

Konservatiivisten mekaanisten systemien tasapainopisteet

Pro gradu-tutkielma
Ville Hautamäki
165221
Itä-Suomen yliopisto
10. toukokuuta 2012

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Differentiaaliyhtälöiden teoriaa	2
2.1	Johdantoa differentiaaliyhtälöiden teoriaan	2
2.2	Differentiaaliyhtälöryhmä	2
2.3	Jacobin matriisi	3
2.4	Systeemien stabiilisuuksista	4
3	Variaatiolaskennan menetelmistä	6
3.1	Johdantoa variaatiolaskentaan	6
3.2	Funktionaalin ensimmäinen variaatio	7
3.3	Eulerin yhtälö	11
3.4	Eulerin yhtälön toinen muoto	12
3.5	Useiden riippuvien muuttujien funktiot	13
4	Konservatiiviset systeemit	15
4.1	Johdantoa konservatiivisiin systeemeihin	15
4.2	Konservatiivinen voima ja potentiaali	15
4.3	Hamiltonin periaate	19
4.4	Systeemin vapausasteet ja sidokset	20
4.5	Lagrangen liikeyhtälöt yleistetyissä koordinaateissa	22
4.6	Liapunovin funktio	31

1 Johdanto

Tässä työssä tutkitaan konservatiivisten mekaanisten systeemien tasapainopisteitä. Tarkasteltavia systeemejä ovat heiluri ja kaksoisheiluri. Lisäksi tutkitaan tapausta, jossa massapiste on pakotettu liikkumaan mielivaltaisella käyrällä tasossa.

Tutkielman toisessa luvussa esitetään keskeisiä määritelmiä ja tuloksia liittyen differentiaaliyhtälöryhmiin. Luvun keskeisiä käsitteitä ovat tasapainopiste, linearisointi ja stabiilisuus.

Kolmannessa luvussa käsitellään variaatiolaskentaa. Tämän luvun pääpaino on funktionaalissa ja sen ääriarvoissa. Havaitaan, että funktionaali saa ääriarvon kun ns. Euler-Lagrangen yhtälö toteutuu.

Tutkielman neljännen luvun yksi keskeisimmistä käsitteistä on Hamiltonin periaate. Yhdistämällä kolmannessa luvussa johdettu Euler-Lagrangen yhtälö ja Hamiltonin periaate, voidaan johtaa systeemin Lagrangen liikeyhtälöt. Tällöin saadaan muodostettua systeemeille liikeyhtälöt ja pystytään tekemään stabiilisuustarkastelut halutuille systeemeille. Analysointiin käytetään Jacobin matriisin ominaisarvoja ja niihin liittyviä tuloksia, sekä Liapunovin lausetta.

2 Differentiaaliyhtälöiden teoriaa

2.1 Johdantoa differentiaaliyhtälöiden teoriaan

Esitetään seuraavassa tarvittavat tarvittavia tietoja differentiaaliyhtälöistä ja differentiaaliyhtälöryhmistä. Differentiaaliyhtälöryhmät ovat ajan mukaan muuttuvia systeemejä ja tästä edespäin pidetään tunnettuna merkinnät

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ ja } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

2.2 Differentiaaliyhtälöryhmä

Differentiaaliyhtälöryhmä on toisiinsa liittyvien differentiaaliyhtälöiden koelma. Esimerkiksi ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoinen systeemi, joka sisältää n kappaletta yhtälöitä on muotoa

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Funktiot f_k ovat reaaliarvoisia funktioita, jotka sisältävät $n + 1$ muuttujaa: x_1, x_2, \dots, x_n ja t . Oletetaan lisäksi, että $f_k \in C^\infty(\Omega)$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, kaikilla $k = 1, 2, \dots, n$. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisella funktiolla f_k kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Merkitsemällä $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, voidaan systeemi kirjoittaa muodossa

$$X' = F(t, X),$$

missä

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Systeemin sanotaan olevan *autonominen*, jos mikään funktiosta f_k ei riipu muuttujasta t . Tällöin systeemi yksinkertaistuu muotoon $X' = F(X)$. [8, ss21-22]

Määritelmä 2.2.1. Jos on olemassa vektori v , jolle $F(v) = 0$, sanotaan että v on systeemin *tasapainopiste*. [8, s22]

2.3 Jacobin matriisi

Joissakin tapauksissa epälineaarisen systeemin tasapainopisteiden luonne voidaan selvittää linearisoimalla systeemi ja tarkastella Jacobin matriisiin ominaisarvoja.

Määritelmä 2.3.1. Olkoot $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $p \in \mathbb{R}^n$. Funktion f *Jacobin matriisi* pisteessä p on

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Olkoon p systeemin tasapainopiste ja tehdään pisteeseen pieni lisäys h . Tällöin Taylorin nojalla

$$f(p+h) = f(p) + Df(p)h + \varepsilon(h)||h||^2 \approx Df(p)h,$$

missä $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Tietyissä tapauksissa riittävän pienessä tasapainopisteen ympäristössä linearisoitu systeemi antaa tietoa alkuperäisen systeemin tasapainopisteen laadusta. [1, ss68-69]

Esimerkki 2.3.2. Tarkastellaan epälineaarista autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} x_1' &= \beta x_1 + x_1(\sin^2 x_2 - \beta x_2^3) \\ x_2' &= -x_2 \end{aligned}$$

missä $\beta \in \mathbb{R}$. Merkitään $X = (x_1, x_2)^T$. Tällöin linearisoitu systeemi on

$$X' = Df(p)X = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X,$$

josta edelleen saadaan

$$\begin{aligned} x_1' &= \beta x_1 \\ x_2' &= -x_2 \end{aligned}$$

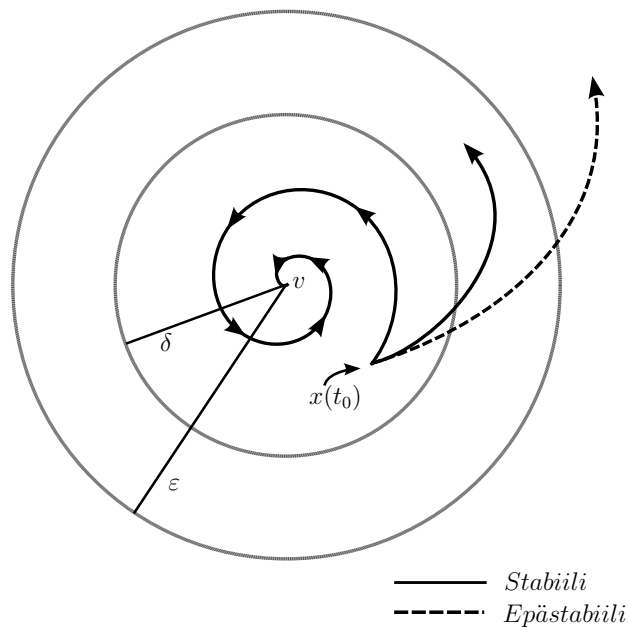
2.4 Systemien stabiilisuuksista

Kun systeemin tasapainopisteet voidaan määrittää, ne voidaan jaotella niiden luonteen mukaisesti seuraavalla tavalla:

Määritelmä 2.4.1. Olkoon $v \in \mathbb{R}^n$ systeemin $X' = F(X)$ tasapainopiste.

- Systeemin tasapainopisteen sanotaan olevan *Liapunov stabiili*, jos jostaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että $\|X(t_0) - v\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - v\| < \varepsilon$ kaikilla $t > t_0$.
- Systeemin tasapainopisteen sanotaan olevan *asymptoottisesti stabiili*, jos se on stabiili ja $X(t) \rightarrow v$, kun $t \rightarrow \infty$.
- Jos systeemin tasapainopiste ei ole stabiili, se on *epästabiili*. [3][s84]

Kahden ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön muodostaman systeemin tapauksessa stabiilisuuksia voidaan hyvin havainnollistaa seuraavan kuvan avulla:



Kuva 1: Stabiili, asymptoottisesti stabiili ja epästabiili käyttäytyminen.

Suora määritelmän käyttäminen tasapainopisteanalyysissä on erittäin työlästä. Tämän takia esitetään seuraavat lauseet, jotka edellyttävät vain Jacobin matriisin ominaisarvojen tutkimisen.

Lause 2.4.2. *Olkoon v systeemin $X' = F(X)$ tasapainopiste. Jos Jacobin matriisin kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat aidosti negatiivisia, v on asympotoottisesti stabiili. Jos vähintään yhden ominaisarvon reaaliosa on aidosti positiivinen, v on epästabiili. [8][s299]*

Lause 2.4.3. *Olkoon v systeemin $X' = F(X)$ tasapainopiste ja $X' = F_L(X)$ tätä vastaava linearisoitu systeemi. Tällöin jos linearisoidun systeemin tasapainopiste on (stabiili) keskus, alkuperäisen systeemin tasapainopiste on joko (stabiili) keskus tai (stabiili tai epästabiili) fokus. [6][s521]*

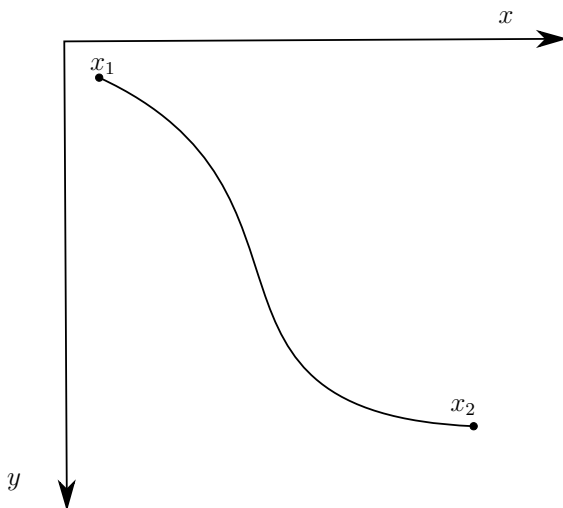
Huomautus 2.4.4. Tässä työssä ei keskitytä niinkään tasapainopisteiden tarkempaan luokitteluun, vaan siihen ovatko ne stabiileja vai epästabiileja. Tarkempi tasapainopisteiden luokittelu löytyy esimerkiksi kirjasta [6][ss501-515].

3 Variaatiolaskennan menetelmistä

3.1 Johdantoa variaatiolaskentaan

Variaatiolaskennan voidaan katsoa alkaneen Jacques (Jacob) Bernoullin vuonna 1696 esittämästä brachistochronongelmasta. Sana *brachistos* tarkoittaa lyhyintä ja sana *chronos* viittaa aikaan. Siinä ongelmana on löytää tason \mathbb{R}^2 käyrä, jota pitkin massapiste liikkuu painovoimakentässä kitkatta annetusta alkupisteestä loppupisteeseen mahdollisimman lyhyessä ajassa.

Valitaan koordinaatisto siten, että x -akseli osoittaa vaakasuorassa oikealle ja y -akseli pystysuunnassa alaspäin.



Kuva 2: Brachistochronongelma.

Merkitään käyrän alkupistettä x_1 ja loppupistettä x_2 . Oletetaan lisäksi, että käyrän y -koordinaatti on yksikäsitteinen jatkuvasti derivoituva muuttujan x funktio ja merkitään $y = y(x)$, kun $x_1 \leq x \leq x_2$.

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - mgy_1 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy, \quad (3.1)$$

missä g on putoamiskiihtyvyys ja m on massapisteen massa. Nyt kaavasta (3.1) saadaan

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2g(y - y_1)} = \sqrt{2g\sqrt{y - C}},$$

missä $C = y_1 - \frac{v_1^2}{2g}$. Olkoon nyt t ajanhetki, jolloin massapiste liikkuessaan pitkin käyrää $y(x)$ on pisteessä (x, y) . Tällöin pätee

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (3.2)$$

Edelleen käyttäen infinitesimaalisia merkintöjä voidaan pisteessä (x, y) kirjoittaa.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Tällöin kaavoista (3.1) ja (3.2) seuraa, että massapisteen käyttämä aika sen siirtyessä pitkin käyrää $y(x)$ pisteestä (x_1, y_1) pisteeseen (x_2, y_2) on

$$t_{1 \rightarrow 2} = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y - C}}. \quad (3.3)$$

Brachistochronongelman ratkaiseminen edellyttää nyt sellaisen funktion $y(x)$ konstruointia, joka minimoi integraalin (3.3). Ratkaisun ongelmalle on aikanaan esittänyt Jacques Bernoulli, sekä hänen veljensä Jean (Johann) Bernoulli. Myös Isaac Newton ja Gottfried W. Leibniz ovat aikanaan esittäneet oman ratkaisunsa probleemaan. Ratkaisu kyseiseen ongelmaan löytyy esimerkiksi kirjasta [7][ss212-214]. [7][ss195-197]

3.2 Funktionaalien ensimmäinen variaatio

Tarkastellaan seuraavaksi kuinka voidaan mitata funktioiden pituuksia ja niiden välisiä etäisyyksiä. Määritellään ensin funktioavaruuden normi ja metriikka.

Määritelmä 3.2.1. Funktiota $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ sanotaan funktioavaruuden X normiksi, jos pätee

- a) $\|f\| \geq 0$ kaikille $f \in X$,
- b) $\|f\| = 0$ jos ja vain jos $f = 0$,
- c) $\|tf\| = |t| \|f\|$ kaikilla $f \in X$ ja $t \in \mathbb{R}$,
- d) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ kaikilla $f, g \in X$. [15][ss165-166]

Määritelmä 3.2.2. Olkoon $f, g \in X$. Jos pätee

M1) $d(f, g) = 0$ jos ja vain jos $f = g$,

M2) $d(f, g) = d(g, f)$ kaikilla $f, g \in X$,

M3) $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ kaikilla $f, g, h \in X$,

niin sanotaan, että d on *metriikka*. Paria (X, d) sanotaan *metriseksi avaruudeksi*. [5][s13]

Määritelmä 3.2.3. Määritellään funktioluokka

$$S = \{y \in C^2[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0 \text{ ja } y(x_1) = y_1\}$$

varustettuna metriikalla $d(y, z) = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{ \|y - z\|_\infty + \|y' - z'\|_\infty \}$. Tällöin (S, d) on metrinen avaruus.

Määritelmä 3.2.4. Määritellään funktioluokka

$$H = \{\eta \in C^2[x_0, x_1] : \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\}$$

varustettuna normilla $\|x\| = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{ \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \}$. Tällöin $(H, \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

Määritelmä 3.2.5. Funktiota

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx,$$

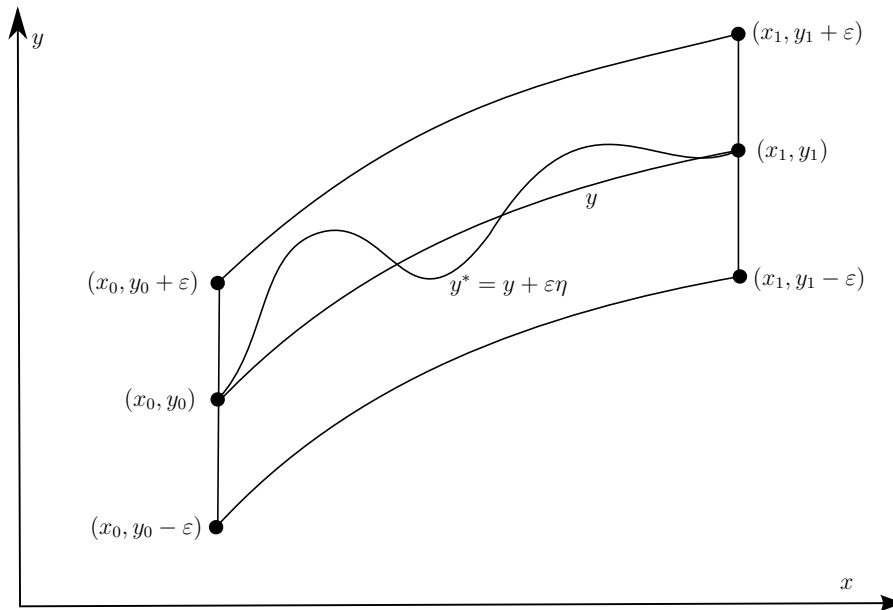
missä $J : X \mapsto \mathbb{R}$, sanotaan *funktionaaliksi*. Muuttujan x sanotaan olevan *riippumaton muuttuja* ja y sanotaan olevan *riippuva muuttuja*.

Määritelmä 3.2.6. Olkoot $J : X \mapsto \mathbb{R}$ funktionaali määritelty metrisessä avaruudessa $(X, \|\cdot\|)$ ja $S \subset X$.

- a) Funktio $f \in S$ antaa integraalille J *lokaalin maksimin* jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $J(y^*) - J(y) \leq 0$ kaikilla $y^* \in S$ joille pätee $\|y^* - y\| < \varepsilon$
- b) Funktio $f \in S$ antaa integraalille J *lokaalin minimin*, jos tällöin $-J$ on lokaali maksimi. [4][s28]

Edellä esitettyä funktiota $y^* \in S$ sanotaan alkuperäisen funktion y *häiriöksi*. Erityisesti, jos $y^* \in S$ ja $\|y^* - y\| < \varepsilon$, niin tällöin on olemassa $\eta \in X$ siten, että

$$y^* = y + \varepsilon \eta. \tag{3.4}$$



Kuva 3: Funktion y häiriö.

Olkoot $J : C^2[x_0, x_1] \mapsto \mathbb{R}$ ja funktiolla f toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Tutkitaan milloin funktionaali

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx, \quad (3.5)$$

saavuttaa ääriarvon.

Oletetaan, että y antaa funktionaalille J ääriarvon joukossa S . Oletetaan lisäksi, että kysymys on lokaalista maksimista. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $J(y^*) - J(y) \leq 0$ kaikilla $y^* \in S$ joille pätee $\|y^* - y\| < \varepsilon$. Tällöin jokaista $y^* \in S$ vastaa $\eta \in H$ siten, että $y^* = y + \varepsilon\eta$, ja pienelle ε voidaan kirjoittaa Taylorin kehitelmä

$$\begin{aligned} f(x, y^*, (y^*)') &= f(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') \\ &= f(x, y, y') + \varepsilon \left\{ \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
J(y^*) - J(y) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y^*, (y^*)') dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(f(x, y, y') + \varepsilon \left\{ \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} + O(\varepsilon^2) \right) - f(x, y, y') \right\} dx \\
&= \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + O(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon \delta J(\eta, y) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

missä $O(\varepsilon^2) = k\varepsilon^2$, $k \in \mathbb{R}$ on vakio. Vakio on olemassa, sillä $y, y^* \in C^2[x_0, x_1]$. Nyt jakamalla yhtälö (3.6) puolittain luvulla ε , saadaan

$$\frac{J(y + \varepsilon\eta) - J(y)}{\varepsilon} = \delta J(\eta, y) + k\varepsilon. \tag{3.7}$$

Nyt ottamalla puolittain raja-arvo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ yhtälöstä (3.7), saadaan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \varepsilon\eta) - J(y)}{\varepsilon} = \delta J(\eta, y).$$

Saatu lauseke on analoginen raja-arvon määritelmän kanssa ja lausekkeen voidaankin ajatella kuvaavan suunnattua derivaattaa pisteessä y funktion $\varepsilon\eta$ suuntaan.

Suuretta

$$\delta J(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \tag{3.8}$$

sanotaan funktionaalien J ensimmäiseksi variaatioksi. Selvästi, jos $\eta \in H$ niin myös $-\eta \in H$ ja $-\delta J(\eta, y) = -\delta J(-\eta, y)$. Riittävän pienelle $\varepsilon > 0$ ensimmäinen variaatio määrittää lausekkeen $J(y^*) - J(y)$ merkin, paitsi jos $\delta J(\eta, y) = 0$ kaikilla $\eta \in H$. Ehto, että $J(y)$ saavuttaa lokaalin maksimin joukossa S , on kuitenkin se että $J(y^*) - J(y)$ ei vaihda merkkiä millään $y^* \in S$, joille $\|y^* - y\| < \varepsilon$. Siis, jos $J(y)$ on lokaali maksimi niin

$$\delta J(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0. \tag{3.9}$$

Olemme osoittaneet, että jos $y \in S$ antaa funktionaalille J ääriarvon, yhtälön (3.9) tulee toteutua. Käänteinen implikaatio ei kuitenkaan päde: se, että yhtälö (3.9) toteutuu, ei välttämättä takaa sitä että y antaa funktionaalille

J lokaalin ääriarvon.

Jos y toteuttaa yhtälön (3.9) kaikilla $\eta \in H$, sanotaan että $J(y)$ on *stationaarinen*. Funktiota y sanotaan funktionaalnin *ekstremaaliksi* (vaikkakaan se ei antaisi lokaalia ääriveroa funktionaalille). [4][ss28-30]

Huomautus 3.2.7. Ensimmäisen variaation merkintä $\delta J(y)$ voidaan myös kirjoittaa $\delta \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$. Tällöin ehto (3.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0.$$

3.3 Eulerin yhtälö

Tarkastellaan vielä yhtälöä (3.9). Osittaisintegroidaan yhtälöä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \delta J(\eta, y) &= \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dx + \int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dx + \underbrace{\eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0, \text{ sillä } \eta \in H} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nyt

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y''$$

ja koska $f \in C^2$, nähdään että mille tahansa $y \in C^2[x_0, x_1]$ funktio $E : [x_0, x_1] \mapsto \mathbb{R}$, missä

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right),$$

on jatkuva välillä $[x_0, x_1]$. [4][ss28-31]

Lause 3.3.1. Olkoon $J : C^2[x_0, x_1] \mapsto \mathbb{R}$ funktionaali muotoa

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx,$$

missä $f \in C^2$ ja $x_0 < x_1$. Jos $y \in S$ antaa funktionaalille J ekstremaalín, niin

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.11)$$

kaikille $x \in [x_0, x_1]$. Yhtälöä (3.11) sanotaan Eulerin yhtälöksi. [4][s33]

3.4 Eulerin yhtälön toinen muoto

Tarkastellaan vielä yhtälöä (3.10). Joskus on tarpeen käyttää toista muotoa Eulerin yhtälöstä. Merkitään ensin

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(x, y, y') \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nyt

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

johon sijoittamalla yhtälöstä (3.12) $y''(\partial f/\partial y')$ suhteen ratkaistuna saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \\ &= \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \underbrace{\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{=0}. \end{aligned}$$

Täten voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Tätä niin sanottua Eulerin yhtälön toista muotoa voidaan käyttää tapauksissa joissa f ei riipu eksplisiittisesti muuttujasta x ja $\partial f/\partial x = 0$. Tällöin

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{vakio}.$$

[13][s180]

3.5 Useiden riippuvien muuttujien funktiot

Edellä esitettyä Eulerin yhtälöä voidaan käyttää tapauksessa, jossa etsitään yhtä funktiota $y(x)$, jotta funktionaali saavuttaisi ääriarvon. Usein kuitenkin f on useamman muuttujan funktio:

$$f = f(y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, x),$$

tai yksinkertaisemmin

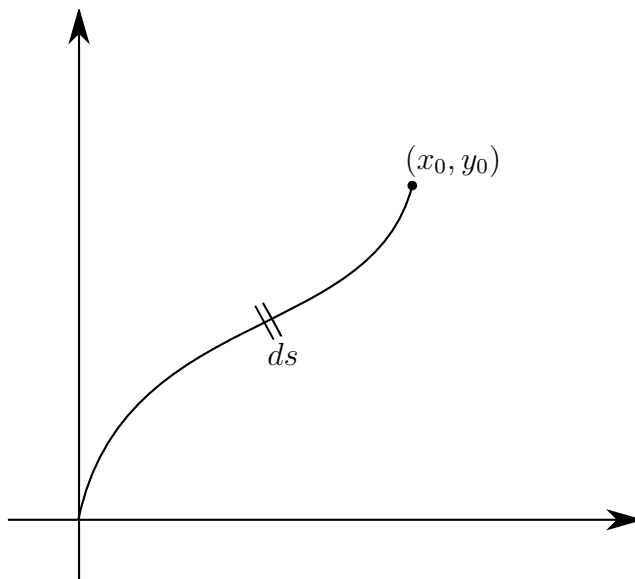
$$f = f(y_i, y_i', x) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tällöin yhtälö (3.11) voidaan kirjoittaa yleisemmin muodossa

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

[13][s82]

Esimerkki 3.5.1. Osoitetaan seuraavaksi, että tasossa \mathbb{R}^2 lyhyin etäisyys origosta pisteeseen (x_0, y_0) on pitkin suoraa viivaa. Merkitään etäisyyttä kirjaimella s , jolloin infinitesimaalisen pieni muutos matkassa on ds .



Kuva 4: Origin ja pisteen (x_0, y_0) välinen etäisyys.

Tällöin pätee

$$s = \int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} ds. \quad (3.15)$$

Edelleen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ja yhtälö (3.15) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dx \\ &= \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx. \end{aligned}$$

Merkitään $f = \sqrt{1 + (y')^2}$, jolloin päästään käyttämään Eulerin yhtälöä. Nyt $\partial f / \partial y = 0$, joten yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

ja $\partial f / \partial y' = a$, missä $a \in \mathbb{R}$. Täten

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} y' = a,$$

josta edelleen voidaan ratkaista

$$y' = a\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Korottamalla tämä puolittain toiseen potenssiin, saadaan

$$(y')^2 = a^2(1 + (y')^2)$$

ja voidaan kirjoittaa

$$(y')^2 = \frac{a^2}{1 - a^2} = b^2,$$

missä $b \in \mathbb{R}$. Nyt $y' = \frac{dy}{dx} = b$ ja $y = bx + c$. Huomioimalla integrointirajat $(0, 0) \rightarrow (x_0, y_0)$, saadaan lopulta $y = \frac{y_0}{x_0}x$, joka on pisteen (x_0, y_0) kautta kulkeva suora. [12][ss3-4]

4 Konservatiiviset systeemit

4.1 Johdantoa konservatiivisiin systeemeihin

Luonnossa mikään systeemi ei ole täysin konservatiivinen. Kuitenkin joissakin tapauksissa tutkittaessa reaali maailman systeemiä on riittävästi tutkia vastaavaa konservatiivista systeemiä, sillä siitä saadaan riittävästi tietoa.

Paljon tutkittu konservatiivinen systeemi on rajoitettu kolmen kappaleen ongelma. Siinä kaksi massiivista kappaletta kiertää toisiaan pitkin ympyräratoja ja kolmas, lähes massaton kappale, liikkuu niiden kanssa samassa tasossa. Tehtävänä on tällöin laskea kolmannen kappaleen rata. Osoittautuu, että radalla ei löydy mitään äärellistä lauseketta.

Ehkäpä mielenkiintoisin erikoisratkaisu ongelmaan on tutkia systeemin *Lagrangen pisteitä*. Näissä pisteissä kolmas kappale voi pysyä levossa suurien massojen suhteen. Kolme Lagrangen pistettä sijaitsee samalla suoralla suurien massojen kanssa. Nämä pisteet ovat epästabiileja: jos näissä pisteissä olevaan massaan kohdistuu häiriötä, se pakenee pois pisteestä. Sen sijaan kaksi muuta pistettä ovat stabiileja. Nyt puhuttaessa Jupiterin troijalaisista, puhutaankin asteroideista jotka ovat Jupiterin ja Auringon muodostaman systeemin stabiileissa Lagrangen pisteissä. Myös muilta aurinkokunnan planeetoilta on löydetty vastaavanlaisia asteroidikasaantumia. Lagrangen pisteiden käsittely tässä tutkiemassa sivuutetaan ja se löytyy esimerkiksi kirjasta [10][s123]. [16] & [9][s189]

4.2 Konservatiivinen voima ja potentiaali

Painovoimakenttää voidaan pitää lähes konservatiivisena voimakenttänä. Gravitaatiokentässä hiukkasen potentiaalienergian lisäys tai väheneminen riippuu vain hiukkasen korkeuden muutoksista verrattuna nollapotentiaaliin, ts. $U = mgh$, missä m on hiukkasen massa, g on gravitaatiokiihtyvyyden ja h on etäisyys nollapotentiaalitasosta. Hiukkasen siirtymä reitti ei siis vaikuta potentiaalienergian suuruuteen, ainoastaan alku- ja lopputilan etäisyys nollapotentiaalitasosta. Painovoimakenttä on approksimaatio Newtonin gravitaatiovoimasta

$$F = G \frac{m_1 m_2}{||r_1 - r_2||^2},$$

missä G on gravitaatiovakio, m_1 ja m_2 ovat kappaleiden massat, sekä $||r_1 - r_2||$ kappaleiden välinen etäisyys.

Määritelmä 4.2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Jos joukko A on avoin ja yhtenäinen, sitä sanotaan *alueeksi*. [11][s60,s77]

Määritelmä 4.2.2. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $F : A \mapsto \mathbb{R}^n$. Voimaa F sanotaan *konservatiiviseksi*, jos pätee

$$\oint_C F \cdot dr = 0. \quad (4.1)$$

Huomautus 4.2.3. Merkintä $\oint_C F \cdot dr$ tarkoittaa integrointia pitkin suljettua polkua C .

Lause 4.2.4. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $F : A \mapsto \mathbb{R}^n$ jatkuva. Tällöin olemassa differentioituva funktio $U : A \mapsto \mathbb{R}$ siten, että $F = -\nabla U$ jos ja vain jos

$$\oint_C F \cdot dr = 0$$

kaikille suljetuille poluille C . Funktiota U sanotaan funktion F potentiaaliksi. [2][s69]

Todistus. (\Rightarrow) Osoitetaan ensin funktion F käyräintegraalin tiestä riippumattomuus. Tästä seuraa se, että suljettu polkuintegraali pitkin sileää käyrää on nolla.

Olkoon E pisteestä r_a pisteeseen r_b kulkeva sileä suunnistettu kaari. Olkoon lisäksi $r : I \mapsto \mathbb{R}^n$, missä $I = \{t : a \leq t \leq b\}$, sen jatkuvasti derivoituva parametriesitys. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \int_E F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = - \int_a^b U(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= - \int_a^b (U \circ r)'(t) dt = U(r(a)) - U(r(b)) \\ &= U(a) - U(b) \end{aligned}$$

Täten funktion F käyräintegraali riippuu vain polun E loppu- ja alkupisteistä ja on täten tiestä riippumaton. Vastaavasti on olemassa polku D , joka kulkee pisteestä r_b pisteeseen r_a ja tällöin pätee

$$\begin{aligned} \int_E F \cdot dr &= \int_{-D} F \cdot dr \\ \int_E F \cdot dr + \int_D F \cdot dr &= 0 \\ \oint_{E \cup D} F \cdot dr &= 0 \end{aligned}$$

ja väite seuraa.

(\Leftarrow) Todistetaan tapaus avaruudessa \mathbb{R}^3 . Muissa dimensioissa todistus menee samalla tavalla. Oletetaan, että pätee $\oint_C F \cdot dr = 0$. Tällöin funktion F käyräintegraalit ovat tiestä riippumattomia. Olkoot nyt $U : A \mapsto \mathbb{R}$ ja $r_0 \in A$. Asetetaan

$$U(r) = \int_C F \cdot dr,$$

missä C on paloittain sileä tie kiinteästä pisteestä r_0 pisteeseen r . Nyt on siis osoitettava, että

$$\begin{aligned} D_x U &= f_1 \\ D_y U &= f_2 \\ D_z U &= f_3 \end{aligned}$$

Muodostetaan erotusosamäärä ja muokataan sitä:

$$\begin{aligned} \frac{U(r + h\mathbf{i}) - U(r)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_{r_0}^{r+h\mathbf{i}} F \cdot dr - \int_{r_0}^r F \cdot dr \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_r^{r+h\mathbf{i}} F \cdot dr, \end{aligned}$$

missä integrointi suoritetaan pitkin janaa valitsemalla $r(t) = r + t\mathbf{i}$, missä $t \in [0, h]$. Nyt $r'(t) = \mathbf{i}$ ja saadaan

$$\frac{1}{h} \int_r^{r+h\mathbf{i}} F \cdot dr = \frac{1}{h} \int_0^h f_1(r(t)) dt = f_1(r(t_1)),$$

missä $0 < t_1 < h$. Siis on olemassa

$$\frac{\partial U}{\partial x}(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(r + h\mathbf{i}) - U(r)}{h} = f_1(r)$$

ja osittaisderivaatta $\frac{\partial U}{\partial x}(r)$ on jatkuva sillä u_1 on jatkuva.

Vastaavalla tavalla saadaan osoitettua $\frac{\partial U}{\partial y}(r)$ ja $\frac{\partial U}{\partial z}(r)$ jatkuviksi. Näin olen väite seuraa. [11][ss181-183] \square

Yhtälö (4.1) tarkoittaa siis, että polkuintegraali kahden pisteen A ja B välillä on siis polusta riippumaton. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\int_{ACBDA} F \cdot dr = 0.$$

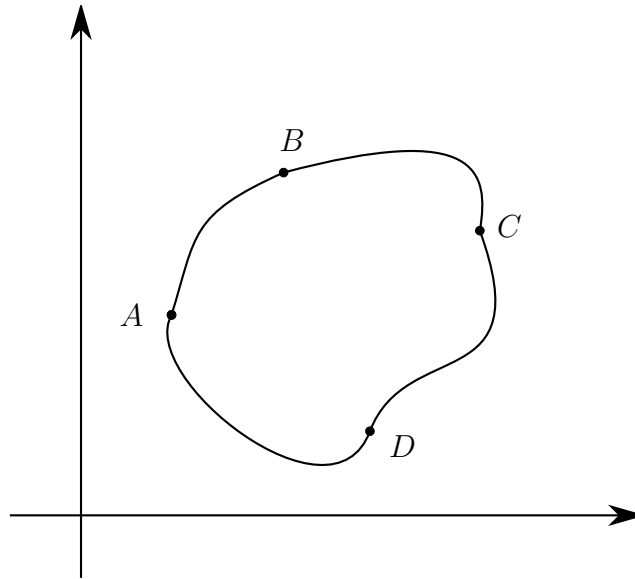
Täten

$$\int_{ACB} F \cdot dr = - \int_{BDA} F \cdot dr = \int_{ADB} F \cdot dr. \quad (4.2)$$

Fysikaalisesti ajatellen, työ joka tehdään siirryttäessä pisteestä A pisteeseen B on siis tiestä riippumaton ja tehty työ pitkin suljettua polkua on nolla. Siis, tehty työ riippuu vain alkupisteestä A ja loppupisteestä B . Täten

$$\text{Voiman tekemä työ} = \int_A^B F \cdot dr = U(A) - U(B).$$

Tämä onkin syy siihen, miksi kyseistä voimaa sanotaan konservatiiviseksi: englanniksi konservatiivinen voima on *conservative force* ja energian säilyminen on *conservation of energy*.



Kuva 5: Konservatiivisessa voimakentässä tehty työ on tiestä riippumaton.

Määritelmä 4.2.5. Systemi on konservatiivinen, mikäli sen kokonaisenergia säilyy koko ajan vakiona.

Konservatiivisessa systeemissä systeemin tekemä työ on siis polusta riippumaton ja riippuu vain alku- ja loppupisteistä. [2][ss69-71] & [11][ss180-183]

4.3 Hamiltonin periaate

Kaikenlaisilla minimoinnin periaatteilla on fysiikassa pitkä historia. Tämän suuntainen tutkimus ja tarkastelu on lopulta päätynyt huomioon siitä, että luonnossa kaikki (lähes poikkeuksetta) minimoituu fysikaalisissa prosesseissa. Seuraavassa käsitellään Hamiltonin periaatetta, jonka avulla voidaan johtaa systeemille niin sanotut Lagrangen liikeyhtälöt.

Hamiltonin periaate:

"Of all the possible paths along which a dynamical system may move from one point to another within a specific time interval (consistent with any constraints), the actual path followed is that which minimizes the time integral of the difference between the kinetic and potential energies."[13][s192]

Variaatiolaskennan merkinnöin tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (4.3)$$

Huomioitavaa on, että yhtälö (4.3) vaatii integrandin $T - U$ olevan ääriarvo, ei välttämättä minimi. Kuitenkin lähes kaikissa tärkeissä sovelluksissa kyseen tulee minimi.

Hiukkasen kineettinen energia suorakulmaisessa koordinaatistossa on vain \dot{x}_i :n funktio ja jos se liikkuu konservatiivisessa voimakentässä, potentiaalienergia on vain x_i :n funktio:

$$T = T(\dot{x}_i) \quad U = U(x_i)$$

Määritelmä 4.3.1. Lauseketta $L = T - U = L(x_i, \dot{x}_i)$ sanotaan hiukkasen *Lagrangen funktioksi*.

Nyt (4.3) saadaan muotoon

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0,$$

josta edelleen käyttämällä luvun 3 merkintöjä saadaan

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_i, y'_i) dx.$$

Tehdään muunnokset

$$\begin{aligned}x &\rightarrow t \\y_i &\rightarrow x_i \\y'_i &\rightarrow \dot{x}_i \\f(x, y_i, y'_i) &\rightarrow L(x_i, \dot{x}_i),\end{aligned}$$

jolloin saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Yhtälöitä (4.4) sanotaan *hiukkasen Lagrangen liikeyhtälöiksi*. [13][ss190-193]

4.4 Systemin vapausasteet ja sidokset

Tarkasteltaessa n hiukkasen systeemiä avaruudessa \mathbb{R}^3 , jokaisen hiukkasen paikkaa tarvitaan kuvaamaan kolme suuretta. Mikäli jotkut näistä n hiukkasesta ovat sidoksissa toisiinsa, nämä $3n$ suuretta eivät ole enää toisistaan riippumattomia. Itseasiassa, jos näitä hiukkasia sitoo m yhtälöä (eli sidosehtoa), $3n - m$ koordinaattia on toisistaan riippumattomia. On luontevaa olettaa, että kaikki sidosehdot ovat toisistaan riippumattomia. Tällöin sanotaan, että systeemillä on $3n - m$ vapausastetta.

Systemin täydellisen tilan määrittämiseen riittää löytää $s = 3n - m$ kappaletta mitä tahansa riippumattonta suuretta. Suureita, jotka määrittelevät systemin tilan täydellisesti sanotaan *yleistetyiksi koordinaateiksi*, ja niiden joukkoa merkitään $q_j = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Systeemillä on itseasiassa ääretön määrä yleistettyjä koordinaatteja.

Määritellään *yleistetty nopeus* yleistettyjen koordinaattien ensimmäisenä aikaderivaattana ja merkitään niiden joukkoa $\dot{q}_j = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$. Nyt niin sanotut yleiset muunnosyhtälöt ovat muotoa

$$\begin{aligned}x_{\alpha,i} &= x_{\alpha,i}(t, q_j) \\ \dot{x}_{\alpha,i} &= \dot{x}_{\alpha,i}(t, q_j, \dot{q}_j),\end{aligned}$$

missä $\alpha = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, 3$ ja $j = 1, 2, \dots, s$. Käyttäen yleistettyjä koordinaatteja voidaan muunnosyhtälöt kirjoittaa nyt muodossa

$$\begin{aligned}q_j &= q_j(t, x_{\alpha,i}) \\ \dot{q}_j &= \dot{q}_j(t, x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i})\end{aligned}$$

Siis nyt on olemassa $m = 3n - s$ kappaletta sidosehtoja muotoa

$$f_k = f_k(t, x_{\alpha,i}), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.5)$$

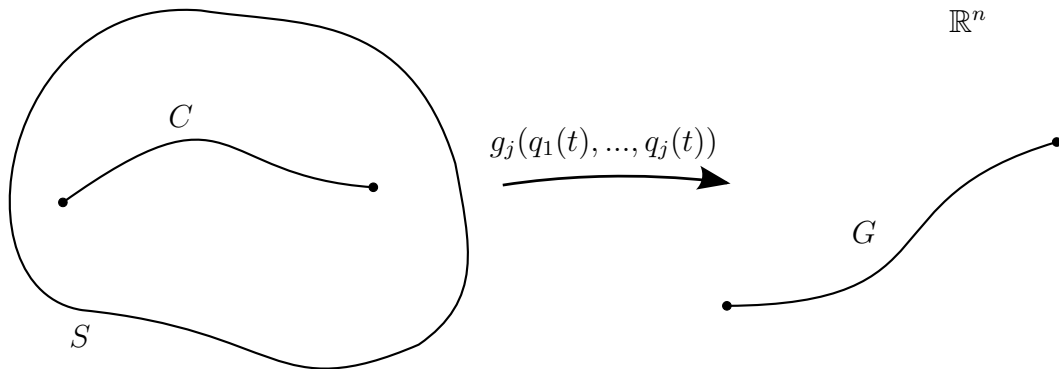
Yleisen tapauksen mielessä voidaan tarkastella tilannetta, jossa

- a) systeemi on n -ulotteisessa avaruudessa,
- b) systeemissä on m kappaletta hiukkasia, ja
- c) systeemissä on k kappaletta sidosehtoja.

Nyt vaaditaan $s = nm - k$ yleistettyä koordinaattia, jotta systeemin tila voidaan ilmoittaa täydellisesti. Tällöin systeemin tila voidaan esittää hiukkasittain s -ulotteisessa *konfiguraatioavaruudessa*. Jokaista dimensiota vastaa tällöin yksi yleistetyistä koordinaateista q_j .

Konfiguraatioavaruudesta voidaan aina tehdä hiukkasittain muunnoskuvaukset $g_j : S \mapsto \mathbb{R}^n$, joilla konfiguraatioavaruuden käyrä $C : [t_1, t_2] \mapsto S$ voidaan kuvata alkuperäiseen avaruuteen. Esimerkissä 4.5.3 esitetään kaksoisheilurin muunnoskuvaukset ja tutkitaan konfiguraatioavaruuden kuvautumista tarkemmin.

\mathbb{R}^s



Kuva 6: Muunnoskuvaus yleisessä tapauksessa

Konfiguraatioavaruuden käyrä kuvaa systeemin liikettä: jokainen käyrän piste määrittelee systeemin konfiguraation kullakin ajanhetkellä. Jokaisen pisteen kautta kulkee siis ääretön määrä erilaisia käyriä esittäen systeemin mahdollisia liikkeitä; jokaista käyrää vastaa jokin alkuehto. Voidaan puhua systeemin *polusta* kun se liikkuu konfiguraatioavaruudessa, mutta tätä ei saa sekoittaa hiukkasten liikkeeseen alkuperäisessä n -dimensioisessa avaruudessa. [13][ss194-196]

4.5 Lagrangen likeyhtälöt yleistetyissä koordinaateissa

Hamiltonin periaate voidaan nyt käyttäen yleistettyjä koordinaatteja muotoilla uudelleen muotoon:

"Of all the possible paths along which a dynamical system may move from one point to another in configuration space within a specified time interval, the actual path followed is that which minimizes the time integral of the Lagrangian function for the system." [13][s197]

Lagrangen funktio on määritelty kineettisen ja potentiaalienergian erotuksena. Energia on skalaarisuure ja täten Lagrangen funktio on skalaarifunktio. Tällöin siis Lagrangen funktion täytyy olla invariantti koordinaattimuunnosten suhteen. Riittää että Lagrangen funktio koko systeemille määritellään kineettisen ja potentiaalienergian erotuksena, tällöin voidaan käyttää erilaisia yleistettyjä koordinaatteja. Täten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{x}_{\alpha,i}) - U(x_{\alpha,i}) \\ &= T(t, q_j, \dot{q}_j) - U(t, q_j) \\ &= L(t, q_j, \dot{q}_j) \end{aligned}$$

Tällöin Hamiltonin periaate voidaan kirjoittaa muodossa

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_j, \dot{q}_j) dt = 0. \quad (4.6)$$

Tehdään muunnokset

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_j \\ y'_i &\rightarrow \dot{q}_j \\ f(x, y_i, y'_i) &\rightarrow L(t, q_j, \dot{q}_j) \end{aligned}$$

jolloin saadaan

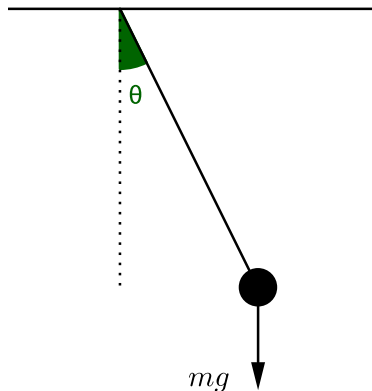
$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.7)$$

Yhtälöt (4.7) ovat systeemin *Lagrangen liikeyhtälöt*. Nyt s Lagrangen liikeyhtälöä, yhdessä k sidosehdon ja alkuehtojen kanssa, määrää täydellisesti systeemin liikkeen. Lagrangen liikeyhtälöt vaativat, että

- 1) Systeemiin vaikuttavat voimat tulee voida johtaa suoraan potentiaalista.
- 2) Sidosehtojen tulee yhdistää hiukkasen koordinaatit ja ne voivat olla myös ajan funktioita. Niiden tulee olla yhtälön (4.5) muotoa.

Jos sidosehdot ovat ehdon 2) mukaisia, niitä sanotaan *holonomisiksi sidoksiksi*. Jos taas sidosehdot eivät eksplisiittisesti sisällä aikaa, niitä sanotaan *"fiksatuiksi"* tai *ei-holonomisiksi sidosehdoiksi*. [13][ss197-198]

Esimerkki 4.5.1 (Heiluri). Tarkastellaan kuvan 7 mukaista heiluria, jossa m massainen kuula on sijoitettu massattoman l pituuisen tangon päähän.



Kuva 7: Heiluri.

Systeemi on konservatiivinen ja ainut siihen vaikuttava voima on vetovoima mg . Nyt jotta systeemin tila voitaisiin ilmoittaa täydellisesti, vaaditaan yksi yleistetty koordinaatti. Valitaan yleistetyksi koordinaatiksi heilahduskulma θ .

Normitetaan systeemin energia siten, että kuulan ollessa ala-asennossa ($\theta = 0$) pätee $U = 0$. Tällöin systeemin potentiaalienergialle voidaan kirjoittaa $U = mgl(1 - \cos \theta)$ ja edelleen liike-energialle pätee $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$. Heilurin Lagrangen funktio on täten

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

Nyt käyttämällä yhtälöä

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

systeemin Lagrangen liikeyhtälöksi saadaan

$$-mgl \sin \theta - ml^2\ddot{\theta} = 0.$$

Sieventämällä saadaan systeemin Lagrangen liikeyhtälöksi $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$, joka voidaan kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun systeeminä

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \theta \end{aligned}$$

Systeemillä on tasapainopisteinä pisteet $(\pi, 0)$ ja $(0, 0)$ ja itseasiassa jaksollisuuden takia näitä vastaavat pisteet $((2k+1)\pi, 0)$ ja $(2k\pi, 0)$, missä $k \in \mathbb{Z}$.

Jaetaan stabiilisuustarkastelu kahteen osaan:

1) Linearisoidaan systeemi pisteessä $(\pi, 0)$, jolloin Jacobin matriisiksi saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Edelleen ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$. Koska $\lambda_+ > 0$, Lauseen 2.4.2 nojalla piste $(\pi, 0)$ on epästabiili tasapainopiste.

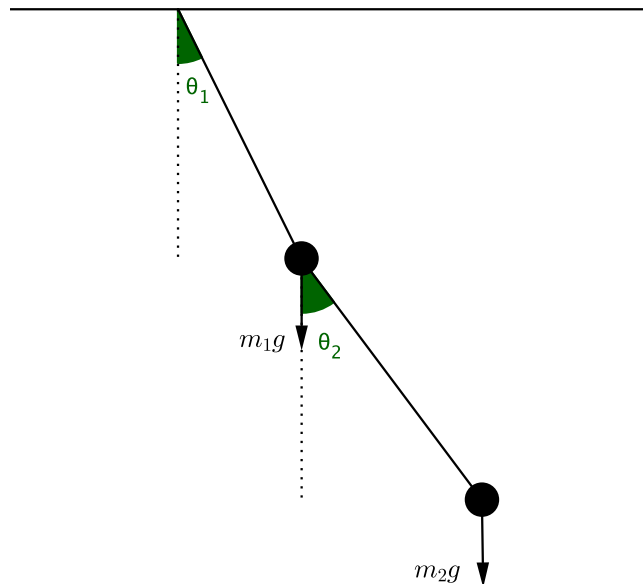
2) Linearisoidaan systeemi pisteessä $(0,0)$, jolloin Jacobin matriisiksi saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$ ja tästä tasapainopisteestä ei Lauseen 2.4.2 avulla voida sanoa mitään, sillä $Re(\lambda_{\pm}) = 0$.

Lauseen 2.4.3 mukaan piste $(0,0)$ on joko keskus tai fokus. Jos tasapainopiste olisi epästabiili fokus, tarkoittaisi tämä sitä systeemin kokonaisenergia kasvaisi. Toisaalta jos tasapainopiste olisi stabiili fokus tämä tarkoittaisi, että systeemin kokonaisenergia vähenisi. Mutta koska käsiteltävä systeemi on konservatiivinen, tämä on mahdotonta. Tämän takia piste $(0,0)$ täytyy olla stabiili keskus. Palataan tähän esimerkkiin myöhemmin luvussa 4.6 ja osoitetaan tasapainopiste stabiiliksi Liapunovin lauseen avulla.

Esimerkki 4.5.2 (Kaksoisheiluri). Tarkastellaan kuvan 8 mukaista kaksoisheiluria, jossa m_1 ja m_2 massaiset kuulat on kiinnitetty massattomien l_1 ja l_2 pituussien tankojen päähän.



Kuva 8: Kaksoisheiluri.

Nyt yleistettyjä koordinaatteja vaaditaan kaksi, jotta systeemin tila voitaisiin esittää täydellisesti. Valitaan yleistetyiksi koordinaateiksi heilahduskulmat θ_1 ja θ_2 .

Merkitään kuulien paikkoja (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) (kuvaa vastaavin alaindeksin). Tällöin käyttämällä heilahduskulmia θ_1 ja θ_2 , voidaan kirjoittaa

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (4.8)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (4.9)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (4.10)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (4.11)$$

Nyt systeemin potentiaalienergian lauseke on

$$\begin{aligned} U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Kineettiselle energialle pätee $T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{y}_2^2$. Nyt derivoimalla ensin yhtälöt (4.8)-(4.11) ja tämän jälkeen sijoittamalla ne kineettisen energian lausekkeeseen saadaan

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(l_1^2 \cos^2 \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2) \\ &+ \frac{1}{2}m_2(l_1^2 \cos^2 \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ &+ l_1^2 \sin^2 \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \sin^2 \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2) \\ &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

Systeemin Lagrangen funktio on

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ &+ m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Nyt lasketaan seuraavaksi derivaatat θ_1 suhteen:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0$$

ja pienehkön sieventelyn jälkeen saadaan

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 g + m_2 g) \sin \theta_1}{m_1 l_1 + m_2 l_1} \quad (4.12)$$

Vastaavanlaisin laskutoimenpitein saadaan laskettua

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - g \sin \theta_2}{l_2} \quad (4.13)$$

Kirjoitetaan yhtälöt (4.12) ja (4.13) ensimmäisen kertaluvun systeeminä

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{-m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_2 - m_2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \omega_2^2 - (m_1 g + m_2 g) \sin \theta_1}{m_1 l_1 + m_2 l_1} \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{-l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_1 + l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \omega_1^2 - g \sin \theta_2}{l_2} \end{aligned}$$

Merkitään $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0$, jolloin saadaan ratkaistavaksi yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = 0 \\ -\frac{(m_1 g + m_2 g) \sin \theta_1}{m_1 l_1 + m_2 l_1} = 0 \\ -\frac{g \sin \theta_2}{l_2} = 0 \end{array} \right. ,$$

josta perustrigonometrisin laskuin saadaan tasapainopisteiksi

$$v_1 = (0, 0, 0, 0) \quad (4.14)$$

$$v_2 = (0, 0, 0, \pi) \quad (4.15)$$

$$v_3 = (0, 0, \pi, 0) \quad (4.16)$$

$$v_4 = (0, 0, \pi, \pi) \quad (4.17)$$

Intuitiivisesti ajatellen näistä v_1 on stabiili tasapainopiste ja kolme muuta ovat epästabiileja. Määritetään Jacobin matriisin ominaisarvot käyttäen Maple-ohjelmistoa. Tällöin tasapainopisteitä (4.14)-(4.17) vastaaviksi ominaisarvoiksi saadaan

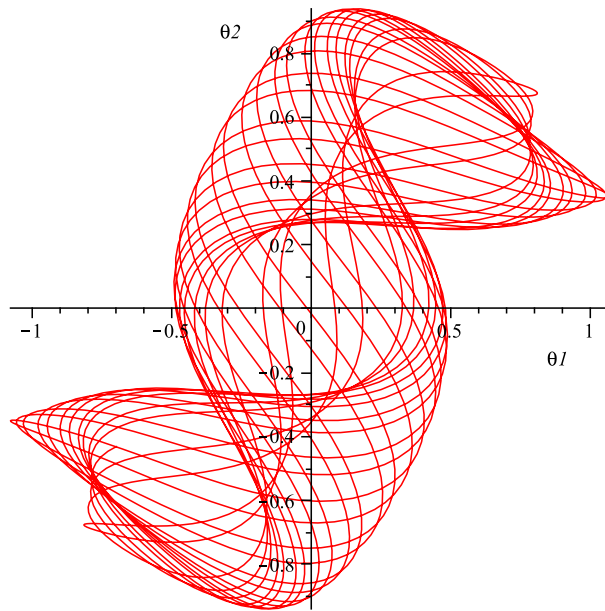
$$\begin{aligned} \lambda_{v_1} &= \left(\frac{i\sqrt{l_1g}}{l_1}, -\frac{i\sqrt{l_1g}}{l_1}, \frac{i\sqrt{l_2g}}{l_2}, -\frac{i\sqrt{l_2g}}{l_2} \right) \\ \lambda_{v_2} &= \left(\frac{i\sqrt{l_1g}}{l_1}, -\frac{i\sqrt{l_1g}}{l_1}, \frac{\sqrt{l_2g}}{l_2}, -\frac{\sqrt{l_2g}}{l_2} \right) \\ \lambda_{v_3} &= \left(\frac{\sqrt{l_1g}}{l_1}, -\frac{\sqrt{l_1g}}{l_1}, \frac{i\sqrt{l_2g}}{l_2}, -\frac{i\sqrt{l_2g}}{l_2} \right) \\ \lambda_{v_4} &= \left(\frac{\sqrt{l_1g}}{l_1}, -\frac{\sqrt{l_1g}}{l_1}, \frac{\sqrt{l_2g}}{l_2}, -\frac{\sqrt{l_2g}}{l_2} \right) \end{aligned}$$

Nyt Lauseen 2.4.2 nojalla v_2, v_3 ja v_4 ovat epästabiileja tasapainopisteitä, sillä vähintään yhden ominaisarvon reaaliosat ovat aidosti positiivisia. Samainen Lause ei sano mitään tasapainopisteen v_1 stabiilisuudesta.

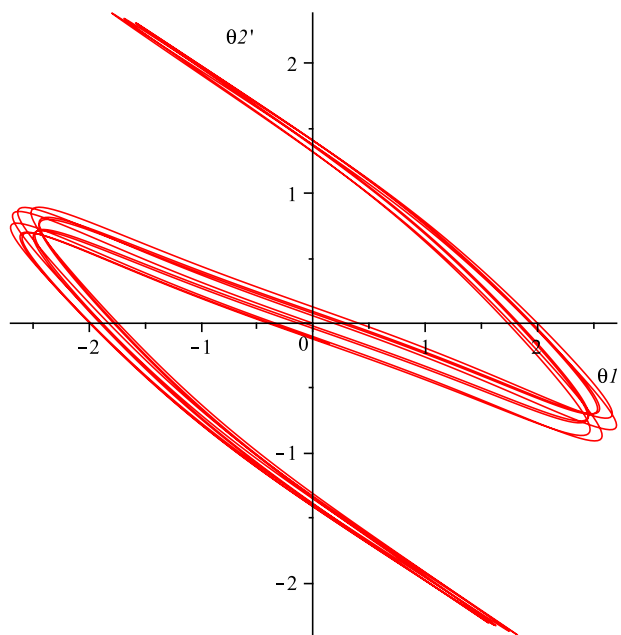
Lauseen 2.4.3 mukaan piste $(0, 0, 0, 0)$ on joko keskus tai fokus. Jos tasapainopiste olisi epästabiili fokus, tarkoittaisi tämä sitä, että systeemin kokonaisenergia kasvaisi. Toisaalta taas jos tasapainopiste olisi stabiili fokus, tulisi systeemin kokonaisenergian pienentyä. Koska käsiteltävä systeemi on konservatiivinen, tämä on mahdotonta. Tämän takia pisteen $(0, 0, 0, 0)$ täytyy olla stabiili keskus. Tämän pisteen käsittely Liapunovin lauseen kanssa sivuutetaan.

Kuva 9 on piirretty arvoilla $m_1 = l_1 = 0$, $m_2 = l_2 = 2$, $g = 9.81$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_2(0) = 1$, $\theta_1(0) = \pi/4$ ja $\theta_2(0) = \pi/6$. Kuvassa 9 oleva käyrä on niin sanottu *Lissajoun käyrä* ajanvälillä $t \in [0, 50]$ [14][s117].

Kuvassa 10 on piirretty kaksoisheilurin faasitaso arvoilla $m_1 = l_1 = 0$, $m_2 = l_2 = 2$, $g = 9.81$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2'(0) = 0$, $\theta_1(0) = \pi/4$ ja $\theta_2(0) = \pi/10$. Kuvasta 10 katsottuna nähdään, että pienillä kulmilla heilurisysteemin liike on lähes tulkoon jaksollista.



Kuva 9: Lissajoun käyrä.



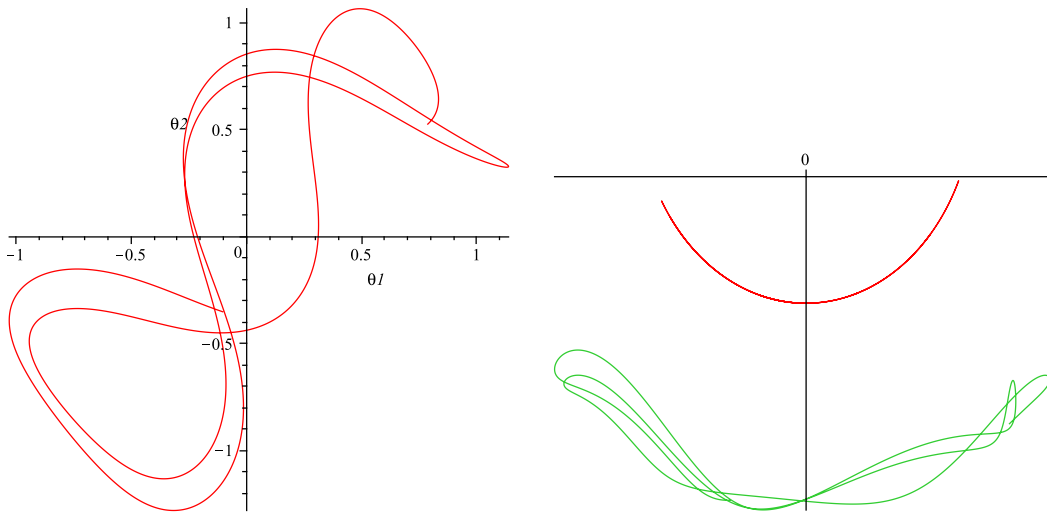
Kuva 10: Kaksoisheilurin faasitaso.

Esimerkki 4.5.3. Tarkastellaan vielä tarkemmin kaksoisheilurin konfiguraatioavaruuden kuvautumista tasoon. Aiemmassa esimerkissä määrättiin kummankin massan paikat muuttujien x ja y lausekkeina ja täten muunnoskuvaukset ovat

$$\begin{aligned}x_1(\theta_1, \theta_2) &= l_1 \sin \theta_1 \\y_1(\theta_1, \theta_2) &= -l_1 \cos \theta_1 \\x_2(\theta_1, \theta_2) &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\y_2(\theta_1, \theta_2) &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

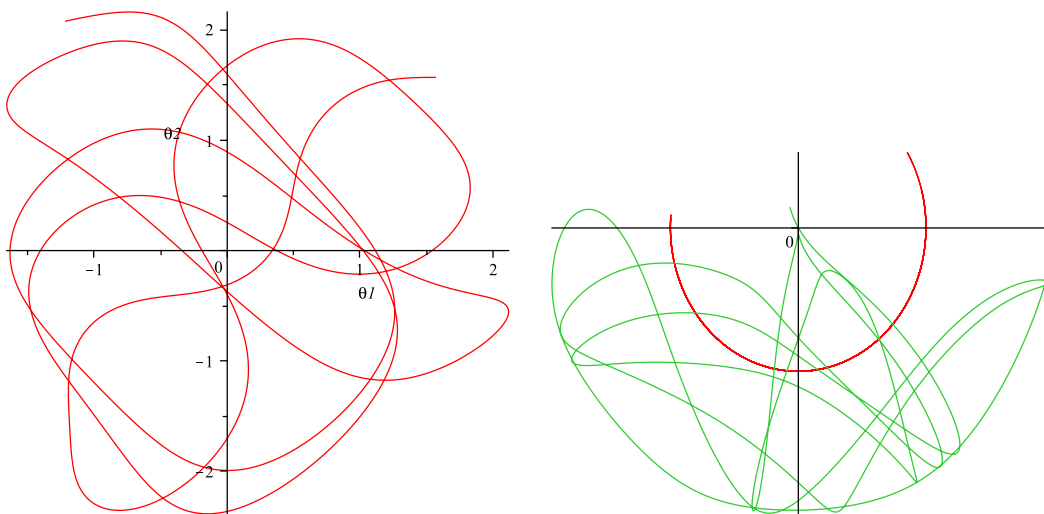
Seuraavassa on Maplea hyväksikäyttäen piirretty ensin vasemmalle konfiguraatioavaruuden käyrä ja oikealla sitä vastaava heilurin liike.

Ensimmäisessä tapauksessa on käytetty alkuehtoja $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}_1 = 1$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ ja $\dot{\theta}_2 = 1$ aikavälillä $t \in [0, 5]$. Konfiguraatioavaruuteen muodostuu jälleen Lissajoun käyrä.



Kuva 11: Konfiguraatioavaruus ja heilurin liike tasossa tapauksessa 1.

Toisessa tapauksessa on käytetty alkuehtoja $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ja $\dot{\theta}_2 = 0$ aikavälillä $t \in [0, 10]$. Kaottinen käyttäytyminen on nyt nähtävissä kummasakin kuvassa.



Kuva 12: Konfiguraatioavaruus ja heilurin liike tasossa tapauksessa 2.

4.6 Liapunovin funktio

Olkoot $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ systeemin $X' = F(X)$ ratkaisu ja $E(v)$ systeemin kokonaisenergian lauseke. Tällöin systeemin kokonaisenergian muutos ajan suhteen voidaan ilmoittaa lausekkeella

$$\begin{aligned} \dot{E}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial E}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial E}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x_1} f_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial E}{\partial x_n} f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Lauseke (4.18) kuvaa systeemin kokonaisenergian muutosta pitkin ratkaisun ratoja, jotka kulkevat pisteen v kautta. [8][ss304-305]

Määritelmä 4.6.1. Olkoon v systeemin $X' = F(X)$ tasapainopiste. Funktio $E : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ on *Liapunovin funktio* pisteessä v , mikäli jossakin pisteen v ympäristössä W pätee

- a) $E(v) = 0$ ja $E(w) > 0$ kaikilla $w \in W \setminus \{v\}$,
- b) $\dot{E}(w) \leq 0$ kaikilla $w \in W$.

Jos ehto b) voidaan korvata ehdolla

- b') $\dot{E}(v) < 0$ kaikilla $w \in W \setminus \{v\}$,

funktiota E sanotaan *vahvaksi Liapunovin funktioksi*. [1][s305]

Lause 4.6.2. *Olkoon v systeemin $X' = F(X)$ tasapainopiste.*

- a) *Jos löydetään Liapunovin funktio E pisteessä v , tasapainopiste on stabiili.*
- b) *Jos löydetään vahva Liapunovin funktio E pisteessä v , tasapainopiste on asympotoottisesti stabiili.*

[1][s307]

Huomautus 4.6.3. Liapunovin funktiota etsittäessä, kannattaa usein käyttää funktiokandidaattina neliömuotoista funktiota tai systeemin kokonaisenergiaa kuvaavaa lauseketta. Huomioitavaa on, että läheskään aina sopivaa funktiota ei välttämättä löydy.

Esimerkki 4.6.4. Tarkastellaan esimerkin 4.5.1 heiluria. Esimerkissä heilurille johdettiin Lagrangen liikeyhtälöt ja saatiin osoitettua, että piste $(\pi, 0)$ on systeemin stabiili tasapainopiste. Tarkastellaan seuraavaksi pisteen $(0, 0)$ stabiilisuuden luonnetta Lausetta 4.6.2 hyväksi käyttäen ja osoitetaan, että piste $(0, 0)$ on stabiili tasapainopiste.

Kuten jo edellä todettiin, Liapunovin funktiota etsittäessä kannattaa usein yrittää systeemin kokonaisenergiaa kuvaavan lausekkeen käyttöä. Aiemmin esimerkissä 4.5.1 määritettiin systeemin kineettisen- ja potentiaalienergian lausekkeet ja näitä hyväksi käyttäen saadaan systeemin kokonaisenergialle lauseke

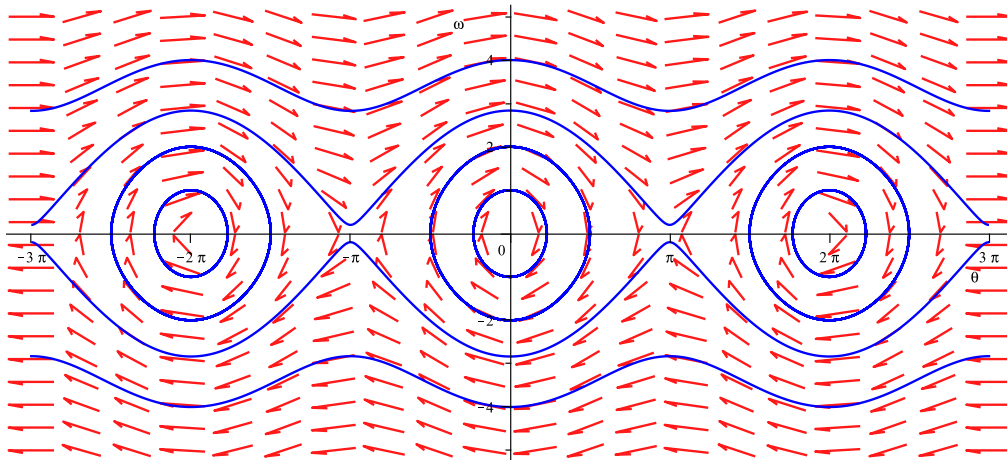
$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

Selvästi $E(\omega, \theta) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta) > 0$ kaikilla $E(\omega, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ ja lisäksi

$$\begin{aligned} E'(\omega, \theta) &= \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \\ &= mgl\omega \sin \theta - mgl\omega \sin \theta = 0 \leq 0 \end{aligned}$$

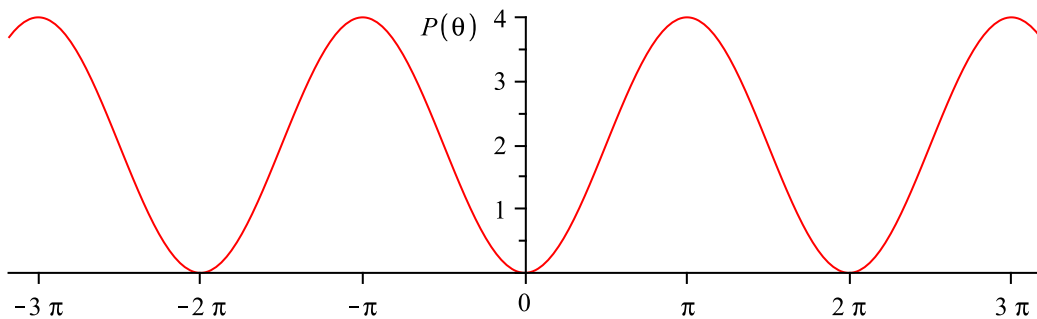
pätee kaikilla $(\omega, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Täten piste $(0, 0)$ on stabiili.

Kuvassa 13 on piirretty Maplella heilurin faasikuviota käyttäen arvoja $g = 2$, $m = 1$ ja $l = 1$. Kuvasta näkyy hyvin stabiilien ja epästabiilien ratkaisuiden jaksollisuus pisteissä $((2k + 1)\pi, 0)$ ja $(2k\pi, 0)$, missä $k \in \mathbb{Z}$.



Kuva 13: Heilurin faasikuvio.

Kuvaan 14 on piirretty heilurin potentiaalienergian lausekkeen kuvaaja heilahduskulman θ funktiona.



Kuva 14: Heilurin potentiaalienergian lausekkeen kuvaaja.

Potentiaalienergian lausekkeen kuvaajasta on helposti nähtävissä potentiaalivallin pohjat, jotka ovat heilurin stabiileja tasapainopisteitä. Vastaavasti potentiaalivallin huippuja vastaavat tasapainopisteet ovat epästabiileja.

Esimerkki 4.6.5. Palataan vielä edelliseen esimerkkiin. Koska heilurisysteemi on konservatiivinen, niin systeemin kokonaisenergia säilyy koko ajan vakiona. Valitaan $g = l = 1$, jolloin heilurin yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$$

ja edelleen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\sin \theta\end{aligned}$$

Nyt alkuehdolla (θ_0, ω_0) systeemin kokonaisenergia E säilyy vakiona pitkin systeemin rataa $F(t, (\theta_0, \omega_0))$ kaikilla ajan t arvoilla. Täten pätee

$$\frac{dE}{dt}(F(t, (\theta_0, \omega_0))) = 0. \quad (4.19)$$

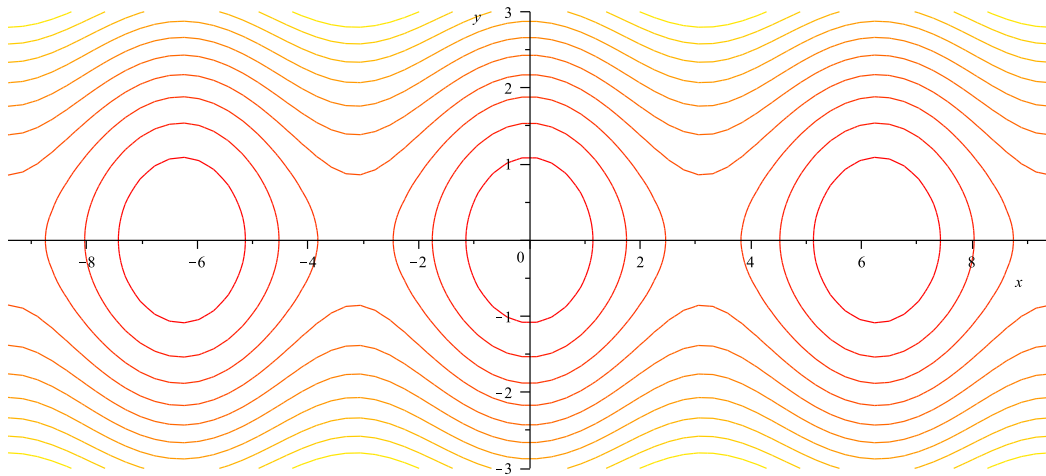
Toisaalta systeemin kokonaisenergialle pätee $E(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + 1 - \cos \theta$. Nyt ketjusääntöä hyväksi käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \\ &= (\sin \theta)\dot{\theta} + \omega\dot{\omega} \\ &= (\sin \theta\omega + \omega - \sin \theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

ja (4.19) todellakin pätee.

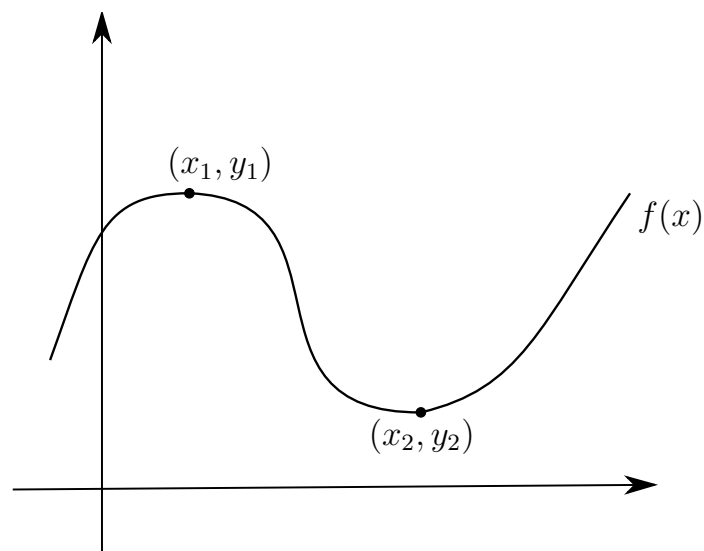
Määritelmä 4.6.6. Olkoot $E : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin käyrien joukkoa $E_c = \{(x, y) : E(x, y) = c\}$ sanotaan funktion E *tasa-arvokäyriksi*. [1][s301]

Kuvassa 15 on piirretty heilurin tasa-arvokäyriä. Huomioitavaa on se, että systeemin ratkaisuja vastaa kokonaisenergian tasa-arvokäyrä: ratkaisut kulkevat pitkin tasa-arvokäyriä. Edellä esitetty tukee myös sitä, miksi Liapunovin funktiota etsittäessä kannattaa turvautua systeemin kokonaisenergian lausekkeeseen. [1][ss300-301]



Kuva 15: Heilurin tasa-arvokäyriä.

Esimerkki 4.6.7 (Hiukkanen mielivaltaisella käyrällä). Tarkastellaan tilannetta, jossa m massainen hiukkanen on pakotettu liikkumaan pitkin mielivaltaista käyrää $f(x)$ ja oletetaan, että funktiolla on lokaali maksimi pisteessä (x_1, y_1) ja lokaali minimi pisteessä (x_2, y_2) .



Kuva 16: Mielivaltainen käyrä tasossa.

Nyt hiukkasen kineettiselle energialle pätee

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

ja edelleen potentiaalienergialle voidaan kirjoittaa

$$U = mgf(x)$$

Koska sidosehtona on käyrä $f(x)$, yleistettyjä koordinaatteja vaaditaan vain yksi kappale. Valitaan yleistetyksi koordinaatiksi x ja eliminoidaan y käyttämällä tietoa $f(x) = y$. Täten kineettiselle energialle voidaan kirjoittaa

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mf_x\dot{x}$$

ja Lagrangen funktioksi saadaan

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}f_x^2\dot{x}^2 - mgf(x) \quad (4.20)$$

Nyt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= mf_x f_{xx} \dot{x}^2 - mgf_x \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + f_x^2 \dot{x} m \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x} + 2mf_x f_{xx} \dot{x}^2 + mf_x^2 \ddot{x} \end{aligned}$$

ja systeemin Lagrangen liikeyhtälöksi saadaan

$$(1 + f_x^2)\ddot{x} + f_x f_{xx} \dot{x}^2 + gf_x = 0. \quad (4.21)$$

Nyt yhtälö (4.21) voidaan kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun systeeminä

$$\begin{aligned} \dot{x} &= s \\ \dot{s} &= \frac{-gf_x - f_x f_{xx} s^2}{1 + f_x^2} \end{aligned}$$

Nyt alkuoletusten mukaan kohdassa x_1 funktio $f(x)$ saa lokaalin maksimiarvonsa. Tällöin $f_x(x_1) = 0$ ja $f_{xx}(x_1) < 0$. Täten piste $(x_1, 0)$ on systeemin tasapainopiste. Vastaavasti pisteessä x_2 funktio $f(x)$ saa lokaalin minimiarvonsa ja tällöin $f_x(x_2) = 0$ ja $f_{xx}(x_2) > 0$. Myös piste $(x_2, 0)$ on täten systeemin tasapainopiste.

Osoitetaan seuraavaksi, että funktion $f(x)$ tasapainopiste on epästabiili funktion lokaalissa maksimissa ja stabiili funktion lokaalissa minimissä.

1) Lasketaan ensin Jacobin matriisi pisteessä $(x_1, 0)$. Saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gf_{xx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_{\pm} = \sqrt{-gf_{xx}}$. Olettaen, että funktiolla $f(x)$ on maksimi kohdassa x_1 pätee $-gf_{xx} > 0$ ja Lauseen 2.4.2 nojalla piste $(x_1, 0)$ on epästabiili. Täten funktiolla $f(x)$ on maksimipisteessä epästabiili tasapainopiste.

2) Laskettaessa Jacobin matriisi pisteessä $(x_2, 0)$ ja määrittämällä ominaisarvot huomataan, että molemmat ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia. Täten Lause 2.4.2 ei sano mitään minimipisteen stabiilisuudesta.

Käytetään Liapunovin lausetta ja valitaan Liapunovin funktiokandidaatiksi

$$E(x, s) = \frac{m}{2}s^2 + \frac{m}{2}f_x^2s^2 - mg(f(x) - f(x_2)).$$

Funktio on muodostettu kineettisen energian ja potentiaalienergian summana. Lisäksi termi $f(x_2)$ normittaa potentiaalienergian siten, että tarkasteltavassa minimipisteessä $mg(f(x) - f(x_2))$ häviää.

Selvästi $E(0, 0) = 0$ ja riittävän pienessä ympäristössä W $E(w) \leq 0$, missä $w \in W \setminus (0, 0)$. Nyt

$$\begin{aligned} E'(x, s) &= \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial s} \frac{ds}{dt} \\ &= (mf_x f_{xx} s^2 + mgf_x)s + ms(1 + f_x^2) \left(\frac{-gf_x - f_x f_{xx} s^2}{1 + f_x^2} \right) \\ &= mf_x f_{xx} s^3 + mgf_x s - mgf_x s - mf_x f_{xx} s^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lauseen (4.6.2) nojalla piste $(x_2, 0)$ on stabiili. Täten funktion $f(x)$ lokaalissa minimissä oleva tasapainopiste on stabiili.

Viitteet

- [1] Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A. *Chaos, an introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1997
- [2] Arfken G.B., Weber H.J., *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, San Diego, U.S.A., 2001
- [3] Arrowsmith, D. K., Place, C. M. *Dynamical Systems: Differential equations, maps and chaotic behaviour*. T.J. Press, Padstow, Cornwall, 1992.
- [4] van Brunt B. *Calculus of Variations*. Springer-Verlag New York, Inc., 2004
- [5] Bryant V. *Metric Spaces, iteration and application*. Cambridge University Press, 1985
- [6] Derrick, W.R., Grossmann, S.I., *Elementary differential equations with applications*. Academic Press, San Diego, U.S.A., 2001
- [7] Gronström, C., *Fysiikan matemaattiset menetelmät II*. Limes Ry, Helsinki, 2006.
- [8] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier/Academic Press, London, 2004
- [9] Karttunen H., Donner K.J., Kröger P., Oja H., Poutanen M. *Tähtitieteen perusteet*. Gummerus kirjapaino Oy, Jyväskylä, 2003
- [10] Karttunen H., Valtonen M. *The Three-Body Problem* Cambridge University Press, 2005
- [11] Lahtinen A., Pehkonen E. *Matematiikkaa soveltajille 2*. Tampereen kirjapaino oy, Tampere 1988
- [12] Leittmann, G. *The calculus of variations and optimal control, an introduction*. Plenum Press, New York, U.S.A. 1981
- [13] Marion, J.B., Thornton, S.T. *Classical Dynamics of Particles & Systems, 3th edition*. Academic Press, 1970
- [14] Pook L.P. *Understanding Pendulums: A Brief Introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., 2011

- [15] Swartz, C. *Measure, integration and function spaces*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1994
- [16] http://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html Katsottu
25.4.2012