

# Fourier-sarjat ja -muunnokset

Pro gradu -tutkielma  
Teemu Honkanen  
165279  
Itä-Suomen yliopisto  
Fysiikan ja matematiikan  
laitos  
26. toukokuuta 2012

## Tiivistelmä

Tässä Pro Gradu-tutkielmassa esitellään Fourier-analyysin keskeisimpiä tuloksia, sekä joitain sovelluksia. Lähtien liikkeelle kompleksisten eksponenttifunktioiden ortogonaalisuudesta, päästään luontevasti määrittelemään sekä kompleksinen että reaalin Fourier-sarja. Ennen sarjojen suppenemiseen perehtymistä tutustutaan lyhyesti myös tärkeimpiin Fourier-kertoimien ominaisuuksiin, kuten Parsevalin kaavaan ja derivaattafunktion Fourier-kertoimiin.

Suppenemiskysymystä lähestytään klassisten Dirichlet'n ehtojen kautta, ja pisteittäiselle suppenemiselle esitetään Dirichlet'n ytimen ominaisuuksiin tukeutuva todistus. Tasainen suppeneminen todistetaan jatkuville funktioille, joilla ainakin ensimmäinen derivaattafunktio on jatkuva. Lisäksi tutkitaan epäjatkuvien funktioiden Fourier-sarjoissa esiintyvää Gibbsin ilmiötä.

Fourier-muunnoksiin edetään laajentamalla välillä  $[-L, L]$  muodostettu Fourier-sarja koko reaaliakselille. Tämä johtaa Fourier-integraaliin, jonka todistetaan suppenevan alkuperäiseen funktioon. Fourier-muunnokset määritellään ensin  $L^1$ -avaruudessa, jonka jälkeen tarkastellaan  $L^2$ -avaruutta hieman tarkemmin, kunnes saadaan todistettua kuuluisa Plancherelin Lause, jonka mukaan jokaisella  $L^2$ -funktiolla on olemassa Fourier-muunnos, joka lisäksi kuuluu avaruuteen  $L^2$ . Tämän jälkeen tarkastellaan vielä Fourier-muunnosten sovellettavuutta konvoluutioiden ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Lopuksi esitellään Fourier-analyysin soveltamista yksiulotteiseen lämpöyhtälöön kolmessa erilaisessa tilanteessa. Jonkin funktion  $f$  määräämässä alkulämpötilassa oleva eristetty sauva on ensimmäisessä tapauksessa äärettömän pitkä, toisessa tapauksessa äärellinen ja sauvan päät pidetään lämpötilassa  $0^\circ$ , ja viimeiseksi tarkastelussa on äärellinen sauva, jonka molemmat päät on myös eristetty.

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tarpeellisia lauseita ja määritelmiä</b>	<b>2</b>
2.1	Sisätuloavaruus . . . . .	3
2.1.1	Trigonometrinen systeemi . . . . .	5
2.1.2	$L^p$ -avaruudet . . . . .	9
2.2	Integraaleja koskevia tuloksia . . . . .	10
2.3	Konvoluutio . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Fourier-sarjat</b>	<b>14</b>
3.1	Fourier-sarjan määrittely . . . . .	15
3.2	Fourier-kertoimien ominaisuuksia . . . . .	18
3.3	Fourier-sarjan suppeneminen . . . . .	21
3.4	Dirichlet'n ydin . . . . .	23
3.5	Lauseen 3.3.3 todistus . . . . .	25
3.6	Suppenemisen laadusta . . . . .	28
3.6.1	Gibbsin ilmiö . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Fourier-muunnos</b>	<b>32</b>
4.1	Fourier-integraali . . . . .	33
4.2	Fourier-muunnos $L^1$ -avaruudessa . . . . .	37
4.3	Fourier-muunnos $L^2$ -avaruudessa . . . . .	39
4.4	Konvoluution Fourier-muunnos . . . . .	46
4.5	Derivaattojen Fourier-muunnokset . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Lämpöyhtälö</b>	<b>49</b>
5.1	Äärettömän pitkä sauva . . . . .	49
5.2	Äärellisen pituinen sauva . . . . .	52
5.2.1	Ratkaisu Lauseen 3.2.2 avulla . . . . .	52
5.2.2	Ratkaisu separoimalla . . . . .	54
5.2.3	Täysin eristetty äärellinen sauva . . . . .	58
5.3	Muita sovelluksia . . . . .	60

# 1 Johdanto

Fourier-sarjojen teoria syntyi 1800-luvun alussa, kun ranskalainen matemaatikko ja fyysikko *Jean Baptiste Joseph Fourier* tutki lämmön johtumista aineessa. Tarkasteltava tilanne on yksiulotteisessa tapauksessa seuraavanlainen:

Ympäristöstään eristetty homogeeninen sauva, jonka pituus on  $l$  pidetään päistään lämpötilassa  $0^\circ$ , ja ajanhetkellä  $t = 0$  sauvan lämpötila pisteessä  $x$  on  $f(x)$ . Lämmön johtumista tässä tilanteessa kuvaa osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

missä  $\alpha$  on aineesta riippuva positiivinen vakio, ja  $u(x, t)$  kertoo lämpötilan pisteessä  $x$  hetkellä  $t$ . Lisäksi on vielä reuna- sekä alkuehdot

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < l. \end{aligned}$$

Ratkaisu saadaan tavallisilla differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmillä muodossa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

ilman, että alkuehtoa oltaisiin vielä sovellettu. Sen avulla pitäisi pystyä tämentämään ratkaisua, mutta alkuehdoista seuraa ainoastaan

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Vakiot  $b_n$  pystyttiin ratkaisemaan tilanteissa, joissa alkuhetkeä kuvaava funktio  $f$  oli äärellinen sini- ja kosinifunktioiden lineaarikombinaatio. Kuitenkin, mikäli funktio  $f$  oli jotain muuta, kuten polynomi- tai eksponenttifunktio, ei ratkaisua saatu vietyä loppuun.

Fourier-analyysin voidaan sanoa lähteneen liikkelle juuri tämän kysymyksen ääreltä. Fourier päätyi väittämään, että lähes kaikki funktiot voidaan esittää sini- ja kosinifunktioiden lineaarikombinaatioina. Näistä tuloksistaan hän julkaisi vuonna 1822 kuuluisan kirjansa *Théorie analytique de la chaleur* (Analyttinen lämpöteoria). Väite oli tuolloin niin yllättävä, etenkin kun se koski myös epäjatkuvia funktioita, että aluksi se sai monilta tunnetuimmilta matemaatikoilta täystyrmäyksen. Ennenpitkää tulokset kuitenkin todettiin oikeiksi ja niiden käyttökelpoisuus alkoi valjeta, jonka seurauksena Fourier-analyysi levisi hyvin nopeasti useille eri tieteenaloille.

Perustavanlaatuisin idea Fourier-analyysin taustalla on hyvin yksinkertainen. Tunnetusti esimerkiksi vektorin  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  esitys kantavektoreiden avulla on  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{x}, e_j \rangle e_j$ . Se toimii, koska kantavektoreiden  $e_1, e_2$  ja  $e_3$  välinen sisätulo on nolla, eli ne ovat geometrisesti kohtisuorassa toisiaan vastaan. Samaan tapaan, jos funktioista muodostuvassa vektoriavaruudessa voidaan määritellä sopiva sisätulofunktio  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ja löydetään sopiva joukko  $\{e_j\}$  siten, että  $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \Leftrightarrow i \neq j$ , voidaan kyseisen avaruuden alkio  $f$  esittää tällaisen ‘kantafunktioiden’ lineaarikombinaationa,  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f(x), e_j \rangle e_j$ .

Tässä työssä pyritään esittelemään Fourier-sarjojen teorian keskeisimmät tulokset. Etenkin Fourier-sarjojen suppenemisen tutkiminen on todella moniulotteinen prosessi, eikä tässä pyritä antamaan siihen tyhjentäviä vastauksia. Yleisimmät ehdot kuitenkin esitetään, joilla Fourier-sarja suppenee hyvin suurelle joukalle funktioita. Fourier-muunnosten puolella keskitytään  $L^1$ - ja  $L^2$ -funktioihin, ja lopuksi esitellään Fourier-analyysin sovelluksia.

## 2 Tarpeellisia lauseita ja määritelmiä

Tässä luvussa esitetään Fourier-analyysin kannalta välttämättömiä tuloksia. Luku voi osittain olla puuduttavaa luettavaa, mutta tarpeellisia määritelmiä ja lauseita on useita, joten ne täytyy esittää mahdollisimaan ytimekkäästi. Lauseet todistetaan niiltä osin, kun todistus ei vie liikaa tilaa.

**Määritelmä 2.0.1.** *Trigonometrinen polynomi* on muotoa

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.1)$$

missä  $L > 0$ ,  $a_n$  ja  $b_n$ , ovat vakioita ja  $n \in \mathbb{N}_0$ .

On helppo osoittaa, että tällaisella polynomilla on jaksona  $2L$ . Sijoituksilla  $x = m2L, m \in \mathbb{N}$ , jää argumentteihin  $2\pi$ :n moninkerta, joka on sinin ja kosinin jakson pituus.

*Trigonometrisellä sarjalla* tarkoitetaan muotoa (2.1) olevia sarjoja, joissa  $N \rightarrow \infty$ .

**Määritelmä 2.0.2.** Funktion  $f$  sanotaan kuuluvan luokkaan  $\mathbf{C}^k(I)$ , jos  $f^{(n)}$  on jatkuva välillä  $I$  kaikilla luvuilla  $n = 0, 1, 2, \dots, k$ . Tällöin sanotaan, että  $f$  on  $k$  kertaa jatkuvasti differentioituva.

Mikäli väli  $I = [x_0, x_r]$  voidaan jakaa äärelliseen moneen osaväliin pisteillä  $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ , ja jokaisella osavälillä  $[x_{i-1}, x_i]$  funktion toispuoleiset raja-arvot  $f(x_{i-1}^+)$  ja  $f(x_i^-)$  ovat olemassa, sekä  $f(x) \in \mathbf{C}^k[x_{i-1}, x_i]$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, r$ , sanotaan että funktio on  $k$  kertaa paloittain jatkuvasti derivoituva välillä  $I$ . Tätä voidaan merkitä  $f \in \mathbf{C}_{\text{pal}}^k(I)$ .

## 2.1 Sisätuloavaruus

Luonnollisin ympäristö Fourier-analyysille on täydellinen sisätuloavaruus, eli *Hilbert-avaruus*. Sen määrittämiseksi täytyy ensin esitellä muutamia peruskäsitteitä. Seuraavissa määritelmässä merkitään joukkoja  $\mathbb{R}$  ja  $\mathbb{C}$  yhteisellä symbolilla  $\mathbb{F}$ . Kompleksisista määritelmistä reaalisiin päästään huomioimalla, että  $\bar{x} = x$ , jos  $x \in \mathbb{R}$ .

**Määritelmä 2.1.1.** *Vektoriavaruus* on joukko  $V$  varustettuna vektorien yhteenlaskulla  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  ja skalaaritulolla  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$  siten, että kaikille  $x, y, z \in V$  ja  $a, b \in \mathbb{F}$  pätee

- a)  $x + y = y + x$ ;
- b)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- c)  $\exists 0 \in V$  siten, että  $0 + x = x + 0 = x$ ;
- d)  $\forall x \exists -x \in V$  siten, että  $x + (-x) = 0$ ;
- e)  $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ ;
- f)  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ ;
- g)  $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ ;
- h)  $1 \cdot x = x$ .

**Määritelmä 2.1.2.** Olkoon  $V$  vektoriavaruus. *Normi* avaruudessa  $V$  on funktio  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  siten, että kaikille  $x, y \in V$  ja  $a \in \mathbb{F}$  pätee

- a)  $\|x\| \geq 0$ ;
- b)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- c)  $\|ax\| = |a|\|x\|$ ;
- d)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Tällöin pari  $(V, \|\cdot\|)$  on *normitettu vektoriavaruus* tai lyhyemmin *normiavaruus*.

**Määritelmä 2.1.3.** Jos  $(V, \|\cdot\|)$  on normiavaruus, niin etäisyys normin  $\|\cdot\|$  mielessä on  $\|x - y\|$ . Lukujen  $x_n \in V$  jono *suppenee normin  $\|\cdot\|$  mielessä* lukuun  $x \in V$ , jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

**Määritelmä 2.1.4.** Olkoon  $V$  normiavaruus ja  $x_n \in V$ .  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  on *Cauchyn jono*, jos on olemassa luku  $N_\varepsilon$  siten, että kaikille  $\varepsilon > 0$  pätee

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \quad \text{kun } n, m > N_\varepsilon.$$

Normiavaruus  $V$  on *täydellinen*, mikäli jokainen Cauchyn jono suppenee kyseisen normin mielessä johonkin alkioon  $x \in V$ . Täydelliset normiavaruudet ovat *Banach-avaruuksia*.

**Määritelmä 2.1.5.** Olkoon  $V$  vektoriavaruus. *Sisätulo* on funktio  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  siten, että kaikille  $x, y, z \in V$  ja  $a \in \mathbb{F}$  pätee

- a)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- b)  $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$ ;
- c)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- d)  $\langle x, x \rangle \begin{cases} = 0, & \text{jos } x = 0 \\ > 0, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$

Tällöin pari  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  on *sisätuloavaruus*.

Sisätulon avulla saadaan aina muodostettua normi seuraavalla tavalla:

**Lemma 2.1.6.** Jos  $V$  on sisätuloavaruus, niin funktio  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

määrittelee normin avaruudessa  $V$ . Tällöin voidaan sanoa, että normi  $\|\cdot\|$  on sisätulon  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indusoima.

Lemman 2.1.6 mukaan siis sisätuloavaruus on myös normiavaruus.

**Määritelmä 2.1.7.** Olkoon  $V$  sisätuloavaruus. Välillä  $[a, b]$  määritellyn reaali- tai kompleksiarvoisten funktioiden joukon,  $\{\phi_n(x)\} \in V, n \in \mathbb{N}_0$ , sanotaan olevan *ortogonaali* välillä  $[a, b]$ , jos minkä tahansa kahden funktion sisätulo on

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \neq m \\ \|\phi_m\|^2 > 0, & \text{kun } n = m \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

**Määritelmä 2.1.8.** Ortogonaalisen funktioiden joukon  $\{\phi_n(x)\}, n \in \mathbb{N}_0$ , sanotaan olevan *ortonormaali*, jos  $\|\phi_n(x)\| = 1$  kaikille luvuille  $n$ . Jos  $\{\phi_n(x)\}$  on ortogonaalinen, niin  $\left\{ \frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|} \right\}$  on ortonormaali.

**Määritelmä 2.1.9.** Jos sisätuloavaruus  $V$  on täydellinen, sanotaan, että  $V$  on *Hilbert-avaruus*.

### 2.1.1 Trigonometrinen systeemi

Sisätuloja voi konstruoida monellakin tapaa, mutta tämän työn ajan sisätulolla on seuraava määrittely.

**Määritelmä 2.1.10.** Olkoon reaal- tai kompleksiarvoisten funktioiden joukko  $V$  vektoriavaruus ja olkoot funktiot  $\phi_n, \phi_m \in V$ ,  $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ , välillä  $[a, b]$  määriteltyjä funktioita siten, että niiden tulo  $\phi_n \phi_m$  on integroitava kyseisellä välillä. Määritellään sisätulo  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ ,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx \quad (2.3)$$

ja normi  $\| \cdot \| : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\| \phi_n(x) \| = \sqrt{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}. \quad (2.4)$$

*Trigonometrisellä systeemillä* tarkoitetaan jompaa kumpaa joukoista  $\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}, n \in \mathbb{Z}$  tai  $\{C, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}\}, n \in \mathbb{N}$ . Seuraavaksi osoitetaan kahdella esimerkillä, että ne ovat ortogonaalisia välillä  $(-L, L)$ . Ensin tarvitaan kuitenkin muutama apulause.

**Lemma 2.1.11.** *Jos välillä  $[-L, L]$  integroituvalla funktiolla  $f$  on jaksona  $2L$ , niin  $f$  on integroitava jokaisella suljetulla välillä ja*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_c^{c+2L} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

*Todistus.* Olkoon  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \int_c^{c+2L} f(x) dx &= \int_{-L}^{c+2L} f(x) dx - \int_{-L}^c f(x) dx \\ &= \int_{-L}^L f(x) dx + \int_L^{c+2L} f(x) dx - \int_{-L}^c f(x) dx \end{aligned}$$



Siispä

$$\begin{aligned} \int_c^{c+2L} f(x)dx - \int_{-L}^L f(x)dx &= \underbrace{\int_L^{c+2L} f(x)dx}_{\text{siij. } x=t+2L} - \int_{-L}^c f(x)dx \\ &= \int_{-L}^c f(t+2L)dt - \int_{-L}^c f(x)dx \\ &= \int_{-L}^c [f(t+2L) - f(t)] dt = 0, \end{aligned}$$

koska  $f(t+2L) = f(t)$ . □

**Lemma 2.1.12.** Jos  $f$  on

a) parillinen funktio, niin  $\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$ .

b) pariton funktio, niin  $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$ .

*Todistus.* Triviaali. □

**Lemma 2.1.13.**  $\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Todistus.* Triviaali. □

**Esimerkki 2.1.14.** Funktiot

$$C, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots$$

missä  $C \neq 0$  on vakiofunktio, ovat ortogonaaliset millä tahansa  $2L$ :n pituisella välillä.

*Todistus.* Riittää osoittaa, että funktiot ovat ortogonaaliset jollain  $2L$ :n mittaisella välillä. Tämän jälkeen väite seuraa Lemmasta 2.1.11.

Lemman 2.1.13 nojalla

$$\int_{-L}^L C \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L C \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Koska kosini on parillinen ja sini pariton, niiden tulo on pariton ja Lemman 2.1.12 b) nojalla

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

Integraalien  $I_1 = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx$  ja  $I_2 = \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$  laske-  
miseksi sovelletaan kaavoja

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Jos  $n \neq m$ , saadaan

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} dx = 0 + 0 = 0 \quad (\text{Lemma 2.1.13})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} dx = 0 - 0 = 0 \quad (\text{Lemma 2.1.13})$$

Jos taas  $n = m \neq 0$ , niin

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos 0 \, dx + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{2m\pi x}{L} dx}_{=0} = L \\ &\quad (\text{Lemma 2.1.13}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos 0 \, dx - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{2m\pi x}{L} dx}_{=0} = L. \\ &\quad (\text{Lemma 2.1.13}) \end{aligned}$$

Viimeiseksi, jos  $n = m = 0$ , tarkastellaan vakiofunktiota  $\phi_0(x) = C$ , jonka Määritelmän 2.1.10 mukaisesta integroinnista tulee  $2C^2L$ . Siis systeemi

$$C, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots$$

on ortogonaalinen, ja

$$\|\phi_n\|^2 = \begin{cases} 2C^2L, & \text{kun } n = 0 \\ L, & \text{kun } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

**Esimerkki 2.1.15.** Funktioiden joukko  $\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}$  on myös ortogonaalinen mil-  
lä tahansa  $2L$ -mittaisella välillä. Kyse on oleellisesti samasta joukosta kuin  
edellisessä esimerkissä, mutta laskuista selvittää lyhyemmin, joten esitetään  
ne tässä kokonaisuudessaan.

Otetaan tarkasteluun jakson mittainen väli  $[\alpha, \alpha+2L]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , mutta mer-  
kitään ensin luettavuuden parantamiseksi  $\frac{\pi}{L} = \omega$ , jolloin joukko on  $\{e^{in\omega x}\}$ .  
Nyt Määritelmän 2.1.7 integraalista saadaan, kun  $n \neq m$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} e^{in\omega x} e^{-im\omega x} dx &= \int_{\alpha}^{\alpha+2L} e^{i\omega x(n-m)} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2L} \frac{e^{i\omega x(n-m)}}{i\omega(n-m)} = \frac{e^{i\omega(\alpha+2L)(n-m)}}{i\omega(n-m)} - \frac{e^{i\omega\alpha(n-m)}}{i\omega(n-m)} \\ &= \frac{e^{i\omega\alpha(n-m)+i\omega 2L(n-m)} - e^{i\omega\alpha(n-m)}}{i\omega(n-m)} \\ &= \frac{e^{i\omega\alpha(n-m)}}{i\omega(n-m)} (e^{i\omega 2L(n-m)} - 1) \quad (\text{sij. } \omega = \frac{\pi}{L}) \\ &= \frac{e^{i\omega\alpha(n-m)}}{i\omega(n-m)} (e^{i2\pi(n-m)} - 1) \\ &= \frac{e^{i\omega\alpha(n-m)}}{i\omega(n-m)} (1^{(n-m)} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Jos taas  $n = m$ , niin

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2L} e^{in\omega x} e^{-in\omega x} dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2L} e^{in\omega x - in\omega x} dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2L} dx = 2L.$$

Siis

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2L} e^{in\omega x} e^{-im\omega x} dx = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \neq m \\ 2L, & \text{kun } n = m, \end{cases} \quad (2.6)$$

joten Määritelmän (2.1.7) mukaan funktioiden  $\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}$  muodostama systeemi  
on ortogonaalinen kaikilla  $2L$ :n pituisilla väleillä.

### 2.1.2 $L^p$ -avaruudet

Seuraavaksi tarvitaan käsitteitä *nollamittainen joukko* ja  $\text{ess sup } f$ , jotka ovat käsitteitä mittateorian puolelta. Ne pystytään määrittelemään varsin järkevästi perehtymättä mittateoriaan sen tarkemmin.

**Määritelmä 2.1.16.** Joukko  $A \subset \mathbb{R}^n$  on *nollamittainen*, jos jokaiselle  $\varepsilon > 0$  on olemassa kokoelma  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  kompakteja välejä  $I_k \in \mathbb{R}^n$  siten, että

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} l(I_k) < \varepsilon$$

missä  $l(I_k)$  on välin  $I_k$  'koko'. 1-, 2- ja 3-ulotteisissa tapauksissa se on vastaavasti pituus, pinta-ala ja tilavuus.  $n$ -ulotteisessa tapauksessa puhutaan  $n$ -ulotteisen laatikon tilavuudesta.

Esimerkiksi luonnolliset luvut ovat nollamittainen joukko. Kun ympäröidään jokainen luonnollinen luku välillä  $I_n$ , jonka pituus on  $l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ , saadaan välit

$$I_1 = [1 - \frac{\varepsilon}{8}, 1 + \frac{\varepsilon}{8}], \quad I_2 = [2 - \frac{\varepsilon}{16}, 2 + \frac{\varepsilon}{16}], \quad I_3 = [3 - \frac{\varepsilon}{32}, 3 + \frac{\varepsilon}{32}], \dots$$

Välien pituuksien summaksi saadaan

$$\varepsilon \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \varepsilon \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2} \right] = \varepsilon \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Selvästi  $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  ja  $\sum_{n \in \mathbb{N}} l(I_n) < \varepsilon$ .

**Määritelmä 2.1.17.** Jonkin ominaisuuden sanotaan pätevän *melkein kaikkialla*, lyhennetään yleisesti m.k., jos niiden pisteiden joukko, jossa ominaisuus ei päde, on nollamittainen.

Esimerkiksi funktiolle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

voidaan sanoa  $f(x) = 0$  m.k. .

**Määritelmä 2.1.18.** Jos funktiolle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on olemassa luku  $b \in \mathbb{R}$  siten, että  $f(x) \leq b$  m.k., voidaan funktion *oleellinen supremum* määritellä

$$\text{ess sup } f = \inf\{b \mid f(x) \leq b \text{ m.k.}\}$$

Funktion  $f$  voidaan sanoa olevan *oleellisesti rajoitettu*, jos on olemassa  $b$  siten, että  $|f(x)| \leq b$  m.k. .

Oleellisinta jatkon kannalta on, että funktiolla voi olla tavanomaisesta määrittelystä poikkeavia yksittäisiä pisteitä, mutta niillä ole merkitystä funktion ominaisuuksien kannalta. Tällöin myös kaksi funktiota  $f$  ja  $g$  mielletään oleellisesti samoiksi, mikäli joukko  $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$  on nollamittainen, eli  $f(x) = g(x)$  m.k. . Kahden funktion yhtäsuuruus tulee jatkossa käsittää aina näin, ilman erillistä mainintaa.

**Määritelmä 2.1.19.** Jollekin luvulle  $1 \leq p < \infty$ , välillä  $I = (a, b)$  määritellyn funktion  $f$   $p$ -normi on  $\|\cdot\|_p$ ,

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7)$$

Funktion  $f$  sanotaan kuuluvan joukkoon  $L^p(I)$ , jos pätee

$$\|f\|_p < \infty. \quad (2.8)$$

Luvulle  $p = \infty$ , funktion  $f$  sanotaan kuuluvan joukkoon  $L^\infty(I)$ , jos pätee

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f| < \infty. \quad (2.9)$$

Väli  $I$  voi olla myös ääretön ja jos  $I = \mathbb{R}$ , on tapana merkitä  $L^p(\mathbb{R}) = L^p$ .

Huomion arvoista on, että jos  $f \in \mathbf{C}_{\text{pal}}^k(I)$ , missä  $I$  on äärellinen ja  $k \in \mathbb{N}_0$ , niin  $f \in L^p(I)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

$L^p$ -avaruudet ovat kaikki Banach-avaruuksia (todistus sivuutetaan), joissa on normi  $\|\cdot\|_p$ .  $L^p$ -avaruuksista tärkein on  $L^2$ , sillä normi  $\|\cdot\|_2$  on Määritelmän 2.1.10 mukaisen sisätulon indusoima:  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .  $L^2$  on siis sisätuloavaruus ja Banach-avaruutena se on täydellinen.

**Lause 2.1.20.**  $L^2$  on Hilbert-avaruus, eli jokainen Cauchyn jono  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $f_n \in L^2$ , suppenee normin  $\|\cdot\|_2$  mielessä tasaisesti funktioon  $f \in L^2$ .

## 2.2 Integraaleja koskevia tuloksia

Tämä luku on luettelomainen, eikä sisällä muuta kuin tuloksia, joihin myöhemmin viitataan. Tulokset on koottu tähän kirjasta [5].

### Lemma 2.2.1. Fatoun Lemma

Olkoon  $f_1, f_2, \dots$  jono epänegatiivisia funktioita välillä  $(-\infty, \infty)$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(x) \geq 0$  melkein kaikilla  $x$ . Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

**Lause 2.2.2.** *Olkoot funktiot  $f_1, f_2, \dots$  integroituvia välillä  $(-\infty, \infty)$ . Jos*

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad \text{m.k.,}$$

*jollekin integroituvalla funktiolla  $F$ , ja jos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{m.k.,}$$

*niin silloin  $f$  on integroituva ja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

**Lemma 2.2.3. Riemann-Lebesguen lemma**

*Olkoon  $f \in L^1$ . Silloin*

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = 0. \quad (2.10)$$

*Lisäksi*

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \omega x dx = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \omega x dx = 0.$$

*Todistus.* Todistetaan vain ensimmäinen väite. Kaksi muuta ovat sen erikoistapauksia. Merkitään  $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx$ . Koska  $e^{-ix} = -e^{-i(x+\pi)}$ , niin

$$-\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x+\frac{\pi}{\omega})} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f\left(x - \frac{\pi}{\omega}\right) dx. \quad (2.11)$$

Laskemalla  $\hat{f}(\omega) - [-\hat{f}(\omega)]$  saadaan

$$2\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left[ f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] dx \quad (2.12)$$

joten

$$2|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\omega}\right) \right| dx. \quad (2.13)$$

Nyt, koska  $f \in L^1$ , on  $\int_{\mathbb{R}} f(x - \frac{\pi}{\omega})$  rajoitettu. Lauseesta 2.2.2 seuraa

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}(\omega)| \leq \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\omega}\right) \right| dx = 0, \quad (2.14)$$

mikä todistaa väitteen. □

**Lause 2.2.4. Cauchy-Schwarzin epäyhtälö**

*Jos  $V$  on sisätuloavaruus ja  $f, g \in V$ , pätee*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

**Lause 2.2.5. Fubinin Lause**

*Jos kaksoisintegraali*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

*suppenee itseisesti, silloin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

*on olemassa ja on muuttujan  $x$  suhteen integroitava funktio. Lisäksi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

**Lause 2.2.6. Tonelli-Hobsonin Lause**

*Jos toinen integraaleista*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

*suppenee itseisesti, niin myös*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

*suppenee itseisesti ja kaikki kolme integraalia ovat saman arvoisia.*

## 2.3 Konvoluutio

Konvoluutio on matemaattinen työkalu, jolla on sovelluksia esimerkiksi tilastotieteessä, signaalinkäsittelyssä ja differentiaalilaskennassa. Fourier-analyysissä se esiintyy Fourier-sarjojen pisteittäisen suppenemisen todistuksessa, mutta palataan siihen luvuissa 3.4 ja 3.5.

**Määritelmä 2.3.1.** Kahden funktion  $f, g$  konvoluutio on

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt. \quad (2.15)$$

**Lemma 2.3.2.** Jos  $f, g \in L^1$ , niin integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$$

on olemassa ja se kuuluu luokkaan  $L^1$ .

*Todistus.* Kaikille luvuille  $t$  pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$$

ja siten

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|dx < \infty.$$

Lauseen 2.2.6 mukaan kaksoisintegraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dx dt$$

suppenee tällöin itseisesti. Nyt väite seuraa Fubinin Lauseesta 2.2.5.  $\square$

[5, s.19]

**Lause 2.3.3.** Konvoluution ominaisuuksia:

1.  $f * g = g * f$



$$2. h * (f + g) = h * f + h * g$$

$$3. (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$4. a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

Todistus sivuutetaan.

Koska Fourier-sarjojen teoria käsittelee jaksollisia funktioita, on paikallaan tutkia hieman konvoluution jaksollisuutta. Otetaan jotkin jaksolliset funktiot  $f$  ja  $g$ , joilla on jaksona  $T$ . Niiden konvoluutio on

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Suorittamalla integrointi jakson  $T$  mittaisissa osissa, saadaan

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{t_0+kT}^{t_0+(k+1)T} f(t)g(x-t)dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} f(t+kT)g(x-t-kT)dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)g(x-t)dt \right]. \end{aligned}$$

Hakasulkeissa oleva lauseke ei sisällä enää indeksiä  $k$ , joten sarja hajaantuu, jos  $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)g(x-t)dt \neq 0$ . Olennainen tieto onkin se, että kun reaaliakseli on jaettu jakson mittaisiin väleihin, saadaan konvoluution arvo kertomalla välien lukumäärä konvoluution arvolla yhden jakson yli. Toisin sanoen konvoluution arvo jokaisella jakson mittaisella välillä on sama. Joten jos funktioilla  $f$  ja  $g$  on jaksona  $T$ , myös niiden konvoluutiolla on jaksona  $T$ .

### 3 Fourier-sarjat

Ortogonaalisten systeemien merkitys on seuraava:

Olkoon  $V$  sisätuloavaruus ja  $\{\phi_n(x)\} \subset V$  välillä  $[a, b]$  ortogonaalinen joukko. Oletetaan, että

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots, \quad (3.1)$$

missä  $c_0, c_1, c_2, \dots$  ovat vakioita, suppenee välillä  $[a, b]$  kohti jotakin funktiota  $f(x) \in V$ . Kun kerrotaan yhtälön  $f = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots$  molemmat puolet funktiolla  $\overline{\phi_m}$  ja integroidaan termeittäin yli välin  $[a, b]$ , saadaan Määritelmän 2.1.7 nojalla

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\overline{\phi_m}(x)dx &= c_0\langle\phi_0, \phi_m\rangle + \dots + c_m\langle\phi_m, \phi_m\rangle + \dots + c_n\langle\phi_n, \phi_m\rangle + \dots \\ \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\overline{\phi_m}(x)dx &= 0 + \dots + c_m\|\phi_m\|^2 + \dots + 0 + \dots \\ \Leftrightarrow c_m &= \frac{1}{\|\phi_m\|^2} \int_a^b f(x)\overline{\phi_m}(x)dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tällä tavoin määrättyjä vakioita  $c_n$  sanotaan (*yleistetyiksi*) *Fourier-ker-toimiksi* ja sarjaa (3.1) funktion  $f$  (*yleistetyksi*) *Fourier-sarjaksi* tarkastelta- van ortogonaalisen joukon suhteen. Tämä lähde [8] mukaileva päättely ei ole täysin eksakti, mutta antaa hyvän lähtökohdan Fourier-sarjojen teorian kehittämiseksi. Se johtaa tarkastelemaan seuraavanlaista ongelmaa:

Olkoon  $f(x)$  määritelty välillä  $[a, b]$  ja luvut  $c_n$  laskettu kaavan (3.2) mu- kaisesti. Kirjoitetaan

$$f(x) \sim c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots, \quad (3.3)$$

jossa symbolia ‘ $\sim$ ’ käytetään siitä syystä, että ei vielä tehdä olettamuk- sia oikeanpuoleisen sarjan suppenemisestä, saati siitä, että sen summa olisi  $f(x)$ . Oleellinen kysymys kuuluukin: *Mitä ehtoja vaaditaan, että sarja (3.3) suppenee ja sen summa on funktio  $f(x)$ ?* Annetaan kuitenkin määritelmät kompleksiselle ja reaalille Fourier-sarjalle, ennenkuin paneudutaan suppe- nemisen tarkasteluun.

### 3.1 Fourier-sarjan määrittely

Pitäydytään tästä eteenpäin Määritelmän 2.1.10 mukaisessa sisätuloavaruus- dessa, ellei erikseen muuta mainita. Kompleksinen trigonometrinen systeemi

$$\{e^{i\frac{n\pi x}{L}} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3.4)$$

osoitettiin ortogonaaliseksi jo Esimerkissä 2.1.15. Edellä esitetyn päättelyn mukaisesti päästään siten suoraan seuraavaan määritelmään.

**Määritelmä 3.1.1.** Olkoon funktio  $f$  määritelty ja integroitava välillä  $[-L, L]$  ja tämän välin ulkopuolella siten, että  $f(x + 2L) = f(x)$ . Funktion  $f(x)$  kompleksiterminen Fourier-sarja systeemin (3.4) suhteen on

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}, \quad (3.5)$$

missä vakiot  $c_n$  ovat kompleksitermisiä Fourier-kertoimia,

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \frac{n\pi t}{L}} dt. \quad (3.6)$$

Jos on tarvetta erikseen ilmaista, minkä funktion suhteen Fourier-kertoimia ollaan laskemassa, merkitään sitä  $c_n[f]$ .

Kirjoitetaan seuraavaksi Eulerin kaavan avulla

$$e^{i \frac{n\pi x}{L}} = \cos \frac{n\pi x}{L} + i \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.7)$$

jolloin kaavasta (3.6) saadaan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left( \cos \frac{n\pi t}{L} - i \sin \frac{n\pi t}{L} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

missä

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad (3.9)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt. \quad (3.10)$$

Yleensä on kuitenkin luonnollisempaa, että  $n$  ei saa negatiivisia arvoja, joten määritellään (3.8) uudelleen:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad \text{ja} \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.11)$$

Tarkastellaan seuraavaksi sarjaa (3.5), merkitään jälleen  $\frac{\pi}{L} = \omega$  ja järjestetään termit seuraavasti:

$$c_0 + (c_1 e^{i\omega x} + c_{-1} e^{-i\omega x}) + (c_2 e^{i2\omega x} + c_{-2} e^{-i2\omega x}) + \dots + (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) + \dots \quad (3.12)$$

Sarjan  $n$ :s termi ( $n \neq 0$ ) on nyt, ottaen huomioon (3.11),

$$\begin{aligned} c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in\omega x} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-in\omega x} \\ &= \frac{1}{2}(a_n e^{in\omega x} + a_n e^{-in\omega x} - ib_n e^{in\omega x} + ib_n e^{-in\omega x}) \\ &= a_n \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}) - b_n \frac{1}{2}i(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}) \\ &= a_n \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}) + b_n \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}) \\ &= a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \\ &= a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.13) \end{aligned}$$

Kun  $n = 0$ , saadaan yhtälöistä (3.11)  $c_0 = \frac{1}{2}a_0$  (koska  $b_0 = 0$ ). Nyt (3.12) voidaan muotoilla

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L}) + \dots + (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}) \dots \quad (3.14)$$

Esimerkissä 2.1.14 osoitettiin, että trigonometrinen systeemi

$$C, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots \quad (3.15)$$

on ortogonaalinen millä tahansa  $2L$ :n mittaisella välillä. Niinpä sarja (3.14) esittää Fourier-sarjaa ja saadaan

**Määritelmä 3.1.2.** Olkoon  $f(x)$  määritelty ja integroitava välillä  $[-L, L]$  ja tämän välin ulkopuolella siten, että  $f(x+2L) = f(x)$ . Funktion  $f$  Fourier-sarja reaalisen trigonometrisen systeemin suhteen on

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.16)$$

missä Fourier-kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  on määritelty kaavoilla (3.9) ja (3.10). Fourier-sarjan osasummaa merkitään

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (3.17)$$

[8, ss. 5-7]

Mikäli funktio  $f$  on parillinen,  $f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}$  on tällöin pariton ja Lemman 2.1.12 nojalla kertoimet  $b_n$  ovat tällöin kaikki nolliä. Lisäksi  $f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}$  on parillinen, joten kertoimet  $a_n$  voidaan laskea kaavalla

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt. \quad (3.18)$$

Parittomalle funktiolle  $f$  pätee, että  $f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}$  on pariton ja  $f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}$  on parillinen. Tällöin  $a_n = 0$  kaikilla  $n \geq 0$  ja vakiot  $b_n$  saadaan kaavasta

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt. \quad (3.19)$$

**Määritelmä 3.1.3.** Parillisen funktion  $f$  kosiniterminen Fourier-sarja on

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.20)$$

missä vakiot  $a_n$  saadaan kaavalla (3.18).

Parittoman funktion  $f$  siniterminen Fourier-sarja on

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.21)$$

missä vakiot  $b_n$  saadaan kaavalla (3.19).

Jatkossa Fourier-sarjalla tarkoitetaan aina Fourier-sarjaa joko systeemin (3.4) tai (3.15) suhteen. Koska siirtyminen esitysmuotojen (3.5) ja (3.16) välillä on edellä esitetyn mukaan pelkästään tekninen suoritus, voidaan näistä kahdesta muodosta milloin tahansa valita se, kumpi soveltuu tilanteeseen paremmin. Kuitenkin, jos  $x \in \mathbb{C}$ , käytetään vain esitystä (3.5).

## 3.2 Fourier-kertoimien ominaisuuksia

*Besselin epäytälön* mukaan, jos  $\{e_n\}$  on ortogonaalinen jono Hilbert-avaruudessa  $H$  siten, että  $\|e_n\| = \|e\|$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , pätee

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{\|e\|^2} \|x\|^2, \quad (3.22)$$

missä  $x \in H$ . Tästä saadaan helposti Fourier-kertoimille

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx. \quad (3.23)$$

Yhtäsuuruus on voimassa ainakin, jos kertoimien määrittämiseen käytetty joukko on  $\{e^{\frac{n\pi x}{L}}\}$ . Tästä seuraa merkittävä tulos  $L^2$ -funktioiden Fourier-kertoimille:

**Lause 3.2.1. Parsevalin kaava**

Jos Fourier-sarja  $\sum c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$  esittää funktiota  $f \in L^2(-L, L)$ , pätee

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2L} \|f(x)\|_2^2. \quad (3.24)$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ \Leftrightarrow f(x)^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ \Leftrightarrow \int_{-L}^L f(x)^2 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2L \bar{c}_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

□

Reaalisille Fourier-kertoimille Parsevalin kaava on

$$\frac{1}{2L} \|f(x)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.25)$$

Jos  $f \in L^1(-L, L)$ , niin Riemann-Lebesguen Lemman mukaan Fourier-kertoimien jono  $\{c_n\}$  lähestyy nollaa. Fourier-sarjan termit on havainnollista ajatella harmonisiksi värähtelijöiksi, joiden amplitudi  $c_n$  pienenee kun

taajuus  $\frac{n\pi}{L}$  kasvaa. Vakio  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  puolestaan voidaan jo määrittelynsä,  $\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ , puolesta tulkita funktion  $f$  keskiarvoksi yhdellä jaksovälillä.

Fourier-kertoimien ja funktion  $f$  derivaattojen väliltä löytyy myös hyödylliseksi osoittautuva yhteys.

**Lause 3.2.2.** *Oletetaan, että  $f$  on  $2L$ -jaksollinen funktio ja  $f \in C^k(-L, L)$ . Tällöin*

$$c_n \left[ \frac{d^k}{dt^k} f \right] = \left( \frac{in\pi}{L} \right)^k c_n[f]. \quad (3.26)$$

*Todistus.* Tutkitaan aluksi funktion  $f$  ensimmäistä derivaattaa, josta saadaan osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned} c_n[f'(t)] &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f'(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} + \frac{in\pi}{L} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} dt \\ &= \frac{1}{2L} [f(t) e^{-in\pi} - f(t) e^{in\pi}] + \frac{in\pi}{L} c_n[f(t)] \\ &= \frac{in\pi}{L} c_n[f(t)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Väite saadaan soveltamalla tätä menettelyä  $k$  kertaa. □

Reaalisille Fourier-kertoimille saataisiin vastaavasti

$$a_n[f'(t)] = \frac{n\pi}{L} b_n[f(t)] \quad (3.28)$$

ja

$$b_n[f'(t)] = -\frac{n\pi}{L} a_n[f(t)]. \quad (3.29)$$

Soveltamalla näitä kaavoja kahdesti, saadaan esimerkiksi

$$a_n[f''(t)] = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n[f(t)] \quad \text{ja} \quad b_n[f''(t)] = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} b_n[f(t)]. \quad (3.30)$$

Lause 3.2.2 on hyödyllinen, sillä sovelluksissa törmätään toisinaan integraaleihin, jotka ovat muotoa

$$\int_0^\alpha \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \sin \frac{n\pi x}{\alpha} dx, \quad \int_0^\alpha \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \cos \frac{n\pi x}{\alpha} dx, \quad (3.31)$$

tai mikä on vakiota vaille sama asia kuin funktion  $f^{(k)}(x)$  sini- ja kosinitermisen Fourier-sarjan kertoimet:

$$\frac{\alpha}{2}a_n[f^{(k)}(t)], \quad \frac{\alpha}{2}b_n[f^{(k)}(t)]. \quad (3.32)$$

[6, ss.74-76]

### 3.3 Fourier-sarjan suppeneminen

Fourier-sarjojen suppenemisen seikkaperäinen tutkiminen on varsin pitkä ja mutkikas prosessi, joten suuri osa siitä joudutaan tässä yhteydessä sivuuttamaan. Tässä luvussa esitetään kuitenkin ne ehdot, joilla funktion  $f$  Fourier-sarja saadaan suppenemaan kohti arvoa  $f(x)$ , ja näytetään kuinka väitteen todistaminen viime kädessä tapahtuu.

**Määritelmä 3.3.1. Dirichlet'n ehdot** Funktion  $f$  sanotaan toteuttavan *Dirichlet'n ehdot* välillä  $I = (a, b)$ , kun seuraavat ehdot toteutuvat:

1.  $f$  on rajoitettu välillä  $I$ .
2.  $I$  voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin, joissa jokaisessa  $f$  on monotoninen.

Jos väli  $I$  on äärellinen, niin ehdoista seuraa suoraan, että funktio  $f$  on Riemann-integroituva ja integraali on äärellinen. Tällainen funktio myös kuuluu luokkaan  $L^p(I)$  kaikilla luvuilla  $1 \leq p \leq \infty$ .

Väli  $I$  voi olla myös ääretön, mutta tällöin ehdoista 1. ja 2. ei automaattisesti seuraa kuuluminen mihinkään muuhun  $L^p$ -avaruuteen, kuin avaruuteen  $L^\infty$ , sillä

$$\|f\|_\infty \leq b < \infty,$$

missä yläraja  $b$  on olemassa ehdon 1. perusteella. Tämän takia, jos  $I$  on ääretön, vaaditaan ehdon 1. lisäksi, että  $f \in L^1$ , sillä tämä takaa funktion  $f$  integroituvuuden yli välin  $I$ .

Dirichlet'n ehdot sisältävät myös esimerkiksi oletukseen  $f \in \mathbf{C}_{\text{pal}}^1(I)$ . Vaatimus 2. nimittäin takaa toispuoleisten raja-arvojen olemassaolon kaikissa osavälien päätepisteissä. Esimerkiksi funktio  $\sin \frac{1}{x}$  ei täytä vaatimusta 2. välillä  $(0, 1)$ , sillä funktiolla on ääretön määrä ääriarvokohtia välillä  $(0, \varepsilon)$ , eikä raja-arvoa  $f(0^+)$  ole olemassa. [6, s.9]

Seuraavaksi osoitetaan, että ylläolevat ehdot riittävät Fourier-sarjan suppenemiseen. Tätä varten joudutaan kuitenkin todistamatta esittämään muutamia tuloksia, joita jatkossa tarvitaan. Tulokset koskevat niin sanottuja *Di-*



*richlet'n integraaleja*. Nimitystä käytetään usein muutamallekin eri integraalille, joista yksinkertaisin on seuraava integraali:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (3.33)$$

todistus esimerkiksi [1, ss.202-204]. Tämän avulla voidaan edelleen johtaa seuraavat tulokset.

**Lemma 3.3.2. Dirichlet'n integraalit**

$$1. \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin \mu x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}[f(0^+) + f(0^-)] & , a < 0 < b \\ \frac{\pi}{2}f(0^+) & , a = 0 < b \\ \frac{\pi}{2}f(0^-) & , a < 0 = b \\ 0 & , ab > 0 \end{cases}$$

$$2. \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin \mu x}{\sin x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}[f(0^+) + f(0^-)] & , -\pi < a < 0 < b < \pi \\ \frac{\pi}{2}f(0^+) & , a = 0 < b < \pi \\ \frac{\pi}{2}f(0^-) & , -\pi < a < 0 = b \\ 0 & , ab > 0. \end{cases}$$

Integraalien arvot on koottu tähän kahdesta lähteestä, [6, s.14] ja [1, s.219 ja s.227]. Kirjassaan [1, ss.219-225 ja 227-229] Carslaw käsittelee näitä integraaleja integraalilaskennan toisen väliarvolauseen avulla, jonka mukaan

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi(x)\psi(x)dx = \phi(\alpha^+) \int_{\alpha}^{\xi} \psi(x)dx + \phi(\beta^-) \int_{\xi}^{\beta} \psi(x)dx, \quad (3.34)$$

missä  $\phi(x)$  on rajoitettu ja monotoninen välillä  $(\alpha, \beta)$ ,  $\psi(x)$  on rajoitettu ja integroitava, ja  $\alpha \leq \xi \leq \beta$ . Määritelmän 3.3.1 ehdot periytyvät itseasiassa juuri tämän Lauseen käyttämisestä. Lemman 3.3.2 funktioista  $\frac{\sin \mu x}{x}$  ja  $\frac{\sin \mu x}{\sin x}$  ovat selvästi rajoitettuja ja integroituvia koko reaaliakselilla (raja-arvoksi saadaan L'Hospitalin säännön nojalla  $\mu$ , kun  $x \rightarrow 0$ ), joten ne täyttävät vaatimukset funktiolle  $\psi(x)$ . Funktion  $f(x)$  täytyy olla integroimisvälillä rajoitettu ja monotoninen, jotta väliarvolauseetta voidaan soveltaa. Määrätty integraali voidaan kuitenkin laskea osissa, joten väliarvolauseen käyttämiseksi riittää, että väli  $(a, b)$  pystytään jakamaan osiin, joissa  $f$  on rajoitettu ja monotoninen. Tämä toisaalta tarkoittaa, että  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot. Tällöin Integraalilaskennan toista väliarvolauseetta voidaan soveltaa kuhunkin väliin erikseen, ja Lemman 3.3.2 tulokset ovat voimassa.

**Lause 3.3.3.** Oletetaan, että funktio  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(-L, L)$ , ja on jaksollinen siten, että  $f(x + 2L) = f(x)$ . Tällöin funktion  $f$  Fourier-sarja suppenee ja sen summa on

- $f(x)$ , kun  $f$  on jatkuva pisteessä  $x \in (-L, L)$ ;
- $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ , kun  $x$  on epäjatkuvuuskohta.

Ennen todistuksen esittämistä tarkastellaan lähemmin summaa  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ , joka nousee esiin Lauseen 3.3.3 todistuksessa.

### 3.4 Dirichlet'n ydin

Funktiota

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx \quad (3.35)$$

kutsutaan *Dirichlet'n ytimeksi*. Sen summa voidaan määrätä esimerkiksi seuraavasti: Jos  $x \neq m \cdot 2\pi$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} - 1 = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} - 1 = \frac{1 - e^{i(n+1)x} - 1 + e^{ix}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\frac{x}{2}}(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i\frac{x}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i\frac{x}{2}}}{2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x + i \sin(n + \frac{1}{2})x - \cos \frac{x}{2} - i \sin \frac{x}{2}}{2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x - \cos \frac{x}{2}}{2i \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Kun verrataan vasemman ja oikean puolen reaaliosia ja kerrotaan puolittain kahdella, saadaan

$$\begin{aligned} \Re \left[ \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right] &= \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx &= D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

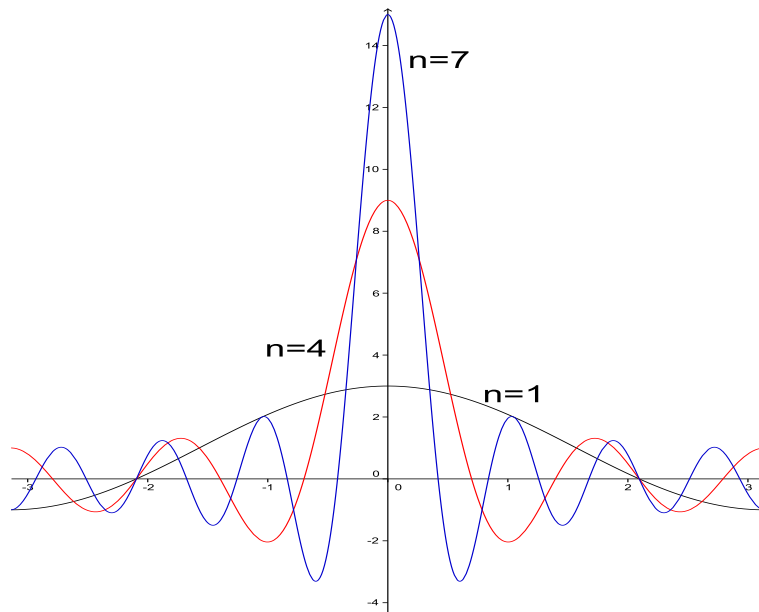
Dirichlet'n ydin on jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on  $2\pi$ . Fourier-sarjojen kannalta oleellisinta on, että

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (3.37)$$

Tämän todistaminen on helppo lasku:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx\right) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx}_{=0} \\
 &\hspace{15em} \text{(Lemma 2.1.13)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Kuvassa 1 näkyy Dirichlet'n ytimen kuvaajan kehittyminen, kun  $n$  saa yhä suurempia arvoja.



Kuva 1: Dirichlet'n ytimen kuvaaja  $n$ :n arvoilla 1, 4 ja 7.

Lisäksi L'Hospitalin säännöllä nähdään helposti, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_n(x) = 2n + 1, \tag{3.39}$$

ja jos  $n \rightarrow \infty$ , niin  $D_n \rightarrow \infty$ . Kuitenkin aina  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$ .

### 3.5 Lauseen 3.3.3 todistus

Lauseen 3.3.3 todistus voitaisiin esittää koskien väliä  $(-L, L)$ , mutta mitään ei menetetä, jos oletetaan, että  $L = \pi$ . Tarkastelemalla väliä  $(-\pi, \pi)$  saadaan kaavat pidettyä siistimpinä.

*Todistus.* Merkitään

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (3.40)$$

missä vakiot  $c_k$  ovat funktion  $f$  Fourier-kertoimet tapauksessa  $L = \pi$ .

Sijoittamalla kaavaan Fourier-kertoimien lausekkeet, saadaan luvun 3.4 mukaisesti

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Fourier-sarjan  $n$ . osasumma voidaan siis esittää konvoluutiona

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} (f * D_n)(x).$$

Tehdään muuttujanvaihto  $x - t = -t$ , jolloin lausekkeesta (3.41) saadaan Dirichlet'n ytimen parillisuuden perusteella

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \quad (3.42)$$

Kuten luvussa 3.4 todettiin, on  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1$ . Tällöin kiinteille  $x$ :n arvoille pätee, jos  $x$  ei ole epäjatkuvuuskohta,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(u) du.$$

Siispä Fourier-sarjan  $n$ . osasumman ja funktion  $f$  erotukselle voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt, \end{aligned} \quad (3.43)$$

missä  $Q(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ , kun  $t \neq 0$  ja  $Q(t) = f'(x)$ , kun  $t = 0$ . Mutta esitys (3.43) vastaa funktiolle  $Q(t)$  laskettuja Fourier-sarjan kertoimia  $b_n$ , joten Lemman 2.2.3 nojalla se lähestyy nollaa, kun  $n \rightarrow \infty$ . Siispä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt = 0,$$

mikä todistaa, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x),$$

jos  $f$  on jatkuva pisteessä  $x$ .

Koska äskeinen tulos pätee kaikilla kiinteillä  $x$ :n arvoilla, kaikille luvuille  $\varepsilon > 0$  pätee myös

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0 - \varepsilon) = f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0 + \varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon), \quad (3.44)$$

missä  $x_0$  on funktion  $f$  epäjatkuvuuskohta. Fourier-sarjan osasumma on kuitenkin kaikkialla jatkuva funktio, joten kun  $\varepsilon \rightarrow 0$ , osasumman  $S_n(x)$  kuvaaja lähestyy pystysuoraa hyppäystä funktion vasemman- ja oikeanpuoleisten raja-arvojen etäisyyden,  $|f(x^-) - f(x^+)|$ , yli. Hyppy on symmetrinen epäjatkuvuuskohdan molemmin puolin, josta seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]. \quad (3.45)$$

[4, ss.31-33]

Tämä ei kuitenkaan ole täysin eksakti perustelu, joten esitetään tuloksen (3.45) todistamiselle myös täsmällisempi versio. Korvataan yhtälössä (3.41)

$D_n(x)$  summalla (3.36), ja kirjoitetaan

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt. \quad (3.46)$$

Jaetaan luvulla  $x \in (-\pi, \pi)$  integroimisväli kahtia:  $(-\pi, x)$  ja  $(x, \pi)$ , ja suoritetaan muuttujanvaihto. Integraalin ensimmäiseen puoliskoon sijoitetaan

$$t - x = -2\alpha; \quad dt = -2d\alpha; \quad \text{integroimisväli: } (-\pi, x) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x; 0\right),$$

ja toiseen puoliskoon

$$t - x = 2\alpha; \quad dt = -2d\alpha; \quad \text{integroimisväli: } (x, \pi) \rightarrow \left(0; \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\right).$$

Tällöin summa  $S_n(x)$  saa muodon

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f(t) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_x^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x}^0 f(x-2\alpha) \frac{\sin(2n+1)(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} (-2d\alpha) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x} f(x+2\alpha) \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin \alpha} 2d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x} f(x-2\alpha) \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin \alpha} d\alpha + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x} f(x+2\alpha) \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Jos  $x \in (-\pi, \pi)$  ja  $f(x)$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(-\pi, \pi)$ , niin  $\alpha$ :n funktio  $f(x-2\alpha)$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(0; \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x)$ . Vastavasti  $f(x+2\alpha)$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(0; \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x)$ . Lisäksi  $\alpha$ :n funktioille pätee  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(x-2\alpha) = f(x^-)$  ja  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(x+2\alpha) = f(x^+)$ , mikäli  $f(x)$ :n toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa.

Nyt Lemman 3.3.2 tuloksesta 2 seuraa, että kun  $x \in (-\pi, \pi)$  ja  $f(x^-)$  sekä  $f(x^+)$  ovat molemmat olemassa,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} f(x^+) + \frac{\pi}{2} f(x^-) \right] \\ &= \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)],\end{aligned}\tag{3.48}$$

joka on yhtäkuin  $f(x)$ , jos  $f$  on jatkuva kohdassa  $x$ . [1, ss.230-232]  $\square$

### 3.6 Suppenemisen laadusta

Ylläoleva tarkastelu osoittaa, että jos  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(-L, L)$ ,  $S_n(x)$  suppenee pisteittäin arvoon  $f(x)$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Seuraava Lause takaa Fourier-sarjalle tasaisen suppenemisen, jos  $f \in \mathbf{C}^k(-L, L)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Lause 3.6.1.** *Oletetaan,  $f$  on  $2L$ -jaksollinen, että  $S_n(x)$  suppenee pisteittäin arvoon  $f(x)$ , ja että  $f \in \mathbf{C}^k(-L, L)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Tällöin suppeneminen on tasaista ja lisäksi erotuksella  $\|S_n - f\|_\infty$  on suuruusluokkaa  $n^{-k+\frac{1}{2}}$  oleva yläraja.*

*Todistus.* Huomioidaan, että oletuksista seuraa, että  $f \in L^2(-L, L)$ . Epäyh-tälöiden

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{Schwarz})\tag{3.49}$$

ja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2L} \|f\|_2^2 \quad (\text{Bessel})\tag{3.50}$$

avulla voidaan arvioida erotusta  $S_N(x) - S_M(x)$ ,  $N \leq M < \infty$  seuraavasti.

$$\begin{aligned}|S_N - S_M| &= \left| \sum_{|N| < n \leq |M|} c_n[f] e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \right| \leq \sum_{|N| < n \leq |M|} |c_n[f]| \\ &\stackrel{\text{Lause 3.2.2}}{=} \sum_{|N| < n \leq |M|} |c_n[f^{(k)}]| \left| \left( \frac{n\pi}{L} \right)^{-k} \right| \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \left( \sum_{|N| < n \leq |M|} |c_n[f^{(k)}]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{|N| < n \leq |M|} \left( \frac{L}{n\pi} \right)^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{Bessel}}{\leq} \frac{1}{2L} \|f^{(k)}\|_2 \frac{L^k}{\pi^k} \left( \frac{1}{(2k-1)N^{2k-1}} \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{3.51}$$

missä on lisäksi arvioitu

$$\sum_{|N|<n\leq|M|} \frac{1}{n^{2k}} < \sum_{|N|<n} \frac{1}{n^{2k}} \leq 2 \int_N^\infty \frac{1}{x^{2k}} dx = \frac{1}{(k - \frac{1}{2})N^{2k-1}}. \quad (3.52)$$

Jos merkitään  $C = \frac{L^{k-1}}{2\pi^k \sqrt{(k-\frac{1}{2})}}$ , niin

$$|S_N(x) - S_M(x)| \leq C \|f^{(k)}\|_2 N^{-k+\frac{1}{2}}. \quad (3.53)$$

Koska myös  $\|f^{(k)}\|_2$  on vakio, ja  $k \geq 1$ , pätee

$$C \|f^{(k)}\|_2 N^{-k+\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad (3.54)$$

kun  $N > N_\varepsilon$ . Siten kaikille luvuille  $x \in \mathbb{R}$

$$|S_N(x) - S_M(x)| < \varepsilon, \quad (3.55)$$

kun  $N, M > N_\varepsilon$ . Väite seuraa, kun annetaan  $M \rightarrow \infty$ . [4, s.33]  $\square$

### 3.6.1 Gibbsin ilmiö

Mikäli funktiolla  $f$  on epäjatkuvuuskohtia välillä  $(-L, L)$ , ei suppeneminen koskaan voi olla tasaista. Syy tähän on *Gibbsin ilmiö*, jota havainnollistetaan seuraavalla esimerkillä.

**Esimerkki 3.6.2.** Muodostetaan *kanttiaallon*

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad (3.56)$$

missä  $f(x) = f(x + 2\pi)$ , Fourier-sarja.  $f$  on pariton funktio, joten vakiot  $a_n$  ovat kaikki nolliä. Vakioiksi  $b_n$  saadaan

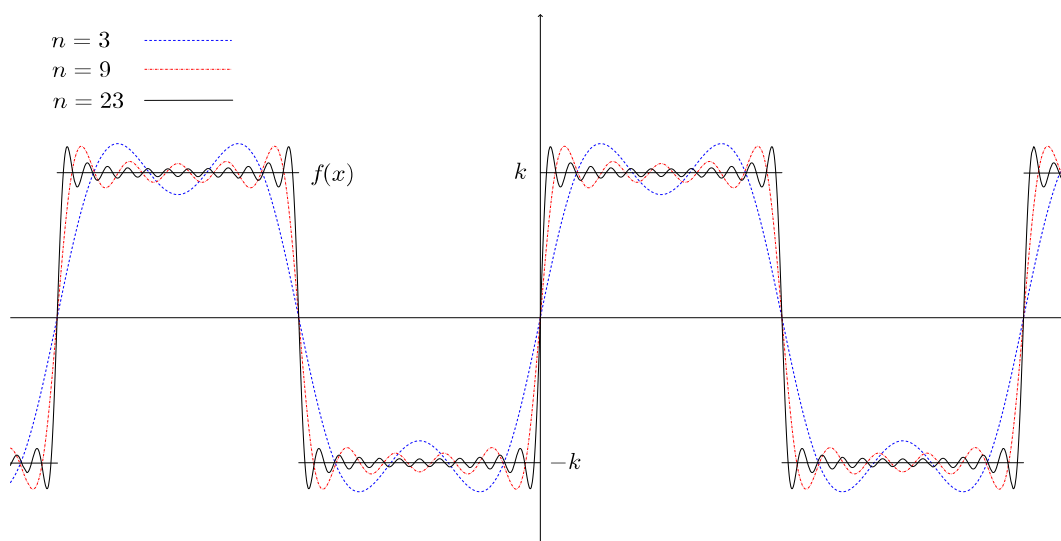
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi k \sin nx \, dx = -\frac{2k}{n\pi} \int_0^\pi \cos nx \\ &= \frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4k}{n\pi}, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases} \end{aligned}$$



Kanttiaallon Fourier-sarjaksi saadaan siten

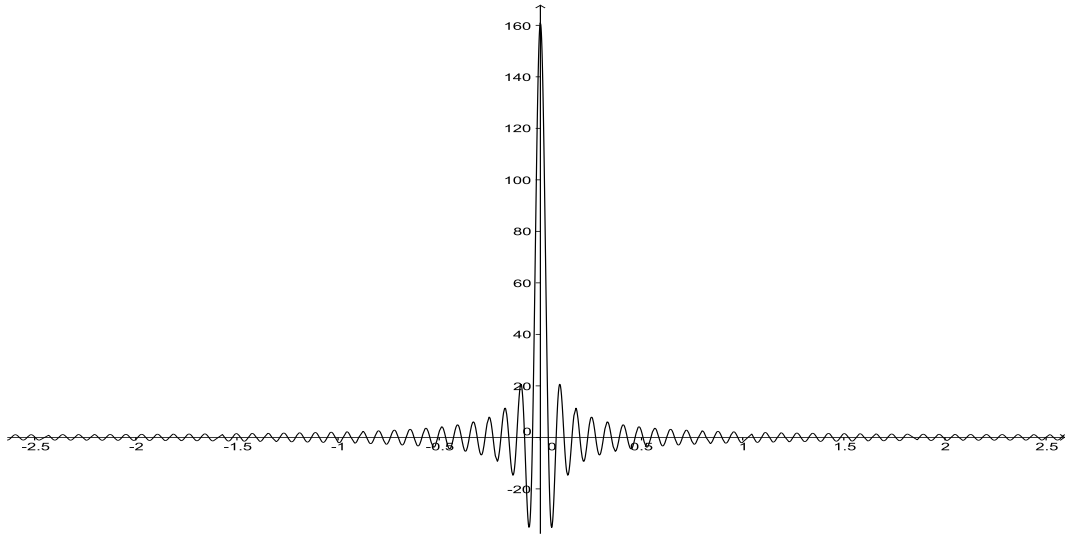
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4k}{(2m+1)\pi} \sin(2m+1)x & (3.57) \\
 &= \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Kuvassa 2 näkyy kuinka sarjan (3.57) osasummat lähestyvät funktiota  $f$ , kun indeksin  $n = 2m + 1$  arvot kasvavat.



Kuva 2: Sarjan (3.57) 1. osasumma

Kuvasta 2 näkyy myös Gibbsin ilmiönä tunnettu Fourier-sarjojen ongelma, joka esiintyy aina siellä, missä funktiolla  $f$  on epäjatkuvuuskohta. Tällaisessa kohdassa Fourier-sarjan osasumma joutuu tekemään ‘hypyn’, ja vaikka osasumman kuvaajan muu heilahtelu pieneneekin mukavan nopeasti, kun  $n \rightarrow \infty$ , ensimmäiset huiput tällaisen hypyn molemmilla puolella eivät kuitenkaan pienene. Molemmilla puolilla epäjatkuvuuskohtaa Fourier-osasumman arvo eroaa funktion arvosta noin 9%:lla hypyn suuruudesta. Ilmiö havaittiin kokeellisen fysiikan parissa 1800-luvulla, mutta sitä luultiin koe- ja mittauslaitteiston epätarkkuuksista johtuvaksi virheeksi. *J. W. Gibbs* kuitenkin osoitti, että kyseessä on nimenomaan matemaattinen ilmiö, mistä nimityskin on peräisin. Ilmiö periytyy Fourier-sarjoihin Dirichlet’n ytimeltä, joka suurilla indeksin arvoilla heilahtelee erittäin voimakkaasti pisteen  $x = 0$  läheisyydessä.



Kuva 3:  $D_{80}(x)$

Kun indeksin arvot kasvavat, Dirichlet'n ytimen kuvaajan suurimmat huiput lähenevät loputtomasti kohtaa  $x = 0$ . Samaan tapaan Gibbsin ilmiössä epäjatkuvuuskohdan  $x_0$  viereiset huiput siirtyvät lähemmäs kohtaa  $x_0$ . Tämän seurauksena on mahdollista osoittaa, että myös epäjatkovien funktioiden Fourier-sarjan suppeneminen on tasaista kaikkialla muualla paitsi epäjatkuvuuskohtien mielivaltaisen pienissä ympäristöissä. Esimerkiksi kyseessä olleen kanttiaallon tapauksessa suppeneminen on tasaista väleillä  $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon]$  ja  $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ , kun  $\varepsilon > 0$ . [7, ss.93-95]

Silloin kun Fourier-sarja suppenee tasaisesti, voidaan perustellusti integroida sarjaa termeittäin, mitä tehtiin aiemmin Fourier-sarjojen teoriaa kehitettäessä. Vaikka Fourier-sarja ei suppenisikaan tasaisesti, on termeittäin integrointi silti mahdollista. Tämän osoittamiseksi oletetaan, että  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  ja tarkastellaan sen Fourier-sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (3.58)$$

tietämättä sen enempää siitä, millä tavalla se suppenee. Raja-arvo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (3.59)$$

on kuitenkin olemassa, sillä

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx} dx &= c_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{1 \leq |n| \leq N} c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx}_{=0} \\ &= 2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Raja-arvon (3.59) olemassaolo mahdollistaa  $L^1$ -funktion Fourier-sarjan integroimisen termeittäin. [9]

Esimerkin 3.6.2 sivutuotteena saadaan myös seuraava mielenkiintoinen tulos. Lauseen 3.3.3 mukaan funktion (3.56) arvo pisteessä  $x = \frac{\pi}{2}$  saadaan sarjan

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4k}{(2m+1)\pi} \sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \quad (3.61)$$

summana. Toisaalta  $f(\frac{\pi}{2}) = k$ , joten saadaan

$$\begin{aligned} k &= \frac{4k}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} \dots \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \end{aligned}$$

Fourier-sarjojen avulla voidaan siis tehdä johtopäätöksiä myös tällaisten ‘tavallisten’ sarjojen summista.

## 4 Fourier-muunnos

Jos Fourier-sarja suppenee, sen esittämä funktio on aina jaksollinen. Siispä jos  $f$  on koko reaaliakselilla määritelty jaksoton funktio, niin Fourier-sarja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \quad (4.1)$$

esittää funktiota  $f$  ainoastaan välillä  $(-L, L)$ . Mutta mihin päädytään, kun annetaan  $L \rightarrow \infty$ ? Osoittautuu, että se johtaa Fourier-muunnosten teoriaan, yhteen integraalimuunnosten tärkeimmistä osa-alueista.

## 4.1 Fourier-integraali

Jotta tarkastelu olisi ollenkaan järkevä, on tässä vaiheessa pakko olettaa, että  $\int_{-L}^L f(x)dx$  pysyy rajoitettuna, kun  $L \rightarrow \infty$ . Olkoon siis  $f \in L^1$ . Sijoitetaan Fourier-kertoimien lauseke sarjaan (4.1) ja merkitään  $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_n x} dt, \end{aligned} \quad (4.2)$$

missä  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$ .

Lukua  $\omega_n$  voidaan ajatella fysikaalisessa mielessä taajuutena. Fourier-sarjoissa summan termien taajuudet kasvavat luvun  $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$  verran, kun  $n$  kasvaa yhdellä. Tässä mielessä rajaprosessin  $L \rightarrow \infty$  seurauksena  $\frac{\pi}{L} \rightarrow 0$  ja taajuden spektristä tulee siten jatkuva. Koska  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , lauseketta (4.2) voidaan ajatella Riemannin summana, joka approksimoi integraalia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} e^{i\omega x} dt. \quad (4.3)$$

Siten rajaprosessi  $L \rightarrow \infty$  voisi johtaa esitykseen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-i\omega t} dt] e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Integraalia (4.4) kutsutaan *Fourier-integraaliksi* ja se antaa olettaa, että  $f$  olisi palautettavissa omasta integraalimuunnoksestaan

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (4.5)$$

käänteisellä muunnoksella

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (4.6)$$

**Määritelmä 4.1.1.** Jos funktiot  $\hat{f}(\omega)$  ja  $f(x)$  on annettu kaavoilla (4.5) ja (4.6), ne muodostavat Fourier-muunnos -parin. Funktio  $\hat{f}$  on funktion  $f$  *Fourier-muunnos* ja  $f$  on funktion  $\hat{f}$  *käänteinen Fourier-muunnos*. Näitä merkitään usein  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  ja  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ .

*Huomautus 4.1.2.* Fourier-muunnoksen määrittely kirjallisuudessa vaihtelee. Fourier-muunnos -pari voisi olla mikä hyvänsä seuraavista:

$$\begin{aligned} * \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, & f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ * \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i\omega x} dx, & f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega x} d\omega \\ * \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\omega x} dx, & f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

Fourier-integraali johdettiin lähtien sarjasta, jonka summa on  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ , ja osoittautuu, että integraali suppenee samaan arvoon. Tämän osoittamiseksi tarkastellaan *reaalista Fourier-integraalia*, joka saadaan Eulerin kaavan avulla esityksestä (4.4). Funktio  $f(x)$  voidaan nimittäin esittää muodossa

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega) + iG(\omega)) d\omega, \end{aligned}$$

ja on helppo todeta, että  $F(\omega)$  on parillinen funktio ja  $G(\omega)$  pariton. Edelleen, Lemman 2.1.12 nojalla

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt d\omega, \end{aligned} \quad (4.7)$$

joka on Fubinin Lauseen mukaan sama asia kuin

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (4.8)$$

Tutkitaan lähdeä [6, ss.15-16] mukaillen aluksi erotusta

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega - \int_0^m d\omega \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt,$$

ja oletetaan, että  $f \in L^1$ . Jakamalla integroimisväli nolasta äärettömään kahtia, saadaan

$$\begin{aligned} & \int_0^k f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega - \int_0^m d\omega \int_0^k f(t) \cos \omega(x-t) dt + \dots \\ & \dots + \int_k^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega - \int_0^m d\omega \int_k^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt, \end{aligned}$$

missä kaksi ensimmäistä integraalia ovat yhtä suuret, koska  $m, k > 0$  ovat äärellisiä. Nyt, koska  $f \in L^1$ , on olemassa luku  $K$  siten, että

$$\left| \int_k^{\infty} |f(t)| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad (4.9)$$

missä  $\varepsilon > 0$  ja  $k > K$ . Tästä seuraa, että

$$\left| \int_0^m d\omega \int_k^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt \right| \leq \int_0^m d\omega \int_k^{\infty} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.10)$$

Lisäksi, koska  $\frac{\sin \mu x}{x} \leq \mu$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_k^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega \right| &= \left| \int_k^{\infty} f(t) \frac{\sin m(x-t)}{x-t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_k^{\infty} f(t) m dt \right| \\ &\leq m \int_k^{\infty} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Siten, vaikka  $m$  valittaisiin kuinka suureksi hyvänsä,  $K$  voidaan aina valita siten, että

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega - \int_0^m d\omega \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Toisin sanoen,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m d\omega \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (4.12)$$

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m d\omega \int_{-\infty}^0 f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (4.13)$$

Summaamalla yhtälöt (4.12) ja (4.13) keskenään, saadaan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (4.14)$$

Nyt, jos  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(-\infty, \infty)$ , Lemman 3.3.2 tuloksesta 1. seuraa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin mu}{u} du && \text{(sij. } u = x-t) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin m(x-t)}{x-t} dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^m \cos \omega(x-t) d\omega \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^m d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

On saatu todistettua

**Lause 4.1.3.** Jos funktio  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(-\infty, \infty)$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)} dt d\omega = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], \quad (4.16)$$

ja erityisesti, jos  $f$  on jatkuva kohdassa  $x$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)} dt d\omega. \quad (4.17)$$

□

## 4.2 Fourier-muunnos $L^1$ -avaruudessa

Lauseen 4.1.3 mukaan funktion  $f$  täytyy toteuttaa Dirichlet'n ehdot koko reaaliakselilla, että Fourier-integraalin arvo olisi  $f(x)$ . Pelkästään Fourier-muunnoksen olemassaololle riittää kuitenkin lievemmätkin oletukset. Jos nimittäin  $f \in L^1$ , Fourier-muunnokselle pätee

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}} < \infty.$$

Toisin sanoen siis  $\hat{f}$  on olemassa äärellisenä ja

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| = \|\hat{f}\|_{\infty} < \infty, \quad (4.18)$$

joten  $\hat{f} \in L^{\infty}$ . Lisäksi  $\hat{f}$  on jatkuva koko reaalilukujen joukossa, sillä kaikille luvuille  $\omega, h \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (e^{-ihx} - 1) f(x) dx,$$

joten

$$|\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-ihx} - 1)| |f(x)| dx.$$

Integrandi oikealla on pienempää tai yhtäsuurta kuin  $2|f(x)|$  ja lähestyy nollaa, kun  $h \rightarrow 0$ . Tämän seurauksena koko oikea puoli lähestyy nollaa, kun  $h \rightarrow 0$ , joten  $\hat{f}$  on jatkuva kohdassa  $\omega$ . [5, s.6]



**Lause 4.2.1.** Oletetaan, että  $f \in L^1$ . Tällöin

1.  $\hat{f} \in L^\infty$ ;
2.  $\hat{f}$  on jatkuva koko reaaliakselilla;
3.  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$
4.  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$ ;
5.  $\mathcal{F}(f(x+a)) = e^{i a \omega} \hat{f}(\omega)$  ja  $\mathcal{F}(e^{-i b x} f(x)) = \hat{f}(\omega + b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ;

Jos lisäksi  $f, f_1, f_2, \dots \in L^1$  ja jos  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$  niin

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(\omega) = \hat{f}(\omega)$  ja suppeneminen on tasaista.

*Todistus.* Väitteet **1.** ja **2.** on perusteltu jo ylempänä. Väite **3.** on itse asiassa Riemann-Lebesguen Lemma. Väitteiden **4.** ja **5.** osoittaminen onnistuu suoralla laskulla.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Kohta **5.**:

$$\mathcal{F}(f(x+a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x+a) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-a)} f(x) dx = e^{i\omega a} \hat{f}(\omega),$$

ja kohdan **5.** toinen puoli:

$$\hat{f}(\omega+b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega+b)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) e^{-i\omega b}] e^{-i\omega x} dx = \mathcal{F}(e^{-i\omega b} f(x)).$$

Väite **6.** seuraa tuloksesta (4.18), sillä oletuksen mukaan

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}_n(\omega) - \hat{f}(\omega)| \leq \frac{\|f_n(x) - f(x)\|_1}{\sqrt{2\pi}} < \varepsilon,$$

kun  $n$  on tarpeeksi suuri, joka todistaa väitteen. [5, ss.6-7] □

### 4.3 Fourier-muunnos $L^2$ -avaruudessa

Fourier-analyysin kannalta avaruus  $L^2(\mathbb{R})$  on erityisessä asemassa. Voidaan nimittäin osoittaa, että jos  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , niin  $\hat{f} \in L^q$  siten, että  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , missä  $\frac{1}{\infty}$  on samaistettu nollan kanssa. Siispä jos  $p = 2$ , myös  $q = 2$  ja toisin sanoen  $\mathcal{F}$  kuvaa avaruuden  $L^2$  itselleen. [2, s.62]

Lähdetään kehittämään  $L^2$ -teoriaa osoittamalla, että jos  $f \in L^1 \cap L^2$ , niin  $\hat{f} \in L^2$ . Tätä varten tarvitaan aputulosta

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad (4.19)$$

missä  $a > 0$ . Tämä todistetaan myöhemmin Esimerkissä 4.5.3.

**Lause 4.3.1.** *Olkoon  $f \in L^1 \cap L^2$ . Silloin  $\hat{f} \in L^2$  ja*

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (4.20)$$

*Todistus.* Voidaan kirjoittaa

$$|\hat{f}(\omega)|^2 = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt. \quad (4.21)$$

Kertomalla puolittain funktiolla  $e^{-\frac{\omega^2}{n}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ja integroimalla reaaliakselin yli saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt. \quad (4.22)$$

Koska  $f \in L^1$ , niin (4.22) suppenee itseisesti. Tonelli-Hobsonin Lauseen 2.2.6 nojalla voidaan tällöin vaihtaa integroimisjärjestystä:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} e^{-i\omega(x-t)} d\omega.$$

Nyt tuloksesta (4.19) saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} e^{-i\omega(x-t)} d\omega = \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n(x-t)^2}{4}}.$$

Edelleen

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n(x-t)^2}{4}} f(x) dx \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{nx^2}{4}} f(x+t) dx \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{nx^2}{4}} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \overline{f(t)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{4}} e^{-\frac{nx^2}{4}} F(x) dx,
\end{aligned}$$

missä  $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \overline{f(t)} dt$ . Nyt saadaan muuttujanvaihdolla  $\frac{nx^2}{4} = x^2$  kirjoitettua

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} F(2n^{-\frac{1}{2}}x) dx. \quad (4.23)$$

Nyt  $F(x)$  on jatkuva kohdassa  $x = 0$ , sillä Lauseen 2.2.4 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+t) - f(t)] \overline{f(t)} dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(t)| |f(t)| dt \\
\Leftrightarrow |F(x) - F(0)|^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

ja koska  $f \in L^2$ , niin oikea puoli lähestyy nollaa, kun  $x \rightarrow 0$ . Siispä

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0). \quad (4.25)$$

Lisäksi Lauseen 2.2.4 mukaan kaikille luvuille  $x$  pätee

$$|F(x)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 \|f\|_2^2 = \|f\|_2^4.$$

Siten yhtälön (4.23) oikealla puolella oleva integrandi on funktion  $\|f\|_2^4 e^{-x^2}$  rajoittama. Tästä, Lemmasta 2.2.2 ja tuloksesta (4.25) seuraa, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} F(2n^{-\frac{1}{2}}x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} F(0) = F(0). \quad (4.26)$$

Koska  $F(0) = \|f\|_2^2$ , seuraa tuloksista (4.23) ja (4.26)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|_2^2. \quad (4.27)$$

Nyt kuitenkin Fatoun Lemman 2.2.1 mukaan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

joka todistaa, että  $\hat{f}(\omega) \in L^2$ . Lopulta tuloksesta (4.27) ja Lemmasta 2.2.2 seuraa, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|_2^2.$$

□

Tästä edetään  $L^2$ -funktioiden Fourier-muunnoksiin pienen mutkan kautta.

**Lemma 4.3.2.** *Olkoon  $f \in L^2$ . Määritellään  $f_N$  siten, että*

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq N \\ 0, & |x| > N, \end{cases} \quad (4.29)$$

*missä  $N = 1, 2, \dots$ . Silloin  $f_N \in L^1 \cap L^2$ ,  $\hat{f}_N \in L^2$  ja lisäksi kun  $N \rightarrow \infty$ ,  $\hat{f}_N$  suppenee normin  $\|\cdot\|_2$  mielessä johonkin  $L^2$ -funktioon.*

*Todistus.* Lauseen 2.2.4 perusteella

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f_N(x)| dx &= \int_{-N}^N |f(x)| dx \leq \left[ \int_{-N}^N |f(x)|^2 dx \int_{-N}^N dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_2 (2N)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned} \quad (4.30)$$

joten  $f_N \in L^1$ . Koska myös  $|f_N(x)| \leq |f(x)|$ , on selvää, että  $f_N \in L^2$ . Tästä seuraa, että  $f_N \in L^1 \cap L^2$  ja siten Lauseen 4.3.1 mukaan  $\hat{f}_N \in L^2$ .

Lauseen loppuosan todistamiseksi tarkastellaan raja-arvoa  $\lim_{M,N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N - \hat{f}_M\|_2$ ,  $N \geq M$ . Kyseessä on Fourier-muunnos funktiosta  $f_N - f_M$ , joka kuuluu avaruuteen  $L^1 \cap L^2$ . Siten, Lauseen 4.3.1 mukaan,

$$\|\hat{f}_N - \hat{f}_M\|_2^2 = \|f_N - f_M\|_2^2. \quad (4.31)$$

Oikea puoli voidaan kirjoittaa

$$\left| \int_{-N}^{-M} |f(x)|^2 dx + \int_M^N |f(x)|^2 dx \right|,$$

joka lähestyy nollaa, kun  $N, M \rightarrow \infty$ . Tästä seuraa, että  $\lim_{N,M \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N - \hat{f}_M\|_2 = 0$ , ja koska  $L^2$  on Hilbert-avaruus, rajafunktiolle  $\hat{f}$  pätee  $\hat{f} \in L^2$ .  $\square$

Äskeinen Lause on sen takia oleellinen, että jos määritellään  $f_N$  kuten edellä, ja

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

voidaan olla vakuuttuneita siitä, että  $L^2$ -funktion  $f$  Fourier-muunnos

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (4.32)$$

on olemassa ja  $\hat{f} \in L^2$ .

### Lause 4.3.3. Parsevalin kaava Fourier-muunnoksille

Olkoon  $f \in L^2$ . Silloin pätee

$$\|\hat{f}(\omega)\|_2 = \|f(x)\|_2.$$

*Todistus.* Koska

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

on yhtäpitävää kirjoittaa

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f} - \hat{f}_N\|_2 = 0.$$

Tämä toisaalta implikoi, että

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N\|_2 = \|\hat{f}\|_2. \quad (4.33)$$

Funktioiden  $f_N$  määrittelystä on selvää, että

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N\|_2 = \|f\|_2, \quad (4.34)$$

ja koska  $f_N \in L^1 \cap L^2$ , Lauseen 4.3.1 mukaan pätee

$$\|\hat{f}_N\|_2 = \|f_N\|_2. \quad (4.35)$$

Hyödyntämällä yhtälöitä (4.33) - (4.35) saadaan

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N\|_2 = \|f\|_2.$$

□

Aiemmin on jo todettu, että  $\mathcal{F}$  on lineaarikuvaus. Lisäksi Parsevalin kaavan mukaan funktion 2-normi on yhtä suuri kuin sen Fourier-muunnoksen 2-normi. Tällöin myös etäisyydet  $\|f - g\|_2$  ja  $\|\hat{f} - \hat{g}\|_2$  ovat yhtäsuuria, joten saadaan

**Lause 4.3.4.**  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$  on lineaarinen isometria.

Parsevalin kaavan avulla voidaan todistaa myös seuraava käyttökelpoinen tulos.

**Lause 4.3.5.** Jos  $f, g \in L^2$ , niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (4.36)$$

*Todistus.* Kirjoitetaan  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int f$ . Parsevalin kaavan mukaan

$$\begin{aligned} \|\hat{f} + \hat{g}\|_2^2 &= \|f + g\|_2^2 \\ \Leftrightarrow \int (\hat{f} + \hat{g})(\overline{\hat{f} + \hat{g}}) dx &= \int (f + g)(\overline{f + g}) \\ \Leftrightarrow \int |\hat{f}|^2 + \int |\hat{g}|^2 + \int \hat{f} \overline{\hat{g}} + \int \overline{\hat{f}} \hat{g} &= \int |f|^2 + \int |g|^2 + \int f \overline{g} + \int \overline{f} g \end{aligned}$$

Edelleen Parsevalin kaavan mukaan  $\int |\hat{f}|^2 = \int |f|^2$  ja  $\int |\hat{g}|^2 = \int |g|^2$ , joten

$$\int \hat{f} \overline{\hat{g}} + \int \overline{\hat{f}} \hat{g} = \int f \overline{g} + \int \overline{f} g. \quad (4.37)$$

Nyt, koska  $g$  on mielivaltainen joukon  $L^2$  alkio, voidaan  $\hat{g}$  ja  $g$  korvata funktioilla  $i\hat{g}$  ja  $ig$ . Yhtälöstä (4.37) tulee siten

$$\begin{aligned} \int \hat{f}(\overline{i\hat{g}}) + \int \overline{\hat{f}}(i\hat{g}) &= \int f(\overline{ig}) + \int \overline{f}(ig) \\ -i \int \hat{f}\hat{g} + i \int \overline{\hat{f}}\hat{g} &= -i \int f\overline{g} + i \int \overline{f}g. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Väite seuraa, kun (4.38) jaetaan luvulla  $-i$  ja syntyvä yhtälö lisätään yhtälöön (4.37).  $\square$

Tähän asti on osoitettu, että jos  $f \in L^2$ , myös  $\hat{f} \in L^2$ . Näytetään vielä, että  $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = f$ . Tätä varten tarvitaan seuraavat kaksi apulausetta.

**Lemma 4.3.6.** *Jos  $f, g \in L^2$ , niin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

Lemman todistus ei ole uuvuttavan pitkä, mutta sivuutetaan siitä huolimatta.

**Lemma 4.3.7.** *Olkoon  $f \in L^2$  ja  $g = \overline{\hat{f}}$ . Tällöin  $f = \overline{\hat{g}}$ .*

*Todistus.*

$$\begin{aligned} \|f - \overline{\hat{g}}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f - \overline{\hat{g}})(\overline{f} - \hat{g}) dx \\ &= \|f\|_2^2 - \int_{-\infty}^{\infty} f\hat{g} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}\overline{\hat{g}} dx + \|\hat{g}\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Parsevalin kaavan ja Lemman 4.3.6 nojalla  $\int f\hat{g} = \int \hat{f}g = \int \hat{f}\overline{\hat{f}} = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ . Samoin  $\int \overline{f}\overline{\hat{g}} = \|f\|_2^2$ . Edelleen  $\|\hat{g}\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ . Sijoittamalla nämä kolme tulosta yhtälöön (4.39), saadaan

$$\|f - \overline{\hat{g}}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 = 0,$$

mistä väite välittömästi seuraa.  $\square$

**Lause 4.3.8.** *Jos  $f \in L^2$ , niin*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

*Todistus.* Olkoon  $g = \overline{f}$ . Silloin Lemman 4.3.7 mukaan  $\overline{f} = \hat{g}$ , joten

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} e^{-i\omega x} d\omega.$$

Väite seuraa, kun otetaan puolittain kompleksikonjugaatit.  $\square$

Edellisessä luvussa osoitettiin, että  $L^1$ -funktion Fourier-muunnos on jatkuva, ja häviää äärettömydessä. Kuitenkin, esimerkiksi funktio  $g$ ,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & x > e \\ \frac{x}{e}, & 0 \leq x \leq e \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva, ja  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ , mutta voidaan osoittaa, ettei se ole minkään funktion Fourier-muunnos.  $L^2$ -funktioille asian laita on toisin, nimittäin jokainen  $L^2$ -funktio on jonkin  $L^2$ -funktion Fourier-muunnos, kuten seuraava Lause osoittaa.

**Lause 4.3.9.** *Jokainen funktio  $f \in L^2$  on yksikäsitteisen funktion  $g \in L^2$  Fourier-muunnos.*

*Todistus.* Olkoon  $f \in L^2$  ja  $h = \overline{f}$  ja  $g = \overline{\hat{h}}$ . Lemman 4.3.7 mukaan  $\overline{f} = h = \overline{\hat{g}}$ , joten  $f = \hat{g}$ . Yksikäsitteisyys seuraa Lauseesta 4.3.8, sillä jos  $f(\omega) = \hat{u}(\omega)$  ja  $f(\omega) = \hat{v}(\omega)$ , täytyy olla

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{ja} \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

josta seuraa, että  $u = v$ .  $\square$

Kasataan vielä lopuksi keskeisimmät tulokset yhteen Lauseeseen, jonka sveitsiläinen matemaatikko Michel Plancherel onnistui todistamaan vuonna 1910.

**Lause 4.3.10. Plancherelin lause**

*Jos  $f \in L^2$ , niin on olemassa funktio  $\hat{f} \in L^2$  siten, että*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (4.40)$$



ja  $\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ . Lisäksi jokainen funktio  $f \in L^2$  voidaan ilmaista muodossa  $f = \hat{g}$ , missä  $g \in L^2$  on yksikäsitteinen.

[5, ss.43-51]

## 4.4 Konvoluution Fourier-muunnos

Syy, miksi konvoluutioita käsitellään usein Fourier-muunnosten avulla on se, että kahden funktion,  $f, g \in L^1$ , konvoluutio,  $f * g$ , vastaa funktioiden  $\hat{f}$  ja  $\hat{g}$  tuloa. Tarkemmin  $\sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g} = \mathcal{F}(f * g)$ .

### Lause 4.4.1. Konvoluutiolause

Olkoot  $f, g \in L^1$ . Tällöin  $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$ .

*Todistus.* Fourier-muunnoksen määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x+t)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \\ &= \mathcal{F}(g(t))\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f(x)) = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}. \end{aligned}$$

Viimeinen integraali suppenee tasaisesti, koska  $f, g \in L^1$ . Tästä syystä voidaan integroimisjärjestys huoletta vaihtaa.  $\square$

[5, s.20] Konvoluutiolauseelle löytyy sovellus, kun luvussa 5 ratkaistaan lämpöyhtälöä Fourier-muunnosten avulla.

## 4.5 Derivaattojen Fourier-muunnokset

Yksi erittäin tärkeä Fourier-muunnosten ominaisuus on se, että funktion  $f$  derivaatta voidaan ilmaista Fourier-muunnoksen avulla yksinkertaisena kertolaskuna. Tarkastellaan määritelmän mukaan funktion  $f$  k.:tta derivaattaa.

Sen Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Siitä saadaan osittaisintegroinnilla

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x)e^{-i\omega x} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Nyt, jos  $\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x) \rightarrow 0$ , kun  $x \rightarrow \pm\infty$ , ensimmäinen termi oikealla häviää, ja jäljelle jää

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right) = i\omega \mathcal{F}\left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x)\right).$$

Toistamalla tämä  $k$  kertaa ja olettamalla, että kaikki funktion  $f$  derivaatat indeksiin  $k-1$  asti häviävät äärettömässä, saadaan

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right) = (i\omega)^k \mathcal{F}(f(x)). \quad (4.41)$$

**Lause 4.5.1.** Jos  $f \in L^1$ ,  $f \in C^k$  ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)} = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, k-1$ , tällöin voidaan  $\mathcal{F}(f^{(k)}(x))$  laskea kaavalla (4.41).

[6, s.27] □

Hyödyllinen tulos saadaan myös tarkastelemalla Fourier-muunnoksen derivaattaa  $\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{f}(\omega)$ . Määritelmän mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d\omega^k}\hat{f}(\omega) &= \frac{d^k}{d\omega^k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^k}{d\omega^k} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix)^k e^{-i\omega x} dx \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^k e^{-i\omega x} dx \\ &= (-i)^k \mathcal{F}(x^k f(x)). \end{aligned} \quad (4.42)$$

**Lause 4.5.2.** Jos  $f$  ja  $x^n f \in L^1$ ,  $n = 1, 2, \dots, k$ , on  $\hat{f}$  tällöin  $k$  kertaa differentioituva ja

$$i^k \hat{f}^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}(x^k f(x)). \quad (4.43)$$

[7, s.169]

□

**Esimerkki 4.5.3.** Määritetään funktion  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ , Fourier-muunnos. Derivoimalla saadaan  $f'(x) = -2axe^{-ax^2}$ , joten  $f(x)$  toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$f'(x) + 2axf(x) = 0. \quad (4.44)$$

Lauseiden 4.5.1 ja 4.5.2 oletukset ovat selvästi voimassa, joten otetaan yhtälön (4.44) termeistä Fourier-muunnokset ja ratkaistaan muodostuva differentiaaliyhtälö separoimalla. Saadaan

$$\begin{aligned} i\omega \hat{f}(\omega) + 2ai\hat{f}'(\omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow \hat{f}'(\omega) &= \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a}\hat{f}(\omega) \\ \Leftrightarrow \frac{d\hat{f}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} &= -\frac{\omega}{2a}d\omega \\ \Leftrightarrow \ln|\hat{f}(\omega)| &= -\frac{\omega^2}{4a} + C' \\ \Leftrightarrow |\hat{f}(\omega)| &= e^{-\frac{1}{4a}\omega^2 + C'} \\ \Leftrightarrow \hat{f}(\omega) &= Ce^{-\frac{1}{4a}\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Vakio  $C$  saadaan ratkaistua alkuehdon

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i \cdot 0x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (4.46)$$

avulla. Integraalin  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}$  arvo on  $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$ , joten  $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ . Yhtälöstä (4.45) saadaan nyt

$$\hat{f}(0) = Ce^{-\frac{1}{4a} \cdot 0^2} = C = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad (4.47)$$

ja lopulta

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{1}{4a}\omega^2}. \quad (4.48)$$

[7, ss.169-170]

## 5 Lämpöyhtälö

Fourier-analyysin sovelluskenttä on laaja. Tässä kuitenkin paneudutaan tarkemmin vain yhteen sovellusalueeseen, jo johdannossa esiteltyyn lämpöyhtälöön. Siinäkin rajoitutaan vain yksiulotteiseen tapaukseen. Aloitetaan tilanteesta, jossa  $x$ -akselilla on äärettömän pitkä sauva jossakin funktion  $f(x)$  osoittamassa alkulämpötilassa. Sen jälkeen tutkitaan äärellisen pituista alkulämpötilassa  $f(x)$  olevaa sauvaa, jonka päät pidetään nollassa asteessa, ja esitetään ongelmalle kaksi erilaista ratkaisutapaa. Lopuksi katsotaan kuinka tilanne muuttuu, mikäli, sen sijaan että päät pidettäisiin nollassa asteessa, myös sauvan päät eristetään.

### 5.1 Äärettömän pitkä sauva

Tarkastelussa on siis pitkä, eristetty sauva, jonka piste  $x$  on aluksi lämpötilassa  $f(x)$ , ja lämpötila ajan  $t$  kuluttua on  $u(x, t)$ . Mielekkyyden vuoksi oletetaan, että äärettömyydessä lämpötila on nolla, eikä siellä tapahdu lämmön siirtoa sauvan 'päistä', toisin sanoen  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0$ . Lämpöteorian mukaan funktio  $u$  toteuttaa yksiulotteisen lämpöyhtälön

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

alkuehtona

$$u(x, 0) = f(x). \quad (5.2)$$

Ongelman ratkaisemiseksi tehdään lisäoletus,  $f \in L^1$  ja jokaiselle kiinteälle  $t$ :n arvolle myös  $u(x, t) \in L^1$ . Tämä takaa Fourier-muunnosten

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ja

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

olemassaolon. Lisäksi, koska  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0$ , voidaan soveltaa Lausetta 4.5.1. Nyt, ottamalla yhtälön (5.1) molemmista puo-

lista Fourier-muunnos  $x$ :n suhteen, saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right\} &= \mathcal{F} \left\{ \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-i\omega x} dx &= \alpha (i\omega)^2 \mathcal{F}\{u(\omega, t)\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx &= -\alpha \omega^2 \hat{u}(\omega, t) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) &= -\alpha \omega^2 \hat{u}(\omega, t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

mikäli vasemmalla puolella derivoinnin ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa. Muodostamalla vielä alkuehdosta (5.2) puolittain Fourier-muunnokset, saadaan ongelma muotoon

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) = -\alpha \omega^2 \hat{u}(\omega, t) \quad (5.4)$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad (5.5)$$

ja  $\hat{u}$  on helppo ratkaista yhtälöstä (5.4) separoimalla. Saadaan

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\hat{u}(\omega, t)} = -\alpha \omega^2 dt, \quad (5.6)$$

ja edelleen puolittain integroimalla

$$\begin{aligned} \ln |\hat{u}(\omega, t)| &= -\alpha \omega^2 t + C'(\omega) \\ \Leftrightarrow \hat{u}(\omega, t) &= C(\omega) e^{-\alpha \omega^2 t}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

missä  $C'$  ja  $C = e^{C'}$  ovat muuttujasta  $\omega$  riippuvia vakioita. Alkuehdon (5.5) perusteella

$$\hat{u}(\omega, 0) = C(\omega) e^{-\alpha \omega^2 \cdot 0} = \hat{f}(\omega), \quad (5.8)$$

joten  $C(\omega) = \hat{f}(\omega)$  ja siten

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\alpha \omega^2 t}. \quad (5.9)$$

Esimerkissä 4.5.3 selvisi, että  $\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{1}{4a}\omega^2} = \mathcal{F}\{e^{-ax^2}\}$ , jos  $a > 0$ . Kun tähän sijoitetaan  $a = \frac{1}{4\alpha t}$ , saadaan

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha t} e^{-\alpha \omega^2 t} &= \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{1}{4\alpha t}x^2}\right\} \\ \Leftrightarrow e^{-\alpha \omega^2 t} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-\frac{1}{4\alpha t}x^2}\right\} \\ &= \mathcal{F}\{g(x, t)\} = \hat{g}(\omega, t), \end{aligned} \quad (5.10)$$

joten (5.9) voidaan Lauseen 4.4.1 mukaan esittää muodossa

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\{f(x) * g(x, t)\}. \quad (5.11)$$

Siten saadaan lopulta

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x) * g(x, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)g(\tau, t)d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)\frac{1}{\sqrt{2\alpha t}}e^{-\frac{1}{4\alpha t}\tau^2}d\tau \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)e^{-\frac{1}{4\alpha t}\tau^2}d\tau, \quad \alpha, t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ratkaisu saatiin Fourier-muunnosta hyväksi käyttäen, mutta lopullisessa muodossaan  $u(x, t)$  ei sisällä mitään muunnoksia tai käänteismuunnoksia. Tästä syystä alussa tehtyjä lisäoletuksia voidaan hieman lieventää. Osoittautuu, että jos alkuarvofunktio  $f$  on paloittain jatkuva ja rajoitettu, integraali (5.12) on olemassa kaikille luvuille  $x \in \mathbb{R}$  ja  $t \geq 0$ , ja  $u(x, t)$  toteuttaa yksiulotteisen lämpöyhtälön (5.1) ja lisäksi  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ .

Saatu ratkaisu ei kuitenkaan täysin vastaa todellista tilannetta. Otetaan esimerkiksi  $f(x) = 1$ , kun  $|x| < 1$  ja  $f(x) = 0$  muulloin. Nyt lämpöyhtälön ratkaisu on

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{4\alpha t}(x-\tau)^2}d\tau. \quad (5.13)$$

Tästä on helppo todeta, että kaikilla luvuilla  $x \in \mathbb{R}$  ja  $\alpha, t > 0$ ,  $u(x, t) > 0$ . Toisin sanoen välittömästi ajanhetken  $t = 0$  jälkeen lämpötila muuttuu positiiviseksi äärettömydessä asti. Tämä on selkeä ristiriita todellisuuden kanssa, koska origon ympäristöstä kulkeutuva lämpö ei voi mitenkään levitä äärettömän nopeasti ympäri sauvaa.

Ongelma on seurausta siitä, että yhtälöiden yksinkertaistamiseksi on täytynyt tehdä muutamia approksimaatioita. Probleeman tapauksessa sauvan materiaali on täysin homogeenista ainetta, joka ei tietenkään mikroskooppisella tasolla pidä paikkaansa. Lisäksi lämmön on oletettu olevan jonkinlaista homogeenista virtaavaa ainetta, joka ei sekään pidä paikkaansa. Todellisuudessa lämpö on aina sidoksissa materiaalin hiukkasiin, eikä niinkään mikään

itsenäinen aine. Nämä arviot saavat 'tiedon' origon lämmönlähteestä leviämään äärettömän nopeasti koko sauvaan. [7, ss.182-183]

## 5.2 Äärellisen pituinen sauva

Nyt siis päästään käsiksi jo johdannossa esitettyyn tilanteeseen. Sauvan lämpötilaa kuvaavalle funktiolle  $u(x, t)$  pätee osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$u_t(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (5.14)$$

missä merkintää  $u_t$  ja  $u_{xx}$  on nyt käytetty kuvaamaan  $u$ :n ensimmäistä ja toista osittaisderivaattaa vastaavasti  $t$ :n ja  $x$ :n suhteen. Reunaehto on nyt

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.15)$$

koska sauvan päät pidetään lämpötilassa  $0^\circ$ . Alkuehtona on edelleen

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5.16)$$

Näytetään ensin, kuinka ongelma ratkeaa hyödyntämällä derivaattafunktion Fourier-kertoimia koskevia tuloksia.

### 5.2.1 Ratkaisu Lauseen 3.2.2 avulla

Pienellä tempulla ongelma saadaan taas palautettua ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöksi. Määritellään funktiolle  $u$  *pariton jatko* siten, että

$$u(x, t) = -u(-x, t), \quad \text{kun } -l \leq x < 0, \quad t \geq 0.$$

Nyt  $u(x, t)$  toteuttaa saman differentiaaliyhtälön (5.14) myös välillä  $-l \leq x < 0$ . Tämä on yksinkertaista todeta suoraan derivaatan määritelmästä. Parittoman funktion ensimmäinen derivaatta on nimittäin parillinen:

$$u_x(-x_0, t) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(-x, t) - u(-x_0, t)}{-x - (-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-[u(x, t) - u(x_0, t)]}{-[x - x_0]} = u_x(x_0, t).$$

Toinen derivaattafunktio puolestaan on pariton:

$$u_{xx}(-x_0, t) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u_x(-x, t) - u_x(-x_0, t)}{-x - (-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u_x(x, t) - u_x(x_0, t)}{-[x - x_0]} = -u_{xx}(x_0, t).$$

Samalla tavalla nähdään myös, että  $u_t(x, t)$  on muuttujan  $x$  suhteen pariton. Tällöin negatiivisilla  $x$ :n arvoilla (5.14) on  $-u_t(x, t) = -\alpha u_{xx}(x, t)$ , eli voidaan asettaa

$$u_t(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t), \quad -l \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (5.17)$$

Tämä tehtiin siksi, että funktio  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  on jaksollinen ja edellä todetun mukaisesti ortogonaalinen välillä  $[-l, l]$ . Kerrotaan (5.17) puolittain tällä, sekä vakiolla  $\frac{1}{l}$  ja integroidaan  $x$ :n suhteen  $-l \rightarrow l$ , saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right] dx &= \alpha \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[ u_{xx}(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right] dx \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] &= \alpha \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l u_{xx}(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Näin saavutettiin siis tilanne, jossa vasemmalla puolella on hakasulkeissa funktion  $u$  Fourier-kertoimien lauseke, ja oikealla puolella taas on Fourier-kertoimien lauseke funktiolle  $u_{xx}$ . (5.18) on siis

$$\frac{\partial}{\partial t} b_n[u] = \alpha b_n[u_{xx}]. \quad (5.19)$$

Merkinnästä ei käy ilmi, mutta ymmärretään, että  $b_n$  lasketaan nimenomaan muuttujan  $x$  suhteen. Sovelletaan nyt Lauseen 3.2.2 avulla johdettua tulosta (3.30) funktion  $u_{xx}$  Fourier-kertoimiin:

$$\frac{\partial}{\partial t} b_n[u] = -\alpha \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 b_n[u]. \quad (5.20)$$

Ongelma on siis saatu taas palautettua ensimmäisen asteen differentiaaliyh-tälöksi, ja ainakin

$$b_n[u] = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (5.21)$$

on sen ratkaisu. Nyt  $u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l}$  on nyt parillinen funktio, joten Lemman 2.1.12 nojalla

$$b_n[u] = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Ollaan siis päästy takaisin alkuperäiselle välille  $[0, l]$ . Ratkaistaan (5.20) se-paraomalla. Saadaan

$$b_n[u] = C e^{-\alpha \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 t}. \quad (5.22)$$

Alkuehto (5.16) funktiolle  $b_n[u]$  on

$$b_n[u(x, 0)] = b_n[f(x)] = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (5.23)$$



Alkuarvofunktio  $f$  tietenkin perii parittomuuden funktiolta  $u$ , joten (5.23) on funktion  $f$  Fourier-kertoimien lauseke. Lausekkeen (5.22) vakioksi  $C$  saadaan siten

$$b_n[u(x, 0)] = Ce^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot 0} = C = b_n[f]. \quad (5.24)$$

On siis saatu ratkaistua

$$b_n[u] = b_n[f]e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}, \quad (5.25)$$

joten jos funktio  $u(x, t)$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $[0, l]$ , voidaan ratkaisu kirjoittaa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[u] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (5.26)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n[f]e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (5.27)$$

$$= \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy \right] \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}, \quad (5.28)$$

missä  $0 \leq x \leq l$  ja  $t \geq 0$ . [6, ss.172-173] Tällä tavalla funktion  $u$  pariton-ta jatkoa apuna käyttäen saatu sarja tietysti suppenee arvoon  $-u(x, t)$ , kun  $-l \leq x < 0$ . Tämä on kuitenkin tehtävän kannalta merkityksetöntä. Oleellista on, että nimenomaan välillä  $(0, l)$  saatu ratkaisu suppenee arvoon  $u(x, t)$ .

### 5.2.2 Ratkaisu separoimalla

Edellistä ratkaisua klassisempi tapa on separoida muuttujat heti aluksi. Oletetaan siis, että lämpötilaa kuvaava funktio on kahden funktion tulo, joista toinen riippuu ainoastaan paikasta  $x$  ja toinen vain ajasta  $t$ . Tällöin on

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (5.29)$$

ja osittaisdifferentiaaliyhtälö (5.14) tulee muotoon

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t), \quad (5.30)$$

jolle reuna- ja alkuehdot näytävät tältä:

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.31)$$

$$X(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5.32)$$

Käytännössä voidaan reunaehdoiksi asettaa

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (5.33)$$

sillä muussa tapauksessa  $T(t) \equiv 0$ , joka johtaa triviaaliratkaisuun  $u(x, t) = 0$ .

Jaetaan seuraavaksi yhtälö (5.30) puolittain funktiolla  $\alpha X(x)T(t)$ , jolla saadaan molemmat muuttujat erotettua omalle puolelleen:

$$\frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (5.34)$$

Tästä on se merkittävä etu, että kummankaan muuttujan variointi ei vaikuta yhtälön toisen puolen arvoon. Tämä tosiseikka johtaa suoraan päätelmään, että molempien puolien on oltava yhtäsuurta jonkin vakion kanssa, jota on tapana merkitä luvulla  $-\lambda$ . Saadaan siis

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{\alpha T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \Leftrightarrow \begin{cases} T'(t) + \alpha\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöstä on päästy kahteen tavalliseen differentiaaliyhtälöön, joista ratkaistaan ensin alempi yhtälö. Esityksestä (5.35) on ilmeistä, että  $X(x) = e^{rx}$  voisi olla ratkaisu. Tällä sijoituksella saadaan

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{rx} + \lambda e^{rx} = e^{rx}(r^2 + \lambda) = 0,$$

joka pitää paikkansa täsmälleen silloin, kun *karakteristinen yhtälö*  $r^2 + \lambda = 0$  toteutuu, eli kun  $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ . Koska  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  on lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö, *superpositioperiaatteen* mukaan mikä tahansa kahden ratkaisun lineaarikombinaatio on myös ratkaisu. Tällä perusteella

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (5.36)$$

toteuttaa parin (5.35) alemman yhtälön. Tälle funktiolle  $X(x)$  pätee reunaehdot (5.33), joiden avulla saadaan ratkaisua täsmennettyä.

$\lambda = 0$ : Tässä tapauksessa parin (5.35) alempi yhtälö supistuu muotoon  $X''(x) = 0$ , joten  $X(x) = Ax + B$ . Reunaehdoista kuitenkin seuraa, että  $X(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$ , jonka jälkeen  $X(l) = 0$  implikoi  $A = 0$ , joka johtaa triviaaliratkaisuun  $u(x, t) = 0$ .

$\lambda < 0$ : Merkitään  $\lambda = -\omega^2 < 0$ . Nyt (5.36) saa muodon

$$X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}.$$

Tästä päästään reunaehtojen kautta yhtälöpariin

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\omega l} + Be^{-\omega l} = 0. \end{cases}$$

Sijoittamalla alempaan yhtälöön  $B = -A$ , saadaan  $A(e^{\omega l} - e^{-\omega l}) = 0$ , joka toteutuu vain, kun  $A = 0$ . Tämäkin vaihtoehto johtaa siis triviaaliratkaisuun.

$\lambda > 0$ : Sijoituksella  $\lambda = \omega^2 > 0$ , saadaan funktiolle  $X(x)$  lauseke

$$X(x) = Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}.$$

Tällä kertaa reunaehdoista seuraa  $X(0) = A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$  ja  $X(l) = A(e^{i\omega l} - e^{-i\omega l}) = 2iA \sin \omega l = 0$ , joka toteutuu silloin, kun  $\omega = n\frac{\pi}{l}, n \in \mathbb{N}$ .

Ainoa mielenkiintoinen ratkaisu saadaan siis tapauksessa  $\lambda > 0$ , jolloin  $B = -A$  ja siten (5.36) saa muodon

$$X(x) = 2iA \sin \omega x.$$

Lisäksi, koska  $\omega$  sai loputtoman määrän mahdollisia arvoja, ei saatu ainoastaan yhtä ratkaisua, vaan loputon jono ratkaisuja

$$X_n(x) = 2iA_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aikariippuvan puoliskon ratkaiseminen on nyt helppoa. Vakio  $\lambda$  on jo rajattu positiiviseksi, tarkemmin  $\lambda = \omega^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , ja parin (5.35) yleimmästä yhtälöstä saadaan helposti

$$T(t) = Ce^{-\alpha \lambda t}. \quad (5.37)$$

Sijoitetaan vakion  $\lambda$  arvo tähän, jolloin saadaan jälleen loputon määrä ratkaisuja  $T_n(t)$ . Kaikenkaikkiaan kasassa on siis ratkaisujen  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = 2iA_n C_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$  jono. Koska alkuperäinen osittaisdifferentiaaliyhtälö on lineaarinen ja homogeeninen, saadaan jälleen superpositioperiaatteen nojalla

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}, \quad (5.38)$$

missä  $b_n$  on jokin vakio. Tähän mennessä ei kuitenkaan olla hyödynnetty alkuehtoa (5.31) lainkaan, joten sillä saadaan ratkaisu viimeisteltyä:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (5.39)$$

Pieni ongelma on se, että sinifunktio ei ole jaksollinen välillä  $[0, l]$ . Tästä selvittää jälleen samanlaisella menettelyllä kuin edellä. Määritellään funktiolle  $f$  pariton jatko siten, että

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{kun } -l \leq x < 0.$$

Mikäli  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $(-l, l)$  (joka realistisessa lämpötilajakaumassa pitää varmasti paikkansa), voidaan funktiolle  $f$  muodostaa Määritelmän 3.1.3 mukaisesti siniterminen Fourier-sarja, jonka kertoimet saadaan kaavalla

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Näiden vakioiden avulla muodostettu siniterminen Fourier-sarja suppenee arvoon  $f(x)$ , kun  $-l \leq x \leq l$ . Taaskaan ei loppujen lopuksi olla kiinnostuneita siitä, mitä negatiivisen  $x$ -akselin puolella tapahtuu, vaan oleellista on se, että välillä  $[0, l]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

joten ratkaisu  $u$  on lopullisessa muodossaan, kuten viimeksikin,

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy \right] \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}, \quad (5.40)$$

missä  $0 \leq x \leq l$  ja  $t \geq 0$ .

Ratkaisun suppenemista on syytä tarkastella vielä erikseen. Tätä varten esitellään lyhyesti *Weierstrassin M-testi*. Sen mukaan, jos  $f_n$  on jono joukossa  $A$  määriteltyjä funktioita ja kaikilla luvuilla  $x \in A$  ja  $n \geq 1$  pätee  $|f_n(x)| \leq M_n$ , ja jos lisäksi  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  on suppeneva sarja, niin  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  suppenee tällöin tasaisesti.

Fourier-kertoimien jono  $b_n$  on rajoitettu, joten  $|b_n| \leq M \in \mathbb{R}$ . Ne jopa lähenevät nollaa, kun  $n \rightarrow \infty$ . Tällöin sarjaa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \quad (5.41)$$

voidaan kätevästi arvioida. Sarjan termeille nimittäin pätee, kun  $t \geq a > 0$ ,

$$|u_n(x, t)| \leq M e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a} = M_n$$

ja  $\sum M_n$  on suppeneva sarja. Siispä Weierstrassin  $M$ -testin mukaan (5.41) suppenee tasaisesti, kun  $0 \leq x \leq l$  ja  $t > 0$ . Voidaan myös osoittaa, että  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ , mutta se on konstikkaampaa, ja sivuutetaan tässä yhteydessä. Lisäksi on tietysti hyvä huomata, että (5.41) on myös riittävän monta kertaa differentioituva, ja myös derivoimalla saadut sarjat suppenevat tasaisesti. Aikaderivaatta sisältää termin  $-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , joka kasvaa hitaammin kuin  $e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$ . Paikan toinen derivaatta antaa termin  $-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , joten molemmille derivaatoille löytyy helposti dominoiva suppeneva sarja, joka takaa tasaisen suppenemisen. [7, ss.9-12 ja ss.137-139]

Ratkaisun luonnetta käytännössä on helppo hahmotella, kun aika kuluu eteenpäin. Suurilla  $t$ :n arvoilla eksponenttitermi vie sarjan termit nopeasti nolnaan jo pienillä indeksin  $n$  arvoilla. Se on täysin järkevää, sillä koska sauvan päät pidetään lämpötilassa  $0^\circ$ , tasoittuu koko sauvan lämpötila lopulta nolnaan asteeseen. Mielenkiintoinen kysymys on, millä tavalla ratkaisu  $u(x, t)$  muuttuu, jos myös sauvan päät eristetään, eikä sauvan ja ympäristön välillä tapahdu lainkaan lämmönsiirtoa.

### 5.2.3 Täysin eristetty äärellinen sauva

Ongelman asettelussa tapahtuu nyt muutos reunaehtojen suhteen. Koska lämmönsiirtoa sauvan päissä ei tapahdu, on tällöin reunaehtoina  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ . Itse osittaisdifferentiaaliyhtälö (5.14), sekä alkuehto (5.16) pysyvät samoina. Jos oletetaan, että  $u(x, t)$  on separoituva, ja menetellään kuten edellä, saadaan ongelma muotoon

$$T'(t) + \alpha \lambda T(t) = 0, \quad (5.42)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (5.43)$$

missä paikan funktiolla on lauseke

$$X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda}x} + B e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Reunaehtojen soveltamiseksi tutkitaan nyt paikkafunktion derivaattaa:

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda} \left( A e^{\sqrt{-\lambda}x} - B e^{-\sqrt{-\lambda}x} \right). \quad (5.44)$$

$\lambda = 0$ : Tämä johtaa taas yhtälöstä (5.43) suoraan yhtälöön  $X''(x) = 0$ , joten  $X(x) = Ax + B$ . Nyt kuitenkin reunaehdoista  $X'(0) = X'(l) = A = 0$

seuraa, että  $B$  voi olla mielivaltainen. Tällöin myös yhtälöstä (5.42) seuraa, että  $T(t) = \text{jokin vakio}$ . Merkitään tässä tapauksessa ratkaisua ilmiselvistä syistä  $X(x)T(t) = \frac{a_0}{2}$ .

$\lambda < 0$ : Tälläkin kertaa oletuksesta  $\lambda = -\omega^2 < 0$  päädytään ainoastaan triviaaliratkaisuun, joten voidaan jättää tämä vaihtoehto huomiotta.

$\lambda > 0$ : Jos merkitään  $\lambda = \omega^2 > 0$ , saadaan paikkafunktion derivaatalle (5.44) lauseke

$$X'(x) = i\omega (Ae^{i\omega x} - Be^{-i\omega x}).$$

Edelleen reunaehdoista saadaan

$$\begin{aligned} X'(0) &= i\omega(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \\ X'(l) &= i\omega A(e^{i\omega l} - e^{-i\omega l}) = 0, \end{aligned}$$

missä alemmalle riville on jo sijoitettu  $A = B$ . Hylätään taas vaihtoehto  $A = 0$ , joka johtaisi triviaaliratkaisuun. Tällöin on oltava

$$\begin{aligned} i\omega A(e^{i\omega l} - e^{-i\omega l}) &= -2\omega A \sin \omega l = 0 \\ \Leftrightarrow \omega &= n\frac{\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{5.45}$$

joka jälleen johtaa toivottuun ei-triviaaliratkaisuun.

Oletuksella  $\lambda = \omega^2 > 0$  saadaan siis  $A = B$  ja yhtälö (5.44) saa muodon

$$X'(x) = -2A\omega \sin \omega x,$$

josta integroimalla saadaan

$$X(x) = 2A \cos \omega x. \tag{5.46}$$

Sijoittamalla tähän  $\omega = \frac{n\pi}{l}$  saadaan jälleen loputon määrä ratkaisuja

$$X_n(x) = 2A \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tällä kertaa ei sovi unohtaa tapausta  $n = 0$  (eli  $\lambda = 0$ ), sillä sieltä saatiin ratkaisu  $X(x) = \frac{a_0}{2}$ .

Kuten edellä, sopivia funktioita yhtälön (5.42) ratkaisuiksi ovat kaikki funktiot

$$T_n(t) = C_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Tällöin saadaan taas superpositioperiaatteen nojalla ratkaisufunktioksi  $u(x, t)$  kaikkien yksittäisratkaisujen lineaarikombinaatio

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}. \quad (5.47)$$

Alkuehdosta  $u(x, 0) = f(x)$  saadaan tällä kertaa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Nyt olisi mukavaa, jos vakiot  $a_n$  voitaisiin laskea Fourier-kertoimien kaavalla, ja tätä varten määritellään funktiolle  $f$  *parillinen jatko*:

$$f(x) = f(-x), \quad \text{kun } -l \leq x < 0.$$

Tällaiselle funktiolle  $f$  voidaan muodostaa Fourier-sarja välillä  $[-l, l]$ , mikäli  $f$  toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä  $[0, l]$ . Funktion  $f$  parillisuuden seurauksena saadaan Määritelmän 3.1.3 mukainen kosiniterminen Fourier-sarja, jonka kertoimet saadaan kaavasta

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \cos \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Lopullinen ratkaisu on tällä kertaa

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(y) dy + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l f(y) \cos \frac{n\pi y}{l} dy \right] \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t},$$

missä  $0 \leq x \leq l$  ja  $t \geq 0$ .

Ilmiselvin muutos aiempaan on tietenkin ratkaisufunktion muuttuminen sinitermisestä kosinitermiseksi Fourier-sarjaksi. Tälläkin kertaa eksponentti-termi vie sarjan termit nopeasti nolnaan, kun  $t$  on suuri. Sauvan lämpötila ei kuitenkaan mene tällöin nolnaan, vaan  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{a_0}{2}$ . Kuten luvussa 3 todettiin,  $\frac{a_0}{2}$  on funktion keskiarvo tarkasteluvälillä. Tämä käy hyvin yhteen intuitiivisen oletuksen kanssa, että ajan kuluessa, koska lämpö ei pääse siirtymään sauvasta pois, se jakautuu tasaisesti koko sauvaan. [7, ss.139-141]

### 5.3 Muita sovelluksia

Käytännön kannalta ajateltuna Fourier-sarjoja voidaan kuvata jaksollisen funktion  $f$  jakamiseksi harmonisiin komponentteihinsa, joilla on amplitudit

$a_n$  ja  $b_n$ , sekä taajuus  $\frac{n\pi}{L}$ . Fourier-sarjan muodostamisella saadaan siis selvitettyä, minkälaisista sini- ja kosini-funktioiden amplitudeista ja taajuuksista funktio  $f$  muodostuu, eli saadaan muodostettua amplitudi- ja taajuusspektrit kyseiselle funktiolle. Spektrit ovat Fourier-sarjojen tapauksessa diskreettejä, ja kahden perättäisen komponentin taajuuksien ero on  $\Delta\omega = \frac{n(+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$ . Fourier-analyysin soveltaminen koko reaaliakselilla määritelyihin epäjaksollisiin funktioihin johti Fourier-muunnoksiin. Taajuuksien kannalta tämä tarkoittaa sitä, että äskeinen kahden komponentin välinen taajuusero  $\Delta\omega$  supistuu äärettömän pieneksi. Tällöin 'ero' kahden perättäisen taajuuden välillä on  $d\omega$  ja taajuusspektristä, kuin myös amplitudispektristä, tulee siten jatkuva.

Fourier-sarjoille ja -muunnoksille löytyy molemmille omat käyttötarpeensa. Luontevinta on käyttää Fourier-sarjoja, kun tarkasteltava funktio on jaksollinen, ja Fourier-muunnoksia, kun funktio ei ole jaksollinen, ja häviää äärettömyydessä.

Eri aloilla suureella  $y$  ja sen muuttumisella ajan suhteen,  $y(t)$ , kuvataan eri asioita. Signaalinkäsittelyssä  $y$  kuvaa usein jännitettä tai virtaa, ja funktiota  $y(t)$  kutsutaan signaaliksi. Fourier-sarjat tarjoavat tehokkaan keinon esimerkiksi suodinten käsittelyyn, jotka blokkavat tai päästävät tietyn rajan ylittäviä taajuuksia. Signaalin Fourier-analysointi taajuuskomponentteihinsa on yksinkertainen tapa nähdä, mitkä komponentit pääsevät läpi, ja miltä ulostulosignaali tällöin näyttää. Toisaalta taas jos systeemin syötetään signaali  $x(t)$ , saadaan ulostulona signaali  $y(t) = h(t) * x(t)$ , joka siis voidaan laskea systeemin *impulssivasteen* ja sisääntulosignaalin konvoluutiona. Laske on usein helpompi suorittaa Fourier-muunnosten avulla taajuustasossa, ja palata sen jälkeen käänteismuunnoksella aikatasoon.

Optiikassa  $y(t)$  kuvaa oskilloivaa sähkökenttää, joka on olemassa jokaisessa pisteessä, mistä valo kulkee. Monokromaattisen valon tapauksessa suure  $y$  värähtelee harmonisesti, kun taas eri aallonpituuksista koostuva säteily synnyttää epäharmonista värähtelyä. Funktion  $y(t)$  Fourier-analyysi on matemaattinen vastine sille, että valon eri aallonpituudet erotellaan toisistaan ja muodostetaan värispektri, joka fysikaalisesti tapahtuisi prisman avulla. Sanan *spektri* käyttö Fourier-analyysissä on periytynyt juuri optiikan termistöstä.

Akustiikassa  $y(t)$  kuvaa painetta, joka vaihtelee aina siellä, missä ääniaalto etenee. Harmonisesti värähtelevä  $y(t)$  vastaa puhdasta säveltä, ja epäharmonista värähtelyä vastaavan äänen Fourier-analysointi on matemaattinen vastine äänen jakamiselle puhtaisiin säveliin.

Sovelluksia löytyy myös tutkittaessa muita aaltoja, kuten seismiset aallot, aallot vedessä, radioaallot ja kvanttimekaaniset aallot.

Lisää sovelluksia löytyy, kun korvataan aikamuuttuja  $t$  tilamuuttujalla  $x$ ,



jolloin myös taajuus korvautuu paikkataajuudella tai *aaltoluvulla*  $\nu$ . Tutkittaessa valon diffraktiota yhdensuuntaisista raoista, voidaan rakosysteemille muodostaa läpäisyfunktio  $t(x)$ , jonka Fourier-analysointi antaa lähtökohdan diffraktoituneen valon intensiteettijakauman laskemiseksi. [3, ss. 9-10]

## Viitteet

- [1] Carslaw, H. S. *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals*. Dover : Dover Publications, 1930.
- [2] Champeney, D.C. *A Handbook of Fourier Theorems*. Cambridge : Cambridge University Press, 1987.
- [3] Champeney, D.C. *Fourier Transforms in Physics*. Bristol : Adam Hilger Ltd, 1985.
- [4] Dym, H. *Fourier series and integrals*. New York, NY : Academic Press, 1972.
- [5] Goldberg, R. R. *Fourier Transforms*. Cambridge : University Press, 1961.
- [6] Sneddon, I. N. *Fourier Transforms*. New York : Dover, 1995.
- [7] Vretblad, A. *Fourier Analysis and Its Applications*. New York : Springer, cop. 2003.
- [8] Zygmund, A. *Trigonometric Series, vol. I*. Cambridge : Cambridge University Press, 1959.
- [9] <http://www.oulu.fi/inverse/files/series.pdf>