D[r] WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMJI UMIEJĘTNOŚCI

ANALIZA

TOM I

CZĘŚC DRUGA:

DZIAŁANIA NIESKOŃCZONE

WYDANIE DRUGIE

Z ZASIŁKU WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA W. R. i O. P.

SKŁAD GŁÓWNY W KASIE IM. J. MIANOWSKIEGO
W WARSZAWIE (PAŁAC STASZICA N. ŚWIAT 72)
WARSZAWA 1925

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

TREŚĆ.

TOM I.

CZĘŚĆ DRUGA:

Działania nieskończone.

ROZDZIAŁ VIII.

Szeregi nieskończone o składnikach stałych.

ROZDZIAŁ IX.

Mnożenie szeregów. Szeregi podwójne.

ROZDZIAŁ X.

Teorja iloczynów nieskończonych.

ROZDZIAŁ XI.

Ułamki łańcuchowe.

ROZDZIAŁ XII.

Wiadomości podstawowe z teorji funkcji zmiennej zespolonej.

ROZDZIAŁ XIII.

Ciągi i szeregi funkcyj.

ROZDZIAŁ XIV.

Rozwijanie funkcyj ciągłych na szeregi wielomianów

ROZDZIAŁ XV.

Szeregi potęgowe.

CZĘŚĆ DRUGA.

Działania nieskończone.

ROZDZIAŁ VIII.

Szeregi nieskończone o składnikach stałych.

§ 70. **Szeregiem nieskończonym** nazywamy symbol

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots, \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

gdzie u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oznacza dany ciąg nieskończony liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Liczby $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nazywamy *składnikami* szeregu (1), mianowicie u_n — jego n-tym składnikiem.

Liczby

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{2}$$

nazywamy *sumami cząstkowemi* szeregu (1), mianowicie s_n — sumą cząstkową rzędu n. Jeżeli ciąg s_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest ograniczony, to szereg (1) nazywamy *ograniczonym*.

Szereg nieskończony nazywamy *zbieżnym*, jeżeli ciąg jego sum cząstkowych s_n jest zbieżny: granicę tego ostatniego nazywamy wówczas *sumą* uważanego szeregu. Każdy szereg zbieżny ma więc oznaczoną sumę (skończoną). Jeżeli

$$\lim_{n=\infty} s_n = s,$$

to piszemy

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots, \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Wzory te są więc równoważne równości

$$\lim_{n=\infty}(u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n)=s.$$

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy rozbieżnym. Jeżeli granicą ciągu (2) jest $+\infty$ (lub $-\infty$), to mówimy, że sumą szeregu (1) (rozbieżnego) jest $+\infty$ (lub $-\infty$).

Np. dla $u_n=\frac{1}{2^n}$ mamy $s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ i przeto $\lim_{n=\infty}s_n=1$, skąd

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

Podobnież, dla $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ mamy $s_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$
$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$, skąd $\lim_{n=\infty}s_n=1$, zatem

$$1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\ldots\ldots, \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

Wobec tożsamości

$$1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}, \quad \text{dla} \quad x\neq 1,$$

oraz wobec wzoru

$$\lim_{n=\infty}x^n=0, \quad \text{dla } |x|<1,$$

mamy

$$\lim_{n=\infty}(1+x+x^2+\ldots+x^n)=\frac{1}{1-x}, \quad \text{dla} \quad |x|<1,$$

czyli

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots, \quad \text{dla} \quad |x|<1.$$

Wobec umowy, przyjętej w § 15 co do przedstawiania liczb rzeczywistych zapomocą ułamków nieskończonych przy danej zasadzie, możemy każdy ułamek nieskończony $(c_0, c_1\,c_2\,c_3\ldots)_g$ przedstawić w postaci szeregu nieskończonego

$$(c_0, c_1\,c_2\,c_3\ldots)_g=c_0+\frac{c_1}{g}+\frac{c_2}{g^2}+\frac{c_3}{g^3}+\ldots\ldots$$

Wobec twierdzenia 39, dla zbieżności ciągu s_n, jak łatwo widzieć, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka, aby dla $n>\mu$ było przy wszelkiem naturalnem k:

$$|s_{n+k}-s_n|<\varepsilon;$$

stąd, wobec (2), otrzymujemy

Twierdzenie 81. *Na to żeby szereg nieskończony* (1) *był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka, aby dla $n > \mu$ było przy wszelkiem naturalnem k:*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon. \tag{3}$$

(Mniej ściśle, ale bardziej może obrazowo, moglibyśmy twierdzenie to wyrazić, mówiąc, że *dla zbieżności szeregu potrzeba i wystarcza, iżby suma ilukolwiek kolejnych, byleby dostatecznie dalekich, składników szeregu była dowolnie małą*).

Zauważymy, że jeżeli do każdej liczby dodatniej ε i każdej liczby naturalnej k można dobrać takie μ (zależne od ε i od k) iżby dla $n > \mu$ zachodziła zawsze nierówność (3), to szereg może nie być zbieżny, czego przykładem jest szereg harmoniczny

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots.$$

Mamy tu $u_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ i przeto dla $n > \mu = \frac{k}{\varepsilon}$:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k} < \frac{k}{n} < \varepsilon,$$

natomiast szereg nasz nie jest zbieżny, gdyż

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \text{ ogólnie}$$

$$\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^p} > \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{2} \quad (p = 2, 3, 4, \dots),$$

skąd w jednej chwili

$$s_{2^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^p} > \frac{p}{2},$$

co dowodzi, że sumy cząstkowe szeregu harmonicznego wzrastają nieograniczenie.

Z tw. 81 wnosimy natychmiast (przyjmując we wzorze (3) $k = 1$) iż w razie zbieżności szeregu (1) mamy

$$|u_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Zatem:

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu nieskończonego jest, iżby jego składniki zmierzały do zera.

Warunek ten nie jest jednak wystarczającym do zbieżności szeregu, jak tego dowodzi zbadany wyżej szereg harmoniczny.

§ 71. Co się tyczy szeregów o składnikach zespolonych, to mamy dla nich następujące

Twierdzenie 82. *Aby szereg nieskończony* $\sum u_n$ *o składnikach zespolonych* $u_n = a_n + b_n i$ *był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby szeregi o składnikach rzeczywistych* $\sum a_n$ *oraz* $\sum b_n$ *były oba zbieżne: jeżeli przytem pierwszy z nich daje sumę* s', *zaś drugi sumę* s'', *to sumą szeregu* $\sum u_n$ *jest liczba zespolona* $s' + s''i$ *i naodwrót.*

Dowód. Oznaczając przez s_n, s'_n oraz s''_n odpowiednio sumy cząstkowe rzędu n szeregów $\sum u_n$, $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$, będziemy mieli oczywiście

$$s_n = s'_n + s''_n i \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Lecz, w myśl tw. 78, równość

$$\lim_{n=\infty} (s'_n + s''_n i) = s' + s''i$$

jest równoważna równościom

$$\lim_{n=\infty} s'_n = s' \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} s''_n = s'',$$

skąd, wobec (4), wynika natychmiast prawdziwość naszego twierdzenia.

Zauważymy, że twierdzenie, iż moduł sumy nie przenosi sumy modułów, rozciąga się też na szeregi nieskończone. W samej rzeczy, niech s oznacza sumę szeregu zbieżnego $\sum u_n$, i połóżmy

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad S_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Ciąg S_n jest oczywiście niemalejący, zatem posiada granicę S (skończoną lub $+\infty$), która jest sumą szeregu nieskończonego $\sum |u_n|$. Mamy przytem, wobec (5) i w myśl tw. o module sumy:

$$|s_n| \leq S_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$:

$$|s| \leq S,$$

czyli

$$|u_1 + u_2 + u_3 + \ldots| \leq |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$$

c. b. d. o.

§ 72. Niech k_n $(n=1, 2, 3, \dots)$ oznacza ciąg nieskończony rosnący wskaźników. Załóżmy, że szereg (1) jest zbieżny i połóżmy

$$v_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1},$$

$$\text{zaś dla } n > 1\colon\ v_n = u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \dots u_{k_n}. \tag{6}$$

Powiadam, że szereg

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \tag{7}$$

będzie zbieżny i będzie posiadał tę samą sumę co i szereg (1).

W samej rzeczy, połóżmy:

$$s'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \tag{8}$$

Wobec (8) i (6) będzie, jak łatwo widzieć, w myśl (2):

$$s'_n = s_{k_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \tag{9}$$

Oznaczmy przez s sumę szeregu (1). Wobec (2) i definicji sumy szeregu, będzie

$$\lim_{n=\infty} s_n = s,$$

skąd. w myśl tw. 16, wynika też:

$$\lim_{n=\infty} s_{k_n} = s,$$

zatem wobec (9):

$$\lim_{n=\infty} s'_n = s,$$

co, wobec (8). dowodzi, że szereg (7) jest zbieżny i że sumą jego jest liczba s.

Dowiedliśmy więc, że w szeregu nieskończonym zbieżnym możemy kolejne składniki dowolnie łączyć w grupy, nie naruszając przez to zbieżności szeregu i nie zmieniając wartości jego sumy. Mamy więc, przy dowolnem rozstawieniu kolejnych nawiasów, równość:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = (u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1}) +$$
$$+ (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \dots + u_{k_2}) + (u_{k_2+1} + \dots + u_{k_3}) + \dots \tag{10}$$

Suma szeregu nieskończonego zbieżnego posiada więc *prawo łączności*, podobnie jak suma szeregu skończonego.

Zauważymy przytem, że prawo łączności zachodzi dla szeregu zbieżnego nawet wtedy, jeżeli ostatnia z grup, w które łączymy kolejne składniki, zawiera ich nieskończenie wiele, że mianowicie dla każdego ciągu skończonego wskaźników rosnących $k_1, k_2, \dots k_p$ mamy:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots =$$
$$= (u_1 + \dots + u_{k_1}) + \dots + (u_{k_{p-1}+1} + \dots + u_{k_p}) + \sigma, \tag{11}$$

gdzie

$$\sigma = u_{k_p+1} + u_{k_p+2} + \dots \tag{12}$$

W samej rzeczy, oznaczając

$$\sigma_n = u_{k_p+1} + u_{k_p+2} + \dots u_{k_p+n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{13}$$

będziemy mieli oczywiście, wobec (2):

$$s_{k_p+n} = s_{k_p} + \sigma_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, z uwagi, że wobec $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$, mamy też $\lim\limits_{n=\infty} s_{k_p+n} = s$, otrzymujemy:

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = \lim_{n=\infty} (s_{k_p+n} - s_{k_p}) = s - s_{k_p},$$

co, w myśl (13), dowodzi że szereg (12) jest zbieżny i że jego suma $\sigma = s - s_{k_p}$, skąd

$$s = s_{k_p} + \sigma,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (11), *c. b. d. o.*

W szczególności więc mamy dla szeregu zbieżnego (1) przy wszelkiem naturalnem n:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = u_1 + u_2 + \dots + u_n + r_n, \tag{14}$$

gdzie

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots;$$

liczbę r_n nazywamy *n-tą resztą* szeregu (1); wzór (14), który możemy, wobec (2), przepisać w postaci

$$s = s_n + r_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

daje, wobec $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$:

$$\lim_{n=\infty} r_n = 0,$$

t. j. *w szeregu zbieżnym reszty zmierzają do zera.*

Co się tyczy wzoru (10), to zauważymy jeszcze rzecz następującą. Zbieżność szeregu, stojącego po lewej stronie tego wzoru, pociąga za sobą, jak dowiedliśmy, zbieżność szeregu, stojącego po prawej stronie, oraz prawdziwość samego wzoru (10). Godnem uwagi jest atoli, że zbieżność szeregu, stojącego po prawej stronie wzoru (10), nie pociąga jeszcze za sobą zbieżności szeregu, stojącego po lewej stronie tego wzoru.

Np. szereg

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots,$$

którego wszystkie składniki są równe zeru, jest zbieżny (dając sumę $= 0$), zaś szereg

$$1-1+1-1+1-\ldots,$$

który otrzymujemy z poprzedniego przez opuszczenie nawiasów, nie jest zbieżny (gdyż jego składniki nie zmierzają do zera).

Ciekawem jest też, że szeregi

$$(u_1+\ldots+u_{k_1})+(u_{k_1+1}+\ldots+u_{k_2})+(u_{k_2+1}+\ldots+u_{k_3})+\ldots,$$

oraz

$$(u_1+\ldots+u_{l_1})+(u_{l_1+1}+\ldots+u_{l_2})+(u_{l_2+1}+\ldots+u_{l_3})+\ldots,$$

gdzie k_n oraz l_n są dwa ciągi wskaźników rosnących, mogą być oba zbieżne, ale dawać różne sumy, jak np. szeregi

$$(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+\ldots,$$

orsz

$$1+(2-3+1)+(2-3+1)+\ldots,$$

z których pierwszy daje sumę 0, zaś drugi — sumę 1.

Możemy nawet zbudować szereg, którego suma przy odpowiedniem połączeniu składników w grupy przedstawiać może dowolną liczbę rzeczywistą.

Ustawmy w tym celu w ciąg nieskończony w_n wszystkie liczby wymierne (sposobem wskazanym w § 9) i połóżmy

$$u_1=w_1, \quad \text{zaś} \quad u_n=w_n-w_{n-1}, \quad \text{dla} \quad n=2, 3, \ldots \tag{15}$$

Powiadam, że szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\ldots \tag{16}$$

będzie posiadał żądaną własność.

W samej rzeczy, niech x oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą (skończoną lub nieskończoną). Obierzmy ciąg nieskończony różnych liczb wymiernych x_n, taki iż $\lim_{n=\infty} x_n=x$. Oznaczmy przez $w_{k_1}, w_{k_2}, w_{k_3}, \ldots$ te kolejne wyrazy ciągu w_n, które są zarazem wyrazami ciągu x_n: ciąg w_{k_n} $(n=1, 2, 3, \ldots)$ będzie się różnił oczywiście conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu x_n i przeto, wobec $\lim_{n=\infty} x_n=x$ oraz w myśl tw. 15, będzie też

$$\lim_{n=\infty} w_{k_n}=x. \tag{17}$$

Połączmy teraz składniki szeregu (16) w grupy w następujący sposób:

$$(u_1+\ldots+u_{k_1})+(u_{k_1+1}+\ldots+u_{k_2})+\ldots+(u_{k_{n-1}+1}+\ldots+u_{k_n})+\ldots \tag{18}$$

Oznaczając przez σ_n sumę n pierwszych grup, będziemy mieli, w myśl (15):

$$\sigma_n=u_1+u_2+\ldots+u_{k_n}=w_1+(w_2-w_1)+(w_3-w_2)+\ldots+(w_{k_n}-w_{k_n-1})=w_{k_n},$$

zatem, wobec (17):

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n=\lim_{n=\infty} w_{k_n}=x,$$

co dowodzi, że suma szeregu (18) jest liczba x.

Powyższy wynik możnaby jeszcze uogólnić: możnaby mianowicie zbudować szereg wielomianów, którego suma przy odpowiedniem ugrupowaniu składników przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą. (Zob. § 122).

Zauważymy jednak, że przy pewnych warunkach zbieżność szeregu, stojącego po prawej stronie wzoru (10), może pociągać za sobą zbieżność szeregu, stojącego po lewej stronie, a stąd i prawdziwość samego wzoru (10).

Rozpatrzymy tu jeden z takich warunków, najczęściej stosowanych.

Powiadam, że *jeżeli prawa strona wzoru* (10) *jest szeregiem zbieżnym i jeżeli w każdej grupie* (v_n) *wszystkie składniki* ($u_{k_{n-1}+1}, u_{k_{n-1}+2}, \dots u_{k_n}$) *są jednego znaku* (t. j. bądź ≥ 0, bądź też ≤ 0, przyczem składniki, należące do różnych grup, mogą być różnych znaków), *to wzór* (10) *jest prawdziwy*.

Załóżmy więc, że szereg (7) jest zbieżny, oraz że zachodzą wzory (6). Wyznaczmy liczby s_n oraz s'_n ze wzorów (2) oraz (8) i połóżmy

$$\lim_{n=\infty} s'_n = s'. \tag{19}$$

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec (19), będzie dla dostatecznie wielkich m, np. dla $m \geq q$, gdzie q jest pewną liczbą naturalną:

$$|s'_m - s'| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |s'_m - s'_{m+1}| < \varepsilon. \tag{20}$$

Niech teraz n oznacza wskaźnik $> k_q$. Ponieważ ciąg wskaźników k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest rosnący, zaś n oznacza liczbę $> k_q$, więc musi istnieć takie $m \geq q$, iż

$$k_m < n \leq k_{m+1}:$$

wobec (2) mamy więc

$$s_n = s_{k_m} + u_{k_m+1} + \dots + u_n = s_{k_{m+1}} - u_{n+1} - \dots - u_{k_{m+1}}$$

zatem wobec (9):

$$\left.\begin{aligned} s_n - s'_m &= u_{k_m+1} + \dots + u_n \\ \text{oraz} \qquad s'_{m+1} - s_n &= u_{n+1} + \dots + u_{k_{m+1}}; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ponieważ zaś, w myśl założenia, składniki

$$u_{k_m+1}, \dots u_n, u_{n+1}, \dots u_{k_{m+1}},$$

jako należące do tej samej grupy (v_{m+1}), są jednego znaku, więc, wobec (21), mamy albo jednocześnie

$$s_n - s'_m \geq 0 \quad \text{oraz} \quad s'_{m+1} - s_n \geq 0,$$

albo też jednocześnie

$$s_n - s'_m \leq 0 \quad \text{oraz} \quad s'_{m+1} - s_n \leq 0,$$

więc albo

$$s'_m \leq s_n \leq s'_{m+1},$$

albo też

$$s'_m \geq s_n \geq s'_{m+1},$$

skąd w każdym razie

$$| s_n - s'_m | \leq | s'_m - s'_{m+1} |,$$

zatem, wobec (20):

$$| s_n - s'_m | < \varepsilon$$

oraz

$$| s_n - s' | = | (s_n - s'_m) + (s'_m - s') | < 2\varepsilon,$$

czyli

$$| s_n - s' | < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > k_q,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} s_n = s',$$

czyli że zachodzi wzór (10), *c. b. d. o.*

Z dowiedzionych twierdzeń wnosimy w szczególności, że w każdym szeregu nieskończonym możemy odrzucić wszystkie składniki równe zeru, nie zmieniając przez to kwestji zbieżności szeregu ani też ewentualnej wartości jego sumy: odrzucenie bowiem składników równych zeru jest równoważne połączeniu każdego ciągu kolejnych równych zeru składników w jedną grupę z poprzedzającym je (lub następującym po nich) różnym od zera składnikiem szeregu.

§ 73. Zbieżność ciągu nieskończonego i ewentualna wartość jego granicy nie zależy, jak wiemy, od porządku jego wyrazów (tw. 15). Natomiast zbieżność szeregu nieskończonego i ewentualna wartość jego sumy zależy wogóle od porządku jego składników. Np. mamy

$$0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$$

(gdyż, jak łatwo widzieć, $| s_n | \leq \frac{2}{n+1}$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$); jeżeli jednak zmienimy porządek składników naszego szeregu, wypisując po każdych dwóch dodatnich jeden ujemny, to otrzymamy szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \cdots \tag{22}$$

którego sumą nie jest już zero, gdyż mamy tu

$$s_{3n}=s_{3(n-1)}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=s_{3(n-1)}+\frac{1}{(2n-1)2n}>s_{3(n-1)},$$

zatem $s_{3n}>s_3=\frac{1}{2}$, czyli stale $s_{3n}\geq\frac{1}{2}$, dla $n=1,2,3,\ldots$

(Wobec $s_{3n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$ oraz w myśl wzoru (52) z § 51, możnaby wywnioskować, że suma szeregu (22) jest liczba lg 2).

Podobnież mamy

$$0=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$$

natomiast szereg

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$$

nie jest zbieżny, gdyż mamy w nim

$$s_{3n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{n}{\sqrt{2n}},$$

czyli $s_{3n}>\sqrt{\frac{n}{2}}$, dla $n=1,2,3,\ldots$.

Szereg nieskończony, który jest zbieżny przy wszelkiem uporządkowaniu składników, nazywamy *zbieżnym bezwarunkowo*.

Szereg

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

dla którego szereg odpowiednich wartości bezwzględnych, czyli szereg

$$|u_1|+|u_1|+|u_3|+\cdots$$

jest zbieżny, nazywamy szeregiem *zbieżnym bezwzględnie*.

Okażemy, że *zbieżność bezwarunkowa szeregu jest równoważna ze zbieżnością bezwzględną*.

Przedewszystkiem określimy ściśle, co nazywamy szeregami, różniącemi się conajwyżej porządkiem składników.

O szeregu nieskończonym

$$v_1+v_2+v_3+\cdots \tag{23}$$

mówimy, że się różni conajwyżej porządkiem składników od szeregu

$$u_1+u_2+u_3+\cdots \tag{24}$$

jeżeli istnieje ciąg nieskończony k_n ($n=1,2,3,\ldots$), różniący się conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu 1, 2, 3, . . . (t. j. ciąg liczb naturalnych k_n, który zawiera każdą liczbę naturalną raz i tylko raz), taki iż

$$u_{k_n} = v_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

Łatwo widzieć, że wówczas i szereg (24) różni się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (23).

W samej rzeczy, skoro ciąg liczb naturalnych k_n zawiera każdą liczbę naturalną raz i tylko raz, więc dla każdej liczby naturalnej r istnieje jeden i tylko jeden wskaźnik n_r, taki iż

$$k_{n_r} = r. \tag{26}$$

Powiadam, że ciąg liczb naturalnych n_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ zawiera każdą liczbę naturalną raz i tylko raz.

Że ciąg n_r zawiera każdą liczbę naturalną conajwyżej raz, t. j. że wszystkie wyrazy jego są różne, wynika z uwagi, że w razie $n_r = n_{r'}$ mielibyśmy $k_{n_r} = k_{n_{r'}}$, skąd, w myśl (26), $r = r'$. Że zaś ciąg n_r zawiera każdą liczbę naturalną, wynika z uwagi, że przy wszelkiem naturalnem s, wobec (26) (dla $r = k_s$), mamy $k_{n_{k_s}} = k_s$; skąd, skoro wszyskie wyrazy ciągu k_n są różne, wynika, że

$$n_{k_s} = s \quad (\text{dla } s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ciąg n_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ różni się więc conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu $1, 2, 3, \ldots$, przytem, w myśl (25), mamy

$$u_{k_{n_r}} = v_{n_r}, \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, 3, \ldots,$$

zatem, wobec (26):

$$v_{n_r} = u_r, \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

co dowodzi, że szereg (24) różni się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (23), *c. b. d. o.*

Załóżmy teraz, że szereg nieskończony

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots \tag{27}$$

jest zbieżny. W myśl tw. 81, dla każdej liczby dodatniej ε istnieje więc liczba μ taka, iż przy wszelkiem naturalnem p:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \tag{28}$$

skąd, tembardziej

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi, w myśl tw. 81, że szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{29}$$

też jest zbieżny. Oznaczmy przez s sumę tego szeregu.

Kładąc

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{30}$$

będziemy więc mieli

$$\lim_{n=\infty} s_n = s. \tag{31}$$

Niech, dalej,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \tag{32}$$

oznacza szereg, różniący się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (29): istnieje więc ciąg nieskończony wskaźników k_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), różniący się conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu 1, 2, 3, . . . i taki, iż

$$u_{k_n} = v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{33}$$

Połóżmy

$$s'_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n. \tag{34}$$

Wobec (28), dla danej liczby dodatniej ε istnieje taki wskaźnik m, iż

$$|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots |u_{m+p}| < \varepsilon, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Ciąg nieskończony wskaźników k_n różni się conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu 1, 2, 3, . . .: możemy więc wyznaczyć liczbę q tak wielką, iżby w ciągu

$$k_1, k_2, \ldots k_q$$

była zawartą każda z liczb

$$1, 2, \ldots m; \tag{36}$$

tembardziej więc każda z tych liczb będzie zawartą w ciągu

$$k_1, k_2, \ldots k_n \tag{37}$$

dla $n > q$.

Po usunięciu liczb (36) z ciągu (37), pozostaną w nim oczywiście wskaźniki

$$k', k'', \ldots k^{(n-m)},$$

które wszystkie będą różne i przytem większe od m, oraz będziemy mogli napisać:

$$u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_n} - (u_1 + u_2 + \ldots + u_m) = u_{k'} + u_{k''} + \ldots + u_{k^{(n-m)}}, \tag{38}$$

gdzie

$$k^{(j)} > m, \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots n - m. \tag{39}$$

Wobec (33), (34) i (30), wzór (38) daje:

$$s_n' - s_m = u_{k'} + u_{k''} + \ldots + u_{k^{(n-m)}}. \tag{40}$$

Oznaczmy przez $m+p$ największą z liczb $k^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots m - n)$ wobec (39) liczby $k^{(j)}$ będą stanowiły część wyrazów ciągu

$$m+1,\ m+2 \ldots m+p$$

i przeto będzie

$$|u_{k'}| + |u_{k''}| + \ldots + |u_{k^{(n-m)}}| \leq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots + |u_{m+p}|:$$

skąd, wobec (40) oraz (35):

$$|s_n' - s_m| < \varepsilon. \tag{41}$$

Wobec (30) oraz (35) mamy, dla $k > m$:

$$|s_k - s_m| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_k| < \varepsilon,$$

skąd, w granicy dla $k = \infty$, wobec (31):

$$|s - s_m| \leq \varepsilon. \tag{42}$$

Nierówności (41) i (42) dają w jednej chwili:

$$|s_n' - s| = |s_n' - s_m + s_m - s| \leq |s_n' - s_m| + |s_m - s| < 2\varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego wskaźnika $n > q$ zachodzi nierówność

$$|s_n' - s| < 2\varepsilon,$$

skąd wynika natychmiast, że

$$\lim_{n=\infty} s_n' = s,$$

czyli wobec (34), że szereg (32) jest zbieżny i że sumą jego jest liczba s. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 83. *Jeżeli szereg (27) jest zbieżny, to zbieżnym jest szereg (29), oraz każdy szereg, różniący się od szeregu (29) conajwyżej porządkiem składników, przyczem każdy taki szereg ma tę samą sumę co szereg (29).*

Z dowiedzionego twierdzenia wynika natychmiast, że zbieżność szeregu (27) pociąga za sobą zbieżność bezwarunkową szeregu (29), czyli że *szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny bezwarunkowo.*

Zauważymy dalej, że na to iżby szereg (27) był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby ciąg jego sum cząstkowych

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{43}$$

był ograniczony. W samej rzeczy, ciąg (43) jest oczywiście niemalejący i jako taki posiada granicę, która jest liczbą skończoną lub $+\infty$, zależnie od tego czy ciąg (43) jest ograniczony czy też nie; szereg zaś (27) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, jeżeli ciąg (43) posiada granicę skończoną.

§ 74. Okażemy teraz, że szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nie może być zbieżnym bezwarunkowo.

Zauważmy przedewszystkiem, że twierdzenie nasze wystarczy udowodnić dla szeregów o składnikach rzeczywistych. Załóżmy, w samej rzeczy, żeśmy go dowiedli dla szeregów o składnikach rzeczywistych i niech (29) oznacza szereg o składnikach zespolonych, który nie jest zbieżny bezwzględnie. Szereg (27) nie jest więc zbieżny. Połóżmy

$$u_n = u_n' + u_n'' i, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{44}$$

gdzie u_n' oraz u_n'' $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby rzeczywiste.

Gdyby szeregi $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} | u_n' |$ oraz $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} | u_n'' |$ były oba zbieżne, to oznaczając ich sumy przez A' i A'', mielibyśmy oczywiście przy wszelkiem n:

$$|u_1'| + |u_2'| + \ldots + |u_n'| \leq A' \text{ oraz } |u_1''| + |u_2''| + \ldots + |u_n''| \leq A'',$$

skąd, wobec oczywistej nierówności

$$|u_k| = |u_k' + u_k'' i| \leq |u_k'| + |u_k'' i| = |u_k'| + |u_k''| \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

znaleźlibyśmy przy wszelkiem naturalnem n:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_k| \leq A' + A''$$

i szereg (27) byłby (w myśl uwagi końcowej § 73) zbieżny, wbrew założeniu. Jeden więc conajmniej z szeregów $\Sigma |u_n'|$ oraz $\Sigma |u_n''|$ musi być rozbieżnym. Lecz w takim razie, w myśl założenia, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla szeregów o składnikach rzeczywistych, jeden conajmniej z szeregów $\Sigma u_n'$ oraz $\Sigma u_n''$ nie jest zbieżnym bezwarunkowo, skąd oczywiście wynika, że i szereg $\Sigma (u_n' + u_n'' i)$, czyli, w myśl (44), szereg Σu_n, nie jest zbieżnym bezwarunkowo. Okazaliśmy więc, że twierdzenie nasze wystarczy udowodnić dla szeregów o składnikach rzeczywistych.

Załóżmy więc, że szereg (29) jest szeregiem o składnikach rzeczywistych, dla którego szereg (27) nie jest zbieżny. Co do sa mego szeregu (29), to możemy zakładać, że jest on zbieżny, gdyż w przeciwnym razie twierdzenie nasze byłoby oczywiście prawdziwe.

Z założenia, że szereg (29) jest zbieżny, wynika, jak wiemy, że

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0. \tag{45}$$

Oznaczmy przez

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{46}$$

kolejne składniki nieujemne szeregu (29), zaś przez

$$-b_1, -b_2, -b_3 \ldots \tag{47}$$

— kolejne składniki ujemne szeregu (29) i połóżmy

$$\left.\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \end{aligned}\right| \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{48}$$

Przypuśćmy, dalej, że na n pierwszych składników szeregu (29) przypada p_n nieujemnych oraz q_n ujemnych ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Ciągi p_n i q_n będą oczywiście niemalejące, przyczem $p_n + q_n = n$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Określając ciągi s_n oraz σ_n wzorami (30) oraz (43), będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= A_{p_n} - B_{q_n} \\ \text{oraz}\quad & \\ \sigma_n &= A_{p_n} + B_{q_n} \end{aligned}\right| \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(rozumiejąc przez A_0 oraz B_0 zero), skąd

$$A_{p_n} = \frac{\sigma_n + s_n}{2} \text{ oraz } B_{q_n} = \frac{\sigma_n - s_n}{2} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots;$$

wzory te, z uwagi że ciąg s_n jest zbieżny (gdyż, jak zakładamy, szereg (29) jest zbieżny), oraz że $\lim_{n=\infty} \sigma_n = +\infty$ (gdyż, w myśl założenia, szereg (27) nie jest zbieżny), dowodzą, że

$$\lim_{n=\infty} A_{p_n} = +\infty \text{ oraz } \lim_{n=\infty} B_{q_n} = +\infty. \tag{49}$$

Ponieważ zaś ciągi A_n oraz B_n są niemalejące, więc, wobec (49), wnosimy z łatwością, iż

$$\lim_{n=\infty} A_n = +\infty \text{ oraz } \lim_{n=\infty} B_n = +\infty. \tag{50}$$

(Gdyż, wobec (49), będzie, przy dowolnem danem K, dla dostatecznie wielkiego m: $A_{p_m} > K$, zatem, dla $n \geq p_m$ też $A_n \geq A_{p_m} > K$).

Wynika stąd, w szczególności, że szereg (29) musi zawierać nieskończenie wiele składników dodatnich i nieskończenie wiele składników ujemnych.

Wobec (50) mamy też przy wszelkiem danem k:

$$\lim_{n=\infty} (A_n - A_k) = +\infty$$

i przeto dla każdego wskaźnika k istnieje taki wskaźnik $n > k$, iż

$$A_n - A_k > 1.$$

Istnieje więc ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n, taki iż

$$\left.\begin{aligned} A_{k_1} &> 1, \\ A_{k_2} - A_{k_1} &> 1, \\ A_{k_3} - A_{k_2} &> 1, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{k_n} - A_{k_{n-1}} &> 1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right| \quad (51)$$

(W szczególności, możemy jako liczby k_n obrać najmniejsze wskaźniki, spełniające wypisane nierówności).

Weźmy teraz pod rozwagę szereg nieskończony

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} - b_1 + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2} - b_2 + a_{k_2+1} + \dots$$
$$\dots + a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \dots + a_{k_n} - b_n + a_{k_n+1} + \dots \quad (52)$$

Szereg ten różni się oczywiście conajwyżej porządkiem składników od szeregu (29): nie jest on jednak zbieżny, gdyż mamy przy wszelkiem naturalnem n (w myśl (51)):

$$a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \dots + a_{k_n} = A_{k_n} - A_{k_{n-1}} > 1$$

(zaś w razie zbieżności szeregu (52) wypisana suma musiałaby przy dostatecznie wielkiem n być dowolnie małą, jako suma dostatecznie dalekich kolejnych składników szeregu).

Możemy nawet dowieść, że suma szeregu (52) jest $+\infty$. W samej rzeczy, niech R oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą.

Nierówności (51) dają w jednej chwili

$$A_{k_n} > n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

Z drugiej strony, ponieważ wyrazy ciągu (47) są składnikami szeregu (29), więc mamy

$$-b_n = u_{l_n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (54)$$

przyczem ciąg wskaźników l_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest rosnący, gdyż $-b_{n+1}$ jest dalszym składnikiem szeregu (29) niż $-b_n$.

Stąd, wobec (45), znajdujemy:

$$\lim_{n=\infty} u_{l_n} = 0,$$

skąd, w myśl (54):

$$\lim_{n=\infty} b_n = 0.$$

Istnieje więc wskaźnik h taki, iż

$$b_n < \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad n > h. \tag{55}$$

Obierzmy, dalej, wskaźnik m tak wielki, iżby było

$$m > h \quad \text{oraz} \quad \frac{m}{2} - B_h > R. \tag{56}$$

Ciąg $r_j = k_j + j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ jest oczywiście rosnący: jeżeli więc n oznacza wskaźnik $> k_m + m$, to musi istnieć takie $p \geq m$, iż $r_p \leq n < r_{p+1}$, czyli

$$k_p + p \leq n < k_{p+1} + (p + 1). \tag{57}$$

Oznaczmy przez S_n sumę n pierwszych składników szeregu (52): wobec (57) oraz (48), będzie, jak łatwo widzieć:

$$S_n = A_{k_p} - B_p + a_{k_p+1} + a_{k_p+2} + \ldots + a_{n-p}$$

(w razie $n = k_p + p$ mielibyśmy poprostu $S_n = A_{k_p} - B_p$), zatem, z uwagi, że wyrazy ciągu (46) są nieujemne, oraz w myśl (53):

$$S_n > p - B_p = p - B_h - (B_p - B_h); \tag{58}$$

lecz, w myśl (48) (wobec $p \geq m > h$):

$$B_p - B_h = b_{h+1} + b_{h+2} + \ldots + b_p,$$

zatem, w myśl (55):

$$B_p - B_h < \frac{p-h}{2} < \frac{p}{2}$$

i przeto wzór (58) daje:

$$S_n > p - B_h - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} - B_h,$$

skąd, wobec $p \geq m$ oraz w myśl (56):

$$S_n > R. \tag{59}$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkim wskaźniku $n > \nu$, gdzie $\nu = k_m + m$, zachodzi nierówność (59), co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} S_n = +\infty,$$

czyli, że suma szeregu (52) jest $+\infty$, *c. b. d. o.*

Dowiedliśmy zatem, że szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nie może być zbieżnym bezwarunkowo. Wynika stąd natychmiast, że każdy szereg, zbieżny bezwarunkowo, musi być zbieżnym bezwzględnie, a że w § 73 dowiedliśmy twierdzenia odwrotnego, więc udowodniliśmy

Twierdzenie 84. *Na to iżby szereg był zbieżnym bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza iżby był zbieżnym bezwzględnie.*

Wobec tw. 84 i 83 dochodzimy też do wniosku, że *suma szeregu zbieżnego bezwarunkowo nie zależy od porządku składników.*

§ 75. Szereg, który jest zbieżny, ale nie bezwarunkowo (lub, co wobec tw. 84 wychodzi na jedno, nie bezwzględnie), nazywamy *zbieżnym warunkowo.* Szereg zbieżny warunkowo może więc przy odpowiedniej zmianie uporządkowania składników przejść na szereg rozbieżny.

Okażemy obecnie, że z każdego szeregu o składnikach rzeczywistych, zbieżnego warunkowo, można, zmieniając odpowiednio porządek jego składników, otrzymać szereg mający dowolną (rzeczywistą) daną naprzód sumę (tw. Riemann'a).

Niech więc (29) oznacza dany szereg o składnikach rzeczywistych, zbieżny warunkowo, i niech (46) i (47) będą kolejne jego składniki nieujemne oraz ujemne. Zachowując znakowanie z poprzedniego paragrafu, będziemy mieli wzory (50).

Niech L oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą.

Oznaczmy przez α_1 najmniejszy wskaźnik n, taki iż

$$A_n > L$$

(wskaźnik taki istnieje, wobec (50); dalej, oznaczmy przez β_1 najmniejszy wskaźnik n, taki iż

$$A_{\alpha_1} - B_n < L$$

(wskaźnik taki istnieje, gdyż wobec (50)): $\lim_{n=\infty} (A_{\alpha_1} - B_n) = -\infty$).

Ogólnie, dla $k = 2, 3, 4, \ldots$, oznaczmy przez α_k najmniejszy wskaźnik n, taki iż

$$n > \alpha_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_n - B_{\beta_{k-1}} > L, \tag{60}$$

zaś przez β_k oznaczmy najmniejszy wskaźnik n, taki iż

$$n > \beta_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_{\alpha_k} - B_n < L. \tag{61}$$

Połóżmy

$$v_1 = A_{\alpha_1}, \quad v_2 = -B_{\beta_1},$$

zaś dla $k > 1$: $v_{2k-1} = A_{\alpha_k} - A_{\alpha_{k-1}}, \quad v_{2k} = -B_{\beta_k} + B_{\beta_{k-1}}.$ (62)

Kładąc

$$V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{63}$$

będziemy mieli, wobec (62), dla $k > 1$:

$$\left.\begin{aligned} V_{2k-1} &= v_1 + v_2 + \ldots + v_{2k-2} + v_{2k-1} = A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} \\ \text{oraz}\quad V_{2k} &= v_1 + v_2 + \ldots + v_{2k-1} + v_{2k} = A_{\alpha_k} - B_{\beta_k}. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Ponieważ, dla $k > 1$, α_k oznacza najmniejszy wskaźnik n, spełniający warunki (60), więc dla $n = \alpha_k - 1$ nie zachodzi conajmniej jeden z tych warunków: innemi słowy, zachodzi conajmniej jedna z nierówności

$$\alpha_k - 1 \leq \alpha_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_{\alpha_k - 1} - B_{\beta_{k-1}} \leq L. \tag{65}$$

Lecz, z definicji ciągu β_k wynika, że (dla $k > 1$):

$$A_{\alpha_{k-1}} - B_{\beta_{k-1}} < L; \tag{66}$$

ponieważ zaś ciąg α_k jest oczywiście rosnący, więc mamy $\alpha_k - 1 \geq \alpha_{k-1}$: w razie $\alpha_k - 1 \leq \alpha_{k-1}$ mamy więc $\alpha_{k-1} = \alpha_k - 1$ i, wobec (66), otrzymujemy drugą z nierówności (65).

Druga z nierówności (65) zachodzi więc w każdym razie (dla $k > 1$), skąd, z uwagi, że wobec (48)

$$A_{\alpha_k - 1} = A_{\alpha_k} - a_{\alpha_k},$$

otrzymujemy:

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} \leq L + a_{\alpha_k}; \tag{67}$$

z drugiej strony, wobec definicji liczby α_k, mamy

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} > L: \tag{68}$$

nierówności (67) i (68) dają więc, wobec (64):

$$L < V_{2k-1} \leq L + a_{\alpha_k}, \quad \text{dla } k > 1 \tag{69}$$

Podobnież, ponieważ, dla $k > 1$, β_k oznacza najmniejszy wskaźnik, spełniający warunki (61), więc dla $n = \beta_k - 1$ nie zachodzi conajmniej jeden z nich: innemi słowy, zachodzi conajmniej jedna z nierówności:

$$\beta_k - 1 \leq \beta_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_{\alpha_k} - B_{\beta_k - 1} \geq L. \tag{70}$$

Jażeli zachodzi pierwsza z tych nierówności, to, z uwagi, że ciąg β_k jest rosnący (skąd $\beta_k - 1 \geq \beta_{k-1}$), wnosimy, że $\beta_{k-1} = \beta_k - 1$, skąd, wobec (68), otrzymujemy drugą z nierówności (70). Druga z nierówności (70) zachodzi więc (dla $k > 1$) w każdym razie, skąd, z uwagi, że wobec (48)

$$B_{\beta_k-1} = B_{\beta_k} + b_{\beta_k},$$

otrzymujemy:

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_k} \geq L - b_{\beta_k}; \tag{71}$$

z drugiej strony, w myśl definicji liczby β_k, mamy:

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_k} < L: \tag{72}$$

nierówności (71) i (72) dają więc, wobec (64):

$$L - b_{\beta_k} \leq V_{2k} < L, \quad \text{dla} \quad k > 1. \tag{73}$$

Wyrazy ciągu (46) są składnikami szeregu (29): mamy więc

$$a_n = u_{r_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{74}$$

przyczem ciąg wskaźników r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest rosnący, gdyż a_{n+1} jest dalszym składnikiem szeregu (29), niż a_n. Stąd, wobec (45), znajdujemy

$$\lim_{n=\infty} u_{r_n} = 0,$$

skąd, wobec (74):

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

oraz, z uwagi że ciąg wskaźników α_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ jest rosnący:

$$\lim_{k=\infty} a_{\alpha_k} = 0. \tag{75}$$

Podobnież znaleźlibyśmy:

$$\lim_{k=\infty} b_{\beta_k} = 0. \tag{76}$$

Nierówności (69) i (73) dają więc w jednej chwili, wobec (75) i (76):

$$\lim_{k=\infty} V_{2k-1} = L, \quad \text{oraz} \quad \lim_{k=\infty} V_{2k} = L,$$

skąd, w myśl tw. 18:

$$\lim_{k=\infty} V_k = L,$$

czyli, wobec (63):

$$L = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \tag{77}$$

Lecz szereg (77) możemy, wobec (62) i (48), napisać w postaci:

$$L = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{\alpha_1}) + (-b_1 - b_2 - \ldots - b_{\beta_1}) +$$
$$+ (a_{\alpha_1+1} + \ldots + a_{\alpha_2}) + (b_{\beta_1+1} - \ldots - b_{\beta_2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{\alpha_{k-1}+1} + \ldots + a'_{\alpha_k}) + (-b_{\beta_{k-1}+1} - \ldots - b_{\beta_k}) + \ldots,$$

przyczem składniki tej samej grupy są zawsze jednego znaku. W myśl twierdzenia, udowodnionego w § 72, możemy więc opuścić wszędzie nawiasy, nie zmieniając przez to sumy szeregu; mamy zatem:

$$L = a_1 + a_2 + \ldots + a_{\alpha_1} - b_1 - b_2 - \ldots - b_{\beta_1} +$$
$$+ a_{\alpha_1+1} + \ldots + a_{\alpha_2} - b_{\beta_1+1} - \ldots - b_{\beta_2} + a_{\alpha_2+1} + \ldots,$$

przyczem wypisany szereg różni się oczywiście conajwyżej porządkiem składników od szeregu (29).

Dowiedliśmy więc, że z szeregu (29) można przez odpowiednią zmianę porządku składników otrzymać szereg, mający dowolną, daną naprzód skończoną sumę L. W § 74 dowiedliśmy, że z szeregu (29) można, zmieniając porządek jego składników, utworzyć szereg, którego sumą jest $+\infty$, i analogicznie moglibyśmy dowieść, że można z szeregu (29) przez stosowną zmianę porządku składników, otrzymać szereg, którego sumą jest $-\infty$. Ostatecznie więc możemy wypowiedzieć

Twierdzenie 85. (Riemann'a). *Z każdego szeregu o składnikach rzeczywistych, zbieżnego warunkowo, można, zmieniając jedynie porządek jego składników, otzymać szereg, którego suma jest dowolną, daną naprzód liczbą rzeczywistą, skończoną lub nieskończoną.*

Zauważymy jeszcze, że modyfikując nieco nasz dowód, moglibyśmy okazać, że z każdego szeregu zbieżnego warunkowo można przez odpowiednią zmianę porządku jego składników otrzymać szereg, którego sumy cząstkowe posiadają dowolne, dane naprzód (skończone lub nieskończone) granicę dolną l i górną $\bar{l}$ (byleby naturalnie było $l \leq \bar{l}$).

Jako pouczający przykład konkretny na dowiedzione twierdzenie, zbadamy szereg anharmoniczny

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{78}$$

Sumą tego szeregu jest, jak to wynika natychmiast ze wzoru 51 § 51, liczba lg 2. Szereg (78) jest zbieżny tylko warunkowo, gdyż szeregiem odpowiednich modułów jest szereg harmoniczny.

Zmieńmy porządek składników szeregu (78), wypisując najprzód p_1 pierwszych jego składników dodatnich, następnie q_1 pierwszych jego składników ujemnych, po nich p_2 dalszych składników dodatnich, później q_2 dalszych składników ujemnych i t. d. Utworzymy w ten sposób szereg

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p_1-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2q_1}+\frac{1}{2p_1+1}+$$
$$+\frac{1}{2p_1+3}+\ldots+\frac{1}{2(p_1+p_2)-1}-\frac{1}{2q_1+2}-\ldots \tag{79}$$

różniący się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (78). Dla zbieżności szeregu (79) potrzeba i wystarcza (w myśl twierdzeń z § 73), iżby szereg

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p_1-1}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2q_1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2p_1+1}+\frac{1}{2p_1+3}+\ldots+\frac{1}{2(p_1+p_2)-1}\right)+\ldots \tag{80}$$

(który otrzymamy z szeregu (79), łącząc w grupy kolejne składniki jednego znaku) był zbieżny, przyczem, w razie zbieżności, oba szeregi mają tę samą sumę.

Połóżmy (dla danych ciągów liczb naturalnych p_n i q_m):

$$\begin{gathered} P_0=0,\ Q_0=0,\ P_n=p_1+p_2+\ldots+p_n, \\ Q_n=q_2+q_2+\ldots-q_n \quad (n=1,2,3,\ldots); \end{gathered} \tag{81}$$

ciągi P_n i Q_n będą więc rosnące, oraz, jak łatwo widzieć, $P_n \geq n$, $Q_n \geq n$ ($n=1,2,3,\ldots$). Szereg (80) będziemy mogli przepisać w postaci

$$v_1+v_2+v_3\ldots, \tag{82}$$

gdzie

$$\begin{aligned} v_{2n-1}&=\frac{1}{2P_{n-1}+1}+\frac{1}{2P_{n-1}+3}+\ldots+\frac{1}{2P_n-1}, \\ v_{2n}&=-\frac{1}{2Q_{n-1}+2}-\frac{1}{2Q_{n-1}+4}-\ldots-\frac{1}{2Q_n}, \end{aligned} \tag{83}$$

dla $n=1,2,3,\ldots$

Oznaczmy przez V_n sumę n pierwszych składników szeregu (82); w myśl (83), będziemy mieli (dla $n=1,2,3,\ldots$):

$$V_{2n-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2P_n-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2Q_{n-1}} \tag{84}$$

oraz

$$V_{2n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2P_n-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2Q_n}. \tag{85}$$

Wobec nierówności (49) z § 51, mamy, oznaczając przez C stałą Euler'a:

$$\left|\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2P_n-1}-\frac{1}{2}\lg P_n-\frac{C}{2}-\lg 2\right|\leq\frac{1}{2P_n},$$

zaś, wobec nierówności (47) z § 51:

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2Q_{n-1}}-\frac{1}{2}\lg Q_{n-1}-\frac{C}{2}\right|\leq\frac{1}{2Q_{n-1}},$$

oraz

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2Q_n}-\frac{1}{2}\lg Q_n-\frac{C}{2}\right|\leq\frac{1}{2Q_n},$$

wobec czego wzory (84) i (85) dają w jednej chwili:

$$\left| V_{2n-1} - \lg\left(2\sqrt{\frac{P_n}{Q_{n-1}}}\right)\right| \leq \frac{1}{2P_n} + \frac{1}{2Q_{n-1}},$$

oraz

$$\left| V_{2n} - \lg\left(2\sqrt{\frac{P_n}{Q_n}}\right)\right| \leq \frac{1}{2P_n} + \frac{1}{2Q_n},$$

skąd, ponieważ $P_n \geq n$ oraz $Q_n \geq n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n=\infty}\left[V_{2n-1} - \lg\left(2\sqrt{\frac{P_n}{Q_{n-1}}}\right)\right] = 0 \\ \text{oraz}\quad &\lim_{n=\infty}\left[V_{2n} - \left(\lg 2\sqrt{\frac{P_n}{Q_n}}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Jeżeli więc chcemy, żeby było

$$\lim_{n=\infty} V_n = x,$$

to musi być, wobec (86):

$$\lim_{n=\infty} \lg\left(2\sqrt{\frac{P_n}{Q_{n-1}}}\right) = x \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \lg\left(2\sqrt{\frac{P_n}{Q_n}}\right) = x, \tag{87}$$

co daje, jak łatwo widzieć

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_{n-1}} = \frac{e^{2x}}{4} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{e^{2x}}{4},$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = 1,$$

zatem, wobec $Q_{n-1} = Q_n - q_n$ (w myśl (81)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0.$$

Zatem, jeżeli chcemy żeby było $\lim\limits_{n=\infty} V_n = x$, to musi być

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{e^{2x}}{4} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0. \tag{88}$$

Z drugiej strony, łatwo widzieć, że założenia (88) pociągają za sobą wzory (87) i przeto, w myśl (86), wzór $\lim\limits_{n=\infty} V_n = x$.

Dowiedliśmy zatem, że na to iżby sumą szeregu (79) była liczba rzeczywista x, potrzeba i wystarcza, aby spełnione były następujące warunki:

$$\lim_{n=\infty} \frac{q_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} = \frac{e^{2x}}{4}. \tag{89}$$

Aby przy dowolnem danem rzeczywistem x były spełnione warunki (89), wystarczy np. przyjąć

$$p_n = En^2 e^{2x} - E(n-1)^2 e^{2x} + 1,$$
$$q_n = 8n. \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Liczby p_n i q_n, wyznaczone z tych wzorów, będą oczywiście naturalne, przyczem będzie

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = En^2 e^{2x} + n \quad \text{oraz} \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 4n(n+1),$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, skąd, jak łatwo widzieć, wynikają wzory (89).

Ciekawym jest jeszcze przypadek szczególny, kiedy

$$p_n = p \quad \text{oraz} \quad q_n = q, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie p i q są dwie dane liczby naturalne. Będziemy tu mieli stale $\dfrac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} = \dfrac{p}{q}$ i warunki (89) będą spełnione dla $x = \lg\left(2\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)$. Przeto:

Zmieniając porządek składników szeregu (78) w ten sposób, iżby po każdych p składnikach dodatnich następowało q składników ujemnych, przyczem kolej składników tego samego znaku pozostaje tą samą co w szeregu (78), otrzymamy szereg, którego sumą jest liczba $\lg 2\sqrt{\dfrac{p}{q}}$.

W szczególności np. dla $p = 2$, $q = 1$, wobec $\lg 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{2}\lg 2$, otrzymujemy:

$$\frac{3}{2}\lg 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

Dla $p = 1$, $q = 2$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots,$$

co można też wyprowadzić ze wzoru (78) na $\lg 2$ drogą elementarną, na podstawie tożsamości (Dirichlet'a):

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Ze wzorów (86) wynika jeszcze, że kładąc

$$p_n = n, \quad q_n = 1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

otrzymamy $\lim\limits_{n=\infty} v_n = +\infty$ i przeto:

$$+\infty = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \ldots$$

Podobnież znaleźlibyśmy:

$$-\infty=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{9}-\dots$$

Zauważymy jeszcze, że z każdego szeregu, zbieżnego warunkowo, otrzymać można szereg o dowolnej, danej naprzód sumie, zmieniając jedynie porządek składników jednego znaku. Można mianowicie udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli sumą szeregu warunkowo zbieżnego jest U, to zmieniając jedynie porządek jego dodatnich składników (z pozostawieniem na miejscu każdego składnika ≤ 0) można otrzymać szereg, którego sumą jest dowolna, dana naprzód liczba mniejsza od U, zmieniając zaś jedynie porządek ujemnych składników naszego szeregu, możemy z niego otrzymać szereg, którego sumą jest dowolna dana naprzód liczba większa od U[1]).

Godnem uwagi jest też, że można zbudować szereg wielomianów całkowitych, który przy odpowiedniem uporządkowaniu składników przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą[2]).

Można też mówić o szeregach rozbieżnych bezwarunkowo, t. j. rozbieżnych przy każdem uporządkowaniu składników. Pomijając przypadek kiedy składniki szeregu nie zmierzają do zera, łatwo widzieć, że na to iżby szereg był rozbieżny bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza iżby jego składniki jednego znaku tworzyły szereg zbieżny (albo skończony), drugiego zaś — rozbieżny. (Suma szeregu jest wówczas zawsze nieskończoną: bądź zawsze $+\infty$, bądź zawsze $-\infty$).

Powiemy wreszcie parę słów o szeregach warunkowo zbieżnych o składnikach zespolonych. Co się tyczy takich szeregów, to wogóle nie każdą liczbę zespoloną może przedstawiać ich suma przy odpowiedniem uporządkowaniu składników. Np. szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a}{n}$, gdzie a oznacza dowolną daną liczbę zespoloną, który otrzymujemy z szeregu anharmonicznego (78), mnożąc jego składniki przez a, przedstawiać może przy odpowiedniem uporządkowaniu składników, jak łatwo widzieć, tylko liczby zespolone postaci ax, gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Są jednak szeregi o składnikach zespolonych, których suma przed-

[1]) Dowód tego twierdzenia znajduje się w mej pracy: „Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes". Biuletyn Akad. Krakowskiej z roku 1911, p. 149.

[2]) Zob. moją odnośną pracę w Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Umiejętn. w Krakowie, luty 1912.

stawiać może przy odpowiedniem uporządkowaniu składników każdą daną naprzód liczbę zespoloną. Takim jest np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{n}$. Szereg ten możemy bowiem rozpatrywać jako sumę szeregów $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$ oraz $\left(\frac{i}{2}-\frac{i}{4}+\frac{i}{6}-\ldots\right)=i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\ldots\right)$, otrzymaną przez wstawienie składników drugiego z tych szeregów między składniki pierwszego. Szeregi o składnikach rzeczywistych $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots$ oraz $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\ldots$ są zbieżne warunkowo: możemy więc, dla dowolnych danych liczb rzeczywistych x i y, tak zmienić porządek składników pierwszego z nich, iżby sumą otrzymanego przez to szeregu Σu_n była liczba x, zaś drugiego — iżby sumą otrzymanego w ten sposób szeregu Σv_n była liczba y. Sumą szeregu

$$u_1+iv_1+u_2+iv_2+u_3+iv_3+\ldots$$

będzie oczywiście liczba zespolona $x+yi$, przyczem szereg ten różnić się będzie conajwyżej porządkiem składników od szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{n}$.

Bliższa analiza doprowadza do wniosku, że są trzy rodzaje szeregów zbieżnych o składnikach zespolonych: 1) Szeregi, które mogą przy różnych uporządkowaniach składników przedstawiać tylko jedną liczbę, 2) szeregi, które przy odpowiedniem uporządkowaniu składników mogą przedstawiać każdą liczbę zespoloną postaci $ax+b$, gdzie a i b są dane liczby zespolone, zaś x jest dowolną liczbą rzeczywistą $\left[\text{takim np. jest szereg } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}a}{n}+\frac{b}{2^n}\right)\right]$, oraz 3) szeregi, których suma przy odpowiedniem uporządkowaniu składników przedstawiać może dowolną liczbę zespoloną[1]).

§ 76. Rozpoznawanie zbieżności i rozbieżności szeregów.

O zbieżności lub rozbieżności szeregów wnosimy najczęściej przez porównanie ich składników ze składnikami szeregów, których zbieżność lub rozbieżność jest nam znana, opierając się przytem na następujących twierdzeniach:

Twierdzenie 86. *Jeżeli szereg o składnikach nieujemnych*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots \tag{90}$$

[1]) Dowód tego twierdzenia podał P. Lévy w Nouv. Ann. math. (4) 5 (1905), p. 506.

jest zbieżny, zaś składniki szeregu

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \tag{91}$$

spełniają nierówność

$$|v_n| \leq a u_n, \quad \text{dla } n > \mu, \tag{92}$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, niezależną od n, to szereg (91) *jest też zbieżny (bezwzględnie).*

Dowód. Załóżmy, że szereg (90) jest zbieżny, oraz że składniki szeregu (91) spełniają nierówność (92). Wobec (92) mamy więc

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+k}| \leq a(u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}), \tag{93}$$
$$\text{dla } n > \mu,\ k = 1, 2, 3, \dots$$

Lecz, wobec zbieżności szeregu (90) i w myśl tw. 81, dla dowolnej danej liczby dodatniej ε istnieje takie ν (zależne od ε), iż

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} < \frac{\varepsilon}{a}, \quad \text{dla } n > \nu, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (93), dla n większych jednocześnie od μ i ν:

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+k}| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

co, w myśl tw. 81, dowodzi zbieżności szeregu

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots,$$

czyli zbieżności bezwzględnej szeregu (91), *c. b. d. o.*

W szczególności, *jeżeli szereg* (90) *jest zbieżny, s oznacza jego sumę*, zaś $v_n = a u_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ (gdzie a oznacza liczbę niezależną od n), *to suma szeregu* (91) *jest liczba* as. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że oznaczając przez s_n i σ_n odpowiednie sumy cząstkowe szeregów (90) i (91), mamy stale $\sigma_n = a s_n$, skąd

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = a \lim_{n=\infty} s_n, \text{ czyli } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = as.$$

Mamy więc, w razie zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, przy wszelkiem a, niezależnem od n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

co wyrażamy, mówiąc, że *czynnik niezależny od zmiennej sumowania możemy w szeregu nieskończonym wyprowadzić przed znak sumy.*

Twierdzenie 87. *Jeżeli szereg o składnikach nieujemnych* Σu_n *jest rozbieżny, i jeżeli zachodzi nierówność*

$$v_n \geq a u_n, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \tag{94}$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, niezależną od n, to szereg Σv_n *jest rozbieżny.*

Dowód. Mamy, w myśl (94) i wobec $a > 0$:

$$u_n \leq \frac{v_n}{a}, \quad \text{dla} \quad n > \mu;$$

gdyby więc szereg Σv_n był zbieżny, to, w myśl tw. 86, byłby zbieżny i szereg Σu_n, wbrew założeniu. Szereg Σv_n jest więc rozbieżny, *c. b. d. o.*

Twierdzenie 88. *Szereg o składnikach dodatnich* Σu_n *jest zbieżny, jeżeli*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \tag{95}$$

gdzie a oznacza liczbę dodatnią (niezależną od *n*), *mniejszą od jedności.*

Dowód. Załóżmy, że składniki szeregu Σu_n są dodatnie i spełniają nierówność (95): mamy więc

$$u_{n+1} \leq a u_n, \quad \text{dla} \quad n > \mu:$$

jeżeli więc k oznacza wskaźnik $> \mu$, to będzie $u_{k+1} \leq a u_k$, $u_{k+2} \leq a u_{k+1} \leq a^2 u_k$, $u_{k+3} \leq a u_{k+2} \leq a^3 u_k$, i t. d., ogólnie

$$u_n \leq a^{n-k} u_k, \quad \text{dla} \quad n > k$$

i przeto, kładąc

$$\frac{u_k}{a^k} = A,$$

będziemy mieli

$$u_n \leq A a^n, \quad \text{dla} \quad n > k. \tag{96}$$

Lecz szereg Σa^n jest, jak wiemy (§ 70), zbieżny dla $0 < a < 1$: wnosimy stąd, wobec (96) i w myśl tw. 86, że szereg Σu_n jest zbieżny, *c. b. d. o.*

Zauważymy jednak, że jeżeli o składnikach szeregu Σu_n wiemy tylko to, że stosunek $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ jest stale mniejszym od jedności, to nie możemy jeszcze wnioskować o zbieżności szeregu. Np. szereg harmoniczny $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, pomimo że w nim stale $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$.

Zwrócimy uwagę też na to, że warunek tw. 88 nie jest konieczny dla zbieżności szeregu: np. szereg

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

(który po połączeniu w grupy każdych dwóch równych składników daje postęp geometryczny) jest zbieżny, chociaż przy nieparzystem n mamy stale $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Twierdzenie 89. *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest rozbieżny, jeżeli*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \text{dla} \quad n > \mu.$$

Dowód. W myśl naszego założenia mamy, oznaczając przez k wskaźnik $> \mu$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \text{dla} \quad n \geq k,$$

skąd, w jednej chwili:

$$u_n \geq u_k, \quad \text{dla} \quad n \geq k,$$

co dowodzi (wobec $u_k > 0$), że nie może być $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$. Szereg Σu_n jest więc rozbieżny, *c. b. d. o.*

Twierdzenie 90. *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest*

$$\textit{zbieżny} \;\text{—}\; \textit{jeżeli} \; \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \tag{97}$$

$$\textit{rozbieżny} \;\text{—}\; \textit{jeżeli} \; \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1. \tag{98}$$

Dowód. Załóżmy, że zachodzi nierówność (97). Oznaczając przez a liczbę (dodatnią) pośrednią między $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ oraz jednością, będziemy mieli

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} < a \quad \text{oraz} \quad a < 1;$$

pierwsza z tych nierówności dowodzi, w myśl tw. 6, iż

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, wobec drugiej i w myśl tw. 88, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n.

Załóżmy teraz, że zachodzi nierówność (98). W myśl tw. 7 wnosimy stąd, że

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, w myśl tw. 89, wynika, że szereg Σu_n jest rozbieżny. Twierdzenie 90 udowodniliśmy zatem w zupełności. Jako natychmiastowy wniosek z tw. 90 otrzymujemy

Twierdzenie 91. (Cecha d'Alembert'a). *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest zbieżny, jeżeli* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *rozbieżny, jeżeli* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Przykłady.

Szereg nieskończony

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{99}$$

jest zbieżny bezwzględnie przy wszelkiem zespolonem z.

Istotnie, dla $z = 0$ jest on zbieżny oczywiście, zaś dla $z \neq 0$ mamy $|z| > 0$, i dla składników szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 1 + \left|\frac{z}{1!}\right| + \left|\frac{z^2}{2!}\right| + \ldots$$

mamy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$,

co, w myśl tw. 90, dowodzi o zbieżności szeregu Σu_n i przeto o bezwzględnej zbieżności szeregu (99).

Wynika stąd, że przy wszelkiem zespolonem z:

$$\lim_{n=\infty} \frac{z^n}{n!} = 0. \tag{100}$$

Warto zauważyć, że wyrazy ciągu $v_n = \frac{z^n}{n!}$, aczkolwiek granica ich jest zero, przy wielkich z, początkowo, dość szybko nawet, wzrastają: np. dla $z = 10$, mamy $v_1 = 10$, $v_2 = 50$, $v_3 = 166\frac{2}{3}$, $v_4 = 416\frac{2}{3}$, $v_5 = 833\frac{1}{3}$, $v_6 = 1388\frac{8}{9}$, ...

Sądząc z zachowania się pierwszych kilku składników możnaby przypuszczać, że wyrazy naszego ciągu wzrastają nieograniczenie, tymczasem jest wręcz przeciwnie, gdyż, jak dowiedliśmy, wyrazy v_n nieograniczenie maleją.

Niech teraz a oznacza dowolną daną (jak chcąc zresztą małą) liczbę dodatnią. Kładąc we wzorze (100) $z = \frac{1}{a}$, otrzymamy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!\, a^n} = 0,$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} n!\, a^n = +\infty$$

przy wszelkiem dodatniem a.

Jako drugi przykład, weźmy pod rozwagę szereg Σu_n, gdzie $u_n = \frac{x^n}{n}$, zaś $x > 0$. Mamy tu

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}\, x, \text{ skąd } \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

i przeto, w myśl tw. 91, szereg nasz jest zbieżny dla $x < 1$ oraz rozbieżny dla $x > 1$. Dla $x = 1$ kryterjum d'Alembert'a nie pozwala wnioskować o zbieżności lub rozbieżności naszego szeregu, skądinąd jednak wiemy, że jest on rozbieżny (jako szereg harmoniczny).

Podobnież, dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ kryterjum d'Alembert'a nie jest stosowalne, gdyż znowu $\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, szereg zaś jest zbieżny, gdyż jak łatwo widzieć $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (zob. § 70).

Widzimy więc, że jeżeli

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

to szereg Σu_n może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny.

§ 77. Twierdzenie 92. *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest zbieżny, jeżeli dla $n > \mu$ mamy $\sqrt[n]{u_n} \leq a$, gdzie $a < 1$, zaś rozbieżny, jeżeli dla nieskończenie wielu składników szeregu mamy $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$.*

Dowód. Nierówność $\sqrt[n]{u_n} \leq a$ możemy napisać w postaci: $u_n \leq a^n$; jeżeli więc nierówność ta zachodzi dla $n > \mu$, to, wobec zbieżności szeregu Σa^n dla $0 < a < 1$, oraz w myśl tw. 86, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n.

Jeżeli zaś dla nieskończenie wielu składników u_n mamy $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, to mamy też dla tych składników $u_n \geq 1$, co dowodzi rozbieżności naszego szeregu. Udowodniliśmy więc tw. 92. Jako łatwy wniosek z niego otrzymujemy

Twierdzenie 93. *Szereg o składnikach dodatnich* Σu_n *jest*

$$\textit{zbieżny} \ - \ \textit{jeżeli} \ \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

$$\textit{rozbieżny} \ - \ \textit{jeżeli} \ \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} > 1.$$

Jeżeli bowiem zachodzi pierwsza z tych nierówności, to mamy, w myśl tw. 6 (oznaczając przez a liczbę pośrednią między $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n}$ oraz 1):

$$\sqrt[n]{u_n} < a < 1, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, w myśl tw. 92, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n.

Jeżeli zaś zachodzi nierówność $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} > 1$, to, w myśl tw. 6, musi być, dla nieskończenie wielu różnych n, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, czyli $u_n > 1$, skąd wnosimy o rozbieżności szeregu Σu_n. Udowodniliśmy więc tw. 93. Jako szczególny przypadek jego otrzymujemy:

Twierdzenie 94. (C e c h a C a u c h y'ego). *Szereg o składnikach dodatnich* Σu_n *jest*

$$\textit{zbieżny} \ - \ \textit{jeżeli} \ \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

$$\textit{rozbieżny} \ - \ \textit{jeżeli} \ \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1.$$

Jeżeli $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, to szereg Σu_n może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny. Np. dla $u_n = \frac{1}{n^k}$, gdzie k oznacza liczbę naturalną, mamy $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^k$; lecz, w myśl wzoru (178) z § 46, mamy

$\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$.

Dla $k=1$ otrzymujemy szereg rozbieżny (harmoniczny), zaś dla $k=2$ — szereg zbieżny, gdyż składniki jego są odpowiednio nie większe od składników szeregu zbieżnego

$$2 = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$$

Twierdzenie 93 nie jest, oczywiście, stosowalnem tylko wtedy, jeżeli $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} = 1$, natomiast twierdzenie 90 nie jest stosowalnem wtedy, jeżeli $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \geq \underline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Okażemy teraz, że twierdzenie 93 jest ogólniejsze, niż twierdzenie 90, t. j. że tw. 93 daje się stosować w tych wszystkich przypadkach, w których daje się stosować tw. 90, ale nie naodwrót. Udowodnimy mianowicie, że dla każdego ciągu nieskończonego liczb dodatnich u_n zachodzą nierówności:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{oraz} \quad \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n}. \tag{101}$$

Połóżmy

$$\sqrt[n]{u_n} = a_n, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = b_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{102}$$

Mamy stąd przy naturalnem k:

$$u_{k+1} = b_k\, u_k, \quad u_{k+2} = b_{k+1}\, u_{k+1} = b_{k+1}\, b_k\, u_k,$$

ogólnie, dla $n > k$:

$$u_n = b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_k\, u_k. \tag{103}$$

Połóżmy, dalej

$$\overline{\lim_{n=\infty}} b_n = L \tag{104}$$

— będzie to oczywiście liczba rzeczywista nieujemna. Gdyby było $L = +\infty$, pierwsza z nierówności (101) byłaby prawdziwą oczywiście, możemy więc dalej, dla jej dowodu, zakładać, że L jest liczbą skończoną.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec (104) oraz w myśl tw. 6, będziemy mieli

$$b_m \leq L + \varepsilon, \quad \text{dla} \quad m > \mu,$$

skąd, wobec (103), będziemy mieli, dla $k > \mu$:

$$u_n \leq (L+\varepsilon)^{n-k} u_k, \quad \text{dla} \quad n > k;$$

kładąc (przy obranem $k > \mu$)

$$\frac{u_k}{(L+\varepsilon)^k} = c$$

(będzie to liczba rzeczywista dodatnia), otrzymamy więc

$$u_n \leq (L+\varepsilon)^n c, \quad \text{dla} \quad n > k,$$

skąd

$$\sqrt[n]{u_n} \leq (L+\varepsilon) \sqrt[n]{c}, \quad \text{dla} \quad n > k. \tag{105}$$

Lecz, w myśl wzoru (86) z § 43, mamy

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} (L+\varepsilon) \sqrt[n]{c} = L+\varepsilon;$$

nierówność (105) daje więc, w myśl tw. 8:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leqq L+\varepsilon,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, pociąga za sobą nierówność

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leqq L,$$

która, wobec (104) i (102), przedstawia pierwszą z nierówności (101).

Udowodnimy teraz drugą z nierówności (101). Połóżmy

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \tag{106}$$

— będzie to oczywiście liczba nieujemna. W razie $l=0$ druga z nierówności (101) zachodzi oczywiście: możemy więc założyć, że $l>0$. Założmy nadto, że l jest liczbą skończoną.

Niech ε oznacza liczbę dodatnią $< l$. Wobec (102) i (106) oraz w myśl tw. 7, będzie

$$b_m \geqq l-\varepsilon, \quad \text{dla} \quad m>\mu,$$

skąd, obierając wskaźnik $k>\mu$, będziemy mieli, wobec (103):

$$u_n \geqq (l-\varepsilon)^{n-k} u_k, \quad \text{dla} \quad n>k;$$

kładąc (przy obranem $k>\mu$)

$$\frac{u_k}{(l-\varepsilon)^k} = c,$$

będziemy więc mieli

$$u_n \geqq (l-\varepsilon)^n c, \quad \text{dla} \quad n>k,$$

skąd

$$\sqrt[n]{u_n} \geqq (l-\varepsilon) \sqrt[n]{c},$$

skąd, jak wyżej:

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} \geqq l-\varepsilon$$

i przeto, wobec dowolności liczby dodatniej ε:

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} \geqq l,$$

co, wobec (106), przedstawia drugą z nierówności (101). Nierówność tę udowodniliśmy więc w przypadku, kiedy l jest liczbą skończoną.

Gdyby było $l=+\infty$, mielibyśmy, wobec (106) i w myśl tw. 7, przy wszelkiem danem rzeczywistem A:

$$b_m \geqq A, \quad \text{dla} \quad m>\mu,$$

skąd, jak wyżej, znaleźlibyśmy

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} \geq A,$$

co, wobec dowolności A, daje

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty;$$

druga z nierówności (101) zachodzi więc w każdym razie.

Nierówności (101) zostały zatem dowiedzione w zupełności.

Jako natychmiastowy wniosek z nierówności (101) otrzymujemy

Twierdzenie 95. *Jeżeli dla ciągu nieskończonego liczb dodatnich u_n istnieje granica $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (skończona lub nieskończona), to istnieje też granica $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n}$, przyczem obie te granice są równe* (Cauchy).

Więc np., kładąc $u_n = n!$, będziemy mieli $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1$, oraz $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, skąd, w myśl tw. 95, wnosimy że $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Dla $u_n = n$, wobec $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, wnosimy, w myśl tw. 95, że $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Niech teraz a_n oznacza ciąg liczb dodatnich, posiadający granicę (skończoną lub nieskończoną) $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$.

Kładąc $u_n = a_1 a_2 \ldots a_n$, będziemy mieli $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i przeto $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, skąd, w myśl tw. 95: $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, czyli $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.

Dowiedliśmy więc

Twierdzenie 96. *Jeżeli $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$, to mamy też $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.*

Z twierdzenia 95 wynika natychmiast, że twierdzenie 94 daje się stosować dla rozpoznawania zbieżności lub rozbieżności szeregów zawsze wtedy, jeżeli daje się stosować twierdzenie 91. Lecz niekoniecznie naodwrót. Weźmy bowiem pod rozwagę szereg Σu_n, gdzie

$$u_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{107}$$

Wobec (107) mamy tu $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{6}$ dla n parzystych, zaś $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}$ dla n nieparzystych, zatem

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{6}, \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2};$$

względem szeregu Σu_n nie jest więc stosowalne ani twierdzenie 91, ani też twierdzenie 90. Natomiast, wobec (107), mamy

$$\frac{1}{2^n} \leq u_n \leq \frac{3}{2^n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$$

i przeto, wobec $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{3} = 1$:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2},$$

skąd, w myśl tw. 91, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n.

Wynika stąd, że *kryterjum* Cauchy'ego *jest ogólniejsze niż kryterjum* d'Alembert'a. To ostatnie znowu posiada w porównaniu z pierwszem tę zaletę, że stosunek dwóch kolejnych składników szeregu (oraz ewentualna jego granica) zazwyczaj łatwiej obliczać się daje niż n-ty pierwiastek z n-go składnika.

§ 78. Twierdzenie 97. (Cecha Kummera). *Na to, żeby szereg o składnikach dodatnich Σu_n był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby istniał ciąg nieskończony liczb dodatnich a_n, oraz liczba dodatnia a, takie iż*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > a, \quad \text{dla } n > \mu. \tag{108}$$

Dowód. Okażemy, że warunek nasz jest wystarczający. Nierówność (108) możemy przepisać w postaci

$$a u_{n+1} < a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}, \quad \text{dla } n > \mu.$$

Oznaczając przez k wskaźnik $> \mu$, będziemy więc mieli dla $n > k$:

$$a u_{k+1} < a_k u_k - a_{k+1} u_{k+1},$$
$$a u_{k+2} < a_{k+1} u_{k+1} - a_{k+2} u_{k+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a u_n < a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n,$$

skąd, po dodaniu stronami, kładąc $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ (wobec $a_n > 0$ oraz $u_n > 0$):

$$a(s_n - s_k) < a_k u_k - a_n u_n < a_k u_k,$$

i przeto

$$s_n < s_k + \frac{a_k u_k}{a}, \quad \text{dla } n > k,$$

co dowodzi, że ciąg s_n jest ograniczony, zatem — jako rosnący — zbieżny. Szereg Σu_n jest więc zbieżny, *c. b. d. o.*

Załóżmy teraz, że szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest zbieżny i niech s oznacza jego sumę, s_n — sumy cząstkowe. Połóżmy

$$a_n = \frac{s - s_n}{u_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{109}$$

— będzie to ciąg nieskończony liczb dodatnich, przytem będzie w myśl (109):

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{u_{n+1}} = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

co dowodzi, że warunek naszego twierdzenia jest konieczny. Twierdzenie 97 udowodniliśmy zatem w zupełności. Przyjmując w tem twierdzeniu $a_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), otrzymujemy jako natychmiastowy wniosek:

Twierdzenie 98. (Prawidło Raabe'go). *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest zbieżny, jeżeli, dla $n > \mu$:*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > a, \quad \text{gdzie } a > 1.$$

Okażemy obecnie, że *szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest rozbieżny, jeżeli dla $n > \mu$:*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1. \tag{110}$$

Nierówność (110) możemy oczywiście przepisać w postaci

$$(n + 1)\, u_{n+1} \geq n u_n;$$

jeżeli więc k oznacza wskaźnik $> \mu$, to mamy, dla $n > k$:

$$n u_n \geq k u_k,$$

czyli

$$u_n \geq \frac{k u_k}{n}, \quad \text{dla } n > k,$$

co, w myśl tw. 87 i wobec rozbieżności szeregu harmonicznego, dowodzi, że szereg Σu_n jest rozbieżny, *c. b. d. o.*

Jako łatwy wniosek z tw. 98 otrzymujemy

Twierdzenie 99. *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest*

$$\text{zbieżny — jeżeli } \lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

$$\text{rozbieżny — jeżeli } \lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1.$$

Przyjmijmy, w szczególności $u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, gdzie $\alpha > 0$. Będzie tu

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1\right]. \qquad (111)$$

Lecz, w myśl nierówności (171) i (143) z § 46 (dla $\alpha > 0$):

$$\frac{1}{1-\frac{1+\alpha}{n}} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} \geq 1 + \frac{1+\alpha}{n}, \quad \text{dla} \quad n > 1+\alpha$$

skąd, wobec (111):

$$\frac{1+\alpha}{1-\frac{1+\alpha}{n}} \geq n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq 1+\alpha, \quad \text{dla} \quad n > 1+\alpha$$

skąd, w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1+\alpha$$

i przeto, wobec $\alpha > 0$ i w myśl tw. 99 wnosimy, że szereg Σu_n jest zbieżny.

Natomiast szereg $\sum\limits^{\infty} \frac{1}{n}$, a więc tembardziej, każdy szereg $\sum\limits_{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, gdzie $\alpha < 0$, jest rozbieżny. Mamy więc wniosek:

Szeregi

$$\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \cdots \qquad (112)$$

są zbieżne dla $\sigma > 1$, *oraz rozbieżne dla* $\sigma \leq 1$.

Zauważymy, że zbieżność szeregu (112) dla $\sigma > 1$ możemy z łatwością udowodnić też bezpośrednio. Oznaczając mianowicie przez s_n sumę n pierwszych składników szeregu (112), mamy oczywiście przy naturalnem k:

$$s_{2^k} = s_2 + (s_{2^2} - s_2) + (s_{2^3} - s_{2^2}) + \ldots + (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}). \qquad (113)$$

Lecz

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\sigma} + \frac{1}{(2^{n-1}+2)^\sigma} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1})^\sigma} <$$

$$< \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)\sigma}} = \frac{1}{2^{(n-1)(\sigma-1)}},$$

skąd, wobec (113):

$$s_{2^k} < s_2 + \frac{1}{2^{\sigma-1}} + \frac{1}{2^{2(\sigma-2)}} + \ldots + \frac{1}{2^{(k-1)(\sigma-1)}} = s_2 + \frac{\frac{1}{2^{\sigma-1}} - \frac{1}{2^{k(\sigma-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}},$$

i przeto, dla $\sigma > 1$:

$$s_{2^k} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{\sigma-1} - 1} = A_\sigma, \tag{114}$$

gdzie A_σ nie zależy od k.

Jeżeli teraz n oznacza dowolny dany wskaźnik, to możemy obrać k takie, iżby było $2^k \geq n$, i przeto będzie $s_n \leq s_{2^k}$, skąd wobec (114):

$$s_n < A_\sigma.$$

Ciąg s_n jest więc ograniczony i przeto (jako rosnący) zbieżny, co dowodzi, że szereg (112) jest zbieżny, dla $\sigma > 1$.

Jako przykład rozbieżnego szeregu (112), weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots\ldots \tag{115}$$

Oznaczmy przez s_n sumę n pierwszych składników szeregu (115). Przy naturalnem k mamy tożsamość

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = -\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2};$$

kładąc w niej kolejno $k = 1, 2, \ldots n$ i dodając stronami, otrzymujemy:

$$s_n - 2\sqrt{n} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2}. \tag{116}$$

Mamy oczywiście

$$\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma}$ dla $\sigma = \frac{3}{2}$, dowodzi o zbieżności szeregu

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2}. \tag{117}$$

Wzory (116) i (117) dają więc

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right) = -A,$$

gdzie A oznacza pewną stałą dodatnią.

§ 79. Niech teraz u_n oznacza ciąg nieskończony liczb dodatnich; połóżmy

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{118}$$

Przy dodatniem ϱ mamy, w myśl wzoru (144) z § 46 (tw. 62) (dla $x = \varrho$, $d = \frac{u_n}{s_{n-1}}$), z uwagi, że, w myśl (118), $1 + \frac{u_n}{s_{n-1}} = \frac{s_n}{s_{n-1}}$:

$$\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)^\varrho - 1 \geq \frac{\varrho u_n}{s_n}, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

skąd

$$\frac{1}{\varrho}\left[\frac{1}{s_{n-1}^\varrho} - \frac{1}{s_n^\varrho}\right] \geq \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}}, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots$$

oraz

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}} \leq \frac{1}{\varrho}\left[\frac{1}{s_1^\varrho} - \frac{1}{s_m^\varrho}\right] < \frac{1}{\varrho s_1^\varrho}, \quad \text{dla} \quad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

skąd wnosimy, że szereg o składnikach dodatnich $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}}$ jest ograniczony i przeto zbieżny. Mamy więc

Twierdzenie 100. *Jeżeli u_n jest ciągiem nieskończonym liczb dodatnich, $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, zaś ϱ oznacza liczbę dodatnią, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}} \tag{119}$$

jest zbieżny.

Załóżmy, w szczególności, że szereg Σu_n jest szeregiem rozbieżnym o składnikach dodatnich: powiadam, że szereg (119) będzie rozbieżny dla $\varrho \leq 0$.

W samej rzeczy, możemy napisać, wobec (118):

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+k}}{s_{n+k}} > \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k}}{s_{n+k}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}},$$

zaś dla dostatecznie wielkich k, przy danem n, musi być $\frac{s_n}{s_{n+k}} < \frac{1}{2}$, gdyż $\lim\limits_{k=\infty} s_{n+k} = \infty$, skoro szereg Σu_n jest rozbieżny. Istnieje więc dla każdego naturalnego n takie k, iż

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+k}}{s_{n+k}} > \frac{1}{2},$$

co dowodzi, że szereg (119) jest rozbieżny dla $\varrho = 0$ i, tembardziej, dla $\varrho < 0$. Stąd, wobec tw. 100, mamy

Twierdzenie 101 (Dini'ego). *Jeżeli Σu_n jest szeregiem rozbieżnym o składnikach dodatnich, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^{1+\varrho}}$$

są zbieżne dla $\varrho > 0$ oraz rozbieżne dla $\varrho \leq 0$.

Stąd, w szczególności, dla $u_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, wnosimy o zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

dla $\varrho > 0$ i rozbieżności ich dla $\varrho \leq 0$.

Przyjmijmy, dalej $u_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$: wobec rozbieżności szeregu harmonicznego, wnosimy, w myśl tw. 101, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^{1+\varrho}} \tag{120}$$

są zbieżne dla $\varrho > 0$ i rozbieżne dla $\varrho \leq 0$. Lecz, w myśl nierówności (46) z § 51, mamy

$$\lg n + C + \frac{1}{n} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \lg n + C, \tag{121}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gdzie C oznacza pewną stałą dodatnią: jest więc

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \lg n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

i przeto składniki szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n} \tag{122}$$

są odpowiednio większe od składników szeregu (120) dla $\varrho = 0$, który jest rozbieżny. Szereg (122) jest więc rozbieżny, i, tembardziej szeregi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n)^{1+\varrho}} \tag{123}$$

są rozbieżne dla $\varrho \leq 0$.

Z drugiej strony, wobec (121), mamy, jak łatwo widzieć, dla dostatecznie wielkich n:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<2\lg n$$

i przeto, dla $\varrho>0$:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^{1+\varrho}<2^{1+\varrho}(\lg n)^{1+\varrho};$$

składniki szeregu (123) są więc (dla $\varrho>0$), poczynając od pewnego miejsca, mniejsze od składników szeregu (120), pomnożonych przez $2^{1+\varrho}$, skąd, wobec zbieżności szeregów (120) dla $\varrho>0$, wynika (w myśl tw. 86) zbieżność szeregów (123) dla $\varrho>0$.

Zatem:

Szeregi (123) *są zbieżne dla* $\varrho>0$ *i rozbieżne dla* $\varrho\leq 0$.

Jako zastosowanie otrzymanych wyników, wprowadzimy t. zw. *kryterja logarytmiczne*.

Twierdzenie 102. *Szereg o składnikach dodatnich* Σu_n *jest*

$$\textit{zbieżny — jeżeli } \overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\lg u_n}{\lg n}<-1, \tag{124}$$

$$\textit{rozbieżny — jeżeli stale } \frac{\lg u_n}{\lg n}\geq -1. \tag{125}$$

Dowód. Zakładając, że zachodzi warunek (124) i oznaczając przez $-(1+\varrho)$ liczbę pośrednią między $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\frac{\lg u_n}{\lg n}$ oraz -1, będziemy mieli $\varrho>0$ oraz, w myśl tw. 6, dla dostatecznie wielkich n:

$$\frac{\lg u_n}{\lg n}<-(1+\varrho),$$

skąd

$$\lg u_n<\lg\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

oraz

$$u_n<\frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}$ dla $\varrho>0$, dowodzi zbieżności szeregu Σu_n.

Załóżmy teraz, że zachodzi warunek (125), dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mamy stąd $\lg u_n \geq \lg \frac{1}{n}$, zatem $u_n \geq \frac{1}{n}$, skąd, wobec rozbieżności szeregu harmonicznego, wnosimy o rozbieżności szeregu Σu_n. Udowodniliśmy więc tw. 102. Jako natychmiastowy wniosek z dowiedzionego twierdzenia, otrzymujemy

Twierdzenie 102ᵃ. *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest*

$$\textit{zbieżny, jeżeli } \lim_{n=\infty} \frac{\lg u_n}{\lg n} < -1,$$

$$\textit{rozbieżny, jeżeli } \lim_{n=\infty} \frac{\lg u_n}{\lg n} > -1.$$

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 103. *Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest*

$$\textit{zbieżny — jeżeli } \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg n\, u_n}{\lg \lg n} < -1, \tag{126}$$

$$\textit{rozbieżny — jeżeli dla dostatecznie wielkich } n \textit{ stale } \frac{\lg n\, u_n}{\lg \lg n} > -1. \tag{127}$$

W samej rzeczy, podobnie jak przy dowodzie tw. 102, wnosimy, że jeżeli zachodzi warunek (126), to, przy pewnem dodatniem ϱ, mamy dla dostatecznie wielkich n:

$$\frac{\lg n\, u_n}{\lg \lg n} < -(1+\varrho), \text{ skąd } \lg n\, u_n < \lg \frac{1}{(\lg n)^{1+\varrho}}$$

oraz

$$u_n < \frac{1}{n(\lg n)^{1+\varrho}};$$

wobec zbieżności szeregów (123) dla $\varrho > 0$, wnosimy stąd o zbieżności szeregu Σu_n.

Z drugiej strony, jeżeli dla $n > \mu$ zachodzi warunek (127), to mamy

$$u_n > \frac{1}{n \lg n}, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, wobec rozbieżności szeregu (122), wnosimy o rozbieżności szeregu Σu_n. Udowodniliśmy więc tw. 103.

§ 80. **Twierdzenie 104.** (Abel'a). *Jeżeli szereg Σu_n* (o składnikach zespolonych) *jest ograniczony, zaś ε_n oznacza ciąg malejący* (liczb dodatnich), *zmierzający do zera, to szereg $\Sigma \varepsilon_n u_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy, że szereg Σu_n (o składnikach rzeczywistych lub zespolonych) jest ograniczony: istnieje więc liczba (dodatnia) A (niezależna od n), taka, iż kładąc

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{128}$$

mamy

$$| s_n | < A, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{129}$$

Niech, dalej, ε_n oznacza ciąg malejący (liczb dodatnich), zmierzający do zera, i połóżmy:

$$\sigma_n = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{130}$$

Wobec (130) oraz (128) znajdujemy przy wszelkich naturalnych n oraz k:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+k} - \sigma_n &= \varepsilon_{n+1} u_{n+1} + \varepsilon_{n+2} u_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{n+k} u_{n+k} = \\
&= \varepsilon_{n+1} (s_{n+1} - s_n) + \varepsilon_{n+2} (s_{n+2} - s_{n+1}) + \ldots + \varepsilon_{n+k} (s_{n+k} - s_{n+k-1}) = \\
&= - \varepsilon_{n+1} s_n + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) s_{n+1} + (\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) s_{n+2} + \ldots \\
&\ldots + (\varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k}) s_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} s_{n+k}.
\end{aligned}$$

Z uwagi na (129) oraz na to, że w myśl założenia co do ciągu ε_n każda z różnic $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}, \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}, \ldots \varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k}$ jest dodatnią, mamy stąd:

$$\begin{aligned}
| \sigma_{n+k} - \sigma_n | &\leq A [\varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + \\
+ (\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) &+ \ldots + (\varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k}) + \varepsilon_{n+k}] = 2 A \varepsilon_{n+1}.
\end{aligned} \tag{131}$$

Lecz wobec $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ mamy, przy dowolnem danem dodatniem ε

$$\varepsilon_{n+1} < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

zatem, wobec (131):

$$| \sigma_{n+k} - \sigma_n | < 2A\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, wobec (130) i w myśl tw. 81, wnosimy o zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$, c. b. d. o.

Przyjmijmy, w szczególności $u_n = (-1)^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$: otrzymamy szereg ograniczony

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

(gdyż mamy w nim stale $| s_n | \leq 1$), skąd, w myśl tw. 104, otrzymamy następujące

Twierdzenie 105. *Szereg nieskończony*

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \dots \qquad (132)$$

o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, malejących bezwzględnie i zmierzających do zera, jest zawsze zbieżny.

Szeregi nieskończone (132), spełniające warunki tw. 105, nazywamy szeregami *naprzemiennymi.*

O szeregach tych udowodnimy

Twierdzenie 106. *Suma szeregu naprzemiennego jest większa od każdej sumy cząstkowej rzędu parzystego, oraz mniejsza od każdej sumy cząstkowej rzędu nieparzystego, zaś błąd, popełniony przez zastąpienie sumy szeregu naprzemiennego sumą cząstkową, jest mniejszy bezwzględnie od pierwszego odrzuconego składnika.*

Dowód. Połóżmy

$$\sigma_n = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \dots + (-1)^{n-1}\varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \qquad (133)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma. \qquad (134)$$

Ponieważ ciąg ε_n jest, jak zakładamy, malejący, więc mamy przy wszelkiem naturalnem n, wobec (133):

$$\sigma_{2n+2} = \sigma_{2n} + \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_{2n+2} > \sigma_{2n}, \quad \sigma_{2n+1} = \sigma_{2n-1} - (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1}) < \sigma_{2n-1};$$

zatem: sumy cząstkowe rzędu parzystego stale wzrastają, zaś sumy cząstkowe rzędu nieparzystego stale maleją, a że granicą jednych i drugich jest, w myśl (134), suma szeregu σ, więc mamy:

$$\sigma_{2n} < \sigma < \sigma_{2n-1}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \qquad (135)$$

Mamy więc, dla k parzystego

$$\sigma_k < \sigma < \sigma_{k+1},$$

zaś dla k nieparzystego

$$\sigma_{k+1} < \sigma < \sigma_k,$$

w każdym więc razie

$$|\sigma - \sigma_k| < |\sigma_{k+1} - \sigma_k|, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

czyli, z uwagi, że, wobec (133), $\sigma_{k+1} - \sigma_k = (-1)^k \varepsilon_{k+1}$:

$$|\sigma - \sigma_k| < \varepsilon_{k+1}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \qquad (136)$$

Nierówności (135) i (136) dowodzą prawdziwości twierdzenia 106.

Co do szeregów o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, zmierzających do zera, to zauważymy, że mogą one być rozbieżne (o ile składniki nie maleją bezwzględnie): takim jest np. szereg

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots,$$

z którego, łącząc po dwa kolejne składniki, otrzymujemy, jak łatwo widzieć, podwojony szereg harmoniczny.

§ 81. Dodawanie szeregów.

Twierdzenie 107. *Jeżeli Σu_n oraz Σv_n są dwa szeregi zbieżne i jeżeli położymy $w_n = u_n + v_n$ (dla $n = 1, 2, \ldots$) to szereg Σw_n jest też zbieżny i daje sumę $\Sigma w_n = \Sigma u_n + \Sigma v_n$.*

Dowód. Oznaczmy przez s'_n, s''_n oraz s_n odpowiednio sumy cząstkowe szeregów Σu_n, Σv_n oraz Σw_n i połóżmy

$$s' = \lim_{n=\infty} s'_n, \quad s'' = \lim_{n=\infty} s''_n. \tag{137}$$

Wobec $w_n = u_n + v_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, będzie przy wszelkiem naturalnem n:

$$s_n = s'_n + s''_n, \tag{137a}$$

skąd, wobec (137):

$$\lim_{n=\infty} s_n = s' + s'',$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Mamy więc (w razie zbieżności szeregów Σu_n oraz Σv_n) wzór

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) + (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots) =$$
$$= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots.$$

Zauważymy jeszcze, że szereg, stojący po prawej stronie, możemy napisać też w postaci

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + \ldots \tag{138}$$

Oznaczając bowiem przez σ_n sumę n pierwszych składników szeregu (138), będziemy mieli

$$\sigma_{2n} = s_n, \quad \sigma_{2n+1} = s_n + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ (gdyż szereg Σu_n jest zbieżny) wnosimy że

$$\lim_{n=\infty} \sigma_{2n} = \lim_{n=\infty} \sigma_{2n+1} = \lim_{n=\infty} s_n,$$

co daje, w myśl tw. 18, $\lim_{n=\infty} \sigma_n = \lim_{n=\infty} s_n$.

Dodawanie dwóch szeregów może więc być uskutecznione przez wstawienie składników jednego z tych szeregów między składniki drugiego. (Pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że wstawienie to może być dokonane w sposób bardziej ogólny, t. j. po p_1 pierwszych składnikach szeregu Σu_n możemy wypisać q_1 pierwszych składników szeregu Σv_n, potem znów p_2 dalszych składników szeregu Σu_n, potem q_2 dalszych składników szeregu Σv_n i t. d., gdzie p_n i q_n są dowolne dwa ciągi nieskończone liczb naturalnych.

Zauważymy też, że tw. 107 daje się natychmiast uogólnić na dowolną, skończoną liczbę szeregów zbieżnych: mamy mianowicie przy wszelkiem naturalnem h wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n'+u_n''+\ldots+u_n^{(h)})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'+\sum_{n=1}^{\infty}u_n''+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(h)}$$

o ile tylko każdy z szeregów po prawej stronie jest zbieżny.

Analogicznie udowodnilibyśmy

Twierdzenie 107ᵃ. *Jeżeli Σu_n oraz Σv_n są dwa szeregi zbieżne i jeżeli położymy $w_n = u_n - v_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, to szereg Σw_n jest zbieżny i daje nam sumę $\Sigma w_n = \Sigma u_n - \Sigma v_n$.*

Mamy też (w razie zbieżności szeregów Σu_n i Σv_n) wzór

$$(u_1+u_2+\ldots)-(v_1+v_2+\ldots)=u_1-v_1+u_2-v_2+\ldots$$

Przykład. Weźmy pod rozwagę szeregi

$$\lg 2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

oraz

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}+\ldots,$$

które, na mocy prawa łączności (§ 72) możemy przepisać w postaci:

$$\lg 2=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

Odejmując odpowiednie składniki drugiego z tych szeregów od składników pierwszego, otrzymujemy:

$$\lg 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}+\ldots\ldots$$

§ 82. **Przekształcanie szeregów wolno zbieżnych.** Ponieważ suma szeregu zbieżnego jest granicą jego sum cząstkowych, więc zdawałoby się, że możemy ją (teoretycznie przynajmniej) zawsze obliczyć z dowolną dokładnością, uwzględniając dostatecznie wielką liczbę składników szeregu [1]. Praktycznie jednak jest to często niewykonalne: może się bowiem zdarzyć, że dla otrzymania sumy szeregu z żądaną dokładnością, należałoby uwzględnić bardzo wielką liczbę składników szeregu. Typowym przykładem jest tu szereg anharmoniczny

$$\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Tysiączny składnik jego (— 0,001) wpływa jeszcze na trzeci znak dziesiętny: chcąc zapomocą tego szeregu obliczyć $\lg 2$ z dokładnością kilku znaków dziesiętnych, należałoby wykonać niezmiernie długie rachunki.

Powstaje wobec tego pytanie, czy nie możnaby szeregów wolno zbieżnych przekształcać na inne, mające tę samą sumę, ale zbieżne szybciej?

Ogólna metoda takiego przekształcania szeregów (moglibyśmy ją nazwać przyspieszaniem zbieżności szeregów) nie istnieje: są tylko poszczególne sposoby, stosowalne, o ile szereg spełnia pewne warunki. Niżej zapoznamy się właśnie z kilkoma ważniejszymi z nich.

Wzór E u l e r a. Załóżmy, że szereg

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{139}$$

jest zbieżny dla danej wartości $x \neq 1$ i niech $S(x)$ oznacza jego sumę.

Umówimy się oznaczać przez skrócenie różnicę $a_{n+1} - a_n$ symbolem Δa_n. (Wyrażenie Δa_n nie jest więc iloczynem liczb Δ i a_n, lecz symbolem złożonym: znak Δ jest tu symbolem działania (róż-

[1]) Nie zawsze jednak wiemy *ile* składników należy uwzględnić, aby otrzymać wartość sumy z daną dokładnością Oznaczmy np. przez a_n liczbę 1 lub 0, zależnie od tego, czy liczba naturalna n rozkłada się, czy też nie na sumę 19-tu czwartych potęg liczb całkowitych, i połóżmy $u_1 = 0$, zaś $u_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n - 1)$, dla $n = 2, 3, 4, \ldots$: można z łatwością wykazać, że szereg Σu_n (którego każdy poszczególny składnik potrafimy dokładnie obliczyć) jest zbieżny (gdyż ma tylko skończoną liczbę różnych od zera składników), lecz nie wiemy, ile składników należy w nim uwzględnić, aby otrzymać jego sumę z dokładnością do $^1/_3$. (Por. uwagi końcowe § 24).

nicowania), a nie liczby, podobnie jak w wyrażeniu $\lg x$ litery lg same przez się nie oznaczają żadnej liczby). Różnicę

$$\Delta a_{n+1} - \Delta a_n$$

umawiamy się oznaczać przez $\Delta^2 a_n$, ogólnie, różnicę

$$\Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n$$

— przez $\Delta^{k+1} a_n$. W ten sposób symbol $\Delta^k a_n$ jest określony dla każdego danego ciągu nieskończonego a_n przy wszelkiem naturalnem k. Przez $\Delta^0 a_n$ będziemy rozumieli sam wyraz a_n. (Mamy więc np., dla $a_n = n^2$: $\Delta a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = [2(n+1)+1] - (2n+1) = 2$, $\Delta^3 a_n = 2 - 2 = 0$).

Wzór (139) możemy przepisać w postaci

$$S(x) - a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots; \tag{140}$$

z drugiej strony, wzór (139) daje

$$x\,S(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots \tag{141}$$

Wobec (140) i (141) oraz w myśl tw. 107ª, wnosimy, że szereg

$$(a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \ldots$$

będzie zbieżny, oraz że sumą jego będzie liczba $(1-x)\,S(x) - a_0$: w myśl przyjętego znakowania, wynik ten możemy napisać w postaci:

$$(1-x)\,S(x) - a_0 = x\Delta a_0 + x^2 \Delta a_1 + x^3 \Delta a_2 + \ldots \tag{142}$$

Połóżmy

$$S_1(x) = \Delta a_0 + x\Delta a_1 + x^2 \Delta a_2 + \ldots \tag{143}$$

— szereg ten będzie dla uważanej wartości x zbieżny: dla $x = 0$ jest to oczywiste, zaś dla $x \neq 0$ wynika natychmiast ze zbieżności szeregu (142). Wobec (143), możemy wzór (142) przepisać w postaci:

$$(1-x)\,S(x) - a_0 = x\,S_1(x),$$

co daje, wobec założenia, że $x \neq 1$:

$$S(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_1(x). \tag{144}$$

Porównywując ze sobą wzory (143) i (139), widzimy, że szereg $S_1(x)$ tem tylko różni się od szeregu $S(x)$, że wyrazy a_n są w nim zastąpione wszędzie przez wyrazy Δa_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$: wobec wzoru (144) będziemy więc też mieli:

$$S_1(x) = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_2(x), \tag{145}$$

gdzie

$$S_2(x) = \Delta^2 a_0 + x\Delta^2 a_1 + x^2\Delta^2 a_2 + \ldots$$

(gdyż, w myśl przyjętego znakowania, przy zastąpieniu a_n przez Δa_n, Δa_n przechodzi na $\Delta^2 a_n$), przyczem szereg $S_2(x)$ będzie dla uważanej wartości x zbieżny.

Podobnież znajdziemy:

$$S_2(x) = \frac{\Delta^2 a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_3(x), \tag{146}$$

gdzie $S_3(x)$ oznacza szereg (zbieżny dla uważanej wartości x):

$$S_3(x) = \Delta^3 a_0 + x\Delta^3 a_1 + x^2\Delta^3 a_2 + \ldots,$$

i t. d., ogólnie:

$$S_{n-1}(x) = \frac{\Delta^{n-1} a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_n(x), \tag{147}$$

gdzie $S_n(x)$ oznacza szereg (zbieżny dla uważanej wartości x):

$$S_n(x) = \Delta^n a_0 + x\Delta^n a_1 + x^2\Delta^n a_2 + \ldots \tag{148}$$

Wzory (144), (145), (146), ... (147) dają w jednej chwili:

$$S(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{x^{n-1}\Delta^{n-1} a_0}{(1-x)^n} + \frac{x^n}{(1-x)^n} S_n(x). \tag{149}$$

Jeżeli teraz (dla uważanej wartości x):

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n S_n(x) = 0, \tag{150}$$

to wzór (149) daje rozwinięcie na szereg nieskończony:

$$S(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \ldots.$$

Zatem:

W razie zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ dla danej wartości $x \neq 1$, oraz w razie zachowania warunku (150), mamy przekształcenie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Delta^n a_0}{(1-x)^{n+1}}. \tag{151}$$

Jest to *wzór* Euler'a.

Można udowodnić, że dla $x < 0$ zbieżności szeregu (139) zawsze pociąga za sobą wzór (150), a więc i wzór (151).

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że drogą łatwej indukcji sprawdzić można wzór

$$\Delta^n a_k = \binom{n}{0} a_k - \binom{n}{1} a_{k+1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n},$$

skąd, wobec (148), znajdujemy:

$$R_n(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n S_n(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Delta^n a_k =$$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\binom{n}{0} a_k - \binom{n}{1} a_{k+1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n}\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^n \cdot \binom{n}{0} a_k x^k - x^{n-1} \cdot \binom{n}{1} a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n} x^{k+n}\right];$$

oznaczając przez

$$r_n(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

resztę szeregu (139), będziemy stąd mieli

$$R_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}\left[\binom{n}{0} x^n r_0(x) - \binom{n}{1} x^{n-1} r_1(x) + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} r_n(x)\right]. \quad (151a)$$

Niech teraz $x = -\varrho$, gdzie $\varrho > 0$. Wobec zbieżności szeregu (139) (dla danego x), mamy

$$| r_k(x) | < \varepsilon \quad \text{dla} \quad k > \mu;$$

stąd, obierając wskaźnik $q > \mu$:

$$\left| \binom{n}{q} x^{n-q} r_q(x) + \binom{n}{q+1} x^{n-q+1} r_{q+1}(x) + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} r_n(x) \right| \leq$$

$$\leq \left[\binom{n}{q} \varrho^{n-q} + \binom{n}{q+1} \varrho^{n-q+1} + \ldots + \binom{n}{n} \varrho^n\right] \varepsilon < (1+\varrho)^n \varepsilon,$$

ponieważ zaś przy stałem j, jak łatwo widzieć (dla $\varrho > 0$):

$$\lim_{n=\infty} \binom{n}{j} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^n = 0,$$

więc

$$\left| \frac{\binom{n}{0} x^n r_0(x) + \ldots + \binom{n}{q-1} x^{n-q+1} r_{q-1}(x)}{(1-x)^n} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \nu.$$

Zatem, w myśl (151^a):

$$|R_n(x)| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu + \nu,$$

co dowodzi, że $\lim_{n=\infty} R_n(x) = 0$, czyli że mamy wzór (150), *c. b. d. o.*

Załóżmy, w szczególności, że $x = -1$: szereg (139) przyjmuje postać

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{152}$$

zaś wzór (149) — postać

$$S = \frac{a_0}{2} - \frac{\Delta a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\Delta^{n-1} a_0}{2^n} + R_n, \tag{153}$$

gdzie

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2^n}[\Delta^n a_0 - \Delta^n a_1 + \Delta^n a_2 - \ldots]. \tag{154}$$

Stąd

Twierdzenie 108. *Jeżeli szereg* (152) *jest zbieżny, to mamy wzór:*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots = \frac{a_0}{2} - \frac{\Delta a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} - \frac{\Delta^3 a_0}{2^4} + \ldots \tag{155}$$

Często się zdarza, że wyrażenie (154) szybciej zmierza do zera, niż reszta szeregu (152): wówczas wzór (153) jest dogodniejszy do obliczania liczby S niż szereg (152).

Rozpatrzymy kilka przykładów.

Przyjmijmy

$$a_k = \frac{1}{k+1}, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots); \tag{156}$$

mamy tu

$$\Delta a_k = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{-1}{(k+1)(k+2)};$$

stąd, dalej:

$$\Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = \frac{-1}{(k+2)(k+3)} - \frac{-1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Drogą łatwej indukcji znajdujemy:

$$\Delta^n a_k = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n+1)},$$

skąd, dla $k = 0$:

$$\Delta^n a_0 = \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{157}$$

mamy więc, w myśl (154):

$$R_n = \frac{n!}{2^n}\left[\frac{1}{1.2\ldots(n+1)} - \frac{1}{2.3\ldots(n+2)} + \frac{1}{3.4\ldots(n+3)} + \ldots\right].$$

Suma szeregu w nawiasie, jako naprzemiennego, jest, w myśl tw. 106, liczbą dodatnią, mniejszą od pierwszego składnika, zatem:

$$0 < R_n < \frac{n!}{2^n}\,\frac{1}{1.2\ldots(n+1)} = \frac{1}{2^n(n+1)}; \tag{158}$$

przeto: $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, i wzór (155) daje, wobec (156) i (157):

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \ldots, \tag{159}$$

czyli

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p.2^p},$$

przyczem błąd, który popełnimy, biorąc sumę cząstkową zamiast sumy szeregu, będzie, w myśl (158), mniejszy od ostatniego uwzględnionego składnika.

W szczególności np dla $n = 10$, wnosimy (wobec $2^{10}.11 < 10^4$), że suma pierwszych dziesięciu składników szeregu, stojącego po prawej stronie wzoru (159), przedstawia $\lg 2$ z dokładnością czterech cyfr dziesiętnych.

Rozpatrzymy tu bliżej jeszcze jeden przykład, mianowicie t. zw. szereg Leibniz'a

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{160}$$

Szereg ten, jako naprzemienny, jest zbieżny: sumę jego oznaczymy przez $\frac{\pi}{4}$ (znakowanie to usprawiedliwimy w jednym z późniejszych rozdziałów). Obliczymy dokładnie, ile należałoby uwzględnić składników szeregu (160), aby przy jego pomocy wyznaczyć liczbę π z błędem nie przenoszącym $\frac{1}{n}$-tej.

Oznaczmy przez s_n sumę n pierwszych składników szeregu (160). Mamy oczywiście, przy naturalnych n i k:

$$|s_{k+2n} - s_k| = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} - \cdots - \frac{1}{2k+4n-1} =$$

$$=\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{2}{(2k+5)(2k+7)}+\ldots+\frac{2}{(2k+4n-3)(2k+4n-1)}>$$

$$>\frac{2}{(2k+1)(2k+5)}+\frac{2}{(2k+5)(2k+9)}+\ldots+\frac{2}{(2k+4n-3)(2k+4n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}+\frac{1}{2k+5}-\ldots-\frac{1}{2k+4n+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+4n+1}\right],$$

zatem:

$$|s_{k+2n}-s_k|>\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+4n+1)},$$

skąd, przechodząc do granicy dla $n=\infty$, wobec $\lim\limits_{n=\infty} s_n=\frac{\pi}{4}$:

$$\left|\frac{\pi}{4}-s_k\right|\geq\frac{1}{2(2k+1)}>\frac{1}{2(2k+2)},$$

skąd

$$|\pi-4s_k|>\frac{1}{k+1}\quad(\text{dla } k=1,2,3\ldots). \tag{161}$$

Z drugiej strony mamy przy wszelkiem naturalnem p:

$$(2p+1)(2p+3)=4p^2+8p+3>4p^2+8p=4p(p+2);$$

kładąc kolejno $p=k,\ k+2,\ k+4,\ \ldots\ k+2n-2$ i dodając, otrzymujemy stąd:

$$|s_{k+2n}-s_k|=\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}+$$

$$+\frac{2}{(2k+5)(2k+7)}+\ldots+\frac{2}{(2k+4n-3)(2k+4n-1)}<$$

$$<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+4)}+\ldots+\frac{1}{(k+2n-2)(k+2n)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2n}\right]<\frac{1}{4k},$$

czyli

$$|s_{k+2n}-s_k|<\frac{1}{4k},$$

skąd przechodzą do granicy dla $n=\infty$:

$$\left|\frac{\pi}{4}-s_k\right|\leq\frac{1}{4k}\quad(\text{dla } k=1,2,3,\ldots) \tag{162}$$

Mamy więc, wobec (161) i (162), przy wszelkiem naturalnem k:

$$\frac{1}{k+1} < |\pi - 4s_k| \leq \frac{1}{k}. \tag{163}$$

Jeżeli teraz chcemy zapomocą szeregu Leibniz'a obliczyć liczbę π z dokładnością do $\frac{1}{n}$, to potrzeba i wystarcza obrać wskaźnik k tak iżbyśmy mieli

$$|\pi - 4s_k| \leq \frac{1}{n}.$$

Wobec (163), nierówność ta nie będzie jeszcze spełnioną dla $k = n - 1$, ale już będzie spełnioną dla $k = n$. Stąd wniosek: *Chcąc obliczyć zapomocą szeregu* Leibniz'a *liczbę π z dokładnością do $\frac{1}{n}$, musimy uwzględnić n pierwszych składników tego szeregu* (więcej niż n nie potrzeba, mniej niż n nie wystarcza). Np. chcąc mieć π z dokładnością trzech tylko miejsc dziesiętnych, musielibyśmy obliczyć aż *tysiąc* składników. Szereg Leibniz'a jest więc praktycznie nieprzydatny do obliczania liczby π.

Przekształcimy go obecnie metodą Euler'a. Przyjmijmy w tym celu

$$a_k = \frac{1}{2k+1}; \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{164}$$

Mamy stąd

$$\Delta a_n = \frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+1} = \frac{-2}{(2k+1)(2k+3)},$$

$$\Delta^2 a_k = \frac{-2}{(2k+3)(2k+5)} - \frac{-2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2.4}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)};$$

drogą łatwej indukcji znajdujemy:

$$\Delta^n a_k = \frac{(-1)^n 2^n . n!}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)},$$

skąd, w szczególności, dla $k = 0$:

$$\Delta^n a_0 = \frac{(-1)^n 2^n n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}; \tag{165}$$

mamy więc, w myśl (154):

$$R_n = n!\left[\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)} - \frac{1}{3.5.7\ldots(2n+3)} + \frac{1}{5.7.9\ldots(2n+5)} - \ldots\right].$$

Stąd, ponieważ szereg w nawiasie jest naprzemienny, znajdujemy (w myśl tw. 106):

$$0 < R_n < \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}. \tag{166}$$

Lecz

$$\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} < \frac{1}{2^n}$$

$\left(\text{gdyż } \frac{k}{2k+1} < \frac{1}{2}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots\right)$; mamy więc, wobec (106):

$$0 < R_n < \frac{1}{2^n}, \tag{167}$$

skąd $\lim R_n = 0$, i wzór (155) daje, wobec (164) i (165):

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots$$

Biorąc dwanaście składników tego szeregu, mielibyśmy, wobec (167): $4R_{12} < \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10^3}$ i przeto otrzymalibyśmy stąd liczbę π z dokładnością do 0,001, na co w szeregu L e i b n i z'a, jak obliczyliśmy wyżej, należałoby uwzględnić aż tysiąc składników.

§ 82ª. Przekształcimy obecnie szereg L e i b n i z'a na szereg szybciej zbieżny inną jeszcze metodą, polegającą na zastąpieniu każdego składnika u_n szeregu wolno zbieżnego Σu_n przez sumę kilku, np. trzech składników: $u_n = u_n' + u_n'' + v_n$, tak iżby sumę każdego z szeregów $\Sigma u_n'$ oraz $\Sigma u_n''$ można było obliczyć z łatwością, zaś szereg Σv_n był szybciej zbieżny niż Σu_n.

Napiszmy w tym celu szereg L e i b n i z'a w postaci:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Z łatwością sprawdzamy tożsamość

$$\frac{2}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(4n+1)^2} - \frac{1}{(4n+5)^2}\right) - \frac{16}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2},$$

skąd, wobec

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)=1,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4n+1)^2}-\frac{1}{(4n+5)^2}\right)=1,$$

znajdujemy w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{4}=1-16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2} \tag{168}$$

— jest to szereg Lucas.

Mamy oczywiście, dla $n \geqq p$:

$$\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2}\leq\frac{1}{(4p+1)(4p+3)(4p+5)}\cdot\frac{1}{(4n+1)(4n+5)},$$

stąd

$$r_p=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2}\leq$$

$$\leq\frac{1}{(4p+1)(4p+3)(4p+5)}\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{1}{4(4p+1)^2(4p+3)(4p+5)},$$

skąd wnosimy, że błąd, który popełnimy przy obliczaniu liczby π uwzględniając tylko p pierwszych składników szeregu (168), nie będzie przenosił liczby $\dfrac{16}{(4p+1)^2(4p+3)(4p+5)}$. Więc np. dla $p=9$ błąd będzie mniejszy od $\dfrac{1}{10^5}$. Uwzględniając zatem w szeregu Lucas zaledwie dziewięć składników, otrzymamy liczbę π z dokładnością pięciu znaków dziesiętnych, na co w szeregu Leibniz'a trzebaby, jak wiemy, uwzględnić aż *sto tysięcy* składników.

Podamy dla szeregu Leibniz'a jeszcze inne przekształcenie, oparte na łatwo sprawdzić się dającej tożsamości:

$$\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)}=\frac{1}{384}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)+$$

$$+\frac{3}{128}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Pomnóżmy obie strony tej tożsamości przez $(-1)^{n-1}$ i sumujmy dla $n=1,2,3,\ldots$

Zważywszy, że wobec wzoru Leibniz'a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-3}=-1-\frac{\pi}{4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}=1-\frac{\pi}{4},$$

wreszcie, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=1,$$

otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)}=\frac{1}{384}\left(-1-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{128}\left(\frac{\pi}{4}-1+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{32},$$

skąd, w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}+24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)}.$$

Wyrażenie $(4n^2-1)^2(4n^2-9)$ jest dla $n>1$ dodatnie i stale wzrasta: składniki naszego szeregu są więc, poczynając od drugiego, naprzemian ujemne i dodatnie, bezwzględnie malejące. Błąd zatem, jaki popełnimy, zatrzymując się na kilku składnikach, będzie mniejszy bezwzględnie od pierwszego odrzuconego składnika. Biorąc tylko dwa składniki, czyli kładąc

$$\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}+24\left(\frac{1}{3^2 . 5}-\frac{1}{15^2 . 7}\right)$$

otrzymamy liczbę $\frac{\pi}{4}$ z błędem mniejszym niż $\frac{24}{35^2 . 27}<\frac{1}{10^3}$, czyli z dokładnością trzech znaków dziesiętnych.

§ 83. Metoda Kummera-Knoppa przyspieszania zbieżności szeregów [1]).

Niech Σu_n oznacza dany szereg wolno zbieżny, zaś $\Sigma a_n = A$ szereg o składnikach $\neq 0$, którego suma A jest znaną, taki iż istnieje granica

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_n}{a_n}=\gamma\neq 0. \tag{169}$$

[1]) K. Knopp: *Einige Bemerkungen zur Kummerschen und Markoffschen Reihentransformation.* Sitzb. Berliner Math. Ges. 1919.

Wówczas mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \gamma A + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \gamma a_n), \tag{170}$$

Dowód wzoru (170) jest natychmiastowy, gdyż, wobec zbieżności szeregów Σu_n i Σa_n, prawa strona daje $\gamma A + \Sigma u_n - \gamma \Sigma a_n = \Sigma u_n$.

Szereg, $\Sigma v_n = \Sigma(u - \gamma a_n)$ jest przytem szybciej zbieżny niż szereg Σu_n, gdyż $v_n = u_n\left(1 - \gamma \frac{a_n}{u_n}\right)$, przyczem, wobec (169), drugi czynnik zmierza do zera.

Np. dla $v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, kładąc $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$, otrzymamy $\gamma = \frac{1}{4}$,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -1,\ u_n - \gamma a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)(2n+2)},$$ i przeto

wzór (170) daje przekształcenie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n+1)(2n+2)},$$

czyli, w myśl wzoru Leibniz'a:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \dots$$

Biorąc tylko 7 składników, otrzymalibyśmy π z dokładnością trzech znaków dziesiętnych.

Metoda Markowa-Knoppa przekształcania szeregów [1]).

Niech $s = \Sigma u_n$ *oznacza dany szereg zbieżny, zaś* $a_{k,i}$ *ciąg podwójny, taki iż, skoro położymy*

$$r_{k,n} = u_k - (a_{k,1} + a_{k,2} + \dots + a_{k,n}),\ (k,\ n\ \textit{naturalne}), \tag{a}$$

to

1) *szeregi*

$$s_n = a_{1,n} + a_{2,n} + a_{3,n} + \dots \tag{b}$$

będą zbieżne $(n = 1, 2, \dots)$;

2) *kładąc*

$$R_n = r_{1,n} + r_{2,n} + r_{3,n} + \dots \tag{c}$$

będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0. \tag{d}$$

[1]) Knopp l. c.

Mamy wówczas

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \tag{171}$$

Uwaga. Że szeregi (c) są zbieżne (dla $n = 1, 2, \ldots$), wynika natychmiast ze wzoru (a) i uwagi, że szeregi (b) oraz szereg $s = \Sigma u_n$ są zbieżne.

Dla dowodu wzoru (171) wystarczy zauważyć, że z (a) wynika, wobec (b) i (c):

$$R_n = s - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n), \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

co, wobec (d), pociąga za sobą wzór (171).

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że jeżeli Σa_n jest szeregiem zbieżnym o składnikach dodatnich, Σb_n szeregiem rozbieżnym o składnikach dodatnich, to szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny, jeżeli } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

$$\text{rozbieżny, jeżeli } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

2) Udowodnić, że jeżeli $0 < u_{n+1} < u_n$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$), to szereg Σu_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, jeżeli zbieżnym jest szereg

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots + 2^n u_{2^n} + \ldots \qquad \text{(Cauchy)}$$

Zastosować to twierdzenie do szeregów $\zeta(s)$.

3) Udowodnić, że jeżeli $0 < u_{n+1} < u_n$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, to szeregi Σu_n oraz

$$u_1 + 2u_4 + 3u_9 + \ldots + n\, u_{n^2} + \ldots$$

są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

4) Udowodnić, że ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Dla dowodu wystarczy się oprzeć na nierówności

$$\left|\frac{a_n}{n}\right| = \sqrt{a_n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

5) Udowodnić, że dla każdego szeregu zbieżnego o składnikach dodatnich Σu_n, istnieje szereg zbieżny o składnikach dodatnich, Σv_n, taki iż

$$\lim_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = \infty.$$

Dowód. Niech Σu_n oznacza dany szereg zbieżny o składnikach dodatnich; oznaczmy przez s_n jego sumy cząstkowe ($s_0 = 0$), zaś przez s — jego sumę i połóżmy

$$v_n = \frac{u_n}{\sqrt{s - s_{n-1}} + \sqrt{s - s_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{172}$$

Wobec (172) będziemy mieli oczywiście

$$v_n = \sqrt{s - s_{n-1}} - \sqrt{s - s_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, w jednej chwili:

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \sqrt{s} - \sqrt{s - s_n}, \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

co, wobec $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$, dowodzi, że szereg Σv_n jest zbieżny, dając sumę $\sigma = \sqrt{s}$. Z drugiej strony, ze wzoru (172) wynika, że składniki v_n są wszystkie dodatnie, oraz że $\lim\limits_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = \infty$ (gdyż $\lim\limits_{n=\infty} (s - s_{n-1}) = \lim\limits_{n=\infty} (s - s_n) = 0$). Szereg Σv_n spełnia więc żądane warunki. Mamy tu też, jak łatwo widzieć: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} = \infty$. Otrzymany wynik możemy wyrazić, mówiąc że *nie istnieje szereg najwolniej zbieżny*.

6) Udowodnić, że dla każdego szeregu rozbieżnego o składnikach dodatnich Σu_n istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich Σv_n, taki iż $\lim\limits_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

Dowód. Niech Σu_n oznacza szereg rozbieżny o składnikach dodatnich. Oznaczmy przez s_n jego sumy cząstkowe i połóżmy

$$v_1 = \sqrt{u_1}, \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{s_{n-1}} + \sqrt{s_n}} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots \tag{173}$$

Będzie oczywiście $v_n = \sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}$, dla $n > 1$, skąd, w jednej chwili $\sigma_n = v_1 + \ldots + v_n = \sqrt{s_n}$ i przeto, wobec $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \infty$, wnosimy o rozbieżności szeregu Σv_n, zaś wzór (173) daje $\lim\limits_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Otrzymany wynik, możemy wyrazić, mówiąc, że *nie istnieje szereg najwolniej rozbieżny*.

7) Udowodnić, że jeżeli ε_n jest ciągiem malejącym, zmierzającym do zera, to istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich Σu_n, taki iż szereg $\Sigma u_n \varepsilon_n$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że mamy $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$ ($n = 2, 3, \ldots$) oraz $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Połóżmy

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}}} \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

będziemy stąd mieli (wobec $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$) $u_n > 0$ oraz

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

zatem, wobec $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, szereg Σu_n będzie rozbieżny.

Z drugiej strony, wobec $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$, mamy

$$0 < u_n \varepsilon_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_{n-1}} - \sqrt{\varepsilon_n}}{\sqrt{\varepsilon_n}\,\sqrt{\varepsilon_{n-1}}}\,\varepsilon_n < \sqrt{\varepsilon_{n-1}} - \sqrt{\varepsilon_n} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

skąd, dla $n > 1$:

$$0 < u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \ldots + u_n\varepsilon_n < u_1\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_n} < u_1\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1},$$

co dowodzi ograniczoności, a więc i zbieżności szeregu $\sum_n u_n \varepsilon_n$.

Szereg $\sum_n u_n$ spełnia więc żądane warunki.

Pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że jeżeli ε_n jest jakimkolwiek ciągiem liczb zespolonych, zmierzającym do zera, to istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich $\sum_n u_n$, taki iż szereg $\sum_n u_n \varepsilon_n$ jest zbieżny.

8) Obliczyć zapomocą wzoru Eulera (151) sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n, \tag{174}$$

gdzie k oznacza liczbę naturalną, zaś $|x| < 1$.

Szereg (174) jest zbieżny dla $|x| < 1$, co wnosimy np. na podstawie tw. 91: wzór (151) jest więc dla szeregu (174) stosowalny. Dla $a_n = n^k$ mamy, jak łatwo widzieć $\Delta^{k+1} a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, zatem, wobec (148): $S_{k+1}(x) = 0$ i przeto, w myśl (149) (dla $n = k+1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n = \frac{x\,\Delta\,0^k}{(1-x)^2} + \frac{x^2\,\Delta^2 0^k}{(1-x)^3} + \ldots + \frac{x^k \Delta^k 0^k}{(1-x)^{k+1}} \quad (\text{dla } |x| < 1)$$

(gdzie $\Delta^p 0^k$ oznacza $\Delta^p a_0$, dla $a_n = n^k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Więc np., dla $k = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \tag{175}$$

zaś dla $k = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

9) Niech x oznacza daną liczbę dodatnią. Oznaczmy przez k_1 najmniejszą liczbę naturalną, spełniającą nierówność $k_1 x > 1$, i połóżmy $k_1 x = 1 + x_1$: będzie znowu $x_1 > 0$. Z liczbą x_1 postąpmy jak z liczbą x, wyznaczając najmniejszą liczbę naturalną k_2, taką iż $k_2 x_1 > 1$, i kładąc $k_2 x_1 = 1 + x_2$ i t. d. Udowodnić, że w ten sposób dochodzimy do rozwinięcia liczby x na szereg nieskończony:

$$x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \ldots,$$

gdzie k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby naturalne niemalejące.

Okazać, że każda liczba dodatnia daje jedno tylko rozwinięcie na taki szereg oraz że na to iżby liczba x była niewymierną, potrzeba i wystarcza by było $\lim_{n=\infty} k_n = \infty$ [1]).

[1]) Zob. moją pracę: „O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi nieskończone". Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. 1911.

ROZDZIAŁ IX.

Mnożenie szeregów. Szeregi podwójne.

§ 84. **Twierdzenie 109** (Cesàro). *Jeżeli mamy dwa szeregi zbieżne* (o składnikach zespolonych)

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad oraz \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

i jeżeli utworzymy szereg Σc_n, *kładąc*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

oraz położymy

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

to będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{n} = AB. \tag{4}$$

Dowód. Połóżmy

$$\left.\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n \end{aligned}\right| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Mamy oczywiście, wobec (3) i (2), przy naturalnem n:

$$C_n = \left|\begin{array}{l} a_1 b_1 \\ + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1, \end{array}\right.$$

skąd w jednej chwili, wobec (5):

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + a_3 B_{n-2} + \ldots + a_n B_1 = \\ &= B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + \ldots + B_n a_1 . \end{aligned} \tag{6}$$

Wobec (6), mamy:

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \left|\begin{array}{l} B_1 a_1 \\ + B_1 a_2 + B_2 a_1 \\ + B_1 a_3 + B_2 a_2 + B_3 a_1 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + B_3 a_{n-2} + \ldots + B_n a_1, \end{array}\right.$$

skąd, wobec (5):

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = B_1 A_n + B_2 A_{n-1} + \ldots B_n A_1 \tag{7}$$

przy wszelkiem naturalnem n.

Lecz, wobec (5) i (1), mamy

$$\lim_{n=\infty} A_n = A, \quad \lim_{n=\infty} B_n = B;$$

możemy więc położyć

$$A_n = A + \varepsilon_n, \quad B_n = B + \eta_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

gdzie

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0, \text{ oraz } \lim_{n=\infty} \eta_n = 0. \tag{9}$$

Wzór (7) daje, wobec (8):

$$\begin{aligned} \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{n} &= AB + B\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n}{n} + \\ &+ A\frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n}{n} + \frac{\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \ldots + \varepsilon_n \eta_1}{n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl (9), będzie

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \text{ oraz } |\eta_n| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu. \tag{11}$$

Suma

$$\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \ldots + \varepsilon_n \eta_1 \tag{12}$$

składa się przy danem n z wyrazów

$$\varepsilon_k \eta_l,$$

gdzie $k + l = n + 1$, a więc przynajmniej jeden ze wskaźników k, l jest większy od $\frac{n}{2}$. Jeżeli więc będzie $n > 2\mu$, to zachodzić będzie conajmniej jedna z nierówności

$$k > \mu \text{ oraz } l > \mu,$$

i przeto, w myśl (11), zachodzić będzie conajmniej jedna z nierówności

$$|\varepsilon_k| < \varepsilon \text{ oraz } |\eta_l| < \varepsilon.$$

Z drugiej strony, ciągi ε_n i η_n, jako zbieżne, muszą być ograniczone: istnieje więc liczba g, taka iż

$$|\varepsilon_n| < g \text{ oraz } |\eta_n| < g, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

W każdym więc razie, dla $n > 2\mu$ jedna z liczb $|\varepsilon_k|$, $|\eta_l|$ będzie mniejsza od ε, zaś druga mniejsza od g, zatem zawsze

$$|\varepsilon_k \eta_l| < \varepsilon g.$$

Dowiedliśmy więc, że dla $n > 2\mu$ każdy ze składników sumy (12) jest bezwzględnie mniejszy od εg, skąd w jednej chwili:

$$\left|\frac{\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \ldots \varepsilon_n \eta_1}{n}\right| < \varepsilon g, \quad \text{dla} \quad n > 2\mu,$$

co dowodzi (wobec dowolności liczby dodatniej ε), że

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \ldots + \varepsilon_n \eta_1}{n} = 0. \tag{13}$$

Niech teraz p oznacza dany wskaźnik $> \mu$. Połóżmy, przy obranem $p > \mu$, $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p = h$ i niech ν oznacza liczbę, większą jednocześnie od p i od $\frac{h}{\varepsilon}$: będzie więc

$$\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p}{n}\right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \nu. \tag{14}$$

Dla $n > p$ możemy zapisać

$$\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}\right| \leq \left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_p}{n}\right| + \left|\frac{\varepsilon_{p+1} + \varepsilon_{p+2} + \ldots + \varepsilon_n}{n}\right|. \tag{15}$$

Lecz, wobec $\nu > p > \mu$, mamy, w myśl (11), dla $n > \nu$:

$$|\varepsilon_{p+1} + \varepsilon_{p+2} + \ldots + \varepsilon_n| \leq |\varepsilon_{p+1}| + |\varepsilon_{p+2}| + \ldots + |\varepsilon_n| <$$
$$< \varepsilon(n - p) < \varepsilon n;$$

nierówność (15) daje więc, wobec (14):

$$\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}\right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \nu,$$

skąd w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = 0. \tag{16}$$

Podobnież znaleźlibyśmy:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n}{n} = 0. \tag{17}$$

Wzór (10) daje więc, wobec (16), (17) i (13), w jednej chwili wzór (4), *c. b. d. o.* Udowodniliśmy więc twierdzenie C e s à r o.

Zauważymy, że przy dowodzie tw. Cesàro udowodniliśmy zarazem

Twierdzenie 110. *Jeżeli granicą ciągu (liczb zespolonych) ε_n jest zero, to jest też*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = 0. \tag{18}$$

Twierdzenie to nie daje się oczywiście odwrócić: jeżeli zachodzi wzór (18) to niekoniecznie mamy $\lim \varepsilon_n = 0$: np. dla ciągu $\varepsilon_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, który nie jest zbieżny, zachodzi, jak łatwo widzieć, wzór (18). Godnem uwagi jest jednak, że jeżeli mamy

$$\lim_{n=\infty} \left(\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} \right) = 0,$$

to stąd wynika

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

jakoteż (w myśl tw. 110) naodwrót. Udowodnimy nawet ogólniejsze twierdzenie, mianowicie[1]):

Jeżeli dla ciągu nieskończonego liczb zespolonych ε_n zachodzi przy pewnem $\alpha \geq 0$ wzór

$$\lim_{n=\infty} \left(\varepsilon_n + \alpha \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} \right) = 0, \tag{I}$$

to mamy

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{II}$$

Połóżmy, dla dowodu:

$$\varepsilon_n + \alpha \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = \eta_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{III}$$

Wobec (I) będziemy mieli $\lim\limits_{n=\infty} \eta_n = 0$, i przeto też $\lim\limits_{n=\infty} | \eta_n | = 0$, skąd, w myśl tw. 110, wnosimy, że

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\eta_1| + |\eta_2| + \ldots + |\eta_n|}{n} = 0. \tag{IV}$$

Połóżmy, dalej:

$$\sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{V}$$

w myśl (III) i (V) znajdujemy z łatwością:

$$\sigma_n = \frac{n}{n+\alpha} (\eta_n + \sigma_{n-1}) \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots,$$

skąd, wobec $\alpha \geq 0$:

$$|\sigma_n| \leq |\eta_n| + |\sigma_{n-1}|, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots,$$

[1]) Por. E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie. Berlin 1916, p. 30.

co, z uwagi, że w myśl (III) i (V) $|\sigma_1| = |\varepsilon_1| \leq (1+\alpha)|\varepsilon_1| = |\eta_1|$, daje w jednej chwili:

$$|\sigma_n| \leq |\eta_n| + |\eta_{n-1}| + \ldots |\eta_2| + |\eta_1|, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

zatem, w myśl (V):

$$\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}\right| \leq \frac{|\eta_1| + |\eta_2| + \ldots + |\eta_n|}{n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, w myśl (IV), otrzymujemy natychmiast

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = 0,$$

co, wobec (I), daje w jednej chwili wzór (II), *c. b. d. o.*

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie. Zauważymy, że możnaby dowieść, że jest ono też prawdziwe dla $0 > \alpha > -1$, natomiast dla $\alpha \leq -1$ twierdzenie nasze jest nieprawdziwe: np. dla $\alpha = -1$, $\varepsilon_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zachodzi, jak łatwo widzieć, wzór (I), lecz nie zachodzi wzór (II); podobnież dla $\alpha = -2$, $\varepsilon_n = n - 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. (Możnaby udowodnić, że twierdzenie nasze nie jest prawdziwe przy żadnem $\alpha \leq -1$: zob. moją odnośną notatkę w *Tôhoku Mathematical Journal*, luty 1917).

Twierdzenie 110 możemy z łatwością uogólnić. Załóżmy, że ciąg u_n jest zbieżny oraz

$$\lim_{n=\infty} u_n = l;$$

kładąc

$$u_n - l = \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

będziemy więc mieli $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, skąd, jak dowiedliśmy, wynika wzór (18), czyli, wobec (19), wzór

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} - l\right) = 0,$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = l.$$

Mamy więc

Twierdzenie 110[a]. *Jeżeli ciąg u_n jest zbieżny, to mamy*

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \lim_{n=\infty} u_n.$$

Twierdzenie to możemy, jak łatwo widzieć, wypowiedzieć też w formie:

Jeżeli (dla ciągu liczb zespolonych v_n) *mamy* $\lim\limits_{n=\infty} (v_{n+1} - v_n) = l$, *to mamy też* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{v_n}{n} = l$ (Cauchy).

Zwrócimy uwagę na pewne ciekawe zastosowanie wypowiedzianego twierdzenia. Niech u_n oznacza ciąg liczb rzeczywistych dodatnich i załóżmy, że istnieje $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = g > 0$. Będziemy więc stąd mieli $\lim\limits_{n=\infty} \lg \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lg g$, czyli $\lim\limits_{n=\infty} (\lg u_{n+1} - \lg u_n) = g$, co daje, w myśl naszego twierdzenia (dla $v_n = \lg u_n$): $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\lg u_n}{n} = \lg g$, czyli $\lim\limits_{n=\infty} \lg \sqrt[n]{u_n} = \lg g$, skąd: $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = g$.

Dowiedliśmy więc, że *jeżeli dla ciągu liczb dodatnich u_n istnieje granica $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = g > 0$, to mamy również $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = g$.* (Por. twierdzenie 95, § 77).

Wyprowadzimy teraz pewien łatwy wniosek z twierdzeń 109 oraz 110ᵃ. Zachowując użyte w twierdzeniu 109 znakowanie, załóżmy, że ciąg C_n jest zbieżny. W myśl tw. 110ᵃ będzie więc

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} = \lim_{n=\infty} C_n,$$

skąd, wobec (4):

$$\lim_{n=\infty} C_n = AB,$$

co możemy wypowiedzieć w formie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 111 (Abel'a). *Jeżeli mamy dwa szeregi zbieżne*

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{20}$$

oraz

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \tag{21}$$

i jeżeli, kładąc

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{22}$$

otrzymujemy szereg zbieżny

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \dots, \tag{23}$$

to mamy:

$$C = AB. \tag{24}$$

§ **85.** Okażemy obecnie, że jeżeli szeregi (20) i (21) są oba zbieżne, przytem conajmniej jeden z nich bezwzględnie, to szereg (23) jest zbieżny (a więc zachodzi wzór (24)).

Załóżmy więc, że np. szereg (20) jest zbieżny bezwzględnie, zaś szereg (21) zbieżny (choćby tylko warunkowo). Oznaczmy, jak w poprzednim §, przez A_n, B_n i C_n odpowiednio sumy cząstkowe szeregów (20), (21) i (23). Mamy oczywiście, przy naturalnem n:

$$A_n B_n = a_1 B_n + a_2 B_n + a_3 B_n + \ldots + a_n B_n,$$

skąd, wobec (6):

$$A_n B_n - C_n = a_2 (B_n - B_{n-1}) + a_3 (B_n - B_{n-2}) + \ldots + a_n (B_n - B_1),$$

czyli

$$A_n B_n - C_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} (B_n - B_{n-k}). \tag{25}$$

Rozbijmy sumę (25) na dwie:

$$\sum_{k=1}^{E\frac{n}{2}} + \sum_{k=E\frac{n}{2}+1}^{n-1}.$$

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec zbieżności ciągu B_n, dla liczby ε istnieje takie μ, iż

$$| B_{n'} - B_{n''} | < \varepsilon, \quad \text{dla } n' > \mu \text{ oraz } n'' > \mu. \tag{26}$$

Załóżmy, że $n > 2\mu$: dla $k \leq E\frac{n}{2}$ będzie $n - k \geq \frac{n}{2} > \mu$ i przeto, wobec (26) (dla $n' = n$, $n'' = n - k$):

$$| B_n - B_{n-k} | < \varepsilon, \quad \text{dla } n > 2\mu, \ k \leq E\frac{n}{2}.$$

Stąd, dla $n > 2\mu$:

$$\left| \sum_{k=1}^{E\frac{n}{2}} a_{k+1} (B_n - B_{n-k}) \right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{E\frac{n}{2}} | a_{k+1} |. \tag{27}$$

Lecz szereg (20) jest, jak zakładamy, zbieżny bezwzględnie: szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | a_k |$ jest więc zbieżny: oznaczając jego sumę przez M, będziemy mieli przy wszelkiem n:

$$\sum_{k=1}^{E\frac{n}{2}} | a_{k+1} | \leq M,$$

gdzie M jest liczbą (skończoną) niezależną od n. Stąd, wobec (27), znajdujemy:

$$\left|\sum_{k=1}^{E\frac{n}{2}} a_{k+1}(B_n - B_{n-k})\right| < \varepsilon M, \quad \text{dla} \quad n > 2\mu. \tag{28}$$

Ze zbieżności ciągu B_n wynika, że istnieje liczba (skończona) N, niezależna od m, taka iż:

$$|B_m| < N, \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, 3, \ldots;$$

jest więc stale

$$|B_n - B_{n-1}| < 2N,$$

skąd

$$\left|\sum_{k=E\frac{n}{2}+1}^{n-1} a_{k+1}(B_n - B_{n-k})\right| < 2N \sum_{k=E\frac{n}{2}+1}^{n-1} |a_{k+1}|. \tag{29}$$

Z założenia, że szereg (20) jest zbieżny bezwzględnie, wynika dalej, że dla liczby dodatniej ε istnieje takie ν, iż

$$|a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_{m+l}| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad m > \nu, \ l = 1, 2, 3, \ldots$$

Jeżeli więc $n > 2\nu$, to będzie

$$\sum_{k=E\frac{n}{2}+1}^{n-1} |a_{k+1}| < \varepsilon,$$

zatem, w myśl (29):

$$\left|\sum_{k=E\frac{n}{2}+1}^{n-1} a_k(B_n - B_{n-k})\right| < 2N\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > 2\nu. \tag{30}$$

Wobec (25), (28) i (30) znajdujemy, dla n większych jednocześnie od 2μ i 2ν:

$$|A_n B_n - C_n| < (M + 2N)\varepsilon,$$

skąd, wobec dwolności ε:

$$\lim_{n=\infty} (A_n B_n - C_n) = 0,$$

zatem, wobec $\lim_{n=\infty} A_n = A$, $\lim_{n=\infty} B_n = B$:

$$\lim_{n=\infty} C_n = AB,$$

c. b. d. o. Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 112 (Cauchy'ego). *Jeżeli mamy szereg zbieżny bezwzględnie*

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{31}$$

oraz szereg zbieżny (choćby tylko warunkowo)

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots, \tag{32}$$

to, kładąc

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{33}$$

otrzymamy szereg zbieżny

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots, \tag{34}$$

którego suma jest AB.

Zauważymy, że jeżeli szeregi (31) i (32) są oba zbieżne warunkowo, to szereg (34) może być zarówno zbieżnym jak i rozbieżnym.

Przyjmijmy np.

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ oraz } b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Każdy z szeregów (31) i (32) będzie więc szeregiem anharmonicznym

$$\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

który, jak wiemy, jest zbieżny warunkowo.

W myśl (33) i (35) znajdujemy:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k+1)}. \tag{36}$$

Lecz

$$\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right],$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right]; \tag{37}$$

dalej, mamy oczywiście

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k};$$

oznaczając

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n} = \sigma_n \tag{38}$$

będziemy więc mieli, wobec (36) i (37):

$$c_n = \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n+1} \sigma_n; \tag{39}$$

składniki szeregu (34) są więc naprzemian dodatnie i ujemne.

Wobec (38), mamy, dalej, dla $n > 2$:

$$(n+1)\sigma_{n-1} - n\sigma_n = \sigma_{n-1} - n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \sigma_{n-1} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} > 0,$$

zatem, dla $n > 2$:

$$\frac{\sigma_{n-1}}{n} > \frac{\sigma_n}{n+1},$$

co. dowodzi, wobec (39), że składniki szeregu (34), poczynając od drugiego, maleją bezwzględnie.

Wobec (38), możemy, dalej, napisać:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{E\sqrt{n}} \frac{1}{k} + \sum_{k=E\sqrt{n}+1}^{n} \frac{1}{k}$$

pierwsza z wypisanych sum zawiera nie więcej niż $\sqrt{n}$ składników, z których każdy jest największy od jedności: wartość jej nie przenosi zatem $\sqrt{n}$; druga zaś z naszych sum zawiera mniej niż n składników, z których każdy jest mniejszy od $1/\sqrt{n}$ (ponieważ w uważanej sumie wskaźnik k spełnia nierówność $k \geq E\sqrt{n}+1 > \sqrt{n}$): wartość jej jest więc $< \sqrt{n}$. Stąd:

$$\sigma_n < 2\sqrt{n},$$

i przeto, wobec (39):

$$|c_n| < \frac{4}{\sqrt{n}},$$

skąd $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$.

Szereg (34) jest więc naprzemiennym, zatem, w myśl tw. 105, zbieżnym. W myśl tw. 111 suma jego jest więc iloczynem sum (31) i (32), skąd rozwinięcie:

$$\frac{1}{2}(\lg 2)^2 = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{4} - \frac{\sigma_4}{5} + \ldots$$

Dowiedliśmy więc, że szereg (34) może być zbieżnym, pomimo że oba szeregi (31) i (32) są zbieżne tylko warunkowo. Okażemy obecnie, że, w razie warunkowej zbieżności szeregów (31) i (32), szereg (34) może być rozbieżnym.

Przyjmijmy:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40}$$

szeregi (31) i (32) będą tu zbieżne, jako naprzemienne.

W myśl (33) oraz (40), będzie

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}. \tag{41}$$

Lecz, dla $k = 1, 2, \ldots n$, mamy oczywiście $k \leq n$ oraz $n - k + 1 \leq n$, zatem

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

i przeto, wobec (41):

$$|c_n| \geq 1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

co dowodzi, że szereg (34) nie jest zbieżny.

§ **86.** Okażemy obecnie, że jeżeli szeregi (31) i (32) są oba zbieżne bezwzględnie, to zbieżnym jest też szereg, który otrzymamy, rozłączając każdą grupę (33) składników szeregu (34), czyli szereg

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + \ldots \quad (42)$$

Oznaczmy przez s_m sumę m pierwszych składników szeregu (42), zaś przez σ_m — sumę wartości bezwzględnych składników sumy s_m, i niech $a_p b_q$ będzie ostatni składnik sumy s_m. Ze wzorów (33) wnosimy natychmiast, że składnik $a_p b_q$ należy do grupy c_{p+q-1}, zaś każdy z pozostałych składników $a_k b_l$ sumy s_m należy do jednej z grup $c_1, c_2, \ldots, c_{p+q-1}$ i przeto wskaźniki jego k i l spełniają nierówność $k + l \leq p + q$, skąd, tembardziej, $k \leq p + q$, oraz $l \leq p + q$. Składniki sumy s_m przedstawiają więc część wszystkich $(p+q)^2$ iloczynów

$$a_k b_l,$$

gdzie $k \leq p + q$ oraz $l \leq p + q$, czyli część wszystkich $(p+q)^2$ składników, które otrzymujemy po rozwinięciu iloczynu

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{p+q})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{p+q}).$$

Wnosimy stąd natychmiast o nierówności

$$\sigma_m \leq (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{p+q}|)(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{p+q}|). \quad (43)$$

Wobec zbieżności bezwzględnej szeregów (31) oraz (32), szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ są zbieżne: oznaczmy odpowiednio przez M i N ich sumy: będzie więc, przy wszelkich naturalnych p i q:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{p+q}| \leq M \text{ oraz } |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{p+q}| \leq N,$$

zatem, wobec (43):

$$\sigma_m < MN, \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Ciąg σ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ jest więc ograniczony, skąd wynika, że szereg (42) jest zbieżny bezwzględnie.

Sumy szeregu (zbieżnego) (42) nie zmienimy, jak wiemy (§ 72), łącząc znowu jego składniki w grupy $c_1, c_2, c_3 \dots$ Ponieważ zaś (wobec zbieżności bezwzględnej szeregów (31) i (32) oraz w myśl tw. 112) sumą szeregu (34) jest iloczyn sum (31) i (32), więc mamy wzór:

$$(a_1+a_2+a_3+\dots)(b_1+b_2+b_3+\dots)=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+\dots \quad (44)$$

Połóżmy przy wszelkich naturalnych k i l:

$$a_k b_l = u_{k,l}; \quad (45)$$

szereg (42) będziemy mogli przepisać w postaci:

$$S = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,3} + u_{2,2} + \dots \quad (46)$$

Ciąg nieskończony układów wskaźników

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1\,3),\ (2,2), \dots \quad (47)$$

będzie oczywiście zawierał każdy układ $(k.l)$ dwóch liczb naturalnych k i l, przytem każdy taki układ raz tylko jeden (przyczem oczywiście układy, różniące się porządkiem liczb, uważamy za różne).

Niech teraz

$$(k_1 . l_1),\ (k_2, l_2),\ (k_3, l_3), \dots \quad (48)$$

oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony układów (k, l) dwóch liczb naturalnych k i l, zawierający każdy układ dwóch liczb naturalnych raz i tylko raz jeden. Ciąg (48) różni się więc conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu (47), i przeto szereg

$$u_{k_1, l_1} + u_{k_2, l_2} + u_{k_3, l_3} + \dots \quad (49)$$

różni się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (46). Ponieważ zaś szereg (42) jest zbieżny bezwzględnie, więc szeregi (46) i (49) dają tę samą sumę. Mamy więc, wobec (44) i (45):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n},$$

gdzie (k_n, l_n) $(n = 1, 2, 3, \dots)$ oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k i l. Stąd:

Twierdzenie 113. *Jeżeli szeregi Σa_n oraz Σb_n są zbieżne bezwzględnie, to mamy wzór*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n}, \quad (50)$$

gdzie (k_n, l_n) *oznacza dowolny ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych* k *i* l.

W szczególności np. możemy układy (k, l) ustawić w ciąg nieskończony, porządkując je według wielkości iloczynów kl, a w każdej grupie układów (k, l), dających ten sam iloczyn, np. według rosnących pierwszych wskaźników. W ten sposób otrzymamy szereg:

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1 + a_1 b_5 + \ldots$$

Łącząc w jednę grupę d_n składniki $a_k b_l$, dla których $kl = n$, czyli kładąc

$$d_1 = a_1 b_1,$$
$$d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$
$$d_3 = a_1 b_3 + a_3 b_1,$$
$$d_4 = a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1,$$
$$d_5 = a_1 b_5 + a_5 b_1,$$

i t. d., otrzymujemy, wobec (50):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots \tag{51}$$

(Każda grupa d_n zawiera tu oczywiście tyle składników, ile dzielników naturalnych posiada wskaźnik n). Mnożenie szeregów, wykonane w ten sposób, nazywamy *mnożeniem* Dirichlet'a[1]), mnożenie zaś, wykonane zapomocą wzoru (34) (gdzie liczby c_n określone są wzorami (33)) nazywamy *mnożeniem* Cauchy'ego.

Przyjmijmy np.

$$a_n = \frac{1}{n^s}, \quad b_n = \frac{1}{n^s}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{52}$$

gdzie s oznacza liczbę rzeczywistą > 1. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ są, jak dowiedliśmy w § 78, zbieżne (bezwzględnie) dla $s > 1$: stosowalny jest więc do nich wzór (51).

Weźmy pod rozwagę składniki n-tej grupy d_n. Jeżeli składnik $a_k b_l$ należy do grupy d_n, to mamy $kl = n$, a ponieważ, wobec (52), jest

$$a_k b_l = \frac{1}{k^s} \cdot \frac{1}{l^s} = \frac{1}{(kl)^s},$$

[1]) E. Landau udowodnił w r. 1907 (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 24, p. 52), że dla mnożenia Dirichlet'a zachodzi twierdzenie analogiczne do tw. Abela 111, mianowicie. że jeżeli zbieżne są szeregi (20), (21), oraz szereg $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$, to sumą tego ostatniego jest AB. Dowód Landau'a posługuje się teorją funkcji zmiennej zespolonej. Landau zaznacza, że cieszyłby się, gdyby kto znalazł dowód elementarny tego twierdzenia.

Jeżeli szereg (59) jest zbieżny i S oznacza jego sumę, to liczba S jest sumą szeregu (60):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}.$$

O szeregu iterowanym (60) mówimy, że sumowanie zostało w nim wykonane najpierw względem l, potem względem k, albo, że sumowaliśmy *według wierszy* należy go odróżniać od szeregu

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}, \tag{61}$$

w którym sumowanie zostało wykonane *według kolumn*, t. j. najpierw względem k, potem względem l. Aby szereg (61) był zbieżny, musi być zbieżny każdy szereg nieskończony

$$S'_l = u_{1,l} + u_{2,l} + u_{3,l} + \ldots, \quad (l = 1, 2, 3, \ldots), \tag{62}$$

jakoteż szereg

$$S' = S'_1 + S'_2 + S'_3 + \ldots, \tag{63}$$

przyczem mamy wówczas

$$S' = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}.$$

Okażemy na przykładzie, że jeden z szeregów (60) i (61) może być zbieżny, a drugi rozbieżny.

W tym celu przyjmijmy jako elementy głównej przekątni tablicy (57) kolejne liczby naturalne

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

zaś jako elementy sąsiedniej górnej przekątni (t. j. jako wyrazy ciągu $u_{1,2}, u_{2,3}, u_{3,4}, \ldots u_{n,n+1}, \ldots$) — liczby ujemne

$$-1, -2, -3, \ldots,$$

wszystkie zaś pozostałe elementy tablicy (57) połóżmy $= 0$. (Innemi słowy, określamy ciąg podwójny $u_{k,l}$ przez warunki: $u_{k,l} = k$, dla $l = k$, $u_{k,l} = -k$, dla $l = k + 1$, wreszcie $u_{k,l} = 0$ dla $l < k$ oraz dla $l > k + 1$). Tablica (57) przyjmie więc postać:

$$\begin{array}{llllll}
1, & -1, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\
0, & 2, & -2, & 0, & 0, & \ldots \\
0, & 0, & 3, & -3, & 0, & \ldots \\
0, & 0, & 0, & 4, & -4, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Suma elementów każdego wiersza jest tu, jak łatwo widzieć, zerem, suma zaś elementów każdej kolumny wynosi 1. Szereg (59), zatem i szereg (60), jest więc zbieżny (dając sumę $S = 0$), zaś szereg (63), a więc i szereg (61), jest rozbieżny (dając sumę $S' = \infty$).

Szereg (60) może być zbieżny nawet pomimo, że wszystkie kolumny tablicy (57) dają szeregi rozbieżne. Np. kładąc

$$u_{k,2p-1} = \frac{1}{p}, \text{ zaś } u_{k,2p} = -\frac{1}{p} \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, \ p = 1, 2, 3, \ldots)$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć, jako sumę każdego wiersza liczbę 0, zaś każda kolumna będzie szeregiem rozbieżnym. Szereg (60) jest więc w uważanym przykładzie zbieżny, natomiast w szeregu (61) już sumowanie wewnętrzne (względem k) daje szeregi rozbieżne.

Godnem uwagi jest wreszcie, że nawet jeżeli oba szeregi (60) i (61) są zbieżne, to sumy ich mogą być różne. Następujący prosty przykład na to podał p. St. Ruziewicz:

Niech a i b będą dwie różne liczby (rzeczywiste lub zespolone). Przyjmijmy wszystkie elementy głównej przekątni $= a - b$, prócz pierwszego jej elementu $u_{1,1} = a$. Przyjmijmy, dalej, wszystkie elementy sąsiedniej górnej przekątni $= b - a$, wszystkie zaś pozostałe elementy tablicy (57) $= 0$. (Innemi słowy, połóżmy $u_{1,1} = a$, $u_{n+1,n+1} = a - b$, $u_{n,n+1} = b - a$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, wreszcie $u_{k,l} = 0$, dla $l < k$ oraz dla $l > k + 1$). Tablica (57) przyjmie więc postać

$$\begin{array}{llllll}
a, & b - a, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\
0, & a - b, & b - a, & 0, & 0, & \ldots \\
0, & 0, & a - b, & b - a, & 0, & \ldots \\
0, & 0, & 0, & a - b, & b - a, & \ldots \\
0, & 0, & 0, & 0, & a - b, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Suma wyrazów pierwszego wiersza wynosi tu, jak łatwo widzieć b, suma zaś każdego następnego wiersza daje 0. Suma szeregu (60) wynosi więc b.

Z drugiej strony, suma pierwszej kolumny wynosi oczywiście a, każdej zaś następnej — 0. Sumą szeregu (61) wynosi więc a. Mamy więc tu (wobec $b \neq a$):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \neq \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

pomimo że oba uważane szeregi iterowane są zbieżne.

Przytoczone przykłady dowodzą więc, że w sumie iterowanej nie mamy wogóle prawa zmieniać porządku sumowania. Okażemy, że przy pewnych warunkach suma szeregu iterowanego nie zależy od porządku sumowania.

§ **88.** Szereg iterowany (60) nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeżeli szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} | u_{k,l} | \tag{64}$$

jest zbieżny. Załóżmy, że szereg (64) jest zbieżny: powiadam, że wówczas tembardziej szereg (60) jest zbieżny.

W samej rzeczy, wobec zbieżności szeregu (64) muszą być zbieżne szeregi

$$\sigma_k = | u_{k,1} | + | u_{k,2} | + | u_{k,3} | + \ldots \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{65}$$

oraz szereg

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots \tag{66}$$

Wobec zbieżności szeregów (65), szeregi (58) będą zbieżne bezwzględnie, tudzież będziemy mieli oczywiście

$$| S_k | \leq \sigma_k, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{67}$$

skąd, wobec zbieżności szeregu (66), wnosimy o bezwzględnej zbieżności szeregu (59). Zbieżność szeregu (64) pociąga więc za sobą zbieżność szeregu (60). Powiadam, dalej, że pociąga ona za sobą również zbieżność szeregu

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} \,. \tag{68}$$

W samej rzeczy, ponieważ $| u_{k,l} |$ jest, wobec (65), składnikiem sumy σ_k, więc mamy stale

$$| u_{k,l} | \leq \sigma_k,$$

skąd, wobec (66) (z uwagi, że liczby σ_k są nieujemne):

$$\sum_{k=1}^{n} | u_{k,l} | \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n \leq \sigma, \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ l = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

co dowodzi zbieżności szeregów

$$\sigma_l' = \sum_{k=1}^{\infty} | u_{k,l} | \quad (l = 1, 2, 3, \ldots). \tag{69}$$

Mamy stąd (w myśl tw. 107):

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \ldots + \sigma_m' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(|u_{k,1}| + |u_{k,2}| + \ldots + |u_{k,m}|\right) \quad (70)$$

przy wszelkiem naturalnem m, a że, wobec (65), mamy oczywiście

$$|u_{k,1}| + |u_{k,2}| + \ldots + |u_{k,m}| \leq \sigma_k, \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ m = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

więc wzór (70) daje, wobec (66):

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \ldots + \sigma_m' \leq \sigma \quad (\text{dla } m = 1, 2, 3, \ldots). \quad (71)$$

(Jeżeli bowiem $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ oraz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ są dwa szeregi zbieżne [w danym razie szeregi (70) oraz (66)] i jeżeli stale $a_k \leq b_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, to mamy stale $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, skąd, w granicy dla $n = \infty$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Z uwagi tej robimy często użytek przy ocenianiu sumy szeregu).

Nierówność (71) dowodzi zbieżności szeregu (o składnikach nieujemnych)

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' + \ldots, \quad (72)$$

czyli, wobec (69), zbieżności szeregu (68), *c. b. d. o.*

Oznaczmy dalej, przy naturalnych m i n, przez $S_{m,n}$ sumę skończoną

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} u_{k,i},$$

czyli, wyraźniej, sumę mn składników:

$$\begin{aligned} S_{m,n} = {} & u_{1,1} + u_{1,2} + u_{1,3} + \ldots + u_{1,n} \\ & + u_{2,1} + u_{2,2} + u_{2,3} + \ldots + u_{2,n} \\ & + u_{3,1} + u_{3,2} + u_{3,3} + \ldots + u_{3,n} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{m,1} + u_{m,2} + u_{m,3} + \ldots + u_{m,n}. \end{aligned} \quad (73)$$

Powiadam, że jeżeli szereg (64) jest zbieżny, to wówczas dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż nierówności

$$m > \mu, \quad \text{oraz} \quad n > \mu$$

pociągają za sobą zawsze nierówność:

$$|S - S_{m,n}| < \varepsilon, \tag{74}$$

gdzie S oznacza sumę szeregu (60).

Załóżmy, dla dowodu, szereg (64) jest zbieżny. Wówczas, jak dowiedliśmy, zbieżne są też szeregi (60) oraz (68). Wobec zbieżności szeregów (64) oraz (68), zatem też szeregów (66) i (72), dla liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż mamy

$$\sigma_{p+1} + \sigma_{p+2} + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oraz } \sigma'_{p+1} + \sigma'_{p+2} + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } p > \mu. \tag{75}$$

Wobec zbieżności szeregu iterowanego (60), zbieżne są też szeregi (58), przyczem, oznaczając przez S sumę szeregu (60), mamy:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$$

Stąd:

$$S - S_{m,n} = (S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S_{m,n} + (S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots). \tag{76}$$

Wobec (67), mamy

$$|S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots| \leq \sigma_{m+1} + \sigma_{m+2} + \ldots,$$

zatem, wobec (75):

$$\left| S_{m+1} + S_{m+2} + \ldots \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dla} \quad m > \mu. \tag{77}$$

Dalej, wobec (73) możemy napisać

$$(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} [S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \ldots + u_{k,n})]. \tag{78}$$

Lecz, wobec (58):

$$S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \ldots + u_{k,n}) = u_{k,n+1} + u_{k,n+2} + \ldots,$$

skąd:

$$|S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \ldots + u_{k,n})| \leq |u_{k,n+1}| + |u_{k,n+2}| + \ldots,$$

oraz

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \left[S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \ldots + u_{k,n}) \right] \right| \leq \sum_{k=1}^{m} |u_{k,n+1}| + \sum_{k=1}^{m} |u_{k,n+2}| + \ldots,$$

a że wobec (69):

$$\sum_{k=1}^{m} |u_{k,l}| \leq \sigma'_l, \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, 3, \ldots \\ m = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

więc

$$\left|\sum_{k=1}^{m}[S_k-(u_{k,1}+u_{k,2}+\ldots+u_{k,n})]\right|\leq\sigma'_{n+1}+\sigma'_{n+2}+\ldots,$$

skąd, wobec (75):

$$\left|\sum_{k=1}^{m}[S_k-(u_{k,1}+u_{k,2}+\ldots+u_{k,n})]\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\text{dla}\quad n>\mu. \tag{79}$$

Wobec (78), (79) i (77), wzór (76) daje dla $m>\mu$ oraz $n>\mu$ nierówność (74), *c. b. d. o.*

Wynika stąd, w szczególności, że mamy

$$|S-S_{n,n}|\ \varepsilon,\quad\text{dla}\quad n>\mu,$$

skąd

$$S=\lim_{n=\infty}S_{n,n},$$

co możemy napisać w postaci szeregu nieskończonego

$$S=S_{1,1}+(S_{2,2}-S_{1,1})+(S_{3,3}-S_{2,2})+\ldots+(S_{n,n}-S_{n-1,n-1})+\ldots \tag{80}$$

Mamy tu oczywiście (wobec (73)):

$$S_{n,n}-S_{n-1,n-1}=u_{n,1}+u_{n,2}+\ldots+u_{n,n}+u_{n-1,n}+u_{n-2,n}+\ldots+u_{1,n}. \tag{81}$$

Z drugiej strony, kładąc

$$\sigma_{m,n}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|u_{k,l}| \tag{82}$$

będziemy, wobec zbieżności szeregu (64), mieli podobnież

$$\sigma=\lim_{n=\infty}\sigma_{n,n},$$

co możemy napisać w postaci szeregu nieskończonego

$$\sigma=\sigma_{1,1}+(\sigma_{2,2}-\sigma_{1,1})+(\sigma_{3,3}-\sigma_{2,2})+\ldots+(\sigma_{n,n}-\sigma_{n-1,n-1})+\ldots, \tag{83}$$

przyczem będzie

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{n,n}-\sigma_{n-1,n-1}&=|u_{n,1}|+|u_{n,2}|+\ldots+|u_{n,n}|+\\&+|u_{n-1,n}|+|u_{n-2,n}|+\ldots+|u_{1,n}|.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Ponieważ składniki każdej grupy (84) są jednego znaku (≥ 0) więc, wobec zbieżności szeregu (83) (w myśl twierdzenia z § 72) możemy, zastępując każdy składnik szeregu (83) przez wyrażenie (84) i opuszczając nawiasy, napisać:

$$\sigma=|u_{1,1}|+|u_{2,1}|+|u_{2,2}|+|u_{1,2}|+|u_{2,1}|+\ldots \tag{85}$$

6*

co dowodzi, że szereg nieskończony

$$u_{1,1}+u_{2,1}+u_{2,2}+u_{1,2}+u_{3,1}+\cdots$$

jest zbieżny bezwzględnie, a ponieważ, łącząc składniki jego w grupy (81), otrzymujemy z niego szereg (80), więc musi być

$$S=u_{1,1}+u_{2,1}+u_{2,2}+u_{1,2}+u_{3,1}+\cdots \tag{86}$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli szereg iterowany (60) jest zbieżny bezwzględnie, to możemy go przekształcić (nie zmieniając wartości sumy) na szereg zwykły (86), który również będzie zbieżny bezwzględnie. W tym ostatnim możemy więc dowolnie zmieniać porządek składników.

Pisząc szereg (86) w postaci

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_{p_n,q_n}, \tag{87}$$

widzimy z łatwością, że ciąg nieskończony układów

$$(p_1,q_1),\ (p_2,q_2),\ (p_3,q_3),\cdots$$

zawiera raz i tylko raz każdy układ (k,l) dwóch liczb naturalnych k i l. Jeżeli więc (k_n,l_n) $(n=1,2,3,\ldots)$ oznacza dowolny dany ciąg nieskończony układów wskaźników, zawierający raz i tylko raz każdy układ (k,l) dwóch liczb naturalnych k i l, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{k_n,l_n}$ będzie się różnił conajwyżej porządkiem składników od szeregu (87) i przeto będziemy mieli:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_{k_n,l_n}, \tag{88}$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}u_{k,l}=\sum_{n=1}^{\infty}u_{k_n,l_n}. \tag{89}$$

Połóżmy dalej, przy wszelkich naturalnych k i l:

$$v_{k,l}=u_{l,k}. \tag{90}$$

Ponieważ szeregi

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}u_{l,k}$$

różnią się tylko znakowaniem, więc możemy, wobec (90), napisać:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} v_{k,l} \tag{91}$$

i podobnież:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |u_{k,l}| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |v_{k,l}|,$$

co, wobec zbieżności szeregu (68), wynikającej, jak wiemy, ze zbieżności szeregu (64), dowodzi, że szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} v_{k,l}$$

jest zbieżny bezwzględnie. Stąd, jak dowiedliśmy, wynika wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} v_{k,l} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{k_n, l_n}, \tag{92}$$

przyczem szereg, stojący po prawej stronie wzoru (92) jest zbieżny bezwzględnie.

Ciąg (k_n, l_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ przebiega tu, podobnie jak we wzorze (89), wszystkie różne układy dwóch liczb naturalnych k i l; to samo oczywiście można powiedzieć o ciągu (l_n, k_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$: wobec zbieżności bezwzględnej szeregu (92) mamy więc wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{k_n, l_n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{l_n, k_n} \tag{93}$$

(gdyż oba wypisane szeregi różnią się tylko porządkiem składników).

Wobec (90), mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{l_n, k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n}. \tag{94}$$

Wzory (91), (92), (93) i (94) dają w jednej chwili:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n},$$

skąd, wobec (89):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}. \tag{95}$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 114. *Jeżeli szereg iterowany* (60) *jest zbieżny bezwzględnie, to suma jego nie zależy od porządku sumowania; szereg taki możemy również przekształcić na szereg zwykły, w myśl wzoru* (89) (gdzie (k_n, l_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k i l).

Jeżeli szereg iterowany (60) jest zbieżny bezwzględnie, to zbieżny jest, jak dowiedliśmy, szereg (85), a że, w myśl (82), mamy oczywiście

$$\sigma_{m,n} \leq \sigma, \quad (\text{dla } m = 1, 2, 3, \ldots, \ n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{96}$$

(gdyż suma (85) zawiera wszystkie składniki sumy (82)), więc ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest *ograniczony*. Okażemy, że i naodwrót: jeżeli ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony, to szereg (60) jest zbieżny bezwzględnie.

Załóżmy więc, że ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony, t. j. że istnieje liczba skończona dodatnia A, taka, iż

$$\sigma_{m,n} < A, \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{97}$$

Mamy oczywiście, wobec (82), przy wszelkich naturalnych m i n:

$$|u_{m,1}| + |u_{m,2}| + \cdots + |u_{m,n}| \leq \sigma_{m,n}$$

(gdyż lewa strona przedstawia część składników prawej strony). Stąd, wobec (97), wnosimy, że sumy cząstkowe szeregu nieskończonego

$$\sigma_m = |u_{m,1}| + |u_{m,2}| + |u_{m,3}| + \cdots$$

są ograniczone i przeto sam szereg jest zbieżny (dla $m = 1, 2, 3, \ldots$). Mamy stąd (w myśl tw. 107) przy wszelkiem naturalnem m:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m = \sum_{k=1}^{m} |u_{k,1}| + \sum_{k=1}^{m} |u_{k,2}| + \sum_{k=1}^{m} |u_{k,3}| + \cdots \tag{98}$$

Lecz, wobec oczywistej równości

$$\sum_{k=1}^{m} |u_{k,1}| + \sum_{k=1}^{m} |u_{k,2}| + \cdots + \sum_{k=1}^{m} |u_{k,n}| = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |u_{k,l}| = \sigma_{m,n},$$

oraz wobec (97), wnosimy, że sumy cząstkowe szeregu nieskończonego (98) są wszystkie $< A$, skąd wnosimy, że

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m \leq A, \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd wynika, że szereg (66) jest zbieżny, czyli, że zbieżny jest szereg (64), *c. b. d. o.*

Dowiedliśmy więc, że *na to iżby szereg* (60) *był zbieżny bezwzględnie, potrzeba i wystarcza, iżby ciąg podwójny* (82) *był ograniczony.* Powiadam dalej, że na to iżby ciąg podwójny (82) był ograniczony, potrzeba i wystarcza, iżby szereg (86) był zbieżny bezwzględnie.

Że warunek ten jest konieczny, wynika z uwagi, że, jak dowiedliśmy, ograniczoność ciągu podwójnego (82) pociąga za sobą zbieżność bezwzględną szeregu (60), co znowu pociąga za sobą zbieżność bezwzględną szeregu (86). Załóżmy, z drugiej strony, że szereg (86) jest zbieżny bezwzględnie, czyli, że szereg (85) jest zbieżny: mamy wówczas stale nierówność (96), co dowodzi, że ciąg podwójny (82) jest ograniczony.

Wynika stąd, dalej, że jeżeli szereg (86) (albo, co wychodzi na jedno, którykolwiek z szeregów (88)) jest zbieżny bezwzględnie, to szereg (60) jest zbieżny bezwzględnie. Wnosimy stąd, że jeżeli szereg (60) nie jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg (86) nie jest zbieżny bezwzględnie: składniki tego ostatniego możemy więc wówczas tak uporządkować, iżby powstały przez to szereg (88) był rozbieżny: wówczas nie zachodzi więc wzór (89). Zatem: *na to żeby zachodził wzór* (89) (dla każdego ciągu układów (k_n, l_n), przebiegającego wszystkie układy dwóch liczb naturalnych k i l), *potrzeba i wystarcza, żeby szereg* (60) *był zbieżny bezwzględnie.*

Przykłady:

1) Weźmy pod rozwagę szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} x^{kl}, \tag{99}$$

gdzie x oznacza liczbę rzeczywistą lub zespoloną, której moduł jest < 1. Połóżmy $\varrho = |x|$. Mamy, wobec $\varrho < 1$:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varrho^{kl} = \frac{\varrho^k}{1-\varrho^k},$$

dla dowodu zbieżności bezwzględnej szeregu (99) wystarczy więc okazać, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho^k}{1-\varrho^k} \tag{100}$$

jest zbieżny. Że zaś szereg (100) jest (dla $\varrho < 1$) zbieżny, jest dla $\varrho = 0$ oczywistem, zaś dla $\varrho > 0$ wynika np. z kryterjum d'Alembert'a (tw. 91), gdyż, wobec $\varrho < 1$, mamy $\lim_{k=\infty} \varrho^k = 0$ oraz $\lim_{k=\infty} \frac{\varrho^{k+1}}{1-\varrho^{k+1}} : \frac{\varrho^k}{1-\varrho^k} = \varrho < 1$.

Względem szeregu (99) możemy więc zastosować wzór (89). Wypisując układy wskaźników (k, l) według wielkości iloczynów kl [w ciąg (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (2,2), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6), (2,3), ...] i łącząc w jedną (m-tą) grupę składniki szeregu (89), odpowiadające tej samej wartości m iloczynu kl, będziemy mieli oczywiście w m tej grupie $\theta(m)$ składników, z których każdy będzie równy x^m, gdzie $\theta(m)$ oznacza liczbę dzielników liczby m. Stąd wzór:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} x^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(m) x^m,$$

czyli wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(m) x^m, \quad \text{dla} \quad |x| < 1.$$

Jest to t. zw. wzór Lambert'a. Godnem uwagi jest tu, że funkcja liczbowa $\theta(m)$ (o biegu, jak wiadomo, nader nieprawidłowym) występuje jako współczynnik wyrazu ogólnego w rozwinięciu na szereg potęgowy funkcji $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$.

Z drugiej strony, dla sumy S szeregu (99) możemy wypisać wzór (80), przyczem jak łatwo widzieć:

$$S_{n,n} - S_{n-1,n-1} = x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots + x^{nn} + x^{(n-1)n} + \ldots + x^n =$$
$$= 2\frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + x^{n^2}, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

oraz

$$S_{1,1} = x = 2\frac{x^1 - x^{1^2}}{1-x} + x^{1^2};$$

wzór (99) daje więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2},$$

skąd w jednej chwili, z uwagi, iż $\sum \frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} = \sum \frac{x^n}{1-x^n} - \sum \frac{x^{n^2}}{1-x^n}$, i zważywszy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

otrzymujemy, po łatwej redukcji:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{1-x^n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, \quad \text{dla} \quad |x| < 1,$$

— jest to t. zw. przekształcenie Clausen'a.

2) Jako drugi przykład weźmy pod rozwagę szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} kx^{kl}, \quad \text{gdzie } |x| < 1. \tag{101}$$

Wobec zbieżności szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\varrho^k}{1-\varrho^k}$$

dla $0 \leq \varrho < 1$, wnosimy, jak w przykładzie 1), że szereg iterowany (101) jest zbieżny bezwzględnie. Jak wyżej, znajdujemy stąd

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{m=1}^{\infty}\sigma(m)\,x^m, \quad \text{dla } |x| < 1,$$

gdzie $\sigma(m)$ oznacza sumę dzielników liczby m.

Z drugiej strony, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu (101), możemy w nim (w myśl tw. 114) zmienić porządek sumowania, co, z uwagi że (w myśl wzoru (175) Rozdz. VIII):

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{kl} = \frac{x^l}{(1-x^l)^2},$$

skąd

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} kx^{kl} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^l}{(1-x^l)^2},$$

daje wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)^2}, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

3) Załóżmy teraz, że szeregi

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{oraz} \quad B = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \tag{102}$$

są zbieżne bezwzględnie, i przyjmijmy we wzorze (60):

$$u_{k,l} = a_k b_l \quad (k = 1, 2, 3, \ldots,\ l = 1, 2, 3, \ldots). \tag{103}$$

Połóżmy

$$B' = \sum_{l=1}^{\infty} |b_l|;$$

szereg $\sum_{l=1}^{\infty} |a_k b_l|$ będzie oczywiście zbieżny przy wszelkiem k, oraz będzie

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_k b_l| = |a_k| \sum_{l=1}^{\infty} |b_l| = |a_k|\, B',$$

skąd, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu A, wnosimy o zbieżności szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_k b_l|,$$

czyli o zbieżności bezwzględnej szeregu iterowanego

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l; \tag{104}$$

dla sumy S tego szeregu możemy więc wypisać wzór (88), czyli, wobec (103), wzór

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n}. \tag{105}$$

Z drugiej strony, wobec (104), oraz (102), znajdujemy w jednej chwili:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, B=\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right).\, B=AB,$$

czyli

$$S=\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right). \tag{106}$$

Dowiedliśmy więc, wobec (105) i (106), że jeżeli szeregi (102) są zbieżne bezwzględnie, to mamy wzór

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n}$$

(gdzie (k_n, l_n) $(n=1,2,3,\ldots)$ przebiega wszystkie różne układy dwóch liczb naturalnych k i l), t. j. otrzymaliśmy twierdzenie 113, udowodnione w § 86 na innej drodze.

§ 88[a]. Podamy teraz pewien warunek konieczny i wystarczający na to, aby, w razie zbieżności szeregów iterowanych (60) i (61) (o dowolnych zespolonych składnikach), sumy ich były równe. Wykażemy, że warunek ten polega na tem, aby było

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0, \tag{a}$$

gdzie

$$R_n=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} u_{k,l}\ ^{1)}. \tag{b}$$

[1]) Por. K. Knopp: *Sitzber. d. Berliner Math. Ges.* 1919.

W samej rzeczy, załóżmy, że szeregi (60) i (61) są zbieżne, oraz oznaczmy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = S_1, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = S_2. \tag{c}$$

Niech n oznacza daną liczbę naturalną. Wobec zbieżności szeregu (60), zbieżne są szeregi

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

przyczem (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} - \sum_{l=1}^{n} u_{k,l}. \tag{d}$$

Lecz, wobec zbieżności szeregu (61), zbieżne są szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}$$

oraz mamy przy wszelkiem naturalnem n:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} u_{k,l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l};$$

wzór (d) daje więc, wobec (b) i (c):

$$R_n = S_1 - \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

skąd, wobec (c)

$$\lim_{n=\infty} R_n = S_1 - S_2,$$

co dowodzi, że warunek (a) jest koniecznym i wystarczającym na to, aby było $S_1 = S_2$, *c. b. d. o.*

§ 89. O ciągu podwójnym $u_{k,l} \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ l = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$ mówimy, że granicą jego jest liczba (skończona) u, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba μ taka, iż nierówności

$$k > \mu \quad \text{oraz} \quad l > \mu \tag{107}$$

pociągają za sobą zawsze nierówność

$$| u_{k,l} - u | < \varepsilon; \tag{108}$$

piszemy wówczas

$$\lim_{k,\, l=\infty} u_{k,l} = u. \tag{109}$$

Ciąg podwójny, posiadający skończoną granicę, nazywamy *zbieżnym*, nie posiadający jej zaś — *rozbieżnym*.

Załóżmy, że dla ciągu podwójnego $u_{k,l}$ zachodzi wzór (109) i niech k_n oraz l_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będą dowolne dwa dane ciągi skończone o wyrazach naturalnych, takie iż

$$\lim_{n=\infty} k_n = \infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} l_n = \infty; \tag{110}$$

powiadam, że będzie

$$\lim_{n=\infty} u_{k_n, l_n} = u. \tag{111}$$

W samej rzeczy, niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl (109) i wobec definicji granicy ciągu podwójnego, istnieje dla liczby ε takie μ, iż nierówności (107) pociągają za sobą zawsze nierówność (108). Wobec (110), dla liczby μ istnieje liczba ν taka, iż nierówność $n > \nu$ pociąga za sobą nierówności

$$k_n > \mu \quad \text{oraz} \quad l_n > \mu,$$

co znowu pociąga za sobą nierówność

$$|u_{k_n, l_n} - u| < \varepsilon. \tag{112}$$

Dla $n > \nu$ zachodzi więc nierówność (112), co dowodzi prawdziwości wzoru (109). Zatem:

Granica ciągu podwójnego $u_{k,l}$ jest wspólną granicą wszystkich ciągów u_{k_n, l_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, gdzie k_n i l_n są dowolne ciągi wskaźników, wzrastające nieograniczenie (niezależnie jeden od drugiego).

Możnaby okazać, że i naodwrót, jeżeli dla dowolnych ciągów liczb naturalnych k_n i l_n warunek (110) pociąga za sobą zawsze wzór (111), to zachodzi wzór (109). W samej rzeczy załóżmy, że wzór (109) nie zachodzi. Znaczy to, że nie dla każdej liczby dodatniej ε istnieje odpowiednie μ, przy którem nierówności (107) pociągają za sobą nierówność (108). Niech więc α oznacza wartość liczby dodatniej ε, dla której odpowiednie μ nie istnieje. Jakąkolwiek zatem obralibyśmy wartość na μ, zawsze istnieć będą liczby naturalne k i l, spełniające nierówność (107), a jednocześnie nierówność

$$|u_{k,l} - u| \geq \alpha.$$

Przyjmijmy na μ kolejne wartości $1, 2, 3, \ldots$, a liczby k, l, odpowiadające wartości $\mu = n$ (np. możliwie najmniejsze k przy możliwie najmniejszej sumie $k + l$) oznaczmy przez k_n, l_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Będzie więc

$$k_n > n, \; l_n > n, \quad \text{oraz} \quad |u_{k_n, l_n} - u| \geq \alpha, \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots),$$

co dowodzi, ciągi nieskończone wskaźników k_n i l_n spełniają warunki (110) lecz nie spełniają wzoru (111).

Dowiedliśmy więc, że *jeżeli wszystkie ciągi nieskończone* u_{k_n, l_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *gdzie* k_n *i* l_n *są dowolne ciągi nieskończone wskaźników, wzrastające nieograniczenie, posiadają wspólną granicę, to jest ona zarazem granicą ciągu podwójnego* $u_{k,l}$.

Z dowiedzionych twierdzeń wynika natychmiast, że jeżeli istnieją granice

$$\lim_{k,l=\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \lim_{k,l=\infty} v_{k,l},$$

to mamy:

$$\lim_{k,l=\infty}\left(u_{k,l} + v_{k,l}\right) = \lim_{k,l=\infty} u_{k,l} + \lim_{k,l=\infty} v_{k,l}$$

$$\lim_{k,l=\infty}\left(u_{k,l} \cdot v_{k,l}\right) = \left(\lim_{k,l=\infty} u_{k,l}\right) \cdot \left(\lim_{k,l=\infty} v_{k,l}\right)$$

i t. p., podobnie jak dla ciągów zwykłych. Więc np., o ile istnieje $\lim\limits_{k,l=\infty} u_{k,l}$, to mamy przy wszelkiem $a > 0$:

$$\lim_{k,l=\infty} a^{u_{k,l}} = a^{\lim\limits_{k,l=\infty} u_{k,l}}. \tag{113}$$

Udowodnimy np. tę ostatnią własność. Niech k_n i l_n będą dwa dowolne ciągi liczb naturalnych, spełniające warunki (110). Z założenia, że istnieje granica

$$u = \lim_{k,l=\infty} u_{k,l}, \tag{114}$$

wynika wzór (111), skąd dla $a > 0$:

$$\lim_{n=\infty} a^{u_{k_n, l_n}} = a^u,$$

co (wobec dowolności ciągów k_n i l_n, spełniających warunek (110)), dowodzi, że granicą ciągu podwójnego $v_{k,l} = a^{u_{k,l}}$ jest liczba a^u, czyli, że

$$\lim_{k,l=\infty} a^{u_{k,l}} = a^u,$$

co, wobec (114), daje wzór (113), *c. b. d. o.*

Twierdzenie 115. *Na to, żeby ciąg podwójny* $u_{k,l}$ *był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej* ε *istniała liczba* μ *taka iż nierówności*

$$k > \mu,\ l > \mu,\ k' > \mu,\ l' > \mu \tag{115}$$

pociągają za sobą nierówność

$$|\, u_{k,l} - u_{k',l'} \,| < \varepsilon. \tag{116}$$

Dowód, że warunek nasz jest konieczny, nie nastręcza żadnych trudności. Udowodnimy więc tylko, że jest wystarczający. Załóżmy, że warunek nasz jest spełniony i weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony $v_n = u_{n,n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. W myśl naszego założenia (dla $k = l = n$, $k' = l' = n'$), nierówności

$$n > \mu, \quad \text{oraz} \quad n' > \mu$$

będą pociągały za sobą zawsze nierówność

$$| v_n - v_{n'} | < \varepsilon,$$

co, w myśl tw. 39, dowodzi, że ciąg $v_n = u_{n,n}$ jest zbieżny: połóżmy

$$\lim_{n=\infty} u_{n,n} = u. \tag{117}$$

Niech teraz k i l będą dowolne wskaźniki, spełniające warunek

$$k > \mu \quad \text{oraz} \quad l > \mu; \tag{118}$$

oznaczając przez n wskaźnik $> \mu$ i kładąc $k' = l' = n$, będziemy więc mieli spełnione warunki (115), co pociąga za sobą nierówność (116), czyli, w danym razie, nierówność

$$| u_{k,l} - u_{n,n} | < \varepsilon.$$

Nierówność ta jest prawdziwą (dla k i l, spełniających warunek (118)) przy wszelkiem $n > \mu$, skąd, wobec (117), w granicy dla $n = \infty$:

$$| u_{k,l} - u | \leq \varepsilon, \quad \text{dla} \quad k > \mu, \ l > \mu,$$

co, jak łatwo widzieć, dowodzi, że granicą ciągu podwójnego $u_{k,l}$ jest liczba u. Ten ostatni jest więc zbieżny, c. b. d. o. Udowodniliśmy więc tw. 115

Jeżeli ciąg podwójny $u_{k,l}$ posiada tę własność, że dla każdej liczby dodatniej A istnieje takie μ, iż

$$u_{k,l} > A, \quad \text{dla} \quad k > \mu \quad \text{oraz} \quad l > \mu,$$

to mówimy, że granicą ciągu podwójnego $u_{k,l}$ jest $+\infty$. Podobnież określamy $\lim\limits_{k,l=\infty} u_{k,l} = -\infty$

Granicę ciągu podwójnego $u_{k,l}$ należy odróżniać od *granic podwójnych* (albo *iterowanych*)

$$\lim_{k=\infty} \lim_{l=\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \lim_{l=\infty} \lim_{k=\infty} u_{k,l}. \tag{119}$$

Przez

$$\lim_{k=\infty} \lim_{l=\infty} u_{k,l} \tag{120}$$

rozumiemy granicę ciągu nieskończonego v_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, gdzie

$$v_k = \lim_{l=\infty} u_{k,l} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Istnienie granic (119) jest niezależne od istnienia granicy

$$\lim_{k,l=\infty} u_{k,l} \tag{121}$$

i naodwrót. Np. określając ciąg podwójny $u_{k,l}$ przez warunki $u_{k,l} = 1$ dla $k = l$, zaś $u_{k,l} = 0$ dla $k \neq l$, otrzymamy, jak łatwo widzieć, jako wartość granic (119) liczbę 0, natomiast ciąg podwójny $u_{k,l}$ nie jest zbieżny, gdyż stale mamy $u_{n,n} - u_{n,n+1} = 1$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$), wbrew tw. 115.

Z drugiej strony, dla ciągu podwójnego $u_{k,l} = \frac{(-1)^l}{k} + \frac{(-1)^k}{l}$ granica (121) jest oczywiście zerem, natomiast nie istnieje żadna z granic (119) (gdyż nie istnieje już żadna z granic $\lim\limits_{l=\infty} u_{k,l}$ oraz $\lim\limits_{k=\infty} u_{k,l}$).

Wartości granic (119), jeżeli obie istnieją, mogą być różne: np. dla $u_{k,l} = \frac{k}{k+l}$ mamy oczywiście

$$\lim_{l=\infty} \frac{k}{k+l} = 0, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\lim_{k=\infty} \frac{k}{k+l} = 1, \quad \text{dla} \quad l = 1, 2, 3, \ldots;$$

skąd

$$\lim_{k=\infty} \lim_{l=\infty} u_{k,l} = 0, \quad \text{zaś} \quad \lim_{l=\infty} \lim_{k=\infty} u_{k,l} = 1,$$

zatem

$$\lim_{k=\infty} \lim_{l=\infty} u_{k,l} \neq \lim_{l=\infty} \lim_{k=\infty} u_{k,l}.$$

Nie mamy więc wogóle prawa, w razie granic podwójnych, zmieniać porządku przejścia do granicy.

Jeżeli jednak ciąg podwójny $u_{k,l}$ jest zbieżny, i istnieje jedna z granic (119), to jest ona równa granicy (121). Załóżmy np. że istnieje granica (120). Istnieją więc (przynajmniej dla dostatecznie wielkich k) granice $v_k = \lim\limits_{l=\infty} u_{k,l}$. Jeżeli istnieje jednocześnie granica (109), to, dla $k > \mu$ oraz $l > \mu$, mamy nierówność (108), skąd w granicy dla $l = \infty$:

$$|v_k - u| \leq \varepsilon, \quad \text{dla} \quad k > \mu,$$

co dowodzi, że $u = \lim\limits_{k=\infty} v_k = \lim\limits_{k=\infty} \lim\limits_{l=\infty} u_{k,l}$, *c. b. d. o.*

Wnosimy stąd, że jeżeli ciąg podwójny $u_{k,l}$ jest zbieżny, to granice iterowane (119), o ile istnieją, są równe.

Dla ciągu podwójnego o wyrazach rzeczywistych możemy też określić granicę górną $\bar{l} = \overline{\lim\limits_{k,l=\infty}} u_{k,l}$ oraz granicę dolną $\underline{l} = \underline{\lim\limits_{k,l=\infty}} u_{k,l}$. W tym celu oznaczmy przez U zbiór wszystkich granic $\lim\limits_{n=\infty} u_{k_n, l_n}$, odpowiadających ciągom wskaźników k_n i l_n, wzrastającym nieograniczenie: liczbę $\bar{l}$ określamy jako kres górny zbioru U. Analogicznie określamy liczbę $\underline{l}$. Mamy oczywiście zawsze $\underline{l} \leq \bar{l}$; łatwo też widzieć, że warunek $\bar{l} = \underline{l}$ jest konieczny i wystarczający na to, iżby ciąg podwójny $u_{k,l}$ posiadał granicę (skończoną lub nieskończoną). Można też udowodnić, że zawsze

$$\underline{\lim}_{k,l=\infty} u_{k,l} \leq \underline{\lim}_{k=\infty}\, \underline{\lim}_{l=\infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{l=\infty}\, \overline{\lim}_{k=\infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{k,l=\infty} u_{k,l}$$

oraz

$$\underline{\lim}_{k,l=\infty} u_{k,l} \leq \underline{\lim}_{l=\infty}\, \underline{\lim}_{k=\infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{l=\infty}\, \overline{\lim}_{k=\infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{k,l=\infty} u_{k,l}.$$

§ **90.** Niech $u_{k,l} \begin{pmatrix} k=1,2,3,\ldots \\ l=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$ oznacza dany ciąg podwójny. Połóżmy

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{k,l} \quad (\text{dla } m=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots). \tag{122}$$

Jeżeli ciąg podwójny $S_{m,n}$ posiada granicę S, to mówimy, że S jest sumą *szeregu podwójnego*

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \begin{pmatrix} k=1,2,3,\ldots \\ l=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}. \tag{123}$$

Szereg podwójny (123) należy odróżniać od szeregów iterowanych

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}, \tag{124}$$

które czasami też są nazywane szeregami podwójnemi.

Szereg (123) może nie być zbieżny, pomimo że oba szeregi (124) są zbieżne, lub naodwrót.

Np. określając ciąg podwójny $u_{k,l}$ przez warunki

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 1 \\ u_{k,l} &= 2 && \text{dla } k=l>1 \\ u_{k,l} &= -1, && \text{dla } |k-l|=1, \\ u_{k,l} &= 0, && \text{dla } |k-l|>1, \end{aligned}$$

co daje tablicę

$$\begin{array}{rrrrrrl} 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ -1, & 2, & -1, & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ 0, & -1, & 2, & -1, & 0, & 0, & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & -1, & 2, & -1, & 0, & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & 0, & -1, & 2, & -1, & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 2, & \ldots\ldots \\ \ldots & & & & & & \end{array}$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć $S_{n,n} - S_{n+1,n} = 1$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, co dowodzi rozbieżności ciągu podwójnego $S_{m,n}$, a więc i szeregu podwójnego (123), natomiast oba szeregi iterowane (124) dają, jak łatwo widzieć, sumę 0.

Okażemy teraz na przykładzie, że szereg podwójny (123) może być zbieżny, pomimo że każdy jego wiersz, jakoteż każda kolumna dają szeregi rozbieżne. Połóżmy w tym celu

$$u_{k,l} = \frac{(-1)^{k+l}}{E\frac{k+1}{2}} \quad \text{dla} \quad l \geq k, \quad \text{zaś} \quad u_{k,l} = \frac{(-1)^{k+l}}{E\frac{l+1}{2}} \quad \text{dla} \quad l < k.$$

Otrzymamy w ten sposób tablicę:

$$\begin{array}{llllllll}
1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1, \ldots\ldots \\
-1, & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, \ldots\ldots \\
+1, & -1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, \ldots\ldots \\
-1, & +1, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, \ldots\ldots \\
+1, & -1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \ldots\ldots \\
-1, & +1, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, \ldots\ldots \\
+1, & -1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \ldots\ldots \\
-1, & +1, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & +\frac{1}{4}, \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Możnaby tu udowodnić z łatwością, że sumy $S_{m,n}$ są różne od zera jedynie wtedy, jeżeli oba wskaźniki m i n są nieparzyste i że wówczas $S_{m,n} = u_{m,n}$. (Wynika to bezpośrednio z uwagi, że parami stojące obok siebie lub pod sobą wyrazy jednego wiersza lub jednej kolumny znoszą się wzajemnie), a że oczywiście $\lim\limits_{k,l=\infty} u_{k,l} = 0$, więc mamy też $\lim\limits_{m,n=\infty} S_{m,n} = 0$, co dowodzi, że suma szeregu podwójnego (123) jest 0. Natomiast żaden wiersz, ani też żadna kolumna naszego szeregu oczywiście nie są zbieżne, nietylko jako szeregi, ale nawet jako ciągi. (Inny przykład tego rodzaju zawiera ćwiczenie 1)).

Dowiedliśmy więc na przykładach, że zbieżność szeregów (124) nie jest ani warunkiem koniecznym, ani też warunkiem wystarczającym dla zbieżności szeregu podwójnego (123).

Jeżeli zbieżnym jest szereg podwójny

$$S = \sum_{k,l} u_{k,l} \tag{125}$$

oraz każdy z szeregów

$$s_l = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad \text{dla} \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{126}$$

to można udowodnić, że mamy też

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = S. \tag{127}$$

W samej rzeczy, załóżmy, że szeregi (125) i (126) są zbieżne i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec (122) oraz (125), będziemy mieli

$$\lim_{m,n=\infty} S_{m,n} = S;$$

dla liczby dodatniej ε będzie więc istniała liczba μ taka, iż

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad m > \mu, \quad n > \mu. \tag{128}$$

Wobec zbieżności szeregów (125), kładąc

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sigma_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{129}$$

mamy (w myśl tw. 107):

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} u_{k,l}, \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec (122):

$$\lim_{n=\infty} S_{m,n} = \sigma_n; \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

nierówność (128) daje więc, w granicy dla $m = \infty$:

$$|\sigma_n - S| \leq \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = S,$$

czyli, wobec (126) i (129), że zachodzi wzór (127), *c. b. d. o.*

Wynika stąd natychmiast, że jeżeli zbieżne są oba szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

to mają tę samą sumę. Podobnież, jeżeli są zbieżne oba szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l},$$

to sumy ich są równe.

Jeżeli więc zbieżne są wszystkie trzy szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

to wszystkie trzy mają tę samą sumę.

Jeżeli jednak zbieżne są tylko szeregi iterowane (124), to sumy ich mogą być różne, jak dowiedliśmy w § 87.

Jeżeli szereg

$$\sum_{k,l} |u_{k,l}| \tag{130}$$

jest zbieżny, to mówimy, że szereg podwójny (123) jest zbieżny *bezwzględnie*. Połóżmy

$$\sigma_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |u_{k,l}| \quad \begin{pmatrix} m=1,2,3,\ldots \\ n=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}. \tag{131}$$

Powiadam, że jeżeli szereg (123) jest zbieżny bezwzględnie, to sumy $\sigma_{m,n}$ są ograniczone, t. j. istnieje liczba skończona dodatnia A, taka iż

$$\sigma_{m,n} < A, \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} m=1,2,3,\ldots \\ n=1,2,3,\ldots \end{matrix} \tag{132}$$

[Zauważymy, że jeżeli szereg podwójny (123) jest zbieżny, to sumy $S_{m,n}$ muszą być ograniczone dla *dostatecznie wielkich* m i n, ale zbiór *wszystkich* wyrazów ciągu podwójnego $S_{m,n}$ niekoniecznie musi być ograniczony. Np. kładąc $u_{1,l}=1$, $u_{2,l}=-1$, dla $l=1,2,3,\ldots$, zaś $u_{k,l}=0$, dla $k>2$, otrzymujemy ciąg podwójny $u_{k,l}$, dla którego $S_{1,n}=n$, zaś $S_{m,n}=0$, dla $m>1$: szereg podwójny (123) jest tu więc zbieżny (dając sumę 0), natomiast nie istnieje liczba skończona A, dla której $|S_{m,n}|<A$ przy wszelkich naturalnych m i n].

W samej rzeczy, skoro szereg podwójny (123) jest zbieżny bezwzględnie, to szereg (130) jest zbieżny i przeto istnieje liczba skończona (oczywiście nieujemna) σ, taka iż

$$\lim_{m,n=\infty} \sigma_{m,n} = \sigma;$$

jest więc

$$|\sigma_{m,n} - \sigma| < 1, \quad \text{dla} \quad m>\mu \quad \text{oraz} \quad n>\mu,$$

skąd, kładąc $\sigma + 1 = A$:

$$\sigma_{m,n} < A, \quad \text{dla} \quad m>\mu \quad \text{oraz} \quad n>\mu. \tag{133}$$

Niech teraz m' i n' będą dwie dowolne dane liczby naturalne (niekoniecznie obie większe od μ). Możemy oczywiście wyznaczyć zawsze liczby naturalne m i n, takie iż

$$m>\mu, \quad n>\mu, \quad m>m', \quad n>n'.$$

W myśl (133) i z uwagi, że

$$\sigma_{m',n'} \leq \sigma_{m,n}$$

(gdyż suma $\sigma_{m,n}$ zawiera oczywiście wszystkie składniki sumy $\sigma_{m',n'}$, a prócz tego jeszcze inne składniki nieujemne), znajdujemy w jednej chwili:

$$\sigma_{m',n'} < A,$$

co dowodzi, że nierówność (132) zachodzi przy wszelkich naturalnych m i n, *c. b. d. o.*

W § 88 dowiedliśmy, że jeżeli ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony, to szereg iterowany

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

jest zbieżny bezwzględnie, co znowu (w myśl nierówności (74) z § 88, pociąga za sobą wzór

$$S = \lim_{m,n=\infty} S_{m,n}.$$

Wynika stąd, że szereg podwójny (123) jest zbieżny, oraz że sumą jego jest również liczba S.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli szereg podwójny (130) jest zbieżny, to tembardziej zbieżny jest i szereg (123), przyczem

$$\sum_{k,l} u_{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l},$$

a nadto, że szereg po prawej stronie jest też zbieżny bezwzględnie.

Łatwo widzieć, że i naodwrót: jeżeli szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg podwójny (123) jest zbieżny bezwzględnie. W samej rzeczy, w razie zbieżności szeregu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |u_{k,l}|$$

mamy

$$\lim_{m,n=\infty} \sigma_{m,n} = \sigma,$$

co dowodzi zbieżności bezwzględnej szeregu podwójnego (123).

Zbieżność bezwzględna jednego z szeregów

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

pociąga więc za sobą zbieżność bezwzględną drugiego.

Uzupełniając wyniki, otrzymane w § 88, możemy ostatecznie wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 116 (Pringsheim). *Wystarcza iżby jeden z czterech szeregów*

$$\sum_{k,l} |u_{k,l}| \quad \begin{pmatrix} k=1,2,3,\ldots \\ l=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |u_{k,l}|, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |u_{k,l}|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|u_{n,1}| + |u_{n-1,2}| + |u_{n-2,3}| + \cdots + |u_{1,n}|)$$

był zbieżny, na to iżby wszystkie cztery szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \begin{pmatrix} k=1,2,3,\ldots \\ l=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n,1} + u_{n-1,2} + u_{n-2,3} + \cdots + u_{1,n})$$

posiadały tę samą skończoną sumę.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że jeżeli $a_{k,l}$ oznacza dowolny dany ciąg podwójny, to istnieje jeden i tylko jeden szereg podwójny $\sum\limits_{k,l} u_{k,l}$, taki iż

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} u_{k,l} = a_{m,n}, \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} m=1,2,3,\ldots \\ n=1,2,3,\ldots \end{matrix}$$

(Będziemy tu mieli:

$u_{m,n} = a_{m,n} - a_{m-1,n} - a_{m,n-1} + a_{m-1,n-1}$, dla $m>1$, $n>1$,
$u_{m,1} = a_{m,1} - a_{m-1,1}$, dla $m>1$,
$u_{1,n} = a_{1,n} - a_{1,n-1}$, dla $n>1$,
$u_{1,1} = a_{1,1}$).

Wynika stąd, że każdy ciąg podwójny może być uważany jako ciąg sum cząstkowych pewnego (i przytem jednego tylko) szeregu podwójnego.

Jako zastosowanie, udowodnić, że kładąc

$$a_{k,l} = (-1)^{k+l}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l}\right)$$

i wyznaczając odpowiedni szereg podwójny $\sum_{k, l} u_{k, l}$, gdzie $S_{m, n} = a_{m, n}$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$, otrzymamy przykład szeregu podwójnego zbieżnego, którego każdy wiersz oraz każda kolumna są rozbieżne.

2) Okazać, że jeżeli szereg nieskończony $\sum_{n=\infty}^{\infty} u_n$ jest zbieżny warunkowo, to składniki jego można zawsze tak ustawić w ciąg podwójny, iżby każdy wiersz oraz każda kolumna dawały dowolne, dane naprzód sumy.

3) Udowodnić, że jeżeli ciąg podwójny $u_{k, l}$ jest ograniczony, to istnieją zawsze ciągi rosnące wskaźników k_m oraz l_n, takie iż istnieją granice

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_{k_m, l_n} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} u_{k_m, l_n}.$$

4) Udowodnić, że dla każdego ciągu podwójnego liczb dodatnich $u_{m, n}$ istnieje ciąg u_n, taki iż przy wszelkiem naturalnem m:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{m, n}} = \infty.$$

(Wystarczy np. położyć $u_n = n\,(u_{1, n} + u_{2, n} + \ldots + u_{n, n})$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$).

5) Udowodnić, że dla każdego ciągu podwójnego liczb dodatnich $u_{m, n}$, takiego iż $\lim_{n=\infty} u_{m, n} = \infty$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, istnieje ciąg v_n, taki iż $\lim_{n=\infty} v_n = \infty$, zaś $\lim_{n=\infty} \frac{v_n}{u_{m, n}} = 0$, dla $m = 1, 2, 3, \ldots$

6) Udowodnić, że dla każdego ciągu nieskończonego szeregów zbieżnych o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} u_{m, n}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ istnieje szereg zbieżny o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, taki iż przy wszelkiem naturalnem m: $\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{m, n}} = \infty$.

ROZDZIAŁ X.

Teorja iloczynów nieskończonych.

§ 91. **Iloczynem nieskończonym** nazywamy symbol

$$u_1 u_2 u_3 \ldots, \quad \text{lub} \quad \prod_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

gdzie u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest danym ciągiem nieskończonym (liczb rzeczywistych lub zespolonych).

Połóżmy

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_n = p_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{2}$$

liczbę p_n nazywamy n-tym iloczynem cząstkowym iloczynu nieskończonego (1).

Jeżeli ciąg nieskończony p_n zmierza do oznaczonej i przytem różnej od zera granicy, to iloczyn nieskończony (1) nazywamy *zbieżnym*, zaś liczbę $p = \lim_{n=\infty} p_n$ — jego wartością. W przeciwnym razie, a więc jeżeli ciąg p_n nie zmierza do żadnej skończonej granicy, lub też zmierza do zera, iloczyn (1) nazywamy *rozbieżnym*. W przypadku $\lim_{n=\infty} p_n = 0$ mówimy jeszcze, że wartością iloczynu nieskończonego (1) jest zero, albo że iloczyn ten jest rozbieżny do zera.

Przykłady.

1) Jeżeli szereg o składnikach rzeczywistych u_n jest zbieżny i położymy $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, to mamy $s = \lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$, skąd, przy wszelkiem dodatniem a:

$$a^s = a^{\lim\limits_{n=\infty}(u_1+u_2+\ldots+u_n)} = \lim_{n=\infty} a^{u_1+u_2+\ldots+u_n} = \lim_{n=\infty} a^{u_1}.a^{u_2}\ldots a^{u_n},$$

czyli

$$a^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n} = \prod_{n=1}^{\infty} a^{u_n}. \tag{3}$$

Wzór ten uważać możemy jako uogólnienie prawidła, że przy mnożeniu potęg (o tej samej podstawie) wykładniki należy dodawać.

W szczególności np., dla $a = 2$, $u_n = \frac{1}{2^n}$, wobec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, otrzymujemy:

$$2 = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{8}}.2^{\frac{1}{16}}\ldots\ldots,$$

co możemy też napisać w formie

$$2 = \sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}.\sqrt[16]{2}.\sqrt{2}\ldots\ldots,$$

albo jeszcze (przez analogję ze wzorami $p_1 = \sqrt{2}$, $p_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $p_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ i t. d.) w formie pierwiastnika nieskończonego

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}\ldots\ldots$$

Wzór, analogiczny do wzoru (3) zachodzi też dla szeregów iterowanych, jakoteż dla szeregów podwójnych. Niech mianowicie $u_{k,l}$ oznacza dowolny dany ciąg podwójny o wyrazach rzeczywistych. Jeżeli szereg iterowany $S = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$ jest zbieżny, to, kładąc

$S_k = \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, mamy $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$, skąd, w myśl (3) (dla $a > 0$):

$$a^{S_k} = \prod_{l=1}^{\infty} a^{u_{k,l}} \quad \text{oraz} \quad a^S = \prod_{k=1}^{\infty} a^{S_k} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{\infty} a^{u_{k,l}}\right).$$

czyli

$$a^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_{k,l}} = \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty} a^{u_{k,l}} \tag{3*}$$

Podobnież jeżeli szereg podwójny $S = \sum_{k,l} u_{k,l}$ jest zbieżny, to, kładąc $S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} u_{k,l}$, mamy $S = \lim_{m,n=\infty} S_{m,n}$ skąd (dla $a > 0$):

$$a^S = \lim_{m,n=\infty} a^{S_{m,n}}$$

(w myśl wzoru (113) z § 89), czyli, wobec

$$a^{S_{m,n}} = a^{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} u_{k,l}} = \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} a^{u_{k,l}}:$$

$$a^{\sum\limits_{k,l} u_{k,l}} = \lim_{m,n=\infty} \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} a^{u_{k,l}},$$

lub wreszcie

$$a^{\sum\limits_{k,l} u_{k,l}} = \prod_{k,l} a^{u_{k,l}},$$

jeżeli przez $\prod_{k,l} v_{k,l}$ będziemy rozumieli granicę $\lim_{m,n=\infty} \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} v_{k,l}$.

2) Iloczyny nieskończone

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots\ldots,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (-1)^n = (-1)(+1)(-1)(+1)\ldots\ldots$$

są rozbieżne. (Dla pierwszego bowiem z wypisanych iloczynów mamy $p_n = \frac{1}{n!}$, skąd $\lim_{n=\infty} p_n = 0$, dla drugiego jest $p_n = n!$, skąd $\lim_{n=\infty} p_n = \infty$, dla trzeciego zaś $p_n = (-1)^n$ i ciąg p_n nie zmierza do żadnej oznaczonej granicy).

3) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots$$

jest zbieżny, a wartością jego jest 1, gdyż, jak łatwo widzieć, iloczyn n pierwszych czynników wynosi $1+\frac{1-(-1)^n}{2n}$.

4) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots$$

jest rozbieżny, gdyż, jak łatwo obliczyć, mamy tu $p_n=n+1$, skąd $\lim_{n=\infty} p_n=\infty$.

5) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots$$

jest rozbieżny do zera, gdyż mamy tu $p_n=\frac{1}{n+1}$.

6) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\cdots$$

jest zbieżny, a wartością jego jest $\frac{1}{2}$, gdyż, jak łatwo obliczyć, mamy tu $p_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

7) Wartością iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\cdots\cdots$$

jest liczba 2, gdyż mamy tu $p_n=\frac{2(n+1)}{(n+2)}$.

8) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^{n-1}})=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots\cdots,$$

gdzie z jest daną liczbą zespoloną, jest zbieżny dla $|z|<1$, dając wartość $\frac{1}{1-z}$, gdyż, jak łatwo widzieć, mamy tu

$$(1-z)\,p_n=(1-z)(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2^{n-1}})=1-z^{2^n}, \tag{*}$$

skąd, dla $z\neq 1$:

$$p_n=\frac{1-z^{2^n}}{1-z}\qquad (n=1,2,3,\ldots\ldots)$$

i przeto

$$\lim_{n=\infty} p_n=\frac{1}{1-z},\quad \text{dla } |z|<1.$$

9) Niech x oznacza liczbę rzeczywistą >0. Kładąc w tożsamości (*) $z=x^{\frac{1}{2^n}}$, otrzymujemy z łatwością wzór

$$2^n\left(x^{\frac{1}{2^n}}-1\right)=(x-1)\cdot\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{2}{x^{\frac{1}{4}}+1}\cdots\frac{2}{x^{\frac{1}{2^n}}+1}. \tag{**}$$

Lecz w § 50 wyprowadziliśmy dla $x>0$ wzór

$$\lg x=\lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right),\quad \text{skąd}\quad \lim_{n=\infty} 2^n\left(x^{\frac{1}{2^n}}-1\right)=\lg x;$$

wzór (**) daje więc dla $x>0$ rozwinięcie funkcji $\lg x$ na iloczyn nieskończony:

$$\lg x=(x-1)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}+1}\cdots\cdot$$

10) Połóżmy $k_1=k>1$, zaś $k_{n+1}=k_n^2-1$ (dla $n=1,2,3,\ldots$). Wobec tożsamości

$$\sqrt{\frac{k+1}{k+1}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{(2k^2-1)+1}{(2k^2-1)-1}},$$

znajdujemy

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\sqrt{\frac{k_2+1}{k_2-1}},\quad \sqrt{\frac{k_2+1}{k_2-1}}=\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\sqrt{\frac{k_3+1}{k_3-1}},$$

i t. d., skąd

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\sqrt{\frac{k_{n+1}+1}{k_{n+1}-1}}. \tag{4}$$

Wobec $k>1$ wnosimy drogą łatwej indukcji, że $k_{n+1}=2k_n^2-1=$ $=k_n^2+(k_n^2-1)>k_n^2$, oraz $k_{n+1}>k^{2^n}$, skąd $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt{\frac{k_{n+1}+1}{k_{n+1}-1}}=1$, co dowodzi, wobec (4), że

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

i daje rozwinięcie na iloczyn nieskończony

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\cdots\cdot$$

Np., dla $k=3$, otrzymujemy:

$$\sqrt{2}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\left(1+\frac{1}{577}\right)\left(1+\frac{1}{665857}\right)\cdots\cdot;$$

dla $k=2$, mamy:

$$\sqrt{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{97}\right)\left(1+\frac{1}{18817}\right)\cdots\cdot$$

11) Niech x oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą > 1. Wyznaczmy najmniejszą liczbę naturalną k_1, spełniającą nierówność

$$x > 1 + \frac{1}{k_1}$$

i połóżmy $x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) x_1$.

Liczba x_1 będzie oczywiście też większa od jedności. Możemy więc z nią postąpić, jak z liczbą x i t. d.

Będzie więc przy wszelkiem naturalnem n:

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) x_n, \tag{5}$$

przyczem k_n oznacza najmniejszą liczbę naturalną, spełniającą nierówność

$$x_{n-1} > 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Powiadam że $k_{n+1} \geq k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. W samej rzeczy, gdyby przy pewnem naturalnem n było $k_{n+1} < k_n^2$, t. j. $k_{n+1} \leq k_n^2 - 1$, to, wobec $x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)\left(1 + \frac{1}{k_{n+1}}\right) x_{n+1}$, oraz $x_{n+1} > 1$, mielibyśmy

$$x_{n-1} > \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)\left(1 + \frac{1}{k_{n+1}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)\left(1 + \frac{1}{k_n^2 - 1}\right) = \frac{k_n}{k_n - 1},$$

czyli

$$x_{n-1} > 1 + \frac{1}{k_n - 1},$$

wbrew definicji liczby k_n.

Gdyby było stale $k_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, mielibyśmy stale $x = 2^n x_n > 2^n$, co niemożliwe. Jest więc przy pewnem p, $k_p > 1$. Wobec: $k_{n+1} \geq k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ znajdujemy, dalej, drogą łatwej indukcji: $k_{p+n} \geq k_p^{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, skąd, (wobec $k_p > 1$): $\lim_{n=\infty} k_n = \infty$. Ponieważ zaś, w myśl definicji liczby k_n:

$$1 + \frac{1}{k_{n+1} - 1} \geq x_n > 1 + \frac{1}{k_{n+1}},$$

więc mamy $\lim_{n=\infty} x_n = 1$, skąd, wobec (5):

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) = x,$$

i przeto

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right)\left(1 + \frac{1}{k_3}\right) \cdots \tag{6}$$

Możnaby z łatwością dowieść, że każda liczba rzeczywista $x > 1$ daje jedno tylko rozwinięcie na iloczyn nieskończony (6), gdzie k_n są liczby naturalne, spełniające stale nierówność $k_{n+1} \geq k_n^2$. Rozwinięcie na iloczyn nieskończony wyrażenia $\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, podane w przykładzie 9), jest więc przypadkiem szczególnym rozważanego tutaj algorytmu. Możnaby też okazać, że na to iżby rozwinięcie (6) przedstawiało liczbę wymierną, potrzeba i wystarcza, iżby dla dostatecznie wielkich n zachodziła stale równość $k_{n+1} = k_n^2$.

12) Jako ostatni przykład iloczynu nieskończonego, pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że każda liczba rzeczywista $x > 0$ daje się przedstawić w postaci

$$x = 10^k \cdot c_0 \cdot \left(1 + \frac{c_1}{10}\right)\left(1 + \frac{c_2}{10^2}\right)\left(1 + \frac{c_3}{10^3}\right) \cdots,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ są cyfry układu dziesiętnego. (Ob. A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Erste Teil, Lipsk, Veit 1915, p. 382).

§ 92. Twierdzenie 117. *Na to żeby iloczyn nieskończony*

$$u_1 u_2 u_3 \ldots \tag{7}$$

był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby było

$$u_n \neq 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

oraz żeby dla każdej liczby dodatniej ε istniało takie μ, iż

$$| u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+k} - 1 | < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Dowód. Załóżmy, że szereg nieskończony (7) jest zbieżny. Kładąc

$$p_n = u_1 u_2 \ldots u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{10}$$

mamy więc

$$\lim_{n=\infty} p_n = p \neq 0, \tag{11}$$

skąd wynika natychmiast, że przy pewnem naturalnem q:

$$| p_n | > \frac{|p|}{2}, \quad \text{dla} \quad n > q. \tag{12}$$

Gdyby było, przy pewnem k, $u_k = 0$, mielibyśmy, w myśl (10), $p_n = 0$, dla $n \geq k$, wbrew (11). Muszą więc zachodzić nierówności (8), a więc też, wobec (10), nierówności

$$p_n \neq 0, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wszystkie $q + 1$ liczby

$$| p_1 |, | p_2 |, \ldots | p_q |, \frac{|p|}{2} \tag{13}$$

są więc różne od zera: oznaczmy przez a liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb (13): będzie więc

$$a < | p_n |, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots q, \quad \text{oraz} \quad a < \frac{|p|}{2},$$

skąd, wobec (12):

$$|p_n| > a, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Wobec zbieżności ciągu p_n oraz w myśl tw. 39, dla liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż

$$|p_{n+k} - p_n| < a\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

skąd, wobec (14):

$$\left|\frac{p_{n+k}}{p_n} - 1\right| < \frac{a\varepsilon}{|p_n|} < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

co, wobec $p_{n+k} = p_n u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+k}$, przedstawia nierówność (9). Warunki nasze są więc konieczne.

Załóżmy teraz, że warunki (8) i (9) są spełnione.

Wobec (9) mamy więc, przy pewnem naturalnem m:

$$|u_{m+1} u_{m+2} \ldots u_{m+k} - 1| < 1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

co, z uwagi, że wobec (8), $|p_m| > 0$, daje, po pomnożeniu przez $|p_m|$ i wobec (10):

$$|p_{m+k} - p_m| < |p_m|, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd

$$|p_{m+k}| < 2|p_m|, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

co dowodzi, że ciąg nieskończony p_n jest ograniczony.

Istnieje więc takie A (skończone), iż

$$|p_n| < A, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Wobec (9) mamy (z uwagi, że, wóbec (8), $p_n \neq 0$):

$$\left|\frac{p_{n+k}}{p_n} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

skąd, wobec (15):

$$|p_{n+k} - p_n| < |p_n| \cdot \varepsilon < A\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

co, wobec tw. 39, dowodzi, że ciąg p_n jest zbieżny.

Połóżmy $\lim_{n=\infty} p_k = p$. Powiadam, że $p \neq 0$. W samej rzeczy, gdyby było $p = 0$, to mielibyśmy $\lim_{k=\infty} p_{n+k} = 0$, przy wszelkiem turalnem n, skąd, przechodząc w nierówności (16) do granicy dla $k = \infty$:

$$1 \leq \varepsilon,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, jest niemożliwe. Ciąg p_n

zmierza więc do granicy różnej od zera, co dowodzi zbieżności iloczynu (7).

Twierdzenie 117 udowodniliśmy zatem w zupełności.

W szczególności, dla $k = 1$, nierówność (9) daje

$$|u_{n+1} - 1| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} u_n = 1.$$

Zatem:

Na to, żeby iloczyn nieskończony $u_1 u_2 u_3 \ldots$ był zbieżny, potrzeba iżby jego czynnik ogólny u_n zmierzał do jedności.

Jeżeli więc w iloczynie nieskończonym zbieżnym (7) położymy

$$u_n = 1 + v_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

to będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} v_n = 0. \tag{17}$$

Zauważymy jednak, że warunek (17) nie jest wystarczający dla zbieżności iloczynu nieskończonego

$$(1 + v_1)(1 + v_2)(1 + v_3) \cdots,$$

bo np. iloczyn nieskończony

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots,$$

dla którego $p_n = n + 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, jest rozbieżny, pomimo że $\lim\limits_{n=\infty} v_n = \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Jeżeli iloczyn nieskończony (7) jest zbieżny i wartością jego jest liczba p, to kładąc

$$p = p_k q_k, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{18}$$

i zważywszy, że, wobec (11), mamy też przy wszelkiem danem naturalnem k:

$$\lim_{n=\infty} p_{k+n} = p,$$

znajdujemy:

$$q_k = \frac{p}{p_k} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} p_{k+n}}{p_k} = \lim_{n=\infty} \frac{p_{k+n}}{p_k} \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots)$$

co, z uwagi, że wobec (10)

$$\frac{p_{k+n}}{p_k} = u_{k+1}\, u_{k+2} \ldots u_{k+n}, \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

daje rozwinięcie na iloczyn nieskończony

$$q_k = u_{k+1}\, u_{k+2}\, u_{k+3} \ldots, \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{19}$$

który nazywamy niekiedy k-tym iloczynem dopełniającym dla iloczynu nieskończonego (7).

W razie zbieżności iloczynu nieskończonego (7) mamy, jak dowiedliśmy, $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 1$, zatem, w razie rzeczywistych czynników u_n, dla dostatecznie wielkich k, mamy $u_{k+n} > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$: wszystkie czynniki iloczynu nieskończonego (19) będą więc dodatnie. Badanie iloczynu nieskończonego zbieżnego o czynnikach rzeczywistych możemy więc zawsze (w myśl wzorów (18) oraz (19)) sprowadzić do badania iloczynu nieskończonego, którego wszystkie czynniki są dodatnie.

§ **93. Lemmat.** *Jeżeli liczby*

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

są wszystkie jednego znaku (t. j. stale ≥ 0 lub stale ≤ 0) *oraz wszystkie* > -1, *to mamy nierówność*

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \geq 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{20}$$

Dowód. Lemmat nasz jest prawdziwy oczywiście dla $n = 1$. Załóżmy, że jest on prawdziwy przy pewnem naturalnem n i niech $u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}$ będą dane liczby, wszystkie jednego znaku oraz > -1. Z założenia że lemmat nasz jest prawdziwy dla n liczb wynika nierówność (20): mnożąc tę ostatnią przez liczbę $1 + u_{n+1}$, która jest dodatnią (gdyż zakładamy, że $u_{n+1} > -1$), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n)(1 + u_{n+1}) &\geq \\ \geq (1 + u_1 + u_2 + \ldots u_n)(1 + u_{n+1}) &= \\ = 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\, u_{n+1}; \end{aligned}$$

iloczyn $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\, u_{n+1}$ jest nieujemny, gdyż, jak zakładamy, liczby u są wszystkie jednego znaku: mamy więc

$$\begin{aligned} (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n)(1 + u_{n+1}) &\geq \\ \geq 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości naszego lemmatu dla $n + 1$ liczb.

Stąd, przez indukcję, wnosimy o jego prawdziwości przy wszelkiem naturalnem n. (Zauważymy, że, w szczególności, dla $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = d$, otrzymujemy nierówność $(1+d)^n \geq 1 + nd$, dla $d > -1$, udowodnioną bezpośrednio w § 36).

Twierdzenie 118. *Iloczyn nieskończony*

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ldots, \tag{21}$$

gdzie a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *są liczby nieujemne, mniejsze od jedności, jest zbieżny, jeżeli szereg nieskończony*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{22}$$

jest zbieżny; jeżeli zaś szereg ten jest rozbieżny, to wartością uważanego iloczynu nieskończonego jest zero.

Dowód. Z założenia, że a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby nieujemne, mniejsze od jedności, wynika, iż

$$p_n > 0 \quad \text{oraz} \quad 0 < 1 - a_{n+1} \leq 1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd

$$p_{n+1} = p_n(1 - a_{n+1}) \leq p_n:$$

ciąg p_n jest więc ciągiem nierosnącym liczb dodatnich, zatem posiada granicę (skończoną) $p \geq 0$. Powiadam, że jeżeli szereg (22) jest zbieżny, to nie może być $p = 0$.

W samej rzeczy, wobec zbieżności szeregu (22), istnieje liczba naturalna m taka, iż

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} < \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

Liczby $-a_{m+1}, -a_{m+2} \ldots -a_{m+k}$ są wszystkie ≤ 0, a więc jednego znaku, oraz wszystkie > -1 (gdyż, jak zakładamy liczby a są wszystkie nieujemne oraz < 1): w myśl naszego lemmatu mamy więc nierówność:

$$(1-a_{m+1})(1-a_{m+2})\ldots(1-a_{m+k}) \geq 1 - a_{m+1} - a_{m+2} - \ldots - a_{m+k},$$

skąd, wobec (23):

$$(1-a_{m+1})(1-a_{m+2})\ldots(1-a_{m+k}) > \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

skąd

$$p_{m+k} = p_m(1-a_{m+1})(1-a_{m+2})\ldots(1-a_{m+k}) > \frac{p_m}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

i przeto, w granicy dla $k = \infty$:

$$p = \lim_{k=\infty} p_{m+k} \geq \frac{p_m}{2},$$

zatem, wobec $p_m > 0$:

$$p > 0, \quad c.\ b.\ d.\ o.$$

Udowodniliśmy więc pierwszą część naszego twierdzenia.

Dla dowodu drugiej, zauważymy, że wobec

$$0 \leq a_n < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

jest

$$1 + a_n > 0$$

oraz

$$0 < 1 - a_n = \frac{1 - a_n^2}{1 + a_n} \leq \frac{1}{1 + a_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

skąd

$$0 < p_n = (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \leq$$
$$\leq \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)}. \tag{24}$$

Lecz, w myśl naszego lemmatu (z uwagi, że liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$ są nieujemne):

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

nierówność (24) daje więc

$$0 < p_n \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

Załóżmy teraz, że szereg (22) (o składnikach nieujemnych < 1) jest rozbieżny: wynika stąd, iż dla każdej danej liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{26}$$

Wobec (25) i (26), znajdujemy:

$$0 < p_n < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} p_n = 0.$$

Twierdzenie 118 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Twierdzenie 119. *Iloczyn nieskończony*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\ldots, \tag{27}$$

gdzie a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *są liczby nieujemne, jest zbieżny, jeżeli szereg nieskończony*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{28}$$

jest zbieżny; jeżeli zaś szereg ten jest rozbieżny, to iloczyny cząstkowe uważanego iloczynu nieskończonego wzrastają nieograniczenie.

Dowód. Połóżmy

$$b_n = \frac{a_n}{1 + a_n}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{29}$$

wobec $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, będzie

$$0 \leq b_n < 1; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{30}$$

z drugiej strony, wobec (29):

$$1 + a_n = \frac{1}{1 - b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{31}$$

Wobec (29) mamy stale $b_n \leq a_n$: jeżeli więc szereg (28) jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots,$$

co, w myśl tw. 118, pociąga za sobą zbieżność iloczynu nieskończonego

$$(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3) \ldots;$$

połóżmy

$$q_k = (1 - b_1)(1 - b_2) \ldots (1 - b_n); \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32}$$

będzie więc

$$\lim_{n=\infty} q = q \neq 0. \tag{33}$$

Lecz, oznaczając przez p_n n-ty iloczyn cząstkowy iloczynu nieskończonego (27), mamy, wobec (31) oraz (32):

$$p_n = \frac{1}{q_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots$$

skąd, wobec (33):

$$\lim_{n=\infty} p_n = \frac{1}{q},$$

co dowodzi zbieżności iloczynu nieskończonego (27).

Udowodniliśmy więc pierwszą część naszego twierdzenia.

Wobec $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ i w myśl naszego lemmatu, mamy:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq$$
$$\geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, w razie rozbieżności szeregu (o składnikach nieujemnych) (28), wynika że iloczyny cząstkowe iloczynu nieskończonego (27) wzrastają nieograniczenie, co dowodzi drugiej części naszego twierdzenia.

Twierdzenie 119 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Twierdzenia 118 i 119 dowodzą, że dla zbieżności iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n) \tag{34}$$

o czynnikach (dodatnich) stale mniejszych od jedności, lub stale większych od jedności, potrzeba i wystarcza, iżby szereg nieskończony

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35}$$

był zbieżny.

Zauważymy jednak, że wogóle (jeżeli liczby u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nie są wszystkie jednego znaku), zbieżność szeregu (35) nie pociąga za sobą zbieżności iloczynu (34), ani też naodwrót.

Np. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny, jako naprzemienny, natomiast iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

jest rozbieżny (do zera), gdyż, wobec

$$0 < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}} <$$
$$< 1 - \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}} < 1 - \frac{1}{2k+1}, \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots),$$

mamy

$$0 < p_{2k+1} < 2\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{36}$$

a że wobec rozbieżności szeregu $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\left(\text{gdyż } \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)$ i w myśl tw. 118, iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots$$

jest rozbieżny do zera, więc, wobec (36), mamy

$$\lim_{k=\infty} p_{2k+1}=0,$$

skąd też

$$\lim_{k=\infty} p_{2k}=\lim_{k=\infty} p_{2k-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=0.$$

zatem

$$\lim_{n=\infty} p_n=0, \quad c.\ b.\ d.\ o.$$

Z drugiej strony szereg nieskończony $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, gdzie

$$u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k}+1} \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

jest rozbieżny, gdyż, jak łatwo widzieć

$$u_{2k-1}+u_{2k}=\frac{1}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+1)}\geq\frac{1}{2k}, \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

natomiast iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1}+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)\cdots$$

jest zbieżny, gdyż, wobec

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=1, \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

mamy w nim stale $p_{2k}=1$ $(k=1,2,3,\ldots)$, zaś

$$p_{2k-1}=p_{2k-2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ co daje } \lim p_n=1.$$

Okazuje się atoli, że w razie zbieżności szeregu (35), zbieżność lub rozbieżność iloczynu (34) zależy od zbieżności lub rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$, jak to udowodnimy szczegółowo w następnym paragrafie.

§ 94. **Twierdzenie 120.** *Jeżeli szeregi nieskończone*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad oraz \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \tag{37}$$

gdzie

$$u_n > -1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{38}$$

są oba zbieżne, to zbieżny jest też iloczyn nieskończony

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots \tag{39}$$

Dowód. Udowodnimy przedewszystkiem dwa lemmaty.

Lemmat I. *Jeżeli*

$$u_k > -1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{40}$$

oraz

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n < 1, \tag{41}$$

to mamy nierówność:

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) \leq \frac{1}{1 - u_1 - u_2 - \ldots - u_n}. \tag{42}$$

Połóżmy, dla dowodu

$$u_{n+1} = -(u_1 + u_2 + \ldots + u_n); \tag{43}$$

w myśl (41) będzie

$$u_{n+1} > -1 \tag{44}$$

i przeto, wobec (40) i (41):

$$u_k > -1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots n+1,$$

oraz

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = 0,$$

zatem, w myśl tw. 60 (§ 40):

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1}) \leq 1,$$

skąd, z uwagi, że wobec (44), $1 + u_{n+1} > 0$:

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) \leq \frac{1}{1+u_{n+1}},$$

co, wobec (43), daje nierówność (42), *c. b. d. o.*

Lemmat II. *Jeżeli*

$$u_k > -1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{45}$$

to

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) \geq 1 + \frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{1+u_2} + \ldots + \frac{u_n}{1+u_n}. \tag{46}$$

Wobec (45), lewa strona wzoru (46) jest dodatnią; gdyby prawa strona tego wzoru była ≤ 0, to nierówność (46) zachodziłaby oczywiście, możemy więc dla dowodu jej zakładać, że prawa strona wzoru (46) jest dodatnią, czyli, że

$$\frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{1+u_2} + \ldots + \frac{u_n}{1+u_n} > -1. \tag{47}$$

Połóżmy, dalej:

$$v_k = -\frac{u_k}{1+u_k}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots n; \tag{48}$$

będziemy mieli

$$1+v_k=\frac{1}{1+u_k}, \quad (k=1,2,3,\ldots n), \tag{49}$$

zatem, wobec (45):

$$1+v_k>0, \quad \text{czyli} \quad v_k>-1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n, \tag{50}$$

zaś, wobec (47):

$$v_1+v_2+\ldots+v_n<1. \tag{51}$$

Liczby $v_1, v_2, \ldots v_n$ spełniają więc warunki lemmatu I, skąd

$$(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)\leq\frac{1}{1-v_1-v_2-\ldots-v_n},$$

co daje (wobec (50) i (51)):

$$\frac{1}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)}\geq 1-v_1-v_2-\ldots-v_n,$$

skąd, wobec (49) i (48) wynika natychmiast nierówność (46), *c. b. d. o.*

Przejdziemy obecnie do dowodu samego twierdzenia 120.

Załóżmy więc, że szeregi (37) są oba zbieżne (pierwszy choćby **tylko** warunkowo). Dla liczby dodatniej ε będzie więc istniało takie μ, iż

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \text{dla} \quad n>\mu, \quad k=1,2,\ldots \tag{52}$$

Nierówności (38) oraz (52) dowodzą, że dla $n>\mu$ (przy wszelkiem naturalnem k) liczby

$$u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots u_{n+k}$$

spełniają warunki lemmatu I, skąd wynika, w myśl tego lemmatu oraz wobec (52), że

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})\leq\frac{1}{1-u_{n+1}-u_{n+2}\ldots-u_{n+k}}<\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

czyli, że

$$1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})<1+\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n>\mu; \quad k=1,2,3,\ldots \tag{53}$$

Z drugiej strony, wobec zbieżności szeregu Σu_n^2, zbieżnym będzie też szereg $\sum\frac{u_n^2}{1+u_n}$ $\left(\text{gdyż, dla dostatecznie wielkich } n, \text{ musi być } u_n>-\frac{1}{2}\right.$ skąd $\left.\frac{u_n^2}{1+u_n}<2u_n^2\right)$, a więc, wobec zbieżności szeregu Σu_n, zbieżnym będzie i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-\frac{u_n^2}{1+u_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1+u_n};$$

będzie więc, dla $n>\nu$:

$$\frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{1+u_{n+2}}+\ldots+\frac{u_{n+k}}{1+u_{n+k}}>-\varepsilon \quad (k=1,2,3,\ldots). \tag{54}$$

Wobec (38), liczby

$$u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+k}$$

spełniają warunek lemmatu II: w myśl tego lemmatu, oraz wobec (54), znajdujemy:

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k}) > 1-\varepsilon, \quad \text{dla } n>\nu, \quad k=1,2,3,\ldots \tag{55}$$

Nierówności (53) i (55) dowodzą, że dla dostatecznie wielkich n:

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1| < \varepsilon \quad (k=1,2,3,\ldots),$$

co, w myśl tw. 117, dowodzi zbieżności iloczynu (39).

Udowodniliśmy więc twierdzenie 120.

Zauważymy, iż możnaby dowieść, że *jeżeli szereg o składnikach rzeczywistych* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny, zaś szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ *rozbieżny, to wartością iloczynu nieskończonego* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ *jest zero.*

Twierdzenie to możnaby udowodnić elementarnie, opierając się na następującym lemmacie:

Jeżeli

$$c_k > -1, \quad \text{dla } k=1,2,\ldots n,$$

oraz

$$c_1+c_2+\ldots+c_n \leq 0,$$

to

$$(1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_n) < \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2\right)}.$$

Ponieważ jednak dowód tego lemmatu jest dosyć długi (Zob. np. A. Pringsheim: Mathematische Annalen, Bd. 33 p. 146 i nast., oraz Bd. 44, p. 413, jakoteż tegoż autora *Vorlesungen über Zahlenlehre,* Część III, Teubner 1921, p. 654), więc omawiane twierdzenie udowodnimy na innej drodze (mniej elementarnej, ale znacznie krótszej) w jednym z późniejszych rozdziałów.

§ 95. Badanie iloczynów nieskończonych o czynnikach dodatnich sprowadzić można do badania szeregów nieskończonych jeszcze inną drogą.

Niech

$$u_1\, u_2\, u_3 \ldots \tag{56}$$

oznacza dany iloczyn nieskończony, którego wszystkie czynniki są dodatnie. Kładąc

$$p_n = u_1\, u_2 \ldots u_n \quad (n=1,2,3,\ldots), \tag{57}$$

będziemy mieli

$$p_n > 0 \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Każda liczba dodatnia posiada, jak wiemy (§ 48), oznaczony logarytm naturalny, przyczem logarytm iloczynu jest sumą logarytmów czynników (§ 49). Będziemy więc mogli napisać, wobec (57):

$$\lg p_n = \lg u_1 + \lg u_2 + \ldots + \lg u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{58}$$

Jeżeli

$$\lim_{n=\infty} p_n = p > 0,$$

to, w myśl tw. 65, mamy:

$$\lim_{n=\infty} \lg p_n = \lg p, \tag{59}$$

zatem, jeżeli iloczyn (56) jest zbieżny (a wtedy wartość jego p musi być dodatnią, gdyż stale $u_n > 0$), to zbieżnym jest też szereg nieskończony

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \ldots, \tag{60}$$

przyczem sumą jego, wobec (58) i (59), jest wówczas $\lg p$, czyli logarytm wartości iloczynu (56).

Naodwrót, zbieżność szeregu (60) pociąga za sobą zbieżność iloczynu (56). W samej rzeczy, kładąc

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \ldots + \lg u_n = s_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

będziemy mieli

$$p_n = u_1 u_2 \ldots u_n = e^{s_n}; \tag{61}$$

jeżeli szereg (60) jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$, to będzie

$$\lim_{n=\infty} e^{s_n} = e^s,$$

skąd, wobec (61):

$$\lim_{n=\infty} p_n = e^s,$$

co dowodzi, że iloczyn nieskończony (56) jest zbieżny (gdyż przy wszelkiem (skończonem) rzeczywistem s mamy $e^s > 0$).

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 121. *Jeżeli u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby dodatnie, to zbieżność iloczynu nieskończonego*

$$u_1 u_2 u_3 \ldots \tag{62}$$

pociąga za sobą zbieżność szeregu nieskończonego

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \ldots \tag{63}$$

i naodwrót, przyczem między wartością p iloczynu oraz sumą s szeregu zachodzi prosta zależność:

$$s = \lg p \quad (\text{lub } p = e^s).$$

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, że iloczyny nieskończone posiadają własności analogiczne do własności szeregów nieskończonych, więc np. posiadają prawo łączności, lecz nie posiadają prawa przemienności.

Jeżeli iloczyn nieskończony (62) jest zbieżny bezwarunkowo, t. j. przy wszelkiem uporządkowaniu czynników, to w myśl dowiedzionego twierdzenia, szereg (63) też jest zbieżny bezwarunkowo i naodwrót.

Załóżmy teraz, że iloczyn nieskończony (62) jest zbieżny warunkowo: szereg (63) jest więc wówczas również zbieżny warunkowo. Niech p oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl tw. Riemann'a o szeregach warunkowo zbieżnych (tw. 85), będziemy mogli tak zmienić porządek składników szeregu (63), iżby sumą powstałego przez to szeregu nieskończonego

$$\lg v_1 + \lg v_2 + \lg v_3 + \dots$$

była liczba $\lg p$. Wartością iloczynu nieskończonego

$$v_1 \, v_2 \, v_3 \dots$$

będzie więc (w myśl tw. 121) liczba $e^{\lg p} = p$, przyczem iloczyn ten różnić się będzie conajwyżej porządkiem czynników od iloczynu (62) (gdyż ciągi nieskończone u_n i v_n różnią się oczywiście conajwyżej porządkiem wyrazów). Stąd twierdzenie:

Możemy zawsze tak zmienić porządek czynników iloczynu nieskończonego zbieżnego warunkowo (o czynnikach dodatnich), iżby wartością jego była dowolna dana liczba dodatnia.

Łatwo też widzieć, że przez zmianę porządku czynników iloczynu warunkowo zbieżnego, można z niego otrzymać iloczyn rozbieżny do zera lub do nieskończoności: wystarczy w tym celu zauważyć, że przez zmianę porządku składników szeregu warunkowo zbieżnego (63) można z niego otrzymać szereg, którego sumą jest $-\infty$, jakoteż szereg, którego sumą jest $+\infty$ (oraz że w razie $\lim_{n=\infty} s_n = -\infty$ mamy $\lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} e^{s_n} = 0$, zaś w razie $\lim_{n=\infty} s_n = +\infty$ mamy $\lim_{n=\infty} p_n = +\infty$).

§ 96. **Twierdzenie 122.** *Na to żeby iloczyn nieskończony*

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots, \tag{64}$$

gdzie stale $u_n > -1$ $(n=1,2,3,\ldots)$, *był zbieżny bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza, iżby szereg nieskończony*

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots \tag{65}$$

był zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że iloczyn (64) jest zbieżny bezwarunkowo: jak wiemy (§ 95), szereg logarytmów kolejnych czynników, czyli szereg

$$\lg(1+u_1)+\lg(1+u_2)+\lg(1+u_3)+\cdots \tag{66}$$

jest wówczas zbieżny bezwzględnie. Oznaczmy przez

$$1+a_1,\ 1+a_2,\ 1+a_3,\ldots$$

kolejne czynniki iloczynu (64), które są ≥ 1, zaś przez

$$1-b_1,\ 1-b_2,\ 1-b_3,$$

kolejne czynniki iloczynu (64), będące < 1. Ciąg

$$\lg(1+a_1),\ \lg(1+a_2),\ldots$$

będzie więc przedstawiał kolejne składniki nieujemne szeregu (66) zaś ciąg

$$\lg(1-b_1),\ \lg(1-b_2),\ldots$$

— kolejne składniki ujemne tegoż szeregu.

Wobec bezwzględnej zbieżności szeregu (66), szeregi

$$\lg(1+a_1)+\lg(1+a_2)+\lg(1+a_3)\cdots \tag{67}$$

oraz

$$\lg(1-b_1)+\lg(1-b_2)+\lg(1-b_3)+\cdots \tag{68}$$

będą oba zbieżne[1]), co, w myśl tw. 121, pociąga za sobą zbieżność iloczynów nieskończonych

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots \tag{69}$$

oraz

$$(1-b_1)(1-b_2)(1-b_3)\cdots \tag{70}$$

Wobec $a_n \geq 0$ oraz $b_n > 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ oraz w myśl twierdzeń 119 i 118, zbieżność iloczynów (69) i (70) pociąga za sobą zbieżność szeregów nieskończonych

$$a_1+a_2+a_3+\cdots, \tag{71}$$

[1]) Przypadek, kiedy jeden z tych szeregów jest skończony (lub nie istnieje), nie nastręczający żadnych trudności, pozostawiamy do bliższego zbadania czytelnikowi.

oraz

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \tag{72}$$

co znowu dowodzi zbieżności bezwzględnej szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{73}$$

którego kolejnymi składnikami nieujemnymi są wyrazy ciągu a_n, zaś ujemnymi — wyrazy ciągu — b_n).

Dowiedliśmy więc, że, w razie zbieżności bezwarunkowej iloczynu (64), szereg (65) jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że szereg (65) jest zbieżny. Oznaczając przez a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) kolejne składniki nieujemne szeregu (73), zaś przez — b_n kolejne składniki ujemne tego szeregu, wnosimy stąd, że szeregi (71) i (72) są oba zbieżne, co (wobec $a_n \geq 0$ oraz $b_n > 0$ i w myśl tw. 119 i 118) pociąga za sobą zbieżność iloczynów (69) i (70), co znowu (w myśl tw. 121) dowodzi zbieżności szeregów (67) i (68), i przeto bezwzględnej zbieżności szeregu (66), skąd (§ 95) wynika bezwarunkowa zbieżność iloczynu (64). Twierdzenie 122 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Jeżeli szereg (65) jest zbieżny, to w myśl tw. 119 (z uwagi że składniki szeregu (65) są nieujemne), zbieżny jest i iloczyn nieskończony

$$(1 + |u_1|)(1 + |u_2|)(1 + |u_3|)\cdots, \tag{74}$$

jakoteż naodwrót. W razie zbieżności iloczynu (74), będziemy iloczyn (64) nazywali *zbieżnym bezwzględnie*.

W myśl tw. 122 możemy więc też powiedzieć:

Na to żeby iloczyn nieskończony (64) *był zbieżny bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza, iżby był zbieżny bezwzględnie.*

Dowodząc twierdzenia 122, udowodniliśmy zarazem, że zbieżność szeregu (65) pociąga za sobą zbieżność bezwzględną szeregu (66), jakoteż naodwrót. Lecz z tw. 121 wynika natychmiast, że, w razie zbieżności bezwzględnej szeregu (66), wartość iloczynu (64) nie zależy od porządku czynników, i naodwrót: jeżeli wartość iloczynu (64) nie zależy od porządku czynników, to szereg (66) jest zbieżny bezwzględnie. Zatem:

Na to żeby iloczyn nieskończony (64) *był zbieżny i żeby wartość jego była niezależną od porządku czynników, potrzeba i wystarcza iżby szereg* (65) *był zbieżny.*

Jak łatwo widzieć, moglibyśmy jeszcze powiedzieć:

Na to żeby iloczyn nieskończony (64) *był zbieżny, dając wartość niezależną od porządku czynników, potrzeba i wystarcza, iżby iloczyn ten był zbieżny bezwzględnie.*

Niech teraz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}, \tag{75}$$

gdzie stale $u_{k,l} > -1$, oznacza dowolny dany szereg iterowany, zbieżny bezwzględnie. Sumę tego szeregu będziemy mogli, jak dowiedliśmy w § 88, przedstawić w postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,3} + u_{2,2} + u_{3,1} + \cdots,$$

gdzie szereg po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie. Wynika stąd, jak dowiedliśmy, zbieżność bezwzględna szeregu

$$\lg(1 + u_{1,1}) + \lg(1 + u_{1,2}) + \lg(1 + u_{2,1}) + \lg(1 + u_{1,3}) + \cdots,$$

a więc też (§ 88) zbieżność bezwzględna szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k,l})$$

tudzież wzór:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k,l}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k,l}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k_n, l_n}), \tag{76}$$

gdzie (k_n, l_n) oznacza ciąg nieskończony wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k, l.

Wobec (76), mamy:

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} \lg(1+u_{k,l})} = e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lg(1+u_{k,l})} = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lg(1+u_{k_n, l_n})}$$

skąd, w myśl wzorów (3^a) oraz (3) z § 91 (z uwagi, że $e^{\lg(1+u)} = 1 + u$):

$$\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty}(1 + u_{k,l}) = \prod_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_{k,l}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_{k_n, l_n}). \tag{77}$$

Dowiedliśmy więc, *że jeżeli szereg* (75) *jest zbieżny bezwzględnie, to zachodzi wzór* (77).

Zastosowanie. Każda liczba naturalna daje się, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci $n = 2^{k-1}(2l - 1)$, gdzie k i l są liczby naturalne. Wynika stąd, że ciąg nieskończony kolejnych liczb naturalnych 1, 2, 3, . . . daje się ustawić w ciąg podwójny $2^{k-1}(2l-1)\begin{pmatrix} k=1,2,3,\ldots \\ l=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$.

Jeżeli więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_{2^{k-1}(2l-1)}$ też będzie zbieżny bezwzględnie i przeto, jak dowiedliśmy, będziemy mieli:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1+u_{2^{k-1}(2l-1)}\right)=\prod_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+u_{2^{k-1}(2l-1)}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+u_n\right).$$

Połóżmy, w szczególności $u_n = q^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), gdzie q oznacza liczbę rzeczywistą, bezwzględnie mniejszą od jedności.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ będzie zbieżny bezwzględnie, i przeto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^n\right)=\prod_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^{2^{k-1}(2l-1)}\right).$$

Lecz (przykład 8 z § 91):

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+(q^{2l-1})^{2^{k-1}}\right]=\frac{1}{1-q^{2l-1}}\quad (l=1,2,3,\ldots)$$

(gdyż $|q^{2l-1}|<1$, dla $l=1,2,3,\ldots$). Stąd, w jednej chwili:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{\infty}(1-q^{2l-1})}\qquad \text{dla } |q|<1.$$

Jest to wzór Euler'a.

Co się tyczy związku między zbieżnością iloczynu (74), a zbieżnością iloczynu (64), to udowodnimy obecnie bez pomocy logarytmów, że *zbieżność iloczynu* (74) *pociąga za sobą zbieżność iloczynu* (64), i to przy wszelkich (rzeczywistych lub zespolonych) u_n, byleby różnych od -1.

W samej rzeczy, załóżmy, że iloczyn (74) jest zbieżny. W myśl tw. 117, mamy więc

$$(1+|u_{n+1}|)(1+|u_{n+2}|)\ldots(1+|u_{n+k}|)-1<\varepsilon,\ \text{dla } n>\mu,\ k=1,2,3,\ldots \quad (78)$$

Rozwijając wyrażenie

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1=$$
$$=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}+u_{n+1}u_{n+2}+\ldots+u_{n+1}u_{n+2}\ldots u_{n+k},$$

spostrzegamy z łatwością, że moduł prawej strony nie przenosi sumy jej modułów, będącej rozwinięciem lewej strony nierówności (78), skąd nierówność

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1|\leq$$
$$\leq(1+|u_{n+1}|)(1+|u_{n+2}|)\ldots(1+|u_{n+k}|)-1,$$

zatem, wobec (78):

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1|<\varepsilon,\quad \text{dla } n>\mu,\quad k=1,2,\ldots,$$

co, w myśl tw. 117, dowodzi zbieżności iloczynu (64), *c. b. d. o.* Wynika stąd też natychmiast, że, w razie zbieżności iloczynu (74) (gdzie u_n są dowolne dane liczby rzeczywiste lub zespolone) wartością iloczynu (64) jest wtedy i tylko wtedy liczba zero, jeżeli jeden conajmniej z jego czynników jest zerem.

§ 97. Niech

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots \tag{79}$$

oznacza dowolny dany iloczyn nieskończony (o czynnikach rzeczywistych lub zespolonych).

Kładąc

$$p_n=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n),\quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{80}$$

będziemy mieli:

$$p_n-p_{n-1}=p_{n-1}u_n,\quad (n=2,3,\ldots),$$

skąd (dla $n>1$):

$$\left.\begin{aligned} p_n&=p_1+(p_2-p_1)+(p_3-p_2)+\cdots+(p_n-p_{n-1})=\\ &=p_1+p_1u_2+p_2u_3+\cdots+p_{n-1}u_n \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Iloczyny cząstkowe iloczynu nieskończonego (79) są więc odpowiedniemi sumami cząstkowemi szeregu nieskończonego.

$$p_1+p_1u_2+p_2u_3+p_3u_4+\cdots$$

Szereg ten możemy, wobec (80), napisać w postaci

$$(1+u_1)+(1+u_1)u_2+(1+u_1)(1+u_2)u_3+\cdots$$

lub jeszcze, w postaci:

$$(1+u_1)+(u_2+u_1u_2)+(u_3+u_1u_3+u_2u_3+u_1u_2u_3)+\cdots \tag{82}$$

Jeżeli opuszczając nawiasy w szeregu (82), otrzymamy szereg zbieżny

$$1+u_1+u_2+u_1u_2+u_3+u_1u_3+u_2u_3+u_1u_2u_3+\cdots, \tag{83}$$

to, jak wiemy (§ 72), zbieżnym będzie tembardziej szereg (82), dając tę samą co i szereg (83) sumę. Zatem, w razie zbieżności szeregu (83), suma jego będzie wartością iloczynu (79).

Załóżmy teraz, że zbieżnym jest iloczyn

$$(1+|u_1|)(1+|u_2|)(1+|u_3|)\ldots; \tag{84}$$

zbieżnym więc będzie szereg

$$(1+|u_1|)+(|u_2|+|u_1u_2|)+$$
$$+(|u_3|+|u_1u_3|+|u_2u_3|+|u_1u_2u_3|)+\ldots, \tag{85}$$

którego sumy cząstkowe są odpowiednimi iloczynami cząstkowemi iloczymu (84); ze zbieżności zaś szeregu (85) wnosimy natychmiast (§ 72) o zbieżności szeregu

$$1+|u_1|+|u_2|+|u_1u_2|+|u_3|+|u_1u_3|+|u_2u_3|+|u_1u_2u_3|+\ldots,$$

co dowodzi, że szereg (83) jest zbieżny bezwzględnie.

Dowiedliśmy zatem, że w razie zbieżności bezwzględnej iloczynu (79), szereg (83) jest zbieżny bezwzględnie i że mamy wówczas wzór

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots=$$
$$=1+u_1+u_2+u_1u_2+u_3+u_1u_3+u_2u_3+u_1u_2u_3\ldots \tag{86}$$

Zmieniając porządek wyrazów ciągu u_n zmienimy, jak łatwo widzieć, tylko porządek składników szezegu (83), przez co jednak, wobec jego bezwzględnej zbieżności, nie zmienimy jego sumy, a więc wartości iloczynu (79). Zatem: *w razie zbieżności iloczynu* (84), *wartość iloczynu* (79) *nie zależy od porządku czynników.*

Połóżmy przy wszelkich naturalnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$:

$$v_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}=u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}\ldots u_{\alpha_n};$$

szereg (83), po odrzuceniu pierwszego składnika, będziemy mogli przepisać w postaci:

$$v_1+v_2+v_{1,2}+v_3+v_{1,3}+v_{2,3}+v_{1,2,3}+\cdots \tag{87}$$

Weźmy pod rozwagę kolejne układy wskaźników:

$$(1),\ (2),\ (1{,}2),\ (3),\ (1{,}3),\ (2{,}3),\ (1{,}2{,}3),\ldots; \tag{88}$$

zbiór (88) jest, jak łatwo widzieć, zbiorem wszystkich ciągów skończonych liczb naturalnych rosnących (jeżeli w ciągu jest więcej niż jedna liczba).

Wzór (86) możemy więc przepisać w postaci:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=1+\sum_{(\alpha)}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}\ldots u_{\alpha_n}, \tag{89}$$

gdzie sumowanie $\sum\limits_{(\alpha)}$ rozciąga się na wszystkie układy skończone wskaźników rosnących $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Elementy zbioru (88) możemy rozbić na klasy, zaliczając do n-tej klasy wszystkie układy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, utworzone z n wskaźników rosnących.

W ten sposób ciąg (88) będziemy mogli ustawić w ciąg podwójny:

$$\begin{array}{llll} (1), & (2), & (3), & (4), \ldots \\ (1,2), & (1,3), & (2,3), & (1,4), \ldots \\ (1,2,3), & (1,2,4), & (1,3,4), & (2,3,4), \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

którego n-ty wiersz jest utworzony ze wszystkich elementów n-tej klasy $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Wypisanemu ciągowi podwójnemu układów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ odpowiada szereg podwójny składników $v_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}$, czyli szereg podwójny

$$\left.\begin{array}{lllll} v_1 & + v_2 & + v_3 & + v_4 & + \cdots \\ + v_{1,2} & + v_{1,3} & + v_{2,3} & + v_{1,4} & + \cdots \\ + v_{1,2,3} & + v_{1,2,4} & + v_{1,3,4} & + v_{2,3,4} & + \cdots \\ + \cdots & & & & \\ \cdots & & & & , \end{array}\right\} \tag{90}$$

który jest zbieżny bezwzględnie, gdyż, ustawiając jego składniki w jakibądź sposób w szereg zwykły, otrzymamy zawsze szereg, różniący się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (87), który jest zbieżny bezwzględnie.

Oznaczając przez S_n sumę składników n-tego wiersza szeregu podwójnego (90), zaś przez S — sumę szeregu (87), będziemy więc (w myśl tw. 116) mieli wzór:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots \tag{91}$$

Z definicji sum S_n wynika, że

$$S_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}' u_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n},$$

gdzie sumowanie $\sum\limits_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}'$ rozciąga się na wszystkie układy n wskaźników rosnących: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

W ten sposób, wobec (91), wzór (89) możemy przepisać w postaci:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=1+\sum_{(\alpha_1)}u_{\alpha_1}+\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}+\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}u_{\alpha_3}+\ldots; \quad (92)$$

wzór ten można uważać jako uogólnienie rozwinięcia skończonego:

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_m)=1+(u_1+u_2+\ldots+u_m)+$$
$$+(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3+\ldots+u_{m-1}u_m)+\ldots+u_1u_2\ldots u_m.$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli iloczyn (84) jest zbieżny, to zachodzi wzór (92).

Stąd, w szczególności, kładąc $u_n=a_nz$ $(n=1,2,3,\ldots)$, wnosimy, że jeżeli szereg nieskończony

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

jest zbieżny bezwzględnie [co pociąga za sobą przy wszelkim zespolonem z zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nz|$, a więc, w myśl tw. 119, i zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_nz|)$], to mamy przy wszelkiem zespolonem z rozwinięcie na szereg potęgowy:

$$(1+a_1z)(1+a_2z)(1+a_3z)\ldots=1+A_1z+A_2z^2+\ldots, \quad (93)$$

gdzie

$$A_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad A_2=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2},\ldots\quad A_n=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_n}.$$

(Możnaby z łatwością dowieść, że mamy tu:

$$2A_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^2-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,$$

$$6A_3=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^3+3\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$$

i t. p.

Niech

$$s=u_1+u_2+u_3+\ldots \quad (94)$$

oznacza dany szereg nieskończony zbieżny, którego żadna z sum cząstkowych s_n nie jest zerem. Mamy oczywiście:

$$s_n=s_1\cdot\frac{s_2}{s_1}\cdot\frac{s_3}{s_2}\cdot\ldots\cdot\frac{s_n}{s_{n-1}},\quad (n=2,3,4,\ldots) \quad (95)$$

a ponieważ

$$\frac{s_k}{s_{k-1}} = \frac{s_{k-1} + u_k}{s_{k-1}} = 1 + \frac{u_k}{s_{k-1}}, \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

więc możemy, wobec (95), napisać:

$$s_n = s_1 \left(1 + \frac{u_2}{s_1}\right)\left(1 + \frac{u_3}{s_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{u_n}{s_{n-1}}\right), \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$:

$$s = s_1 \left(1 + \frac{u_2}{s_1}\right)\left(1 + \frac{u_3}{s_2}\right)\left(1 + \frac{u_4}{s_3}\right) \ldots, \tag{96}$$

co daje przekształcenie szeregu nieskończonego (94) na iloczyn nieskończony.

Odwrotnie, każdy iloczyn nieskończony możemy przekształcić na szereg, w myśl wzoru (81).

Wyprowadzimy obecnie pewien ciekawy wniosek ze wzoru (81). Niech $v_1, v_2, \ldots v_n$ będą liczby rzeczywiste lub zespolone, różne od -1: połóżmy:

$$u_k = -\frac{v_k}{1 + v_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots n):$$

będziemy mieli

$$1 + u_k = \frac{1}{1 + v_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

zatem:

$$p_k = (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_k) = \frac{1}{(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_k)}$$

i wzór (81), przepisany w postaci

$$-u_1 - p_1 u_2 - p_2 u_3 - \ldots - p_{n-1} u_n = 1 - p_n,$$

daje:

$$\frac{v_1}{1 + v_1} + \frac{v_2}{(1 + v_1)(1 + v_2)} + \ldots + \frac{v_n}{(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_n)} = \\ = 1 - \frac{1}{(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_n)}. \tag{97}$$

Stąd stwierdzenie:

Szereg nieskończony

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_n)}$$

jest zbieżny, jeżeli zbieżny jest iloczyn

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + v_n),$$

przyczem mamy wówczas $s = 1 - \dfrac{1}{p}$.

W szczególności, jeżeli wszystkie v_n są dodatnie, szereg s jest zawsze zbieżny, przyczem, jeżeli iloczyn p jest rozbieżny, to, z uwagi, że wobec $v_n > 0$ mamy $p_{n+1} > p_n$, a więc $\lim_{n=\infty} p_n = \infty$, wnosimy, wobec $s_n = 1 - \frac{1}{p_n}$, że wówczas $\lim_{n=\infty} s_n = 1$, czyli że $s = 1$.

Wobec tw. 119 możemy więc powiedzieć:

Jeżeli szereg o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *jest rozbieżny, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n)} = 1.$$

Np. dla $v_n = 1$, znajdujemy: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$,

„ dla $v_n = n$ „ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$,

„ dla $v_n = \frac{1}{n}$ „ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$,

dla $x_n = x^n$, w razie $x > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)} = 1$$

i t. p.

ROZDZIAŁ XI.

Ułamki łańcuchowe.

§ **98. Ułamkiem łańcuchowym,** albo **ciągłym** (skończonym) nazywamy wyrażenie

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}} \qquad (1)$$

gdzie $a_1, a_2, \dots a_n, b_0, b_1, \dots b_n$ są dowolne dane liczby rzeczywiste lub zespolone.

Aby symbol (1) posiadał oznaczoną wartość, potrzeba i wystarcza iżby wszystkie wskazane dzielenia były wykonalne, a więc iżby było:

$$b_n \neq 0,$$

$$b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n} \neq 0,$$

$$b_{n-2} + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}} \neq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{\ddots}{\cdot + \cfrac{a_n}{b_n}}} \neq 0.$$

Niektóre z liczb $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ (lub nawet wszystkie) mogą być przytem zerami: np. ułamek łańcuchowy

$$\cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{2}}}}$$

ma, jak łatwo widzieć, oznaczoną wartość 2.

Wyrażenie (1) przyjęto pisać w postaci dogodniejszej

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|b_n}$$

(niektórzy autorowie piszą je też w postaci

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \frac{a_3}{b_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{a_n}{b_n}).$$

Ułamek $\frac{a_k}{b_k}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ nazywamy *k-tem ogniwem* ułamka łańcuchowego (1) (albo k-tym ułamkiem cząstkowym), zaś liczby a_k i b_k — odpowiednio k-tym licznikiem cząstkowym i k-tym mianownikiem cząstkowym. Liczbę b_0 możnaby nazywać wyrazem początkowym ułamka (1).

Liczbę

$$R_k = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_k|}{|b_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

nazywamy *k-tym reduktem* ułamka łańcuchowego (1). Przez redukt rzędu 0 rozumiemy wyraz początkowy b_0. Dla ułamka łańcuchowego o n ogniwach n-ty redukt jest jego wartością.

Zauważymy, że ułamek łańcuchowy może mieć oznaczoną wartość choć nie wszystkie jego redukty ją posiadają. Np. ułamek $\frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$ ma, jak łatwo widzieć, wartość 2, tymczasem redukt $R_2 = \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|1} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1}}$ nie posiada oznaczonej wartości, gdyż dzielenie $1 : \left(1 - \frac{1}{1}\right)$ nie jest wykonalne.

Z określenia naszego znakowania wynika bezpośrednio, że jeżeli ułamek łańcuchowy

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|b_n}$$

(gdzie $n > 1$) ma oznaczoną wartość, to

$$R_n = \quad + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}} + \frac{a_{n-1}|}{|\left(b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}\right)} =$$

$$= b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}} + \frac{a_{n-1}\, b_n|}{|b_{n-1}\, b_n + a_n},$$

jakoteż, przy wszelkiem $k = 1, 2, \ldots n - 1$:

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_k|}{|B_k}, \quad \text{gdzie} \quad B_k = b_k + \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

Połóżmy

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= b_0, \quad Q_0 = 1, \\ P_1 &= b_0\, b_1 + a_1, \quad Q_1 = b_1 \\ \text{oraz} \quad P_k &= P_{k-1}\, b_k + P_{k-2}\, a_k \\ Q_k &= Q_{k-1}\, b_k + Q_{k-2}\, a_k \end{aligned}\right\} \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Ze wzorów tych wnosimy przez łatwą indukcję, że P_k i Q_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) są funkcjami zmiennych $b_0, a_1, b_1, \ldots a_k, b_k$ (wielomianami całkowitymi tych zmiennych, przyczem Q_k nie zależy od b_0).

Znajdujemy też bezpośrednio:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1} = R_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = R_1$$

(o ile naturalnie $b_1 \neq 0$, t. j. o ile ułamek R_1 posiada oznaczoną wartość).

Powiadam ogólnie, że jeżeli ułamek

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} \tag{3}$$

posiada oznaczoną wartość, to mamy wzór:

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n}. \tag{4}$$

Załóżmy, dla dowodu, że twierdzenie nasze jest (dla dowolnych danych $b_0, a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$, byleby dających oznaczoną wartość dla ułamka (3)) prawdziwe przy pewnem naturalnem n. (Jest ono prawdziwe oczywiście dla $n = 1$).

Wzór (4) będzie więc, w myśl naszego założenia, zachodził dla wszelkich $b_0, a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$, dla których ułamek (3) ma oznaczoną wartość. W myśl (4) i (2) możemy też napisać:

$$R_n = \frac{P_{n-1} b_n + P_{n-2} a_n}{Q_{n-1} b_n + Q_{n-2} a_n} \tag{5}$$

przy wszelkich $b_0, a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$, dla których ułamek (3) ma oznaczoną wartość. Równość (5) pozostanie więc prawdziwą, jeżeli zastąpimy w niej po obu stronach b_n przez $b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, pod warunkiem, że ułamek R'_n, na który przejdzie ułamek (3) po zastąpieniu w nim b_n przez $b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, czyli ułamek

$$R'_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{\left|\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\right.}$$

będzie miał oznaczoną wartość. Lecz, jak łatwo widzieć:

$$R'_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|b_n} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} = R_{n+1},$$

zaś po prawej stronie wzoru (5), P_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-1}, Q_{n-2} nie zależą od b_n. W ten sposób otrzymujemy ze wzoru (5):

$$R_{n+1} = \frac{P_{n-1}\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) + P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) + Q_{n-2}a_n}, \tag{6}$$

jeżeli tylko R_{n+1} ma oznaczoną wartość. Z tego ostatniego warunku wynika, w szczególności, że $b_{n+1} \neq 0$: w ułamku (6) możemy więc licznik i mianownik pomnożyć przez b_{n+1}, nie zmieniając przez to jego wartości, co daje:

$$R_{n+1} = \frac{(P_{n-1}b_n + P_{n-2})b_{n+1} + P_{n-1}a_{n+1}}{(Q_{n-1}b_n + Q_{n-2})b_{n+1} + Q_{n-1}a_{n+1}},$$

czyli, w myśl (2):

$$R_{n+1} = \frac{P_n b_{n+1} + P_{n-1}a_{n+1}}{Q_n b_{n+1} + Q_{n-1}a_{n+1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia dla $n+1$.

Stąd, przez indukcję, wynika prawdziwość naszego twierdzenia przy wszelkiem naturalnem n. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 123. *Jeżeli ułamek łańcuchowy*

$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}$ *posiada oznaczoną wartość i jeżeli liczby* P_k i Q_k $(k = 0, 1, \ldots n)$ *wyznaczymy ze wzorów*

$P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$

$P_1 = b_0 b_1 + a_1, \quad Q_1 = b_1,$

$P_k = P_{k-1} b_k + P_{k-2} a_k, \quad Q_k = Q_{k-1} b_k + Q_{k-2} a_n, \quad$ dla $k = 1, 2, \ldots n,$

to będzie

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Wynika stąd natychmiast, że jeżeli wszystkie redukty R_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ ułamka łańcuchowego R_n posiadają oznaczoną wartość, to mamy:

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots n.$$

Z dowiedzionego twierdzenia wynika też, że jeżeli ułamek R_n ma oznaczoną wartość, to musi być $Q_n \neq 0$. Warunek ten nie wystarcza jednak na to iżby ułamek R_n posiadał oznaczoną wartość, jak tego dowodzi np. ułamek $\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|1}$. Mamy tu $b_0 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$, i wzory (2) dają $Q_n = +1$, tymczasem ułamek nasz nie posiada oznaczonej wartości, gdyż dzielenie $\frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|1} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1}}$ nie jest wykonalne.

Możnaby rozszerzyć zakres pojęcia *wartości ułamka łańcuchowego*, przypisując ułamkowi R_n oznaczoną wartość, jeżeli tylko ma ją $\frac{P_n}{Q_n}$. W ten sposób np. ułamkowi $\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|1}$ należałoby przypisać wartość 1, ułamkowi $\frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2}$ — wartość 0. Stolz i Gmeiner nazywają ułamki łańcuchowe właściwymi lub niewłaściwymi, zależnie od tego czy mają one oznaczoną wartość w zwykłem, czy dopiero w rozszerzonem znaczeniu.

§ 99. Określając ciągi P_k i Q_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ wzorami (2) połóżmy:

$$\Delta_k = P_{k-1}\, Q_k - Q_{k-1}\, P_k \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

W myśl (7) i (2) będziemy mieli (dla $k > 1$):

$$\left.\begin{aligned} \Delta_k &= P_{k-1}(Q_{k-1} b_k + Q_{k-2} a_k) - Q_{k-1}(P_{k-1} b_k + P_{k-2} a_k) = \\ &= (P_{k-1}\, Q_{k-2} - Q_{k-1}\, P_{k-2}) a_k = -\Delta_{k-1}\, a_k. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bezpośrednio obliczamy:

$$\Delta_1 = P_0\, Q_1 - Q_0\, P_1 = b_0 b_1 - 1 \,.\, (b_0 b_1 + a_1) = -a_1 .$$

Powiadam, że (przy naturalnem k)

$$\Delta_k = P_{k-1}\, Q_k - Q_{k-1}\, P_k = (-1)^k a_1 a_2 \ldots a_k . \tag{9}$$

Twierdzenie to jest prawdziwe dla $k = 1$; załóżmy, że jest ono prawdziwe dla $k - 1$, czyli że

$$\Delta_{k-1} = (-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_{k-1};$$

w myśl (8) będziemy stąd mieli:

$$\Delta_k = -\Delta_{k-1}\, a_k = -(-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \,.\, a_k = (-1)^k a_1 a_2 \ldots a_k ,$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia dla k. Stąd, przez indukcję, wnosimy, że wzór (9) jest prawdziwy przy wszelkiem naturalnem k, c. b. d. o.

Jeżeli $Q_{k-1} \neq 0$ oraz $Q_k \neq 0$, to mamy, wobec (7):

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}\, Q_k - Q_{k-1}\, P_k}{Q_{k-1}\, Q_k} = \frac{\Delta_k}{Q_{k-1}\, Q_k}.$$

Jeżeli $Q_k \neq 0$ dla $m \leq k \leq n$, to mamy stąd:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_m}{Q_m} - \frac{\Delta_{m+1}}{Q_m\, Q_{m+1}} - \ldots - \frac{\Delta_n}{Q_{n-1}\, Q_n}. \tag{10}$$

W szczególności, dla $m = 0$:
Jeżeli $Q_k \neq 0$, dla $k = 1, 2, \dots n$, to mamy wzór:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 - \frac{\Delta_1}{Q_0 Q_1} - \frac{\Delta_2}{Q_1 Q_2} - \dots - \frac{\Delta_n}{Q_{n-1} Q_n},$$

czyli, wobec (9):

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}.$$

Stąd, w myśl tw. 123, wnosimy, że jeżeli ułamek łańcuchowy $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$ posiada oznaczoną wartość, i jeżeli $Q_k \neq 0$, dla $k = 1, 2, \dots n$, to

$$\left. \begin{aligned} b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \\ + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}. \end{aligned} \right| \quad (11)$$

(Wzór (11) zachodzi więc zawsze, jeżeli obie jego strony mają oznaczoną wartość. Zauważymy jednak, że jedna strona wzoru (11) może posiadać oznaczoną wartość, zaś druga jej nie posiadać. Np. dla $n = 3$, $b_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ lewa strona wzoru (11) posiada oznaczoną wartość 2, zaś prawa nie posiada oznaczonej wartości, gdyż $Q_2 = 0$. Z drugiej strony, dla $n = 3$, $b_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ lewa strona wzoru (11) nie ma oznaczonej wartości, gdyż dzielenie $\dfrac{a_2}{b_2 + \dfrac{a_3}{b_3}}$ nie jest wykonalne, natomiast prawa posiada oznaczoną wartość 0).

Połóżmy, w szczególności:

$$\left. \begin{aligned} a_1 = c_1, \; a_2 = c_2, \; a_k = c_{k-2}\, c_k \quad & (k = 3, 4, \dots n), \\ b_0 = 0, \; b_1 = 1, \; b_k = c_{k-1} - c_k \quad & (k = 2, 3, \dots n), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gdzie c_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ są liczby rzeczywiste lub zespolone, różne od zera.

Będziemy mieli

$$Q_k = c_1\, c_2 \dots c_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots n). \qquad (13)$$

W samej rzeczy, wzór (13) jest prawdziwy dla $k=2$ oraz $k=3$, gdyż, w myśl (12) oraz (2):

$$Q_2 = Q_1 b_2 + Q_0 a_2 = b_1 b_2 + a_2 = (c_1 - c_2) + c_2 = c_1,$$

zaś

$$Q_3 = Q_2 b_3 + Q_1 a_3 = c_1 (c_2 - c_3) + c_1 c_3 = c_1 c_2;$$

zakładając zaś, że wzór (13) jest prawdziwy dla $k-1$ oraz $k-2$ $(3 < k \leq n)$, czyli, że

$$Q_{k-1} = c_1 c_2 \ldots c_{k-2} \quad \text{oraz} \quad Q_{k-2} = c_1 c_2 \ldots c_{k-3},$$

będziemy mieli, w myśl (2) oraz (12):

$$Q_k = Q_{k-1} b_k + Q_{k-2} a_k = c_1 c_2 \ldots c_{k-2} (c_{k-1} - c_k) + \\ + c_1 c_2 \ldots c_{k-3} \cdot c_{k-2} c_k = c_1 c_2 \ldots c_{k-2} c_{k-1},$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (13) dla liczby k. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości wzoru (13) dla $k = 2, 3, \ldots n$.

W myśl (12) i (13) znajdujemy:

$$\frac{a_1}{Q_0 Q_1} = c_1, \quad \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} = \frac{c_1 c_2}{c_1} = c_1,$$

zaś dla $k = 2, 3, \ldots n$, jak łatwo widzieć:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{Q_{k-1} Q_k} = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot c_1 c_3 \cdot c_2 c_4 \ldots c_{k-2} c_k}{c_1 c_2 \ldots c_{k-2} \cdot c_1 c_2 \ldots c_{k-1}} = c_k; \tag{14}$$

wzór (11) daje więc, wobec (12) i (14):

$$\left. \begin{array}{l} c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + (-1)^{n-1} c_n = \\ = \dfrac{c_1|}{|1} + \dfrac{c_2|}{|c_1 - c_2} + \dfrac{c_1 c_3|}{|c_2 - c_3} + \dfrac{c_2 c_4|}{|c_3 - c_4} + \ldots + \dfrac{c_{n-2} c_n|}{|c_{n-1} - c_n} \end{array} \right\} \tag{15}$$

— w założeniu, że ułamek łańcuchowy po prawej stronie ma oznaczoną wartość. Jest to *wzór* Euler'a dla przekształcenia szeregów na ułamki łańcuchowe.

Zauważymy, że wzór (15) można też udowodnić bezpośrednio, drogą indukcji. W samej rzeczy, załóżmy, że jest on prawdziwy przy pewnem $n > 1$, dla wszelkich liczb $c_1, c_2, \ldots c_n$, dla których ułamek łańcuchowy po prawej stronie ma oznaczoną wartość, i załóżmy, że ułamek łańcuchowy o $n+1$ ogniwach

$$R_{n+1} = \frac{c_1|}{|1} + \frac{c_2|}{|c_1 - c_2} + \frac{c_1 c_3|}{|c_2 - c_3} + \frac{c_2 c_4|}{|c_3 - c_4} + \ldots + \frac{c_{n-2} c_n|}{|c_{n-1} - c_n} + \frac{c_{n-1} c_{n+1}|}{|c_n - c_{n+1}}$$

ma oznaczoną wartość. (W razie $n = 2$ należy przez c_0 rozumieć 1). Ponieważ

$$\frac{c_{n-2}\,c_n\,|}{|\,c_{n-1} - c_n} + \frac{c_{n-1}\,c_{n+1}\,|}{|\,c_n - c_{n+1}} = \frac{c_{n-2}\,c_n}{c_{n-1} - c_n + \dfrac{c_{n-1}\,c_{n+1}}{c_n - c_{n+1}}} =$$

$$= \frac{c_{n-2}\,c_n\,(c_n - c_{n+1})}{(c_{n-1} - c_n + c_{n+1})\,c_n} = \frac{c_{n-2}\,(c_n - c_{n+1})}{c_{n-1} - (c_n - c_{n+1})},$$

więc, kładąc $c_n - c_{n+1} = c_n'$, będziemy mogli ułamek łańcuchowy R_{n+1} napisać jako ułamek o n ogniwach

$$R_{n+1} = \frac{c_1\,|}{|\,1} + \frac{c_2\,|}{|\,c_1 - c_2} + \frac{c_1\,c_3\,|}{|\,c_2 - c_3} + \ldots + \frac{c_{n-3}\,c_{n-1}\,|}{|\,c_{n-2} - c_{n-1}} + \frac{c_{n-2}\,c_n'\,|}{|\,c_{n-1} - c_n'},$$

skąd, w myśl założenia, że wzór Euler'a jest prawdziwy dla ułamków o n ogniwach (posiadających oznaczoną wartość), znajdujemy:

$$R_{n+1} = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + (-1)^{n-2}\,c_{n-1} + (-1)^{n-1}\,c_n',$$

czyli, wobec $c' = c_n - c_{n+1}$:

$$R_{n+1} = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + (-1)^{n-2}\,c_{n-1} + (-1)^{n-1}\,c_n + (-1)^n\,c_{n+1},$$

co dowodzi prawdziwości wzoru Euler'a dla ułamków łańcuchowych o $n+1$ ogniwach. Ponieważ zaś wzór (15) jest prawdziwy oczywiście dla $n = 2$, jak to sprawdzamy bezpośrednio, więc, przez indukcję, wnosimy o jego prawdziwości przy wszelkiem $n = 2, 3, 4, \ldots$ (Będzie on również prawdziwy dla $n = 1$, jeżeli przez R_1 rozumieć będziemy ułamek łańcuchowy $\frac{c_1\,|}{|\,1} = c_1$).

Kładąc

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= p_1 x,\ a_2 = p_2 q_1^2 xy,\ a_k = p_{k-2} p_k q_{k-1}^2 xy, \quad (k = 3, 4, \ldots n) \\ b_0 &= 0,\ b_1 = q_1 y,\ b_k = p_{k-1} q_k y - p_k q_{k-1} x, \quad (k = 2, 3, \ldots n), \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

gdzie p_k, q_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ oraz y są liczby różne od zera, znajdziemy przez łatwą indukcję:

$$Q_k = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} q_1 q_2 \cdots q_k y^k \quad (k = 2, 3, \ldots n),$$

skąd, wobec (16), znajdujemy z łatwością:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{Q_{k-1}\,Q_k} = \frac{p_k}{q_k}\left(\frac{x}{y}\right)^k \quad (k = 1, 2, \ldots n). \qquad (17)$$

Wzór (11) daje więc, wobec (16) i (17):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p_1}{q_1}\frac{x}{y} - \frac{p_2}{q_2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{p_n}{q_n}\left(\frac{x}{y}\right)^n = \\ &= \frac{p_1 x\,|}{|\,q_1 y} + \frac{p_2 q_1^2 xy\,|}{|\,p_1 q_2 y - p_2 q_1 x} + \ldots + \frac{p_{n-2} p_n q_{n-1}^2 xy\,|}{|\,p_{n-1} q_n y - p_n q_{n-1} x}, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

w założeniu, że ułamek łańcuchowy po prawej stronie ma oznaczoną wartość.

Kładąc, w szczególności, $x=y=1$, $p_k=1$, $q_k=k$ $(k=1,2,\ldots n)$, otrzymujemy stąd w jednej chwili ciekawy wzór:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\\&=\frac{1|}{|1}+\frac{1^2|}{|1}+\frac{2^2|}{|1}+\frac{3^2|}{|1}+\ldots+\frac{(n-1)^2|}{|1}.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Kładąc zaś we wzorze (18) $x=y=1$, $p_k=1$, $q_k=2k-1$ $(k=1,2,\ldots n)$, otrzymujemy w jednej chwili wzór:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\\&=\frac{1|}{|1}+\frac{1^2|}{|2}+\frac{3^2|}{|2}+\frac{5^2|}{|2}+\ldots+\frac{(2n-3)^2|}{|2}\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Gdybyśmy położyli

$$a_1=p_1x,\ a_k=p_kq_{k-1}xy\quad(k=2,3,\ldots n)$$
$$b_0=0,\ b_1=q_1y,\ b_k=q_ky-p_kx\quad(k=2,3,\ldots n),$$

gdzie q_k $(k=1,2,\ldots n)$ oraz y są liczby różne od zera, znaleźlibyśmy przez łatwą indukcję:

$$Q_k=q_1q_2\cdots q_ky^k,\quad(k=1,2,\ldots n),$$

oraz

$$\frac{a_1a_2\ldots a_k}{Q_{k-1}Q_k}=\frac{p_1p_2\ldots p_k}{q_1q_2\cdots q_k}\left(\frac{x}{y}\right)^k,\quad(k=1,2,\ldots n),$$

skąd, w myśl wzoru (11):

$$\frac{p_1}{q_1}\frac{x}{y}-\frac{p_1p_2}{q_1q_2}\left(\frac{x}{y}\right)^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n}\left(\frac{x}{y}\right)^n=$$
$$=\frac{p_1x|}{|q_1y}+\frac{p_2q_1xy|}{|q_2y-p_2x}+\ldots+\frac{p_nq_{n-1}xy|}{|q_ny-p_nx}.$$

Stąd, w szczególności, dla $x=y=1$, $p_k=1$, $q_k=k$ $(k=1,2,\ldots n)$, otrzymujemy w jednej chwili:

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=$$
$$=\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{2|}{|2}+\frac{3|}{|3}+\ldots+\frac{n-1|}{|n-1}.$$

§ 100. Ułamki łańcuchowe nieskończone. Ułamkiem łańcuchowym nieskończonym nazywamy symbol

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} \qquad (21)$$

lub

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots,$$

gdzie a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ oraz b_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ są dane ciągi nieskończone liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Jeżeli dla dostatecznie wielkich n redukty

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

mają oznaczoną wartość i jeżeli ciąg R_n zmierza do granicy R, to liczbę $R = \lim\limits_{n=\infty} R_n$ nazywamy *wartością* ułamka łańcuchowego nieskończonego (21), pisząc

$$R = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}} \quad \text{lub} \quad R = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots,$$

Ułamek łańcuchowy nieskończony, posiadający oznaczoną skończoną wartość, nazywamy *zbieżnym*; ułamek łańcuchowy nieskończony, który nie jest zbieżnym, nazywamy *rozbieżnym*.

Przykłady:

1) Ze wzoru (20), którego lewa strona przedstawia n-tą sumę cząstkową szeregu Leibniz'a na liczbę $\pi/4$, wynika rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|2} + \frac{3^2|}{|2} + \frac{5^2|}{|2} + \ldots$$

Jest to wzór, podany przez Brouncker'a (w r. 1655).

2) Ze wzoru (19), którego lewa stroną przedstawia n-tą sumę cząstkową szeregu anharmonicznego, wynika rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony:

$$\lg 2 = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|1} + \frac{3^2|}{|1} + \cdots$$

3) Ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

jest zbieżny i ma wartość 1, gdyż oznaczając przez R_n jego redukty, mamy oczywiście $R_n = \frac{1}{2 - R_{n-1}}$, skąd, przez łatwą indukcję: $R_n = \frac{n}{n+1}$, co daje $\lim_{n=\infty} R_n = 1$.

4) Dla ułamka łańcuchowego nieskończonego

$$\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$$

mamy oczywiście $R_{n+1} = \frac{1}{1+R_n}$, skąd, przez indukcję sprawdzamy wzór

$$R_n = 2\,\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

który daje w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} R_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

i przeto

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$$

W szeregu lub iloczynie nieskończonym możemy, jak wiadomo, odrzucić dowolną skończoną liczbę pierwszych wyrazów, nie zmieniając przez to kwestji zbieżności danego szeregu lub iloczynu: inaczej ma się rzecz z nieskończonymi ułamkami łańcuchowymi: odrzucając skończoną liczbę pierwszych ogniw możemy z ułamka łańcuchowego zbieżnego otrzymać rozbieżny lub naodwrót.

Np. dla ułamka łańcuchowego nieskończonego

$$\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

(gdzie $b_0 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = -1$, $b_n = 2$, dla $n = 3, 4, 5, \ldots$) mamy, jak łatwo widzieć (dla $n > 2$): $R_n = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1 - R'_{n-2}}$, gdzie R'_{n-2} oznacza $n-2$-gi redukt ułamka $\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \ldots$, skąd w jednej chwili (por.

przykład 3-ci): $R_n = \frac{1|}{|1} + \cfrac{1}{1 - \cfrac{n-2}{n-1}} = \frac{1}{n}$ i przeto $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$: ułamek nasz jest więc zbieżny i posiada wartość 0. Odrzucając w nim pierwsze ogniwo, otrzymamy ułamek łańcuchowy rozbieżny

$$\frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

(gdyż jego n-ty redukt, jak łatwo widzieć $= n$). Odrzucając w tym ułamku znowu pierwsze ogniwo, otrzymujemy ułamek zbieżny

$$-\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots = -1.$$

(Ułamek łańcuchowy, który pozostaje zbieżnym po odrzuceniu jakiejbądź skończonej liczby piorwszych ogniw nazywa Pringsheim *zbieżnym doskonale*; podobnież ułamek, który pozostaje rozbieżnym po odrzuceniu jakiejbądź skończonej liczby pierwszych ogniw nazywa on *rozbieżnym doskonale*: takim jest np. jak łatwo widzieć, ułamek $\frac{2|}{|1} - \frac{2|}{|1} - \frac{2|}{|1} - \ldots$).

Załóżmy, że redukty $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ ułamka łańcuchowego nieskończonego

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \tag{22}$$

posiadają dla $n \geqq m$ oznaczoną wartość: mamy więc, dla $n \geqq m$, $Q_n \neq 0$ i, w myśl (10) oraz (9), zachodzi wzór:

$$\left.\begin{aligned} R_n = R_m + \frac{(-1)^m a_1 a_2 \ldots a_{m+1}}{Q_m Q_{m+1}} + \\ + \frac{(-1)^{m+1} a_1 a_2 \ldots a_{m+2}}{Q_{m+1} Q_{m+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \end{aligned}\right| \tag{23}$$

Na to, żeby ułamek łańcuchowy (22) był zbieżny, potrzeba więc i wystarcza, iżby zbieżnym był szereg nieskończony

$$\frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{Q_3 Q_4} + \cdots \tag{24}$$

(ewentualnie szereg, otrzymany z wypisanego przez odrzucenie pewnej skończonej liczby pierwszych składników, niektóre bowiem z pierwszych $m-1$ składników szeregu (24) mogą, nawet w razie zbieżności ułamka (22), nie mieć oznaczonej wartości, gdyż odpowiednie mianowniki mogą być $= 0$).

W ten sposób badanie zbieżności ułamków łańcuchowych nieskończonych sprowadza się do badania szeregów nieskończonych.

Załóżmy, w szczególności, że mamy stale $a_k > 0$ oraz $b_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Będzie więc też, jak łatwo widzieć, stale $Q_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ i wszystkie redukty uważanego ułamku łańcuchowego będą miały oznaczoną wartość. Wobec

$$Q_{k+1} - Q_{k-1} a_{k+1} = Q_k b_{k+1} > 0,$$

mamy:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{Q_{k-1} Q_k} - \frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}} > 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

co dowodzi, że składniki szeregu (24) bezwzględnie maleją i przeto, dla $n = m + 2$, mamy, wobec (23):

$$(-1)^m (R_{m+2} - R_m) = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{m+1}}{Q_m Q_{m+1}} - \frac{a_1 a_2 \ldots a_{m+2}}{Q_{m+1} Q_{m+2}} > 0,$$

czyli

$$(-1)^m (R_{m+2} - R_m) > 0, \quad \text{dla} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (25)$$

Przyjmując w tej nierówności, w szczególności $m = 2k - 2$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, otrzymujemy:

$$R_{2k} - R_{2k-2} > 0, \quad \text{czyli} \quad R_{2k} > R_{2k-2}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

co dowodzi, że redukty rzędu parzystego tworzą ciąg *rosnący*. Przyjmując zaś w nierówności (25) $m = 2k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, otrzymujemy:

$$-(R_{2k+1} - R_{2k-1}) > 0, \quad \text{czyli} \quad R_{2k+1} < R_{2k-1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

co dowodzi, że redukty rzędu nieparzystego tworzą ciąg *malejący*.

Jeżeli przytem uważany ułamek łańcuchowy jest zbieżny, czyli $\lim R_n = R$, gdzie R jest wartością ułamka, to, z uwagi, że ciąg R_{2k} jest rosnący, zaś ciąg R_{2k-1} malejący, wnosimy, że

$$R_{2k} < R < R_{2k+1}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

czyli, że redukty rzędu parzystego są stale mniejsze, zaś redukty rzędu nieparzystego stale większe od wartości ułamka łańcuchowego nieskończonego. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 124. *W ułamku łańcuchowym nieskończonym*

$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$, *gdzie stale* $a_k > 0$ *oraz* $b_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *redukty rzędu parzystego tworzą ciąg rosnący, zaś redukty rzędu nieparzystego tworzą ciąg malejący. Jeżeli uważany ułamek jest zbieżny, to wartość jego jest większa od każdego reduktu rzędu parzystego i mniejsza od każdego reduktu rzędu nieparzystego.*

Ponieważ, jak dowiedliśmy, dla ułamków łańcuchowych uważanego typu składniki szeregu (124) są naprzemian dodatnie i ujemne oraz maleją bezwzględnie, więc dla zbieżności szeregu (24), a przeto i ułamka (22) (gdzie stale $a_k > 0$ oraz $b_k > 0$), potrzeba i wystarcza, iżby składniki szeregu (24) zmierzały do zera. Uwagę tę zastosujemy w szczególności dla otrzymania warunków koniecznych i wystarczających dla zbieżności ułamków łańcuchowych

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots \tag{26}$$

gdzie stale $b_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Ponieważ dla uważanych ułamków mamy stale $a_k = 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, więc dla zbieżności odpowiedniego szeregu (24) — zatem i ułamka (26) — potrzeba i wystarcza (w myśl uczynionej wyżej uwagi), iżby było $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{Q_{n-1}\, Q_n} = 0$, czyli $\lim\limits_{n=\infty} Q_{n-1}\, Q_n = \infty$.

Powiadam, że na to potrzeba i wystarcza, iżby szereg nieskończony

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \tag{27}$$

był rozbieżny.

W samej rzeczy, jeżeli szereg nieskończony (27) (o składnikach dodatnich) jest zbieżny, to zbieżnym jest, w myśl tw. 119, iloczyn nieskończony $P = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$ i mamy oczywiście

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + b_k) < P, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Z drugiej strony, powiadam, że

$$Q_n < \prod_{k=1}^{n}(1 + b_k), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{29}$$

nierówność (29) jest bowiem prawdziwą dla $n = 1$ oraz $n = 2$, gdyż $Q_1 = b_1 < 1 + b_1$, $Q_2 = b_1 b_2 + 1 < (1 + b_1)\,(1 + b_2)$ (skoro $b_k > 0$), zaś z prawdziwości naszej nierówności dla Q_{n-1} oraz Q_{n-2} $(n > 2)$ wynika, wobec $b_{n-1} > 0$, że

$$Q_n = Q_{n-1} b_n + Q_{n-2} < b_n \prod_{k=1}^{n-1}(1 + b_k) + \prod_{k=1}^{n-2}(1 + b_k) <$$

$$< b_n \prod_{k=1}^{n-1}(1 + b_k) + \prod_{k=1}^{n-1}(1 + b_k) = \prod_{k=1}^{n}(1 + b_k),$$

czyli że nierówność nasza jest prawdziwą dla Q_n. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości nierówności (29) przy wszelkiem naturalnem n.

Wobec (29) i (28) mamy więc:

$$Q_n < P, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd (z uwagi że oczywiście $Q_n > 0$):

$$Q_{n-1} Q_n < P^2, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

co dowodzi, że nie jest $\lim\limits_{n=\infty} Q_{n-1} Q_n = \infty$.

Dowiedliśmy więc, że zbieżność szeregu (27) pociąga za sobą rozbieżność ułamka łańcuchowego (26).

Załóżmy teraz, że szereg (27) jest rozbieżny: okażemy, że ułamek (26) będzie zbieżny.

Mamy, wobec $b_n > 0$:

$$Q_n = Q_{n-1} b_n + Q_{n-2} > Q_{n-2}, \quad \text{dla} \quad n > 1,$$

skąd, w jednej chwili:

$$Q_{2k} > Q_0 = 1, \quad \text{oraz} \quad Q_{2k-1} \geq Q_1 = b_1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{30}$$

Dalej mamy:

$$Q_k Q_{k+1} - Q_{k-1} Q_k = Q_k (Q_{k+1} - Q_{k-1}) = Q_k^2 b_{k+1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, sumując dla $k = 1, 2, \ldots n-1$:

$$Q_{n-1} Q_n = b_1 + Q_1^2 b_2 + Q_2^2 b_3 + \cdots + Q_{n-1}^2 b_n \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{31}$$

Oznaczając przez c liczbę dodatnią ≤ 1 oraz $\leq b_1$, będziemy mieli, wobec (30), stale

$$Q_n \geq c \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i wzór (31) daje:

$$Q_{n-1} Q_n \geq c^2 (b_1 + b_2 + \ldots + b_n), \quad n = 2, 3, \ldots)$$

co, wobec rozbieżności szeregu (27) o składnikach dodatnich, dowodzi, że $\lim\limits_{n=\infty} Q_{n-1} Q_n = \infty$. Ułamek (26) jest więc zbieżny, *c. b. d. o.*

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 125. *Na to żeby ułamek łańcuchowy nieskończony*

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots, \tag{32}$$

gdzie $b_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *był zbieżny, potrzeba i wystarcza iżby szereg nieskończony*

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \tag{33}$$

był rozbieżny.

§ **101.** Ułamki łańcuchowe typu (32), w których b_0 jest liczbą całkowitą $\left(\gtreqless 0\right)$, zaś b_n są liczby naturalne $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, nazywamy *arytmetycznymi* albo *zwykłymi*. W ułamkach takich (o ile są nieskończone) szereg (33) jest zawsze rozbieżny: z tw. 125 wynika więc, że każdy ułamek łańcuchowy arytmetyczny (nieskończony) jest zbieżny.

Wynik ten możemy otrzymać z łatwością też bezpośrednio, zważywszy że, w myśl wzoru (23), dla ułamków łańcuchowych arytmetycznych mamy

$$\left|R_n - R_m\right| = \frac{1}{Q_m Q_{m+1}} - \frac{1}{Q_{m+1} Q_{m+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-m-1}}{Q_{n-1} Q_n}, \quad (n > m)$$

co, z uwagi że, wobec $Q_{k+1} = Q_k b_{k+1} + Q_{k-1} > Q_k$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, ciąg Q_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ jest ciągiem liczb naturalnych rosnących, daje

$$\left|R_n - R_m\right| \leq \frac{1}{Q_m Q_{m+1}} \tag{34}$$

i przeto, wobec $Q_m Q_{m+1} > Q_m^2 \geq m^2$:

$$\left|R_n - R_m\right| < \frac{1}{m^2}, \quad \text{dla } n > m,$$

co dowodzi zbieżności ciągu R_n. Nierówność (34) daje nadto, w granicy dla $n = \infty$:

$$\left|R - R_m\right| \leq \frac{1}{Q_m Q_{m+1}}$$

i, tembardziej

$$\left|R - R_m\right| < \frac{1}{Q_m^2}, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{35}$$

skąd:

Twierdzenie 126. *Różnica między reduktem i wartością ułamka nieskończonego arytmetycznego jest mniejsza od odwrotności kwadratu mianownika uważanego reduktu.*

Co się tyczy licznika P_n i mianownika Q_n reduktu R_n ułamka łańcuchowego arytmetycznego, to wobec wzoru

$$P_{n-1} Q_n - Q_{n-1} P_n = \Delta_n = (-1)^n, \tag{36}$$

wnosimy, że liczby (całkowite) P_n i Q_n są względnie pierwsze (gdyż każdy dzielnik wspólny tych liczb byłby, w myśl (36), dzielnikiem liczby $(-1)^n$).

Ułamek $\frac{P_n}{Q_n}$ jest więc zawsze *nieprzywiedlny*.

Każdy ułamek nieskończony arytmetyczny ma więc oznaczoną wartość rzeczywistą (skończoną): okażemy obecnie, że wartość ta jest zawsze niewymierną. Załóżmy, dla dowodu, że dany ułamek nieskończony arytmetyczny daje wartość wymierną $w = p/q$, gdzie p i q są liczby całkowite, przytem $q > 0$. Oznaczając przez $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ redukty uważanego ułamka łańcuchowego, będziemy mieli, w myśl tw. 126, stale

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

skąd

$$\left| p Q_n - q P_n \right| < \frac{q}{Q_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{37}$$

Lecz ciąg Q_n jest, jak wiemy, ciągiem rosnącym liczb naturalnych, skąd wynika natychmiast, że dla $n > q$ jest stale $Q_n \geq n > q$, i przeto, w myśl (37):

$$| p Q_n - q P_n | < 1, \quad \text{dla} \quad n > q,$$

co daje, z uwagi, że lewa strona wypisanej nierówności jest całkowitą:

$$p Q_n - q P_n = 0, \quad \text{dla} \quad n > q,$$

skąd

$$\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n} = R_n, \quad \text{dla} \quad n > q,$$

zatem $R_{n+1} = R_n$, dla $n > q$, gdy tymczasem $| R_{n+1} - R_n | = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} > 0$.

Dowiedliśmy więc, że każdy ułamek nieskończony arytmetyczny przedstawia liczbę *niewymierną*. Okażemy obecnie, że każda liczba niewymierna daje się i to w jeden tylko sposób przedstawić w postaci ułamka nieskończonego arytmetycznego.

Załóżmy więc, że liczba (niewymierna) x_0 jest wartością ułamka nieskończonego arytmetycznego

$$x_0 = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots \tag{38}$$

i połóżmy

$$x_1 = b_1 + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots \tag{39}$$

— będzie to więc pewna liczba niewymierna (gdyż, jak dowiedliśmy wyżej, każdy ułamek nieskończony arytmetyczny przedstawia pewną liczbę niewymierną).

Oznaczmy odpowiednio przez R_n i R'_n redukty ułamków (38) i (39). Mamy oczywiście stale $R'_n > b_1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, skąd, wobec niewymierności liczby x_1, wynika że $x_1 = \lim_{n=\infty} R'_n > b_1$. Mamy, dalej, oczywiście

$$R_n = b_0 + \frac{1}{R'_{n-1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec $\lim R_n = x_0$ oraz $\lim R'_{n-1} = x_1 > 0$:

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{x_1}, \tag{40}$$

oraz

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - b_0}.$$

Wzór (40) daje, wobec $x_1 > b_1 \geq 1$:

$$b_0 < x_0 < b_0 + 1,$$

skąd, wobec całkowitości liczby b_0:

$$b_0 = \mathrm{E}x_0.$$

Mamy więc

$$b_0 = \mathrm{E}x_0 \quad \text{oraz} \quad x_1 = \frac{1}{x_0 - b_0}.$$

Rozumując dalej co do liczby x_1 tak samo jak wyżej co do liczby x_0, oraz kładąc

$$x_2 = b_2 + \frac{1|}{|b_3} + \frac{1|}{|b_4} + \ldots,$$

znajdziemy:

$$b_1 = \mathrm{E}x_1 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - b_1};$$

dalej, w ten sam sposób:

$$b_2 = \mathrm{E}x_2 \quad \text{oraz} \quad x_3 = \frac{1}{x_2 - b_2}$$

i t. d., ogólnie, kładąc

$$x_n = b_n + \frac{1|}{|b_{n+1}} + \frac{1|}{|b_{n+2}} + \ldots, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

będziemy mieli:

$$b_n = \mathrm{E}x_n \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - b_n}. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{41}$$

Wzory te wskazują, że liczby b_n oraz x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ są przez liczbę x_0 wyznaczone w zupełności: mamy bowiem, w myśl (41):

$$b_0 = \mathrm{E}x_0, \quad x_1 = \frac{1}{x_0 - b_0},$$

$$b_1 = \mathrm{E}x_1, \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - b_1},$$

$$b_2 = \mathrm{E}x_2, \quad x_3 = \frac{1}{x_2 - b_2}$$

i t. d.

Dowiedliśmy więc, że każda liczba niewymierna daje *conajwyżej jedno* rozwinięcie na ułamek nieskończony arytmetyczny.

Okażemy, teraz, że każda liczba niewymierna rozwija się na ułamek nieskończony arytmetyczny. Niech więc x_0 oznacza daną liczbę niewymierną.

Wobec definicj symbolu E oraz niewymierności liczby x_0, mamy:

$$x_0 - 1 < \mathrm{E}x_0 < x_0,$$

skąd:

$$0 < x_0 - \mathrm{E}x_0 < 1;$$

kładąc

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - \mathrm{E}x_0} \tag{42}$$

będziemy więc mieli:

$$x_1 > 1,$$

przytem w myśl wzoru (42), liczba x_1 będzie niewymierną.

Z liczbą x_1 postąpmy, jak postąpiliśmy z liczbą x_0, co da nam nową liczbę niewymierną $x_2 = \frac{1}{x_1 - \mathrm{E}x_1} > 1$.

Ogólnie, kładąc

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \mathrm{E}x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{43}$$

otrzymamy w ten sposób oznaczony w zupełności (przez liczbę x_0) ciąg nieskończony liczb niewymiernych, większych od jedności. Połóżmy:

$$b_n = \mathrm{E}x_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{44}$$

liczba b_0 będzie całkowitą, zaś liczby b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ będą naturalne (wobec $x_n > 1$, $n = 1, 2, \ldots$). Ułamek łańcuchowy nieskończony

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots \tag{45}$$

będzie więc oznaczonym w zupełności przez x_0 ułamkiem nieskończonym arytmetycznym: oznaczmy przez $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ jego redukty.

Ze wzorów (44) oraz (43) znajdujemy kolejno:

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - b_0}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - b_1}, \ldots \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - b_n},$$

skąd:

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}, \ldots \quad x_n = b_n + \frac{1}{x_{n+1}},$$

co daje w jednej chwili:

$$x_0 = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_n} + \frac{1|}{|x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{46}$$

Pierwsze n reduktów wypisanego ułamka łańcuchowego są oczywiście równe odpowiednim reduktom ułamka nieskończonego (45); oznaczmy przez $\frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}}$ ostatni redukt ułamka (46): będzie więc

$$P'_{n+1} = P_n x_{n+1} + P_{n-1}, \quad Q'_{n+1} = Q_n x_{n+1} + Q_{n-1},$$

skąd:

$$x_0 = \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}} = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}}$$

oraz

$$x_0 - R_n = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n}{(Q_n x_{n+1} + Q_{n-1})Q_n} = \frac{(-1)^n}{(Q_n x_{n+1} + Q_{n-1})Q_n} \qquad (47)$$

a że, wobec $b_{n+1} = \mathrm{E}x_{n+1}$ (oraz niewymierności liczby x_{n+1}) mamy $x_{n+1} > b_{n+1}$, więc $Q_n x_{n+1} + Q_{n-1} > Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} = Q_{n+1}$, oraz wobec (47):

$$|x_0 - R_n| < \frac{1}{Q_{n+1}Q_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (48)$$

Lecz liczby Q_n, jako mianowniki kolejnych reduktów ułamka nieskończonego arytmetycznego, wzrastają nieograniczenie: nierówność (48) dowodzi więc, że

$$\lim_{n=\infty} R_n = x_0,$$

czyli, że wartością ułamka łańcuchowego nieskończonego (45) jest liczba x_0. Dowiedliśmy więc, że każda liczba niewymierna rozwija się na ułamek nieskończony arytmetyczny.

Wzór (47), wobec

$$x_{n+1} < \mathrm{E}x_{n+1} + 1 = b_{n+1} + 1$$

oraz

$$Q_n x_{n+1} + Q_{n-1} < Q_n(b_{n+1} + 1) + Q_{n-1} = Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} + Q_n = Q_{n+1} + Q_n,$$

daje:

$$|x_0 - R_n| > \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n)Q_n}$$

a że, wobec (48) i uwagi, że $Q_{n+2} = Q_{n+1}b_{n+2} + Q_n \geq Q_{n+1} + Q_n$ (gdyż $b_{n+2} \geq 1$), mamy:

$$|x_0 - R_{n+1}| < \frac{1}{Q_{n+2}Q_{n+1}} \leq \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n)Q_{n+1}},$$

więc, wobec $Q_{n+1} > Q_n$, znajdujemy:

$$|x_0 - R_{n+1}| < |x_0 - R_n|,$$

co dowodzi, że *każdy następny redukt daje lepsze przybliżenie dla liczby x_0 niż poprzedzający*.

Zestawiając otrzymane wyniki, możemy teraz wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 127. *Każda liczba niewymierna x_0 daje jedno i tylko jedno rozwinięcie na ułamek nieskończony arytmetyczny: aby je otrzymać, należy wyznaczyć kolejno liczby x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) że* *wzorów* $x_n = \dfrac{1}{x_{n-1} - \mathrm{E}x_{n-1}}$ *i położyć* $b_n = \mathrm{E}x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$: *szukanem rozwinięciem będzie*

$$x_0 = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots$$

Naodwrót, każdy ułamek nieskończony arytmetyczny przedstawia pewną liczbę niewymierną.

Co się tyczy ułamków łańcuchowych arytmetycznych skończonych, t. j. ułamków

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots + \frac{1|}{|b_n},$$

gdzie b_0 jest liczbą całkowitą, zaś $b_1, b_2, \ldots b_n$ są liczby naturalne, to każdy taki ułamek przedstawia oczywiście liczbę wymierną. Możnaby z łatwością udowodnić, że każda liczba wymierna w daje dwa rozwinięcia na ułamek łańcuchowy arytmetyczny (skończony).

$$w = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \ldots + \frac{1|}{|b_{n-1}} + \frac{1|}{|b_n}$$

$$\text{oraz} \quad w = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \ldots + \frac{1|}{|b_{n-1}} + \frac{1|}{|b_n - 1} + \frac{1|}{|1},$$

gdzie $b_n > 1$: pierwsze z tych rozwinięć nazywamy *normalnem*. Każda więc liczba wymierna daje jedno rozwinięcie o parzystej liczbie ogniw i jedno rozwinięcie o nieparzystej liczbie ogniw $\left(\text{Np. } \frac{1}{2} = \frac{1|}{|2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1};\ \frac{4}{9} = \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|4} = \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1}\right)$.

Teorję ułamków łańcuchowych arytmetycznych, traktowaną z punktu widzenia teorj liczb (ze szczególnem uwzględnieniem rozwinięć niewymierności drugiego stopnia) znajdzie czytelnik w rozdziale X-tym mojej *Teorji liczb*. Warszawa 1914, str. 161—226).

§ 102. Rozwinięcia funkcji e^x oraz tg$x$ na ułamki nieskończone.

Połóżmy, przy naturalnem n, oraz zespolonem t:

$$\varphi_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+4)\ldots(2n+4k-4)} \frac{t^k}{k!}. \tag{49}$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny przy wszelkiem naturalnem n oraz wszelkiem zespolonem t, o czem możemy się przekonać z łatwością, stosując np. kryterjum zbieżności d'Alembert'a. Nadto dla $t \geqq -1$ mamy oczywiście

$$\varphi_n(t) > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+4)\dots(2n+4k-4)} > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0,$$

zatem

$$\varphi_n(t) > 0, \quad \text{dla} \quad t \geqq -1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{50}$$

W myśl (49) mamy, jak łatwo sprawdzić:

$$\varphi_n(t) - \varphi_{n+2}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{2n(2n+4)\dots(2n+4k)} \frac{t^k}{k!} =$$

$$= 4t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+4)\dots(2n+4k)} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{4t}{2n(2n+4)} \varphi_{n+4}(t),$$

skąd:

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n+2}(t) + \frac{t}{n(n+2)} \varphi_{n+4}(t),$$

oraz, w razie $\varphi_n(t) \neq 0$, $\varphi_{n+2}(t) \neq 0$ (co, wobec (50), zachodzi z pewnością dla $t \geqq -1$):

$$\frac{t}{n} \frac{\varphi_{n+2}(t)}{\varphi_n(t)} = \frac{t}{n + \dfrac{t}{n+2} \dfrac{\varphi_{n+4}(t)}{\varphi_{n+2}(t)}};$$

kładąc

$$\psi_n(t) = \frac{t}{n} \frac{\varphi_{n+2}(t)}{\varphi_n(t)}, \tag{51}$$

mamy więc stąd:

$$\psi_n(t) = \frac{t}{n + \psi_{n+2}(t)}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (t \geqq -1).$$

Kładąc w tym wzorze kolejno $n = 1, 3, 5, \dots 2n-1$, otrzymujemy:

$$\psi_1(t) = \frac{t}{1 + \psi_3(t)}, \quad \psi_3(t) = \frac{t}{3 + \psi_5(t)},$$

$$\psi_5(t) = \frac{t}{5 + \psi_7(t)}, \dots \quad \psi_{2n-1} = \frac{t}{2n - 1 + \psi_{2n+1}(t)},$$

skąd w jednej chwili (dla $t \geq -1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\psi_1(t) = \frac{t|}{|1} + \frac{t|}{|3} + \frac{t|}{|5} + \ldots + \frac{t|}{|2n-3} + \frac{t|}{|2n-1+\psi_{2n+1}(t)}. \tag{52}$$

Oznaczmy przez $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ redukty ułamka łańcuchowego nieskończonego

$$\frac{t|}{|1} + \frac{t|}{|3} + \frac{t|}{|5} + \frac{t|}{|7} + \ldots \tag{53}$$

W myśl wzorów (2), będziemy tu mieli:

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = 1,\ Q_k = Q_{k-1}(2k-1) + Q_{k-2}t \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{54}$$

Dla $t \geq -1$ znajdujemy, w myśl (54), przez łatwą indukcję:

$$Q_k > Q_{k-1}, \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{55}$$

skąd, wobec (54):

$$Q_k \geq Q_{k-1}(2k-1) - Q_{k-2} \geq Q_{k-1}(2k-2),$$

dla $k = 3, 4, \ldots$, co, jak łatwo widzieć, jest prawdziwem i dla $k = 2$. Jest więc w razie $t \geq -1$:

$$Q_k \geq 2(k-1)Q_{k-1}, \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots,$$

skąd, w jednej chwili, wobec $Q_1 = 1$:

$$Q_k > 2^{k-1}(k-1)!, \quad \text{dla} \quad t \geq -1, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{56}$$

Z drugiej strony, wobec (52) oraz w myśl tw. 123, możemy napisać:

$$\psi_1(t) = \frac{P_{n-1}(2n-1+\psi_{2n+1}(t)) + P_{n-2}t}{Q_{n-1}(2n-1+\psi_{2n+1}(t)) + Q_{n-2}t} \tag{57}$$

(gdyż pierwsze $n-1$ ogniwa ułamków łańcuchowych (52) i (53) są odpowiednio równe).

Z uwagi, że wobec (9):

$$P_{n-2}Q_{n-1} - Q_{n-2}P_{n-1} = (-1)^{n-1}t^{n-1},$$

wzór (57) daje w jednej chwili:

$$\psi_1(t) - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}t^n}{[Q_{n-1}(2n-1+\psi_{2n+1}(t)) + Q_{n-2}t]\,Q_{n-1}}. \tag{58}$$

Wobec (55) mamy, dla $t \geq -1$:

$$Q_{n-2}t \geq -Q_{n-2} > -Q_{n-1},$$

skąd

$$Q_{n-1}(2n-1+\psi_{2n+1}(t)) + Q_{n-2}t > Q_{n-1}[2n-2+\psi_{2n+1}(t)]. \tag{59}$$

Wobec (49) mamy oczywiście (przy wszelkiem zespolonem t) dla $n > \frac{1}{2} \mid t \mid$:

$$|\varphi_n(t) - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k}{(2n)^k} = \frac{|t|}{2n - |t|},$$

skąd, w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(t) = 1,$$

i przeto, wobec (51):

$$\lim_{n=\infty} \psi_n(t) = 0. \tag{60}$$

Ponieważ wreszcie, wobec $\lim\limits_{n=\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} = 0$ (co zachodzi przy wszelkiem zespolonem t, w myśl wzoru (100) z § 76), oraz wobec (56) mamy

$$\lim_{n=\infty} \frac{t^n}{Q_{n-1}} = 0,$$

więc wzór (58), wobec (59) i (60), daje w jednej chwili, dla $t \geq -1$:

$$\lim_{n=\infty} \left(\psi_1(t) - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) = 0,$$

czyli

$$\psi_1(t) = \lim_{n=\infty} R_{n-1},$$

co dowodzi, że

$$\psi_1(t) = \frac{t\,|}{|\,1} + \frac{t\,|}{|\,3} + \frac{t\,|}{|\,5} + \ldots, \quad \text{dla} \quad t \geq -1. \tag{61}$$

Obliczymy teraz $\psi_1(t)$. Mamy oczywiście

$$2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots . (4k-2) \,.\, k! = (2k)!,$$
$$6 \,.\, 10 \,.\, 14 \ldots (4k+2) \,.\, k! = (2k+1)!,$$

zatem, wobec (49):

$$\varphi_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(2k)!}, \quad \varphi_3(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(2k+1)!},$$

przeto, w myśl (51):

$$\psi_1(t) = t \frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(2k+1)!}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(2k)!}} \tag{62}$$

W Rozdziale XVI-tym (§ 133) udowodnimy, że przy wszelkiem rzeczywistem x zachodzi rozwinięcie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

skąd w jednej chwili znajdujemy (dla $x \neq 0$):

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!};$$

wzór (62) daje więc natychmiast, dla $x \neq 0$:

$$\frac{\psi_1(x^2)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \tag{63}$$

Z drugiej strony, kładąc $t = x^2$, będziemy przy rzeczywistem x mieli $t \geqq 0$, skąd w jednej chwili, w myśl (61), dla $x \neq 0$:

$$\frac{\psi_1(x^2)}{x} = \frac{x|}{|1} + \frac{x^2|}{|3} + \frac{x^2|}{|5} + \frac{x^2|}{|7} + \cdots$$

Wobec (63) znajdujemy więc dla $x \neq 0$ rozwinięcie:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{x|}{|1} + \frac{x^2|}{|3} + \frac{x^2|}{|5} + \frac{x^2|}{|7} + \cdots, \tag{64}$$

które, jak łatwo widzieć, pozostaje prawdziwem i dla $x = 0$. Udowodniliśmy więc wzór (64) przy wszelkiem rzeczywistem x.

W szczególności, dla $x = 1$, wzór (64) daje ciekawe rozwinięcie liczby $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$ na ułamek nieskończony arytmetyczny:

$$\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|7} + \cdots,$$

skąd, w myśl tw. 127, wynika w jednej chwili niewymierność liczby e^2, a więc, tembardziej, niewymierność liczby e.

Wzór (62) daje, dla $t = -x^2$, gdzie $x \neq 0$:

$$-\frac{\psi_1(-x^2)}{x} = x \frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k)!}},$$

czyli

$$-\frac{\psi_1(-x^2)}{x}=\frac{\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots}.$$

Prawa strona tego wzoru przedstawia funkcję, oznaczaną symbolem $\operatorname{tg} x$: mamy więc

$$-\frac{\psi_1(-x^2)}{x}=\operatorname{tg} x. \tag{65}$$

Z drugiej strony, przy rzeczywistem x, spełniającem warunki $0<|x|\leq 1$, będziemy mieli $-x^2\geq -1$, skąd w jednej chwili, w myśl (61):

$$-\frac{\psi_1(-x^2)}{x}=\frac{x|}{|1}-\frac{x^2|}{|3}-\frac{x^2|}{|5}-\frac{x^2|}{|7}-\dots, \quad \text{dla} \quad 0<|x|\leq 1,$$

czyli, wobec (65):

$$\operatorname{tg} x=\frac{x|}{|1}-\frac{x^2|}{|3}-\frac{x^2|}{|5}-\frac{x^2|}{|7}-\dots, \tag{66}$$

dla $0<|x|\leq 1$, co, jak to wynika natychmiast z definicji funkcji $\operatorname{tg} x$, pozostaje prawdziwem i dla $x=0$. Udowodniliśmy więc, że wzór (66) zachodzi conajmniej dla wszystkich rzeczywistych x, bezwzględnie niewiększych od jedności.

Rozwinięcia (64) i (66) znalezione zostały przez Lamberta.

§ **103.** Niech a_n $(n=1,2,3,\dots)$ oznacza dany ciąg liczb całkowitych, różnych od zera, zaś b_n $(n=1,2,3,\dots)$ — dany ciąg liczb naturalnych i załóżmy, że

$$|a_n|<b_n-1, \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\dots \tag{67}$$

Powiadam, że ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\dots \tag{68}$$

będzie zbieżny i będzie miał wartość bezwzględnie mniejszą od jedności.

Dla dowodu okażemy przedewszystkiem, że przy warunku (67) każdy ułamek

$$\frac{a_n|}{|b_n}+\frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}}+\dots+\frac{a_{n+k}|}{|b_{n+k}} \quad \begin{pmatrix} n=1,2,3,\dots \\ k=0,1,2,\dots \end{pmatrix} \tag{69}$$

ma oznaczoną wartość, bezwzględnie mniejszą od jedności.

Jest to, wobec (67), prawdziwem oczywiście przy wszelkiem naturalnem n dla $k = 0$, czyli dla ułamków (69) o jednem ogniwie. Gdyby twierdzenie nasze było prawdziwem dla ułamków (69) o p ogniwach (przy danem naturalnem p), to, kładąc (przy dowolnem danem naturalnem n)

$$\frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}|}{|b_{n+p}} = \alpha, \tag{70}$$

mielibyśmy nierówność

$$|\alpha| < 1,$$

skąd

$$b_n - 1 < b_n + \alpha$$

i przeto, w myśl (67):

$$|a_n| < b_n + \alpha;$$

ułamek

$$\frac{a_n}{b_n + \alpha} \tag{71}$$

miałby więc oznaczoną wartość, bezwzględnie mniejszą od jedności. Lecz, wobec (70), ułamek (71) jest oczywiście wartością ułamka łańcuchowego

$$\frac{a_n|}{|b_n} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}|}{|b_{n+p}};$$

twierdzenie nasze byłoby więc prawdziwem dla ułamków (69) o $p+1$ ogniwach.

Stąd, przez indukcję, wnosimy, że wszystkie ułamki (69) posiadają oznaczoną wartość, bezwzględnie mniejszą od jedności.

Liczby a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są, jak zakładamy, całkowite, różne od zera, zatem bezwzględnie niemniejsze od jedności: wobec (67) i wobec całkowitości liczb b_n wnosimy więc natychmiast, że

$$b_n \geq 3, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{72}$$

Oznaczmy przez $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ redukty ułamka (68). Powiadam, że

$$Q_n > Q_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{73}$$

Jest to prawdą dla $n = 1$, gdyż $Q_0 = 1$, zaś $Q_1 = b_1 \geq 3$ wobec (72). Załóżmy, że mamy (przy pewnem naturalnem p, większem od 1):

$$Q_n > Q_{n-1}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots p-1, \tag{74}$$

czyli że nierówność (73) jest prawdziwą dla wszystkich naturalnych n, mniejszych od p. Z założenia (74) wynika, wobec $Q_0 = 1$, że

$$Q_{p-2} > 0. \tag{75}$$

W myśl wzorów (2) mamy, wobec (67) i (75):

$$Q_p = Q_{p-1} b_p + Q_{p-2} a_p \geq Q_{p-1} b_p - Q_{p-2}(b_p - 1),$$

skąd:

$$Q_p - Q_{p-1} \geq (Q_{p-1} - Q_{p-2})\,(b_p - 1), \tag{76}$$

zatem, wobec (72), oraz z uwagi że wobec założenia (74) jest $Q_{p-1} - Q_{p-2} > 0$:

$$Q_p - Q_{p-1} > 0,$$

co dowodzi prawdziwości nierówności (73) dla $n = p$.

Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości nierówności (73) przy wszelkiem naturalnem n. Wynika stąd natychmiast (wobec $Q_0 = 1$), że mamy

$$Q_{n-1} > 0, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{77}$$

oraz że nierówność (76) zachodzi przy wszelkiem naturalnem $p > 1$. Znajdujemy stąd w jednej chwili (z uwagi, że $Q_1 - Q_0 = b_1 - 1$):

$$Q_n - Q_{n-1} \geq (b_1 - 1)(b_2 - 1)\ldots(b_n - 1), \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{78}$$

skąd, wobec (77) oraz (67):

$$Q_n > |\, a_1 a_2 \ldots a_n \,|, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{79}$$

z drugiej strony, wobec (77) i (72), nierówność (78) daje:

$$Q_n > 2^n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{79^a}$$

Wobec (79) i (79ᵃ) mamy więc (dla $n > 1$):

$$\left| \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \right| < \frac{1}{2^{n-1}},$$

i przeto szereg nieskończony

$$\frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} - \ldots,$$

a więc, w myśl wzoru (11), i ułamek nieskończony (68), jest zbieżny. Ponieważ zaś wszystkie liczby (69), a więc i wszystkie redukty ułamka (68) są bezwzględnie mniejsze od jedności, więc wartość x_1 ułamka (68) musi być bezwzględnie ≤ 1.

Oznaczmy:

$$R'_n = \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}; \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

wobec dowiedzionego wyżej o wartości liczb (69), będzie

$$|R'_n| < 1 \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

i przeto $R'_n > -1$, skąd, wobec (67):

$$b_1 + R'_n > b_1 - 1 \geq |a_1| + 1, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

co, z uwagi, że

$$R_n = \frac{a_1}{b_1 + R'_n},$$

daje

$$|R_n| \leq \frac{|a_1|}{|a_1| + 1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$:

$$|x_1| = |\lim_{n=\infty} R_n| \leq \frac{|a_1|}{|a_1| + 1} < 1,$$

czyli

$$|x_1| < 1.$$

Udowodnimy teraz, że liczba x_1 jest niewymierną.

W myśl tego, cośmy dowiedli o wartości ułamka (68), wynika natychmiast, że jeżeli liczby całkowite, różne od zera, a_n i b_n spełniają warunki (67), to każdy z ułamków nieskończonych

$$x_n = \frac{a_n|}{|b_n} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \ldots$$

ma oznaczoną wartość, bezwzględnie mniejszą od jedności, przyczem, ze związku między odpowiedniemi reduktami wnosimy z łatwością, że

$$x_n = \frac{a_n}{b_n + x_{n+1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{80}$$

skąd, wobec $a_n \neq 0$, wnosimy że

$$x_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{81}$$

Załóżmy, że wartością ułamka (68) jest liczba wymierna $x_1 = \frac{p}{q}$ (gdzie $q > 0$). Połóżmy:

$$r_1 = p x_2, \quad r_n = r_{n-1} x_{n+1} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{82}$$

Wobec $|x_n| < 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będziemy mieli:

$$|r_n| < |r_{n-1}|, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{83}$$

Z drugiej strony, wobec (82) oraz (81) wnosimy przez łatwą indukcję, że $r_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3,)$, oraz otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{p}{q}, \quad x_2 = \frac{r_1}{p}, \quad x_{n+1} = \frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec (80):

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{r_1}{p}}, \quad \frac{r_1}{p} = \frac{a_2}{b_2 + \frac{r_2}{r_1}}, \quad \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{a_n}{b_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}} \quad (n = 3, 4, \ldots),$$

co daje w jednej chwili:

$$r_1 = a_1 q - b_1 p, \quad r_2 = a_2 p - b_2 r_1, \quad r_n = a_n r_{n-2} - b_n r_{n-1}, \quad (n = 3, 4, \ldots);$$

wzory te dowodzą (wobec całkowitości liczb a_n, b_n, p i q), że liczby r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są wszystkie całkowite. Nierówność (83) jest więc niemożliwą (gdyż ciąg liczb całkowitych, bezwzględnie malejących, nie może być nieskończonym). Założenie, że wartością ułamka (68) jest liczba wymierna, doprowadza więc do sprzeczności. Udowodniliśmy więc, że x_1 jest liczbą niewymierną.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 128. *Ułamek nieskończony*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots, \tag{84}$$

gdzie a_n i b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby całkowite, różne od zera, spełniające nierówności

$$|a_n| < b_n - 1, \quad \textit{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{85}$$

jest zawsze zbieżny, a wartością jego jest liczba niewymierna.

Zauważymy, że twierdzenie nasze pozostaje prawdziwem, jeżeli a_n i b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby całkowite, różne od zera, spełniające warunek (85) dla $n > \mu$.

W samej rzeczy, niech m oznacza wskaźnik $> \mu$: ułamek

$$\frac{a_m|}{|b_m} + \frac{a_{m+1}|}{|b_{m+1}} + \frac{a_{m+2}|}{|b_{m+2}} + \ldots \tag{86}$$

będzie więc (w myśl tw. 128) zbieżny, a wartością jego będzie liczba niewymierna α. Oznaczmy odpowiednio przez R_n oraz R'_n redukty ułamków (84) oraz (86): będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$R_{n+m-1} = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1} + R'_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{87}$$

o ile wszystkie wskazane dzielenia będą wykonalne.

Z uwagi, że $\lim\limits_{n=\infty} R'_n = \alpha$, gdzie α jest liczbą niewymierną, oraz że liczby $a_1, b_1, \ldots a_{m-1}$ są całkowite, wnosimy z łatwością, że dla dostatecznie wielkich n wszystkie dzielenia we wzorze (87) muszą być wykonalne i znajdujemy w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} R_{n+m-1} = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1} + \alpha},$$

skąd (wobec niewymierności liczby α) wnosimy, że ułamek (84) jest zbieżny, dając wartość niewymierną, *c. b. d. o.*

Udowodnione twierdzenie zastosujemy obecnie do dowodu że każda wymierna potęga liczby e jest niewymierna.

Niech x oznacza liczbę wymierną $\frac{p}{q}$ (gdzie p jest całkowite, q — naturalne). W myśl (64) mamy:

$$\frac{e^{\frac{2p}{q}} - 1}{e^{\frac{2p}{q}} + 1} = \frac{\frac{p}{q}|}{|1} + \frac{\frac{p^2}{q^2}|}{|3} + \frac{\frac{p^2}{q^2}|}{|5} + \frac{\frac{p^2}{q^2}|}{|7} + \cdots \tag{88}$$

Mamy oczywiście, dla $n = 2, 3, 4, \ldots$:

$$\frac{\frac{p}{q}|}{|1} + \frac{\frac{p^2}{q^2}|}{|3} + \frac{\frac{p^2}{q^2}|}{|5} + \ldots + \frac{\frac{p^2}{q^2}|}{|2n-1} = \frac{p|}{|q} + \frac{p^2|}{|3q} + \frac{p^2|}{|5q} + \ldots + \frac{p^2|}{|(2n-1)q};$$

wzór (88) daje więc w jednej chwili rozwinięcie:

$$\frac{e^{\frac{2p}{q}} - 1}{e^{\frac{2p}{q}} + 1} = \frac{p|}{|q} + \frac{p^2|}{|3q} + \frac{p^2|}{|5q} + \frac{p^2|}{|7q} + \cdots \tag{89}$$

Przy wszelkich danych całkowitem p oraz naturalnem q mamy oczywiście dla $n > \mu$:

$$p^2 < (2n-1)q - 1.$$

i przeto dostatecznie dalekie ogniwa ułamka (89) spełniają warunki twierdzenia 128: wnosimy stąd, że wartością ułamka (89) jest liczba niewymierna.

Wynika stąd natychmiast, że liczba $e^{\frac{2p}{q}}$ i, tembardziej, liczba $e^{\frac{p}{q}}$ jest niewymierna. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 129. *Każda potęga liczby e o wymiernym wykładniku jest niewymierna.*

Niech teraz w oznacza liczbę wymierną, bezwzględnie nie większą od jedności: połóżmy $w = p/q$, gdzie p jest całkowite, q — naturalne. W myśl wzoru (66) będziemy mieli:

$$\operatorname{tg}\frac{p}{q} = \frac{\frac{p}{q}\big|}{|1} - \frac{\frac{p^2}{q^2}\big|}{|3} - \frac{\frac{p^2}{q^2}\big|}{|5} - \frac{\frac{p^2}{q^2}\big|}{|7} - \dots,$$

skąd, jak wyżej, w jednej chwili:

$$\operatorname{tg}\frac{p}{q} = \frac{p|}{|q} - \frac{p^2|}{|3q} - \frac{p^2|}{|5q} - \frac{p^2|}{|7q} - \dots \tag{90}$$

Przy wszelkich danych całkowitem p oraz naturalnem q mamy, dla $n > \mu$:

$$|-p^2| < (2n-1)q - 1,$$

i przeto dostatecznie dalekie ogniwa ułamka (90) spełniają warunki twierdzenia 128: wnosimy stąd, że wartością ułamka (90) jest liczba niewymierna. Dowiedliśmy więc, że *jeżeli w oznacza liczbę wymierną, bezwzględnie nie większą od jedności, to* $\operatorname{tg} w$ *jest liczbą niewymierną.*

W Rozdziale XVI-tym udowodnimy, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$: jako natychmiastowy wniosek stąd oraz dowiedzionego przed chwilą twierdzenia, wynika, że liczba π nie może być wymierną (gdyż wówczas $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ musiałoby być liczbą niewymierną, wobec $0 < \frac{\pi}{4} < 1$). Mamy więc

Twierdzenie 130. *Liczba π jest niewymierna.*

§ **104.** Zajmiemy się teraz rozwinięciem liczby e na ułamek łańcuchowy arytmetyczny.

Wzór (89) daje, dla $p = 1$, $q = 2$:

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \dots \tag{91}$$

Połóżmy:

$$x = 5 + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \ldots + \frac{1|}{|4k+2} + \ldots; \tag{92}$$

będziemy mieli, wobec (91), jak łatwo widzieć:

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+x}},$$

skąd w jednej chwili znajdujemy:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{x}},$$

zatem, wobec (92):

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|5} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \ldots + \frac{1|}{|4k+2} + \ldots \tag{93}$$

Dla $y > 1$, $l > 1$ mamy, jak łatwo sprawdzić:

$$\cfrac{2}{2l - 1 + \cfrac{1}{y}} = \frac{1|}{|l-1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|y-1},$$

co daje z łatwością, przy wszelkiem naturalnem $k > 1$:

$$\frac{2|}{|5} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \ldots + \frac{1|}{|4k+2} =$$

$$= \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|9} + \frac{1|}{|14} + \ldots + \frac{1|}{|4k+2} = \ldots$$

$$= \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1|}{|2k-2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|4k+1},$$

skąd, wobec

$$\frac{2|}{|4k+1} = \frac{1|}{|2k} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1},$$

znajdujemy w jednej chwili (dla $k = 2, 3, 4, \ldots$):

$$\left.\begin{aligned} &2 + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|5} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \ldots + \frac{1|}{|4k+2} = \\ &= 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots + \\ &+ \frac{1|}{|2k} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Oznaczmy przez R_n redukty ułamka (93), zaś przez R'_n redukty ułamka nieskończonego arytmetycznego (a więc, w myśl tw. 127, zbieżnego):

$$a = 2 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \dots,$$

gdzie

$$b_{3n-2} = b_{3n} = 1, \quad b_{3n-1} = 2n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

wobec (94) będziemy mieli oczywiście

$$R_{k+1} = R'_{3k+1}, \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

skąd

$$e = \lim_{k=\infty} R_{k+1} = \lim_{k=\infty} R'_{3k+1} = a.$$

Udowodniliśmy więc, że *liczba e rozwija się na ułamek nieskończony arytmetyczny*

$$e = 2 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \dots,$$

gdzie

$$b_{3n-2} = b_{3n} = 1, \quad b_{3n-1} = 2n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Jest więc:

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|1} + \dots$$

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że jeżeli ułamek łańcuchowy $R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$ ma oznaczoną wartość, zaś $c_1, c_2, \dots c_n$ są dowolne dane liczby, różne od zera, to

$$R_n = b_0 + \frac{c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \dots + \frac{c_{n-2} c_{n-1} a_{n-1}|}{|c_{n-1} b_{n-1}} + \frac{c_{n-1} c_n a_n|}{|c_n b_n}.$$

2) Udowodnić wzór (Stern'a):

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_n|}{|q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{1|}{|1} - \frac{p_1 - q_1|}{|p_1} - \frac{(p_2 - q_2) p_1 q_1|}{|p_1 p_2 - q_1 q_2} - \frac{(p_1 - q_1)(p_3 - q_3) p_2 q_2|}{|p_2 p_3 - q_2 q_3} - \dots - \frac{(p_{n-2} - q_{n-2})(p_n - q_n) p_{n-1} q_{n-1}|}{|p_{n-1} p_n - q_{n-1} q_n}$$

— o ile obie strony mają oznaczoną wartość.

3) Udowodnić, że na to, iżby ułamek łańcuchowy zbieżny był zbieżnym doskonale, potrzeba i wystarcza, iżby żaden jego redukt nie równał się wartości ułamka.

4) Dowieść, że każda liczba rzeczywista rozwija się, i to w jeden tylko sposób, na ułamek łańcuchowy nieskończony.

$$b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \frac{1|}{|b_3} - \ldots,$$

gdzie b_0 jest liczbą całkowitą, zaś b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby naturalne, większe od jedności. Okazać, że naodwrót, każdy ułamek łańcuchowy nieskończony uważanego typu jest zbieżny i że wartość jego jest mniejszą od każdego reduktu.

ROZDZIAŁ XII.

Wiadomości podstawowe z teorji funkcji zmiennej zespolonej.

§ 105. Niech Z oznacza jakikolwiek dany zbiór liczb zespolonych, ζ — daną liczbę zespoloną, należącą do zbioru Z lub nie. Mówimy, że ζ jest *punktem skupienia* zbioru Z, jeżeli przy wszelkiem dodatniem ε istnieje nieskończenie wiele różnych liczb zespolonych z, należących do zbioru Z i spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon. \tag{1}$$

Jak łatwo widzieć, *na to żeby punkt ζ był punktem skupienia zbioru Z, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego dodatniego ε istniał conajmniej jeden różny od ζ element z zbioru Z, spełniający nierówność* (1). Że warunek ten jest konieczny, jest oczywistem; okażemy więc tylko, że jest on wystarczającym. Załóżmy więc, że warunek nasz jest spełniony i że punkt ζ nie jest punktem skupienia zbioru Z. Wówczas przy pewnem dodatniem ε_0 istnieje conajwyżej skończona liczba różnych elementów z zbioru Z spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon_0;$$

załóżmy, że wśród nich jest k różnych od ζ i niech to będą elementy $z_1, z_2, \ldots z_k$. Oznaczmy przez ε liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb (dodatnich) $|z_1 - \zeta|$, $|z_2 - \zeta|, \ldots |z_k - \zeta|$: dla każdego elementu z zbioru Z różnego od ζ będziemy oczywiście mieli

$$|z - \zeta| \geqq \varepsilon,$$

co będzie prawdziwem i w razie $k = 0$, dla $\varepsilon = \varepsilon_0$.

W każdym więc razie przy pewnem dodatniem ε żaden z elementów z zbioru Z, różnych od ζ, nie spełnia nierówności (1), *zamkniętych są zbiorami zamkniętymi.* Twierdzenie to daje się natychmiast uogólnić na dowolną, skończoną liczbę zbiorów zamkniętych.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych z, spełniających przy danem nieujemnem R nierówność

$$|z| \leqq R$$

jest oczywiście zamknięty. (Jeżeli bowiem ζ jest punktem skupienia naszego zbioru, to nie może być $|\zeta| > R$, gdyż wówczas, dla $\varepsilon = |\zeta| - R$, żaden punkt naszego zbioru nie spełniałby nierówności (1), wbrew definicji punktu skupienia). Wnosimy stąd, że jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to zbiór wszystkich tych punktów zbioru Z, które (przy danem $R \geqq 0$) spełniają nierówność

$$|z| \leqq R$$

(o ile takowe istnieją) jest zamknięty (jako iloczyn dwóch zbiorów zamkniętych).

Zbiór wszystkich punktów skupienia danego zbioru Z nazywamy *pochodną* tego zbioru i oznaczamy przez Z'. Łatwo widzieć, że *pochodna każdego zbioru* (o ile nie jest zbiorem próżnym) *jest zbiorem zamkniętym.* Niech bowiem ζ' oznacza punkt skupienia zbioru Z', zaś ε dowolną daną liczbę dodatnią. Skoro ζ' jest punktem skupienia zbioru Z', więc istnieje w zbiorze Z' element ζ, spełniający nierówność

$$|\zeta - \zeta'| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Z drugiej strony, skoro ζ należy do Z', więc jest punktem skupienia zbioru Z: istnieje więc w tym zbiorze nieskończenie wiele różnych liczb zespolonych z, spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Nierówności (2) i (3) dowodzą że mamy

$$|z - \zeta'| < \varepsilon$$

dla nieskończenie wielu różnych liczb z zbioru Z, co dowodzi, że ζ' jest punktem skupienia zbioru Z, zatem elementem zbioru Z'. Zbiór Z' zawiera więc wszystkie swe punkty skupienia, czyli jest zbiorem zamkniętym, *c. b. d. o.*

Załóżmy teraz, że X jest zbiorem liczb rzeczywistych, ograniczonym zgóry: kres jego górny będzie więc liczbą skończoną. Powiadam, że jeżeli kres górny zbioru X nie jest jego elementem, to jest on jego punktem skupienia. W samej rzeczy, w myśl tw. 67, kres górny L zbioru X jest najmniejszą z liczb rzeczywistych niemniejszych od żadnej z liczb zbioru X: dla każdego danego dodatniego ε będzie więc istniała conajmniej jedna liczba x zbioru X, spełniająca nierówność

$$x > L - \varepsilon$$

(gdyż w razie przeciwnym mielibyśmy przy pewnem dodatniem ε dla każdej liczby x zbioru X nierówność $x \leqq L - \varepsilon$ i liczba $L - \varepsilon < L$ byłaby niemniejszą od żadnej z liczb zbioru X, wbrew definicji kresu górnego), a że, z drugiej strony, mamy oczywiście dla każdej liczby x zbioru X nierówność

$$x \leqq L$$

(gdyż L jest kresem górnym zbioru X), więc dla każdego dodatniego ε istnieje conajmniej jedna liczba x zbioru X, spełniająca nierówność

$$|x - L| < \varepsilon,$$

przyczem, jeżeli L nie jest elementem zbioru X, to będzie $x \neq L$. Dowodzi to, że L jest wówczas punktem skupienia zbioru X, *c. b. d. o.*

Mamy więc

Twierdzenie 131. *Jeżeli kres górny zbioru liczb rzeczywistych, ograniczonego zgóry, nie jest jego elementem, to jest on jego punktem skupienia.* Podobnież udowodnilibyśmy

Twierdzenie 131^a. *Jeżeli kres dolny zbioru liczb rzeczywistych, ograniczonego zdołu, nie jest jego elementem, to jest on jego punktem skupienia.* Wynika stąd natychmiast

Twierdzenie 132. *Zbiór zamknięty liczb rzeczywistych, ograniczony zgóry, zawiera swój kres górny, zaś ograniczony zdołu zawiera swój kres dolny.*

§ **106.** Niech Z oznacza dany zbiór nieskończony i ograniczony liczb zespolonych. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich części rzeczywistych liczb zbioru Z, zaś przez Y — zbiór wszystkich współczynników przy i liczb zbioru Z: zbiory X i Y będą więc ograniczone; niech a i b będą kresy dolny i górny zbioru X, zaś c i d — kresy dolny i górny zbioru Y: a, b, c i d będą więc liczby rzeczywiste skończone.

Oznaczmy, przy danych naturalnych n, k oraz l, przez $Z_{k,l}^{(n)}$ zbiór wszystkich tych liczb $z = x + yi$ zbioru Z, dla których mamy:

$$a + \frac{(k-1)(b-a)}{n} \leq x \leq a + \frac{k(b-a)}{n},$$

$$c + \frac{(l-1)(d-c)}{n} \leq y \leq c + \frac{l(d-c)}{n}.$$

Mamy oczywiście

$$\left.\begin{array}{l} Z = Z_{1,1}^{(n)} + Z_{1,2}^{(n)} + Z_{1,3}^{(n)} + \ldots + Z_{1,n}^{(n)} \\ \quad + Z_{2,1}^{(n)} + Z_{2,2}^{(n)} + Z_{2,3}^{(n)} + \ldots + Z_{2,n}^{(n)} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + Z_{n,1}^{(n)} + Z_{n,2}^{(n)} + Z_{n,3}^{(n)} + \ldots + Z_{n,n}^{(n)}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Skoro zbiór Z jest nieskończony, więc jeden conajmniej ze składników prawej strony wzoru (4) musi być zbiorem nieskończonym: niech $Z_{k_n, l_n}^{(n)}$ oznacza pierwszy ze składników sumy (4), który jest zbiorem nieskończonym: wskaźniki k_n i l_n będą więc wyznaczonemi w zupełności przez n liczbami naturalnemi $\leq n$.

Połóżmy:

$$x_n = a + \frac{k_n(b-a)}{n}, \quad y_n = c + \frac{l_n(d-c)}{n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots); \qquad (5)$$

będzie oczywiście

$$a \leq x_n \leq b \quad \text{oraz} \quad c \leq y_n \leq d \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i przeto ciągi x_n oraz y_n będą ograniczone; połóżmy

$$z_n = x_n + y_n i, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \qquad (6)$$

ciąg nieskończony z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie więc ograniczony.

W myśl tw. 80 istnieje więc (oznaczony w zupełności przez ciąg z_n) ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, taki iż ciąg z_{n_p} $(p = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny. Połóżmy:

$$\zeta = \lim_{p=\infty} z_{n_p}; \qquad (7)$$

powiadam, że liczba ζ jest punktem skupienia zbioru Z.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Z uwagi, że $\lim_{n=\infty} n_p = \infty$, oraz wobec (7), istnieje wskaźnik p taki, iż

$$\frac{b-a}{n_p} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{d-c}{n_p} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{oraz} \quad |z_{n_p} - \zeta| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (8)$$

Z definicji wskaźników k_n oraz l_n wynika, że zbiór $U_p = Z_{k_{n_p}, l_{n_p}}^{(n_p)}$ zawiera nieskończenie wiele elementów zbioru Z; powiadam, że każdy element z bioru U_p spełnia nierówność

$$| z - \zeta | < \varepsilon. \tag{9}$$

W samej rzeczy, z definicji zbiorów $Z_{k,l}^{(n)}$ wynika, że dla każdego punktu $z = x + yi$ zbioru U_p mamy:

$$a + \frac{(k_{n_p} - 1)(b-a)}{n_p} \leq x \leq a + \frac{k_{n_p}(b-a)}{n_p},$$

$$c + \frac{(l_{n_p} - 1)(d-c)}{n_p} \leq y \leq c + \frac{l_{n_p}(d-c)}{n_p},$$

co, wobec (5) (dla $n = n_p$) możemy przepisać w postaci:

$$x_{n_p} - \frac{b-a}{n_p} \leq x \leq x_{n_p}, \quad y_{n_p} - \frac{d-c}{n_p} \leq y \leq y_{n_p},$$

skąd, wobec (8):

$$| x - x_{n_p} | < \frac{\varepsilon}{3}, \quad | y - y_{n_p} | < \frac{\varepsilon}{3}$$

i przeto, wobec (6):

$$| z - z_{n_p} | = | x - x_{n_p} + (y - y_{n_p})i | < \frac{2\varepsilon}{3},$$

co daje, wobec (8), w jednej chwili nierówność (9).

Dowiedliśmy więc, że każdy element zbioru nieskończonego U_p spełnia nierówność (9): ponieważ zaś zbiór U_p jest częścią zbioru Z, więc nierówność (9) zachodzi dla nieskończenie wielu elementów zbioru Z. Udowodniliśmy więc, że przy wszelkiem danem dodatniem ε istnieje nieskończenie wiele różnych liczb z zbioru Z, spełniających nierówność (9), co dowodzi, że ζ jest punktem skupienia zbioru Z. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 133 (Bolzano-Weierstrassa): *Każdy zbiór nieskończony ograniczony liczb zespolonych posiada conajmniej jeden punkt skupienia.*

Z dowodu naszego wyniku, że punkt ζ jest wyznaczony w zupełności przez zbiór Z: możemy więc powiedzieć, że ***można raz na zawsze ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi nieskończonemu ograniczonemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony punkt skupienia tego zbioru.***

W szczególności, jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to ζ, jako punkt skupienia zbioru Z, jest jego elementem; zatem: można ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi nieskończonemu ograniczonemu i zamkniętemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony element tego zbioru.

Można też oczywiście z łatwością ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi skończonemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony element tego zbioru (np. ta z pośród liczb uważanego zbioru, mających najmniejszą część rzeczywistą, której współczynnik przy i jest najmniejszy).

Z drugiej strony można z łatwością każdemu (nie próżnemu) zbiorowi Z liczb zespolonych podporządkować pewną część nie próżną ograniczoną $\bar{Z}$ tego zbioru: jeżeli bowiem zbiór liczb zespolonych Z nie jest próżny, to przy pewnem dostatecznie wielkiem naturalnem n zbiór Z_n wszystkich tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność $|z| \leqq n$, jest niepróżny: oznaczając przez n_0 najmniejszą wartość naturalną przy której to zachodzi i kładąc $\bar{Z} = Z_{n_0}$, otrzymamy część nie próżną i ograniczoną zbioru Z, wyznaczoną przez ten ostatni w zupełności. Nadto, jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to zbiór $\bar{Z}$ będzie, jak wiemy, również zamknięty. Każdemu zbiorowi zamkniętemu odpowiada więc oznaczona część (nie próżna) ograniczona i zamknięta tego zbioru. Ostatecznie więc, wobec otrzymanych wyżej wyników, możemy powiedzieć:

Można raz na zawsze ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi zamkniętemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony element tego zbioru.

Oznaczmy ogólnie przez $p(Z)$ element, odpowiadający według tego prawa zbiorowi zamkniętemu Z i niech M będzie jakakolwiek mnogość zbiorów zamkniętych (liczb zespolonych), nie mających elementów wspólnych. Oznaczmy przez N zbiór wszystkich tych liczb zespolonych z, które dla pewnego zbioru Z, należącego do mnogości M, spełniają warunek

$$z = p(Z).$$

Jasnem jest, że mnogość N będzie zawierała po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z mnogości M. Mamy więc

Twierdzenie 134. *Dla każdej mnogości zbiorów zamkniętych (liczb zespolonych) Z, nie mających elementów wspólnych, istnieje mnogość, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z.*

Udowodniliśmy więc *pewnik* Zermelo dla zbiorów zamkniętych.

§ 107. Niech Z oznacza dany zbiór liczb zespolonych. Jeżeli każdej liczbie z zbioru Z odpowiada pewna liczba zespolona $f(z)$, to mówimy, że mamy określoną w zbiorze Z *funkcję* $f(z)$ zmiennej z.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest określona w danym zbiorze Z, to jest ona oczywiście tembardziej określoną w każdym zbiorze Z_1, będącym częścią zbioru Z.

Niech $f(z)$ oznacza funkcję, określoną w danym zbiorze liczb zespolonych Z i niech l oznacza kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze Z (t. j. kres dolny zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $|f(z)|$, odpowiadających liczbom z zbioru Z). Powiadam, że jeżeli zbiór Z jest sumą dwóch zbiorów: $Z = Z_1 + Z_2$, to w jednym conajmniej ze zbiorów Z_1 oraz Z_2 kres dolny modułów funkcji $f(z)$ jest równy l. W samej rzeczy, oznaczmy przez l_1 i l_2 odpowiednio kresy dolne modułów funkcji $f(z)$ w zbiorach Z_1 i Z_2: musi być oczywiście $l_1 \geq l$ oraz $l_2 \geq l$, gdyż kres dolny części zbioru (liczb rzeczywistych) jest zawsze nie mniejszy od kresu dolnego całego zbioru. Gdybyśmy mieli jednocześnie $l_1 > l$ oraz $l_2 > l$, to, oznaczając przez l_0 mniejszą z liczb l_1 i l_2 (lub ich wspólną wartość), mielibyśmy, wobec definicji liczb l_1 i l_2, w zbiorze Z_1

$$| f(z) | \geq l_1 \geq l_0,$$

zaś w ziorze Z_2

$$| f(z) | \geq l_2 \geq l_0,$$

zatem, w każdym razie, w zbiorze $Z = Z_1 + Z_2$ stale

$$| f(z) | \geq l_0 > l,$$

co niemożliwe, skoro l jest kresem dolnym modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze Z.

Wynika stąd natychmiast ogólniej, że jeżeli zbiór Z jest sumą dowolnej skończonej liczby zbiorów $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$, to w jednym conajmniej z tych zbiorów kres dolny modułów funkcji $f(z)$ jest równy l. Pozostaje to prawdziwem oczywiście i wtedy, jeżeli niektóre ze zbiorów wypisanej sumy są próżne.

Załóżmy dalej, że zbiór Z jest ograniczony i niech zbiory $Z^{(n)}_{k,l}$ mają to samo znaczenie co w § 106. Będziemy więc mieli wzór (4) i przeto w jednym conajmniej (nie próżnym) ze zbiorów $Z^{(n)}_{k,l}$ wzoru (4) kres dolny modułów funkcji $f(z)$ będzie równy l: niech $Z^{(n)}_{k_n, l_n}$ znacza pierwszy z kolei ze zbiorów (4), w którym kres dolny modułów funkcji $f(z)$ jest równy l.

Wyznaczmy, dalej, ciągi x_n, y_n oraz z_n ze wzorów (5) oraz (6): ciąg z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie ograniczony i, w myśl tw. 80, istnieć będzie ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ taki, iż ciąg z_{n_p} $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie zbieżny. Połóżmy

$$\zeta = \lim_{p=\infty} z_{n_p}. \tag{10}$$

Niech, dalej, ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Powiadam, że kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze Z $\varepsilon)$ wszystkich tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$| z - \zeta | < \varepsilon \tag{11}$$

jest równy l.

W samej rzeczy, wobec (10) udowodnimy zupełnie tak samo jak w § 106, że przy dostatecznie wielkiem p każda liczba z zbioru $Z^{(n_p)}_{k_{n_p}, l_{n_p}}$ spełnia nierówność (11), a więc należy do zbioru $Z(\varepsilon)$: kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze $Z(\varepsilon)$ nie może więc być większy niż w zbiorze $Z^{(n_p)}_{k_{n_p}, l_{n_p}}$, w którym jest równy l, a że, z drugiej strony, kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze $Z(\varepsilon)$, jako części zbioru Z, nie może być mniejszy niż w zbiorze Z, w którym jest równy l, więc wnosimy, że kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze $Z(\varepsilon)$ jest równy l. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 135. *Jeżeli kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze ograniczonym liczb zespolonych Z jest równy l, to istnieje punkt ζ (należący do zbioru Z lub nie), taki iż przy wszelkiem dodatniem ε kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze tych liczb zbioru Z, które spełniają nierówność*

$$|z - \zeta| < \varepsilon,$$

jest równy l.

Jeżeli przytem punkt ζ nie jest elementem zbioru Z, to jest on oczywiście jego punktem skupienia: wnosimy stąd natychmiast że jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to punkt ζ w każdym razie jest jego elementem.

Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0* tego zbioru, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ, taka iż nierówność

$$|z - z_0| < \delta \tag{12}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{13}$$

(definicja Cauchy'ego). Podobnie jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej (§ 41), z definicji tej wynika natychmiast prawdziwość twierdzenia 61. Dalej, podobnie jak w § 54, możnaby udowodnić, że *z pewnika* Zermelo *wynika iż na to żeby funkcja $f(z)$ była w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0 tego zbioru, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdego ciągu nieskończonego z_n punktów zbioru Z, zmierzającego do z_0, ciąg nieskończony $f(z_n)$ zmierzał do $f(z_0)$.*

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła w zbiorze Z dla każdego punktu tego zbioru, to mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *ciągła w całym zbiorze Z.*

Łatwo widzieć, że *suma dwóch funkcji ciągłych w zbiorze Z dla punktu z_0 jest funkcją ciągłą w zbiorze Z dla punktu z_0.* W samej rzeczy, niech $f_1(z)$ i $f_2(z)$ będą dwie dane funkcje, określone w zbiorze Z i ciągłe w tym zbiorze dla punktu z_0. Połóżmy $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ — będzie to więc funkcja, określona w zbiorze Z.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec ciągłości funkcji $f_1(z)$ i $f_2(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0, istnieją dla liczby dodatniej ε takie dodatnie δ_1 oraz δ_2, iż nierówność

$$| z - z_0 | < \delta_1$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$| f_1(z) - f_1(z_0) | < \varepsilon/2,$$

zaś nierówność

$$| z - z | < \delta_2$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$| f_2(z) - f_2(z) | < \varepsilon/2.$$

Oznaczając przez δ liczbę dodatnią, mniejszą od δ_1 i δ_2, wnosimy stąd natychmiast, wobec

$$f(z) - f(z_0) = f_1(z) - f_1(z_0) + f_2(z) - f_2(z_0)$$

oraz w myśl twierdzenia o module sumy, że nierówność (12) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (13), co dowodzi ciągłości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0.

Podobnież udowodnilibyśmy odnośne twierdzenie dla różnicy dwóch funkcji.

Opierając się na tożsamości

$$f_1(z) f_2(z) - f_1(z_0) f_2(z_0) = [f_1(z) - f_1(z_0)]\,[f_2(z) - f_2(z_0)] + \\ + [f_1(z) - f_1(z_0)]\, f_2(z_0) + f_1(z_0)\,[f_2(z) - f_2(z_0)],$$

udowodnilibyśmy również z łatwością, że *iloczyn dwóch funkcji ciągłych w zbiorze Z dla punktu z_0 jest funkcją ciągłą w zbiorze Z dla punktu z_0*.

Pozostawiamy wreszcie czytelnikowi wypowiedzenie oraz udowodnienie odnośnego twierdzenia dla ilorazu dwóch funkcji.

Twierdzenia o sumie i iloczynie funkcji ciągłych dają się natychmiast uogólnić na dowolną skończoną liczbę funkcji.

Załóżmy teraz, że funkcja $f(z)$ jest ciągła w całym zbiorze Z. Wówczas, w myśl definicji ciągłości dla każdego punktu z_0 zbioru Z oraz dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ (zależna od ε i od z_0), taka iż przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, warunek (12) pociąga za sobą nierówność (13). Może się jednak zdarzyć, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje odpowiednia liczba dodatnia δ, taka iż nierówność (12) pociąga za sobą nierówność (13) przy wszelkich z_0 oraz z, należących do zbioru Z. W takim razie mówimy, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z *ciągłą jednostajnie.*

Różnica między ciągłością zwyczajną a ciągłością jednostajną funkcji w zbiorze Z polega więc na tem, że dla zwyczajnej ciągłości wystarcza istnienie odpowiedniego δ dla każdego dodatniego ε oraz każdego zosobna punku z_0 zbioru Z, dla ciągłości zaś jednostajnej potrzeba iżby dla każdego dodatniego ε istniało odpowiednie δ, któreby było zdatnem przy wszelkiem z_0, należącem do zbioru Z.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą, ale nie jest ciągłą jednostajnie, to mówimy, że $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą *niejednostajnie.*

Okażemy w jaki sposób można jeszcze wyrazić różnicę między ciągłością jednostajną a ciągłością niejednostajną funkcji w danym zbiorze. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla danego punktu z_0, to dla każdego danego dodatniego ε istnieje liczba dodatnia δ, przy której nierówność (12) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (13): oznaczmy, przy danych z_0 oraz ε, przez $\delta(z_0, \varepsilon)$ kres górny zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$ liczb δ, przy których nierówność (12) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (13). Łatwo widzieć, że będzie to największa z liczb zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$. (Wystarczy w tym celu oczywiście tylko okazać, że $\delta(z_0, \varepsilon)$ należy do zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$. Niech więc z oznacza jakąkolwiek daną liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność

$$|z - z_0| < \delta(z_0, \varepsilon): \tag{14}$$

ponieważ $\delta(z_0, \varepsilon)$ oznacza kres górny zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$, więc istnieje w tym zbiorze liczba $\delta_1 > |z - z_0|$; nierówność ta, z uwagi że δ_1 należy do $\Delta(z_0, \varepsilon)$, pociąga za sobą nierówność (13), która w ten sposób zachodzi dla każdej liczby z zbioru Z, spełniającej nierówność (14), co dowodzi, że $\delta(z_0, \varepsilon)$ należy do $\Delta(z_0, \varepsilon)$, c. b. d. o.).

Oznaczmy teraz, przy każdem danem dodatniem ε, przez $l(\varepsilon)$ kres dolny funkcji (dodatniej) $\delta(z, \varepsilon)$ w zbiorze Z: będzie to oczywiście liczba nieujemna. Jak łatwo widzieć, na to żeby funkcja $f(z)$ była w zbiorze Z ciągłą jednostajnie, potrzeba i wystarcza iżby przy wszelkiem dodatniem ε było $l(\varepsilon) > 0$.

Funkcja może być ciągłą w całym zbiorze Z, ale nie być w nim ciągłą jednostajnie. Oto przykłady:

1) Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych różnych od zera i połóżmy $f(z) = \frac{1}{z}$ dla każdego punktu z zbioru Z. Oznaczając, przy danem $\varepsilon > 0$ oraz $z_0 \neq 0$ przez δ mniejszą z liczb $\frac{|z_0|}{2}$ oraz $\frac{\varepsilon\,|z_0|^2}{2}$, będziemy, jak

łatwo widzieć, dla $|z-z_0|<\delta$ mieli $|z|>\frac{|z_0|}{2}$ oraz $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right|=\left|\frac{z-z_0}{zz_0}\right|<\varepsilon$, co dowodzi że funkcja $f(z)=\frac{1}{z}$ jest ciągła w całym zbiorze Z. Załóżmy, że funkcja nasza jest w zbiorze Z ciągła jednostajnie. Dla każdej liczby dodatniej, w szczególności zaś dla liczby 1, istniałaby liczba dodatnia δ taka, iż warunek

$$|z-z_0|<\delta \tag{15}$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(z)-f(z_0)|<1 \tag{16}$$

przy wszelkich z i z_0, należących do zbioru Z. Obierzmy jednak liczbę naturalną $p>\frac{1}{\delta}$ i przyjmijmy $z=\frac{1}{p}$, $z_0=\frac{1}{p+1}$: będziemy mieli

$$|z-z_0|=\frac{1}{p(p+1)}<\frac{1}{p}<\delta,$$

zaś

$$|f(z)-f(z_0)|=\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right|=1,$$

wbrew (16). Funkcja $f(z)$ nie jest więc ciągła jednostajnie w zbiorze Z.

Dowód powyższy pozostaje bez zmiany w przypadku kiedy Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych, spełniających nierówność $0<|z|\leq 1$, albo w przypadku kiedy Z oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich.

2) Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych (lub zbiór wszystkich liczb rzeczywistych) i połóżmy $f(z)=z^2$.

Funkcja nasza będzie, jak łatwo widzieć, ciągłą w całym zbiorze Z. Załóżmy, że jest ona w zbiorze Z ciągła jednostajnie. Istniałoby więc takie dodatnie δ, że przy wszelkich z i z_0 nierówność (15) pociąga za sobą nierówność (16).

Obierzmy jednak liczbę naturalną $p>\frac{1}{\delta}$ i połóżmy $z_0=p$, $z=p+\frac{1}{p}$: będziemy mieli

$$|z-z_0|=\frac{1}{p}<\delta,$$

zaś

$$|f(z)-f(z_0)|=|z^2-z_0^2|=2+\frac{1}{p^2}>1,$$

wbrew (16). Funkcja nasza nie jest więc ciągłą jednostajnie w zbiorze Z.

Jeżeli jednak zbiór Z spełnia pewne warunki, to ciągłość funkcji w całym zbiorze Z pociąga za sobą jej ciągłość jednostajną w tym zbiorze. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 136. *Funkcja ciągła w zbiorze zamkniętym i ograniczonym jest w tym zbiorze ciągłą jednostajnie.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór Z jest zamknięty i ograniczony i niech $f(z)$ oznacza funkcję ciągłą w zbiorze Z. Dla każdej liczby dodatniej ε oraz każdego punktu z_0 zbioru Z istnieje więc liczba dodatnia δ, taka iż przy wszelkiem z należącem do zbioru Z warunek (12) pociąga za sobą nierówność (13). Oznaczmy, przy danem dodatniem ε, przez $\delta(z_0)$ kres górny liczb dodatnich δ, dla których przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, warunek (12) pociąga za sobą nierówność (13). $\delta(z)$ będzie więc oznaczoną w zupełności funkcją zmiennej zespolonej z w zbiorze Z, przyczem dla każdego punktu z tego zbioru będzie $\delta(z) > 0$. Oznaczmy przez l kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze Z: będzie to więc liczba rzeczywista nieujemna, zależna od ε. Powiadam, że nie może być $l = 0$.

W samej rzeczy, załóżmy, że mamy $l = 0$. W myśl tw. 135 (zastosowanego względem funkcji $\delta(z) = |\ \delta(z)\ |$) istnieje więc punkt ζ taki iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta| < \varsigma \tag{17}$$

jest równy zeru, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ jest elementem zbioru Z. Wobec ciągłości funkcji $f(z)$ w całym zbiorze Z, istnieje dla liczby dodatniej $\varepsilon/2$ liczba dodatnia δ_1, taka iż dla każdej liczby z zbioru Z, spełniającej nierówność

$$|z - \zeta| < \delta_1 \tag{18}$$

zachodzi nierówność

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon/2. \tag{19}$$

Niech teraz z_0 oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność

$$|z_0 - \zeta| < \delta_1/2; \tag{20}$$

dla $z = z_0$ zachodzi więc, tembardziej, nierówność (18), pociągająca za sobą nierówność (19), czyli, w danym razie, nierówność

$$|f(z_0) - f(\zeta)| < \varepsilon/2. \tag{21}$$

Przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z i spełniającem nierówność

$$|z - z_0| < \delta_1/2, \tag{22}$$

będziemy, wobec (20), mieli oczywiście nierówność (18), pociągającą za sobą, jak wiemy, nierówność (19), która daje w jednej chwili, wobec (21):

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{23}$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, nierówność (22) pociąga za sobą nierówność (23), co, jak łatwo widzieć, dowodzi, że

$$\delta(z) \geqq \delta_1/2. \tag{24}$$

Okazaliśmy więc, że dla każdej liczby z_0 zbioru Z, spełniającej nierówność (20), zachodzi nierówność (24), skąd wynika natychmiast, że kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze liczb z zbioru Z, spełniających nierówność

$$|z-\zeta| < \delta_1/2$$

jest $\geqq \delta_1/2$, a więc dodatni, wbrew otrzymanemu wyżej z założenia $l=0$ wnioskowi, że przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze liczb z zbioru Z, spełniających nierówność (17), jest zerem.

Dowiedliśmy więc, że nie może być $l=0$: kres dolny l funkcji (dodatniej) $\delta(z)$ w zbiorze Z jest więc dodatni.

Z definicji liczby l wynika, że przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, mamy:

$$\delta(z) \geqq l,$$

skąd, wobec definicji funkcji $\delta(z)$ wnosimy natychmiast, że dla każdych dwóch liczb z i z' zbioru Z nierówność

$$|z-z'| < l \tag{25}$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(z)-f(z')| < \varepsilon. \tag{26}$$

Udowodniliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia l taka iż przy wszelkich z i z' należących do zbioru Z nierówność (25) pociąga za sobą nierówność (26). Wynika stąd natychmiast, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągła *jednostajnie.* Udowodniliśmy wiec twierdzenie 136.

Zauważymy, że jeżeli zbiór nie jest zamknięty, lub nie jest ograniczony, to funkcja, ciągła w każdym jego punkcie, może nie być ciągłą jednostajnie w uważanym zbiorze, jak tego dowodzą przykłady: 1), w którym zbiór Z nie jest zamknięty, oraz 2), w którym zbiór Z nie jest ograniczony.

§ 108. **Twierdzenie 137.** *Funkcja ciągła w zbiorze zamkniętym i ograniczonym jest w tym zbiorze ograniczoną, a zbiór jej wartości jest zamknięty.*

Dowód. Niech $f(z)$ oznacza funkcję ciągłą w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z. Oznaczmy przez U zbiór wszystkich wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, t. j. zbiór wszystkich liczb zespolonych $f(z)$, odpowiadających liczbom z zbioru Z i niech η oznacza punkt skupienia zbioru U. Połóżmy w zbiorze Z:

$$g(z) = f(z) - \eta:$$

będzie to więc funkcja, określona w całym zbiorze Z.

Ponieważ η jest punktem skupienia zbioru U wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, więc, jak łatwo widzieć, kres dolny modułów funkcji $g(z) = f(z) - \eta$ w zbiorze Z jest równy zeru. Skoro zaś zbiór Z jest ograniczony, więc, w myśl tw. 135, istnieje punkt ζ taki, iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ tych liczb zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta| < \varsigma \tag{27}$$

jest równy zeru, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ jest jego elementem. Powiadam, że $f(\zeta) = \eta$.

W samej rzeczy, załóżmy, że $f(\zeta) \neq \eta$; będzie więc $\varepsilon = \dfrac{|f(\zeta) - \eta|}{2} > 0$. Ponieważ funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą, więc istnieje, dla dodatniego ε, takie dodatnie ς, iż przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z i spełniającem warunek (27), zachodzi nierówność

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon,$$

skąd, w jednej chwili:

$$|g(z)| = |f(z) - \eta| = |f(\zeta) - \eta - (f(\zeta) - f(z))| \geq$$
$$\geq |f(\zeta) - \eta| - |f(\zeta) - f(z)| = 2\varepsilon - |f(\zeta) - f(z)| > \varepsilon,$$

co dowodzi, że kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ jest $\geq \varepsilon$, a więc dodatni, wbrew własności punktu ζ. Jest więc $f(\zeta) = \eta$, czyli η jest jedną z wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, a więc elementem zbioru U. Ten ostatni zawiera więc każdy swój punkt skupienia, czyli jest zbiorem zamkniętym.

Załóżmy teraz, że funkcja $f(z)$ nie jest ograniczoną w zbiorze Z. Dla każdego dodatniego A istnieje więc w zbiorze Z takie z, iż $|f(z)| > A$, skąd $\varphi(z) = \dfrac{1}{|f(z)| + 1} < \dfrac{1}{A}$. Wnosimy stąd w jednej chwili, że kres dolny funkcji (dodatniej) $\varphi(z)$ w zbiorze Z jest zerem. W myśl tw. 135 istnieje więc punkt ζ_1 taki, iż przy wszelkiem dodatniem δ kres dolny modułów funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z-\zeta_1|<\delta, \tag{28}$$

jest zerem.

Wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ_1 należy do Z: ponieważ zaś funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą, więc istnieje takie dodatnie δ, iż dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (28) pociąga za sobą nierówność

$$|f(z)-f(\zeta_1)|<1,$$

skąd

$$|f(z)|<|f(\zeta_1)|+1$$

i przeto

$$\varphi(z)=\frac{1}{|f(z)|+1}>\frac{1}{|f(\zeta_1)|+2}=\alpha>0,$$

co dowodzi, że kres dolny funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze liczb z zbioru Z, spełniających nierówność (28), jest $\geqq \alpha$, zatem dodatni, wbrew własności liczby ζ_1. Dowiedliśmy więc, że funkcja $f(z)$ jest ograniczoną w zbiorze Z.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 137 w zupełności.

§ **109. Funkcja funkcji.** Niech $\varphi(z)$ oznacza funkcję, określoną w zbiorze Z i niech U oznacza zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $\varphi(z)$ w zbiorze Z. (Do zbioru U zaliczamy więc wszystkie te i tylko te liczby zespolone u, dla których przy pewnem z, należącem do zbioru Z, mamy $u=f(z)$). Niech, dalej, $\psi(u)$ oznacza funkcję, określoną w zbiorze U. Połóżmy dla każdego punktu z zbioru Z:

$$f(z)=\psi(\varphi(z)):$$

będzie to funkcja, określona w całym zbiorze Z [gdyż każdemu z, należącem do zbioru Z odpowiada, jak zakładamy, oznaczony punkt $u=\varphi(z)$, należący do zbioru U, każdemu zaś u, należącemu do zbioru U odpowiada oznaczony punkt $\psi(u)=\psi(\varphi(z))$].

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 138. *Jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0, zaś funkcja $\psi(z)$ jest w zbiorze U wszystkich wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z ciągłą dla punktu $u_0=\varphi(z_0)$, to funkcja $f(z)=\psi(\varphi(z))$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0.*

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są zachowane i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec ciągłości funkcji $\psi(u)$ w zbiorze U dla punktu $u_0 = \varphi(z_0)$, istnieje dla liczby ε liczba dodatnia η taka, iż nierówność

$$| u - u_0 | < \eta \tag{29}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby u zbioru U nierówność

$$| \psi(u) - \psi(u_0) | < \varepsilon. \tag{30}$$

Z drugiej strony, wobec ciągłości funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0, istnieje liczba dodatnia δ taka, iż nierówność

$$| z - z_0 | < \delta \tag{31}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$| \varphi(z) - \varphi(z_0) | < \eta. \tag{32}$$

Niech teraz z oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność (31). Będziemy więc mieli nierówność (32). Połóżmy, dalej $u = \varphi(z)$ — będzie to oczywiście liczba zbioru U, spełniająca, w myśl (32) i wobec $u_0 = \varphi(z_0)$, nierówność (29), pociągającą za sobą nierówność (30), czyli nierówność

$$| \psi(\varphi(z)) - \psi(\varphi(z_0)) | < \varepsilon. \tag{33}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż nierówność (31) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (33), co dowodzi, że funkcja $f(z) = \psi(\varphi(z))$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0. Udowodniliśmy więc twierdzenie 138.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, w szczególności, że jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest ciągła w całym zbiorze Z, zaś funkcja $\varphi(u)$ jest ciągła w całym zbiorze U, to funkcja $f(z) = \psi(\varphi(z))$ jest ciągła w całym zbiorze Z. Wynik ten wyrażamy krócej, mówiąc że *funkcja ciągła funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą.*

P r z y k ł a d y:

1) Kładąc w zbiorze liczb dodatnich $\varphi(x) = x \lg x$, zaś w zbiorze liczb rzeczywistych $\psi(y) = e^y$, wnosimy, że funkcja $x^x = e^{x \lg x} = \psi(\varphi(x))$ jest ciągłą w zbiorze liczb dodatnich.

2) Kładąc w zbiorze liczb rzeczywistych, większych od jedności, $\varphi(x) = \lg x$, zaś w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich $\psi(y) = \lg y$, wnosimy, że funkcja $\lg(\lg x)$ jest określoną i ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych większych od jedności.

3) Kładąc w zbiorze liczb rzeczywistych $\varphi(x) = e^x$, $\psi(y) = e^y$, wnosimy, że funkcja $e^{e^x} = \psi(\varphi(x))$ jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

4) Funkcja $\lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$ jest określoną i ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych ≥ 1.

5) Z nierówności $\left| |z| - |z_0| \right| \leq |z - z_0|$ (wynikającej w jednej chwili z twierdzenia o module różnicy) wynika natychmiast, że funkcja $|z|$ jest ciągła w całym zbiorze liczb zespolonych. Wnosimy stąd natychmiast, w myśl tw. 138, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0, to i funkcja $|f(z)|$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0.

Zauważymy, że wogóle funkcje $\psi(\varphi(z))$ oraz $\varphi(\psi(z))$ są różne: np. dla $\varphi(z) = z^2$, $\psi(z) = 2z$, mamy: $\psi(\varphi(z)) = 2z^2$, zaś $\varphi(\psi(z)) = (2z)^2 = 4z^2$. Jeżeli w całym zbiorze Z zachodzi równość $\psi(\varphi(z)) = \varphi(\psi(z))$, to mówimy, że funkcje φ i ψ są w zbiorze Z *przemienne*. Np. funkcje $\varphi(z) = z^2$ oraz $\psi(z) = z^3$ są przemienne w całym zbiorze liczb zespolonych, gdyż $\varphi(\psi(z)) = \psi(\varphi(z)) = z^6$.

Iteracje. Jeżeli, w szczególności, $\varphi(z) = \psi(z)$, to funkcję $\psi(\varphi(z))$, czyli funkcję $f(z) = \varphi(\varphi(z))$ nazywamy *iteracją* funkcji $\varphi(z)$, albo iterowaną funkcją $\varphi(z)$; np. funkcję $\lg\lg x$ nazywamy iterowanym logarytmem. Przez skrócenie piszemy niekiedy $\varphi_2(z)$ zamiast $\varphi(\varphi(z))$.

Jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest określoną w zbiorze Z i jeżeli wartości funkcji $\varphi(z)$ dla liczb z zbioru Z również należą do Z, to w zbiorze Z określone są funkcje: $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, $\varphi_2(z) = \varphi(\varphi(z))$, $\varphi_3(z) = \varphi(\varphi_2(z))$ i t. d., ogólnie $\varphi_n(z) = \varphi(\varphi_{n-1}(z))$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Funkcję $\varphi_n(z)$ nazywamy n-tą *iteracją funkcji* $\varphi(z)$. Iteracje te spełniają, jak łatwo widzieć, tak zwaną *zasadę dodawniczą*, wyrażającą się wzorem $\varphi_m(\varphi_n(z)) = \varphi_{m+n}(z)$, przy wszelkich naturalnych m i n, oraz t. zw. *zasadę mnożniczą*, wedle której, dla $f(z) = \varphi_n(z)$, mamy $f_m(z) = \varphi_{mn}(z)$, przy wszelkich maturalnych m i n.

Jeżeli (przy danem z) ciąg nieskończony $\varphi_n(z)$ jest zbieżny, to możemy mówić o iteracji rzędu nieskończonego (właściwie pozaskończonego) $\varphi_\omega(z) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(z)$. [Jeżeli liczba $\varphi_\omega(z)$ należy jeszcze do Z, to możemy mówić o iteracjach $\varphi_{\omega+1}(z) = \varphi(\varphi_\omega(z))$, $\varphi_{\omega+2}(z) = \varphi(\varphi_{\omega+1}(z))$ i t. d. Występujące tutaj wskaźniki są to tak zwane *liczby porządkowe pozaskończone*]. Godnem uwagi jest tu następujące

Twierdzenie 139. *Jeżeli, przy danem z_0, ciąg kolejnych iteracyj $\varphi_n(z_0)$ jest zbieżny, zaś wszystkie jego wyrazy, jakoteż granica należą do zbioru Z, oraz jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu $t = \varphi_\omega(z_0)$, to liczba t spełnia równanie $\varphi(t) - t = 0$.*

W samej rzeczy, wobec $\lim_{n=\infty} \varphi_n(z_0) = \varphi_\omega(z) = t$, oraz założenia, że funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu t, mamy:

$$\varphi(t) = \varphi(\lim_{n=\infty} \varphi_n(z)) = \lim_{n=\infty} \varphi(\varphi_n(z_0)) = \lim_{n=\infty} \varphi_{n+1}(z_0) = t,$$

c. b. d. o.

Twierdzenie to ułatwia nam niekiedy badanie zbieżności ciągu iteracji, podając ewentualną wartość granicy. Wogóle jednak badanie zbieżności ciągu iteracji jest bardzo trudnem nawet dla względnie prostych funkcji: np. nie zbadano dotąd w przypadku ogólnym przy jakich zespolonych z zbieżnym jest ciąg iteracji $\varphi_n(z)$, gdzie $\varphi(z) = az^2 + bz + c$ [1]).

§ 110. Funkcje odwrotne.

Niech $f(z)$ oznacza daną funkcję, określoną w zbiorze Z, zaś U niech będzie zbiorem wszystkich różnych wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z. Dla każdego więc danego punktu u zbioru U istnieje w zbiorze Z conajmniej jedno z, spełniające równanie

$$f(z) = u. \tag{34}$$

Wogóle dla danego punktu u zbioru U może w zbiorze Z istnieć więcej niż jedno z, spełniające równanie (1): np. dla funkcji $f(z) = z^2$, określonej w zbiorze wszystkich liczb zespolonych, dla której, jak łatwo widzieć, zbiór U zawiera wszystkie liczby zespolone, każdemu $u \neq 0$ odpowiadają dwie różne liczby zespolone z, spełniające równanie (34). Innemi słowy: dla różnych punktów zbioru Z funkcja $f(z)$ może przyjmować tę samą wartość.

Jeżeli jednak różnym punktom z zbioru Z odpowiadają zawsze różne wartości $f(z)$, to równanie (34) posiada przy każdem danem u, należącem do zbioru U, jedno i tylko jedno rozwiązanie względem z. Każdemu więc punktowi u zbioru U odpowiada oznaczona liczba z zbioru Z, spełniająca równanie (34): oznaczmy ją przez $F(u)$; będzie więc

$$f(F(u)) = u. \tag{35}$$

Funkcja $F(u)$ będzie więc określona w całym zbiorze U, przyczem w całym tym zbiorze zachodzić będzie równość (35). Wobec powyższej definicji funkcji $F(u)$ możemy też powiedzieć, że równanie (34) pociąga za sobą równanie

$$z = F(u). \tag{36}$$

Określoną w ten sposób funkcję $F(u)$ nazywamy *odwrotną* względem funkcji $f(z)$ albo *odwróceniem* funkcji $f(z)$, każdą zaś funkcję dla której w danym zbiorze istnieje oznaczona odwrotna, nazywamy *odwracalną* (jednoznacznie) w uważanym zbiorze. Na to

[1]) Kilka prostych i ciekawych twierdzeń o iteracjach podaje R. Schauffler w *Mathematische Annalen* 78 (r. 1917), p. 53. Na uwagę zasługuje zwłaszcza twierdzenie: Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, spełniającą warunki: $a \leq \varphi(x) \leq b$, dla $a \leq x \leq b$ oraz, przy pewnem c: $|\varphi(x) - c| < |x - c|$, dla $x \neq c$, $a \leq x \leq b$, to $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = c$, dla $a \leq x \leq b$.

więc, żeby funkcja była w danym zbiorze (jednoznacznie) odwracalną, potrzeba i wystarcza, iżby różnym punktom uważanego zbioru odpowiadały zawsze różne wartości funkcji.

Łatwo, dalej, widzieć, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z odwracalną i $F(u)$ oznacza, jak wyżej, jej odwrócenie, to funkcja $F(u)$ jest odwracalną w zbiorze U i odwróceniem jej jest funkcja $f(z)$.

W samej rzeczy, zbiorem wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $F(u)$ w zbiorze U, jest oczywiście zbiór Z: dla dowodu odwracalności funkcji $F(u)$ potrzeba więc i wystarczy okazać, że dla każdego danego punktu z zbioru Z istnieje w zbiorze U jedno i tylko jedno u, spełniające równanie (36). Że takie u może przy danem z być conajwyżej jedno, wynika z uwagi, że wzór (36) daje natychmiast

$$f(z) = f(F(u)),$$

czyli, wobec (35), wzór (34): punktem u, spełniającym równanie (36) nie może więc być inny niż $u = f(z)$.

Pozostaje więc tylko przekonać się, że punkt $u = f(z)$ spełnia równanie (36). W tym celu zauważymy, że skoro równanie (35) zachodzi przy wszelkiem u, należącem do zbioru U, to możemy w niem położyć, przy danem z, $u = f(z)$, co daje

$$f(F(f(z))) = f(z),$$

a ponieważ funkcja $f(z)$, jako odwracalna, nie może dla różnych punktów zbioru Z przyjmować tę samą wartość, więc mamy stąd

$$F(f(z)) = z, \tag{37}$$

co, wobec $f(z) = u$, daje wzór (36).

Dowiedliśmy więc, że funkcja $F(u)$ jest odwracalna w zbiorze U i że odwróceniem jej jest funkcja $f(z)$. Nadto dowiedliśmy, że przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, zachodzi równość (37). Równości (35) i (37) dowodzą, że operacje, oznaczone przez symbole f i F znoszą się wzajemnie.

Zauważymy, że jeżeli dla dwóch funkcji f i F zachodzi w zbiorze Z stale równość (37), to funkcje te są (w zbiorze Z) odwrotnościami jedna dla drugiej.

W samej rzeczy, załóżmy że dla dwóch funkcji f i F zachodzi w zbiorze Z równość (37). Wynika stąd oczywiście, że funkcja $f(z)$ jest określoną w całym zbiorze Z: powiadam, że różnym wartościom z zbioru Z będą odpowiadały różne wartości funkcji $f(z)$. Gdybyśmy bowiem mieli dla $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = f(z_2)$, to byłoby też $F(f(z_1)) = F(f(z_2))$, zatem, w myśl (37): $z_1 = z_2$, wbrew założeniu. Funkcja $f(z)$ jest więc odwracalną w zbiorze Z: oznaczmy jej odwrócenie przez $\varphi(u)$: będzie to więc funkcja, określona w zbiorze U wszystkich wartości u, jakie przyjmuje funkcja $f(z)$ w zbiorze Z. Będziemy mieli w zbiorze U:

$$f(\varphi(u)) = u. \tag{38}$$

Niech u oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru U: połóżmy

$$z = \varphi(u):$$

będzie to więc liczba zbioru Z, zatem, w myśl (37)

$$F(f(\varphi(u))) = \varphi(u),$$

czyli, w myśl (38):

$$F(u) = \varphi(u)$$

— w całym zbiorze U, co dowodzi, że funkcja F jest odwrotną dla f w zbiorze Z, *c. b. d. o.*

Twierdzenie 140. *Jeżeli zbiór Z jest ograniczony i zamknięty, zaś funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z odwracalna i ciągła, to odwrócenie jej $F(u)$ jest funkcją ciągłą* (w zbiorze U wszystkich wartości, przybieranych przez funkcję $f(z)$ w zbiorze Z).

Dowód. Niech $f(z)$ oznacza funkcję ciągłą i odwracalną w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z i niech $F(u)$ oznacza funkcję odwrotną dla $f(z)$: będzie to więc funkcja, określona w zbiorze U wszystkich wartości, jakie przybiera funkcja $f(z)$ dla liczb z zbioru Z.

Załóżmy, że dla danego punktu u_0 zbioru U funkcja $F(u)$ nie jest ciągłą. Z definicji ciągłości wynika, że wówczas przy pewnem dodatniem α dla każdego dodatniego δ istnieje w zbiorze U liczba u, spełniająca nierówności

$$| u - u_0 | < \delta \tag{39}$$

oraz

$$| F(u) - F(u_0) | \geq \alpha. \tag{40}$$

Połóżmy

$$z_0 = F(u_0) \tag{41}$$

i oznaczmy przez Z_1 zbiór wszystkich liczb z zbioru Z, spełniających nierówność

$$| z - z_0 | \geq \alpha. \tag{42}$$

Zbiór Z_1 będzie jak łatwo widzieć, zamknięty, jako zbiór punktów wspólnych zbioru zamkniętego Z oraz zbioru zamkniętego wszystkich liczb zespolonych z, spełniających nierówność (42).

Powiadam, że kres dolny modułów funkcji

$$g(z) = f(z) - u_0 \tag{43}$$

w zbiorze Z_1 jest zerem.

W samej rzeczy, niech δ oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W zbiorze U istnieje, jak wiemy, liczba u, spełniająca nierówności (39) i (40). Połóżmy

$$z = F(u): \tag{44}$$

będzie to liczba zbioru Z; wobec (41) będziemy mieli, w myśl (40), nierówność (42) i przeto liczba z będzie należała do zbioru Z_1.

Wobec (44) znajdujemy $f(z) = u$ (gdyż funkcja F jest odwrotną dla f); wobec (43) i (39) mamy więc

$$|\, g(z) \,| = |\, f(z) - u_0 \,| = |\, u - u_0 \,| < \delta:$$

dla każdego dodatniego δ istnieje więc w zbiorze Z_1 liczba z, dla którego $|\, g(z) \,| < \delta$, co dowodzi, że kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze Z_1 jest zerem, *c. b. d. o.*

W myśl tw. 135 istnieje więc punkt ζ taki, iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze tych liczb zbioru Z_1, które spełniają nierówność

$$|\, z - \zeta \,| < \varsigma \tag{45}$$

jest zerem, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z_1, punkt ζ należy do Z_1. Powiadam, że $g(\zeta) = 0$.

W samej rzeczy, założmy, że $g(\zeta) \neq 0$ i połóżmy

$$\frac{|\, g(\zeta) \,|}{2} = \varepsilon: \tag{46}$$

będzie to więc liczba dodatnia. Wobec ciągłości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, istnieje liczba dodatnia ς taka, iż nierówność (45) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|\, f(z) - f(\zeta) \,| < \varepsilon,$$

skąd, z uwagi że wobec (43) jest

$$g(z) = g(\zeta) - (f(\zeta) - f(z)),$$

znajdujemy w jednej chwili, wobec (46):

$$|\, g(z) \,| \geqq |\, g(\zeta) \,| - |\, f(\zeta) - f(z) \,| > \varepsilon.$$

Dla każdej liczby z zbioru Z, spełniającej nierówność (45), mamy więc $| g(z) | > \varepsilon$: nierówność ta będzie więc zachodziła, tembardziej, dla każdej, spełniającej nierówność (45) liczby z zbioru Z_1 (będącego częścią zbioru Z), wbrew własności punktu ζ.

Musi więc być $g(\zeta) = 0$, czyli, wobec (43): $f(\zeta) = u_0$, skąd $\zeta = F(u_0)$, co daje, wobec (41):

$$\zeta = z_0. \tag{47}$$

Lecz, skoro ζ należy do zbioru Z_1, więc mamy

$$| \zeta - z_0 | \geqq \alpha,$$

zatem $\zeta \neq z_0$, wbrew (47). Założenie, że funkcja $F(u)$ nie jest w zbiorze U ciągłą, doprowadza więc do sprzeczności. Udowodniliśmy więc twierdzenie 140.

ROZDZIAŁ XIII.

Ciągi i szeregi funkcyj.

§ 111. Jeżeli każdej liczbie naturalnej n odpowiada pewna funkcja $f_n(z)$ zmiennej zespolonej z, określona w danym zbiorze Z, to mamy do czynienia z ciągiem nieskończonym funkcyj

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots, \tag{1}$$

określonym w zbiorze Z.

Obierzmy na z jakąkolwiek oznaczoną wartość ze zbioru Z: wyrazy ciągu (1) będą wówczas oznaczonemi w zupełności liczbami zespolonemi i przeto będziemy mieli do czynienia ze zwykłym ciągiem nieskończonym o wyrazach zespolonych.

Załóżmy, że ciąg (1) jest zbieżny dla każdej wartości z, należącej do zbioru Z. Granica jego będzie wogóle zależała od obranej wartości z i będzie przez nią wyznaczoną w zupełności: będzie to więc funkcja zmiennej z, określona w zbiorze Z; oznaczmy ją przez $f(z)$: będzie więc

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z) \tag{2}$$

dla każdej liczby zespolonej z, należącej do zbioru Z.

P r z y k ł a d y.

1) Przyjmijmy jako zbiór Z zbiór wszystkich liczb zespolonych z, spełniających nierówność $|z| < 1$ i połóżmy

$$f_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

— będziemy tu mieli w zbiorze Z:

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

2) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i połóżmy dla liczb x zbioru X:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;$$

będziemy tu mieli w zbiorze X:

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = e^x.$$

3) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb dodatnich i połóżmy

$$f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right);$$

będziemy tu mieli w zbiorze X (§ 50):

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = \lg x.$$

W myśl definicji granicy ciągu o wyrazach zespolonych, na to żeby w zbiorze Z zachodził wzór (2), potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby zespolonej z, należącej do zbioru Z, oraz każdej liczby dodatniej ε istniała liczba rzeczywista $\mu = \mu(\varepsilon, z)$, taka iż

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{3}$$

Owa wartość na μ jest więc wogóle zależną nietylko od ε ale i od z. Może się jednak zdarzyć, że do każdego dodatniego ε można dobrać takie $\mu = \mu(\varepsilon)$, iż nierówność (3) będzie spełniona dla $n > \mu$ przez *każdą* liczbę z, należącą do zbioru Z. Mówimy wówczas, że uważany ciąg jest w zbiorze Z *zbieżnym jednostajnie.*

Różnica między zbieżnością zwykłą a zbieżnością jednostajną ciągu w zbiorze Z polega więc na tem, że dla zwykłej zbieżności wystarcza możność dobrania odpowiedniego μ do każdego dodatniego ε oraz każdego z osobna z, należącego do zbioru Z, dla zbieżności zaś jednostajnej potrzeba iżby do każdego dodatniego ε można było dobrać odpowiednie μ, któreby było zdatnem przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z. Innemi słowy: w razie zwykłej zbieżności, przy danem ε, różnym z mogą odpowiadać różne μ, w razie zaś zbieżności jednostajnej (przy każdem danem $\varepsilon > 0$), μ, dobrane do ε ma być jednem i tem samem dla wszystkich z, należących do zbioru Z.

Ciąg nieskończony funkcyj może być w całym zbiorze zbieżnym, ale nie być w nim zbieżnym jednostajnie, jak tego dowodzą następujące przykłady:

1) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0, 1)$ i połóżmy w zbiorze X:

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n). \tag{4}$$

Będziemy tu mieli, jak łatwo widzieć, dla każdej liczby x zbioru X:

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0 \tag{5}$$

— ciąg nasz jest więc zbieżny w całym zbiorze X. Załóżmy, że jest on w zbiorze X zbieżny jednostajnie. Dla każdej liczby dodatniej ε, w szczególności więc dla liczby $\varepsilon = \frac{1}{4}$, istniałoby takie μ, iż dla każdej liczby x zbioru X mielibyśmy nierówność

$$\left| f_n(x) - \lim_{n=\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

czyli, wobec (4), (5) oraz $\varepsilon = 1$:

$$\left| x^n(1 - x^n) \right| < \frac{1}{4} \quad \text{dla } n > \mu. \tag{6}$$

Oznaczmy, w szczególności, przez p liczbę naturalną $> \mu$ i przyjmijmy $x = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}$: będzie to liczba zbioru X; wobec (6) musi więc być, dla $x = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}$, $n = p$:

$$\left| \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right| < \frac{1}{4},$$

co niemożliwe. Ciąg nasz nie jest więc zbieżny jednostajnie w zbiorze X.

2) Niech Z oznacza zbiór liczb zespolonych z, spełniających nierówności $0 < |z| \leq 1$, i połóżmy w zbiorze Z:

$$f_n(z) = \frac{1}{nz}; \tag{7}$$

będziemy tu mieli oczywiście dla każdego punktu z zbioru Z:

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = 0,$$

natomiast, wobec (7):

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots;$$

ciąg nasz jest więc zbieżny w całym zbiorze Z, ale nie jednostajnie.

3) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Połóżmy $f_n(x) = 0$ dla x niewymiernych, w razie zaś kiedy x jest liczbą wymierną $= \frac{l}{m}$, gdzie $\frac{l}{m}$ jest ułamkiem nieprzywiedlnym o naturalnym mianowniku, przyjmijmy $f_n(x) = 1$ dla $n \leq m$ oraz $f_n(x) = 0$ dla $n > m$.

Będziemy tu mieli przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0,$$

gdyż, jeżeli x jest liczbą niewymierną, to wszystkie wyrazy ciągu $f_n(x)$ będą zerami, jeżeli zaś x jest liczbą wymierną, to będą zerami wszystkie wyrazy, poczynając od pewnego miejsca.

Założmy, że ciąg nasz jest w zbiorze X zbieżnym jednostajnie. Istniałoby więc dla $\varepsilon = 1$ takie μ, niezależne od x, iż

$$| f_n(x) | < 1, \quad \text{dla} \quad n > \mu \tag{8}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x. Obierzmy jednak liczbę naturalną m większą od μ i połóżmy w nierówności (8) $x = \frac{1}{m}$, $n = m$: otrzymamy, z uwagi że, w myśl definicji naszej funkcji, $f_m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$:

$$| 1 | < 1,$$

co niemożliwe. Ciąg nasz nie jest więc zbieżny jednostajnie w zbiorze X. Możnaby też z łatwością okazać, że ciąg nasz nie jest zbieżny jednostajnie w żadnym, jak chcąc małym przedziale (gdyż w każdym przedziale możemy wyznaczyć liczbę wymierną o jak chcąc wielkim nieprzywiedlnym mianowniku).

§ **112. Twierdzenie 141.** *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją, określoną w zbiorze Z, zaś $f_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest ciągiem nieskończonym funkcji ciągłych w tym zbiorze i jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje wskaźnik m* (zależy jedynie od ε), *taki iż*

$$| f_m(z) - f(z) | < \varepsilon \tag{9}$$

przy wszelkiem z należącem do zbioru Z, to funkcja $f(z)$ jest ciągła w całym zbiorze Z.

Dowód. Niech z_0 oznacza dany punkt zbioru Z, ε-daną liczbę dodatnią. Z założeń naszego twierdzenia wynika, że istnieje dla liczby ε wskaźnik $m = m(\varepsilon)$, przy którym nierówność (9) jest spełniona przez każdą liczbę z zbioru Z. W szczególności więc będzie:

$$| f_m(z_0) - f(z_0) | < \varepsilon. \tag{10}$$

Z założenia, że wyrazy ciągu $f_n(z)$ są funkcjami ciągłemi w zbiorze Z wynika, w szczególności, że funkcja $f_m(z)$ jest ciągłą w zbiorze Z dla punktu z_0: istnieje więc dla liczby dodatniej ε liczba dodatnia $\delta = \delta(m, z_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$, taka iż przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z i spełniającem nierówność

$$|z - z_0| < \delta, \tag{11}$$

będzie

$$|f_m(z) - f_m(z_0)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Załóżmy, że z oznacza liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność (11): będą więc zachodziły jednocześnie nierówności (9), (12) i (10), skąd

$$|f(z) - f(z_0)| = |(f(z) - f_m(z) + f_m(z) - f_m(z_0) + f_m(z_0) - f(z_0))| \leq$$
$$\leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(z_0)| + |f_m(z_0) - f(z_0)| < 3\varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego punktu z_0 zbioru Z oraz każdej liczby dodatniej ε istnieje takie dodatnie δ iż nierówność (11) pociąga za sobą przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, nierówność

$$|f(z) - f(z_0)| < 3\varepsilon,$$

co dowodzi, (że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Jeżeli ciąg funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze Z, jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie, to, kładąc w zbiorze Z $f(z) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(z)$, będziemy oczywiście mieli spełnione wszystkie warunki tw. 141 i przeto możemy jeszcze wypowiedzieć

Twierdzenie 142. *Granica ciągu funkcji ciągłych w zbiorze Z, zbieżnego jednostajnie w tym zbiorze, jest funkcją ciągłą w tym zbiorze.*

Zauważymy, że granica ciągu funkcji ciągłych w zbiorze Z, zbieżnego w tym zbiorze, ale niejednostajnie, może nie być funkcją ciągłą w zbiorze Z.

Dla dowodu połóżmy w zbiorze liczb rzeczywistych x:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

— będą to oczywiście funkcje ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = 0, \quad \text{dla} \quad x \neq 0,$$

zaś

$$f_n(0) = 1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{skąd} \quad f(0) = \lim_{n=\infty} f_n(0) = 1.$$

Funkcja $f(x)$ jest więc nieciągłą dla wartości $x=0$.

Jako inny przykład, połóżmy dla $-1 \leq x \leq 1$:

$$f_n(x) = (1-x^2)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad -1 \leq x < 0 \quad \text{oraz dla} \quad 0 < x \leq 1,$$

zaś

$$\lim_{n=\infty} f_n(0) = 1.$$

Przykład ten wskazuje, że granica ciągu zbieżnego wielomianów całkowitych może być funkcją nieciągłą.

Inny jeszcze przykład na granicę nieciągłą ciągu zbieżnego funkcji ciągłych otrzymamy, kładąc przy wszelkiem zespolonem z

$$f_n(z) = \sqrt[n]{|z|}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

będzie tu, jak łatwo widzieć:

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = \begin{cases} 0 \text{ dla } z = 0 \\ 1 \text{ dla } z \neq 0. \end{cases}$$

Granica ciągu zbieżnego funkcyj ciągłych w dany skończonym przedziale może nawet nie być funkcją ograniczoną w tym przedziale: np. kładąc

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

oraz

$$f(0) = \lim f_n(0) = 0,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ nie jest ograniczoną w przedziale $(-1, 1)$.

Podobnież, kładąc

$$f_n(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 - x^n) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1$$

będziemy mieli

$$f_n(1) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd

$$f(1) = \lim_{n=\infty} f_n(1) = 0,$$

zaś, dla $0 \leq x < 1$:

$$f_n(x) = \frac{(1-x^n)^2}{1-x},$$

skąd, w jednej chwili:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < 1.$$

Nawet więc ciąg wielomianów całkowitych, zbieżny w przedziale $(0, 1)$ (z włączeniem granic) może przedstawiać funkcję, która nie jest ograniczoną w tym przedziale.

Z drugiej strony, granica ciągu zbieżnego funkcyj nieciągłych może być funkcją ciągłą. Połóżmy np. w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza zero dla wymiernego x oraz jedność dla niewymiernego x. Każda z funkcji $f_n(x)$ będzie oczywiście wszędzie nieciągłą. Z drugiej strony będzie oczywiście

$$| f_n(x) | \leq \frac{1}{n}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x i wszelkiem naturalnem n, skąd

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = 0,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zatem *ciągłość wyrazów ciągu zbieżnego nie jest ani warunkiem koniecznym, ani też warunkiem wystarczającym dla ciągłości jego granicy.*

Twierdzenie 142 daje nam warunek wystarczający dla ciągłości granicy funkcji ciągłych. Warunek ten nie jest jednak konieczny: granica ciągu niejednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych może być funkcją ciągłą, jak tego dowodzi ciąg (4), rozpatrywany w § 111 Inny przykład otrzymany, kładąc przy wszelkiem rzeczywistem x

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Będziemy tu mieli, jak łatwo widzieć, w całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = 0$$

i przeto $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych, natomiast ciąg (13) nie jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie do zera, gdyż mamy tu

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zapytamy obecnie, jakie warunki są konieczne i wystarczające na to żeby granica funkcyj ciągłych była funkcją ciągłą?

§ 113. **Twierdzenie 143.** *Na to żeby funkcja $f(z)$, będąca w zbiorze Z granicą ciągu funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze Z dla punktu z_0, sama była w zbiorze Z dla punktu z_0 ciągłą, potrzeba i wystarcza aby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba dodatnia δ oraz wskaźnik m takie, iżby przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z i spełniającem nierówność*

$$|z - z_0| < \delta, \tag{14}$$

zachodziła nierówność

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon. \tag{15}$$

Dowód. Załóżmy, ze funkcja $f(z)$ jest ciągła w zbiorze Z dla punktu z_0. Istnieje więc dla danego dodatniego ε takie $\delta_0 > 0$, iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$|z - z| < \delta_0 \tag{16}$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Z drugiej strony, jeżeli $\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z_0)$, to istnieje takie m, iż

$$|f(z_0) - f_m(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

Wreszcie, jeżeli funkcje $f_n(z)$ są ciągłe w zbiorze Z dla punktu z_0, to istnieje takie $\delta' > 0$, iż nierówność

$$|z - z_0| < \delta' \tag{19}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f_m(z_0) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{20}$$

Niech teraz δ oznacza liczbę dodatnią, mniejszą od δ_0 i δ'.

Nierówność (14) będzie pociągała za sobą każdą z nierówności (16) i (19) i przeto będą zachodziły jednocześnie nierówności (17), (18) i (20), dające w jednej chwili:

$$|f(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Nierówność (14) pociąga więc za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówności (15), co dowodzi, że warunek naszego twierdzenia jest konieczny.

Załóżmy teraz, że warunek naszego twierdzenia jest spełniony i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią: istnieje więc odpowiednie dodatnie δ takie, iż przy pewnem m nierówność (14) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (15). W szczególności więc mamy też

$$| f_m(z) - f(z_0) | < \varepsilon. \tag{21}$$

Wobec ciągłości funkcji $f_m(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0, istnieje takie $\delta' > 0$, iż nierówność

$$| z - z_0 | < \delta' \tag{22}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$| f_m(z) - f_m(z_0) | < \varepsilon. \tag{23}$$

Oznaczmy przez δ_0 liczbę dodatnią, mniejszą od δ i δ', i niech z oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność

$$| z - z_0 | < \delta_0. \tag{24}$$

Nierówność (24) będzie pociągała za sobą nierówność (14) i (22) i przeto będą zachodziły jednocześnie nierówności (15), (21) i (23), dające w jednej chwili

$$| f(z_0) - f(z) | < \varepsilon \tag{25}$$

Dla każdej więc liczby z zbioru Z nierówność (24) pociąga za sobą nierówność (25), co dowodzi, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0. Warunek naszego twierdzenia jest więc wystarczający.

Twierdzenie 143 udowodniliśmy zatem w zupełności. Zauważymy, że twierdzenie nasze pozostaje prawdziwem, a dowód jego pozostaje bez zmiany, jeżeli zamiast zakładać, że funkcja $f(z)$ jest granicą ciągu $f_n(z)$ w całym zbiorze Z, założymy tylko, że funkcja $f(z)$ jest określona w zbiorze Z, oraz że wartość $f(z_0)$ jest granicą ciągu $f_n(z_0)$.

§ 114. Ciąg nieskończony funkcji $f_n(z)$, zbieżny w zbiorze Z, nazywamy (według **Borela**) w tym zbiorze *zbieżnym quasi-jednostajnie*, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε i każdej liczby naturalnej p istnieje liczba naturalna $q > p$ taka, iż dla każdego punktu z zbioru Z przy pewnym wskaźniku $n = n(z)$ (zależnym od z), spełniającym nierówności

$$p < n(z) < q,$$

zachodzi nierówność

$$| f_{n(z)}(z) - f(z) | < \varepsilon,$$

gdzie $f(z)$ oznacza granicę ciągu $f_n(z)$.

Twierdzenie 144. *Jeżeli ciąg funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze Z, jest zbieżny quasi-jednostajnie w tym zbiorze, to granica tego ciągu jest funkcją ciągłą w zbiorze Z.*

Dowód. Załóżmy, że $f_n(z)$ jest ciągiem funkcji ciągłych w zbiorze Z, zbieżnym quasi-jednostajnie w tym zbiorze: połóżmy w zbiorze Z

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z), \tag{26}$$

i niech z_0 oznacza dany punkt zbioru Z, zaś — ε dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec (26) mamy, w szczególności $\lim_{n=\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$: istnieje więc liczba naturalna p taka iż

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > p. \tag{27}$$

Z drugiej strony, z definicji zbieżności quasi-jednostajnej wynika, że dla liczb dodatnich ε i p istnieje liczba $q > p$ taka iż dla każdego punktu z zbioru Z przy pewnym (zależnym od z) wskaźniku $n = n(z)$, spełniającym nierówności

$$p < n(z) < q \tag{28}$$

zachodzi nierówność

$$| f_{n(z)}(z) - f(z) | < \varepsilon. \tag{29}$$

W myśl założenia o ciągłości wyrazów ciągu $f_k(z)$ $(k = 1,2,3,...)$ w zbiorze Z, istnieje dla każdego wskaźnika k liczba dodatnia δ_k taka iż przy wszelkiem z należącem do zbioru Z, nierówność

$$| z - z_0 | < \delta_k \tag{30}$$

pociąga za sobą nierówność

$$| f_k(z) - f_k(z_0) | < \varepsilon. \tag{31}$$

Oznaczmy przez δ liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb dodatnich

$$\delta_{p+1}, \ \delta_{p+2}, \ldots \ \delta_{q-1}$$

i niech z oznacza dowolny dany punkt zbioru Z, spełniający nierówność

$$| z - z_0 | < \delta: \tag{32}$$

punkt z będzie więc spełniał każdą z nierówności (30) dla $k = p + 1$, $p + 2, \ldots \ q - 1$, co pociąga za sobą dla tychże wskaźników k każdą z nierówności (31), czyli

$$| f_k(z) - f_k(z_0) | < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad k = p + 1, \ \ p + 2, \ldots \ q - 1. \tag{33}$$

Wobec (28) i (33) będziemy mieli:

$$|f_{n(\nu)}(z) - f_{n(\nu)}(z_0)| < \varepsilon, \tag{34}$$

zaś wobec (28) i (27) mamy:

$$|f_{n(\nu)}(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Nierówności (29), (34) i (35) dają w jednej chwili:

$$|f(z) - f(z_0)| < 3\varepsilon. \tag{36}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego punktu z zbioru Z, spełniającego nierówność (32), zachodzi nierówność (36), co dowodzi, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0. Udowodniliśmy więc twierdzenie 144.

Twierdzenie nasze udowodniliśmy, nie czyniąc żadnych zastrzeżeń co do zbioru Z: jeżeli, w szczególności, zbiór Z jest ograniczony i zamknięty, to prawdziwem jest i twierdzenie odwrotne, mianowicie

Twierdzenie 145. *Jeżeli ciąg $f_n(z)$ funkcji ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z, zmierza w całym zbiorze Z do funkcji ciągłej w tym zbiorze, to uważany ciąg jest zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z.*

Dowód. Załóżmy więc, że ciąg $f_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ funkcyj ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z zmierza w tym zbiorze do funkcji ciągłej $f(z)$ i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, p — dowolną daną liczbę naturalną.

Wobec założenia, że w zbiorze Z mamy

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z), \tag{37}$$

istnieje dla każdego danego punktu z zbioru Z wskaźnik $n > p$, taki iż

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon:$$

niech $n(z)$ oznacza najmniejszy z takich wskaźników i połóżmy $\varphi(z) = \frac{1}{n(z)}$: będzie to więc funkcja dodatnia, określona w całym zbiorze Z. Powiadam, że kres dolny l funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze Z jest dodatni.

W samej rzeczy, załóżmy, że mamy $l = 0$. W myśl tw. 135 (wobec ograniczoności zbioru Z) istnieje więc punkt ζ taki iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ wszystkich tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z-\zeta| < \varsigma \tag{38}$$

jest zerem, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ należy do Z. Ponieważ zaś w zbiorze Z zachodzi wzór (37), więc przy pewnem $m > p$ mamy

$$|f_m(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon/3. \tag{39}$$

Z drugiej strony, wobec ciągłości funkcji $f(z)$ oraz $f_m(z)$ w zbiorze Z, dla punktu ζ istnieje takie dodatnie ς, iż nierówność (38) pociąga za sobą nierówności

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon/3$$

oraz

$$|f_m(z) - f_m(\zeta)| < \varepsilon/3,$$

które, wobec (39), dają w jednej chwili nierówność

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon. \tag{40}$$

Dla każdego więc punktu z zbioru $Z(\varsigma)$ zachodziłaby nierówność (40) i przeto, w myśl definicji funkcji $n(z)$, mielibyśmy w całym zbiorze Z nierówność

$$n(z) \leq m,$$

skąd

$$\varphi(z) \geq 1/m,$$

co dowodzi, że kres dolny funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ jest dodatni, wbrew łasności punktu ζ.

Dowiedliśmy więc, że kres dolny l funkcji $\varphi(z)$ w całym zbiorze Z jest dodatni: mamy więc dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$\varphi(z) \geq l,$$

skąd

$$n(z) \leq 1/l:$$

oznaczając przez q liczbę naturalną $> 1/l$ będziemy więc mieli w całym zbiorze Z nierówność

$$p < n(z) < q,$$

co dowodzi, że ciąg $f_n(z)$ jest w zbiorze Z zbieżny quasi-jednostajnie, c. b. d. o.

Zestawiając dwa ostatnie twierdzenia, otrzymujemy w jednej chwili

Twierdzenie 146 (Arzelà): *Na to żeby granica ciągu funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z, była funkcją ciągłą w tym zbiorze, potrzeba i wystarcza, iżby uważany ciąg był zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z.*

§ 115. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$, którego składniki są funkcjami zmiennej z w pewnym zbiorze Z nazywamy w tym zbiorze zbieżnym jednostajnie, względnie quasi-jednostajnie, jeżeli ciąg sum cząstkowych $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(z)$ jest w zbiorze Z zbieżny jednostajnie, względnie quasi-jednostajnie.

Więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$ nazywamy zbieżnym jednostajnie w zbiorze Z, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba μ (zależna jedynie od ε) taka, iż przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z zachodzi nierówność

$$| R_n(z) | < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

gdzie $R_n(z)$ oznacza n tą resztę uważanego szeregu, czyli $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\varphi_k(z)$.

Podobnież moglibyśmy określić bezpośrednio zbieżność quasi-jednostajną szeregu

Wszystkie wyprowadzone dla ciągów funkcji twierdzenia i uwagi dają się w jednej chwili przenieść (przy odpowiedniej zmianie ich stylizacji) na szeregi funkcji. W szczególności, z uwagi że ciągłość każdego ze składników szeregu $\Sigma\varphi_n(z)$ pociąga za sobą ciągłość każdej z sum cząstkowych i naodwrót, otrzymujemy z tw. 142 i 146, twierdzenia:

Twierdzenie 147. *Suma szeregu funkcji ciągłych w zbiorze Z, zbieżnego jednostajnie w tym zbiorze, jest funkcją ciągłą w zbiorze Z.*

Twierdzenie 148. *Na to żeby suma szeregu nieskończonego funkcji ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z była funkcją ciągłą w tym zbiorze, potrzeba i wystarcza iżby uważany szereg był zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z.*

Z definicji zbieżności quasi-jednostajnej wynika natychmiast, że szereg zbieżny jednostajnie w zbiorze Z jest w tym zbiorze tembardziej zbieżnym quasi-jednostajnie. Godnem uwagi jest, że dla szeregu funkcji jednego znaku twierdzenie to daje się odwrócić, mianowicie:

Szereg funkcji jednego znaku, zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z, jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie.

W samej rzeczy, załóżmy że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$, gdzie funkcje $\varphi_n(z)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ są wszystkie jednego znaku (t. j. stale $\varphi_n(z)\geq 0$ lub stale $\varphi_n(z)\leq 0$) jest zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Dla liczby ε i liczby $p=1$ istnieje więc liczba naturalna q, taka iż dla każdego punktu z zbioru Z przy pewnym (zależnym od z) wskaźniku $n=n(z)$, spełniającym nierówności

$$1<n(z)<q, \tag{41}$$

zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{k=n(z)+1}^{\infty}\varphi_k(z)\right|<\varepsilon. \tag{42}$$

Ponieważ, w myśl założenia, wszystkie składniki $\varphi_k(z)$ są jednego znaku, więc nierówność (42), z uwagi na (41), pociąga za sobą nierówność

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}\varphi_k(z)\right|<\varepsilon,\quad \text{dla}\quad m>q,$$

dla każdego punktu z zbioru Z, co dowodzi, że uważany szereg jest zbieżny jednostajnie w zbiorze Z, c. b. d. o.

Zatem, dla szeregów funkcyj, których składniki są jednego znaku, zbieżność quasi-jednostajna jest równoważna zbieżności jednostajnej. Stąd, w szczególności, z tw. 148 i z uwagi, że zbiór liczb każdego przedziału skończonego jest ograniczony i zamknięty, otrzymujemy

Twierdzenie 149. *Na to żeby suma szeregu nieskończonego funkcyj jednego znaku, ciągłych w przedziale skończonym, była funkcją ciągłą w tym przedziale, potrzeba i wystarcza, iżby uważany szereg był w uważanym przedziale zbieżny jednostajnie.*

§ **116.** Powiemy teraz parę słów o tem jak się ma zbieżność jednostajna szeregu do jego zbieżności bezwzględnej: okażemy, że własności te są od siebie niezależne. Mianowicie:

Szereg funkcyj może być w zbiorze Z zbieżnym jednostajnie, nie będąc dla żadnego punktu tego zbioru zbieżnym bezwzględnie, z drugiej zaś strony szereg funkcyj może być w całym zbiorze Z zbieżnym bezwzględnie, nie będąc jednak w tym zbiorze zbieżnym jednostajnie.

Np. szereg

$$f(z)=\frac{z}{1}-\frac{z}{1}+\frac{z}{2}-\frac{z}{2}+\frac{z}{3}-\frac{z}{3}+\cdots$$

jest, dla $0 < |z| \leq 1$, zbieżny jednostajnie, gdyż, oznaczając przez $R_n(z)$ jego n-tą resztę, mamy, jak łatwo widzieć: $R_{2k}(z) = 0$, $R_{2k-1}(z) = \frac{z}{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, skąd, dla $0 < |z| \leq 1$:

$$|R_n(z)| \leq \frac{2}{n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

z drugiej zaś strony przy żadnem $z \neq 0$ uważany szereg nie jest zbieżny bezwzględnie (wobec rozbieżności szeregu harmonicznego).

Szereg zaś geometryczny

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

jest dla $|z| < 1$ zbieżny bezwzględnie, ale nie jednostajnie, gdyż, oznaczając przez $R_n(z)$ jego n-tą resztę, mamy oczywiście, dla $|z| < 1$, $R_n(z) = \frac{z^n}{1-z}$, skąd, np. dla $z = 1 - \frac{1}{2n}$:

$$R_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 2n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq 2n\left(1 - \frac{n}{2n}\right) = n.$$

Jak wiemy, w szeregu zbieżnym bezwzględnie zmiana porządku składników nie wpływa na wartość sumy. Godnem uwagi jest jednak, że *przez zmianę porządku składników w szeregu bezwzględnie zbieżnym możemy niekiedy z szeregu zbieżnego jednostajnie otrzymać szereg zbieżny niejednostajnie.* Wyjaśnimy to na przykładzie.

Weźmy pod rozwagę w przedziale $(0, 1)$ szereg

$$\left.\begin{aligned} S(x) = x(1-x) - x(1-x) + \\ + x^2(1-x) - x^2(1-x) + x^3(1-x) - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć, oznaczając przez $S_n(x)$ oraz $R_n(x)$ odpowiednie sumy cząstkowe i reszty:

$$S_{2k}(x) = 0, \quad S_{2k-1}(x) = x^k(1-x) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{44}$$

skąd w jednej chwili, dla $0 \leq x \leq 1$:

$$S(x) = \lim_{n=\infty} S_n(x) = 0$$

i przeto, wobec (44):

$$R_{2k}(x) = 0, \quad R_{2k-1}(x) = -x^k(1-x) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{45}$$

Lecz dla $0 \leq x < 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$ mamy:

$$0 \leq x^k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}-1}\right)^k} < \frac{1}{1 + \frac{k}{\sqrt{k}-1}} < \frac{1}{\sqrt{k}},$$

skąd, wobec (45):

$$|R_{2k-1}(x)| = x^k(1-x) < \frac{1}{\sqrt{k}},$$

zaś dla $1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \leq x \leq 1$ mamy

$$0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

skąd, wobec (45):

$$|R_{2k-1}(x)| = x^k(1-x) \leq 1 - x \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

W każdym więc razie dla $0 \leq x \leq 1$ mamy

$$|R_{2k-1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

skąd, wobec (45) wnosimy, że stale

$$|R_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{n+1}}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

co dowodzi, że szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie w całym przedziale $(0, 1)$.

Powiadam dalej, że szereg (43) jest również zbieżny bezwzględnie w całym przedziale $(0, 1)$. W samej rzeczy, szeregiem odpowiednich modułów jest dla szeregu (43) oczywiście szereg

$$\left.\begin{aligned} \sigma(x) = x(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \\ + x^2(1-x) + x^3(1-x) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Suma $\sigma_{2k}(x)$ pierwszych $2k$ składników szeregu (46) wynosi

$$\sigma_{2k}(x) = 2\left[x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots + x^k(1-x)\right] = 2\left[x - x^{k+1}\right],$$

skąd znajdujemy w jednej chwili:

$$\sigma_{2k}(x) \leq 2x, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

co dowodzi ograniczoności sum cząstkowych szeregu (46) o składnikach nieujemnych, a więc i jego zbieżności.

Szereg (43) jest więc zbieżny w całym przedziale (0, 1) bezwzględnie i jednostajnie. Zmieńmy jednak porządek składników naszego szeregu, wypisując po każdych dwóch kolejnych jego składnikach dodatnich jeden składnik ujemny. Otrzymamy w ten sposób szereg

$$\left.\begin{array}{l} x(1-x)+x^2(1-x)-x(1-x)+x^3(1-x)+ \\ +x^4(1-x)-x^2(1-x)+\ldots, \end{array}\right\} \quad (47)$$

w którym suma $S'_{3k}(x)$ pierwszych $3k$ składników wynosi, jak łatwo widzieć

$$S'_{3k}(x)=x^{k+1}(1-x)+x^{k+2}(1-x)+\ldots+x^{2k}(1-x)=x^{k+1}(1-x^k),$$

skąd w jednej chwili, oznaczając przez $R'_n(x)$ odpowiednie reszty:

$$-R'_{3k}(x)=x^{k+1}(1-x^k), \quad \text{dla} \quad 0\leq x\leq 1, \quad k=1,2,3,\ldots$$

i przeto, np. dla $x=\frac{1}{\sqrt[k]{2}}$:

$$-R'_{3k}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)=\frac{1}{4\sqrt[k]{2}}\geq\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\ldots,$$

co dowodzi, że szereg (47) nie jest zbieżny jednostajnie w przedziale (0, 1).

Możnaby udowodnić, że *na to żeby szereg funkcji* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$ *był w zbiorze Z zbieżnym jednostajnie przy wszelkiem uporządkowaniu składników, potrzeba i wystarcza, aby szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(z)|$ *był w zbiorze Z zbieżnym jednostajnie* [1]).

Zauważymy jednak, że z *ciągu* zbieżnego jednostajnie nie możemy przez żadną zmianę porządku wyrazów otrzymać ciągu zbieżnego niejednostajnie. W samej rzeczy, jeżeli ciąg $f_n(z)$ jest w zbiorze Z zbieżny jednostajnie i jeżeli $f(z)=\lim_{n=\infty} f_n(z)$, to dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie μ (niezależne od z), iż $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ dla $n>\mu$, w całym zbiorze Z. Jeżeli teraz $f_{n_k}(z)$ $(k=1,2,\ldots)$ oznacza ciąg nieskończony, różniący się tylko porządkiem wyrazów od ciągu $f_n(z)$, to ciąg wskaźników n_k $(k=1,2,\ldots)$ różni się tylko porządkiem wyrazów od ciągu naturalnego, i przeto

[1]) Zob. mój komunikat „O wpływie porządku składników na zbieżność jednostajną szeregu". Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. 1910.

dla liczby μ istnieje liczba ν taka, iż stale $n_k > \mu$ dla $k > \nu$. Będzie więc $| f_{n_k}(z) - f(z) | < \varepsilon$ dla $k > \nu$, w całym zbiorze Z, co dowodzi, że ciąg $f_{n_k}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie.

§ 117. Jeżeli mamy ciąg nieskończony szeregów skończonych

$$\sum_{k=1}^{p} u_{k,n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots.)$$

i jeżeli każdy ze składników $u_{k,n}$ $(k = 1, 2, \ldots p)$ jest ciągiem zbieżnym dla $n = \infty$, to, w myśl tw. o granicy sumy, granicą dla $n = \infty$ szeregu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{k,n}$ jest suma granic kolejnych jego składników, czyli

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{p} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{p} \lim_{n=\infty} u_{k,n}.$$

Twierdzenie to może może jednak nie być prawdziwem, jeżeli uważany szereg jest nieskończony. Mówiąc krócej, granicą sumy szeregu nieskończonego może nie być suma granic kolejnych jego składników

Weźmy np. pod rozwagę ciąg nieskończony szeregów

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+k)\,(n+k-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mamy tu oczywiście

$$\lim_{n=\infty} u_{k,n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{(n+k)\,(n+k-1)} = 0, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_{k,n} = 0;$$

z drugiej strony, wobec tożsamości

$$\frac{n}{(n+k)\,(n+k-1)} = \frac{n}{n+k-1} - \frac{n}{n+k},$$

znajdujemy

$$\sum_{k=1}^{p} u_{k,n} = 1 - \frac{n}{n+p}, \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ p = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = 1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

i przeto również

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = 1.$$

Mamy więc w uważanym przypadku

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} \neq \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_{k,n},$$

pomimo że obie strony posiadają oznaczoną wartość.

Okażemy jednak, że jeżeli szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

są zbieżne jednostajnie (t. j. jeżeli dla każdej liczby dodatni istnieje takie μ, zależne od ε, lecz niezależne od n, iż

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} u_{k,n} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu$$

przy wszelkiem naturalnem n) i jeżeli każda z granic $\lim\limits_{n=\infty} u_{k,n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, istnieje i jest skończoną, to wzór

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_{k,n}$$

jest prawdziwy.

W samej rzeczy, załóżmy, że szeregi (48) są zbieżne je stajnie oraz że istnieje każda z granic

$$\lim_{n=\infty} u_{k,n}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

i jest skończoną.

Niech ε oznacza daną liczbę dodatnią: wobec jednosta zbieżności szeregów (48) istnieje takie μ (zależne jedynie o iż przy wszelkiem naturalnem n zachodzi nierówność (49). Stąd, tembardziej:

$$\left|\sum_{k=q+r+1}^{\infty} u_{k,n}\right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{52}$$

i przeto, wobec (49) i (52):

$$\left|\sum_{k=q+1}^{q+r} u_{k,n}\right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu, \quad r = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$, w myśl tw. o granicy sumy szeregu skończonego:

$$\left|\sum_{k=q+1}^{q+r} \lim_{n=\infty} u_{k,n}\right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, \tag{53}$$

co dowodzi zbieżności szeregu

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_{k,n}. \tag{54}$$

Wobec (53) mamy, dalej:

$$\left|\sum_{k=q+1}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_{k,n}\right| \leqq 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu. \tag{55}$$

Oznaczając przez q jakąkolwiek *daną* liczbę naturalną $> \mu$ będziemy więc mieli, wobec (54) i (55):

$$\left|S - \sum_{k=1}^{q} \lim_{n=\infty} u_{k,n}\right| \leqq 2\varepsilon. \tag{56}$$

Z drugiej strony, wobec istnienia i skończoności każdej z granic (51), istnieje dla liczby dodatniej ε przy każdem naturalnem k odpowiednie μ_k takie iż

$$\left|u_{k,n} - \lim_{p=\infty} u_{k,p}\right| < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \text{dla} \quad n > \mu_k. \tag{57}$$

Stąd, oznaczając przez μ_0 liczbę dodatnią, większą od każdej z liczb $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_q$, będziemy dla $n > \mu_0$ mieli tembardziej $n > \mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots q)$ i przeto, wobec (57)

$$\left|u_{k,n} - \lim_{p=\infty} u_{k,p}\right| < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \text{dla} \quad n > \mu_0, \quad k = 1, 2, \ldots q,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=1}^{q} u_{k,n} - \sum_{k=1}^{q} \lim_{p=\infty} u_{k,p} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu_0. \tag{58}$$

Wreszcie, nierówność (49) daje, wobec $q > \mu$:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} - \sum_{k=1}^{q} u_{k,n} \right| < \varepsilon. \tag{59}$$

Nierówności (56), (58) i (59) dają w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} - S \right| < 4\varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu_0,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = S$$

i, wobec (54), daje wzór (50). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 150. *Jeżeli szeregi* $\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *są zbieżne jednostajnie i jeżeli każda z granic* $\lim_{n=\infty} u_{k,n}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *istnieje i jest skończoną, to mamy wzór*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_{k,n}$$

(przyczem obie strony tego wzoru są skończone).

ROZDZIAŁ XIV.

Rozwijanie funkcyj ciągłych na szeregi wielomianów.

§ 118. Zajmiemy się teraz dowodem *twierdzenia* Weierstrass'a, że każda funkcja zmiennej rzeczywistej, ciągła w danym skończonym przedziale, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych [1]).

[1]) Por. Prace mat.-fiz. T. XXII, p. 59—68.

W tym celu wyprowadzimy przedewszystkiem pewien wzór na funkcję $|x|$.

Lemmat. *Dla* $-1 \leq x \leq 1$ *zachodzi przy wszelkiem naturalnem* n *nierówność*

$$0 \leq |x| - x\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} < \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Dowód. Połóżmy, przy naturalnem n:

$$|x| - x\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = r_n; \tag{2}$$

zbadamy osobno przypadki: $x \geq 0$ oraz $x < 0$.

1) $x \geq 0$. Mamy tu $|x| = x$, zatem, w myśl (2):

$$r_n = \frac{2x}{(1+x)^n + 1}. \tag{3}$$

Dla $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ licznik wyrażenia (3) będzie oczywiście nieujemny i nie większy od $\frac{2}{\sqrt{n}}$, mianownik zaś większy od jedności, zatem

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

co, wobec (2), dowodzi nierówności (1) w uważanym przypadku.

Dla $\frac{1}{\sqrt{n}} < x \leq 1$ mamy:

$$(1+x)^n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} > \sqrt{n};$$

mianownik wyrażenia (3) jest tu więc większy od $\sqrt{n}$, a ponieważ licznik jego jest dodatni oraz ≤ 2, więc mamy

$$0 < r_n < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

co znowu, wobec (2), dowodzi prawdziwości nierówności (1).

2) $x < 0$. Mamy teraz $|x| = -x$, skąd, wobec (2):

$$r_n = \frac{-2x(1+x)^n}{(1+x)^n + 1}. \tag{4}$$

Dla $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq x < 0$ zachodzą oczywiście nierówności:

$$0 \leq -2x \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad 0 \leq (1+x)^n < 1, \quad \text{oraz} \quad (1+x)^n + 1 \geq 1,$$

skąd, wobec (4):

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

co, wobec (2), dowodzi prawdziwości (1).

Dla $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{n}}$ (co oczywiście jest możliwe tylko w razie $n > 1$), mamy

$$0 < -2x \leq 2, \quad (1+x)^n + 1 \geq 1,$$

$$0 \leq (1+x)^n < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}-1}\right)^n} < \frac{1}{1 + \frac{n}{\sqrt{n}-1}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

zatem, wobec (4):

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

co, wobec (2), znowu dowodzi prawdziwości wzoru (1).

Lemmat nasz udowodniliśmy zatem w zupełności. Zastępując w nim x przez x/s, gdzie s jest liczbą naturalną, i mnożąc wszystkie części nierówności przez s, otrzymujemy w jednej chwili następujący

Wniosek. *Przy wszelkich naturalnych n i s zachodzi dla $-s \leq x \leq s$ nierówność*

$$0 \leq |x| - x\frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n} < \frac{2s}{\sqrt{n}}. \tag{5}$$

Niech teraz (a, b) oznacza dany (skończony) przedział. Wyznaczmy liczbę naturalną s tak, iżby było

$$s \geq |a| \quad \text{oraz} \quad s \geq |b|;$$

dla $a \leq x \leq b$ będziemy mieli tembardziej $-s \leq x \leq s$, zatem i nierówność (5), skąd w jednej chwili:

$$|x| = \lim_{n=\infty} x\frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n},$$

Wzór ten przedstawia funkcję $|x|$ w przedziale (a, b) jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj wymiernych.

Uwaga. Z nierówności (1) moglibyśmy też z łatwością wywnioskować, że przy wszelkim rzeczywistem x mamy

$$|x| = \lim_{k=\infty} x \frac{(k+x)^{k^3} - k^{k^3}}{(k+x)^{k^3} + k^{k^3}},$$

oraz że ciąg, stojący w wypisanym wzorze pod znakiem granicy, jest zbieżny jednostajnie w każdym skończonym przedziale. (Nie jest on jednak zbieżny jednostajnie w całym zbiorze liczb rzeczywistych).

Zastosujmy teraz wzór (5) do rozwinięcia funkcji wymiernej na szereg wielomianów.

Niech $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ oznacza daną funkcję wymierną, (a, b) — dany (skończony) przedział (Funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są więc dane wielomiany całkowite względem x). Skoro funkcja $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ma być określoną w całym przedziale (a, b), to musimy założyć, że jej mianownik, czyli wielomian $\psi(x)$, nie staje się w tym przedziale nigdzie zerem. Znak wielomianu $\psi(x)$ musi więc być w przedziale (a, b) stały (gdyż inaczej funkcja ciągła $\psi(x)$, zmieniając znak w przedziale (a, b), przechodziły w tym przedziale conajmniej raz przez zero), zaś moduł $|\psi(x)|$ musi być w przedziale (a, b) stale niemniejszy od pewnej liczby dodatniej δ. (Gdyż funkcja $|\psi(x)|$, jako ciągła, w myśl tw. 70. dosięga w przedziale (a, b) swego kresu dolnego, który nie może być zerem, skoro $\psi(x) \neq 0$ dla $a \leq x \leq b$).

Bez ujmy dla ogólności naszych rozważań możemy zakładać, że wielomian $\psi(x)$ jest w przedziale (a, b) stale dodatni (gdyż w przeciwnym razie wystarczyłoby pomnożyć licznik i mianownik naszej funkcji wymiernej przez -1)

Zakładamy więc, że mamy stale

$$\psi(x) \geq \delta, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \tag{6}$$

gdzie δ jest liczbą dodatnią, niezależną od x.

W przedziale skończonym wielomian całkowity, jako funkcja ciągła, jest ograniczony (§ 56): istnieje więc liczba dodatnia d, niezależna od x, taka iż stale

$$\psi(x) \leq 2d + \delta, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b; \tag{7}$$

podobnież istnieje liczba $M > 0$, niezależna od x, taka iż

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b. \tag{8}$$

Wobec (6) i (7) mamy w całym przedziale (a, b):

$$-d \leq d + \delta - \psi(x) \leq d,$$

skąd

$$\left|\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right| \leq \frac{d}{d+\delta},$$

oraz, przy naturalnem m:

$$\left|\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right|^m \leq \left(\frac{d}{d+\delta}\right)^m = \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{d}\right)^m} \leq \frac{1}{1+m\frac{\delta}{d}} < \frac{d}{m\delta}, \tag{9}$$

dla $a \leq x \leq b$.

Dalej, z łatwością sprawdzamy tożsamość:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{d+\delta} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^k + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^m \tag{10}$$

(gdzie $(\ )^0$ należy zastąpić przez 1), która, z uwagi, że w myśl (6), (8) i (9)

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^m\right| < \frac{Md}{m\delta^2}, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b,$$

daje w jednej chwili:

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^k\right| < \frac{Md}{m\delta^2}, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \tag{11}$$

przy wszelkiem naturalnem m. Wynika stąd natychmiast rozwinięcie naszej funkcji w przedziale (a, b) na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{d+\delta}\left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^k.$$

Udowodniliśmy więc, że *każda funkcja wymierna, której mianownik wewnątrz danego skończonego przedziału ani też dla jego granic nie staje się zerem, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.*

Przyjmijmy, w szczególności

$$a = -s, \quad b = s,$$

$$\varphi(x) = x\left[(s+x)^n - s^n\right], \quad \psi(x) = (s+x)^n + s^n,$$

gdzie s i n są dwie dane liczby naturalne.

Z łatwością sprawdzamy, że można tu przyjąć:

$$\delta = s^n, \quad d = 2^{n-1}s^n, \quad M = (2^n - 1)\, s^{n+1};$$

wobec (5) i (11) mamy więc

$$\left|\,|x| - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x\,[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1}+1)s^n}\left(\frac{2^{n-1}s^n - (s+x)^n}{(2^{n-1}+1)s^n}\right)^k\right| < \frac{2s}{\sqrt{n}} + \frac{2^{n-1}(2^n-1)s}{m}$$

— przy wszelkich naturalnych s, n, m, dla $-s \leq x \leq s$.

Oznaczając przez $W(x)$ wielomian całkowity (o współczynnikach wymiernych)

$$W(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x\,[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1}+1)\,s^n}\left(\frac{2^{n-1}s^n - (s+x)^n}{(2^{n-1}+1)\,s^n}\right)^k \tag{12}$$

będziemy więc mieli przy wszelkich naturalnych s, n i m:

$$\left|\,|x| - W(x)\right| < \frac{2s}{\sqrt{n}} + \frac{2^{n-1}(2^n-1)s}{m}, \quad \text{dla} \quad -s \leq x \leq s. \tag{13}$$

§ **119.** Wprowadzimy teraz funkcję pomocniczą

$$\varphi(x) = \left|\frac{x+1}{2}\right| + \left|\frac{x-1}{2}\right| - |x|. \tag{14}$$

Dla $x \leq -1$ mamy oczywiście, wobec (14):

$$\varphi(x) = -\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} + x = 0;$$

dla $-1 \leq x \leq 0$, znajdujemy:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} + x = 1 + x;$$

dla $0 \leq x \leq 1$ będzie

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} - x = 1 - x;$$

wreszcie, dla $x \geq 1$:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} - x = 0.$$

Mamy więc:

$$\varphi(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{dla } |x| \geq 1, \\ 1 + x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{array}\right. \tag{15}$$

Niech teraz $f(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, ciągłą dla $-1 \leq x \leq 1$.

Połóżmy przy wszelkiem danem naturalnem q, dla $-1 \leq x \leq 1$:

$$f_q(x) = \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) \varphi(qx - p) \tag{16}$$

i oznaczmy przez skrócenie

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \varphi(qx - p) = u_p. \tag{17}$$

W razie $|qx - p| \geq 1$ będzie, w myśl wzorów (15), czynnik $\varphi(qx - p) = 0$: wystarczy więc we wzorze (16) zatrzymać tylko te składniki u_p, dla których p, będąc bezwzględnie $\leq q$, spełnia nierówności: $-1 < qx - p < 0$, lub nierówności: $0 \leq qx - p < 1$. W pierwszym przypadku otrzymujemy dla p nierówności

$$qx < p < qx + 1, \quad \text{dające} \quad p = \mathrm{E}qx + 1,$$

w drugim zaś przypadku mamy

$$qx - 1 < p \leq qx, \quad \text{skąd} \quad p = \mathrm{E}qx.$$

Różnemi od zera wyrazami u_p $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ są więc conajwyżej wyrazy $u_{\mathrm{E}qx}$ oraz $u_{\mathrm{E}qx+1}$: pierwszy z nich jest zawsze składnikiem sumy (16), gdyż, wobec $-1 \leq x \leq 1$, mamy (przy naturalnem q): $-q \leq qx \leq q$, skąd też $-q \leq \mathrm{E}qx \leq q$; co się zaś tyczy wyrazu $u_{\mathrm{E}qx+1}$, to jest on składnikiem sumy (16) wtedy i tylko wtedy, jeżeli $-q \leq \mathrm{E}qx + 1 \leq q$. Lewa część ostatniej nierówności jest zawsze prawdziwa (gdyż przy naturalnem q, dla $|x| \leq 1$ mamy $\mathrm{E}qx + 1 > \mathrm{E}qx \geq -q$), prawa zaś nie jest prawdziwą tylko wtedy, jeżeli $\mathrm{E}qx > q - 1$, t. j. jeżeli $qx \geq \mathrm{E}qx \geq q$, co daje $x \geq 1$, czyli (wobec $x \leq 1$): $x = 1$. Wyraz $u_{\mathrm{E}qx+1}$ jest więc składnikiem sumy (16) zawsze, z wyjątkiem przypadku $x = 1$. Mamy więc

$$\left.\begin{aligned} f_q(x) &= u_{\mathrm{E}qx} + u_{\mathrm{E}qx+1}, \quad \text{dla} \quad -1 \leq x < 1, \\ \text{oraz} \qquad f_q(x) &= u_{\mathrm{E}qx}, \quad \text{dla} \quad x = 1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

W myśl (17) oraz wobec (15), znajdujemy, z uwagi że $0 \leq qx - \mathrm{E}qx < 1$, oraz $-1 \leq qx - \mathrm{E}qx - 1 < 0$:

$$u_{\mathrm{E}qx} = f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}\right) \varphi(qx - \mathrm{E}qx) = f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}\right)(1 - qx + \mathrm{E}qx),$$

oraz

$$u_{\mathrm{E}qx+1} = f\left(\frac{\mathrm{E}qx+1}{q}\right)\varphi(qx - \mathrm{E}qx - 1) = f\left(\frac{\mathrm{E}qx+1}{q}\right)(qx - \mathrm{E}qx);$$

jest więc w myśl 18):

$$\left.\begin{aligned} f_q(x) = f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}\right) + \left[f\left(\frac{\mathrm{E}qx+1}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}\right)\right](qx - \mathrm{E}qx) \\ \text{dla } -1 \leq x < 1, \end{aligned}\right| \tag{19}$$

zaś dla $x = 1$, w myśl (18), (17) i (15):

$$f_q(1) = u_q = f(1)\ \varphi(0) = f(1). \tag{20}$$

Mamy oczywiście przy wszelkiem naturalnem q oraz rzeczywistem x:

$$\left|\frac{\mathrm{E}qx}{q} - x\right| < \frac{1}{q},\quad \frac{\mathrm{E}qx+1}{q} - \frac{\mathrm{E}qx}{q} = \frac{1}{q},$$

zaś, dla $-1 \leq x < 1$:

$$-1 \leq \frac{\mathrm{E}qx}{q} < 1,\ -1 < \frac{\mathrm{E}qx+1}{q} \leq 1$$

(gdyż, wobec $x < 1$, mamy, przy naturalnem q, $qx < q$, skąd $qx + 1 < q + 1$, co daje: $\mathrm{E}(qx+1) \leq q$).

Wobec tych nierówności, oraz w myśl założenia, ze funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $-1 \leq x \leq 1$, wnosimy o istnieniu dla danego dodatniego ε liczby q_0 takiej, iż dla $q > q_0$ stale

$$\left|f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{oraz}\ \left|f\left(\frac{\mathrm{E}qx+1}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

przy wszelkiem x, spełniającem nierówność $-1 \leq x \leq 1$; stąd, zważywszy jeszcze, że $|\,qx - \mathrm{E}qx\,| < 1$, otrzymujemy w jednej chwili, wobec (19), dla $-1 \leq x < 1$:

$$|\,f_q(x) - f(x)\,| < \varepsilon,\ \text{ dla }\ q > q_0, \tag{21}$$

co, w myśl (20), pozostaje prawdziwem i dla $x = 1$.

Nierówność (21) zachodzi więc przy wszelkiem x, spełniającem nierówności $-1 \leq x \leq 1$. Dowodzi to, że ciąg $f_q(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ *jednostajnie* zmierza do $f(x)$.

Przyjmijmy teraz, przy danem naturalnem q:

$$s = 2q,\quad n = 16s^2q^4,\quad m = 2^n(2^n - 1)\,sq^2 \tag{22}$$

i wyznaczmy wielomian $W(x)$ ze wzoru (12).

Dla $|x| \leq 1$ oraz $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm q$ mamy oczywiście, wobec $s = 2q$:

$$\left|\frac{qx - p + 1}{2}\right| < s, \quad \left|\frac{qx - p - 1}{2}\right| < s, \quad |qx - p| \leq s,$$

zatem, w myśl (13) i (22):

$$\left|\left|\frac{qx - p \pm 1}{2}\right| - W\left(\frac{qx - p \pm 1}{2}\right)\right| < \frac{1}{q^2},$$

oraz

$$\left|\, |qx - p| - W(qx - p)\right| < \frac{1}{q^2},$$

skąd, oznaczając przez $P_{p,q}(x)$ wielomian całkowity

$$P_{p,q}(x) = W\left(\frac{qx - p + 1}{2}\right) + W\left(\frac{qx - p - 1}{2}\right) - W(qx - p),$$

możemy, dla $-1 \leq x \leq 1$, napisać, wobec (14):

$$|\varphi(qx - p) - P_{p,q}(x)| < \frac{3}{q^2}, \tag{23}$$

przy wszelkiem naturalnem q, oraz $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm q$.

Funkcja $f(x)$, jako ciągła w przedziale $(-1, +1)$, jest w tym przedziale ograniczona (§ 56): oznaczmy przez A kres górny modułów funkcji $f(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ — będzie to więc pewna liczba nieujemna (skończona), przyczem stale będziemy mieli:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq A, \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm q, \\ q = 1, 2, 3, \dots, \end{matrix}$$

skąd w jednej chwili, wobec (16) i (23):

$$\left|f_q(x) - \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x)\right| < \frac{3A(2q+1)}{q^2}, \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{24}$$

Oznaczmy przez $\Pi_q(x)$ wielomian całkowity

$$\Pi_q(x) = \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x). \tag{25}$$

Dla danego dodatniego ε istnieje oczywiście liczba q_1, taka iż dla $q > q_1$ stale

$$\frac{3A(2q+1)}{q^2} < \varepsilon$$

skąd, w myśl (24) i (25):

$$|f_q(x) - \Pi_q(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > q_1, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{26}$$

Oznaczając przez μ liczbę większą jednocześnie od q_0 i q_1, będziemy, wobec (21) i (26), mieli:

$$|f(x) - \Pi_q(x)| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu, \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{27}$$

co dowodzi, że ciąg wielomianów $\Pi_q(x)$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ w przedziale $(-1, +1)$ *jednostajnie* zmierza do granicy $f(x)$.

Wnosimy stąd natychmiast o rozwinięciu funkcji $f(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych:

$$f(x) = \Pi_1(x) + (\Pi_2(x) - \Pi_1(x)) + (\Pi_3(x) - \Pi_2(x)) + \cdots$$

Dowiedliśmy więc, że każde funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale $(-1, +1)$, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.

Wobec $f(x) = \lim\limits_{q=\infty} \Pi_q(x)$ oraz wobec (25), znajdujemy wzór:

$$f(x) = \lim_{q=\infty} \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x), \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{28}$$

który nosi nazwę *ogólnego wzoru interpolacyjnego* Borel'a[1]).

Wielomiany $P_{p,q}(x)$ mogą być wyznaczone raz na zawsze (podane wyżej wzory pozwoliłyby nam nawet wyraźnie wypisać wielomian $P_{p,q}(x)$), a wzór Borela określa — teoretycznie przynajmniej — wartości każdej danej funkcyj ciągłej w przedziale $(-1, +1)$, jeżeli dane są jej wartości dla argumentów wymiernych w tym przedziale. Ze wzoru (28) wynika więc bezpośrednio, że funkcja ciągła jest określona w zupełności przez swe wartości dla argumentów wymiernych.

Niech teraz $F(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, ciągłą w przedziale skończonym (a, b). Połóżmy

$$g(x) = \frac{(b-a)x + a + b}{2} \tag{29}$$

— będzie to oczywiście funkcja ciągła, przytem będzie

$$a \leq g(x) \leq b, \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

[1]) E. Borel: Leçons sur le fonctions de variables réelles et les développemments en séries de polynomes. Paris 1905, p. 80.

Połóżmy

$$f(x) = F(g(x)), \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{30}$$

funkcja $f(x)$ będzie więc ciągła w przedziale $(-1, +1)$ (jako funkcja ciągła funkcji ciągłej) i przeto będziemy dla niej mieli nierówność (27). W myśl (29) mamy

$$g\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = x$$

skąd, wobec (30):

$$f\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = F(x) \tag{31}$$

dla

$$-1 \leq \frac{2x-a-b}{b-a} \leq 1, \tag{32}$$

czyli, co jak łatwo widzieć, wychodzi na jedno, dla

$$a \leq x \leq b. \tag{33}$$

Wobec równoważności nierówności (33) i (32), oraz w myśl (27) i (31), mamy:

$$\left| F(x) - \Pi_q\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad q > \mu, \quad a \leq x \leq b,$$

co, z uwagi że $Q_q(x) = \Pi_q\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ jest wielomianem całkowitym względem x, dowodzi, że funkcja $F(x)$ jest w przedziale (a, b) granicą jednostajnie zbieżnego ciągu (a więc i sumą jednostajnie zbieżnego szeregu) wielomianów całkowitych. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 151 (Weierstrassa): *Każda funkcja $F(x)$, ciągła w przedziale skończonym (a, b), daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.*

Z drugiej strony, każdy jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b) szereg wielomianów całkowitych przedstawia, w myśl tw. 147, funkcję ciągłą w tym przedziale. Zatem:

Rozwijanie się w danym przedziale (skończonym) na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych jest cechą charakterystyczną funkcyj ciągłych w tym przedziale.

W związku z dowodem tw. 151 zwrócimy jeszcze uwagę na okoliczność następującą. Z uwagi, że wielomiany $P_{p,q}(x)$ są wyznaczone w zupełności przez wskaźniki p i q wynika natychmiast, w myśl wzorów (29), (30) i (25). że każdemu przedziałowi skończonemu (a, b), każdej funkcyj $F(x)$, ciągłej w tym przedziale, oraz każdej liczbie naturalnej q odpowiada oznaczony w zupełności [przez a, b, q oraz funkcję $F(x)$ wielomian $Q_q(x) = \Pi_q\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)$.

Ciąg nieskończony $Q_q(x)$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ jest więc wyznaczony w zupełności przez liczby a i b oraz funkcję $F(x)$. Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 151[a]. *Istnieje prawo, według którego każdemu przedziałowi skończonemu (a, b) oraz każdej funkcji $F(x)$, ciągłej w tym przedziale, odpowiada oznaczony w zupełności ciąg wielomianów całkowitych, zmierzający w przedziale (a, b) jednostajnie do $F(x)$.*

§ **120.** Opierając się na twierdzeniu Weierstrass'a udowodnimy obecnie ogólny wzór interpolacyjny S. Bernstein'a (podany w r. 1912), godny uwagi ze względu na prostotę swej formy.

Twierdzenie 152 (Wzór Bernstein'a): *Dla każdej funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale $(0, 1)$ zachodzi wzór*

$$f(x) = \lim_{m=0} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{34}$$

Udowodnimy przedewszystkiem prawdziwość wzoru Bernsteina dla wielomianów całkowitych. Zauważymy w tym celu najsamprzód, że prawdziwość wzoru (34) dla funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ pociąga za sobą natychmiast jego prawdziwość dla sumy $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, zaś prawdziwość wzoru (34) dla funkcji $f(x)$ pociąga za sobą jego prawdziwość dla funkcji $af(x)$, gdzie a oznacza dowolną liczbę stałą. Nadto, wzór (34) jest prawdziwy oczywiście dla funkcji $f(x) = 1$ $(0 \leq x \leq 1)$, gdyż, w myśl wzoru na dwumian Newtona, mamy:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = 1, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Aby więc udowodnić, że wzór (34) jest prawdziwy dla wielomianów całkowitych, wystarczy okazać, że jest on prawdziwy dla funkcyj $f(x) = x^p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$. W tym celu udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. *Dla naturalnych m oraz $p < m$ mamy przy wszelkiem rzeczywistem t tożsamość*

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k^p \binom{m}{k} t^k = m(m-1)\ldots(m-p+1)t^p(t+1)^{m-p} + \\ + m(m-1)\ldots(m-p+2)\, a'_p t^{p-1}(t+1)^{m-p+1} + \ldots + \\ + m a_p^{(p-1)} t (t+1)^{m-1},\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

gdzie współczynniki $a_p^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ zależą jedynie od p i k.

Dowód. Mamy, w myśl dwumianu Newtona:

$$(t+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k;$$

stąd, przy wszelkiem rzeczywistem h:

$$(t+h+1)^m - (t+1)^m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} [(t+h)^k - t^k]. \quad (36)$$

Lecz mamy tożsamość

$$(t+h)^k - t^k = h[(t+h)^{k-1} + (t+h)^{k-2} t + \ldots + (t+h) t^{k-2} + t^{k-1}], \quad (37)$$

skąd, wobec (36), po podzieleniu przez h, otrzymujemy tożsamość:

$$(t+h+1)^{m-1} + (t+h+1)^{m-2}(t+1) + \ldots + (t+1)^{m-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} [(t+h)^{k-1} + (t+h)^{k-2} t + \ldots + t^{k-1}],$$

która, dla $h = 0$, daje w jednej chwili:

$$m(t+1)^{m-1} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k t^{k-1},$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k t^k = m(t+1)^{m-1} t,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (35) dla $p = 1$.

Załóżmy teraz, że wzór (35) jest prawdziwy dla liczby naturalnej p i połóżmy (przy danem naturalnem m):

$$\sum_{k=1}^{m} k^p \binom{m}{k} t^k = S_p(t). \quad (38)$$

Stąd, w myśl (37):

$$S_p(t+h)-S_p(t)=h\sum_{k=1}^{m}k^p\binom{m}{k}\left[(t+h)^{k-1}+(t+h)^{k-2}t+\ldots+t^{k-1}\right]. \tag{39}$$

Mamy, dalej, tożsamość:

$$\left.\begin{aligned}&(t+h)^k(t+h+1)^{m-k}-t^k(t+1)^{m-k}=\\&=t^k\left[(t+h+1)^{m-k}-(t+1)^{m-k}\right]+\left[(t+h)^k-t^k\right](t+h+1)^{m-k}=\\&=h\{t^k\left[(t+h+1)^{m-k-1}+(t+h+1)^{m-k-2}(t+1)+\ldots+(t+1)^{m-k-1}\right]+\\&+\left[(t+h)^{k-1}+(t+h)^{k-2}t+\ldots+t^{k-1}\right](t+h+1)^{m-k}\}.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Wzór (35) jest, jak zakładamy, prawdziwy dla liczby p: w myśl (39) z jednej strony, zaś wobec (38), (35) i (40) z drugiej, znajdujemy dla różnicy $S_p(t+h)-S_p(t)$ dwa wyrażenia, które po podzieleniu przez h, dają dla $h=0$, jak łatwo widzieć:

$$\sum_{k=1}^{m}k^{p+1}\binom{m}{k}t^{k-1}=$$

$$=m(m-1)\ldots(m-p+1)\left[(m-p)t^p(t+1)^{m-p-1}+pt^{p-1}(t+1)^{m-p}\right]+$$
$$+m(m-1)\ldots(m-p+2)a'_p\left[(m-p+1)t^{p-1}(t+1)^{m-p}+\right.$$
$$\left.+(p-1)t^{p-2}(t+1)^{m-p+1}\right]+\ldots+ma_p^{(p-1)}\left[(m-1)t(t+1)^{m-2}+(t+1)^{m-1}\right],$$

skąd, po pomnożeniu przez t oraz łatwej redukcji:

$$\sum_{k=1}^{m}k^{p+1}\binom{m}{k}t^k=m(m-1)\ldots(m-p)t^{p+1}(t+1)^{m-p-1}+$$
$$+m(m-1)\ldots(m-p+1)\left[a'_p+p\right]\left[t^p(t+1)^{m-p}+\right.$$
$$+m(m-1)\ldots(m-p+2)\left[a''_p+(p-1)a'_p\right]t^{p-1}(t+1)^{m-p+1}+\ldots+$$
$$+m(m-1)\left[a_p^{(p-1)}+2a_p^{(p-2)}\right]t^2(t+1)^{m-2}+ma_p^{(p-1)}t(t+1)^{m-1},$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (35) dla liczby $p+1$. Stąd, przez indukcję, wynika prawdziwość wzoru (35) przy wszelkiem naturalnem $p<m$. Udowodniliśmy więc nasz lemmat

Kładąc we wzorze (35) $t=\dfrac{x}{1-x}$, otrzymujemy dla $x \neq 1$, przy naturalnem p, oraz $m>p$, w jednej chwili, po pomnożeniu przez $(1-x)^m$:

$$\sum_{k=1}^{m}k^p\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}=$$

$$=m(m-1)\ldots(m-p+1)x^p+m(m-1)\ldots(m-p+2)a'_px^{p-1}+\ldots+ma_p^{(p-1)}x.$$

Stąd, w jednej chwili:

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m^p} \sum_{k=0}^{m} k^p \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = x^p,$$

dla $x \neq 1$, co jest oczywiście prawdziwem i dla $x = 1$, jeżeli przez 0^0 rozumieć będziemy liczbę 1. Dowodzi to, że wzór (34) jest prawdziwy dla funkcyj $f(x) = x^p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$.

Stąd, jak wiemy, wynika prawdziwość wzoru (34) dla wielomianów całkowitych.

Niech teraz $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale (0. 1). Niech, dalej n oznacza dowolną daną liczbę naturalną. W myśl tw. Weierstrassa istnieje wielomian całkowity $W_n(x)$, taki iż

$$\left| f(x) - W_n(x) \right| < \frac{1}{n}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{41}$$

Wobec (41) znajdujemy w jednej chwili, przy naturalnem m:

$$\left.\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} - \sum_{k=0}^{m} W_n\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \right| < \\ &\qquad < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = \frac{1}{n}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy, wzór (34) jest prawdziwy dla wielomianów, więc mamy:

$$\lim_{m=\infty} \sum_{k=0}^{m} W_n\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = W_n(x), \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

skąd wnosimy, że przy danem x, należącem do przedziału (0, 1), dla $m > \mu = \mu(x, n)$ będzie

$$\left| \sum_{k=0}^{m} W_n\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} - W_n(x) \right| < \frac{1}{n}. \tag{43}$$

Nierówności (42), (43) i (41) dają w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} - f(x) \right| < \frac{3}{n}, \quad \text{dla} \quad m > \mu = \mu(x, n),$$

co dowodzi, że

$$\lim_{m=\infty} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = f(x).$$

Udowodniliśmy więc wzór (34) dla każdej funkcji ciągłej w przedziale (0, 1). Dowiedliśmy zatem tw. 152.

Zauważymy, że uzupełniając w odpowiednich miejscach nasz dowód, moglibyśmy z łatwością wywnioskować, że (dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1)), wyrażenie pod znakiem granicy we wzorze (34) zmierza do $f(x)$ *jednostajnie* w całym przedziale (0, 1), czego bliższe zbadanie pozostawiamy czytelnikowi.

§ **121.** Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem z tw. 152 pewnych wniosków ogólniejszej natury.

W tym celu zauważymy przedewszystkiem, że z tw. 152 wynika natychmiast dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1) (z uwagi że wówczas funkcja $|f(x)|$ również jest ciągłą w uważanym przedziale) wzór

$$|f(x)| = \lim_{m=\infty} \sum_{k=0}^{m} \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{44}$$

Jeżeli więc funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (0, 1), to mamy jednocześnie wzory (34) i (44), przyczem, w myśl uczynionej w końcu § 120 uwagi, ciągi, figurujące pod znakiem granicy we wzorach (34) i (44), są zbieżne jednostajnie.

Wynika stąd natychmiast, że dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1), każdej liczby dodatniej ε, oraz każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian

$$P(x) = A_0(1-x)^m + A_1 x(1-x)^{m-1} + A_2 x^2 (1-x)^{m-2} + \ldots + A_m x^m,$$

taki iż $m > n$, oraz iż kładąc

$$Q(x) = |A_0|(1-x)^m + |A_1| x(1-x)^{m-1} + |A_2| x^2(1-x)^{m-2} + \\ + \ldots + |A_m| x^m,$$

będziemy mieli jednocześnie

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \text{oraz} \quad \big| |f(x)| - Q(x) \big| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1\text{ [1]}.$$

Zastosujmy teraz otrzymany wniosek do funkcji $f_0(x) = f(x)$, dla $\varepsilon = 1$, $n = 1$, i oznaczmy odpowiedni wielomian $P(x)$ przez

$$P_1(x) = A_{0,m_1}(1-x)^{m_1} + A_{1,m_1}(x)(1-x)^{m_1-1} + \ldots + A_{m_1,m_1} x^{m_1}.$$

---

[1]) Jasnem jest, że każdej funkcyj $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1), każdej liczbie naturalnej n oraz każdej liczbie dodatniej ε możemy podporządkować *oznaczony w zupełności* wielomian $P(x)$, spełniający uważane warunki (np. pierwszy, spełniający żądane warunki wyraz ciągu, stojącego pod znakiem granicy we wzorze (34)).

Połóżmy, dalej

$$f(x) - F_1(x) = f_1(x) \tag{45}$$

— będzie to funkcja ciągła w przedziale (0, 1). Wyznaczmy dalej odpowiedni wielomian $P(x)$ dla funkcji $f_1(x)$, przy $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n = m_1$, i oznaczmy go przez

$$P_2(x) = A_{0,m_2}(1-x)^{m_2} + A_{1,m_2}x(1-x)^{m_2-1} + \ldots + A_{m_2,m_2}x^{m_2}$$

oraz połóżmy

$$f_1(x) - P_2(x) = f_2(x).$$

Ogólnie, wyznaczmy odpowiedni wielomian $P(x)$ dla funkcji $f_{n-1}(x)$ przy $\varepsilon = \frac{1}{2^{k-1}}$, $n = m_{k-1}$, i oznaczmy go przez

$$P_k(x) = A_{0,m_k}(1-x)^{m_k} + A_{1,m_k}x(1-x)^{m_k-1} + \ldots + A_{m_k,m_k}x^{m_k}$$

oraz połóżmy

$$f_{k-1}(x) - P_k(x) = f_k(x), \tag{46}$$

kolejno dla $k = 1, 2, 3, \ldots$

Połóżmy jeszcze, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$Q_k(x) = |A_{0,m_k}|(1-x)^{m_k} + |A_{1,m_k}|x(1-x)^{m_k-1} + \ldots + |A_{m_k,m_k}|x^{m_k}.$$

Z definicji wielomianów $P_k(x)$ i $Q_k(x)$ oraz z własności wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ wynika natychmiast, że będziemy mieli

$$|f_{k-1}(x) - P_k(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{47}$$

oraz

$$|f_{k-1}(x)| - Q_k(x) < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{48}$$

Wobec (45) i (46) mamy:

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_k(x) + f_k(x), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

zaś, w myśl (47), mamy, wobec (46):

$$|f_k(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots: \tag{49}$$

wynika stąd natychmiast, że funkcja $f(x)$ rozwija się w przedziale (0,1) na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \cdots \tag{50}$$

Wobec (48) i (49) znajdujemy:

$$Q_k(x) < \frac{1}{2^{k-1}} + | f_{k-1}(x) | < \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{2^{k-2}}, \text{ dla } 0 \leq x \leq 1,\ k=2, 3, \ldots,$$

i przeto szereg

$$Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) + \ldots$$

jest zbieżny (jednostajnie) w całym przedziale (0,1).

Wobec definicji wielomianów $Q_k(x)$ wynika stąd natychmiast, że szereg, który otrzymamy z szeregu (50), zastępując każdy jego składnik $P_k(x)$ przez odpowiednie wyrażenie, złożone z m_k+1 składników, czyli szereg

$$\left.\begin{array}{l} A_{0,m_1}(1-x)^{m_1} + A_{1,m_1}x(1-x)^{m_1-1} + \ldots + A_{m_1,m_1}x^{m_1} + \\ + A_{0,m_2}(1-x)^{m_2} + A_{1,m_2}x(1-x)^{m_2-1} + \ldots + A_{m_2,m_2}x^{m_2} + \\ + A_{0,m_3}(1-x)^{m_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \quad (51)$$

jest zbieżny bezwzględnie. Ponieważ zaś, łącząc składniki szeregu (51) w odpowiednie grupy, otrzymujemy z niego szereg (50), którego sumą w przedziale (0,1) jest funkcja $f(x)$, więc wnosimy, że funkcja $f(x)$ rozwija się w całym przedziale (0,1) na szereg bezwzględnie zbieżny (51).

Połóżmy, dla całkowitych nieujemnych p i q:

$$a_{p,q} = A_{p,p+q}, \text{ jeżeli } p+q = m_k \text{ (przy pewnem } k = 1, 2, 3, \ldots),$$

zaś

$$a_{p,q} = 0, \text{ jeżeli } p+q \neq m_k \ (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

z uwagi, że ciąg m_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jest rosnący, wnosimy stąd z łatwością, że szereg bezwzględnie zbieżny (51) możemy napisać w postaci szeregu podwójnego

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}x^p(1-x)^q,$$

i przeto mamy wzór:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}x^p(1-x)^q, \text{ dla } 0 \leq x \leq 1, \quad (52)$$

przyczem szereg (52) będzie zbieżny bezwzględnie. Dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0,1), zachodzi więc rozwinięcie na szereg bezwzględnie zbieżny (52).

Niech teraz $\varphi(x)$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b). Połóżmy

$$\varphi(a + (b - a)x) = f(x), \text{ dla } 0 \leq x \leq 1; \tag{53}$$

— będzie to funkcja ciągła w przedziale (0,1) i przeto będziemy dla niej mieli rozwinięcie na szereg bezwzględnie zbieżny (52). Zastępując we wzorze (52) x przez $\frac{x-a}{b-a}$ i zważywszy, że nierówność $0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1$ jest równoważna nierówności $a \leq x \leq b$, oraz, że wobec (53), mamy $f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \varphi(x)$, otrzymamy w jednej chwili:

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q a_{p,q}}{(b-a)^{p+q}} (x-a)^p (x-b)^q, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

czyli, kładąc

$$\frac{(-1)^q a_{p,q}}{(b-a)^{p+q}} = c_{p,q},$$

będziemy mieli:

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{p,q}(x-a)^p (x-b)^q, \text{ dla } a \leq x \leq b, \tag{54}$$

przyczem szereg (54) będzie, jak łatwo widzieć, zbieżny bezwzględnie.

Rozwinięcia typu (54) na szereg bezwzględnie zbieżny w przedziale (a, b) nazywamy według Bernsteina szeregami *normalnymi* w przedziale (a, b) [1]). Mamy więc

Twierdzenie 153. *Każda funkcja ciągła w przedziale (a, b) rozwija się w tym przedziale na szereg normalny.*

§ 122. Wyprowadzimy teraz jeszcze kilka wniosków z twierdzenia Weierstrassa. Udowodnimy przedewszystkiem

Twierdzenie 154. *Dla każdej danej funkcji $F(x)$, ciągłej w przedziale skończonym (a, b) oraz każdej danej liczby dodatniej ε istnieje wielomian całkowity $P(x)$ o współczynnikach wymiernych, taki iż*

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon, \text{ dla } a \leq x \leq b. \tag{55}$$

1) Zob. np. R. d'Adhémar: Leçons sur les principes d'Analyse, T. II. Paris 1913. Note de S. Bernstein: „Sur les séries normales", p. 259.

Dowód. Niech $F(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale skończonym (a, b), zaś ε — daną liczbę dodatnią. Z twierdzenia Weierstrassa (tw. 151) wynika natychmiast, że istnieje wielomian całkowity o współczynnikach rzeczywistych

$$Q(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \tag{56}$$

taki iż

$$|F(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dla } a \leq x \leq b. \tag{57}$$

Obierzmy liczbę naturalną s, taką iż

$$s \geq |a| \text{ oraz } s \geq |b|, \tag{58}$$

oraz wyznaczmy dla każdej z liczb rzeczywistych $A_0, A_1, \ldots A_m$ odpowiednie przybliżenie wymierne a_k, takie, iż

$$|A_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)s^m}, \quad (k = 0, 1, \ldots m), \tag{59}$$

i połóżmy

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \tag{60}$$

— będzie to wielomian całkowity o współczynnikach wymiernych. Wobec (56) i (60) będzie

$$Q(x) - P(x) = (A_0 - a_0)x^m + (A_1 - a_1)x^{m-1} + \ldots + (A_m - a_m),$$

skąd, w myśl (59), oraz z uwagi, że dla $a \leq x \leq b$ mamy, wobec (58), $|x| \leq s$ oraz $|x^k| \leq s^m$ $(k = 0, 1, \ldots m)$, znajdujemy w jednej chwili:

$$|Q(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co, wobec (57), daje nierówność (55), co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Wielomianów $P(x)$ o współczynnikach wymiernych, spełniających nierówność (55) jest oczywiście nieskończenie wiele, gdyż liczby wymierne a_k $(k = 0, 1, \ldots m)$ możemy obierać całkiem dowolnie, z tym jedynie warunkiem, iżby zachodziły nierówności (59). Stąd otrzymujemy w jednej chwili następujący

Wniosek: Każda funkcja ciągła w przedziale (a, b) jest w tym przedziale granicą ciągu (jednostajnie zbieżnego) samych różnych wielomianów całkowitych o współczynnikach wymiernych.

Wszystkie wielomiany całkowite o współczynnikach wymiernych (wypisanych w postaci nieprzywiedlnej $\frac{p}{q}$, gdzie $q > 0$)

$$\frac{p_0}{q_0} x^m + \frac{p_1}{q_1} x^{m-1} + \ldots + \frac{p_m}{q_m} \tag{61}$$

podzielmy teraz na klasy, zaliczając do N-tej klasy wszystkie wielomiany (61), dla których

$$|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_m| + q_0 + q_1 + \cdots + q_m = N \tag{62}$$

Każdy wielomian całkowity o współczynnikach wymiernych będzie więc należał do pewnej klasy, a w każdej klasie będziemy mieli conajwyżej skończoną liczbę wielomianów (gdyż, wobec (62), musi być $m < N$ oraz $| p_k | < N$, dla $k = 0, 1, \ldots m$, skąd z łatwością wynika, że do N-tej klasy należy mniej niż $(2N^2)^N$ wielomianów). Wypisując wszystkie wielomiany kolejnych klas [1]), otrzymamy ciąg nieskończony wielomianów

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x), \ldots, \tag{63}$$

w którym będzie (raz i tylko raz) zawarty każdy wielomian całkowity o współczynnikach wymiernych.

Połóżmy

$$Q_1(x) = P_1(x),\ Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ dla } n = 2, 3, 4, \ldots \tag{64}$$

i weźmy pod rozwagę szereg nieskończony wielomianów:

$$Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) + \ldots \tag{65}$$

Powiadam, że składniki szeregu (65) można zawsze tak połączyć w grupy, iżby suma otrzymanego w ten sposób szeregu przedstawiała dowolną funkcję ciągłą.

W rzeczy samej, niech $F(x)$ oznacza dowolną daną funkcję ciągłą w przedziale (a, b). Jak dowiedliśmy wyżej (wniosek z tw. 154), funkcja $F(x)$ daje się w przedziale (a, b) przedstawić jako granica samych różnych wielomianów całkowitych o współczynnikach wymiernych:

$$F(x) = \lim_{n=\infty} R_n(x). \tag{66}$$

Każdy wielomian $R_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest więc jednym z wyrazów ciągu (63). Niech

$$P_{n_1}(x),\ P_{n_2}(x),\ P_{n_3}(x), \ldots \tag{67}$$

będą te kolejne wyrazy ciągu (63), które są jednocześnie wyrazami ciągu $R_n(x)$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ (wskaźniki $n_1, n_2, \ldots$ tworzą tu więc ciąg nieskończony rosnący). Ciąg (67) będzie się, jak łatwo widzieć, różnił conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu $R_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ i przeto, wobec (66), będzie w przedziale (a, b):

$$F_n(x) = \lim_{n=\infty} P_{n_k}(x),$$

czyli, wobec (64):

$$F(x) = \lim_{k=\infty} [Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_{n_k}(x)],$$

co dowodzi, że w przedziale (a, b):

$$E(x) = [Q_1(x) + \ldots + Q_{n_1}(x)] + [Q_{n_1+1}(x) + \ldots + Q_{n_2}(x)] + \\ + [Q_{n_2+1}(x) + \ldots + Q_{n_3}(x)] + \ldots$$

[1]) Możemy z łatwością ustalić porządek, w jakim mają być wypisywane wielomiany każdej klasy. Łatwo widzieć, że porządek ten będzie ustalony, jeżeli np. umówimy się z dwóch wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ tej samej klasy wypisywać $P(x)$ wcześniej niż $Q(x)$, jeżeli wielomian $P(x) - Q(x)$ daje przy najwyższej $(\geqq 0)$ potędze x współczynnik dodatni, oraz później niż $Q(x)$ w przypadku przeciwnym.

Dowiedliśmy więc (według Fréchet'a)[1], że *istnieje szereg nieskończony wielomianów, którego suma przy odpowiedniem ugrupowaniu składników przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą.*

Zauważymy, że opierając się na tw. Weierstrassa można by również dowieść, że istnieje szereg nieskończony wielomianów, którego suma przy odpowiedniem uporządkowaniu składników (bez łączenia ich w grupy) przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą[2].

Co się tyczy twierdzenia Weierstrassa dla przedziału nieskończonego $(-\infty, +\infty)$, to możemy tylko dowieść, że *każda funkcja ciągła w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych daje się w całym tym zbiorze rozwinąć na szereg nieskończony wielomianów całkowitych:* nie możemy jednak twierdzić, że zawsze można zbudować szereg wielomianów *jednostajnie* zbieżny w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, którego suma przedstawia w tym zbiorze daną funkcję ciągłą (np. można by dowieść, że funkcja $f(x) = |x|$ nie daje się przedstawić jako suma szeregu wielomianów, zbieżnego jednostajnie w całym zbiorze liczb rzeczywistych, co pozostawiamy czytelnikowi).

Niech $F(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Funkcja $F(x)$ jest więc, tembardziej, przy wszelkiem naturalnem n, ciągła dla $-n \leq x \leq n$: z tw. 151^a wynika więc, że przy wszelkiem naturalnem n istnieje oznaczony w zupełności wielomian całkowity $P_n(x)$, taki iż

$$|F(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad \text{dla} \quad -n \leq x \leq n. \tag{68}$$

Powiadam, że będzie

$$F(x) = \lim_{n=\infty} P_n(x) \tag{69}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x.

W samej rzeczy, niech x oznacza dowolną daną wartość rzeczywistą, zaś ε — dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę μ większą od $|x|$ i od $\frac{1}{\varepsilon}$.

[1]) M. Fréchet: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 22, (1906), p. 36.

[2]) Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie, Ser. A, t. LII (1912).

Dla $n > \mu$ będzie więc $n > |x|$, czyli $-n < x < n$, stąd w myśl (68) i z uwagi, że $\frac{1}{n} < \frac{1}{\mu} < \varepsilon$:

$$|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

co dowodzi, że dla wartości x zachodzi wzór (69), *c. b. d. o.*

Z twierdzenia 151[a] wynika jeszcze następujący łatwy wniosek:

Twierdzenie 155. *Każda funkcja, która jest w danym przedziale granicą ciągu funkcyj ciągłych, jest też w tym przedziale granicą ciągu wielomianów całkowitych.*

Dowód. Załóżmy, że w danym skończonym przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ jest granicą ciągu nieskończonego funkcyj $f_n(x)$, ciągłych w tym przedziale:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f(x), \text{ dla } a \leq x \leq b. \tag{70}$$

Ponieważ funkcja $f_n(x)$ jest, jak zakładamy, ciągłą w przedziale skończonym (a, b), więc z tw. 151[a] wynika, że przy wszelkiem naturalnem n istnieje oznaczony w zupełności wielomian całkowity $P_n(x)$, taki iż

$$|f_n(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Stąd, wobec (70), wnosimy natychmiast, że

$$f(x) = \lim_{n=\infty} P_n(x), \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

czyli że funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) granicą ciągu wielomianów całkowitych.

Dla przedziałów nieskończonych należałoby powyższy dowód nieco zmodyfikować, co pozostawiamy czytelnikowi.

§ **123.** Zajmiemy się teraz zagadnieniem, postawionem i rozwiązanem przez Czebyszewa: *czy dla danej funkcji $f(x)$, ciągłej w danym przedziale (a, b), oraz danej liczby naturalnej n istnieje zawsze wielomian stopnia najwyżej n-go, dający lepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) niż każdy inny wielomian stopnia conajwyżej n-go?*

Wyrażając się ściślej, czy istnieje dla każdej danej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b), oraz każdej liczby naturalnej n

wielomian $P_n(x)$, stopnia conajwyżej n-go, taki iż kres górny wyrażenia $| f(x) - P_n(x) |$ w przedziale (a, b) jest mniejszy niż kres górny wyrażenia, które otrzymujemy z wypisanego, zastępując w niem $P_n(x)$ przez jakikolwiek inny wielomian stopnia conajwyżej n-go? Okażemy, że taki wielomian $P_n(x)$ istnieje. W tym celu udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. Jeżeli $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$, takim iż

$$| Q(x) | \leq A, \text{ dla } a \leq x \leq b \tag{71}$$

(gdzie A jest liczbą skończoną, niezależną od x, zaś $b > a$), to istnieje liczba (skończona) B, zależna jedynie od a, b, A i n, taka iż wszystkie współczynniki wielomianu $Q(x)$ są bezwzględnie $\leq B$.

Dowód. Załóżmy, że wielomian $Q(x)$, stopnia $\leq n$, spełnia nierówność (71). Połóżmy

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad (k = 0, 1, \ldots n), \tag{72}$$

oraz

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} Q(x_k). \tag{73}$$

Wobec (72), wartości $x_0, x_1, \ldots x_n$ są wszystkie różne, zaś wobec (73) mamy, jak łatwo widzieć:

$$T(x_k) = Q(x_k), \text{ dla } k = 0, 1, \ldots n;$$

wielomiany $Q(x)$ oraz $T(x)$, które są oba stopni $\leq n$, przybierają więc odpowiednio równe wartości dla $n+1$ różnych wartości zmiennej, skąd, jak wiemy (wniosek z tw. 73) wynika, że muszą być równe tożsamościowo. Współczynniki wielomianu $Q(x)$ są więc odpowiednio równe współczynnikom wielomianu $T(x)$.

Wobec (72), wzór (73) możemy napisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned} T(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big[& \frac{(-1)^{n-k} n^n}{(b-a)^n k! (n-k)!} (x - x_0)(x - x_1) \ldots \\ & \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n) \, Q(x_k) \Big] \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Niech N oznacza liczbę taką, iż

$$N \geq 1, \text{ oraz } N \geq | a |, \ N \geq | b | ;$$

wobec (72) mamy $a \leq x_k \leq b$, zatem

$$| x_k | \leq N, \text{ dla } k = 0, 1, \ldots n \tag{75}$$

Dalej, wobec (71) mamy:

$$| Q(x_k) | \leq A, \text{ dla } k = 0, 1, \ldots n. \tag{76}$$

Wobec (75) i (76) wnosimy natychmiast, że współczynniki wielomianu (74) są bezwzględnie odpowiednio nie większe od współczynników wielomianu

$$\sum_{k=\infty}^{n} \frac{n^n(x+N)^n A}{(b-a)^n k!\,(n-k)!} = \frac{n^n(x+N)^n A}{(b-a)^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{(2n)^n A}{(b-a)^n n!}(x+N)^n =$$

$$= \frac{(2n)^n A}{(b-a)^n n!}\left[x^n + \binom{n}{1} N x^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 x^{n-2} + \ldots + N^n\right]. \tag{77}$$

Lecz, wobec $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, mamy $\binom{n}{k} \leq 2^n (k = 0, 1, \ldots n)$;

stąd, oraz wobec $N \geq 1$, wnosimy, że współczynniki wielomianu (77) są nie większe od

$$B = \frac{(4n)^n A N^n}{(b-a)^n n!}.$$

Wynika stąd, że współczynniki wielomianu $Q(x) = T(x)$ są bezwzględnie $\leq B$, co dowodzi prawdziwości naszego lemmatu.

Niech teraz $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale (a, b), n — daną liczbę naturalną.

Dla każdego wielomianu stopnia $\leq n$ o współczynni*k*ach wymiernych $W(x)$ oznaczmy przez $G(W)$ kres górny liczb

$$| f(x) - W(x) |, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

zaś przez Γ oznaczmy zbiór wszystkich otrzymanych w ten sposób liczb $G(W)$, i niech M będzie kresem dolnym zbioru Γ.

Powiadam, że istnieje conajmniej jeden wielomian stopnia $\leq n$ o współczynnikach rzeczywistych $P(x)$, taki iż

$$| f(x) - P(x) | \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Jeżeli M jest elementem zbioru Γ, to twierdzenie nasze jest oczywistem: załóżmy więc, że liczba M nie jest elementem zbioru Γ. Niech k oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Wśród wielomianów o współczynnikach wymiernych stopnia $\leq n$ istnieje jeden conajmniej W taki, iż $G(W) < M + \frac{1}{k}$, gdyż w razie przeciwnym kres dolny zbioru Γ byłby $\geq M + \frac{1}{k} > M$, wbrew definicji liczby M. Oznaczmy przez W_k taki wielomian stopnia $\leq n$ o współczynnikach wymiernych, iż $G(W_k) < M + \frac{1}{k}$ (np. pierwszy wielomian ciągu (63), spełniający uważane warunki) i niech będzie

$$W_k = a_{0,k}x^n + a_{1,k}x^{n-1} + \ldots + a_{n,k}; \tag{78}$$

będzie więc

$$| f(x) - W_k(x) | < M + \frac{1}{k}, \text{ dla } a \leq x \leq b, \tag{79}$$

skąd wnosimy, że

$$| W_k(x) | < | f(x) | + M + 1, \text{ dla } a \leq x \leq b;$$

wobec ciągłości, a więc ograniczoności funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), wynika stąd istnienie liczby A, niezależnej od k oraz x, takiej iż

$$| W_k(x) | < A, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Stąd, w myśl naszego lemmatu, wynika dalej istnienie liczby B (zależnej jedynie od A, a, b i n), takiej iż wszystkie współczynniki wielomianu $W_k(x)$ są bezwzględnie $\leq B$, czyli, wobec (78):

$$| a_{l,k} | \leq B, \text{ dla } \begin{matrix} l = 0, 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix} \tag{80}$$

Ciągi $a_{0,k}, a_{1,k} \ldots a_{n,k} (k = 1, 2, 3, \ldots)$ są więc ograniczone: wnosimy stąd (podobnie jak przy dowodzie tw. 80), że istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ taki, iż każdy z ciągów

$$a_{0,k_p}, a_{1,k_p}, \ldots a_{n,k_p} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

jest zbieżny: połóżmy

$$\lim_{p=\infty} a_{0,k_p} = a_0, \ \lim_{p=\infty} a_{1,k_p} = a_1, \ldots \lim_{p=\infty} a_{n,k_p} = a_n \tag{81}$$

— będą to więc liczby rzeczywiste skończone.

Wobec (79) będziemy mieli

$$| f(x) - W_{k_p}(x) | < M + \frac{1}{k_p}, \text{ dla } a \leq x \leq b, \; p = 1, 2, 3, \dots \quad (82)$$

a że, wobec (81) i (78), kładąc

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć

$$\lim_{p=\infty} W_{k_p}(x) = P(x), \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

więc, wobec $\lim_{p=\infty} k_p = \infty$, znajdujemy, przechodząc we wzorze (82) do granicy dla $p = \infty$:

$$| f(x) - P(x) | \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b, \quad (83)$$

c. b. d. o.

Powiadam dalej, że dla żadnego wielomianu $Q(x)$ stopnia $\leq n$ nie może być

$$| f(x) - Q(x) | < M, \text{ dla } a \leq x \leq b. \quad (84)$$

W samej rzeczy, załóżmy, że dla wielomianu $Q(x)$ stopnia $\leq n$ zachodzi nierówność (84) i niech będzie

$$Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n. \quad (85)$$

Funkcja $| f(x) - Q(x) |$, będąc ciągłą w przedziale (a, b), w myśl tw. 70 dosięga w tym przedziale swego kresu górnego M': istnieje więc takie ξ w przedziale (a, b), iż $| f(\xi) - Q(\xi) | = M'$, skąd, wobec (84), znajdujemy: $M' < M$.

Niech N oznacza liczbę, spełniającą nierówności

$$N \geq 1, \; N \geq | a |, \; N \geq | b |. \quad (86)$$

Dla liczb rzeczywistych b_i $(i = 1, 2, \dots n)$ możemy oczywiście wyznaczyć liczby wymierne β_i $(i = 1, 2, \dots n)$, takie iż

$$| b_i - \beta_i | < \frac{M - M'}{N^n (n+1)}, \; (i = 0, 1, \dots n). \quad (87)$$

Połóżmy

$$W(x) = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n; \quad (88)$$

wobec (88), (85), (87) i z uwagi że (w myśl definicji liczby M') $|f(x) - Q(x)| \leq M'$, dla $a \leq x \leq b$, oraz że, w myśl (86), $|x| \leq N$, dla $a \leq x \leq b$, znajdujemy w jednej chwili:

$$|f(x) - W(x)| \leq |f(x) - Q(x)| + |Q(x) - W(x)| <$$
$$< M' + \frac{M - M'}{N^n(n+1)}(N^n + N^{n-1} + \ldots + N + 1) \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

skąd

$$|f(x) - W(x)| < M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$ o współczynnikach wymiernych — wbrew definicji liczby M, jako kresu dolnego wszystkich liczb $G(W)$.

Dowiedliśmy więc, że dla każdej danej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b), oraz każdej danej liczby naturalnej n istnieje wielomian stopnia conajwyżej n-go, dający *nie gorsze* przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) niż każdy inny wielomian stopnia conajwyżej $\leq n$-go. Okażemy obecnie, że istnieje wielomian stopnia $\leq n$, dający *najlepsze* przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b). W tym celu wystarczy oczywiście dowieść, że istnieje jeden tylko wielomian stopnia $\leq n$, spełniający nierówności (83).

Okażemy przedewszystkiem, że jeżeli wielomian $P(x)$ stopnia $\leq n$ spełnia nierówności (83), to w przedziale (a, b) istnieją conajmniej $n+2$ liczby $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2}$, takie iż

$$|f(\xi_k) - P(\xi_k)| = M \quad (k = 1, 2, \ldots n+2).$$

Załóżmy, że równanie

$$|\varphi(x)| = M, \tag{89}$$

gdzie

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) \tag{90}$$

posiada w przedziale (a, b) $m \leq n+1$ pierwiastków: niech to będą liczby

$$\xi_1, \; \xi_2, \ldots \xi_m.$$

Połóżmy

$$R(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{k-1})(x-\xi_{k+1})\ldots(x-\xi_m)}{(\xi_k-\xi_1)(\xi_k-\xi_2)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_m)}\,\varphi(\xi_k)$$

— będzie to oczywiście wielomian całkowity stopnia $\leq m-1 \leq n$, przyczem będzie

$$R(\xi_k) = \varphi(\xi_k), \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots m. \tag{91}$$

Wobec ciągłości w przedziale (a, b) wielomianu $R(x)$ oraz funkcji $\varphi(x)$ istnieje takie $h > 0$, iż nierówność

$$|x - x'| < h \tag{92}$$

pociąga za sobą w przedziale (a, b) zawsze nierówności

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{M}{2} \tag{93}$$

oraz

$$|R(x) - R(x')| < \frac{M}{2}. \tag{94}$$

Usuńmy z przedziału (a, b) punkty wewnętrzne każdego z przedziałów

$$(\xi_k - h, \ \xi_k + h) \quad (k = 1, 2, \dots m) \tag{95}$$

— pozostanie w ten sposób z przedziału (a, b) skończona liczba przedziałów (zamkniętych) $d_1, d_2, \dots d_s$[1]. W żadnym z przedziałów $d_1, d_2, \dots d_s$ nie może zachodzić równość (89), gdyż każdy z pierwiastków równania (89) jest środkiem jednego z przedziałów (95). Zatem kres górny funkcji $|\varphi(x)|$ w każdym z przedziałów $d_1, d_2, \dots d_s$ jest mniejszy od M (gdyż funkcja $|\varphi(x)|$, jako ciągła w każdym z tych przedziałów, dosięga w każdym z nich swego kresu górnego, a z drugiej strony, w przedziale (a, b) jest stale $|\varphi(x)| \leq M$ [wobec (90) i 83)], zaś w żadnym z przedziałów $d_1, d_2, \dots d_s$ nie jest $|\varphi(x)| = M$).

Istnieje więc liczba $M' < M$ taka, iż w każdym z przedziałów $d_1, d_2, \dots d_s$ mamy

$$|\varphi(x)| \leq M'. \tag{96}$$

Oznaczmy przez N kres górny funkcji $|R(x)|$ w przedziale (a, b): będzie to oczywiście liczba skończona. Obierzmy liczbę dodatnią α taką, iżby było

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \alpha < \frac{M - M'}{N} \tag{97}$$

[1] Niektóre z tych przedziałów mogą się redukować do punktów.

i połóżmy

$$Q(x) = P(x) + aR(x) \tag{98}$$

— będzie to więc wielomian stopnia $\leq n$.

Powiadam, że będziemy mieli

$$|f(x) - Q(x)| < M, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Niech więc x oznacza jakąkolwiek daną liczbę przedziału (a, b). Rozróżnimy dwa przypadki: 1) x leży wewnątrz jednego z przedziałów (95), oraz 2) x należy do jednego z przedziałów $d_1, d_2, \ldots d_r$.

Załóżmy, że x leży wewnątrz przedziału

$$(\xi_k - h,\ \xi_k + h):$$

mamy więc

$$|x - \xi_k| < h,$$

czyli nierówność (92) dla $x' = \xi_k$, która, jak wiemy, pociąga za sobą nierówności (93) i (94), czyli

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi_k)| < \frac{M}{2}, \tag{99}$$

oraz

$$|R(x) - R(\xi_k)| < \frac{M}{2};$$

ta ostatnia daje, wobec (91):

$$|R(x) - \varphi(\xi_k)| < \frac{M}{2}. \tag{100}$$

Wobec (99) i z uwagi, że $|\varphi(\xi_k)| = M$, wnosimy, że

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi_k)} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

i przeto możemy położyć

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi_k)} = 1 + \beta, \tag{101}$$

gdzie $\beta > -\frac{1}{2}$. Z drugiej strony nie może być $\beta > 0$, gdyż wówczas mielibyśmy $\left|\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi_k)}\right| > 1$, czyli $|\varphi(x)| > M$, co niemożliwe.

Jest więc

$$-\frac{1}{2} < \beta \leq 0. \tag{102}$$

Wobec (90), (98) i (101) mamy

$$f(x) - Q(x) = \varphi(x) - aR(x) = (1 + \beta)\,\varphi(\xi_k) - aR(x) = \\ = (1 + \beta - a)\,\varphi(\xi_k) - a[R(x) - \varphi(\xi_k)],$$

skąd, wobec $|\varphi(\xi_k)| = M$ oraz wobec (100):

$$|f(x) - Q(x)| \leq |1 + \beta - a|\,.\,M + \frac{aM}{2}. \tag{103}$$

Lecz, wobec (102) i (97), mamy

$$1 + \beta - a > 0,$$

zatem

$$|1 + \beta - a| = 1 + \beta - a$$

i przeto nierówność (103) daje

$$|f(x) - Q(x)| \leq (1 + \beta - a)\,M + \frac{a}{2}\,M = \left(1 + \beta - \frac{a}{2}\right)M,$$

skąd, z uwagi, że wobec (102) oraz wobec $a > 0$ jest

$$1 + \beta - \frac{a}{2} \leq 1 - \frac{a}{2} < 1,$$

znajdujemy

$$|f(x) - Q(x)| < M. \tag{104}$$

Udowodniliśmy więc nierówność (104) dla przypadku gdy x leży wewnątrz któregokolwiek z przedziałów (95).

Załóżmy teraz, że x należy do jednego z przedziałów $d_1, d_2, \ldots d_r$.

Wobec (90) i (98) mamy

$$f(x) - Q(x) = \varphi(x) - aR(x). \tag{105}$$

Lecz w każdym z przedziałów $d_1, d_2, \ldots d_r$ mamy nierówność (96), zaś

$$|R(x)| \leq N, \quad \text{dla } a \leq x \leq b:$$

wobec (105) mamy więc

$$|f(x) - Q(x)| \leq M' + aN,$$

skąd, z uwagi, że wobec (97) mamy $M' + \alpha N < M$, znowu znajdujemy nierówność (104).

Nierówność (104) zachodzi więc w całym przedziale (a, b), co niemożliwe, skoro $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$.

Dowiedliśmy więc, że nie może być $m \leq n+1$. Jeżeli więc wielomian $P(x)$ stopnia $\leq n$ spełnia warunki (83), to równanie

$$|f(x) - P(x)| = M$$

posiada w przedziale (a, b) conajmniej $n+2$ różne pierwiastki.

Załóżmy, że prócz wielomianu $P(x)$ jeszcze wielomian $P_1(x)$ stopnia $\leq n$ spełnia warunki (83). Mamy więc

$$|f(x) - P(x)| \leq M, \text{ oraz } |f(x) - P_1(x)| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

oraz

$$\left| f(x) - \frac{P(x) + P_1(x)}{2} \right| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co dowodzi, że wielomian $\frac{P(x) + P_1(x)}{2}$, stopnia $\leq n$, również spełnia warunek (83). Równanie

$$\left| f(x) - \frac{P(x) + P_1(x)}{2} \right| = M \tag{106}$$

posiada więc, jak dowiedliśmy, conajmniej $n+2$ różne pierwiastki w przedziale (a, b). Powiadam, że dla każdego, leżącego w przedziale (a, b) pierwiastka ξ równania (106), mamy

$$P(\xi) = P_1(\xi).$$

W samej rzeczy, niech ξ oznacza pierwiastek równania (106), leżący w przedziale (a, b). Załóżmy np. że

$$f(\xi) - \frac{P(\xi) + P_1(\xi)}{2} = M. \tag{107}$$

Skoro wielomiany $P(x)$ i $P_1(x)$ spełniają warunki (83), więc mamy:

$$f(\xi) - P(\xi) \leq M \text{ oraz } f(\xi) - P_1(\xi) \leq M. \tag{108}$$

Gdyby nie było jednocześnie $f(\xi) - P(\xi) = M$ oraz $f(\xi) - P_1(\xi) = M$, to, wobec (108), byłoby

$$[f(\xi) - P(\xi)] + [f(\xi) - P_1(\xi)] < 2M,$$

skąd

$$f(\xi)-\frac{P(\xi)+P_1(\xi)}{2}<M,$$

wbrew (107). Musi więc być

$$f(\xi)-P(\xi)=M \text{ oraz } f(\xi)-P_1(\xi)=M,$$

skąd

$$P(\xi)=P_1(\xi). \tag{109}$$

Podobnież udowodnilibyśmy równość (109) w razie

$$f(\xi)-\frac{P(\xi)+P_1(\xi)}{2}=-M.$$

Dla każdego więc, leżącego w przedziale (a, b) pierwiastka równania (106), a więc co najmniej dla $n+2$ różnych wartości przedziału (a, b), wartości wielomianów $P(x)$ oraz $P_1(x)$ (obu stopnia $\leq n$) są równe: wnosimy stąd, że $P(x)=P_1(x)$ tożsamościowo.

Istnieje więc conajwyżej jeden wielomian stopnia $\leq n$ spełniający warunki (83).

Otrzymane wyniki możemy wypowiedzieć w formie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 156. *Dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b) oraz każdej liczby naturalnej n istnieje (oczywiście jeden tylko) wielomian całkowity stopnia $\leq n$, dający najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b).*

Jeżeli wielomian taki oznaczymy przez $P_n(x)$, to wyrażenie $|f(x)-P_n(x)|$ dosięga w przedziale (a, b) conajmniej $n+2$ razy swego kresu górnego M_n.

Opierając się na tw. Weierstrassa łatwo dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty} M_n=0$. W samej rzeczy, mamy oczywiście $M_{n+1} \leq M_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, zaś z drugiej strony stale $M_n \geq 0$: ciąg M_n, jako nierosnący i ograniczony z dołu posiada więc granicę $g \geq 0$. Gdyby było $g>0$, to wobec $M_n \geq g$ dla $n=1, 2, 3, \ldots$, nie mogłoby być dla żadnego wielomianu $P(x)$

$$|f(x)-P(x)|<g, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

— wbrew twierdzeniu Weierstrassa. Musi więc być $g=0$, czyli $\lim\limits_{n=\infty} M_n=0$, skąd, wobec

$$|f(x)-P_n(x)| \leq M_n, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

wynika, że mamy

$$f(x) = \lim_{n=\infty} P_n(x), \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

przyczem ciąg wielomianów $P_n(x)$ zmierza do $f(x)$ w przedziale (a, b) jednostajnie (oraz, jak łatwo widzieć, szybciej, niż każdy inny, zmierzający do $f(x)$ ciąg wielomianów odpowiednio tych samych co $P_n(x)$ stopni).

Niech teraz (a, b) oznacza dany przedział, m — daną liczbę naturalną. Oznaczmy dla każdej danej funkcji $f(x)$ przez $P_f(x)$ wielomian stopnia $\leq m$, dający najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b). Udowodnimy

Twierdzenie 157. *Jeżeli ciąg funkcyj $f_n(x)$, ciągłych w przedziale (a, b), zmierza w tym przedziale jednostajnie do funkcji $f(x)$, to ciąg wielomianów $P_{f_n}(x)$ zmierza w przedziale (a, b) jednostajnie do wielomianu $P_f(x)$.*

Dowód. Załóżmy więc, że $f_n(x)$ jest ciągiem funkcyj ciągłych w przedziale (a, b), zmierzającym w tym przedziale jednostajnie do funkcji $f(x)$: będzie to więc również funkcja ciągła w przedziale (a, b).

Jeżeli ciąg $P_{f_n}(x)$ nie zmierza w przedziale (a, b) jednostajnie do $P_f(x)$, to istnieje takie dodatnie α oraz taki ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, iż dla żadnego $k = 1, 2, 3, \ldots$ nie mamy

$$|P_{f_{n_k}}(x) - P_f(x)| < \alpha, \text{ dla } a \leq x \leq b. \tag{110}$$

Oznaczmy kres górny funkcji $f(x) - P_f(x)$ w przedziale (a, b) przez M.

Ponieważ ciąg $f_n(x)$, jak zakładamy, zmierza w przedziale (a, b) jednostajnie do $f(x)$, więc dla dodatniego ε istnieje takie μ, iż

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ dla } n > \mu, \; a \leq x \leq b. \tag{111}$$

Lecz

$$f_n(x) - P_f(x) = [f_n(x) - f(x)] + [f(x) - P_f(x)], \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

skąd, wobec (111):

$$|f_n(x) - P_f(x)| < \varepsilon + M, \text{ dla } n > \mu, \; a \leq x \leq b. \tag{112}$$

Ponieważ $P_{f_n}(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq m$, dającym najlepsze przybliżenie dla $f_n(x)$ w przedziale (a, b) (zatem nie gorsze niż wielomian $P_f(x)$), więc, wobec (112)

$$|f_n(x) - P_{f_n}(x)| < \varepsilon + M, \text{ dla } n < \mu, \; a \leq x \leq b. \tag{113}$$

Funkcje $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, jako zmierzające w przedziale (a, b) jednostajnie do funkcji ciągłej $f(x)$, są jednostajnie ograniczone (ze względu na x oraz n): wobec (113) wnosimy stąd w jednej chwili, że wielomiany $P_{f_{n_k}}(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ też są jednostajnie ograniczone (ze względu na x oraz k).

Wynika stąd, dalej, z łatwością, że istnieje taki ciąg rosnący wskaźników k_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, iż ciąg wielomianów $P_{f_{n_{k_p}}}(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ jest w przedziale (a, b) zbieżny jednostajnie do pewnego wielomianu $Q(x)$ stopnia $\leq m$.

Wobec (113) mamy:

$$\left| f_{n_{k_p}}(x) - P_{f_{n_{k_p}}}(x) \right| < \varepsilon + M, \text{ dla } p > \nu,\ a \leq x \leq b,$$

skąd, w granicy, dla $p = \infty$:

$$| f(x) - Q(x) | \leq \varepsilon + M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, dowodzi, że

$$| f(x) - Q(x) | \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

i przeto

$$Q(x) = P_f(x), \text{ dla } a \leq x \leq b$$

[gdyż istnieje tylko jeden wielomian stopnia $\leq m$, dający najlepsze przybliżenie dla $f(x)$ w przedziale (a, b)].

Ciąg wielomianów $P_{f_{n_{k_p}}}(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, będąc w przedziale (a, b) zbieżnym jednostajnie do $Q(x)$, jest więc zbieżnym jednostajnie do $P_f(x)$, wbrew temu, że przy żadnem naturalnem k nie zachodzi nierówność (110).

Dowiedliśmy więc, że ciąg wielomianów $P_{f_n}(x)$ musi zmierzać w przedziale (a, b) jednostajnie do $P_f(x)$.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 157.

ROZDZIAŁ XV.

Szeregi potęgowe.

§ 124. **Szeregiem potęgowym** nazywamy szereg nieskończony

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \tag{1}$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ są dane współczynniki rzeczywiste lub zespolone, zaś z oznacza zmienną zespoloną.

Twierdzenie 158. *Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny dla $z = z_0$ $(\neq 0)$, to jest on zbieżny bezwzględnie dla każdego z, którego moduł jest mniejszy od modułu liczby z_0.*

Dowód. Załóżmy, że szereg potęgowy (1) jest zbieżny dla danej liczby zespolonej $z_0 \neq 0$, czyli że szereg

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \cdots$$

jest zbieżny: z założenia tego wynika, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n z_0^n = 0$; dla dostatecznie wielkich n jest więc

$$|a_n z_0^n| < 1,$$

skąd, mnożąc obie strony przez liczbę $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, dostajemy:

$$|a_n z^n| < \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Składniki szeregu

$$|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + |a_3 z^3| + \ldots$$

są więc, poczynając od pewnego miejsca, odpowiednio mniejsze od składników szeregu geometrycznego

$$1 + \left|\frac{z}{z_0}\right| + \left|\frac{z}{z_0}\right|^2 + \left|\frac{z}{z_0}\right|^3 + \ldots,$$

który jest zbieżny dla $|z| < |z_0|$. Wnosimy stąd, w jednej chwili, ze szereg (1) jest zbieżny bezwzględnie dla $|z| < |z_0|$, *c. b. d. o.*

Wniosek. *Jeżeli szereg potęgowy jest rozbieżny dla* $z = z_0$, *to jest on tembardziej rozbieżny przy wszelkiem* z, *którego moduł jest większy od modułu liczby* z_0.

W samej rzeczy, gdyby szereg (1) był zbieżny dla pewnej liczby z_1, dla której $|z_1| > |z_0|$, to, w myśl tw, 158, musiałby on być zbieżnym dla $z = z_0$, wbrew założeniu.

Zbadamy bliżej różne przypadki, jakie zachodzić mogą co do zbieżności szeregu potęgowego. Przedewszystkiem zwrócimy uwagę na dwa przypadki krańcowe:

1) Szereg potęgowy może być zbieżny przy wszelkiem zespolonem z (szereg taki nazywamy *bezustannie zbieżnym*, zaś sumę jego nazywamy *funkcją całkowitą*, ze względu na pewne analogje z wielomianami całkowitymi): takim jest np. szereg

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

W samej rzeczy, kładąc $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = u_n$, mamy tu $u_n = 0$, dla $z = 0$, zaś dla $z \neq 0$ mamy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1}$, skąd, przy wszelkiem danem $z \neq 0$ znajdujemy: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ i cecha d'Alemberta dowodzi bezustannej zbieżności naszego szeregu.

2) Szereg potęgowy może być zbieżny tylko dla $z=0$: takim jest np. szereg

$$1!z + 2!z^2 + 2!z^3 + \ldots$$

W samej rzeczy, kładąc $|n!z^n| = u_n$, mamy dla $z \neq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|$, skąd, przy wszelkiem $z \neq 0$ znajdujemy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ i cecha d'Alemberta dowodzi rozbieżności naszego szeregu dla $z \neq 0$.

Załóżmy teraz, że dla danego szeregu potęgowego (1) nie zachodzi żaden z omówionych przypadków krańcowych. Istnieją więc conajmniej jedna liczba zespolona $z_1 \neq 0$, dla której szereg (1) jest zbieżny, oraz conajmniej jedna liczba zespolona z_2, dla której szereg (2) jest rozbieżny. Podzielmy zbiór wszystkich liczb dodatnich na dwie klasy, zaliczając do pierwszej klasy każdą liczbę dodatnią, dla której szereg (1) jest zbieżny, zaś do drugiej klasy — każdą liczbę dodatnią, dla której szereg (1) jest rozbieżny. Żadna z tych klas nie jest próżną, gdyż z tw. 158 wynika, że szereg (1) jest zbieżny dla każdej liczby dodatniej $< |z_1|$ oraz rozbieżny dla każdej liczby dodatniej $> |z_2|$. Powiadam dalej, że każda liczba klasy pierwszej jest mniejsza od każdej liczby klasy drugiej. W samej rzeczy, gdyby jakaś liczba ϱ_1 klasy pierwszej była większa od jakiejś liczby ϱ_2 klasy drugiej (równość jest oczywiście wykluczona, gdyż żadna liczba nie może należeć w naszym podziale jednocześnie do obu klas), to szereg potęgowy (1) byłby zbieżny dla liczby ϱ_1 i rozbieżny dla liczby ϱ_2, przyczem $|\varrho_1| > |\varrho_2|$, wbrew twierdzeniu 158. Podział nasz tworzy więc *przekrój* (właściwy) zbioru liczb dodatnich i przeto wyznacza pewną liczbę dodatnią R, która jest jednocześnie niemniejszą od każdej liczby klasy pierwszej i niewiększą od każdej liczby klasy drugiej.

Powiadam, że szereg (1) będzie zbieżny i to bezwzględnie, dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest $< R$, oraz rozbieżny, dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest $> R$. W samej rzeczy załóżmy, że $|z| < R$; obierzmy liczbę dodatnią ϱ, pośrednią między $|z|$ i R: wobec $\varrho < R$ liczba ϱ będzie należała do klasy pierwszej i przeto szereg (1) będzie zbieżny dla liczby ϱ: wobec $|z| < \varrho$ oraz w myśl tw. 158, będzie on więc zbieżny bezwzględnie dla liczby z. Z drugiej strony załóżmy, że $|z| > R$; obierając liczbę dodatnią ϱ pośrednią między R i $|z|$, wnosimy, wobec $\varrho > R$, że ϱ należy do klasy drugiej i przeto szereg (1) będzie rozbieżny dla liczby ϱ i, wobec $|z| > \varrho$ oraz w myśl wniosku z tw. 158, będzie tembardziej rozbieżny dla liczby z.

Dowiedliśmy więc, że w uważanym przypadku istnieje liczba dodatnia R taka, iż szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie dla $|z| < R$ oraz rozbieżny dla $|z| > R$.

Łatwo widzieć, że taka liczba R jest tylko jedna. W samej rzeczy, gdyby jeszcze liczba dodatnia R_1 posiadała tę własność, że szereg (1) jest zbieżny dla $|z| < R_1$ i rozbieżny dla $|z| > R_1$ i gdyby było $R < R_1$, to, kładąc $\varrho = \frac{R + R_1}{2}$, mielibyśmy $R < \varrho < R_1$ i, wobec $R < |\varrho|$ szereg (1) byłby rozbieżny dla liczby ϱ, a jednocześnie, wobec $|\varrho| < R_1$ szereg ten musiałby być zbieżny dla liczby ϱ, co niemożliwe. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 159. *Jeżeli szereg potęgowy nie jest bezustannie zbieżny, ani też zbieżny tylko w punkcie 0, to istnieje dla uważanego szeregu jedna i tylko jedna liczba dodatnia R taka, iż szereg ten jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest mniejszy od R oraz rozbieżny dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest większy od R.*

Liczbę tę nazywamy *promieniem zbieżności* uważanego szeregu potęgowego.

Wniosek. *Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny warunkowo dla liczby zespolonej* z_0, *to liczba* $R = |z_0|$ *jest promieniem zbieżności uważanego szeregu.*

W samej rzeczy, z jednej strony, w myśl tw. 158, uważany szereg jest zbieżny dla $|z| < R$, z drugiej zaś strony nie może być zbieżny dla $|z| > R$, gdyż wówczas musiałby być zbieżny bezwzględnie dla z_0 (wobec $|z_0| = R < |z|$), wbrew założeniu.

O punktach z, spełniających nierówność $|z| < R$, mówimy, że leżą *wewnątrz* koła zbieżności danego szeregu potęgowego; o punktach z, spełniających nierówność $|z| > R$, mówimy, że leżą *zewnątrz* koła zbieżności, wreszcie o punktach z, spełniających równość $|z| = R$, mówimy, że leżą *na obwodzie* koła zbieżności uważanego szeregu potęgowego, lub poprostu *na* jego *kole zbieżności.*

Jeżeli szereg potęgowy jest bezustannie zbieżny, to mówimy, że jego promień zbieżności jest nieskończenie wielki ($R = \infty$); jeżeli szereg potępowy jest zbieżny jedynie w punkcie 0, to mówimy, że jego promień zbieżności jest $=0$. W ten sposób każdy szereg potęgowy ma oznaczony promień zbieżności R, który jest liczbą rzeczywistą nieujemną, skończoną lub nieskończoną, przytem taką, że dla $|z|<R$ szereg jest zawsze zbieżny, zaś dla $|z|>R$ — zawsze rozbieżny.

Twierdzenie 160 (Cauchy'ego-Hadamard'a). *Jeżeli przez R oznaczymy promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, zaś przez λ liczbę $\lambda = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, to będzie*

$$R = \frac{1}{\lambda} \text{ dla } 0 < \lambda < \infty,$$
$$R = \infty \text{ dla } \lambda = 0,$$
$$\textit{wreszcie } R = 0 \text{ dla } \lambda = \infty.$$

Dowód. Załóżmy, że $0 < \lambda < \infty$. Dla dowodu, że $R = \frac{1}{\lambda}$ wystarczy okazać, że szereg potęgowy $\sum a_n z^n$ jest zbieżny dla $|z| < \frac{1}{\lambda}$ oraz rozbieżny dla $|z| > \frac{1}{\lambda}$. Niech więc z oznacza daną liczbę zespoloną $\neq 0$, spełniającą nierówność $|z| < \frac{1}{\lambda}$: będzie zatem $\lambda|z| < 1$. Oznaczmy przez a liczbę dodatnią, pośrednią między $\lambda|z|$ oraz 1: będzie więc $\lambda|z| < a < 1$, skąd $\lambda < \frac{a}{|z|}$. Wobec $\lambda = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ będzie więc $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{a}{|z|}$ dla $n > \mu$, co daje w jednej chwili $|a_n z^n| < a^n$ dla $n > \mu$, co, wobec $a < 1$, dowodzi zbieżności (bezwzględnej) szeregu $\sum a_n z^n$. Szereg ten jest więc zbieżny dla $|z| < \frac{1}{\lambda}$. Z drugiej strony, jeżeli z oznacza liczbę zespoloną, spełniającą nierówność $|z| > \frac{1}{\lambda}$, to mamy $\lambda > \frac{1}{|z|}$, skąd, wobec $\lambda = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ wynika, że dla nieskończenie wielu różnych n mamy $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$, czyli $|a_n z^n| > 1$, co dowodzi rozbieżności szeregu $\sum a_n z^n$: szereg nasz jest więc rozbieżny dla $|z| > \frac{1}{\lambda}$.

Załóżmy teraz, że $\lambda = 0$, czyli że $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$: będzie więc, przy wszelkiem $z \neq 0$ i wszelkiem dodatniem $a < 1$, $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{a}{|z|}$, skąd, dla $n > \mu$: $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{a}{|z|}$, czyli $|a_n z^n| < a^n$, co dowodzi zbieżności szeregu $\Sigma a_n z^n$ przy wszelkiem zespolonem z. Szereg nasz jest więc bezustannie zbieżny, czyli $R = \infty$.

Załóżmy wreszcie, że $\lambda = \infty$, czyli że $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. Wynika stąd, że przy każdem danem zespolonem $z \neq 0$, dla nieskończenie wielu różnych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq \frac{1}{|z|}$, czyli $|a_n z^n| \geqq 1$, co dowodzi rozbieżności szeregu $\Sigma a_n z^n$ przy wszelkiem $z \neq 0$. Jest więc w uważanym przypadku $R = 0$.

Twierdzenie nasze udowodniliśmy zatem w zupełności.

Uwaga. Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, to wartość tej granicy jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\Sigma a_n z^n$: mamy bowiem wówczas, w myśl tw. 95:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}.$$

§ **125. Twierdzenie 161.** *Jeżeli R oznacza promień zbieżności danego szeregu potęgowego, zaś ρ — dowolną daną liczbę dodatnią $< R$, to szereg ten jest zbieżny jednostajnie i przeto przedstawia funkcję ciągłą w zbiorze Z wszystkich liczb zespolonych z, spełniających nierówność $|z| \leqq \rho$.*

Dowód. Niech $R (> 0)$ oznacza (skończony lub nieskończenie wielki) promień zbieżności szeregu potęgowego $\Sigma a_n z^n$, ρ — liczbę dodatnią. Uważany szereg jest więc zbieżny przy wszelkiem zespolonem z, którego moduł jest mniejszy od R: połóżmy

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

— będzie to więc funkcja zmiennej zespolonej z, oznaczona w zupełności dla $|z| < R$. Oznaczając przez $r_n(z)$ resztę szeregu $f(z)$, będziemy mieli:

$$r_n(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots;$$

lecz, dla $|z| \leq \rho$ mamy

$$|a_k z^k| \leq |a_k \rho^k|, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots),$$

skąd w jednej chwili (z uwagi, że wobec $\rho < R$ szereg $f(\rho)$ jest zbieżny bezwzględnie):

$$|r_n(z)| \leq |a_n| \rho^n + |a_{n+1}| \rho^{n+1} + \ldots, \text{ dla } |z| \leq \rho. \qquad (2)$$

Z drugiej strony, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu $f(\rho)$, dla liczby dodatniej ε istnieje liczba μ taka, iż

$$|a_n| \rho^n + |a_{n+1}| \rho^{n+1} + \ldots < \varepsilon \text{ dla } n > \mu.$$

W myśl (2) mamy więc

$$|r_n(z)| < \varepsilon \text{ dla } n > \mu$$

przy wszelkiem zespolonem z, spełniającem nierówność $|z| \leq \rho$, co dowodzi zbieżności jednostajnej uważanego szeregu potęgowego dla $|z| \leq \rho$. Ponieważ zaś składniki szeregu potęgowego są funkcjami ciągłemi zmiennej z, więc suma tego szeregu (jako jednostajnie zbieżnego dla $|z| \leq \rho$) przedstawia (w myśl tw. 147) funkcję ciągłą dla $|z| \leq \rho$. Twierdzenie 161 udowodniliśmy zatem w zupełności.

W szczególności, jeżeli $R = \infty$, to jako ρ możemy w tw. 161 obrać dowolną liczbę dodatnią: funkcja $f(z)$ będzie więc ciągłą (w zbiorze liczb zespolonych) dla każdej wartości zmiennej zespolonej z, czyli, jak się wyrażamy: *w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej*.

Szereg potęgowy bezustannie zbieżny przedstawia więc funkcję ciągłą w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Podobnież, w razie kiedy R jest liczbą skończoną, możemy jako ρ obrać dowolną liczbę dodatnią $< R$: jeżeli więc z_0 oznacza liczbę zespoloną taką iż $|z_0| < R$, to, obierając jako ρ liczbę pośrednią między $|z_0|$ oraz R, wywnioskujemy, w myśl tw. 161, że $f(z)$ jest funkcją ciągłą dla punktu z_0 (w zbiorze liczb zespolonych). *Szereg potęgowy przedstawia więc funkcję ciągłą w całem wnętrzu swego koła zbieżności.*

§ **126.** Co się tyczy zachowania się szeregu potęgowego *na obwodzie swego koła zbieżności*, to może ono być rozmaite:

1) Szereg potęgowy może być rozbieżny na całem swem kole zbieżności: takim jest np. szereg geometryczny

$$1+z+z^2+z^3+\dots,$$

którego promień zbieżności jest oczywiście $=1$.

2) Szereg potęgowy może być zbieżny na całem swem kole zbieżności: takim jest np. szereg

$$\frac{z}{1^2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z}{3^2}+\dots,$$

którego promień zbieżności jest $=1$ (gdyż dla $|z|=1$ szereg nasz jest zbieżny (bezwzględnie), wobec zbieżności szeregu $\Sigma\frac{1}{n^2}$, zaś dla $|z|>1$ szereg nasz jest rozbieżny, ponieważ $lim\frac{a^n}{n^2}=\infty$ dla $a>1$).

3) Szereg potęgowy może być w pewnych punktach swego koła zbieżności zbieżnym, w innych zaś rozbieżnym: takim jest np. szereg

$$\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots$$

(o promieniu zbieżności 1), który, jak łatwo widzieć, jest zbieżny dla $z=1$ i rozbieżny dla $z=-1$. Możnaby okazać, że punkt $z=-1$ jest tu jedynym punktem koła $|z|=1$, w którym szereg nasz jest rozbieżny.

Szereg potęgowy może być zbieżnym dla nieskończenie wielu punktów swego koła zbieżności i jednocześnie rozbieżnym dla nieskończenie wielu punktów tegoż koła. Takim jest np. szereg Ruziewicza $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n3^n}}{n}$.

W samej rzeczy, niech m oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Dla każdego pierwiastka z równania $z^{3^m}=1$ (a takich pierwiastków mamy, w myśl tw. 75, dokładnie 3^m) będziemy mieli oczywiście $z^{n3^n}=1$ dla $n\geq m$ i przeto (wobec rozbieżności szeregu harmonicznego) szereg Ruziewicza będzie rozbieżny. Natomiast dla każdego pierwiastka z równania $z^{3^m}=-1$ (których jest również 3^m) będziemy mieli, jak łatwo widzieć $z^{n3^n}=(-1)^n$ dla $n\geq m$ i przeto, wobec zbieżności szeregu $\sum\frac{(-1)^n}{n}$, szereg Ruziewicza będzie zbieżny. Wobec dowolności liczby naturalnej m wnosimy więc, że szereg Ruziewicza jest zbieżny dla nieskończenie wielu różnych z, dla których $|z| = 1$, a jednocześnie rozbieżny dla nieskończenie wielu takich z.

Istnieją też szeregi potęgowe zbieżne w jednym tylko punkcie swego koła zbieżności[1]. Nie dla każdego jednak dowolnie danego na kole $|z| = 1$ zbioru liczb zespolonych Z istnieje szereg potęgowy, który dla $|z| = 1$ jest zbieżny w całym zbiorze Z i rozbieżny poza tym zbiorem.

Jak dowiedliśmy w końcu § 125, szereg potęgowy przedstawia funkcję ciągłą w całem wnętrzu swego koła zbieżności. Godnem uwagi jest jednak, że na obwodzie koła zbieżności suma szeregu potęgowego może być funkcją nieciągłą. Damy mianowicie *przykład szeregu potęgowego, który, będąc zbieżnym w każdym punkcie swego koła zbieżności, przedstawia na tem kole funkcję nieciągłą*[2].

Połóżmy w tym celu

$$\alpha_n = \frac{n^2 - 1 + 2ni}{n^2 + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

i oznaczmy przez $P(z)$ szereg potęgowy, który otrzymamy, odrzucając nawiasy w szeregu

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1^2}{2} z^2(\alpha_1 + z) + \frac{2^2}{2^2} z^{2^2}(\alpha_2^3 + \alpha_2^2 z + \alpha_2 z^2 + z^3) + \ldots \\ \ldots + &\frac{n^2}{2^n} z^{2^n}(\alpha_n^{2^n-1} + \alpha_n^{2^n-2} z + \ldots + \alpha_n z^{2^n-2} + z^{2^n-1}) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

czyli szereg

$$\left.\begin{aligned} P(z) = &\frac{\alpha_1}{2} z^2 + \frac{1}{2} z^3 + \alpha_2^3 z^4 + \alpha_2^2 z^5 + \alpha_2 z^6 + z^7 + \frac{9}{8} \alpha_3^7 z^8 + \ldots \\ \ldots + &\frac{n^2}{2^n} \alpha_n^{2^n-1} z^{2^n} + \frac{n^2}{2^n} \alpha_n^{2^n-2} z^{2^n+1} + \ldots + \frac{n^3}{2^n} z^{2^{n+1}-1} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Udowodnimy, że szereg (4) jest zbieżny dla $|z| = 1$.

Ze wzorów (3) wynika natychmiast, że

$$|\alpha_n| = 1, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

oraz

$$|1 - \alpha_n| = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Niech teraz z oznacza liczbę zespoloną, spełniającą warunek

$$|z| = 1. \tag{8}$$

[1] Zob. mój odnośny komunikat w Sprawozd. z pos. Tow. Nauk. Warsz. 1912, p. 153, albo też cytowaną na str. 314 książkę Landau'a, § 16.

[2] *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. T. 41 (1916), p. 187. Zauważymy, że jeszcze w r. 1912 p. H. Steinhaus znalazł szereg potęgowy, który, będąc zbieżnym na całem swem kole zbieżności, przedstawia na tem kole funkcję pantachicznie nieciągłą (t. j. funkcję, która nie jest ciągłą na żadnym łuku uważanego koła). Zob. *Sprawozdania z pos. Tow. Nauk. Warsz.* t. VI (1913), str. 357—367.

Dla $z \neq \alpha_n$ możemy n-ty składnik $u_n(z)$ szeregu (4) napisać w postaci:

$$u_n(z) = \frac{n^2}{2^n} z^{2^n} \cdot \frac{z^{2^n} - \alpha_n^{2^n}}{z - \alpha_n},$$

skąd, wobec (8) i (6):

$$|u_n(z)| \leq \frac{2n^2}{2^n |z - \alpha_n|}, \quad \text{dla } z \neq \alpha_n, \ |z| = 1. \tag{9}$$

Rozróżnimy dalej dwa przypadki:

1) $z \neq 1$. Połóżmy

$$|1 - z| = 2\delta; \tag{10}$$

będziemy więc mieli $\delta > 0$. Dla $n > \frac{2}{\delta}$ będzie $\sqrt{n^2 + 1} > n > \frac{2}{\delta}$ i przeto, wobec (7):

$$|1 - \alpha_n| < \delta,$$

co daje, wobec (10):

$$|\alpha_n - z| = |(1 - z) - (1 - \alpha_n)| \geq |1 - z| - |1 - \alpha_n| > \delta,$$

zatem

$$|z - \alpha_n| > \delta, \quad \text{dla } n > \frac{2}{\delta}, \tag{11}$$

skąd, wobec (9):

$$|u_n(z)| < \frac{2n^2}{2^n \delta} \quad \text{dla } n > \frac{2}{\delta},$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, dowodzi zbieżności szeregu (4) dla $|z| = 1$, $z \neq 1$.

2) $z = 1$. Wobec (7) i (9) znajdujemy:

$$|u_n(1)| \leq \frac{n^2 \sqrt{n^2 + 1}}{2^n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

co, jak łatwo widzieć, pociąga za sobą zbieżność szeregu (4) dla $z = 1$.

Szereg (4) jest więc zawsze zbieżny dla $|z| = 1$.

Powiadam dalej, że i szereg (5) jest zbieżny dla $|z| = 1$.

Oznaczmy, dla dowodu, przez $P_k(z)$ sumę $k - 1$ pierwszych składników szeregu (5). Niech k oznacza dany wskaźnik > 1: przy pewnem naturalnem n (zależnem od k) będziemy mieli:

$$2^n \leq k < 2^{n+1} \tag{12}$$

i przeto, oznaczając przez $S_n(z)$ sumę n pierwszych składników szeregu (4), będziemy mogli napisać:

$$P_k(z) = S_{n-1}(z) + \frac{n^2 z^{2^n}}{2^n} \left(\alpha_n^{2^n - 1} + \alpha_n^{2^n - 2} z + \ldots + \alpha_n^{2^{n+1} - k - 1} z^{k - 2^n}\right),$$

skąd:

$$P_k(z) - S_{n-1}(z) = \frac{n^2 \cdot z^{2^n} \alpha_n^{2^{n+1} - k - 1}}{2^n} \cdot \frac{z^{k - 2^n + 1} - \alpha_n^{k - 2^n + 1}}{z - \alpha_n}, \quad \text{dla } z \neq \alpha_n,$$

zatem, wobec (6) i (8):

$$|P_k(z) - S_{n-1}(z)| \leq \frac{2n^2}{2^n |z - \alpha_n|}, \quad \text{dla } z \neq \alpha_n, |z| = 1 \tag{13}$$

Niech będzie $z \neq 1$. Oznaczając przez δ liczbę $\frac{1}{2}|1 - z|$, będziemy dla $k > 2^{\frac{2}{\delta}+1}$ mieli, wobec (12): $2^{n+1} > 2^{\frac{2}{\delta}+1}$, zatem $n > \frac{2}{\delta}$, co, wobec (11), pociąga za sobą nierówność

$$|z - \alpha_n| > \delta;$$

wzór (13) daje więc:

$$|P_k(z) - S_{n-1}(z)| < \frac{2n^2}{2^n \delta}, \quad \text{dla } k > 2^{\frac{2}{\delta}+1} \tag{14}$$

Lecz, wobec (12), n wzrasta nieograniczenie wraz z k: nierówność (14) dowodzi więc, wobec zbieżności szeregu (4) [a więc i ciągu $S_{n-1}(z)$], że ciąg $P_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny.

Dla $z = 1$ nierówność (13) daje, wobec (7):

$$|P_k(1) - S_{n-1}(1)| \leq \frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n},$$

skąd, wobec zbieżności szeregu (4), znowu wnosimy o zbieżności ciągu $P_n(1)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Udowodniliśmy więc, że ciąg $P_k(z)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, a więc też i szereg (5), jest zawsze zbieżny dla $|z| = 1$.

Powiadam, że funkcja $P(z)$ nie jest ograniczoną dla $|z| = 1$.

W samej rzeczy niech k oznacza dowolną daną liczbę naturalną: obliczymy $P(\alpha_k)$. Wystarczy w tym celu oczywiście obliczyć sumę szeregu (4) dla $z = \alpha_k$.

Wobec (3) znajdujemy w jednej chwili dla naturalnych k i n:

$$|\alpha_k - \alpha_n| = \frac{2|k-n|}{\sqrt{(k^2+1)(n^2+1)}},$$

skąd

$$|\alpha_k - \alpha_n| \geq \frac{2}{\sqrt{(k^2+1)(n^2+1)}}, \quad \text{dla } n \neq k,$$

zatem, wobec (9) (z uwagi, że, wobec (6), $|\alpha_k| = 1$):

$$|u_n(\alpha_k)| \leq \frac{n^2}{2^n}\sqrt{(k^2+1)(n^2+1)}, \quad \text{dla } n \neq k,$$

co daje:

$$\left|\sum_{n=1}^{k-1} u_n(\alpha_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(\alpha_k)\right| < \sqrt{k^2+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n}. \tag{15}$$

Połóżmy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n} = A$$

(będzie to oczywiście liczba dodatnia, skończona) wobec (15) będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$|P(\alpha_k) - u_k(\alpha_k)| < A\sqrt{k^2+1} < A(k+1). \tag{16}$$

Z drugiej strony, mamy oczywiście

$$u_k(\alpha_k) = k^2\alpha_k^{2^{k+1}} - 1,$$

zatem, wobec (6):

$$|u_k(\alpha_k)| = k^2 \tag{17}$$

Wobec (16) i (17) dają:

$$|P(\alpha_k)| = |u_k(\alpha_k) - [u_k(\alpha_k) - P(\alpha_k)]| \geq |u_k(\alpha_k)| - |u_k(\alpha_k) - P(\alpha_k)| > k^2 - A(k+1),$$

czyli:

$$|P(\alpha_k)| > k^2 - A(k+1). \tag{18}$$

Wobec (18) znajdujemy natychmiast (z uwagi, że A nie zależy od n):

$$\lim_{k=\infty} |P(\alpha_k)| = \infty,$$

natomiast, w myśl (6) i (7) mamy:

$$|\alpha_k| = 1 \ (k = 1, 2, \ldots), \ \text{oraz} \ \lim_{k=\infty} \alpha_k = 1.$$

Wynika stąd natychmiast, że funkcja $P(z)$ jest na kole $|z| = 1$ nieciągłą dla punktu $z = 1$ (oraz, że nie jest ograniczoną na kole $|z| = 1$). Koło $|z| = 1$ jest tu oczywiście kołem zbieżności szeregu (5), gdyż inaczej, w myśl tw. 161, szereg ten przedstawiałby funkcję ciągłą na uważanem kole, wbrew temu cze-gośmy przed chwilą dowiedli.

Dowiedliśmy więc, że *szereg potęgowy, który jest zbieżny na całem swem kole zbieżności, może na tem kole przedstawiać funkcję nieciągłą.*

Ze wzoru (17) wynika natychmiast, że szereg (4), a więc, tembardziej, szereg (5), jest zbieżny niejednostajnie na kole $|z| = 1$. Mamy więc przykład szeregu potęgowego, zbieżnego na całem swem kole zbieżności, ale niejednostajnie. (Możnaby też stąd z łatwością wywnioskować, że szereg (5) jest zbieżny niejednostajnie dla $|z| < 1$).

Zauważymy też, że istnieje szereg potęgowy, zbieżny na całem swem kole zbieżności, ale *niejednostajnie*, którego suma atoli jest na tem kole funkcją *ciągłą*[1].

Powiadam wreszcie, że szereg (5) jest dla $|z| = 1$ zbieżny tylko warunkowo. W samej rzeczy, biorąc moduły składników szeregu (5) i łącząc je w grupy, odpowiadające składnikom szeregu (4), otrzymamy, jak łatwo widzieć, jako sumę modułów n tej grupy liczbę n^2, skąd wynika, że dla $|z| = 1$ szereg modułów kolejnych składników szeregu (5) jest zawsze rozbieżny. Widzimy więc, że *szereg potęgowy może być zbieżny na całem swem kole zbieżności, ale tylko warunkowo.*

[1] Przykład takiego szeregu podał w r. 1917 L. Fejér w pracy, ogłoszonej w Sprawozdaniach Akademji Bawarskiej z tegoż roku, str. 38.

(Łatwo widzieć, że szereg potęgowy, który jest zbieżny bezwzględnie w pewnym punkcie swego koła zbieżności, jest na całem tem kole zbieżny jednostajnie i przedstawia na niem funkcję ciągłą).

§ 126ª. Co do charakteru zbieżności szeregu potęgowego na obwodzie swego koła zbieżności, to okażemy jeszcze, że *istnieją szeregi potęgowe, które są dla* $|z| = 1$ *zbieżne jednostajnie, ale nie bezwzględnie.*

W r. 1913 udowodnił Hardy, że szeregiem takim jest szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} \binom{-i}{n} z^n;$$

dowód Hardy'ego jest jednak nieelementarny [1]. Wcześniej nieco znalazł podobny szereg p. H. Steinhaus, ale ogłosił go dopiero w r. 1918 [2]. P. Steinhaus udowodnił mianowicie, że szereg

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{E\frac{\log n}{\log 2}}}{n \log n} z^n,$$

podany jeszcze w r. 1885 przez Pringsheima, jako przykład szeregu zbieżnego warunkowo na całem swem kole zbieżności [3], jest na całem tem kole zbieżny jednostajnie.

Bardziej jeszcze elementarny przykład szeregu o żądanej własności otrzymać można w sposób następujący [4].

Weźmy pod uwagę szereg

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} \left(z^{2^{n-1}} + z^{2^{n-1}+1} + \ldots + z^{2^n-1}\right), \tag{a}$$

czyli szereg

$$\frac{z}{2} - \frac{1}{2^2 . 2}(z^2 + z^3) + \frac{1}{2^3 . 3}(z^4 + z^5 + z^6 + z^7) - \frac{1}{2^4 . 4}(z^8 + \ldots + z^{15}) + \ldots$$

Opuszczając nawiasy, otrzymamy z szeregu tego szereg potęgowy

$$Q(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{24} + \frac{z^6}{24} + \frac{z^7}{24} + \frac{z^8}{64} - \ldots \tag{b}$$

który jest na całem swem kole zbieżności zbieżny jednostajnie, ale nie bezwzględnie.

---

[1] Por. E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*. Berlin 1916, p. 61. Inny przykład szeregu o żądanej własności dał L. Fejér w *Sitzungsber. d. Bayerischen Akademie d. Wiss.* 1917, p. 49.

[2] Biuletyn Akademji Krakowskiej, czerwiec 1918.

[3] *Mathematische Annalen* 25, p. 424.

[4] Prace matematyczno-fizyczne t. 29, p. 263.

Dla dowodu okażemy przedewszystkiem, że szereg (a) jest zbieżny jednostajnie dla $|z| = 1$.

Oznaczmy przez $P_n(z)$ sumę n pierwszych składników szeregu (a). Dla $z = 1$ szereg (a) staje się szeregiem

$$P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, malejących bezwzględnie; mamy zatem:

$$|P_q(1) - P_p(1)| < \frac{1}{2(p+1)}, \quad \text{dla } q > p. \tag{c}$$

Dla $z \neq 1$ możemy napisać:

$$P_q(z) - P_p(z) = \sum_{n=p+1}^{q} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} \cdot \frac{z^{2^n} - z^{2^{n-1}}}{z-1},$$

skąd, z uwagi że wobec $|z| = 1$, mamy $|z^{2^n} - z^{2^{n-1}}| \leq 2$:

$$|P_q(z) - P_p(z)| \leq \frac{2}{|z-1|} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{2^n n} < \frac{2}{|z-1|(p+1)} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^p (p+1)|z-1|}.$$

Stąd, w jednej chwili:

$$|P_q(z) - P_p(z)| < \frac{2}{p+1}, \quad \text{dla } |z-1| \geq \frac{1}{2^p}, \ |z| = 1, \ q > p. \tag{d}$$

Załóżmy teraz, że $|z-1| < \frac{1}{2^p}$, $z \neq 1$. Istnieje wówczas liczba naturalna $k \geq p$ (zależna od z), taka iż

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq |z-1| < \frac{1}{2^k}. \tag{e}$$

Tożsamość

$$z^m - 1 = (z-1)(z^{m-1} + z^{m-2} + \ldots + z + 1)$$

daje dla $|z| = 1$:

$$|z^m - 1| \leq m\,|z-1|.$$

Kładąc kolejno $m = 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n - 1$, wnosimy stąd, że każda z 2^{n-1} różnic $z^{2^{n-1}} - 1, z^{2^{n-1}+1} - 1, \ldots, z^{2^n-1} - 1$ jest bezwzględnie mniejsza od $2^n |z-1|$, skąd w jednej chwili:

$$|z^{2^{n-1}} + z^{2^{n-1}+1} + \ldots + z^{2^n-1} - 2^{n-1}| < 2^{2n-1}|z-1|.$$

Mamy zatem, dla $q \leq k+1$, wobec (e):

$$|P_q(z) - P_p(z) - (P_q(1) - P_p(1))| = \left| \sum_{n=p+1}^{q} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} (z^{2^{n-1}} + z^{2^{n-1}+1} + \ldots + z^{2^n-1} - 2^{n-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=p+1}^{q} \frac{2^{2n-1}|z-1|}{2^n n} \leq \frac{1}{2^k(p+1)} \sum_{n=p+1}^{q} 2^{n-1} < \frac{2^q}{2^k(p+1)} \leq \frac{2}{p+1},$$

skąd, wobec (c):

$$|P_q(z) - P_p(z)| < \frac{5}{2(p+1)}, \text{ dla } p < q \leq k+1. \tag{f}$$

Stąd, w szczególności, dla $q = k+1$:

$$|P_{k+1}(z) - P_p(z)| < \frac{5}{2(p+1)}. \tag{g}$$

Zastępując we wzorze (d) p przez $k+1$, możemy, wobec (e), napisać, z uwagi, że $k \geq p$:

$$|P_q(z) - P_{k+1}(z)| < \frac{2}{k+2} \leq \frac{2}{p+2}, \text{ dla } q > k+1,$$

co, wobec (g), daje:

$$|P_q(z) - P_p(z)| < \frac{5}{p+1}, \text{ dla } p < q,\ q > k+1. \tag{h}$$

Wzory (f) i (h) dowodzą, że, w każdym razie, w uważanym przypadku $\left(0 < |z-1| < \frac{1}{2^p}\right)$ zachodzi nierówność

$$|P_q(z) - P_p(z)| < \frac{5}{p+1}, \text{ dla } q > p. \tag{j}$$

Lecz, wobec (d), nierówność (j) zachodzi również dla $|z-1| \geq \frac{1}{2^p}$, jakoteż, wobec (c), dla $z = 1$; nierówność (j) zachodzi więc zawsze dla $|z| = 1$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu (a) na kole $|z| = 1$.

Niech teraz m oznacza dowolny dany wskaźnik > 1. Oznaczmy przez k_m największą liczbę naturalną, spełniającą nierówność $2^k \leq m$; będzie więc

$$2^{k_m} \leq m < 2^{k_m+1},$$

i przeto, oznaczając przez $Q_m(z)$ sumę m pierwszych składników szeregu (b), będziemy mieli:

$$Q_m(z) = P_{k_m}(z) + \frac{(-1)^{k_m}}{2^{k_m+1}(k_m+1)}\left(z^{2^{k_m}} + z^{2^{k_m}+1} + \ldots + z^m\right),$$

skąd, z uwagi, że dla $|z| = 1$ mamy

$$|z^{2^{k_m}} + z^{2^{k_m}+1} + \ldots + z^m| \leq m + 1 - 2^{k_m} \leq 2^{k_m+1} - 2^{k_m} = 2^{k_m},$$

znajdujemy:

$$|Q_m(z) - P_{k_m}(z)| < \frac{1}{2(k_m+1)},$$

co, z uwagi, że k_m wzrasta nieograniczenie wraz z m, oraz że ciąg $P_{k_m}(z)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ jest dla $|z| = 1$ zbieżny jednostajnie, dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu $Q_m(z)$, a więc i szeregu $Q(z)$ dla $|z| = 1$.

Z drugiej strony, szereg (b) nie jest dla $z = 1$ zbieżny bezwzględnie, gdyż, łącząc odpowiednio w grupy jego składniki, otrzymujemy z niego szereg

(a), który jest dla $z=1$ zbieżny warunkowo (wynika stąd zarazem, że koło $|z|=1$ jest kołem zbieżności badanego szeregu potęgowego).
Wszystkie żądane własności szeregu (b) zostały więc udowodnione.

§ 127. **Twierdzenie 162** (Abela). *Jeżeli szereg potęgowy*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots \tag{19}$$

jest zbieżny dla $x=1$ (choćby tylko warunkowo), to w całym przedziale $(0,1)$ jest on zbieżny jednostajnie i przeto przedstawia w tym przedziale funkcję ciągłą.

Dowód. Jak zakładamy, szereg

$$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots$$

jest zbieżny; oznaczmy przez s_n sumę n pierwszych jego składników i połóżmy

$$r_n=f(1)-s_n, \quad (n=1,2,3,\ldots);$$

będzie więc:

$$\lim_{n=\infty} r_n=0 \tag{20}$$

oraz (wobec $s_{n+1}-s_n=a_n$):

$$r_n-r_{n+1}=a_n \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{21}$$

Szereg

$$Q_n(x)=r_{n+1}x^n+r_{n+2}x^{n+1}+r_{n+3}x^{n+2}+\ldots \tag{22}$$

jest oczywiście (przy wszelkiem naturalnem n) zbieżny dla $0\leq x<1$, gdyż dla dostatecznie wielkich k mamy, wobec (20), stale $|r_k|<1$ i przeto składniki szeregu (22) są, poczynając od pewnego miejsca, bezwzględnie mniejsze od składników szeregu geometrycznego zbieżnego.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec (20) istnieje dla liczby ε takie μ, iż

$$|r_k|<\varepsilon \text{ dla } k>\mu, \tag{23}$$

skąd, wobec (22), dla $n>\mu$ (przy $0\leq x<1$):

$$|Q_n(x)|<\varepsilon x^n+\varepsilon x^{n+1}+\varepsilon x^{n+2}+\ldots=\frac{\varepsilon x^n}{1-x}<\frac{\varepsilon}{1-x}$$

i przeto:

$$|(1-x)\,Q_n(x)|<\varepsilon, \text{ dla } n>\mu,\ 0\leq x<1. \tag{24}$$

Wobec zbieżności szeregu (22) dla $0 \leq x < 1$, znajdujemy:

$$(1-x)\,Q_n(x) = Q_n(x) - x\,Q_n(x) = r_{n+1}x^n - r_{n+1}x^{n+1} + \\ + r_{n+2}x^{n+1} - r_{n+2}x^{n+2} + \ldots = r_n x^n - (r_n - r_{n+1})x^n - \\ - (r_{n+1} - r_{n+2})x^{n+1} - (r_{n+2} - r_{n+3})x^{n+2} - \ldots,$$

skąd, wobec (21):

$$(1-x)\,Q_n(x) = r_n x^n - a_n x^n - a_{n+1}x^{n+1} - a_{n+2}x^{n+2} - \ldots,$$

co daje:

$$a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots = r_n x^n - (1-x)\,Q_n(x), \text{ dla } 0 \leq x < 1,$$

skąd, wobec (23) i (24):

$$|a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots| < 2\varepsilon, \text{ dla } n > \mu. \tag{25}$$

Nierówność tę wyprowadziliśmy, zakładając, że $0 \leq x < 1$: jest ona jednak prawdziwą i dla $x = 1$, w myśl (23) (gdyż dla $x = 1$ lewa strona nierówności (25) staje się liczbą $|r_n|$). Nierówność (25) jest więc prawdziwą dla $0 \leq x \leq 1$, co dowodzi, że szereg (19) jest w całym przedziale (0,1) zbieżny jednostajnie, *c. b. d. o.* Udowodniliśmy więc twierdzenie 162.

Wniosek. *Jeżeli szereg potęgowy*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{26}$$

jest zbieżny dla punktu $z = z_0 \neq 0$, *to jest on zbieżny jednostajnie (i przeto przedstawia funkcję ciągłą) w całym zbiorze Z wszystkich liczb zespolonych postaci* $z_0 x$, *gdzie* $0 \leq x \leq 1$.

Dowód. W myśl założenia naszego zbieżnym jest szereg

$$f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \ldots$$

Połóżmy

$$F(x) = f(z_0 x) = a_0 + a_1 z_0 x + a_2 z_0^2 x^2 + \ldots$$

— będzie to szereg potęgowy względem x, zbieżny dla $x = 1$, a więc, w myśl tw. 162, zbieżny jednostajnie w całym przedziale $0 \leq x \leq 1$, co dowodzi zbieżności jednostajnej szeregu (26) dla wszystkich liczb zespolonych postaci $z_0 x$, gdzie $0 \leq x \leq 1$, *c. b. d. o.*

Z twierdzenia 162 wynika natychmiast

Twierdzenie 162^a^. *Jeżeli*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 0,$$

to dla każdej liczby dodatniej ε *istnieje takie* $\delta > 0$, *iż*

$$| a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots | < \varepsilon, \text{ dla } 1 - \delta < x < 1.$$

Zauważymy, że twierdzenie to nie daje się odwrócić. Np. dla szeregu

$$f(x) = \frac{1}{2} - x + x^2 - x^3 - \ldots,$$

który jest zbieżny dla $| x | < 1$, mamy:

$$| f(x) | = \frac{1-x}{2(1+x)} < 1 - x, \text{ dla } 0 < x < 1,$$

i przeto (przy $0 < \varepsilon < 1$):

$$| f(x) | < \varepsilon \text{ dla } 1 - \varepsilon < x < 1,$$

natomiast szereg

$$f(1) = \frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

jest rozbieżny.

Istnieją też szeregi potęgowe, których suma jest dla $| z | < 1$ stale bezwzględnie ≤ 1, a jednak rozbieżne dla $z = 1$, i to w ten sposób, że sumy cząstkowe nie są ograniczone[1]).

Przy pewnych atoli warunkach twierdzenie 162ᵃ daje się odwrócić: np. przy założeniu, że $\lim_{n=\infty} n a_n = 0$. Zachodzi mianowicie następujące

Twierdzenie 163 (Taubera). *Jeżeli*

$$\lim_{n=\infty} n a_n = 0 \tag{27}$$

(co oczywiście pociąga za sobą zbieżność szeregu potęgowego

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{28}$$

dla $| z | < 1$) *i, jeżeli*

$$\lim_{n=\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0, \tag{29}$$

to mamy

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 0. \tag{30}$$

Dowód. Wobec (27) mamy $\lim_{n=\infty} n \, | a_n | = 0$, skąd, w myśl tw. 110:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \, | a_k | = 0. \tag{31}$$

Wobec (27), (31) i (29) istnieje dla liczby dodatniej ε takie μ iż

$$k \, | a_k | < \varepsilon \text{ dla } k > \mu \tag{32}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \, | a_n | < \varepsilon \text{ dla } n > \mu \tag{33}$$

[1]) Zob. E. Landau, l. c. § 3.

oraz

$$\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon \quad \text{dla } n > \mu. \tag{34}$$

Połóżmy

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{35}$$

Wobec (35) i (28) możemy napisać, dla $n > 0$, $0 \leq x < 1$:

$$s_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k,$$

zatem, wobec $1-x^k = (1-x)(1+x+\ldots+x^{k-1}) \leq (1-x)k$ (dla $0 \leq x < 1$):

$$|s_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,x^k. \tag{36}$$

Lecz, wobec (32) mamy, dla $n > \mu$, $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,x^n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\frac{x_k}{k} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{n} < \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{n(1-x)}$$

skąd, wobec (33) i (36):

$$|s_n - f(x)| < n(1-x)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n(1-x)}, \quad \text{dla } n > \mu,\ 0 \leq x < 1,$$

zatem, dla $x = 1 - \dfrac{1}{n}$:

$$\left|s_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, wobec (34):

$$|s_n| < 3\varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

co, wobec (35), dowodzi wzoru (30).

Udowodniliśmy więc twierdzenie 163.

§ 128. **Twierdzenie 164.** *Jeżeli, oznaczając przez $f(z)$ szereg potęgowy*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{37}$$

mamy dla ciągu nieskończonego z_n liczb różnych od zera i zmierzających do zera stale $f(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, to wszystkie współczynniki szeregu potęgowego $f(z)$ są równe zeru.

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są spełnione (skąd oczywiście wynika, że promień zbieżności szeregu (37) jest dodatni). Załóżmy dalej, że nie wszystkie współczynniki szeregu (37) są równe zeru i niech a_k (gdzie k jest jedną z liczb $0, 1, 2, \ldots$) oznacza pierwszy jego współczynnik różny od zera. Możemy więc napisać:

$$f(z_n) = a_k z_n^k + a_{k+1} z_n^{k+1} + a_{k+2} z_n^{k+2} + \ldots = 0, \; (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad (38$$

skąd, dzieląc przez $z_n^k \neq 0$:

$$a_k + a_{k+1} z_n + a_{k+2} z_n^2 + \ldots = 0 \;\; (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (39)$$

Połóżmy

$$\varphi(z) = a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \ldots \qquad (40)$$

— będzie to szereg potęgowy, zbieżny, jak łatwo widzieć, w tem samem kole zbieżności co i szereg (37) [gdyż stale $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^k}$, dla $z \neq 0$], a więc przedstawiający wewnątrz tego koła funkcję ciągłą (§ 125). Stąd, wobec założenia $\lim\limits_{n=\infty} z_n = 0$, wnosimy, że $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(z_n) = \varphi(0)$, czyli, wobec (40): $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(z_n) = a_k$. Z drugiej zaś strony, wobec (40) i (39) mamy stale $\varphi(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ i przeto $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(z_n) = 0$. Jest więc $a_k = 0$, wbrew definicji a_k.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 163.

Z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy natychmiastowy

Wniosek: *Jeżeli dwa szeregi potęgowe mają odpowiednio równe wartości dla ciągu nieskończonego liczb różnych od zera i zmierzających do zera, to odpowiednie współczynniki są w obu szeregach równe.*

Wystarczy bowiem różnicę uważanych szeregów przedstawić jako szereg potęgowy i zastosować tw. 163.

Wynika stąd też natychmiast, że żadna funkcja zmiennej zespolonej nie może dawać w kole o dodatnim promieniu zbieżności dwóch różnych rozwinięć na szereg potęgowy.

Podobnież żadna funkcja zmiennej rzeczywistej nie może przy dodatniem R dawać w przedziale $(-R, R)$ dwóch różnych rozwinięć na szereg potęgowy.

§ 129. Pochodna szeregu potęgowego.

Niech

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \qquad (41)$$

będzie dany szereg potęgowy, $R \neq 0$ — jego promień zbieżności (skończony lub nieskończony), zaś z_0 niech oznacza liczbę zespoloną taką iż $|z_0| < R$.

Obierzmy liczbę dodatnią ρ pośrednią między $|z_0|$ i R.

Połóżmy $\rho_0 = |z_0|$: szeregi $f(\rho)$ oraz $f(\rho_0)$ będą, wobec $\rho_0 < \rho < R$ oba zbieżne bezwzględnie; zbieżnym bezwzględnie będzie też szereg

$$\frac{f(\rho)-f(\rho_0)}{\rho-\rho_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\rho^k - \rho_0^k}{\rho - \rho_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\rho^{k-1} + \rho^{k-2}\rho_0 + \cdots + \rho\rho_0^{k-2} + \rho_0^{k-1})$$

i przeto szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (\rho^{k-1} + \rho^{k-2}\rho_0 + \cdots + \rho\rho_0^{k-2} + \rho_0^{k-1})$$

będzie zbieżny.

Połóżmy

$$\varphi_k(z) = a_k(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + z_0^{k-1}); \ (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{43}$$

dla $|z| \leq \rho$ będzie oczywiście

$$|\varphi_k(z)| \leq |a_k| (\rho^{k-1} + \rho^{k-2}\rho_0 + \cdots + \rho_0^{k-1}), \ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

i przeto składniki szeregu nieskończonego

$$F(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \cdots \tag{44}$$

będą (dla $|z| \leq \rho$) odpowiednio mniejsze bezwzględnie od składników szeregu (42) i przeto szereg (44) będzie zbieżny jednostajnie dla $|z| \leq \rho$. Z uwagi, że składniki $\varphi_k(z)$ szeregu (44) są (jako wielomiany całkowite względem z) funkcjami ciągłemi zmiennej z, wnosimy więc (w myśl tw. 147), że $F(z)$ jest funkcją ciągłą dla $|z| \leq \rho$. Wynika stąd, wobec $|z_0| < \rho$, że dla każdej danej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ, taka iż nierówność

$$|z - z_0| < \delta \tag{45}$$

pociąga za sobą nierówności $|z| < \rho < R$, oraz:

$$|F(z) - F(z_0)| < \varepsilon. \tag{46}$$

Lecz, w myśl (44):

$$F(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_0)$$

(przyczem zbieżność wypisanego szeregu wynika z uwagi, że $|z_0|<\rho$), zaś, w myśl (42):

$$\varphi_k(z_0) = k a_k z_0^{k-1}:$$

jest więc

$$F(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \tag{47}$$

Z drugiej strony, dla $|z| < R$ zbieżnym jest szereg (41), i dla $|z| < R$, $z \neq z_0$, mamy:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0},$$

skąd, z uwagi, że wobec (43)

$$a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} = a_k(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \ldots + z_0^{k-1}) = \varphi_k(z),$$

znajdujemy, w myśl (44):

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) = F(z). \tag{48}$$

Nierówność (46) daje, wobec (47) i (48), dla $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| < \varepsilon. \tag{49}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż nierówność (45) pociąga za sobą nierówność (49).

Jeżeli dla danej funkcji zmiennej zespolonej $f(z)$, danego punktu z_0 i danej liczby A istnieje przy wszelkiem dodatniem ε odpowiednie dodatnie δ, takie iż nierówność

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A \right| < \varepsilon,$$

to mówimy, że funkcja $f(z)$ posiada dla punktu z_0 *pochodną*

$$f'(z_0) = A.$$

Wobec tego otrzymany wyżej wynik możemy wypowiedzieć, mówiąc, że funkcja $f(z)$ posiada dla punktu z_0 pochodną

$$f'(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1}. \tag{50}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego punktu z_0, leżącego wewnątrz koła zbieżności danego szeregu potęgowego (41), istnieje pochodna, określona wzorem (50).

Szereg potęgowy

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = a_1 + 2a_2 z + 2a_3 z^2 + \ldots$$

nazywamy *szeregiem pochodnym* dla szeregu (40). Dowiedliśmy więc zarazem, że szereg pochodny jest zbieżny w całem wnętrzu koła zbieżności danego szeregu potęgowego i przedstawia pochodną tego ostatniego.

Z drugiej strony łatwo widzieć, że szereg pochodny jest rozbieżny w każdym punkcie, w którym rozbieżny jest dany szereg potęgowy. Jeżeli bowiem szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k z_1^{k-1}$ jest zbieżny, to zbieżnym jest też szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k z_1^k$ i przeto, w myś tw. 104, zbieżnym jest szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k} = \sum a_k z_1^k$, co dowodzi zbieżności danego szeregu potęgowego w każdym punkcie, w którym zbieżnym jest jego szereg pochodny.

Szereg pochodny ma więc ten sam promień zbieżności co i szereg dany. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 165. *Szereg pochodny każdego danego szeregu potęgowego posiada to samo koło zbieżności co i dany szereg i wewnątrz niego przedstawia wszędzie pochodną szeregu danego.*

W szczególności, szereg pochodny szeregu potęgowego bezustannie zbieżnego jest bezustannie zbieżny.

Co się tyczy zachowania się szeregu pochodnego na samem kole zbieżności, w porównaniu z zachowaniem się na tem kole szeregu danego, to z jednej strony, jak dowiedliśmy, szereg pochodny jest rozbieżny w każdym punkcie, w którym rozbieżnym jest dany szereg potęgowy; z drugiej jednak strony szereg pochodny może być rozbieżny i w punktach, w których zbieżnym jest szereg dany: np. szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ jest zbieżny dla $z = 1$, zaś szereg pochodny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ jest dla $z = 1$ rozbieżny; podobnież, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest (w myśl tw. 104) zbieżny dla $|z| = 1$, $z \neq 1$, zaś szereg pochodny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ jest dla $|z| = 1$ stale rozbieżny.

Niech

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{51}$$

oznacza dany szereg potęgowy, R — jego promień zbieżności. W myśl tw. 165, jego szereg pochodny

$$f'(z) = 1 . a_1 + 2 . a_2 z + 3 . a_3 z^2 + 4 . a_4 z^3 + \ldots \tag{52}$$

będzie posiadał to samo koło zbieżności co i szereg (51), przedstawiając wewnątrz niego wszędzie pochodną funkcji $f(z)$. W myśl tegoż tw. 165 szereg

$$f''(z) = 1 . 2a_2 + 2 . 3a_3 z + 3 . 4a_4 z^2 + 4 . 5a_5 z^3 + \ldots, \tag{53}$$

pochodny dla szeregu (52), będzie przedstawiał wewnątrz koła o promieniu R pochodną funkcji $f'(z)$. Funkcję $f''(z)$, czyli pochodną pochodnej funkcji $f(z)$, nazywamy *drugą pochodną* funkcji $f(z)$, albo jej *pochodną drugiego rzędu*. Podobnież szereg pochodny dla szeregu (53), czyli szereg

$$f'''(z) = 1 . 2 . 3a_3 + 2 . 3 . 4a_4 z + 3 . 4 . 5a_5 z^2 + \ldots$$

wyznacza wewnątrz koła o promieniu R funkcję $f'''(z)$, będącą pochodną funkcji $f''(z)$ i zwaną trzecią pochodną funkcji $f(z)$, lub jej pochodną trzeciego rzędu, i t. d. Ogólnie, pochodną n-go rzędu funkcji $f(z)$ [czyli pochodną funkcji $f^{(n-1)}(z)$] będzie (wewnątrz koła o promieniu R):

$$f^{(n)}(z) = 1 . 2 \ldots n a_n + 2 . 3 \ldots (n+1) a^{n+1} z + 3 . 4 \ldots (n+2) a_{n+2} z^2 + \ldots$$
$$(\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Stąd, w szczególności, kładąc $z = 0$, otrzymujemy:

$$f(0) = a_0, \quad f^{(n)}(0) = n! a_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

co daje:

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i przeto, w myśl (51) (dla $|z| < R$):

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} z^3 + \dots$$

Jest to t. zw. *wzór* Maclaurin'a. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 166. *Jeżeli funkcja $f(z)$ rozwija się dla $|z| < R$ na szereg potęgowy, to uważana funkcja posiada dla $|z| < R$ pochodne każdego rzędu, a rozwinięciem jej na szereg potęgowy jest szereg Maclaurina.*

Zauważymy, że twierdzenia niniejszego paragrafu pozostaną w mocy (bez zmiany dowodów), jeżeli je ograniczymy do zbioru liczb rzeczywistych: należałoby wówczas tylko *koło* zbieżności zastąpić przez *przedział* $(-R, R)$.

§ **130.** Weźmy teraz pod rozwagę nieco ogólniejsze szeregi potęgowe, postaci

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots, \tag{54}$$

gdzie a oraz a_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ są dane liczby zespolone. Kładąc

$$z - a = \zeta, \tag{55}$$

otrzymujemy z szeregu (54) szereg potęgowy

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots \tag{56}$$

Oznaczmy przez R promień zbieżności szeregu (56): szereg (56) będzie więc zbieżny dla $|\zeta| < R$ oraz rozbieżny dla $|\zeta| > R$. Wnosimy stąd natychmiast (wobec (55)), że szereg (54) będzie zbieżny dla wszystkich liczb zespolonych z, spełniających warunek $|z-a| < R$, i rozbieżny dla wszystkich liczb zespolonych z, dla których $|z-a| > R$.

O punktach z, spełniających odpowiednie warunki: $|z-a| < R$, $|z-a| = R$, $|z-a| > R$, mówimy, że leżą wewnątrz, na obwodzie, lub zewnątrz koła o środku a i promieniu R; przez koło o promieniu $R = \infty$ rozumiemy całą płaszczyznę zmiennej zespolonej (t. j. zbiór wszystkich liczb zespolonych z).

Otrzymany przed chwilą wynik możemy więc wyrazić jak następuje:

Dla każdego szeregu potęgowego $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ istnieje oznaczone w zupełności koło o środku a, wewnątrz którego szereg ten jest zbieżny, zaś wewnątrz — rozbieżny: koło to nazywamy kołem zbieżności, zaś jego promień R $(0 \leq R \leq \infty)$ promieniem zbieżności uważanego szeregu.

Niech ρ oznacza liczbę dodatnią $< R$: szereg (56) jest, w myśl tw. 161, zbieżny jednostajnie dla $|\zeta| \leq \rho$: wynika stąd natychmiast, że szereg (54) jest zbieżny jednostajnie dla $|z-a| \leq \rho$, skąd łatwy wniosek, że przedstawia on wewnątrz swego koła zbieżności funkcję ciągłą.

Jeżeli funkcja zmiennej zespolonej $f(z)$ jest określona *w otoczeniu* punktu $z_0 = a$ (t. j. przy pewnem dodatniem r dla wszystkich z, dla których $|z-a| < r$), i jeżeli w otoczeniu tego punktu funkcja $f(z)$ rozwija się na szereg (54), to mówimy, że funkcja $f(z)$ jest w punkcie $z_0 = a$ *holomorficzna*. Z tw. 166 wynika, że szereg (54) jest wówczas określony w zupełności.

Niech $P(z-a)$ oraz $P_1(z-a_1)$ będą dwa szeregi potęgowe: pierwszy według potęg $z-a$, drugi według potęg $z-a_1$. Jeżeli koła zbieżności tych szeregów (pierwsze o środku a, drugie o środku a_1) posiadają wspólne punkty wewnętrzne, i jeżeli w każdym z takich punktów z sumy szeregów $P(z-a)$ oraz $P_1(z-a_1)$ są równe, to mówimy, że szeregi te są jeden dla drugiego *bezpośredniem przedłużeniem analitycznem*.

Jeżeli dla szeregów potęgowych $P(z-a)$ oraz $P_n(z-a_n)$ istnieją szeregi $P_1(z-a_1)$, $P_2(z-a_2), \ldots P_{n-1}(z-a_{n-1})$, takie, iż każde dwa stojące obok siebie z szeregów

$$P, P_1, P_2, \ldots P_{n-1}, P_n$$

są bezpośredniem przedłużeniem analitycznem jeden dla drugiego, to mówimy, że szeregi $P(z-a)$ oraz $P_n(z-a_n)$ są *przedłużeniem analitycznem* jeden drugiego. Jeżeli koła zbieżności szeregów $P(z-a)$ oraz $P_n(z-a_n)$ mają wspólne punkty wewnętrzne, to sumy tych szeregów niekoniecznie są w tych punktach równe (o ile szeregi te nie są jeden dla drugiego bezpośredniem przedłużeniem analitycznem).

Niech $P(z-a)$ oznacza dany szereg potęgowy. Weźmy pod rozwagę zbiór Z wszystkich punktów z, z których każdy leży wewnątrz koła zbieżności jednego conajmniej z przedłużeń analitycznych szeregu $P(z-a)$. Zbiór Z nazywamy *obszarem istnienia* funkcji analitycznej, odpowiadającej szeregowi $P(z-a)$. (Łatwo widzieć, że zbiór Z składa się z samych tylko punktów wewnętrznych, t. j., jeżeli jakiś punkt z_0 należy do zbioru Z, to wszystkie punkty pewnego otoczenia punktu z_0 również należą do Z).

Z drugiej strony, weźmy pod rozwagę zbiór E wszystkich przedłużeń analitycznych szeregu $P(z-a)$ (nie wyłączając samego szeregu P, który możemy uważać jako własne przedłużenie analityczne). Z definicji zbioru Z wynika, że każdy punkt z tego zbioru leży wewnątrz koła zbieżności jednego conajmniej z szeregów zbioru E: oznaczmy, przy danem z, przez $E(z)$ zbiór takich właśnie szeregów. Każdy z szeregów zbioru $E(z)$ jest więc w punkcie z zbieżny, lecz wartości sum tych szeregów w punkcie z mogą być różne. Otóż przyporządkujmy punktowi z zbiór $F(z)$ wszystkich wartości w punkcie z sum szeregów zbioru $E(z)$. W ten sposób każdemu punktowi z zbioru Z będzie odpowiadał oznaczony w zupełności zbiór $F(z)$ wartości zespolonych. Mówimy, że przyporządkowanie to wyznacza *funkcję analityczną* (wielowartościową) (Weierstrass). Jeżeli, w szczególności, dla każdego punktu z zbioru Z zbiór $F(z)$ składa się z jednej tylko liczby, to mamy do czynienia z funkcją analityczną *jednowartościową*. (Ilość wartości funkcji analitycznej może się zmieniać ze zmianą z: można jednak dowieść, że jest ona zawsze conajwyżej przeliczalną)[1].

Każdy szereg potęgowy $P(z-a)$ wyznacza więc oznaczoną w zupełności funkcję analityczną (wogóle wielowartościową): obszar istnienia tej funkcji jest również przez dany szereg wyznaczony w zupełności.

Łatwo widzieć, że dwa szeregi, będące jeden dla drugiego przedłużeniem analitycznem, wyznaczają zawsze tę samą funkcję analityczną i w tym samym obszarze istnienia. Każdy z tych szeregów nazywamy *elementem* uważanej funkcji analitycznej. Teorja funkcyj analitycznych stanowi obszerny i ważny dział analizy, którym się zajmiemy w jednym z dalszych tomów niniejszego dzieła.

§ **131.** Weźmy teraz pod rozwagę szeregi według ujemnych potęg z, czyli szeregi typu

$$b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots, \tag{57}$$

gdzie $b_0, b_1, b_2, \dots$ są dane współczynniki zespolone.

[1] Zob. np. E. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1914, p. 56.

Z tw. 159 wynika natychmiast, że dla każdego danego szeregu (57) istnieje liczba $R' \geq 0$ (skończona lub nieskończona), taka iż szereg ten jest zbieżny (bezwzględnie) dla $|z| > R'$ oraz (w razie $R' > 0$) rozbieżny dla $|z| < R'$. Wnosimy stąd dalej natychmiast, że dla każdego danego szeregu

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \ldots \quad (58)$$

istnieją takie liczby R i R' ($\infty \geq R \geq R' \geq 0$), iż szereg (58) jest zbieżny (bezwzględnie) dla

$$R' < |z| < R$$

oraz rozbieżny dla $|z| > R$, jakoteż (w razie $R' > 0$) dla $|z| < R'$.

Twierdzenie 167. (Cauchy'ego). *Jeżeli szereg*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad (59)$$

jest zbieżny dla

$$R' < |z| < R \quad (60)$$

(gdzie $0 \leq R' \leq R \leq +\infty$), *jeżeli, dalej r oznacza liczbę, spełniającą nierówności*

$$R' < r < R \quad (61)$$

i wreszcie, jeżeli suma szeregu (59) spełnia dla

$$|z| = r$$

stale nierówność

$$|f(z)| \leq M, \quad (62)$$

to mamy

$$|a_n| \leq M r^{-n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (63)$$

Dowód. Załóżmy, że przy pewnem r, spełniającem nierówności (61) suma szeregu (59) spełnia dla $|z| = r$ nierówność (62) i niech n oznacza dany wskaźnik $\left(\gtreqless 0\right)$, zaś ε — daną liczbę dodatnią.

Szereg (59) jest, wobec (61), jak łatwo widzieć, zbieżny bezwzględnie dla $z = r$, innemi słowy, zbieżne są szeregi

$$|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + |a_3| r^3 + \ldots$$

oraz

$$\frac{|a_{-1}|}{r}+\frac{|a_{-2}|}{r^2}+\frac{|a_{-3}|}{r^3}+\dots$$

Dla liczby dodatniej ε istnieje więc takie p, iż

$$\left.\begin{array}{l} |a_p|\,r^p+|a_{p+1}|\,r^{p+1}+\ldots<\varepsilon \\ \text{oraz} \\ |a_{-p}|\,r^{-p}+|a_{-p-1}|\,r^{-p-1}+\ldots<\varepsilon \end{array}\right| \quad (64)$$

Obierzmy teraz liczbę naturalną m, taką iż

$$m>p+|n|. \quad (65)$$

Niech

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$$

będą pierwiastki m-go stopnia z jedności.

Wobec (59) będziemy mieli:

$$\zeta_1^{m-n}f(r\zeta_1)+\zeta_2^{m-n}f(r\zeta_2)+\ldots+\zeta_m^{m-n}f(r\zeta_m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k r^k\sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n+k}\right). \quad (66)$$

W myśl twierdzenia, które udowodnimy w § 143, suma

$$\zeta_1^s+\zeta_2^s+\ldots\zeta_m^s$$

jest zerem dla s całkowitych, niepodzielnych przez m, oraz wynosi m dla s podzielnych przez m. Wnosimy stąd natychmiast, że suma

$$\sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n+k}$$

jest $=m$ dla $k=n+lm\ (l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$, oraz jest zerem dla pozostałych $\left(\text{całkowitych}\ \gtrless 0\right)k$. Wzór (66) daje więc:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n}f(r\zeta_j)=m\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_{n+lm}r^{n+lm}= \\ =m[a_n r^n+(a_{n+m}r^{n+m}+a_{n+2m}r^{n+2m}+\ldots)+ \\ +(a_{n-m}r^{n-m}+a_{n-2m}r^{n-2m}+\ldots)]. \end{array}\right| \quad (67)$$

Wobec (62), oraz z uwagi, że liczby $\zeta_j(j=1,2,\ldots m)$ są m-temi pierwiastkami z jedności, mamy:

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \zeta_j^{m-n} f(r\zeta_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left|f(r\zeta_j)\right| \leq mM. \tag{68}$$

Wobec (65) mamy $n+m > p$ oraz $n-m < -p$, skąd, wobec (64):

$$|a_{n+m}|\,r^{n+m} + |a_{n+2m}|\,r^{n+2m} + \ldots \leq |a_p|\,r^p + |a_{p+1}|\,r^{p+1} + \ldots < \varepsilon$$

oraz

$$|a_{n-m}|\,r^{n-m} + |a_{n-2m}|\,r^{n-2m} + \ldots \leq |a_{-p}|\,r^{-p} + |a_{-p-1}|\,r^{-p-1} + \ldots < \varepsilon;$$

wzory (67) i (68) dają więc w jednej chwili:

$$m\,|a_n r^n| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j^{m-n} f(r\zeta_j) - m(a_{n+m}r^{n+m} + a_{n+2m}r^{n+2m} + \ldots) - \right.$$

$$\left. - m(a_{n-m}r^{n-m} + a_{n-2m}r^{n-2m} + \ldots)\right| > m(M+2\varepsilon),$$

skąd:

$$|a_n| < (M+2\varepsilon)r^{-n},$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, daje:

$$|a_n| \leq Mr^{-n}.$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem całkowitem $n \left(\gtreqless 0\right)$ zachodzi nierówność (63). Udowodniliśmy zatem tw. 167.

Wniosek 1. *Jeżeli suma szeregu potęgowego*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{69}$$

spełnia przy pewnem dodatniem ρ *nierówność*

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{dla } |z| < \rho, \tag{70}$$

to mamy:

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{71}$$

Dowód. Załóżmy, że szereg potęgowy (69) spełnia warunek (70). Niech r oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią $< \rho$. Z założenia naszego wynika, że szereg (69) jest zbieżny dla $|z| < \rho$, skąd wnosimy natychmiast, że $\rho \leq R$, gdzie R oznacza promień zbieżności szeregu (69). Wobec $r < \rho$ będzie więc też $r < R$. Z drugiej strony, wobec (70) oraz $r < \rho$ mamy:

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{dla } |z| = r,$$

skąd, w myśl tw. 167 wnosimy, że

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{72}$$

Nierówność (72) zachodzi więc (przy każdem danem $n = 0, 1, 2, \ldots$) dla każdej liczby dodatniej $r < \rho$, co daje w jednej chwili nierówność (71), *c. b. d. o.*

Wniosek 2. *Funkcja całkowita, która jest ograniczona w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej, musi być liczbą stałą.*

W samej rzeczy, jeżeli suma szeregu (69) jest ograniczoną w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej, to istnieje takie (skończone) M, iż przy wszelkiem dodatniem ρ zachodzi nierówność (70), skąd, w myśl wniosku 1, wynika nierówność (71), która, wobec dowolności liczby dodatniej ρ, daje w jednej chwili:

$$a_n = 0, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

czyli, wobec (69): $f(z) = a_0$ przy wszelkiem zespolonem z, *c. b. d. o.*

Z wniosku 1 wynika, że warunek (71) jest koniecznym na to żeby suma szeregu potęgowego (69) spełniała nierówność (70). Nie jest on jednak wystarczającym, jak tego dowodzi przykład szeregu geometrycznego

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

dla $M = 1$, $\varrho = 1$, którego suma nie jest ograniczoną dla $|z| < 1$.

Możnaby udowodnić, że *na to żeby suma szeregu (69) spełniała nierówność (70), potrzeba i wystarcza, iżbyśmy, kładąc*

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

mieli

$$\left| \frac{s_0(z) + s_1(z) + \ldots + s_n(z)}{n+1} \right| \leq M, \quad \text{dla } |z| = \varrho, \; n = 0, 1, 2, \ldots \text{[1]}.$$

[1] E. Landau, l. c. § 1.

§ 132. Twierdzenie 168 (Weierstrassa). *Jeżeli szeregi*

$$f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{m,n} z^n \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{73}$$

są zbieżne dla

$$0 \leq R' < |z| < R \leq +\infty, \tag{74}$$

oraz jeżeli szereg

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots \tag{75}$$

jest dla z, spełniających warunki (74), zbieżny jednostajnie, to zbieżnym jest każdy z szeregów

$$a_n = a_{1,n} + a_{2,n} + \ldots + a_{m,n} + \ldots \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{76}$$

oraz dla z, spełniających warunki (74), mamy:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z). \tag{77}$$

Dowód. Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec jednostajnej zbieżności szeregu (75) dla $R' < |z| < R$, istnieje takie μ, iż

$$\left. \begin{array}{l} |f_{m+1}(z) + f_{m+2}(z) + \ldots + f_{m+p}(z)| < \varepsilon, \text{ dla } m < \mu, \\ p = 1, 2, \ldots; \; R' < |z| < R. \end{array} \right\} \tag{78}$$

Stąd, wobec (73):

$$\left. \begin{array}{l} \left| \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \ldots + a_{m+p,n}) z^n \right| < \varepsilon, \\ \text{dla } m > \mu, \; p = 1, 2, \ldots, \; R' < |z| < R. \end{array} \right\} \tag{79}$$

Niech r oznacza liczbę dodatnią, pośrednią między R' i R: nierówność (79) będzie więc prawdziwą dla $|z| < r$, skąd, w myśl tw. 167 wnosimy, że

$$\left. \begin{array}{l} |a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \ldots + a_{m+p,n}| \leq \varepsilon r^{-n}, \text{ dla } m > \mu; \\ p = 1, 2, 3, \ldots; \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \end{array} \right\} \tag{80}$$

Wobec (80) wnosimy natychmiast o zbieżności każdego z szeregów (76). Połóżmy

$$\left. \begin{array}{c} r_{m,n} = a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \cdots, \\ (m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{array} \right\} (81)$$

— będą to więc szeregi zbieżne.

Niech z_0 oznacza liczbę zespoloną, spełniającą nierówności (73): obierzmy liczby R_1 oraz R_1' takie iż

$$R' < R_1' < |z_0| < R_1 < R. \qquad (82)$$

Ponieważ dla każdej liczby dodatniej r, pośredniej między R' oraz R, mamy nierówność (79) (gdzie μ zależy jedynie od ε), więc

$$|a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \cdots + a_{m+p,n}| < \varepsilon R_1^{-n}$$

oraz

$$|a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \cdots + a_{m+p,n}| < \varepsilon R_1'^{-n}$$

$$\text{dla} \left\{ \begin{array}{l} m > \mu, \quad p = 1, 2, \ldots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array} \right.$$

Stąd, przechodząc do granicy dla $p = \infty$, wobec (81):

$$|r_{m,n}| \leq \varepsilon R_1^{-n} \text{ oraz } |r_{m,n}| \leq \varepsilon R_1'^{-n}, \text{ dla } m > \mu, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ (83)$$

Połóżmy:

$$s_{m,n} = a_{1,n} + a_{2,n} + \cdots + a_{m,n} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots; \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \ (84)$$

wobec (81) i w myśl (76), będzie:

$$a_n = s_{m,n} + r_{m,n} \quad (\text{dla } m = 1, 2, 3, \ldots; \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \ (85)$$

Wobec zbieżności szeregów (73) przy warunku (74), oraz wobec $R' < |z_0| < R$, wnosimy, w myśl (84), o zbieżności szeregów

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m,n} z_0^n, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

zaś, wobec (83) i (82), wnosimy o zbieżności szeregów

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec (85):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m,n} z_0^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (86)$$

Lecz, wobec (83) oraz wobec (82):

$$\left.\begin{aligned}&\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n\right| \leq \left|\sum_{n=-\infty}^{-1} r_{m,n} z_0^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n\right| < \\ &< \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{R_1'}{z_0}\right|^n + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z_0}{R_1}\right|^n < \varepsilon\left(\frac{R_1'}{|z_0| - R_1'} + \frac{R_1}{R_1 - |z_0|}\right) \\ &\qquad \text{dla } m > \mu.\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Z drugiej strony, wobec (78) mamy w granicy dla $p = \infty$):

$$|f_{m+1}(z_0) + f_{m+2}(z_0) + \ldots| \leq \varepsilon, \text{ dla } m > \mu,$$

skąd, wobec (75):

$$\left| f(z_0) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z_0) \right| \leq \varepsilon, \text{ dla } m > \mu. \quad (88)$$

Lecz, wobec (73) i (84) mamy oczywiście:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m} f_k(z_0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k,n} z_0^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{m} a_{k,n} z_0^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m,n} z_0^n \quad (m = 1, 2 \ldots).\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Wobec (86), (89), (88) i (87) mamy więc dla $m > \mu$;

$$\left| f(z_0) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n \right| \leq \left| f(z_0) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z_0) \right| + \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n \right| <$$

$$< \varepsilon\left(1 + \frac{R_1'}{|z_0| - R_1'} + \frac{R_1}{R_1 - |z_0|}\right),$$

skąd, wobec dowolności liczby dodatniej ε:

$$f(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n,$$

co, wobec (75) dowodzi prawdziwości wzoru (77) dla $z = z_0$.

Udowodniliśmy więc tw. 168.

Z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy w jednej chwili następujący

Wniosek. *Załóżmy, że*

$$F(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots, \quad \text{dla } |y| < S,$$

zaś

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{dla } |z| < R.$$

Jeżeli istnieje liczba dodatnia $A < R$, *taka iż dla* $|z| < A$ *mamy* $|\varphi(z)| \leq S' < S$, *to dla* $|z| < A$ *funkcja* $f(z) = F(\varphi(z))$ *rozwija się na szereg według całkowitych potęg* z.

KONIEC CZĘŚCI DRUGIEJ TOMU PIERWSZEGO.