Pankin omavaraisuusasteen mallintaminen

Pro gradu -tutkielma
Aki Summanen
163564
Itä-Suomen yliopisto
15. toukokuuta 2012

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Todennäköisyysteoria **2**
2.1 Satunnaisuus ja todennäköisyys 2
2.2 Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus 4

3 Satunnaismuuttuja **9**
3.1 Yksiulotteinen satunnaismuuttuja 9
3.2 Satunnaismuuttujan momentit 15
3.3 Usean satunnaismuuttujan momentit 22
3.4 Ehdollinen odotusarvo 27

4 Regressioanalyysi **29**
4.1 Menetelmä 29
4.2 Mallin arviointi 33
4.2.1 Varianssien vertailu 33
4.2.2 Parametrin merkitsevyys 35
4.2.3 Mallin merkitsevyys 37

5 Pankkitoiminnan riskit **39**
5.1 Vakavaraisuusriski 39
5.2 Vähimmäisomavaraisuusaste 40
5.2.1 Vahvuudet 41
5.2.2 Heikkoudet 42
5.3 Baselin komitea 42

6 Tutkimuksen toteutus **45**
6.1 Aineiston esittely 45
6.2 Omavaraisuusasteen johtaminen 49
6.3 Muuttujien valinta ja mallin luominen 50

7 Tulokset **52**
7.1 Tase-erien mallinnus 52
7.2 Vaihteluvälien muokkaaminen 54

8 Pohdinta **57**

1 Johdanto

Työssä harjoitellaan pankin riskienhallintaan liittyvän käsitteen, *omavaraisuusasteen*, matemaattista mallintamista käyttäen yksinkertaisia tilastollisia menetelmiä. Työn alkuosa lähtee liikkeelle todennäköisyyden määrittelemisestä, josta seurataan satunnaismuuttujien määrittelyyn, sekä niiden ominaisuuksien käsittelemiseen. Lopulta esitellään mallinnuksessa käytettävän regressioanalyysin matemaattiset perusteet sekä työssä sovelletut, mallin laadulliseen arviointiin käytettävät suureet. Matematiikassa regressioanalyysia kutsutaan *pienimmän neliösumman* -menetelmäksi.

Talous- ja tilastotieteessä menetelmästä käytetään nimitystä regressioanalyysi. Työssä pankin *omavaraisuusastetta* mallinnetaan sen tase-erien avulla sekä tutkitaan, millä edellytyksillä mallinnettu omavaraisuusaste laskee Baselin komitean (BCBS) suosittelema 3 % *vähimmäisomavaraisuusasteen* alapuolelle, jolloin pankin sanottaisiin olevan kriisissä. Mallinnuksen tavoitteena on tutkia tase-eristä mahdollisesti löytyviä riskitekijöitä pankin *vakavaraisuudelle*.

Perinteisesti vakavaraisuutta on mallinnettu käyttäen selittävinä muuttujina makrotalouden suureita, kuten inflaatio tai työttömyys. Tämän työn eräänä tavoitteena on tutkia voidaanko kyseistä riskiä havainnoida pankin tilinpäätöstietojen avulla. Aineistona työssä käytetään Nordea -konsernin osavuosikatsauksista löytyviä tasetietoja, jotka ovat julkisesti luettavissa konsernin verkkosivuilta löytyvistä osavuosikatsauksista.

Mallinnus perustuu olettamukseen, että sekä tase-erät että omavaraisuusaste ajatellaan satunnaisesti vaihteleviksi. Tällöin niitä voidaan pitää satunnaismuuttujina. Luvussa 5.1 määritellään lyhyesti jokainen tase-erä siten, että lukijalle syntyy käsitys niiden merkityksestä. Luvussa 6 esitellään ohjelmisto, jonka avulla mallinnus toteutetaan. Mallinnuksen tulokset avataan luvussa 7 sekä esitellään vaihtoehtoisten skenaarioiden aikaansaamat muutokset omavaraisuusasteessa.

2 Todennäköisyysteoria

Tässä luvussa esitellään todennäköisyysteorian aksioomat, eli tosiksi oletetut lauseet, sekä määritellään niin todennäköisyysfunktio kuin ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus. Luvun sisältö on viitteistä [4, s. 1], [8, s. 13 - 31] ja [20, s. 20 - 54].

2.1 Satunnaisuus ja todennäköisyys

Satunnaiskoe on koe, jonka yksittäistä tulosta e ei ennen kokeen suorittamista varmuudella voida määrittää. Jokaista tällaista mahdollista satunnaiskokeen tulosta e kutsutaan *alkeistapaukseksi*. *Perusjoukko (otosavaruus)* Ω on satunnaiskokeen kaikkien mahdollisten alkeistapausten muodostama joukko. *Tapahtuma* E on perusjoukon Ω osajoukko. Tapahtuman E sanotaan *sattuvan*, jos satunnaiskokeen tulos $e \in E$, eli kun jokin tapahtumaan liittyvä alkeistapahtuma sattuu. Koska satunnaiskokeen tulosta ei voi ennalta varmasti tietää, niin tällöin puhutaan tapahtumien *todennäköisyyksistä*.

Eräs keino määrittää todennäköisyys on tapahtuman suhteellisen esiintymistiheyden laskeminen. Toistetaan satunnaiskoetta, jonka otosavaruutena on S. Jokaista sattunutta tapahtumaa $E \subseteq S$ kohti määritellään $n(E)$, joka on tapahtuman E sattumien lukumäärä kun koetta on toistettu n kertaa. Tällöin todennäköisyys voidaan kirjoittaa muodossa

$$\text{Tapahtuman } E \text{ todennäköisyys} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}.$$

Vaikka määritelmä on yksinkertainen ja intuitiivisesti hyväksyttävä, niin se on kuitenkin ongelmallinen. Jos koe on toistettu n kertaa, eli tapahtuma E on sattunut $n(E)$ kertaa, niin voidaanko olla varmoja siitä, että toistojen kasvaessa rajatta, $n \to \infty$, raja-arvo lähestyy aiemmin saatua lukua $n(E)$? Edelleen, miten esimerkiksi voidaan olla varmoja, että toistettaessa satunnaiskoetta useaan kertaan, raja-arvo lähestyy aina samaa lukua? Oletuksena kyseinen raja-arvo on aivan liian mutkikas.

Edellisten ongelmien takia on keksittävä mielekkäämpi tapa määritellä todennäköisyys. Tämä voidaan toteuttaa olettamalla satunnaiskoe, jonka otosavaruus on Ω.

Aksiooma 2.1.1. ***(Kolmogorovin aksioomat)*** *Jokaiselle otosavaruuden* Ω *tapahtumalle* E *on olemassa luku* $P(E)$*, joka toteuttaa seuraavat ehdot.*

1.
$$0 \le P(E) \le 1$$

2.
$$P(\Omega) = 1$$

3. *Kaikille tapahtumille $E_1, E_2, \ldots$, joille $E_i \cap E_j = \emptyset$ kaikilla $i \ne j$ pätee*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Aksioomat on nimetty venäläisen matematiikon Andrei Kolmogorovin mukaan. Funktioita P kutustaan *todennäköisyysfunktioksi*, jos se toteuttaa edellä esitetyt aksioomat.

Aksioomien avulla voidaan aloittaa todennäköisyysteorian rakentaminen. Osoitetaan seuraavaksi muutama todennäköisyysteorian (perus)lause edellä esitettyjen aksioomien avulla.

Lause 2.1.2.
$$P(\emptyset) = 0.$$

Todistus. Olkoon A otosavaruuden Ω osajoukko. Tällöin $A \cup A^c = \Omega$, missä A^c on joukon A *komplementti*. Aksioomien 2. ja 3. nojalla

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1.$$

Koska $\emptyset = \Omega^c$, niin asettamalla $A = \Omega$ edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

□

Tyhjän joukon todennäköisyyden määrittäminen on olennaisen tärkeää todennäköisyysteorian kannalta. Intuitiivisesti triviaalin lauseen osoittaminen toimii tärkeänä työkaluna useissa eri tapauksissa.

Lause 2.1.3. *Olkoon $E_1, \ldots, E_n$ erillisiä tapahtumia. Tällöin*

$$P(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + \cdots + P(E_n).$$

Todistus. Olkoon $E_{n+1} = E_{n+2} = \ldots = \emptyset$. Tällöin

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup \cdots \cup E_n) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(E_k) + 0 = P(E_1) + \cdots + P(E_n). \end{aligned}$$

□

Lause 2.1.4. *Jos $A_1, A_2, \ldots$ ovat tapahtumia, niin*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Todistus. Olkoon $B_1 = A_1$ ja $B_n = A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$ kaikille $n \geq 2$. Tällöin $B_i \cap B_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jolloin

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n).$$

Koska $B_n \subseteq A_n$, niin $P(B_n) \leq P(A_n)$, josta väite seuraa. □

Lausetta 2.1.4 kutsutaan usein *Boolen epäyhtälöksi*. Epäyhtälöä voidaan käyttää mielivaltaisten tapahtumien yhdisteiden todennäköisyyksien arvioimiseen. Luvussa 2.2 esitetty lause 2.2.3 antaa työkalun edellä mainittujen yhdisteiden todennäköisyyksien tarkempaan määrittämiseen.

2.2 Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

Usein tarkasteltaessa jotain tiettyä satunnaisilmiötä tarkastelijalla on olemassa sellaista tietoa, joka muuttaa halutun ilmiön sattumistodennäköisyyttä jollain tavalla. Tätä varten määritellään seuraavaksi *ehdollinen todennäköisyys*. Vaikka ennakkotietoa ei olisikaan olemassa, niin ehdollinen todennäköisyys on työkalu, joka helpottaa haluttujen todennäköisyyksien laskemista.

Määritelmä 2.2.1. Tapahtuman A *ehdollinen todennäköisyys* on todennäköisyys tapahtuman A sattumiselle sillä ehdolla, että tapahtuma B on jo sattunut. Ehdollista todennäköisyyttä merkitään

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{2.1}$$

ja luetaan 'tapahtuman A todennäköisyys ehdolla B'.

Avataan edellistä määritelmää hieman ymmärtämisen lisäämiseksi. Ehto $P(A|B)$ tarkoittaa, että tapahtuman B sattuessa, myös A sattuu. Tällöin taas toteutuu jokin alkeistapahtuma a siten, että $a \in A \cap B$. Toisaalta, koska tiedetään, että B on sattunut, niin siitä on tullut tarkasteltavan tilanteen uusi otosavaruus. Nyt siis todennäköisyyttä $P(A \cap B)$ verrataan todennäköisyyteen $P(B)$. Huomioitava asia on, että yhtälö 2.1 on mielekäs vain kun $P(B) > 0$, jolloin myös ehdollinen todennäköisyys on määritelty. Otetaan esimerkki ehdollisen todennäköisyyden käytöstä.

Esimerkki 2.2.2. Heitetään kolikkoa kaksi kertaa. Oletetaan, että yhdellä heitolla todennäköisyys saada kruuna tai klaava on $^1/_2$, eli heitto on täysin sattumanvarainen sekä heitettävä kolikko 'reilu'. Jos tiedetään, että kahdesta heitosta ainakin toisessa saatiin kruuna, niin millä todennäköisyydellä molemmilla heitoilla tuli kruuna?

Nyt kaikki mahdolliset alkeistapaukset, eli satunnaiskokeen otosavaruus, on $\Omega = \{(kr, kr), (kr, kl), (kl, kr), (kl, kl)\}$, missä kr tarkoittaa kruunaa, ja kl klaavaa. Koska kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, niin kunkin todennäköisyys on $^1/_4$. Määritellään tapahtuma $A =$ "molemmat heitot ovat kruunia", joka sisältää alkeistapauksen (kr, kr), ja tapahtuma $B =$ "ainakin toinen heitto on kruuna", joka sisältää alkeistapaukset $(kr, kr), (kr, kl), (kl, kr)$. Tällöin ehdollinen todennäköisyys

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{^1/_4}{^3/_4} = \frac{1}{3}.$$

Aivan kuten edellä funktioita P kutsuttiin todennäköisyysfunktioksi, niin voidaan määritellä todennäköisyysfunktio $P(\cdot|B)$. Funktion on toteutettava vastaavat aksioomat kuin edellä, mutta ehdolla B. Lähempi tarkastelu sivuutetaan, katso esimerkiksi [8, s. 24] tai [20, s. 67-69].

Seuraavaksi kootaan rakennuspalikoita niin sanotun *Bayesin yhtälön* muodostamiseksi. Yhtälön taustalla on ajatus satunnaiskokeesta, jossa tapahtuma A on sattunut, ja ollaan kiinnostuneita siitä sattuiko samalla tapahtuma

B_k. Aluksi oletetaan sekä A että B tapahtumiksi. Tapahtuma A voidaan esittää muodossa

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

Koska AB ja AB^c ovat erillisiä tapahtumia, niin lauseen 2.2.3 ja yhtälön 2.1 nojalla todennäköisyys tapahtumalle A voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(AB^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)[1 - P(B)]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Yhtälön 2.2 nojalla voidaan todeta, että todennäköisyys tapahtumalle A on tapahtumien "A ehdolla B", ja "A ehdolla ei-B"*painotettu keskiarvo*, missä molemmat ehdolliset todennäköisyydet saavat sen verran painoarvoa kuin on sillä tapahtumalla, johon verrataan.

Yhtälö 2.1 voidaan yleistää tilanteeseen, jossa on n kappaletta ehdollistavia tapahtumia. Oletetaan, että toisistaan pareittan erillisille tapahtumille $B_1, \ldots, B_n$ pätee ehto

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega.$$

Tämä on aina toteutettavissa esimerkiksi siten, että $B_n = (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})^c$. Tapahtuma A voidaan kirjoittaa tapahtumien B_i avulla siten, että

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i.$$

Koska tapahtumat AB_i ovat myös pareittain erillisiä, niin yhtälön 2.2 nojalla

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Oletetaan nyt, että tapahtuma A on sattunut, ja halutaan määrittää todennäköisyys tapahtuman B_k sattumiselle. Yhtälöiden 2.1 ja 2.3 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} P(B_k|A) &= \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Edellä on usein oletettu, että tapahtumat A_i ovat pareittain erillisiä kaikilla i. Jos näin ei ole, niin voidaanko todennäköisyyttä $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ arvioida muuten kuin käyttämällä lausetta 2.1.4. Seuraavaksi esitellään lause ja sen seuraus, jotka tässä yhteydessä jätetään todistamatta, joiden avulla edellinen todennäköisyys saadaan laskettua.

Lause 2.2.3. *Olkoon $A_1, \ldots, A_n$ tapahtumia. Tällöin*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}$$

Seuraus 2.2.4. *Olkoon A ja B tapahtumia. Tällöin*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Toisinaan on tilanteita, joissa jo sattuneella tapahtumalla ei ole vaikutusta kiinnostuksen kohteena olevan tapahtuman sattumistodennäköisyyteen.

Määritelmä 2.2.5. Jos tapahtumalla B ei ole vaikutusta tapahtuman A todennäköisyyteen, eli

$$P(A|B) = P(A), \tag{2.5}$$

niin tapahtumia A ja B kutsutaan *riippumattomiksi*. Vastaavasti tällöin myös $P(B|A) = P(B)$.

Olettaen, että $P(B) > 0$, niin määritelmän 2.2.5 nojalla yhtälö 2.1 voidaan kirjoittaa riippumattomille tapahtumille muodossa

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{2.6}$$

Lasketaan yksi esimerkki, missä tapahtumat oletetaan toisistaan riippumattomiksi.

Esimerkki 2.2.6. Olkoon tapahtumat A ja B riippumattomia, joille on voimassa todennäköisyysfunktio P siten, että $P(A) = 0.5$ ja $P(B) = 0.2$. Määritelmän 2.2.5 nojalla $P(A|B) = P(A) = 0.5$. Nyt yhtälön 2.1 nojalla

$$P(A|B) = P(A) = 0.5 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1.$$

Kielellisesti voi olla hankalaa ymmärtää mitä eroa on erillisillä ja riippumattomilla tapahtumilla. Tästä syystä todistetaan seuraavan esimerkkitehtävän väitteet, jotka toivottavasti selkeyttävät lukijalle kyseisen asian.

Esimerkki 2.2.7. Olkoon A ja B tapahtumia, joille on voimassa $P(A) > 0$ ja $P(B) > 0$. Osoitetaan, että jos A, B ovat erillisiä tapahtumia, niin A, B eivät ole riippumattomia. Lisäksi osoitetaan, että jos A, B ovat riippumattomia tapahtumia, niin A, B eivät ole erillisiä.

i. Oletetaan, että $A \cap B = \emptyset$. Oletus tarkoittaa sitä, että tapahtumat A ja B *ovat erillisiä*, eli $P(A \cap B) = 0$. Tällöin ehdollinen todennäköisyys $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$ (määritelmä 2.2.1), sillä tapahtuma B on jo sattunut. Tämä on ristiriidassa määritelmän 2.2.5 kanssa, sillä $P(A|B) = P(A) > 0$, eli A ja B *eivät ole riippumattomia.*

ii. Oletetaan, että tapahtumat A ja B *ovat riippumattomia*, eli $P(A|B) = P(A)$. Tällöin tapahtuma B on sattunut, ja tapahtuma A voi olla sattunut todennäköisyydellä $P(A)$, jolloin $P(A \cap B) > 0$, eli $A \cap B \neq \emptyset$, jolloin ne *eivät ole erillisiä.*

3 Satunnaismuuttuja

Tässä luvussa tutustutaan satunnaismuuttujiin ja niiden tiettyihin, työssä tarvittaviin momentteihin, eli suureisiin sekä niiden avulla määriteltyyn korrelaatiokertoimeen. Luvun teoria on peräisin viitteistä [6, s. 15], [8, s. 46 - 125], [15, s. 51 & 237], [20, s. 90 - 214] ja [22, s. 35 & 103 - 05]

3.1 Yksiulotteinen satunnaismuuttuja

Luvussa 2 esitetty todennäköisyysteoria on pohjana tutustuttaessa satunnaismuuttujiin, eli funktioihin, joiden arvot määrätyvät satunnaisesti niiden lähtöjoukkona toimivien tapahtumien sattumistodennäköisyyksien mukaan.

Määritelmä 3.1.1. *Satunnaismuuttuja* on sellainen reaaliarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukkona toimii satunnaiskokeen otosavaruus.

Toisin sanoen, sellaista funktiota X, jonka määrittelyjoukon Ω tapahtumiin ω on liitetty todennäköisyysfunktio P, kutsutaan satunnaisfunktioksi. Tällöin todennäköisyys on yhdistetty myös funktion X arvoihin $X(\omega)$.

Määritelmä 3.1.2. Satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* F on määritelty kaikille reaaliluvuille $-\infty < b < \infty$ siten, että

$$F_X(b) = P\{X \leq b\}.$$

Kertymäfunktion F avulla voidaan vastata useisiin satunnaismuuttujan X todennäköisyyksiä koskeviin kysymyksiin. Esimerkiksi

$$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$$

kaikille $a < b$. Tämä voidaan osoittaa kirjoittamalla tapahtuma $\{X \leq b\}$ kahden erillisen tapahtuman, $\{X \leq a\}$ ja $\{a < X \leq b\}$ unionina

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} P\{X \leq b\} &= P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\} \\ \Leftrightarrow P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Kertymäfunktiolle voidaan osoittaa seuraavat ehdot, jotka tässä jätetään todistamatta.

Lause 3.1.3. *Jos X on satunnaismuuttuja, niin sen kertymäfunktiolle $F(x)$ on osoitettavissa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $F_X(x)$ *on ei-vähenevä, eli* $F_X(x) \leq F_X(y)$ *kun* $x \leq y$.

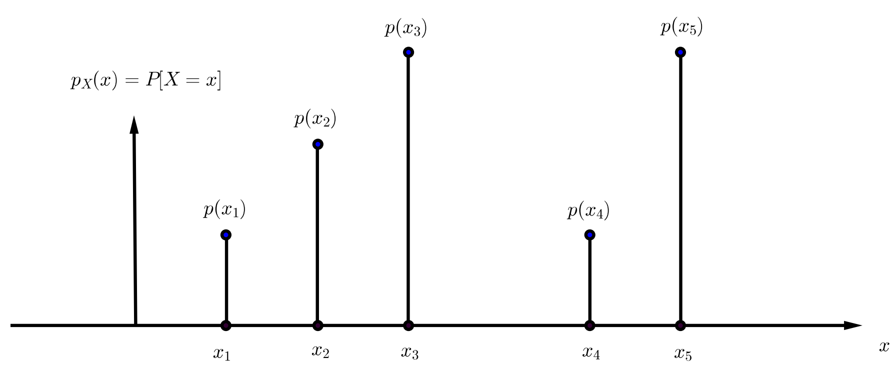
(b) $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad F(+\infty) \equiv \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$

(c) $F_X(x)$ *on oikelta jatkuva, eli* $\lim\limits_{b\to b_0+} F_X(b) = F_X(b_0)$ *jokaiselle* $b > b_0$.

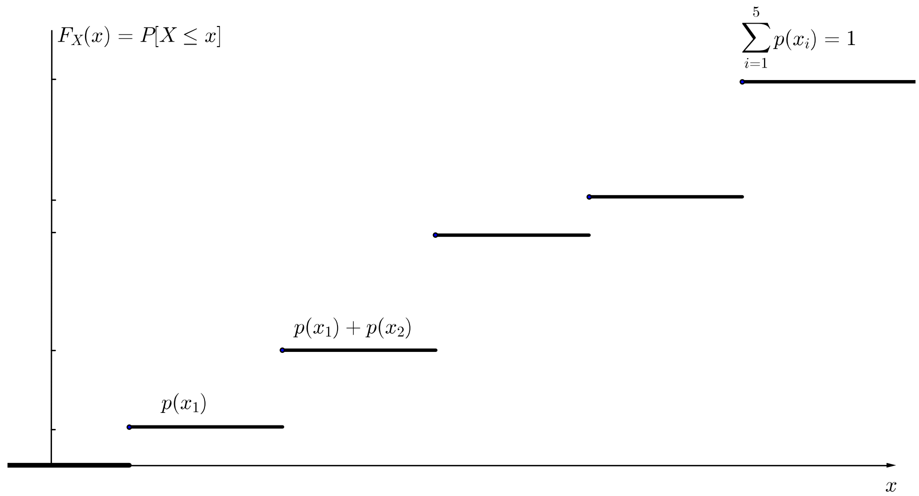
Satunnaismuuttujat voidaan luokitella kolmeen pääryhmään: *diskreetteihin*, *jatkuviin* sekä *sekatyyppisiin*. Satunnaismuuttujan X sanotaan olevan diskreetti, jos sen lähtöjoukko on äärellinen tai numeroituva. Tällaiselle satunnaismuuttujalle voidaan määritellä *todennäköisyysfunktio*, tai *todennäköisyysmassa* p:

$$p(x) = P\{X = x\}. \tag{3.1}$$

Esimerkki 3.1.4. Olkoon funktio X diskreetti satunnaismuuttuja, jolla on määrittelyjoukko $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ sekä määrittelyjoukon alkioihin liitetyt todennäköisyydet $P[X = x_i] > 0$, kaikille $i = 1, \ldots, 5$. Kuvassa 1 on diskreetin satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma ja kuvassa 2 on sen kertymäfunktio.



Kuva 1: Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma.



Kuva 2: Satunnaismuuttujan X kertymäfuntio F_X.

Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio voidaan esittää joko paloittain määriteltynä funktiona tai siten, että

$$F_X(x) = \sum_{x' \le x} p_X(x'), \tag{3.2}$$

missä todennäköisyydet $p_X(x') > 0$. Edellinen voidaan tulkita myös diskreetin satunnaismuuttujan määritelmäksi.

Esimerkissä 3.1.4 esitettiin tyypillinen esimerkki diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakaumasta ja kertymäfunktiosta. Matemaatikot ovat kehittäneet lukuisia diskreettejä todennäköisyysjakaumia tai kertymäfunktioita. Erilaisia jakaumia tarvitaan tutkittaessa erilaisia ilmiöitä. Esimerkkinä erityisistä diskreeteistä jakaumista esitellään *Bernoullin jakauma.*

Määritelmä 3.1.5. Satunnaismuuttuja X noudattaa Bernoullin jakaumaa, jos

$$P[X = x] = p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & muulloin \end{cases}$$

jollekin $p \in [0, 1]$

Määritelmän 3.1.5 funktion p_X on toteutettava Aksioomat 1, 2 ja 3, jotta sen voidaan sanoa olevan todennäköisyysfunktio. Tämä on lähes itsestään selvää. Koska $p \in [0,1]$, niin $p_X(0) = 1 - p \in [0,1]$ sekä $p_X(1) = p \in [0,1]$. Lisäksi $\sum_{i=1}^{2} p_X(x_i) = 1 - p + p = 1$, ja väite on todistettu.

Edellä esitettiin useampikin määritelmä diskreetille satunnaismuuttujalle. Jatkuva satunnaismuuttuja määritellään vain yhdellä tavalla, joka on analoginen yhtälön 3.2 kanssa.

Määritelmä 3.1.6. Satunnaismuuttujan X sanotaan olevan *jatkuva*, jos on olemassa sellainen funktio f_X, että kertymäfunktio F_X voidaan esittää muodossa

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy,$$

missä $x \in (-\infty, \infty)$.

Tällaista funktiota f_X kutsutaan satunnaismuuttujan X *tiheysfunktioksi*. Jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktio määritellään siis tiheysfunktion integraalina. Seuraava lause on siten intuitiivinen seuraus tästä.

Lause 3.1.7. *Jos kertymäfunktio F on kaikkialla derivoituva, niin*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F = f(x),$$

silloin kun f on funktion F tiheysfunktio.

Edellä todettiin, että kertymäfunktion F avulla voidaan vastata todennäköisyyttä koskeviin kysymyksiin. Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa funktio f toimii vastaavalla tavalla. Todennäköisyys sille, että satunnaismuuttujan X arvo on välillä $[a, b]$ saadaan yhtälöstä

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_{a}^{b} f_X(x)dx. \tag{3.3}$$

Asettamalla $b = a$ yhtälöön 3.3 saadaan

$$P\{X = a\} = \int_{a}^{a} f_X(x)dx = 0,$$

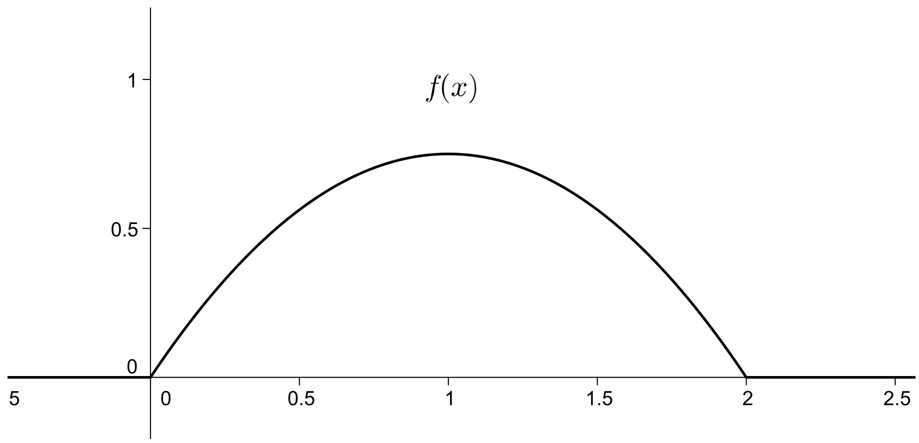
joten jatkuvalle satunnaismuuttujalle

$$P\{X < a\} = P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx.$$

Tämä tarkoittaa, että jatkuvan satunnaismuuttujan yksittäisen arvon todennäköisyys oletetaan nollaksi.

Esimerkki 3.1.8. Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio f_X, kuva 3, on

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(-x^2+2x) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & muulloin \end{cases}$$



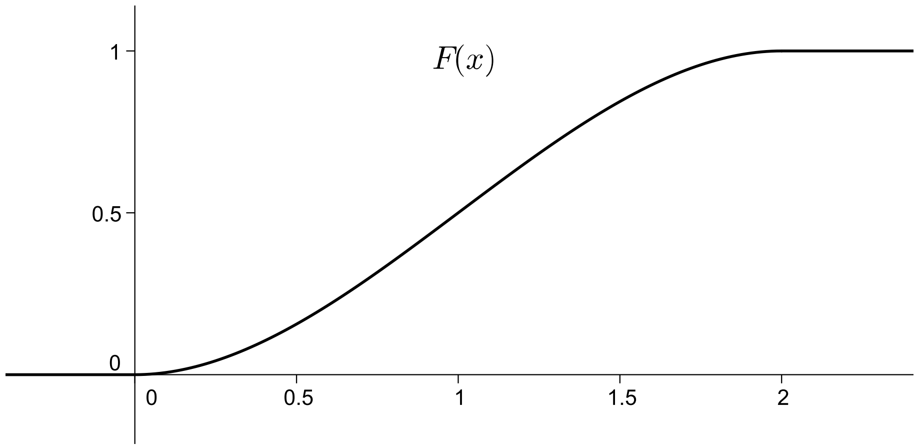
Kuva 3: Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f_X.

Kertymäfunktion arvo $F_X(a)$ on tällöin

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \frac{1}{4}(-a^3+3a^2) & 0 \leq a < 2 \\ 1 & a \geq 2 \end{cases}$$

Tarkastetaan onko määritelty funktio f todella tiheysfunktio. Jotta näin on, niin $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = 1$. Koska funktio f saa nollasta poikkeavia arvoja vain välillä $(0,2)$, niin riittää tarkastella integraalia $\int_0^2 f_X(x)dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f_X(x)dx &= \frac{1}{4} \Big/_{0}^{2} (-x^3+3x^2) \\ &= \frac{1}{4}(-8+12) \\ &= \frac{1}{4} * 4 = 1 \end{aligned}$$



Kuva 4: Satunnaismuuttujan X kertymäfuntio F_X.

Funktio f siis kelpaa satunnaismuuttujan X tiheysfunktioksi, joten F on siten sen kertymäfunktio, kuva 4.

Kuten diskreettejä, niin myös jatkuvia satunnaismuuttujia on lukuisia erilaisia, joista esimerkkinä *eksponenttijakauma*.

Määritelmä 3.1.9. Jos jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, jollekin $\lambda > 0$, on muotoa

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

niin sen sanotaan olevan eksponentiaalisesti jakautunut.

Määritelmän 3.1.9 funktio f_X on tiheysfunktio vain, jos $F(+\infty) = 1$. Nyt, Määritelmän 3.1.2 merkinnöillä:

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \lim_{a \to +\infty} F_X(a) = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{a \to +\infty} \Big/_0^a -e^{-\lambda x} = \lim_{a \to +\infty} -e^{-\lambda a} + e^{-\lambda 0} \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Diskreetin ja jatkuvan satunnaismuuttujan lisäksi on olemassa sekatyyppisiä satunnaismuuttujia.

Määritelmä 3.1.10. Satunnaismuuttuja on *sekatyyppiä*, jos sen kertymäfunktio on muotoa

$$F = c_1 F^d + c_2 F^{ac},$$

missä $c_1, c_2 > 0, c_1 + c_2 = 1$ ja F^d on diskreetin ja F^{ac} jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktio.

Määritelmän 3.1.10 mukainen satunnaismuuttuja on mukana vain kuriositeetin vuoksi, eikä siihen tässä työssä enää palata.

3.2 Satunnaismuuttujan momentit

Käytännön sovelluksia varten on hyödyllistä puhua satunnaismuuttujan *momentista.* Momentti on satunnaismuuttujan suure. Esimerkki momentin soveltamisesta on jostakin tuotteesta saatu *keskimääräinen* voitto. Eräs tärkeimmistä satunnaismuuttujiin liitetyistä momenteista on sen odotusarvo.

Määritelmä 3.2.1. Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* EX on muotoa

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

olettaen, että kyseinen integraali on olemassa, ja että se on äärellinen.

Huomautus 3.2.2. Tässä työssä satunnaismuuttujien momentit määritellään jatkuville funktioille. Diskreettien satunnaismuuttujien momentit määritellään vastaavilla ehdoilla, mutta siten, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty}$ vaihdetaan summaan $\sum_{i=1}^{\infty}$ sekä tiheysfunktio $f_X(x)$ todennäköisyysfunktioon $p_X(x_i)$. Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo on siten muotoa

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i).$$

Diskreetille satunnaismuuttujalle sen odotusarvo EX on *painotettu keskiarvo* arvoista x_i, jossa 'painona' on arvon x_i sattumistodennäköisyys $p_X(x_i)$. Jos satunnaismuuttujan kaikilla tapahtumilla on sama todennäköisyys, eli $p_X(x_i) = 1/N$, missä N on tapahtumien lukumäärä, niin odotusarvo vastaa *aritmeettista keskiarvoa* $\bar{X}$:

$$EX = \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\mathbb{N}} x_i = \bar{X}$$

Lause 3.2.3. *Jos f on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, niin tällöin reaaliarvoisen funktion g odotusarvo*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Lausetta ei tässä todisteta. Mielenkiintoinen todistus löytyy viitteestä [20].

Osoitetaan seuraavaksi eräitä tärkeitä odotusarvon laskemiseen liittyviä ominaisuuksia.

Lause 3.2.4. *Olkoon X satunnaismuuttuja ja $c \neq 0$ vakio. Lisäksi, olkoot $g(X), g_1(X)$ ja $g_2(X)$ reaaliarvoisia funktioita, joille on olemassa odotusarvot. Tällöin*

1. $E(c) = c$;
2. $E(cg(X)) = cEg(X)$;
3. $E(g_1(X) + g_2(X)) = Eg_1(X) + Eg_2(X)$;
4. $Eg_1(X) \leq Eg_2(X)$, *jos* $g_1(x) \leq g_2(x)$ *kaikilla* x;
5. $|Eg(X)| \leq E|g(X)|$.

Todistus.

1. $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c f_X(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = c$
2. $E(cg(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x) f_X(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = cEg(X)$
3.

$$\begin{aligned} E(g_1(X) + g_2(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x) + g_2(x)] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x) dx \\ &= Eg_1(X) + Eg_2(X) \end{aligned}$$

4. Jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in R$, niin
$$\int_R f(x)dx \leq \int_R g(x)dx.$$
Tällöin siis
$$\begin{aligned} Eg_1(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x) dx = Eg_2(X). \end{aligned}$$

5. Jos funktio f on integroituva joukossa R, niin myös $|f|$ on, jolloin niille on voimassa integraalien kolmioepäyhtälö:
$$\Big| \int_R f \Big| \leq \int_R |f|.$$
Täten siis
$$\begin{aligned} |Eg(X)| &= \Big| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \Big| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x) f_X(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx = E|g(X)|. \end{aligned}$$

$\square$

Edellä saadut tulokset ovat erittäin hyödyllisiä apuvälineitä eri satunnaismuuttujien momenttien ominaisuuksien selvittämiseksi.

Määritelmä 3.2.5. Satunnaismuuttujan X n. keskusmomentti on
$$\mu_n \equiv E[X - EX]^n$$

Tärkeitä keskusmomentteja ovat ainakin toinen $\mu_2 \equiv E[X - EX]^2$ ja kolmas keskusmomentti $\mu_3 \equiv E[X - EX]^3$. Edellistä kutsutaan satunnaismuuttujan X *varianssiksi*, ja jälkimmäistä sen *vinoudeksi*.

Olkoon $Y = h(X)$ satunnaismuuttuja, missä $h(X) = (X - EX)^2$, jolla on odotusarvo. Tällöin määritelmän 3.2.1 nojalla sen odotusarvo on muotoa

$$EY = E[(X - EX)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - EX]^2 f_X(x)dx.$$

Edellä määritellyn funktion $h(X)$ odotusarvo on siis satunnaismuuttujan X varianssi.

Satunnaismuuttujan momenttien laskeminen voi olla työlästä, etenkin suurten aineistojen kohdalla. Tästä syystä on, mahdollisuuksien mukaan, mielekästä käyttää jo laskettuja momentteja hyväksi määritettäessä uusia.

Lemma 3.2.6. $Var(X) = EX^2 - [EX]^2$.

Todistus.

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[X - EX]^2 \\
&= E(X^2 - 2XEX + [EX]^2) \\
&= EX^2 - 2EXEX + [EX]^2 \\
&= EX^2 - [EX]^2.
\end{aligned}$$

□

Satunnaismuuttujan varianssi on siis sen neliön odotusarvon ja odotusarvon neliön erotus.

Lause 3.2.7. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Todistus.

$$\begin{aligned}
Var(aX + b) &= E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 \\
&= E[aX + b - E(aX) - b]^2 \\
&= E[a(X - EX)]^2 \\
&= a^2 E[X - EX]^2 \\
&= a^2 Var(X).
\end{aligned}$$

□

Jatkossa odotusarvolle ja varianssille käytetään lyhyempiä merkintöjä siten, että $\mu = EX$ ja $\sigma^2 = Var(X)$. Lisäksi määritellään vielä keskihajonta $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

Lause 3.2.8. *Olkoon* $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ *satunnaismuuttuja. Tällöin* $EX^* = 0$ *ja* $Var(X^*) = 1$.

Todistus. Käytetään satunnaismuuttujan X odotusarvolle EX, keskihajonnalle $\sigma(X)$ sekä varianssille $Var(X)$ edellä määriteltyjä merkintöjä todistuksen selkeyttämiseksi. Nyt siis $EX = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$ ja $Var(X) = \sigma^2$.

i.

$$\begin{aligned} EX^* &= E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\ &= E\left(\frac{1}{\sigma}(X-\mu)\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] = \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu] = 0 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} Var(X^*) &= Var\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\ &= Var\left(\frac{1}{\sigma}(X-\mu)\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu) \\ &= \frac{Var(X)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1. \end{aligned}$$

□

Edellä esitettyä satunnaismuuttujaa X^* kutsutaan *standardisoiduksi* satunnaismuuttujaksi. Tällöin minkä tahansa satunnaismuuttujan jakauma saadaan odotusarvon ja varianssin osalta yhtäläisiksi. Tämä helpottaa esimerkiksi satunnaismuuttujien vertailua. Tunnetuin tällainen jakauma on todennäköisesti *standardinormaalijakauma* $N(0,1)$

Tärkeitä jakaumia

Monet tutkitut satunnaisilmiöt näyttävät noudattavan niin sanottua *normaalijakaumaa.* Tästä syystä se on erittäin tärkeä funktio tutkittaessa mitä erilaisempia ilmiöitä. Myös tämän työn empiirinen analyysi perustuu olettamukseen normaalisti jakautuneista satunnaisilmiöistä.

Määritelmä 3.2.9. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo $EX = \mu$ ja varianssi $Var(X) = \sigma^2$ ovat olemassa. Jos satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

niin sen sanotaan olevan *normaalisti jakautunut*, ja sitä merkitään $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Jotta tiedetään, että edellä määritelty f todella on tiheysfunktio, niin on näytettävä, että $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$. Eräs todistus on viitteessä [20], mutta tässä sitä ei käydä läpi. Osoitetaan seuraavaksi eräs normaalijakauman tärkeä ominaisuus.

Esimerkki 3.2.10. Jos satunnaismuuttuja X on normaalijakautunut odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2, niin satunnaismuuttuja $Y = \alpha X + \beta$ on normaalijakautunut odotusarvolla $\alpha\mu + \beta$ ja varianssilla $\alpha^2\sigma^2$.

Oletetaan, että $\alpha > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \leq a\} \\ &= P\{\alpha X + \beta \leq a\} \\ &= P\{X \leq \frac{a-\beta}{\alpha}\} \\ &= F_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Koska satunnaismuuttuja X on normaalijakautunut, niin kertymäfunktion F arvo pisteessä $\frac{a-\beta}{\alpha}$ saadaan määritelmän 3.2.9 mukaisen tiheysfunktion määrätystä integraalista siten, että

$$F_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{(a-\beta)/\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Tekemällä integraaliin muuttujanvaihto $y = \alpha x + \beta$, saadaan $F_Y(a)$, joka saa esityksen

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{[y-(\alpha\mu+\beta)]^2}{\alpha^2\sigma^2}} dy.$$

Koska kertymäfunktion arvo $F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy$, niin tiheysfunktio

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{[y-(\alpha\mu+\beta)]^2}{\alpha^2\sigma^2}},$$

eli satunnaismuuttuja Y on normaalijakautunut parametreilla $\alpha\mu+\beta$ ja $\alpha^2\sigma^2$.

Edellinen todistus on tärkeä siksi, että sen perusteella voidaan määritellä niin sanottu normaalijakauman standardimuoto. Lauseen 3.2.8 nojalla, jos satunnaismuuttuja X on normaalijakautunut parametreilla μ ja σ^2, niin satunnaismuuttuja $Y = (X - \mu)/\sigma$ on normaalijakautunut parametreilla 0 ja 1, ja merkitään $Y \sim N(0, 1)$.

Huomautus 3.2.11. Lause 3.2.8 ei totea mitään standardisoidun satunnaismuuttujan jakaumasta. Edellisen esimerkin nojalla voidaan todeta, että normaalijakautunut satunnaismuuttuja pitää tällöin "muotonsa".

Vaikka oletus ilmiöiden normaalijakautuneisuudesta pitäisikin paikkansa, niin harvoin mielekkään kokoinen tutkimusaineisto on jakautunut täsmälleen sen mukaisesti. Oletuksena tällöin on, että jakauman varianssi on sitä suurempi, mitä pienemmästä aineistosta on kyse. Tätä varten määritellään jakauma, joka muistuttaa muodoltaan normaalijakaumaa, ja joka itse asiassa lähestyy sitä kun aineiston koko kasvaa.

Määritelmä 3.2.12. *Gammafunktio* Γ on kaikille reaaliluvuille $n > 0$

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = 2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy.$$

Gammafunktiolle on osoitettavissa yhtäsuuruus $\Gamma(n) = (n-1)!$. Tässä sitä käytetään määritettäessä jakaumia, joiden avulla tutkitaan regressio - mallin parametrien luotettavuutta.

Määritelmä 3.2.13. Satunnaismuuttuja X on *Student'in t-jakauma vapausasteella* n, jos jollekin $n > 0, n \in R_+$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

Määritelmää 3.2.13 käytetään laskettaessa kertymäfunktion arvoja vapausastetta $n` oleville t-jakaumille. Koska määritelmän mukaan t-jakauma on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, niin sen on toteutettava määritelmässä 3.1.6 annetut ehdot. Näiden ehtojen osoittaminen ei tässä ole mielekästä, joten se sivuutetaan. Edellä määritelty jakauma f muodostaa *funktioperheen.*

Määritelmä 3.2.14. Satunnaismuuttujan X jakauman sanotaan olevan $F-$ *jakauma* $F(n_1, n_2)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ jos sen kertymäfunktio f on muotoa

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{x^{(1/2)(n_1-2}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{(1/2)(n_1+n_2)}} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases},$$

F-jakauma on kahden parametrin, n_1, n_2, määrittelemä funktioperhe. Kuten määritelmästä voi havaita, niin parametrien järjestyksellä on merkitystä jakauman määrittelyssä. Tämänkään jakauman kohdalla ei osoiteta sen kelpaavan kertymäfunktioksi, vaan sen oletetaan kelpaavan.

3.3 Usean satunnaismuuttujan momentit

Edellä on käsitelty yksittäisen eli yksiulotteisen satunnaismuuttujan momentteja. Käytännön sovelluksissa ollaan kuitenkin usein kiinnostuneita kahden tai useamman satunnaismuuttujan keskinäisistä riippuvuuksista. Tästä syystä laajennamme käsittelyn koskemaan satunnaismuuttujien yhdistettyjä momentteja, tai moniulotteisen satunnaismuuttujan momentteja. Aloitetaan esittelemällä lauseelle 3.2.3 analoginen tulos, joka tässä yhteydessä jätetään todistamatta.

Lause 3.3.1. *Olkoon* $(X_1, \ldots, X_n)$ *n-ulotteinen satunnaismuuttuja, ja olkoon* $E[g(X_1, \ldots, X_n)]$ *olemassa. Tällöin*

$$Eg(X_1, \ldots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Ennen käsittelyn ulottamista n-ulotteisten satunnaismuuttujien muihin momentteihin otetaan katsaus tilanteeseen, jossa ollaan kiinnostuneita satunnaismuuttujien tapahtumien yhtäaikaisesta sattumisesta ja sen todennäköisyydestä.

Määritelmä 3.3.2. Satunnaismuuttujien X ja Y sanotaan olevan *yhteisesti jatkuvia*, jos kaikille reaaliluvuille x ja y on olemassa funktio $f(x,y)$, jonka kaikille reaalilukuparijoukoille $C \subset \mathbb{R}^2$ on voimassa yhtälö.

$$P\{(X,Y) \in C\} = \int_C f(x,y)dxdy.$$

Funktiota $f(x,y)$ kutsutaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhdistetyksi tiheysfunktioksi.*

On olemassa tilanteita, joissa tarkastellaan kahta eri satunnaismuuttujaa yhdessä, mutta niillä ei ole vaikutusta toisiinsa. Tällöin tilanne vastaa määritelmän 2.2.5 tilannetta, eli:

Määritelmä 3.3.3. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y yhdistetty tiheysfunktio $f(x,y)$, sekä *reunatiheysfunktiot* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$. Satunnaismuuttujia X ja Y sanotaan tilastollisesti riippumattomiksi jos ja vain jos

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

kaikille $x \in X, y \in Y$.

Lauseen 3.3.1 ja määritelmän 3.3.3 nojalla kahden riippumattoman satunnaismuuttujan odotusarvolle saadaan seuraava lauseke.

Propositio 3.3.4. *Jos satunnaimuuttujat X_1 ja X_2 ovat riippumattomia, niin mielivaltaisille funktioille g ja h on voimassa yhtälö*

$$E[g(X)h(Y)] = Eg(X)Eh(Y).$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
E[g(X)h(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)dy \\
&= Eg(x)Eh(y).
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 3.3.5. Olkoon (X_1, X_2) kaksiulotteinen satunnaismuuttuja. Määritellään kaikille ei-negatiivisille kokonaisluvuille n_1, n_2 luku

$$\mu_{n_1,n_2} = E\{(X_1 - EX_1)^{n_1}(X_2 - EX_2)^{n_2}\}$$

olettaen, että odotusarvo on olemassa. Lukua μ_{n_1,n_2} kutsutaan satunnaismuuttujien (X_1, X_2) *yhdistetyksi keskusmomentiksi* , jonka kertaluokka on $n_1 + n_2$.

Esimerkki 3.3.6. Olkoon $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ kaksiulotteinen satunnaismuuttuja. Määritelmän 3.3.5 nojalla

i. $\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0$. Osoitetaan, että $\mu_{1,0} = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mu_{1,0} &= E\{(X_1 - EX_1)^1(X_2 - EX_2)^0\} \\
&= E\{(X_1 - EX_1) \cdot 1\} \\
&= EX_1 - EX_1 = 0.
\end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\mu_{0,1} = 0$.

ii. $\mu_{2,0} = Var(X_1)$ ja $\mu_{0,2} = Var(X_2)$. Kuten edellä, niin kohdassa ii. riittää näyttää vain toinen tapaus. Osoitetaan, että $\mu_{2,0} = Var(X_1)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mu_{2,0} &= E\{(X_1 - EX_1)^2(X_2 - EX_2)^0\} \\
&= E\{(X_1 - EX_1)^2 \cdot 1\} \\
&= Var(X_1).
\end{aligned}$$

iii. $\mu_{1,1} = E\{(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\}$. Tällaista toisen kertaluokan, $\mu_{1,1}$, yhdistettyä keskusmomenttia kutsutaan satunnaismuuttujien X_1, X_2 *kovarianssiksi*, ja se merkitään $cov(X_1, X_2)$.

Esimerkin 3.3.6 kohdassa iii. esitetty määritelmä kovarianssille voidaan laskea auki, jolloin saadaan käyttökelpoisempi yhtälö kovarianssin määrittämiseksi.

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E\{(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\} \\
&= E[X_1X_2 - EX_1X_2 - X_1EX_2 + EX_1EX_2] \\
&= E(X_1X_2) - EX_1EX_2 - EX_1EX_2 + EX_1EX_2 \\
&= E(X_1X_2) - EX_1EX_2.
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.4 nojalla $Cov(X_1, X_2) = 0$, jos satunnaismuuttujat X_1, X_2 ovat riippumattomia. Kuitenkaan ei voida sanoa, että satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, jos niiden kovarianssi on nolla. Katso esimerkiksi [8, th. 5.3.11].

Edellä esitelty kovarianssi tulee käyttöön esimerkiksi laskettaessa kahden mielivaltaisen satunnaismuuttujan summan varianssia.

$$\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2) &= E\big\{[X_1 + X_2 - E(X_1 + X_2)]^2\big\} \\
&= E\big\{[X_1 + X_2 - EX_1 - EX_2]^2\big\} \\
&= E\big\{[(X_1 - EX_1) + (X_2 - EX_2)]^2\big\} \\
&= E\big\{(X_1 - EX_1)^2 + (X_2 - EX_2)^2 \\
&\quad +2(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\big\} \\
&= E\big\{(X_1 - EX_1)^2\big\} + E\big\{(X_2 - EX_2)^2\big\} \\
&\quad +2E\big\{(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\big\} \\
&= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2).
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien summan varianssi on siis yksittäisten varianssien summa lisättynä kahdella kovarianssilla. Odotusarvot $EX_1, EX_2 \in \mathbb{R}$, ja voivat numeroarvoltaan vaihdella suuresti. Tällöin myös kovarianssin arvo voi vaihdella suuresti. Tällaisella tiedolla voi olla hankala vertailla esimerkiksi sitä kumpi satunnaismuuttuja, A vai B, korreloi enemmän satunnaismuuttujan C kanssa. Tätä varten määritellään kerroin, jonka avulla vertailu onnistuu.

Määritelmä 3.3.7. Satunnaismuuttujien X_1, X_2 *korrelaatiokerroin* on muotoa

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}.$$

Määritelmän 3.3.7 korrelaatiokertoimella on loistava ominaisuus, jonka vuoksi sen käyttö on hyödyllistä vertailtaessa korrelaatioiden suuruuksia. Kerroin saa nimittäin arvoja vain väliltä $[-1, 1]$.

Lause 3.3.8. *Korrelaatiokertoimelle ρ on osoitettavissa seuraavat ominaisuudet:*

1. $-1 \leq \rho(X_1, X_2) \leq 1$

2. $\rho(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{X_2 - EX_2}{\sigma(X_2)} = \frac{X_1 - EX_1}{\sigma(X_1)}$

3. $\rho(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{X_2 - EX_2}{\sigma(X_2)} = -\frac{X_1 - EX_1}{\sigma(X_1)}$

Todistus. Todistetaan tässä kohta 1. Muut kohdat katso [8, s. 123].

1. Oletetaan, että satunnaismuuttujilla X_1, X_2 on olemassa varianssit $\sigma^2_{X_1}, \sigma^2_{X_2}$. Tällöin

$$\begin{aligned} 0 &\leq Var\left(\frac{X_1}{\sigma_{X_1}} + \frac{X_2}{\sigma_{X_2}}\right) \\ &= \frac{Var(X_1)}{\sigma^2_{X_1}} + \frac{Var(X_2)}{\sigma^2_{X_2}} + \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\ &= 1 + 1 + 2\frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\ &= 2[1 + \rho(X_1, X_2)], \end{aligned}$$

josta voidaan ratkaista, että $-1 \leq \rho(X_1, X_2)$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} 0 &\leq Var\left(\frac{X_1}{\sigma_{X_1}} - \frac{X_2}{\sigma_{X_2}}\right) \\ &= \frac{Var(X_1)}{\sigma^2_{X_1}} + \frac{Var(X_2)}{(-\sigma_{X_2})^2} - \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\ &= 1 + 1 - 2\frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\ &= 2[1 - \rho(X_1, X_2)], \end{aligned}$$

josta saadaan $\rho(X_1, X_2) \leq 1$.

□

Korrelaatiokerroin mittaa satunnaismuuttujien *lineaarista* suhdetta. Tämä tarkoittaa sitä, positiivisella kertoimella muuttujan X_1 kasvaessa myös X_2 kasvaa, ja vastaavasti negatiivisella kertoimella päinvastoin. Lisäksi mitä lähemmäs välin päätepisteitä kerroin on, niin sitä voimakkaampi on riippuvuus, kun taas arvo 0 indikoi riippumattomuutta.

3.4 Ehdollinen odotusarvo

Luvun lopuksi esitällään satunnaismuuttujien ehdollinen odotusarvo. Työssä tutkitaan selitettävää muuttujaa X selittävillä muuttujilla Y_i, ja erityisesti selitetään odotusarvoa EX muuttujilla Y_i.

Määritelmä 3.4.1. Jos ehdollinen kertymäfunktio $F_{X|Y}(x|y)$ on jatkuva, niin satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla Y on

$$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$$

Huomioitavaa on, että odotusarvo $E[X|Y=y]$ on vain paljas luku, mutta $E(X|Y)$ on satunnaismuuttuja.

Lause 3.4.2. *Olettaen, että suuret ovat olemassa, niin mielivaltaisille diskreeteille satunnaismuuttujille on voimassa yhtälö*

$$EX=E[E(X|Y)].$$

Luvussa 2.2 esitelty määritelmä 2.2.1 *ehdollinen todennäköisyys* on sovellettevissa myös satunnaismuuttujien odotusarvoille. Oletetaan, että satunnaismuuttujilla X ja Y on yhdistetty todennäköisyysjakauma. Tällöin satunnaismuuttujalle X on määritelty ehdollinen todennäköisyysfunktio $p_{X|Y}$ ehdolla $Y=y$ siten, että

$$p_{X|Y}(x|y)=P\{X=x|Y=y\}=\frac{p(xy)}{p_Y(y)}. \tag{3.4}$$

Todistus. Lauseen todistamiseksi on osoitettava, että ehto

$$EX=\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\}$$

on tosi. Muokataan yhtälön oikeata puolta:

$$\begin{aligned}
\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y \sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\} \\
&= \sum_y \sum_x x\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}P\{Y=y\} \\
&= \sum_y \sum_x xP\{X=x,Y=y\} \\
&= \sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\} \\
&= \sum_x xP\{X=x\} \\
&= EX
\end{aligned}$$

□

Lauseen 3.4.2 osoittama ominaisuus on vastaava kuin luvussa 2.2 esitetyllä yhtälöllä 2.2. Nimittäin, satunnaismuuttujan X odotusarvo voidaan määritellä niiden satunnaismuuttujan Y tapahtumien todennäköisyyksien 'painotettuna odotusarvona', joille X on ehdollistettu.

4 Regressioanalyysi

Tässä luvussa on lyhyt kuvaus työssä käytetystä menetelmästä, eli regressioanalyysista. Lisäksi esitellään tässä työssä käytetyt, regression tuottaman mallin arviointiin tarvittavat käsitteet. Luvun teoria on peräisin viitteistä [5], [9], [12], [13], [15], [17], [19] ja [23]

4.1 Menetelmä

Regressioanalyysi on tilastollinen menetelmä, jolla estimoidaan paras mahdollinen selittävien muuttujien x_i yhdistelmä ennustettaessa selitettävää muuttujaa y. Matematiikassa vastaavaa menetelmää kutsutaan nimellä *pienimmän neliösumman menetelmä*. Tämän työn mallinnuksessa käytetään erityisesti *lineaarista regressiota*. Yksinkertainen lineaarinen regressio on muotoa

$$y = \beta_0 + \beta_1 x,$$

missä y on selitettävä muuttuja, x on selittävä muuttuja ja β_0, β_1, jotka ovat sovitettavat parametrit. *Usean selittäjän regressiossa* selittäviä muuttujia on useampia. Yleisesti kirjoitettuna

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p.$$

Puhuttaessa lineaarisesta regressiosta tarkoitetaan *parametrien lineaarisuutta*, joka on yksi niin kutsutuista *Gauss-Markovin ehdoista*, jotka kuvaavat ideaalisen regressiomallin. Lineaarisuusoletus voidaan esittää myös ehdollisena todennäköisyytenä

$$E(Y|\mathbf{X}) = \mathbf{X}\beta,$$

missä $\mathbf{X}$ tarkoittaa kaikkien selittävien muuttujien muodostamaa matriisia ja β on parametrivektori. Tällöin yksittäisen selittävän muuttujan X_i yksikkömuutos on vakio β_i koko tarkastelujakson yli. Toisin sanoen

$$\frac{\partial E(Y|\mathbf{X})}{\partial X_i} = \beta_i.$$

Reaalimaailman ilmiöitä tutkittaessa on huomioitava, että luotu malli on aina (karkea) kuvaus alkuperäisestä ilmiöstä. Tämä tarkoittaa, että kaikkia ilmiöön liittyviä tekijöitä ei ole edes mahdollista saati mielekästä sisällyttää malliin. Tällöin ilmiön ja luodun mallin välillä on eroavaisuuksia. Yllä kuvatussa regressiossa tällaista virheen mahdollisuutta ei ole otettu huomioon. Sitä kutsutaan tällön *deterministiseksi*.

Edellinen merkitsee siis sitä, että luodun mallin arvot eroavat tutkitun aineiston havaintoarvoista. Tämä ei kuitenkaan tarkoita etteikö mielekästä mallia olisi löydettävissä. On tyydyttävä malliin, joka on mahdollisimman lähellä alkuperäistä aineistoa. Kun malli ei täysin vastaa alkuperäistä tilannetta, niin siihen sanotaan sisältyvän *virhettä*. Kun havaintopiste y_i on etäisyyden r päässä mallin arvosta $\hat{y}_i$, eli

$$r_i = |y_i - \hat{y}_i|, \tag{4.1}$$

niin parametri r on mallin sisältämä virhe[1], jota kutsutaan *jäännökseksi*, eng. residual.

Ylimääräytyvä, eli ei-deterministinen, usean selittäjän regressio kirjoitetaan muodossa

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p + r.$$

Jättämällä yllä olevasta yhtälöstä pois jäännöstermi r saadaan yhtälössä 4.1 esiintyvä $\hat{y}$, eli

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p.$$

Mahdollisimman hyvään malliin päästään minimoimalla jäännös r. Jäännöksen matriisiyhtälö on muotoa

$$r = Y - \mathbf{X}\beta.$$

Jäännösvektorin r pituus määritetään Eukleideen vektorinormilla

$$\|r\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \right)^{1/2},$$

jota minimoidaan. Tästä ilmeisesti nimitys *pienin* neliösumma.

Huomautus 4.1.1. Euklidinen normi on arkielämästä kaikille tuttu etäisyysmitta, missä kahden tasonpisteen x_1, x_2 välinen etäisyys y on määritetty niiden neliöiden summan neliöjuurena, eli

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

[1] *Tilastollinen virhe* tarkoittaa mittaustuloksen ja tutkittavan suureen 'todellisen' arvon erotusta, eikä se ole mittaajan havaittavissa. *Jäännös* on mallin antaman arvon ja mittaustuloksen välinen erotus.

Normi on yleistettävissä n -ulotteisiin avaruuksiin, jolloin se saa muodon

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Määritelmä 4.1.2. Olkoon $\mathbf{X}\beta = Y$ ylimääräytyvä joukko yhtälöitä, missä $\mathbf{X}$ on $m \times n$ matriisi, $m > n$. Pienimmän neliösumman menetelmä minimoi *Euklidisen normin* jäännösvektorin r. Toisin sanoen β on optimointiongelman

$$\min_{\beta} \|r\|_2 = \min_{\beta} \|Y - \mathbf{X}\beta\|_2$$

ratkaisu.

Lause 4.1.3. *Jos matriisin* $\mathbf{X}$ *sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin matriisi* $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ *on olemassa, jolloin optimointi ongelmalla*

$$\min_{\beta} \|Y - \mathbf{X}\beta\|_2$$

on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^T Y.$$

Todistus sivuutetaan, katso [9, s. 235 -236].

Otetaan seuraavaksi yksinkertainen esimerkki pienimmän neliösumman käytöstä.

Esimerkki 4.1.4. Olkoon havaintoaineistona kolme tason pistettä $z_1 = (1, 6), z_2 = (2, 7)$ ja $z_3 = (3, 10)$. Oletetaan, että mitattua ilmiötä voidaan kuvata suoralla $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$. Jäännöksen matriisiyhtälö saa siten muodon

$$r = Y - \mathbf{X}\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Lauseen 4.1.3 nojalla virhetermin minimi saadaan yksikäsitteisesti ratkaistua, jos matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, eli $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ on olemassa. Huomataan, että tässä tapauksessa näin on. Tällöin

$$\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

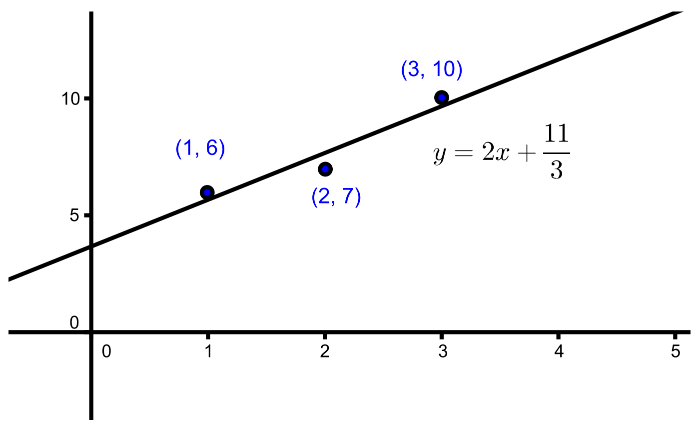
Matriisi $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ on olemassa ja, ratkaisemalla esimerkiksi Gauss-Jordan -menetelmällä, on muotoa

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmän $\mathbf{X}^T\mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^T Y$ ratkaisuksi saadaan

$$\beta = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T Y = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ilmiötä parhaiten kuvaava suoranyhtälö on siis muotoa $y = 2x + \frac{11}{3}$.



Kuva 5: Havaintopisteet $z_i, i = 1, 2, 3$ sekä PNS -sovitettu suora y.

Näin on saatu jäännösvektori

$$r = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

jolloin sen pituus $\|r\|_2 = 1$.

Luvun lopuksi esitellään jo edellä mainitut Gauss-Markov ehdot.

Määritelmä 4.1.5. Seuraavia ehtoja kutsutaan Gauss-Markov ehdoiksi usean selittäjän regressiossa.

1. Parametrien lineaarisuus: Malli kirjoitetaan muodossa

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + r,$$

   missä $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ ovat tuntemattomia parametreja, ja r on "näkymätön" satunnainen virhetermi.

2. Satunnaisotanta: On olemassa satunnaisotos, jossa on n havaintoa, $\{(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$, jotka seuraavat oletuksesta 1.

3. ei-Kollineaariset muuttujat: Selittävät muuttuja eivät saa olla vakioita, eikä yksikään selittävä muuttuja saa olla täydellisessä lineaarisessa riippuvuussuhteessa toiseen selittävään muuttujaan.

4. Ehdollinen odotusarvo: Virhetermin r ehdollinen odotusarvo on nolla kaikilla selittävien muuttujan arvoilla. Toisin sanoen

$$E(r|x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0.$$

5. Homoskedastisuus: Virhetermin r varianssi on vakio kaikilla selittävien muuttujan arvoilla, eli

$$Var(r|x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sigma^2.$$

Nämä ehdot ovat olettamuksia, jotka toteutuessaan kuvaavat ideaalisen regressiomallin. Koska todellisuus ei useinkaan vastaa teoriaa, niin näitä olettamuksia ei pidetä ehdottomina, vaan sellaisina, joita kohti on hyvä pyrkiä.

4.2 Mallin arviointi

Edellä esitetty pienimmän neliösumman matemaattinen tarkastelu ei ota kantaa saadun mallin tilastollisista ominaisuuksista. Mallin hyvyyttä arvioidaan erilaisilla tilastollisilla suureilla. Tässä työssä tehtyjä sovitteita on arvioitu kolmen eri suureen avulla. Ne ovat *selitysaste*, R^2, *t-testi* ja *F-statistiikka*.

4.2.1 Varianssien vertailu

Muokkaamalla yhtälöä 4.1 saadaan havaintoarvo y_i kirjoitettua sovitetun arvon $\hat{y}_i$ ja jäännöstermin r_i summana

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{r}_i.$$

Määritelmän 4.1.5 mukaan jäännöksen ehdollinen odotusarvo $E(r|x_i) = 0$, ja koska $Cov(\hat{y}_i, r) = E(\hat{y}_i r) = 0$ ([23, s. 29 - 34]), niin tutkittaessa pienimmän neliösumman ominaisuuksia, sovitetta ja virhetermiä voidaan käsitellä erikseen. Määritellään nyt suureita, joiden avulla kyetään tarkastelemaan regressiomallin hyvyyttä.

Määritelmä 4.2.1. Olkoon $\overline{y}$ havaintoaineiston keskiarvo, y_i havaintoasineiston i:s havainto, $\hat{y}_i$ selitetty arvo i sekä r_i jäännös havainnolle i. Olkoon tällöin

$$\mathrm{SST} \equiv \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 \tag{4.2}$$

$$\mathrm{SSE} \equiv \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2 \tag{4.3}$$

$$\mathrm{SSR} \equiv \sum_{i=1}^{n} r^2. \tag{4.4}$$

Lyhenne SST tulee sanoista *total sum of squares*, ja se mittaa havaintoaineiston vaihtelua. SSE, eli *explained sum of squares*, mittaa selitettyjen arvojen vaihtelua, ja SSR, *residual sum of squares*, on niin sanottu jäännösneliösumma. SST voidaan aina ilmaista termien SSE ja SSR summana, eli

$$SST = SSE + SSR. \tag{4.5}$$

Tätä yhtälöä käytetään hyväksi määritettäessä sitä kuinka hyvin selittävät muuttuja kuvaavat selitettävää muuttujaa. Olettaen, että SST $\neq 0$, niin yhtälö 4.5 voidaan jakaa termillä SST, jolloin saadaan aikaiseksi yhtälö

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}.$$

Määritelmä 4.2.2. Regressiomallin *selitysaste* R^2 määritellään yhtälönä

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}.$$

Jos termit SST ja SSE jaetaan luvulla $n - 1$, niin saadaan sekä alkuperäisen että selitettyjen arvojen varianssit. Mallin selitysaste voidaan siten tulkita aineiston selitettyjen ja havaittujen arvojen varianssien suhteeksi.

4.2.2 Parametrin merkitsevyys

Yksittäisen parametrin merkitsevyyden arvioimiseen käytetään niin kutsuttua *t-testiä*. Merkitsevyystesteillä tutkitaan mallin parametrien luotettavuutta. Yleensä testit perustuvat suuriin aineistoihin, jotka ovat likimain normaalijakautuneita. Kuitenkin luotettavuustestejä tehdään myös aineistoille, jotka ovat "vähemmän"normaalijakautuneita. Tällöin testiin sovelletaan luvussa 3.2 esitettyä Student'in jakaumaa. Jakauma muistuttaa normaalijakaumaa, mutta sillä on suurempi vaihteluväli. Aineiston koosta riippuen sillä sanotaan olevan *vapausaste* $n-1$, missä n on havaintoarvojen lukumäärä. Mitä suurempi n, sitä lähempänä jakauma on normaalijakaumaa.

Määritelmä 4.2.3. Olkoon β_0 ja β_1 yksinkertaisen regression tuottamat parametrit. Tällöin kyseisten parametrien standardivirheet saadaan yhtälöistä

$$se_{b_0} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2}} \tag{4.6}$$

$$se_{b_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2}}, \tag{4.7}$$

missä $\hat{\sigma}$ on aineistosta estimoitu vaihteluväli. Vaihteluväli voidaan laskea esimerkiksi yhtälöstä 4.4 siten, että

$$\hat{\sigma^2} = \frac{SSR}{n-2},$$

missä n on havaintojen lukumäärä.

Standardivirheitä käytetään parametriarvojen luottamusvälien määrittämisessä.

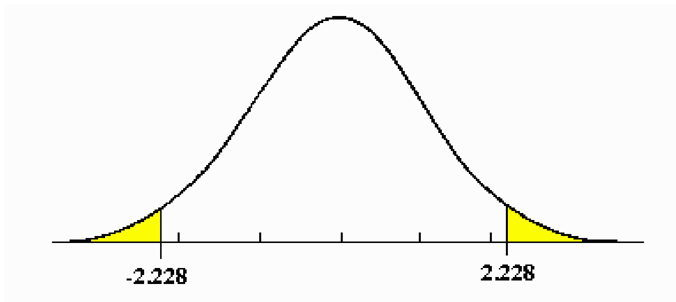
Määritelmä 4.2.4. Parametrien β_0 ja β_1 *luottamusvälit* ovat muotoa

$$b_0 \pm t^* se_{b_0} \tag{4.8}$$

$$b_1 \pm t^* se_{b_1}, \tag{4.9}$$

missä t^* on vapausasteen $n-2$ omaavan Student'in jakauman argumentti, eli määrittelyjoukon alkio, kriitisellä arvolla $(1-c)/2$. c on testaukseen valittu luottamustaso, esimerkiksi 95 tai 99 %

Määritelmässä 4.2.4 esitetty kriittinen arvo tarkoittaa tilannetta, jossa halutaan tarkastella parametrin merkitsevyyttä arvon β_1 molemmin puolin. Tällöin kyseessä on niin sanottu kaksipuoleinen t-testi, katso Kuva 6. Tämä menetelmä on ollut käytössä myöhemmin esitetyissä merkitsevyystestien tuloksissa. Joskus on mielekästä tarkastella vain toispuoleisia raja-arvoja, jolloin kriittinen arvo määritellään toisin.



Kuva 6: Erään Student´in jakauman kriittiset arvot (2.228) kaksipuoleisessa t-testissä valitulla luottamusvälillä c. Keskellä oleva valkoinen alue kattaa jakauman pinta-alasta c %:a ja keltaiset hännät erikseen alan $(1-c)/2$ %:a.

Luottamusvälin määrittelyä käytetään silloin kun halutaan testata hypoteesia $H_0 : \beta_1 = 0$. Tällöin lasketaan arvo

$$t = \frac{b_1}{se_{b_1}}.$$

Jos arvo t on itseisarvoltaan suurempi kuin t^*, niin tällöin hypoteesi H_0 hylätään, ja tarkasteltu parametri on tilastollisesti merkitsevä. Vastaava tarkastelu tehdään hypoteesille $H_0 : \beta_0 = 0$.

Huomautus 4.2.5. Hypoteesilla tarkoitetaan yleisesti jotain väitettä, jonka totuusarvosta ollaan kiinnostuneita. Tämän työn kannalta on olennaista esittää niin kutsuttu *nollahypoteesi* $H_0 : \beta_j = 0$ sekä *vaihtoehtohypoteesi* $H_a : \beta_j \neq 0$. Jos hypoteesia H_0 ei hylätä, niin tällöin parametrilla ei katsota olevan tilastollista merkitsevyyttä, jolloin parametri β_j, selittävä muuttuja x_j, hylätään mallista. Jos H_0 hylätään, niin hypoteesi H_a valitaan, ja parametri β_j on täten tilastollisesti merkitsevä. Hypoteeseihin ei tässä perehdytä yhtään tämän tarkemmin.

Usean selittävän muuttujan regressiossa jokaiselle parametrille β_j lasketaan myös omat standardivirheet. Vakion virheyhtälö on sama kuin Määritelmässä 4.2.3.

Määritelmä 4.2.6. Regressiokertoimen β_j standardivirhe saadaan yhtälön

$$se_{b_j} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}$$

nojalla, missä SST_j on selittävän muuttujan X_j *total sum of squares*, ja R_j^2 on *osittaisselitysaste*[2] muuttujalle X_j. Vaihteluväli $\hat{\sigma}$ saadaan tällä kertaa yhtälöstä

$$\hat{\sigma^2} = \frac{SSR}{n - k - 1},$$

missä p on selittävien (riippumattomien) muuttujien lukumäärä.

Parametrin β_j luottamusväli saadaan vastaavalla yhtälöllä kuin Määritelmässä 4.2.4. Tällöin Student'in jakauman vapausaste on kuitenkin $n - k - 1 = n - (p + 1)$. Huomataan, että vapausaste määritellään havaintoarvojen ja etsittävien parametrien lukumäärän erotuksena. Jos selittäviä muuttujia on yksi, niin vapausasteeksi saadaan $n - 2$ kuten Määritelmässä 4.2.4. Hypoteesin $H_0 : \beta_j = 0$ arviointi toteutetaan kuten edellä on esitetty.

4.2.3 Mallin merkitsevyys

Edellä tarkasteltiin yksittäisen parametriestimaatin merkitsevyyttä. Tämän lisäksi on mielekästä tarkastella mallin merkitsevyyttä myös kokonaisuutena. Tällöin tarkastellaan yhtäaikaa kaikkien muuttujien parametriestimaatteja. Nollahypoteesiväittämä saa tällöin muodon

$$H_0 = \beta_{k-q+1} = 0, \ldots, \beta_k = 0,$$

joka poissulkee selittäviä muuttujia regressiosta määrän q. Nollahypoteesi on totta vain silloin, jos kaikki tarkastellut parametrit ovat tilastollisesti merkityksettömiä. Vaihtoehtohypoteesi toteutuu, jos edes yhden parametrin arvo on nollasta poikkeava. Tarkasteltavaksi jäi niin kutsuttu *rajoitettu malli*[3]

[2] Osittaisselitysasteen määritelmää ei tässä esitetä. Kiinnostuneille vinkiksi tutkia kirjallisuutta, jossa käsitellään usean selittäjän regressiota, eng. multiple linear regression, tai internetistä hakusanalla *partial coefficient of determination*

[3] Alkuperäiseen malliin viitataan termillä *rajoittamaton malli*

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k-q} x_{k-q} + r.$$

Määritelmä 4.2.7. Regressiomallin *F-statistiikka* määritellään yhtälönä

$$F \equiv \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n-k-1)},$$

missä alaviite $_r$ tarkoittaa rajoitettua ja alaviite $_{ur}$ rajoittamatonta, alkuperäistä, mallia.

Saatua tulosta verrataan jakaumaan $F_{q,n-k-1}$ valitulla luottamustasolla, ja verrataan saatua tulosta kriitiseen arvoon. Jos saatu tulos on suurempi kuin kriittinen arvo, niin nollahypoteesi voidaan hylätä.

Huomautus 4.2.8. Määritelmässä 3.2.14 F-jakauma määriteltiin parametreilla n_1, n_2. Määritelmän 4.2.7 mukaisesti laskettua arvoa F verrataan siis sellaiseen F-jakaumaan, joka määritellään siten, että jakauman ensimmäisen parametriarvo on q ja toinen $n-k-1$.

5 Pankkitoiminnan riskit

Tässä luvussa määritellään pankkien kohtaamat riskit ja tarkastellaan vakavaraisuusriskiltä suojautumiseen kehitettyä riskimittaa sekä tarkastellaan sen hyviä ja huonoja puolia. Luvun lopuksi kerrotaan lyhyesti eurooppalaisesta pankkisäätelykomiteasta, joka muun muassa suosittelee kyseisen riskimitan käyttöönottoa. Lähteinä luvun kirjoittamiseen on käytetty seuraavia viitteitä: [1], [2], [3], [7], [10], [14] ja [21].

5.1 Vakavaraisuusriski

Tuloslaskelma kuvaa yrityksen rahavirtoja, eli yritykseen tulleiden ja sieltä poistuneiden rahojen määriä, esimerkiksi tilikauden tai kvartaalin ajalta. Kaikki virrat summattuna yhteen saadaan yrityksen kyseisen tilikauden voitto tai tappio. Pankin tuloslaskelmasta löytyviä virtoja on muun muassa korkotulot ja -menot sekä niin sanotut alaskirjaukset, eli sijoituksista koituneet tappiot. *Tase* puolestaan esittää pankin varallisuuden jollakin tietyllä hetkellä. Tällöin kirjataan ylös muun muassa pankin myöntämien lainojen, käteisen varallisuuden tai talletusten kokonaismäärät. Taseesta ei siten selviä miten esimerkiksi talletusten kokonaismäärä on vaihdellut edellisestä tarkasteluhetkestä. Tuloslaskelma ja tase ovat yhteydessä toisiinsa siten, että kunkin tilikauden voitto tai tappio lisätään taseen omaan pääomaan. Aineiston tase-eristä tarkemmin luvussa 6.1

Viitteessä [14] pankkitoiminnalle on määritelty neljä erilaista riskiä, joita se kohtaa tavoitellessaan voittoja osakkeenomistajien varallisuuden kasvattamiseksi. Nämä ovat luottoriski, korkoriski, operationaalinen riski sekä likviditeettiriski. Tämä luokittelu ei ole yksikäsitteinen vaan kirjallisuudessa luokitteluja on useita erilaisia. Kuitenkin kaikki pankin, ja muidenkin yritysten, riskit on johdettavissa niiden taseista ja tuloslaskelmista. Nämä ovat *vakavaraisuus-* sekä *liiketoimintariski.*

Liiketoimintariski on tuloslaskelmaan kuuluva riski. Esimerkiksi, korkoriski realisoituu tuloslaskelmaan, jos anto- ja ottolainauskoron välinen erotus pienenee. Suuriosa säästä- ja osuusliikepankkien luotoista on pitkäaikaisia ja kiinteäkorkoisia, esimerkiksi asuntolainoja. Jos näiden lainojen rahoitus hoidetaan lyhyillä ja vaihtuvakorkoisilla rahoitusratkaisuilla, ja markkinakorko nousee merkittävästi.

Tase siis esittää pankin (yrityksen) varallisuustilannetta. Täten vakavaraisuusriski liittyy pankin (yrityksen) taseeseen. Vakavaraisuusriskiin sisältyy edellä esitellystä luokittelusta ainakin luotto- ja korkoriski. Luottoriskin toteutuessa pankin varat alenevat suhteessa velkoihin, esimerkiksi luottotappioiden muodossa. On myös muita vakavaraisuuteen liittyviä riskien realisoitumistapoja, joihin edellä esiteltyä luokittelua on vaikeampi soveltaa. Tälläinen on esimerkiksi taseen ulkopuolisista erissä, kuten *johdannaissopimuksissa*, piilevät riskit.

5.2 Vähimmäisomavaraisuusaste

Rahoituslaitoksen on mahdollista lisätä tuotto-odotuksiaan vipuvaikutuksen avulla, kuin mitä sen oma pääoma mahdollistaa. Vipuvaikutuksen luomiselle on kolme vaihtoehtoa. *Taseen vipuvaikutus* on yleisimmin tunnettu ja käytetty muoto. Se syntyy kun yrityksen varallisuus ylittää oman pääoman. Pankeille tämä yleensä tarkoittaa lainoittamista omaa pääomaa suuremmalla määrällä. *Taloudellinen vipuvaikutus* tarkoittaa pankin altistumista sellaisille varallisuuden arvon muutoksille, jotka ovat suurempia kuin siitä maksettu määrä. *Sisäsyntyinen vipuvaikutus* tarkoittaa tilannetta, jossa positiosta on enemmän vastattavaa kuin on sen markkina-arvo.

Viime vuosien finanssikriisin alkulähteenä pidetään pankkisektorin luomaa liiallista vipuvaikutusta, sekä taseeseen että taseen ulkopuolisiin osiin. Tästä syystä *omavaraisuusaste* on nostettu Baselin pankkivalvontakomitean (Basel Committee of Banking Supervision, BCBS) toimesta yhdeksi uudeksi säännellyksi tunnusluvuksi, jolla vastaavat kriisit voitaisiin tulevaisuudessa välttää. BCBS:n tavoitteena on luoda omavaraisuusasteen laskemiselle kansallisista laeista ja kirjanpitotavoista riippumaton määritelmä, jolloin se olisi kansainvälisesti vertailukelpoinen. Muun muassa Euroopan parlamentti on ottanut kantaa päätöslauselmassaan omavaraisuusasteen sääntelyn puolesta. Käytännössä omavaraisuusasteelle asetetaan jokin alaraja, ja tällöin käytetään termiä *vähimmäisomavaraisuusaste*.

Miten omavaraisuusaste sitten on määritelty? Koska se on säännelty suure, niin määritelmä riippuu aina sääntelijän päätöksestä, eli siitä mitä siihen halutaan sisällyttää. Yhteistä määritelmille on se, että omavaraisuusasteen halutaan olevan ei-riskiperustainen suure. Laskennassa ei siis käytetä minkäänlaisia kertoimia eri varallisuus- tai velkaerien suhteellisten riskien huomioimiseksi. BCBS:n raportissa 189 on yksityiskohtaiset ohjeet omavaraisuusasteen laskemisen perusteista, sekä ehdotus 3 % vähimmäisvaateesta vuosien 2013 - 2017 välisenä aikana toteutettavalle testijaksolle. Ehdoissa otetaan huomioon sekä taseeseen kuuluvat erät että monia taseen ulkopuolisia eriä.

Maailmanpankin julkaiseman tiedotteen mukaan omavaraisuusaste lasketaan jakamalla pankin Tier 1-varallisuus pankin *sovitetulla varallisuudella*, merkitään Ass_{adj}, eli kokonaisvarallisuudella, josta on vähennetty aineettomat hyödykkeet[4]. Tier 1 varallisuus sisältää oman pääoman lisättynä pankin reserveillä sekä vähennettynä aineettomilla hyödykkeillä. Yhtälönä edellinen on muotoa

$$OA = \frac{Tier1}{Ass_{adj}} = \frac{\text{oma pääoma + reservit - aineettomat hyödykkeet}}{\text{Varat - aineettomat hyödykkeet}}. \quad (5.1)$$

Vähimmäisomavaraisuusaste on ollut jo käytössä muun muassa Pohjois-Amerikassa. Sen käyttöä on sovellettu eri tavalla niin Yhdysvalloissa kuin Kanadassa. Lisäksi ensimmäisen maana euroopassa sen käyttöönotosta on päättänyt Sveitsi. Yhdysvalloissa käytössä oleva malli yksinkertaisesti vaatii pankilla olevan omaa pääomaa 5 % varallisuudestaan. Erityisen mielenkiintoista on se, että nykyinen rahoituskriisi sai alkunsa juuri Yhdysvalloista, jossa vähimmäisomavaraisuusasteen sääntely on jo ollut käytössä.

5.2.1 Vahvuudet

Luottoluokitusyhtiö Standard & Poors:n mukaan vähimmäisomavaraisuusaste voi olla hyödyllinen lisäväline pankkien riskiarviointiin, erityisesti riskipääoman mittaamiseen. Tämä vaatii varallisuusmitalta laajaa mutta tarkkaa määrittelyä, jolloin useat talouden suhdeluvut tulevat kansainvälisesti vertailukelpoisemmiksi. Lisäksi pankkitoiminnan läpinäkyvyys ja erilaisten aineistojen julkisuus ovat elintärkeitä vähimmäisomavaraisuusasteen hyödyllisyydelle.

Vähimmäisomavaraisuusaste voi olla säätelijöiden toivoma *vastasyklinen* suhdeluku. Ajatuksena on luoda pankeille pääomavaateita, jotka kasvavat taloudellisesti hyvinä aikoina ja vastaavasti pienenevät taantumassa. Tämän tarkoituksena on hillitä luotonantoa taloudellisen buumin aikana yrittäen estää markkinoiden niin kutsuttua ylikuumenemista. Omavaraisuusasteen on empiirisesti kuitenkin todettu olevan myötäsyklinen. Noususuhdanteessa rahapolitiikka on usein liian löysää, jolloin pankit kasvattavat taseitaan, eli

[4]Aineettomiin hyödykkeisiin luetaan mukaan liikearvo, ohjelmistokulut sekä laskennalliset verosaamiset. Liikearvo on arvio yrityksen tuotto- ja substanssiarvon erotuksesta, eikä sitä tässä huomioida. Ohjelmistokulut kuuluvat tase-erään *aineettomat hyödykkeet*, ja laskennalliset verosaamiset on oma eränsä, katso luku 6.1

lainaavat tai sijoittavat enenvässä määrin varallisuutta. Tällöin omavaraisuusaste pienenee. Vastaavasti huonoina aikoina lainoitus- ja sijoitustoimintaa vähennetään tappioiden pelossa, joka taas kasvattaa omavaraisuusastetta. Valvontaviranomaiset voivat yrittää vaikuttaa myötäsyklisyyden poistamiseen esimerkiksi muuttamalla vähimmäisomavaraisuusasteen kriteereitä taloustilanteen mukaan tai asettamalla esimerkiksi pitkän aikavälin tavoitetasoja. Viranomaisten ratkaisujen, kuten lainsäädännön muutoksien, tarkoituksena on estää kriisien toistuminen, mutta uudistuksissa voi myös piillä uusien kriisien siemen.

5.2.2 Heikkoudet

VOA ei ole lopullinen ratkaisu etsittäessä työkaluja uusien pankkikriisien estämiseksi. Sen heikkouksiksi on esitetty useita väitteitä. Ehdotettu määritelmä VOA:lle ei erottele pankkien varallisuuksia riskien mukaan, joka voi tuoda mukanaan epätoivottuja kannustimia. Ilman erillisiä sääntelymekanismeja, kuten BASEL I ja II, pankit saattavat esimerkiksi kasvattaa taseitaan riskipitoisemmilla tuotteilla suurempien tuottojen toivossa.

Toiseksi VOA ei sisällä taseen ulkopuolisia eriä lainkaan. On arvioitu, että OBS vipuvaikutus on huomattava, sillä ne ovat joissain tapauksissa olleet yhtä suuria kuin taseen vastattavaa-osa. Esimerkki tällaisista on muun muassa johdannaisriskit, joiden tulisi olla avainasemassa vivuttamisen määrittelyssä. Onkin mielenkiintoista VOA:en kannalta, että nykyinen talouskriisi on lähtöisin Yhdysvalloista, jossa VOA on ollut käytössä jo pidemmän aikaa. Kriisin juuret löytyvät innovatiivisista rahoitusinstrumenteista, erityisesti luottoriskien siirtoon luoduista tuotepaketeista, jotka rahoitettiin lyhyellä rahalla. Ne altistivat pankit ensin luotto- ja rahoitusriskeille ja taseisiin sisällytettyinä myös sisäsyntyiselle vivutukselle ja muille ongelmille.

5.3 Baselin komitea

Baselin pankkivalvontakomitea perustettiin vuonna 1974 valuutta- ja pankkimarkkinoilla tapahtuneiden häiriöiden jälkimainingeissa. Komitea koostuu jäsenmaidensa keskuspankkeista tai pankkivalvontaelimistä. Sen pääasiallisena tavoitteena on parantaa valvonnan tärkeyden ymmärtämistä ja laatua maailmanlaajuisesti sekä pyrkiä lähentämään kansallisten valvojien toimintatapoja. Komitean jäsenet vaihtavat tietoja jäsenmaidensa valvonnasta, kehittävät tehokkaampia keinoja kansainvälisen pankkitoiminnan valvontaan sekä asettavat vähimmäisvaatimuksia tarpeellisiksi katsomilleen osa-alueille. Sen päätöksillä ei kuitenkaan ole lainvoimaa, vaan tarkoituksena on kehittää stanradeja ja suuntaviivoja, joiden avulla kansalliset valvontaelimet voivat parantaa toimintaansa parhaaksi katsomillaan tavoilla. Eräs tärkeä tavoite on saattaa kaikki kansainvälisesti toimivat pankit valvonnan piiriin.

Basel I & II & III

Vuodesta 1975 komitea on julkaissut koko joukon ohjeistuksia pankkivalvonnan ja -säätelyn tueksi. Vuonna 1983 julkaistu asiakirja *Principles for the Supervision of Banks' Foreign Establishments* asetti periaatteet valvontavastuun jakamisesta, koskien ulkomaankonttoreita, toissijaisia sekä yhteisiä riskisijoituksia, koti- ja ulkomaisten valvontaviranomaisten kesken. Asiakirjan ohjeistuksia täydennettiin vuosina 1990 ja 1992.

Viime vuosien pääpaino komitean työssä on ollut pääoman riittävyyden tarkastelussa. 1980-luvulla havahduttiin pankkien heikentyviin pääomasuhteisiin kansainvälisten riskien kasvaessa. Tehtiin päätös yhdenmukaistaa pääoman mittaustavat riskipainotetulla lähestymisellä sekä poistaa maiden väliltä kilpailua vääristävät erot pääomavaatimuksissa. Vuonna 1988 julkaistu Pääomasopimus (Capital Accord) tarjosi yhtenevät minimipääomavaatimukset pankeille, joka oli kahdeksan prosenttia riskipainotetusta varallisuudesta. Lähes kaikki valtiot, mukaan lukien komiteaan kuulumattomat, ottivat sopimuksen käyttöön vuosien saatossa.

Alusta asti sopimuksen oli tarkoitus elää ajassa, eli uudistua sitä mukaa kun se nähtiin tarpeelliseksi. Esimerkiksi vuosina 1991 laskennassa käytettävän pääoman määrittelyä tarkennettiin. Vuonna 1996 julkaistiin parannusehdotus Pääomasopimuksen markkinariskin hallintaan (Market risk amendent). Tarkoituksena oli ottaa paremmin huomioon pankin kohtaamat markkinariskit käyttäen sisäisiä value-at-risk malleja pääomavaatimusten arvioimiseen

Kesällä 1999 komitea ehdotti uuden pääomaraamin luomista korvaamaan vuoden 1988 sopimus. Työn tuloksena esiteltiin asiakirja New Capital Framework kesällä 2004. Paremmin Basel II-sopimuksena tunnetun asiakirjan ehdotukset perustuivat kolmeen pilariin. Ensimmäinen pilari määrittelee minimipääomavaatimuksen, joka on paranneltu ja laajennettu versio vuoden 1988 vastaavasta. Toinen pilari ehdottaa valvonnallista tarkastelua instituution pääoman riittävyydestä ja sisäisestä arvioinnista. Kolmas pilari koettaa vahvistaa markkinakuria ja rohkaista terveelliseen pankkitoimintaan. Yhdessä näiden kolmen pilarin uskotaan muodostavan keskeisen rungon toimivaan pääomakehikkoon.

Vuonna 2009 komitea julkaisi kokoelman asiakirjoja vahvistamaan Basel II:n pääomakehikkoa. Erityishuomio paketissa oli tiettyjen monimutkaisten arvopaperisijoitusten (positio) käsittelyssä, sekä taseen ulkopuolisten välineiden ja kaupankäyntivaraston vastuut. Nämä, ja muut pakettiin sisältyvät uudistukset, ovat osa laajempaa sääntelyn ja valvonnan parantamisyritystä, jonka alkusysäyksenä toimi vuonna 2007 puhjennut finanssikriisi. Edellä mainittua pakettia kutsutaan nimellä Basel III. Työ sen eteen on edelleen käynnissä, ja lopullisesti se otetaan käyttöön vaiheittain vuosien 2013 - 2018 välisenä aikana. Vuoden 2019 alusta rahoituslaitosten on saatettava tunnuslukunsa komitean määrittelemille tasoille.

Edellisten lisäksi komitea on tarttunut muihinkin tärkeisiin valvonnan kohteisiin, kuten kirjanpitoon, tilintarkastukseen ja eri tyyppisiin riskeihin. Komitea työskentelee läheisesti myös arvopaperi- ja vakuutusvalvontaviranomaisten kanssa rahoituksen monialayritysten valvonnan kehittämiseksi, sekä lukuisilla muilla areenoilla yhteistyössä merkittävien organisaatioiden kanssa.

6 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitellään työssä käytettävä aineisto sekä menetelmät sen analysoimiseen. Aluksi määritellään aineiston tase-erät, jotta lukijalle tulee selkeä käsitys siitä mitä kukin erä tarkoittaa. Lisäksi määritellään työssä käytettävät taseeseen liittyvät käsitteet sekä esitellään pankin taseyhtälö. Mallinnuksen perustaksi valitusta omavaraisuusasteen määritelmästä ei riittävän hyvin selviä sitä, mitä se itse asiassa kuvaa. Tästä syystä omvavaraisuusasteen määritelmä johdetaan lähtien pankin taseyhtälöstä 6.1, jonka jälkeen se sievennetään mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Sievennetyllä muodolla sitten perustellaan mallinnettavien muuttujien valinta. Luvun teoria on peräisin viitteistä [11], [16], [18] ja [23].

6.1 Aineiston esittely

Työn aineistona käytetään Nordea pankin konsernitasetta. Taseen osavuosiarvot on kerätty pankin verkkosivuilta löytyvistä osavuosikatsauksista. Aineistoon kuuluu 28 osavuosikatsauksen tasetiedot, jotka sisältävät kvartaalit 1/2005 - 4/2011. Aineistonrajaus perustuu saatavilla olevaan aineistoon sekä sen esittämismuotoon. Työn mallintamisajankohtana viimeisin julkistettu osavuosikatsaus oli vuoden 2011 viimenen, eli kvartaali 4/2011. Toisaalta taseen esittämismuoto muuttui huomattavasti suppeammaksi kvartaalista 4/2004 taaksepäin. Aineisto on niin sanottu *aikasarja-aineisto*, joka sisältää havaintoja yhdestä tai useammasta muuttujasta valitulla tarkasteluvälillä.

Tase-erät

Finanssivalvonnan [5] kotisivuilta (fiva.fi) löytyy paljon rahoituslaitosten sääntelyä ja valvontaa koskevaa tietoa. Useimmat määritelmät aineiston tase-erille on saatu Fivan julkaisemasta rahoitussektorin määräyskokoelman, Tilinpäätös ja toimintakertomus, liitteestä 1 Taseen kaava ja täyttöohjeet. [6]

Aineiston uusimmissa taseissa on eriteltynä yhteensä 18 eri varallisuuserää ja 13 velkaerää. Näistä karsittiin pois kaikkiaan 4 varallisuuserää,

[5] Finanssivalvonta, eli Fiva, on viranomaisinstituutio, jonka tehtävä 'on tunnistaa markkinoiden ja valvottavien ongelmat mahdollisimman aikaisin, jotta niihin voitaisiin reagoida ja ryhtyä tarvittaviin toimiin nopeasti ja uskottavasti'. Perusvastuu pankki- ja rahoitustoiminnan valvomisesta on toimijoilla itseillään. Finanssivalvonta toimii täydentävänä valvojana yhdessä markkinoiden kanssa.

[6] Erille x_5, x_8, x_{17}, x_{20} ja x_{27} ei löytynyt määritelmiä finanssivalvonnalta eikä Nordealta.

sillä niistä puuttui tietoja erityisesti alkupuolen osavuosikatsausten osalta. Lisäksi ne olivat suhteellisilta osuuksiltaan vähäisiä. Seuraavassa on luettelo mukaan otetuista varallisuuseristä selitteineen sekä muuttuja, jolla kuhunkin erään tästä lähin viitataan:

x_1 Käteiset varat ja keskuspankkitalletukset: Kaikki lailliset maksuvälineet, mukaan lukien ei-euromääräiset setelit ja kolikot, sekä vaadittaessa maksettavat saamiset Suomen Pankilta. (Fiva)

x_2 Valtion velkasitoumukset: Valtion liikkeeseen laskemia jälkimarkkinakelpoisia haltijavelkakirjoja, joiden sijoitusaika vaihtelee yhden ja 364 päivän välillä. (nordea.fi)

x_3 Saamiset luottolaitoksilta: Muut kuin vaadittaessa maksettavat saamiset keskuspankeilta sekä koti- että ulkomaisille luottolaitoksille annetut luotot, tehdyt talletukset sekä takausten ja muiden taseen ulkopuolisten sitoumusten perusteella velkojille maksetut määrät. Tähän ryhmään luetaan muun muassa keskuspankkeihin talletetut vähimmäisvarantotalletukset, mutta ei luottolaitosten jälkimarkkinakelpoisia saamisia. (Fiva)

x_4 Luotot yleisölle: Muut kuin keskuspankeille ja luottolaitoksille annetut luotot, jotka eivät ole jälkimarkkinakelpoisia. (Fiva)

x_5 Korolliset arvopaperit.

x_6 Osakkeet: Sellaiset osakkeet, kantarahasto- ja sijoitusosuudet ja muut sellaiset osuudet, jotka tuottavat oikeuden yhteisön omaan pääomaan. (Fiva)

x_7 Johdannaissopimukset: Sopimuksista maksetut preemiot sekä taseen vastaavaa puolella esitettävät johdannaisten positiiviset käyvät arvot. (Fiva)

x_8 Korkoriskin suojaavien erien käyvän arvon muutokset.

x_9 Aineettomat hyödykkeet: Vastikkeelliset oikeudet ja varat, kuten toimiluvat tai tavaramerkit. (Fiva)

x_{10} Aineelliset hyödykkeet: Kiinteistöomaisuus, muut kiinteistöt ja kiinteistöyhteisöjen osakkeet ja osuudet sekä muut aineelliset hyödykkeet. Enimmäiseen kuuluu muun muassa rakentamattomat alueet, liittymismaksut, rakennukset ja asfaltoinnit. Toiseen osuudet sellaisista yhtiöistä, jotka eivät harjoita muuta toimintaa kuin kiinteitöjen omistusta ja hallintaa. Muihin aineellisiin hyödykkeisiin lasketaan muun muassa toimitilojen laitteet, ajoneuvot jne. (Fiva)

x_{11} Sijoituskiinteistöt: Muussa kuin omassa käytössä oleva kiinteistö, jolla on tarkoitus hankkia pääasiassa vuokratuottoa ja/tai arvonnousua. (Fiva)

x_{12} Laskennalliset verosaamiset: Jaksotuseroista johtuvat laskennalliset verosaamiset samoin kuin muista väliaikaista eroista johtuvat verosaamiset. (Fiva)

x_{13} Muut varat: Maksujen välityksestä syntyneet, vaadittaessa maksettavat saamiset, erilaisilla selvittelytileillä olevat saamiset, johdannaissopimuksiin liittyvät marginaalitilisaamiset sekä kaikki muut saamiset, joiden esittämiseen ei ole muuta sopivaa tase-erää. (Fiva)

x_{14} Siirtosaamiset ja maksetut ennakot: Saamatta olevat korot ja muut tuotot sekä maksetut korko- ja muut menoennakot. (Fiva)

Yllä luetellut erät muodostavat täten tutkimuksen aineistona käytetyn taseen *vastaavaa* -osan. Pankin kokonaisvarallisuus on näiden erien summa.

Taseen velkaeriä on mukana 13, joiden selitteet sekä niihin viittaavat muuttujat ovat seuraavat:

x_{15} Velat luottolaitoksille: Velat edellä kohdassa "Saamiset luottolaitoksilta"tarkoitetuille luottolaitoksille ja keskuspankeille. (Fiva)

x_{16} Yleisön talletukset ja muut velat yleisölle: Velat muille kuin luottolaitoksille ja keskuspankeille.

x_{17} Velat vakuutuksenottajille.

x_{18} Yleiseen liikkeeseen lasketut velkakirjat: Luottolaitoksen liikkeeseen laskemat joukkovelkakirjat. (Fiva)

x_{19} Johdannaissopimukset: Sopimuksista saadut preemiomaksut sekä taseen vastattavaa puolella esitettävät johdannaisten negatiiviset käyvät arvot.

x_{20} Korkoriskin suojaavien erien käyvän arvon muutokset.

x_{21} Verovelat: Vahvistettuun verotukseen tai ennakkoverolippuun perustuva maksamaton tulovero sekä arvonlisäverovelka. (Fiva)

x_{22} Muut velat: Maksujen välityksestä syntyvät, vaadittaessa maksettavat velat sekä ostovelat että muut sellaiset luotonantoon perustumattomat velat. (Fiva)

x_{23} Siirtovelat ja saadut ennakot: Maksamatta olevat korot ja muut kulut oikaistuna tai täydennettynä suoriteperusteisiksi sekä saadut korko- ja muut tuloennakot.

x_{24} Laskennalliset verovelat: Jaksotuseroista johtuvat laskennalliset verovelat samoin kuin muista väliaikaista eroista johtuvat verovelat. (Fiva)

x_{25} Varaukset: Verolainsäädännön sallimat tilinpäätössiirrot. (Fiva)

x_{26} Eläke-etuusvastuut.

x_{27} Velat, joilla on huonompi etuoikeus kuin muilla veloilla: Luottolaitoksen liikkeeseen laskemat velkasitoumukset ja muut velat, joilla niitä koskevien sopimusehtojen mukaan on huonompi etuoikeus kuin luottolaitoksen muilla sitoumuksilla. Myös ikuiset lainat ja muu sellainen sekamuotoinen pääoma, jolla on huonompi etuoikeus kuin luottolaitoksen muilla veloilla. (Fiva)

Edellä luetellut tase-erät muodostavat pankin taseen *vastattavaa* -osan.

Pankin *oma pääoma* saadaan vähentämällä vastattavat -erien kokonaissumma vastaavaa -erien summasta. Englanniksi yhtiön tasetta kutsutaan nimellä *balance sheet*. Termi kuvaa hyvin sen luonnetta, sillä se voidaan kirjoittaa taseyhtälönä

$$\text{Varallisuus} = \text{vieras pääoma} + \text{oma pääoma},$$

missä vieras pääoma tarkoittaa taseen vastattavat osaa, eli pankin "ottamia" lainoja. Tämä yhtälö on siis voimassa aina, josta englanninkielinen termi "balance".

Merkitään aineiston kaikkia varallisuuseriä muuttujalla $Ass = \sum x_i$, missä $i = 1, \ldots, 14$, sekä velkaeriä muuttujalla $Liab = \sum x_i$, missä $i = 15, \ldots, 27$.

Lyhenne *Ass* tulee englanninkielen sanasta *assets*, eli varat, ja *Liab* sanasta *liabilities*, eli vastuut. Lisäksi omaa pääomaa merkitään tästä lähin lyhenteellä *eq*, joka tulee sanasta *equity*. Ratkaistaan yllä olevasta pankin taseyhtälöstä oma pääoma *eq*, jolloin

$$\begin{aligned} eq &= Ass - Liab \\ &= \sum_{i=1}^{14} x_i - \sum_{i=15}^{27} x_i \\ &= x_1 + \ldots + x_{14} - x_{15} - \ldots - x_{27}. \end{aligned}$$

6.2 Omavaraisuusasteen johtaminen

Työssä käytetyssä aineistossa pankin reserviä merkitään muuttujalla x_1 ja aineettomiin hyödykkeisiin luetaan muuttujat x_{10} ja x_{12}. Tällöin Tier1 pääoma yhtälömuodossa on

$$\text{Tier1} = eq + x_1 - x_{10} - x_{12}. \tag{6.1}$$

Vastaavasti sovitettu varallisuus Ass_{adj} saa muodon

$$Ass_{adj} = Ass - x_{10} - x_{12}. \tag{6.2}$$

Miten yhtälön 5.1 määrittelemä omavaraisuusaste sitten suhteutuu pankin taseyhtälöön? Selvitetään asia johtamalla omavaraisuusaste taseyhtälöstä 6.1. Lisätään yhtälöön 6.1 ensin puolittain muuttuja x_1 sekä vähennetään muuttujat x_{10} ja x_{12}, jolloin

$$\begin{aligned} eq &= Ass - Liab \\ \Leftrightarrow eq + x_1 - x_{10} - x_{12} &= Ass - Liab + x_1 - x_{10} - x_{12} \\ &= Ass_{adj} - Liab + x_1. \end{aligned}$$

Jaetaan sitten yhtälö puolittain sovitetulla varallisuudelle Ass_{adj}, jolloin saadaan

$$\frac{eq + x_1 - x_{10} - x_{12}}{Ass_{adj}} = \frac{Ass_{adj} - Liab + x_1}{Ass_{adj}} \tag{6.3}$$

Yhtälön 6.3 vasen puoli on nyt omavaraisuusasteen määritelmän mukainen, ja oikea puoli on sen kanssa yhtäpitävä. Muokkaamalla yhtälön 6.3 oikeaa puolta saadaan

$$\frac{Ass_{adj} - Liab + x_1}{Ass_{adj}} = 1 - \frac{Liab}{Ass_{adj}} + \frac{x_1}{Ass_{adj}}. \tag{6.4}$$

Tuloksena omavaraisuusasteelle saadaan yhtäpitävät yhtälöt

$$OA \equiv \frac{eq + x_1 - x_{10} - x_{12}}{Ass_{adj}} = 1 - \frac{Liab}{Ass_{adj}} + \frac{x_1}{Ass_{adj}}. \tag{6.5}$$

6.3 Muuttujien valinta ja mallin luominen

Yhtälön 6.5 tarkastelu havainnollistaa sen, mitä viitteessä [7] määritelty omavaraisuusaste taseen kautta tarkasteltuna itse asiassa tarkoittaa. Kuten luvussa 5 todettiin, niin vähimmäisomavaraisuusasteen käyttöönoton toivotaan vähentävän pankkien liiaallista riskinottoa rajoittamalla vipuvaikutusta. Kuitenkin yllä johdetussa yhtälössä pankin varallisuuserät jaetaan itsellään, jolloin jäljelle jää vakio 1. Ainoa jäljelle jäänyt varallisuuserä on pankin käteinen varallisuus x_1, joka lisättiin yhtälöön erikseen. Tarkasteltaviksi muuttujiksi jäivät siten kaikki velkaerät sekä x_1, kaikki jaettuna sovitetulla varallisuudella, yhteensä 14 erää alkuperäisestä 27:stä.

Valituilla erillä selitettiin omavaraisuusastetta eViews -ohjelmiston avulla. Ensimmäiseksi karsittiin velkaeriä ilman, että omavaraisuusasteen selitysaste R^2 oleellisesti laskee. Karsinta suoritettiin käyttäen eViews -ohjelmiston *Stepwise Least Squares* -menetelmää. Ohjelmistolle annettiin tehtäväksi laskea paras mahdollinen regressio kun muuttujien määrä on kiinnitetty. Samalla ohjelmisto tuottaa regressiomallin kyseisillä erillä selitettävälle muuttujalle $OA - x_1$. Optimaaliseen lopputulokseen päästiin kymmenellä selittävällä muuttujalla, joista yksi oli vakiotermi.

Huomautus 6.3.1. Kun muuttujien valinta oli jo tehty, niin Stepwise Least Squares -menetelmällä vielä kerran testattiin parasta yhdeksän muuttujan mallia kun mukaan otettiin myös varallisuuserät. Paras malli oli edelleen sama, eli varallisuuserillä ei ollut vaikutusta regressioanalyysin tuloksiin.

Selittäviä muuttujia mallinnettiin sini -funktioiden avulla. Oletuksena oli, että tase-erät vaihtelevat jonkin keskiarvon ympärillä. Niillä ei siis oleteta olevan pitkän ajan *trendejä*. Tällöin sanotaan, että luodut regressiomallit on *staattisia*. Yleisempi mallinnusmenetelmä on nimeltään *dynaaminen*, jossa selittävinä muuttujina on epästaattisia funktioita. Tällöin niissö oletetaan olevan niin sanottuja *viiveitä*, eli tapahtumia, joilla on vaikutusta myös muuttujien tuleviin arvoihin. Erityisesti dynaaminen mallinnus hylättiin sen vuoksi, että tekijällä ei ollut riittävän kattavaa osaamista *stokastisista differenssiyhtälöistä*, jotka ovat kyseisen mallinnusmenetelmän matemaattinen perusta.

Erän x_1 mallintaminen havaittiin erityisen ongelmalliseksi. Sen muoto poikkeaa muista eristä huomattavan paljon, erityisesti suurten vaihteluidensa takia. Verrattaessa muuttujaa aineistosta laskettuun omavaraisuusasteeseen havaittiin, että tämä muuttuja yksin selittää omavaraisuusasteen lähes täydellisesti. Tähän vaikuttaa erityisesti se, että käteiset varat on omavaraisuusasteen määritelmässä mukana kaksinkertaisella painoarvolla: sen lisäksi, että se sisältyy omaan pääomaan, niin se on lisätty osoittajaan vielä erikseen. Edellä mainituista syistä se jätettiin mallinnuksen ulkopuolelle, jolloin vain velkaerät jäivät mallinnettavaksi.

Mallinnuksen tuloksena saaduilla sovitteilla tehtiin uusi lineaarinen regressio selitettävälle muuttujalle $OA - x_1$. Saatu regressio toimii siten työssä luotuna mallina alkuperäiselle selitettävälle muuttujalle.

Viimeiseksi tutkittiin minkälaisilla vaihteluvälin muutoksilla omavaraisuusaste saadaan laskemaan niin alas, että pankin voitaisiin katsoa olevan kriisissä. Koska sovitteet ovat muotoa

$$\beta_0 + \beta_1 f_1(x) + \cdots + \beta_n f_n(x),$$

niin vaihteluvälin muuttaminen on todella yksinkertaista. Lauseen 3.2.7 nojalla sovitteiden vaihteluväliä voidaan kasvattaa esimerkiksi 100 % kertomalla alkuperäinen sovite, eli funktio luvulla 2 kuitenkin siten, että kun tase-erien oletettiin vaihtelevan jonkin keskiarvon ympärillä, niin vakiotermi jätettiin kertomisen ulkopuolelle, jotta vain vaihteluväli muuttuu.

7 Tulokset

Tässä luvussa esitellään mallinnuksen tulokset sekä keinotekoisesti luotu tilanne, jossa muutetuilla sovitteilla tehdään kokeita, joilla omavaraisuusaste putoaa alle ennalta määritetyn vähimmäistason.

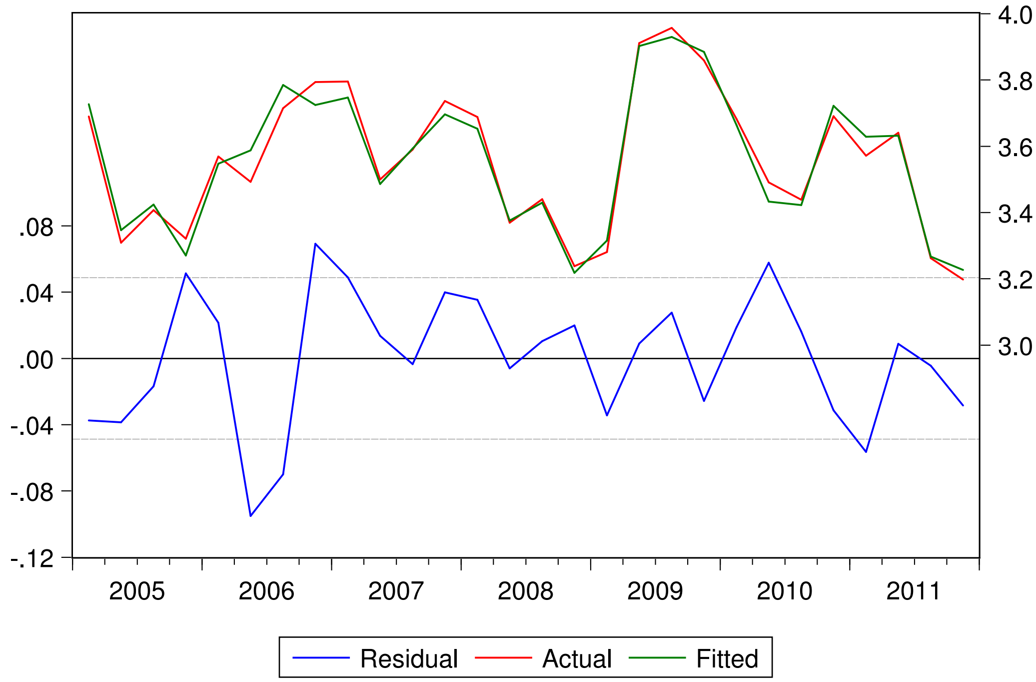
7.1 Tase-erien mallinnus

Ensimmäinen regressio suoritettiin yhdeksällä selittävällä muuttujalla, jolloin selitysasteeksi, R^2 jäi yli 96%. Tämä tarkoittaa, sitä, että luodun mallin vaihtelu selittää alkuperäisen aineiston vaihtelun 96%:sesti. Koko mallin merkitsevyyttä kuvaava suure, F-stat, saa arvon 55.75. Mallissa on yhdeksän selittävää muuttujaa, jolloin F-jakauman ensimmäinen parametri $q = 9$. aineisto sisältää 28 havaintoarvoa jokaiselle muuttujalle, jolloin $n - p - 1 = 18$, sillä $p = q$. Näin ollen saatua arvoa 55.75 verrataan jakauman $F_{9,18}$ kriittiseen arvoon valitulla luottamustasolla (95 %), joka on likimain 2.45. Huomataan täten, että malli on kokonaisuudessaan erittäin merkitsevä.

Selitettävä muuttuja:	OA - x1		R^2	0.9654
Muuttuja	kerroin	t-testi	F-stat	55.75
x15	-0.8713	-13.598		
x16	0.8811	-15.169		
x17	-0.8376	-9.770		
x18	-0.8742	-15.032		
x19	-0.8786	-15.506		
x20	-0.9160	-5.994		
x22	-0.8650	-15.079		
x23	-0.8503	-7.694		
x27	-1.0786	-17.298		
c	86.790	15.431		

Taulukko 1: Regressio valituilla muuttujille, selitettävänä muuttujana omavaraisuusaste vähennettynä erällä x_1.

Edellä luotu regressiomalli on erinomainen kuvaamaan selitettävää muuttujaa. Tämä on luonnollista, sillä omavaraisuusasteen määritelmän mukaan se on pankin velkaerien summa jaettuna oikaistulla varallisuudella. Huomionarvoista on, että muuttujien valinnassa ei ole otettu huomioon multikollineaari-



Kuva 7: Alkuperäinen selitettävä muuttuja (punainen), selittävien muuttujien regressio (vihreä) sekä jäännös (sininen).

suutta, eli tase-erien välisiä korrelaatioita, vaan sen olemassa olo on itse asiassa jopa suotavaa. Taulukon 1 arvoilla luotua kuvaajaa voi verrata selitettävään muuttujaan Kuvan 7 avulla.

Valituille muuttujille sovitettiin sinimuotoiset käyrät kuvaamaan alkuperäisiä muuttujia mahdollisimman hyvin. Taulukossa 2 on esitetty muuttujat ja niiden sovitteiden selitysasteet. Sovitteita tehdessä otettiin huomioon se etteivät selittävät muuttujat, eli sinifunktiot, korreloi vahvasti keskenään.

Luoduilla sovitteilla selitettiin alkuperäistä selitettävää muuttujaa uudestaan, jolloin saatiin Taulukon 3 mukainen regressiomalli. Huomionarvoista on, että selitysaste on tippunut alle 50 %, ja F-stat on arvoltaan 1.746, joten luotu malli selittää vain alle puolet selitettävän muuttujan vaihteluista, eikä kokonaisuudessaan ole merkitsevä.

Kuva 8: Alkuperäinen selitettävä muuttuja (punainen), selittävien muuttujien sovitteilla tehty regressio (vihreä) sekä jäännös (sininen).

7.2 Vaihteluvälien muokkaaminen

Seuraavaksi, luotujen sovitteiden vaihteluvälejä muokattiin keinotekoisesti, jotta omavaraisuusaste saataisiin laskemaan ennalta asetetun vähimmäisasteen alle. Erityisesti tarkasteluun haluttiin sellainen tilanne, jossa kaksi eri velkaerää muuttuu samanaikaisesti. Taulukkoon 4 on kirjattu niiden muuttujien korrelaatiot, jotka ovat arvoltaan yli 0.6.

Näistä nimellisarvoltaan merkityksellisiä ovat muuttujat 16, 17 ja 19. Näin ollen tarkasteltavaksi valittiin vain erät 16 ja 17. Molempien sovitteiden vaihteluvälejä muutettiin yhtä paljon. Kokeilemalla havaittiin, että muuttamalla vaihteluvälit kolminkertaisiksi saatiin aikaiseksi haluttu tulos, eli omavaraisuusaste putosi hetkellisesti alle vaaditun 3 %:n rajan, Kuva 9.

Muuttuja	Sovite	R^2
x15	z15	0.773
x16	z16	0.778
x17	z17	0.906
x18	z18	0.764
x19	z19	0.805
x20	z20	0.756
x22	z22	0.501
x23	z23	0.689
x27	z27	0.967

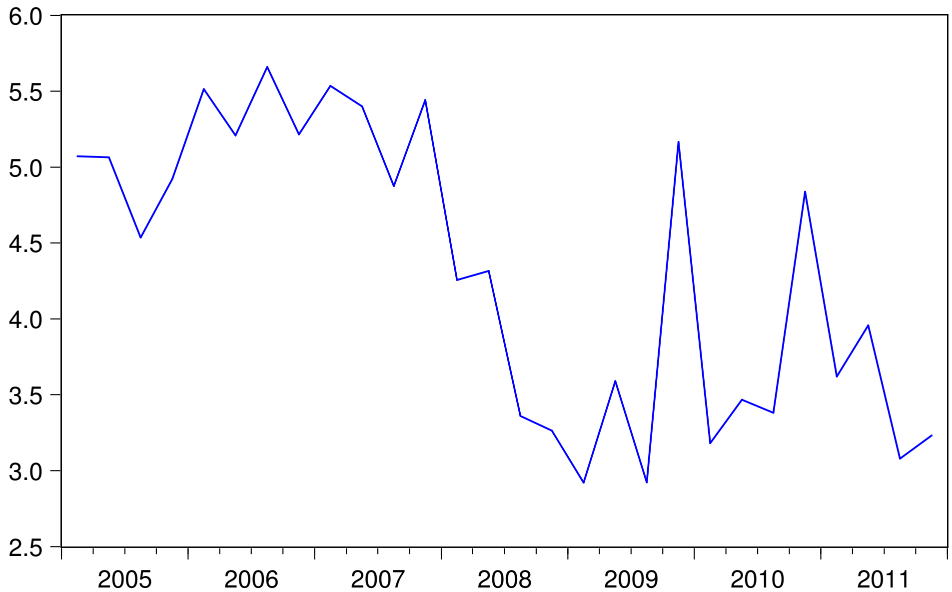
Taulukko 2: Sovitteiden hyvyyden tarkastelu

Selitettävä muuttuja:	OA - x1		R^2	0.4661
Muuttuja	kerroin	t-testi	F-stat	1.746
z15	0.1887	2.461		
z16	-0.0597	-0.2503		
z17	0.5345	0.6358		
z18	0.1019	2.270		
z19	0.0141	0.4031		
z20	-1.554	-1.502		
z22	-0.1742	-0.3716		
z23	-2.085	-2.084		
z27	-0.7139	-1.183		
c	0.8073	0.1389		

Taulukko 3: Regressio muuttujien sovitteilla, selitettävänä muuttujana omavaraisuusaste vähennettynä erällä x_1.

Tase-erät	Corr(muuttujat)	Corr(sovitteet)
16 & 17	0.909	0.912
16 & 27	0.851	0.919
17 & 27	0.906	0.923
19 & 20	0.857	0.733

Taulukko 4: Korrelaatioiden perusteella tarkasteluun valitut tase-erät.



Kuva 9: Omavaraisuusaste kun erien 16 ja 17 sovitteiden vaihteluvälit kolminkertaistettiin.

8 Pohdinta

Työn toteuttaminen oli huomattavasti haastavampaa kuin olin kuvitellut. Vaikka yliopisto-opinnoissa oli jo käsitelty niin todennäköisyyslaskentaa, satunnaismuuttujia kuin pienimmän neliösumman menetelmää, niin riittävän ja luettavan kokonaisuuden luomisessa oli suuri työ. Näiden lisäksi olen opiskellut itsenäisesti sisältöjä niin kirjanpidosta, tilastotieteestä kuin pankkisääntelystä. Mallin luomiseen käytetty eViews -ohjelmisto oli niin ikään ennestään tuntematon työkalu.

Mallinnuksessa käytettiin staattista lineaarista regressioanalyysia. Lineaarisissa malleissa selittävän muuttujan X_i vaikutus ehdolliseen odotusarvoon $E(Y|X)$ on vakio β_i aineiston määräämällä aika välillä, mikä ei tutkimusten mukaan sovi yhteen omavaraisuusasteen luonteen kanssa [19]. Tällöin omavaraisuusastetta on kuitenkin mallinnettu perinteisesti käyttäen makrotalouden suureita.

Työssä määritelty omavaraisuusaste on pankin oma pääoma jaettuna sen varallisuudella. Tarkoituksena oli siis tarkastella ja säännellä liiallisen riskinoton luomaa vipuvaikutusta. Kuitenkin matemaattisesti omavaraisuusasteen näytettiin olevan velkojen suhde varallisuuteen, luku 6.2. Vaikkakin määritelmät ovat identtisiä, niin voidaan kysyä mittaako tarkasteltava suure sitä mitä sen on tarkoitus, kun aihetta tarkastellaan taseesta käsin? Jos kyseistä riskimittaa halutaan käyttää riskien tarkasteluun tasetietojen pohjalta, kuten tässä työssä, niin mielekkäämmän määritelmän kehittämisen pohtiminen olisi mielestäni tarpeen.

Koska tekijällä ei ollut aikaisempaa kokemusta mallintamisen teoriasta saati käytänteistä, niin luodut sovitteet olivat tilastollisesti tarkasteltuina heikkoja. Kuitenkin ne periaatteessa olivat riittävän hyviä esittämään kunkin muuttujan trendinomaisen kulun aineiston tarkasteluvälillä.

Viitteet

[1] Alhonsuo, S. & Leinonen, H. *Pankkikriisit noudattavat samaa kaavaa - Pankkikriisien yleisestä anatomiasta* http://www.suomenpankki.fi/fi/julkaisut/selvitykset_ja_raportit/bof _online/Documents/BoF_Online_16_2008.pdf luettu 23.01.2012

[2] *History of the Basel Committee and its Membership (August 2009)*, s. 1 - 8 http://www.bis.org/bcbs/history.pdf luettu 24.01.2012

[3] *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf luettu 24.01.2012

[4] Beichelt, F. *Stochastic Processes in Science, Engineering and Finance.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006. 417 s.

[5] Briggs, W.L & Cochran, L. *Calculus.* Pearson, Boston. 2011. 1264 s.

[6] Clarke, G. M. & Cooke, D. *A Basic Course in Statistics.* Edward Arnold Ltd., London, 1978. 368s.

[7] D'Hulster, K. *Leverage ratio: A New Binding Limit on Banks* World Bank, note number 11, 2009. http://www.worldbank.org/financialcrisis/pdf/levrage-ratio-web.pdf

[8] Dudewicz, Edward J. *Introduction to statistics and probability.* Holt, Rinehart and Winston, USA, 1976. 512 s.

[9] Eldén, L. % Wittmeyer-Koch, L. *Numerical analysis: an introduction* Academic Press, Boston, 1990. 347 s.

[10] *Euroopan unionin virallinen lehti*, 20.12.2011, s. 22 - 30 http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:C:2011:371E:0022:0030:FI:PDF luettu 23.01.2012

[11] http://www.finanssivalvonta.fi/fi/Saantely/Maarayskokoelma/Rahoitussektori /3_Tilinpaatos_ja_toimintakertomus/Documents/3.1.std2Liite1.pdf luettu 27.01.2012

[12] Freedman, D. & Pisani, R. % Purves, R. *Statistics* Norton, New York, 1978. 506 s.

[13] Heikkilä, T. *Tilastollinen tutkimus* Edita, Helsinki, 2008. 317 s.

[14] Machiraju, H.R.. *Modern Commercial Banking.* Daryaganj, Delhi, IND: New Age International, 2008. p 173. http://site.ebrary.com/lib/uef/Doc?id=10323323&ppg=173

[15] Mendenhall, W. Wackerly, D. D. Scheaffer, R. L. *Mathematical statistics with applications* PWS-KENT, Boston, 1990.

[16] Mishkin, F. S. *Economics of money, banking and financial markets* Addison Wesley, Boston, 2001. 737 s.

[17] Moore, D. S. % McCabe, G. P. *Introduction to the practice of statistic* Freeman, New York, 1993.

[18] http://www.nordea.com/Investor+Relations/Toimintaa+kuvaavat+luvut/Tulostiedotteet/Aiemmat+tulostiedotteet/1100152.html luettu 18.01.2012

[19] Ramalho, J. & da Silva, J. V. *Functional form issues in the regression analysis of financial leverage ratios* University of Evora, Working Papers, 2011. http://evunix.uevora.pt/ jsr/papers/CS-FunctionalFormIssues.pdf luettu 28.02.2012

[20] Ross, Sheldon M. *A first course in probability.* Collier Macmillan Canada, New York, 1994. 473 s.

[21] Global Credit Portal, 15.04.2010, *The Basel III Leverage Ratio Is A Raw Measure, But Could Supplement Risk-Based Capital Metrics*, s. 1 - 8 http://www.bis.org/publ/bcbs165/splr.pdf luettu 23.01.2012

[22] Walpole, R. E. *Introduction to statistics* Macmillan Publishing Co., New York, 1974. 340 s.

[23] Wooldridge, J. M. *Introductory Econometrics* Thomson Corporation, U.S.A, 2006. 890 s.