sobre la cohesión económica y social.*

Doc. 086/95 **VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** *La demanda de cine en España. 1968-1992.*

Doc. 087/95 **JUAN PRIETO RODRÍGUEZ.-** *Discriminación salarial de la mujer y movilidad laboral.*