O Método do Ângulo Completo no Sistema OpenGeoProver

Nuno Miguel dos Santos Baeta

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

O Método do Ângulo Completo no Sistema OpenGeoProver

Nuno Miguel dos Santos Baeta

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**

Área de Especialização em **Computação**

Júri

Presidente:	Doutor Alexander Kovacec
Orientador:	Doutor Pedro Henrique e Figueiredo Quaresma de Almeida
Vogal:	Doutor Cristina Helena de Matos Caldeira

Data: 17 de Junho de 2013

Resumo

O método do ângulo completo para geometria euclideana construtiva foi proposto por Chou, Gao e Zhang no início dos anos 1990. Este método, uma extensão do método da área proposto pelos mesmos autores, produz demonstrações legíveis e de um modo eficiente demonstra muitos teoremas não triviais. Pode ser considerado como um dos métodos mais interessante e de maior sucesso na demonstração de teoremas em geometria e, possivelmente, o mais bem sucedido na produção de demonstrações automáticas legíveis. Nesta dissertação de mestrado faz-se a apresentação do mêtodo do ângulo completo e demonstram-se muitos dos seus lemas. Descreve-se ainda a planificação da implementação, em código livre, do método do ângulo completo.

Palavras Chave: Método do Ângulo Completo, Método da Área, Geometria, Demonstração automática de teoremas

Abstract

The full-angle method for euclidean constructive geometry was proposed by Chou, Gao, Zhang in early 1990's. The method, an extension of the area method proposed by the same authors, produces human-readable proofs and can efficiently prove many non-trivial theorems. It can be considered as one of the most interesting and most successful methods in geometry theorem proving and probably the most successful in the domain of automated production of readable proofs. In this master thesis a presentation of the full-angle method is made and several of its lemmas are proved. A plannification of the implementation, in open source code, of the full-angle method is also described.

Keywords: Full-Angle Method, Area Method, Geometry, Automated theorem proving

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Pedro Henrique e Figueiredo Quaresma de Almeida pela permanente disponibilidade demonstrada no acompanhamento deste trabalho desde o seu planeamento até à sua concretização.

À família e amigos que, mesmo indirectamente, me apoiaram durante este período.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Existem duas grandes famílias de métodos de demonstração automática em geometria: os métodos algébricos e os métodos sintéticos.

Os métodos algébricos têm as suas origens no trabalho de Descartes e na tradução de problemas de geometria em problemas de álgebra. A automatização das demonstrações com base nesta ideia iniciou-se com o método de eliminação de quantificadores de Tarski [24] e desde então teve muitos desenvolvimentos [8]. O método do conjunto característico, também conhecido por método de Wu [1, 28], o método de eliminação [25], o método das bases de Gröbner [15, 16] e a abordagem com álgebras de Clifford [17] são exemplos de métodos baseados na abordagem algébrica. Todos estes métodos têm em comum o estilo algébrico, sem relação com os métodos sintéticos tradicionais em geometria, não produzindo demonstrações legíveis. Nomeadamente, estes métodos manipulam polinómios que habitualmente são demasiado complexos para serem compreendidos, verificando-se também não terem uma ligação directa com o conteúdo geométrico.

A outra abordagem à demonstração automática de teoremas em geometria baseia-se em demonstrações sintéticas, tentando automatizar as demonstrações tradicionais. Muitos destes métodos adicionam elementos auxiliares à construção considerada de modo a possibilitar a aplicação de determinados postulados, um dos factos que leva geralmente a uma explosão combinatória no espaço de procura. O desafio é controlar a explosão combinatória e desenvolver heurísticas adequadas de modo a evitar passos construtivos desnecessários. Temos como exemplos de métodos de demonstração sintéticos as abordagens de Gelertner [11], Nevins [18], Elcock [9], Greeno et al. [12], Coelho e Pereira [7], Chou, Gao e Zhang [2, 5, 6].

Nesta dissertação apresentamos o método do ângulo completo, um procedimento de decisão semi-sintético e eficiente para um fragmento da geometria euclidiana plana, desenvolvido por Chou, Gao e Zhang [2, 4, 5, 6]. Este método permite implementar demonstradores eficientes capazes de gerar demonstrações legíveis. Estas, apesar de frequentemente diferirem das demonstrações sintéticas habituais, são muitas vezes concisas, compostas de passos que estão directamente relacionados com os conteúdos geométricos envolvidos e, portanto, facilmente compreendidas por um matemático.

A ideia do método do ângulo completo é expressar a hipótese de um teorema utilizando um conjunto de pontos ("livres") e um conjunto de construções elementares, cada uma das quais introduzindo um novo ponto ou recta, e expressar a conclusão através de uma igualdade entre polinómios em quantidades geométricas (sem considerar coordenadas cartesianas). A demonstração é efectuada por eliminação, por ordem inversa, dos pontos e rectas introduzidos previamente, usando para tal lemas apropriados. Após eliminar todos os pontos e rectas introduzidos, a conclusão envolverá uma equação entre duas expressões racionais onde ocorrerão apenas pontos livres. Esta equação poderá ainda ser simplificada de modo a envolver apenas variáveis independentes. Se as expressões em ambos os membros da igualdade forem iguais, então a afirmação é verdadeira. Caso contrário a afirmação é inválida ou nada se poderá concluir. Todos os passos da demonstração gerados pelo método do ângulo completo são expressos em termos da aplicação de lemas de geometria e simplificação de expressões.

Apesar da ideia subjacente ao método ser simples, implementá-lo é uma tarefa árdua devido à quantidade de detalhes envolvidos. Além da implementação original desenvolvida pelos autores que propuseram o método, existem, tanto quanto me é possível saber, outras três implementações no *Geometry Expert*[1], *Java Geometry Expert*[2] e *Geometry Explorer* [27].

As implementações do método provaram serem capazes de efectuar demonstrações de teoremas com uma vasta gama de dificuldade [3, 27].

[1] `http://www.mmrc.iss.ac.cn/gex/`

[2] `http://www.cs.wichita.edu/~ye/`

Capítulo 2

Método do Ângulo Completo

O método do ângulo completo, que exporemos neste capítulo, é um método semi-sintético de demonstração automática de teoremas em geometria. A essência dos métodos semi-sintéticos consiste em utilizar características dos métodos algébricos e dos métodos sintéticos. O método da área, exemplo desta família de demonstradores automáticos de teoremas em geometria, é um método completo e eficiente para um fragmento da geometria euclidiana plana. As demonstrações fornecidas por este método não recorrem a coordenadas, cada passo da demonstração tem um significado geométrico e são legíveis para um matemático [4, 5, 13]. O método do ângulo completo, outro método semi-sintético, é baseado no método da área. A nível semântico o método do ângulo completo não introduz nada de novo relativamente ao método da área porque, como veremos, toda a conjectura expressa utilizando ângulos completos pode também ser expressa no método da área. Coloca-se então a questão de saber qual o benefício do método do ângulo completo sobre o método da área. A resposta reside na expressividade permitida pelos ângulos completos, que possibilitam conjecturas envolvendo circunferências e ângulos [4, 6]. Neste sentido o método do ângulo completo pode ser encarado como uma extensão do método da área. Salientemos ainda que apesar do método do ângulo completo não ser individualmente completo [6], a apresentação proposta é completa — é uma combinação de ambos os métodos e assim o método do ângulo completo é um complemento do método da área.

A exposição do método do ângulo completo inicia-se com uma secção sobre o ângulo completo. De seguida, por esta ordem, apresentamos as quantidades geométricas, essenciais para expressar propriedades geométricas, as construções elementares, os "blocos" para construir objectos geométricos e as afirmações geométricas construtivas, aquilo que pretendemos verificar se é um teorema. Terminamos com a apresentação dos lemas de eliminação do método do ângulo completo.

2.1. Ângulo Completo

Comecemos por definir o que é um ângulo completo.

Definição 1 (Ângulo Completo) *Um* ângulo completo *consiste num par ordenado de rectas l e m e é denotado por $\angle[l,m]$. Dois ângulos completos $\angle[l,m]$ e $\angle[u,v]$ dizem-se iguais se existe uma rotação R tal que $R(l) \parallel u$ e $R(m) \parallel v$.*

Intuitivamente podemos pensar num ângulo completo $\angle[l,m]$ como a rotação necessária para que a recta l fique paralela à recta m [27].

Se A e B são pontos distintos da recta l e C e D são pontos distintos da recta m, então $\angle[l,m]$ também pode ser denotado por $\angle[AB,CD]$, $\angle[BA,CD]$, $\angle[AB,DC]$, $\angle[BA,DC]$, $\angle[AB,m]$, $\angle[BA,m]$, $\angle[l,CD]$ ou $\angle[l,DC]$.

Definição 2 (Ângulo Completo Recto e Ângulo Completo Raso) *Sejam l e m duas rectas.*

- *Se $l \perp m$, então $\angle[l,m]$ diz-se um* ângulo completo recto *e denota-se por $\angle[1]$.*
- *Se $l \parallel m$, então $\angle[l,m]$ diz-se um* ângulo completo raso *e denota-se por $\angle[0]$.*

Definição 3 (Soma de Ângulos Completos) *Sejam l, m, u e v rectas e R uma rotação tal que $R(u) \parallel m$. Definimos a* soma de ângulos completos *por*

$$\angle[l,m] + \angle[u,v] = \angle[l,R(v)].$$

Ilustremos de seguida o funcionamento do método do ângulo completo com um exemplo.

Exemplo 1 *Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam AD e BE as duas altitudes que se intersectam no ponto H. Seja G a intersecção de AB com a recta perpendicular a AB que passa por H. Então $\angle[DG,GH] = \angle[HG,GE]$.*

A Construção. Os pontos A, B e C são *pontos livres*. Os pontos D e E são obtidos pela intersecção das alturas do triângulo $\triangle ABC$ relativamente aos lados BC eAC respectivamente. O ponto H resulta da intersecção de AD e BE e o ponto G da intersecção de AB com a recta perpendicular a AB que passa por H (ver Figura 2.1).

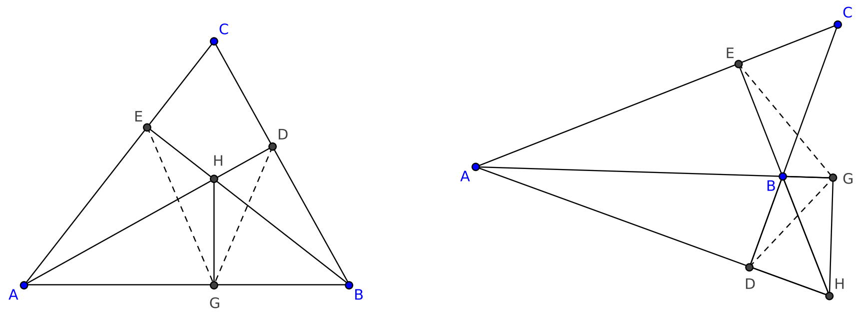

Figura 2.1: Ilustração do exemplo 1

A Conjectura. Desejamos verificar se a posição da recta DG relativamente à recta GH é igual à posição da recta HG relativamente à recta GE. Utilizando a noção de ângulo completo isto traduz-se por verificar se $\angle[DG, GH] = \angle[HG, GE]$.

A Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser feita em poucos passos pelo *Java Geometry Expert*. Para provar que $\angle[EG, GH] = \angle[HG, GD]$, utilizando o método do ângulo completo, é necessário transformar a igualdade inicial na seguinte igualdade $\angle[HG, GE] + \angle[HG, GD] = \angle[0]$.

$$\begin{aligned}
\angle[HG, GE] + \angle[HG, GD] &= \angle[HG, GD] - \angle[EG, GD] + \angle[HG, GD] \\
&= -\angle[EG, GD] - 2\angle[GD, BA] \\
&= -\angle[GD, BA] + \angle[HA, AE] - \angle[1] \\
&= -\angle[DH, HB] + \angle[HA, AE] - \angle[1] \\
&= -\angle[HB, EA] - \angle[1] \\
&= = \angle[1] - \angle[1] \\
&= \angle[0]
\end{aligned}$$

□

Para melhor compreender a vantagem da utilização de ângulos completos, vejamos como teríamos de efectuar esta demonstração utilizando a noção de ângulo. Para tal denotemos por $\angle ABC$ o ângulo determinado pelos segmentos de recta BA e BC. Reparemos que se $\angle BAC$ e $\angle ABC$ forem ângulos agudos (ver figura 2.1, ilustração da esquerda), então $\angle DGH = \angle EGH$. Se um dos ângulos for obtuso (ver figura 2.1, ilustração da direita), então $\angle DGH$ e $\angle EGH$ são ângulos suplementares, i.e., $\angle DGH + \angle EGH = 180°$. Assim, se não utilizarmos o método do ângulo completo para efectuar a demonstração, teremos que provar cada um dos dois casos separadamente.

2.2. Quantidades Geométricas

Para estabelecer e demonstrar conjecturas, o método do ângulo completo faz uso de um conjunto de *quantidades geométricas.* Estas permitem expressar, na forma de igualdades, propriedades geométricas como a colinearidade de três pontos, o paralelismo ou perpendicularidade de duas rectas, etc. No exemplo 1 a conjectura é expressa utilizando ângulos completos.

Antes de apresentar as quantidades geométricas, analisemos um dos grandes problemas dos demonstradores automáticos de teoremas em geometria — o controlo da explosão combinatória de casos que, embora semelhantes, necessitam de ser analisados. Por exemplo, dados três pontos A, B e C, quantos triângulos podemos definir? Apesar da resposta *natural* ser um, de um ponto de vista sintáctico $\triangle ABC$ não é igual a $\triangle ACB$. Para obviar esta explosão combinatória e garantir um raciocínio rigoroso, necessitamos de lidar com relações como *duas rectas terem a mesma orientação* ou *dois triângulos terem a mesma orientação.* Em geometria euclidiana, orientação positiva e negativa são apenas termos utilizados para distinguir entre duas orientações. Assim, apenas é necessário estabelecer a orientação de uma determinada recta e/ou um determinado triângulo, e proceder de acordo com essa convenção.

Estamos agora em condições de apresentar as quantidades geométricas. Comecemos por apresentar aquelas que são comuns ao método do ângulo completo e ao método da área.

Definição 4 (Razão entre Segmentos) *Sejam A, B, C e D quatro pontos tais que $C \neq D$.* A razão entre segmentos paralelos orientados*, denotada por $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, é definida por:*

- *Se A, B, C e D são colineares, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ é um número real;*
- *Se A, B, C e D definem duas rectas paralelas AB e CD, então escolhendo na recta CD dois pontos distintos Q e P tais que $ABQP$ formem um paralelogramo, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CD}}$.*

Definição 5 (Área Orientada) *Dados três pontos A, B e C, a* área orientada *do triângulo $\triangle ABC$, denotada por $\mathcal{S}_{ABC}$, é a área do triângulo, negativa se $\triangle ABC$ tem orientação negativa.*

A noção de área orientada pode ser estendida a um quadrilátero[1].

Definição 6 *Dados quatro pontos A, B, C e D, a* área orientada do quadrilátero *$ABCD$, denotada por $\mathcal{S}_{ABCD}$, é definida por*

$$\mathcal{S}_{ABCD} = \mathcal{S}_{ABC} + \mathcal{S}_{ACD}.$$

Definição 7 (Diferença de Pitágoras) *Dados três pontos A, B e C, a* diferença de Pitágoras*, denotada por $\mathcal{P}_{ABC}$, é definida por*

$$\mathcal{P}_{ABC} = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2.$$

A diferença de Pitágoras é uma generalização da igualdade de Pitágoras relativamente aos lados de um triângulo rectângulo, a uma expressão aplicável a qualquer triângulo. Esta noção também pode ser estendida a um quadrilátero.

Definição 8 *Dados quatro pontos A, B, C e D, a* diferença de Pitágoras do quadrilátero *$ABCD$, denotada por $\mathcal{P}_{ABCD}$, é definida por*

$$\mathcal{P}_{ABCD} = \mathcal{P}_{ABD} - \mathcal{P}_{CBD} = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{DA}^2.$$

As quantidades geométricas já apresentadas verificam várias propriedades. O enunciado destas propriedades e as respectivas demonstrações podem ser consultadas em [13, 21].

Antes de apresentar a última quantidade geométrica, consideremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

Proposição 1 *Dois ângulos completos $\angle[AB, CD]$ e $\angle[PQ, UV]$ dizem-se iguais se e só se $\mathcal{S}_{ACBD}\mathcal{P}_{PUQV} = \mathcal{S}_{PUQV}\mathcal{P}_{ACBD}$.*

Estamos em condições de apresentar a única quantidade geométrica introduzida pelo método do ângulo completo.

[1] A noção de área orientada pode ser generalizada a um polígono orientado de n lados, com $n > 4$ (vd. [21]).

Definição 9 (Tangente de um Ângulo Completo) *Dado um ângulo completo,* $\angle[AB, CD] \neq \angle[1]$*, a função* tangente do ângulo completo $\angle[AB, CD]$*, denotada por* $\mathrm{tg}(\angle[AB, CD])$*, é definida por*

$$\mathrm{tg}(\angle[AB, CD]) = \frac{4\mathcal{S}_{ACBD}}{\mathcal{P}_{ADBC}}.$$

Reparemos que a função tangente de um ângulo completo está bem definida. Afinal, dados dois ângulos completos $\angle[AB, CD]$ e $\angle[PQ, UV]$, utilizando a proposição 1, temos

$$\begin{aligned}
\angle[AB, CD] = \angle[PQ, UV] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_{ACBD}\mathcal{P}_{PUQV} = \mathcal{S}_{PUQV}\mathcal{P}_{ACBD} \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{\mathcal{S}_{ACBD}}{\mathcal{P}_{ACBD}} = \tfrac{\mathcal{S}_{PUQV}}{\mathcal{P}_{PUQV}} \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{\mathcal{S}_{ACBD}}{\mathcal{P}_{ADBC}} = \tfrac{\mathcal{S}_{PUQV}}{\mathcal{P}_{PVQU}} \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{4\mathcal{S}_{ACBD}}{\mathcal{P}_{ADBC}} = \tfrac{4\mathcal{S}_{PUQV}}{\mathcal{P}_{PVQU}} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}(\angle[AB, CD]) = \mathrm{tg}(\angle[PQ, UV]).
\end{aligned}$$

Temos assim o seguinte resultado.

Proposição 2 *Dados dois ângulos completos* $\angle[AB, CD]$ *e* $\angle[PQ, UV]$*, verifica-se* $\angle[AB, CD] = \angle[PQ, UV]$ *se e só se* $\mathrm{tg}(\angle[AB, CD]) = \mathrm{tg}(\angle[PQ, UV])$*.*

Ainda sobre a quantidade geométrica tangente de um ângulo completo, observemos que esta está definida utilizando quantidades geométricas do método da área.

Apresentemos de seguida mais algumas propriedades dos ângulo completo.

Proposição 3 *A tangente da soma de dois ângulos completos* $\angle[u, v]$ *e* $\angle[l, m]$ *é definida por*

$$\mathrm{tg}(\angle[u, v] + \angle[l, m]) = \frac{\mathrm{tg}(\angle[u, v]) + \mathrm{tg}(\angle[l, m])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u, v])\,\mathrm{tg}(\angle[l, m])}.$$

A demonstração da proposição 3 pode ser consultada em [4].

Proposição 4 $\angle[u, v] + \angle[l, m] = \angle[l, m] + \angle[u, v]$*, i.e., operação de adição de ângulos completos é comutativa.*

Demonstração Pela proposição 2, temos de verificar se $\mathrm{tg}(\angle[u, v] + \angle[l, m]) = \mathrm{tg}(\angle[l, m] + \angle[u, v])$. Como

$$\mathrm{tg}(\angle[u, v] + \angle[l, m]) = \frac{\mathrm{tg}(\angle[u, v]) + \mathrm{tg}(\angle[l, m])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u, v])\,\mathrm{tg}(\angle[l, m])} = \mathrm{tg}(\angle[l, m] + \mathrm{tg}(\angle[u, v]),$$

concluímos o pretendido. $\square$

Proposição 5 *$\angle[u,v]+(\angle[l,m]+\angle[s,t]) = (\angle[u,v]+\angle[l,m])+\angle[s,t]$, i.e., operação de adição de ângulos completos é associativa.*

Demonstração Verificar se $\angle[u,v] + (\angle[l,m] + \angle[s,t]) = (\angle[u,v] + \angle[l,m]) + \angle[s,t]$ é, pela proposição 2, equivalente a verificar se $\mathrm{tg}(\angle[u,v]+(\angle[l,m]+\angle[s,t])) = \mathrm{tg}((\angle[u,v] + \angle[l,m]) + \angle[s,t])$. Atendendo a que

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tg}(\angle[u,v] + (\angle[l,m] + \angle[s,t])) = \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v]) + \mathrm{tg}(\angle[l,m] + \angle[s,t])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m] + \angle[s,t])} \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v]) + \frac{\mathrm{tg}(\angle[l,m])+\mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1-\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t]}}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\frac{\mathrm{tg}(\angle[l,m])+\mathrm{tg}(\angle[s,t]}{1-\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])}} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v])(1-\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t]))+\mathrm{tg}(\angle[l,m])+\mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1-\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])}}{\frac{1-\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])-\mathrm{tg}(\angle[u,v])(\mathrm{tg}(\angle[l,m])+\mathrm{tg}(\angle[s,t]))}{1-\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])}} \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v])(1 - \mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])) + \mathrm{tg}(\angle[l,m]) + \mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t]) - \mathrm{tg}(\angle[u,v])(\mathrm{tg}(\angle[l,m]) + \mathrm{tg}(\angle[s,t]))} \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v]) - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t]) + \mathrm{tg}(\angle[l,m]) + \mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t]) - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m]) - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])} \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v]) + \mathrm{tg}(\angle[l,m]) + \mathrm{tg}(\angle[s,t]) - \mathrm{tg}(\angle[s,t])\,\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m]) - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t]) - \mathrm{tg}(\angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])} \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v]) + \mathrm{tg}(\angle[l,m]) + \mathrm{tg}(\angle[s,t])(1 - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m]))}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m]) - (\mathrm{tg}(\angle[u,v]) + \mathrm{tg}(\angle[l,m]))\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v])+\mathrm{tg}(\angle[l,m])+\mathrm{tg}(\angle[s,t])(1-\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m]))}{1-\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])}}{\frac{1-\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])-(\mathrm{tg}(\angle[u,v])+\mathrm{tg}(\angle[l,m]))\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1-\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])}} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v])+\mathrm{tg}(\angle[l,m])}{1-\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])} + \mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1 - \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])}{1-\mathrm{tg}(\angle[u,v])\,\mathrm{tg}(\angle[l,m])}\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])} \\
&= \frac{\mathrm{tg}(\angle[u,v] + \angle[l,m]) + \mathrm{tg}(\angle[s,t])}{1 - \mathrm{tg}(\angle[u,v] + \angle[l,m])\,\mathrm{tg}(\angle[s,t])} \\
&= \mathrm{tg}((\angle[u,v] + \angle[l,m]) + \angle[s,t]),
\end{aligned}
$$

podemos concluir que a adição de ângulos completos é associativa. □

Proposição 6 *$\angle[1] + \angle[1] = \angle[0]$, i.e., a soma de dois ângulos completos rectos é um igual a um ângulo completo raso.*

Demonstração Sejam u e v duas rectas tais que $u \perp v$, ou seja, $\angle[u,v] = \angle[1]$. Então

$$
\begin{aligned}
\angle[1] + \angle[1] &= \angle[u,v] + \angle[u,v] && \angle[1] = \angle[u,v] \\
&= \angle[u,R(v)] && \text{Soma de ângulos completos} \\
&= \angle[u,u] && u \perp v \text{ e } R(u) \parallel v \\
&= \angle[0] && \text{Ângulo completo raso}
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 7 $\angle[u, v] + \angle[0] = \angle[u, v]$, *i.e., o ângulo completo raso é o elemento neutro da adição de ângulos completos.*

Demonstração Atendendo à definição de ângulo completo raso temos que $\angle[v, v] = \angle[0]$. Assim

$$\begin{array}{rcll} \angle[u,v] + \angle[0] & = & \angle[u,v] + \angle[v,v] & \qquad \angle[0] = \angle[v,v] \\ & = & \angle[u,v] & \qquad \text{Soma de ângulos completos} \end{array}$$

$\square$

Proposição 8 $\angle[u, v] = -\angle[v, u]$.

Demonstração Atendendo às definições 1, 2 e 3 temos

$$\angle[u, v] - (-\angle[v, u]) = \angle[0],$$

donde podemos concluir que $\angle[u, v] = -\angle[v, u]$. $\square$

2.3. Construções Elementares

O método do ângulo completo é utilizado para demonstrar conjecturas em geometria construtiva, ou seja, afirmações sobre propriedades de objectos construídas utilizando um conjunto pré-definido de construções elementares. Nesta secção vamos apresentar as construções elementares utilizadas no método do ângulo completo.

Para que uma construção elementar esteja bem definida é, por vezes, necessário que se verifiquem certas condições. Estas condições são designadas por *condições de não degenerescência* ou, abreviadamente, *condições–ndg*.

No que se segue denotemos por (Line A B) a recta a que pertencem os pontos A e B e por (Circle O A) a circunferência com centro no ponto O e ao qual pertence o ponto A.

Comecemos por apresentar as construções elementares do método da área.

CE1 Construção de um ponto arbitrário A. Denotamos por (Point A).

Condições–ngd: —

CE2 Construção de um ponto E, resultado de intersecção de (Line A B) e (Line C D) (ver figura 2.2). Denotamos por (Inter E A B C D).

Condições–ndg: $A \neq B$, $C \neq D$, $AB \nparallel CD$

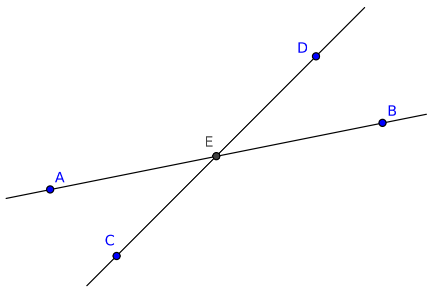

Figura 2.2: Ilustração da CE2

CE3 Construção de um ponto E, resultado da intersecção da recta que passa por C e é perpendicular a (LINE A B) (ver figura 2.3). Denotamos por (FOOT E C A B).

Condições–ndg: $A \neq B$

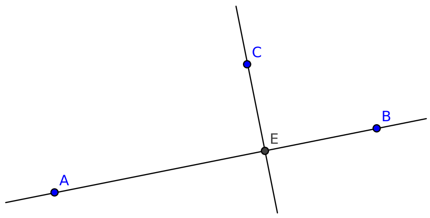

Figura 2.3: Ilustração da CE3

CE4 Construção de um ponto E da recta que passa por C, é paralela a (LINE A B) e tal que $\overline{CE} = r\overline{AB}$ onde r é um número racional, uma expressão racional de quantidades geométricas ou uma variável (ver figura 2.4). Denotamos por (PRATIO E C A B r).

Condições–ndg: $A \neq B$; se r é uma expressão racional de quantidades geométricas, então o denominador de r não pode ser 0.

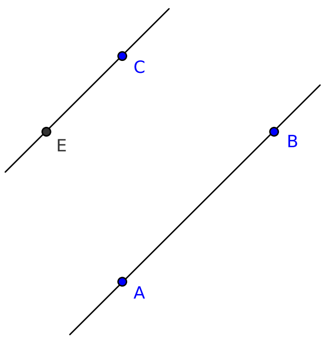

Figura 2.4: Ilustração da CE4 ($r = -\frac{1}{2}$)

CE5 Construção de um ponto E na recta que passa por A, é perpendicular a (LINE A B) e tal que $r = \frac{4S_{ABE}}{\mathcal{P}_{ABA}}$ onde r é um número racional, uma expressão racional de quantidades geométricas ou uma variável (ver figura 2.5). Denotamos por (TRATIO E A B r).

Condições–ndg: $A \neq B$; se r é uma expressão racional de quantidades geométricas, então o denominador de r não pode ser 0.

Figura 2.5: Ilustração da CE5 ($r = \frac{1}{2}$)

As construções elementares apresentadas permitem introduzir um novos pontos. Estes serão livres em CE1 e se r é uma variável em CE4 e em CE5.

Resta apresentar mais uma construção elementar, a única introduzida pelo método do ângulo completo.

CE6 Construção de uma recta l que passa por A e tal que $\angle[AB, l] = \angle[CD, DE]$ (ver figura 2.6). Denotamos por (ALINE A B C D E).

Condições-ndg: $A \neq B$, $C \neq D$, $D \neq E$

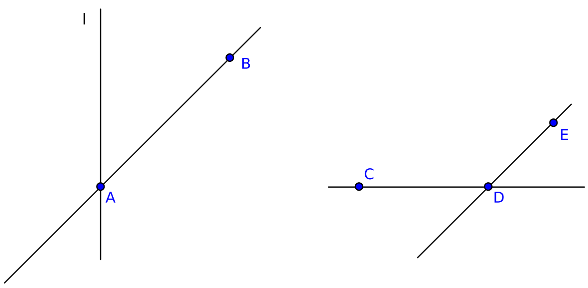

Figura 2.6: Ilustração da CE6

Esta construção elementar permite introduzir numa construção geométrica uma recta. Contudo, como o método do ângulo completo pode ser encarado como uma extensão do método da área, é possível expressar CE6 utilizando as construções elementares do método da área.

Proposição 9 *Sejam P, Q, U, W e V pontos e $l =$ (*ALINE *P Q U W V).*

1. *Se UW for perpendicular a WV, então a recta $l =$ (*LINE *P R), onde R é introduzido pela construção (*TRATIO *R P Q $\frac{\overline{WV}}{\overline{WU}}$).*

2. *Se UW não for perpendicular a WV, então a recta $l =$ (*LINE *P R), onde R é introduzido pela construção (*TRATIO *R Q P $\frac{4\mathcal{S}_{UWV}}{\mathcal{P}_{UWV}}$).*

Demonstração

1. No método da área prova-se que $\frac{4\mathcal{S}_{WUV}}{\mathcal{P}_{WUW}} = \frac{\overline{VW}}{\overline{WU}}$ (vd. [4, 6]).

   Atendendo a que $UW \perp WV$, então V verifica que (TRATIO V W U $\frac{4\mathcal{S}_{WUV}}{\mathcal{P}_{WUW}}$) ou ainda (TRATIO V W U $\frac{\overline{VW}}{\overline{WU}}$). A construção que introduz R, (TRATIO R P Q $\frac{4\mathcal{S}_{PQR}}{\mathcal{P}_{PQP}}$), também pode ser reescrita na forma (TRATIO R P Q $\frac{\overline{RP}}{\overline{PQ}}$).

   Como pretendemos que $RP \perp PQ$, então basta que se verifique $\frac{\overline{RP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{VW}}{\overline{WU}}$.

2. Consideremos a recta que passa pelo ponto Q, é perpendicular a PQ e intersecta a recta l no ponto R. Então R é introduzido pela construção (TRATIO R Q P r), onde

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\mathcal{S}_{QPR}}{\mathcal{P}_{QPQ}} \\ &= \frac{4\mathcal{S}_{RPPQ}}{\mathcal{P}_{RQPP}} \\ &= \operatorname{tg}(\angle[RP, PQ]) \\ &= \operatorname{tg}(\angle[VW, WU]) \\ &= \frac{4\mathcal{S}_{VWWU}}{\mathcal{P}_{VUWW}} \\ &= \frac{4\mathcal{S}_{UWV}}{\mathcal{P}_{UWV}}. \end{aligned}$$

□

2.4. Afirmações Geométricas Construtivas

Munidos das diferentes quantidades geométricas e construções elementares, podemos finalmente definir de um modo preciso o que é uma afirmação geométrica construtiva.

Definição 10 (Afirmação Geométrica Construtiva) *Uma* afirmação geométrica construtiva *é uma lista $S = (C_1, C_2, \ldots, C_n, G)$ onde C_i, para $1 \leqslant i \leqslant n$, é uma construção elementar, e a conclusão da afirmação G toma uma das seguintes formas:*

Forma 1 *$E_1 = E_2$, onde E_1 e E_2 são polinómios de quantidades geométricas dos pontos ou rectas introduzidos em algum C_i;*

Forma 2 *$\sum_{i=1}^{k_1} a_i\angle[l_i, m_i] = \sum_{j=1}^{k_2} b_j\angle[u_j, v_j]$, onde $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$, para $1 \leqslant i \leqslant k_1$ e $1 \leqslant j \leqslant k_2$.*

Os pontos ou rectas utilizados em cada C_i foram previamente introduzidos em construções elementares anteriores.

Uma afirmação geométrica construtiva $S = (C_1, C_2, \ldots, C_m, G)$ também possui condições de não degenerescência. Este conjunto é constituído pelas

- condições–ndg de cada C_i;
- condições d_i em como os denominadores que ocorrem em E_1 e E_2 nunca se anulam;
- condições p_i em como as rectas das razões entre segmentos que ocorrem em E_1 e E_2 são paralelas.

Podemos agora demonstrar que o método do ângulo completo, conforme apresentado, é completo.

Teorema 1 *O método do ângulo completo é um procedimento de decisão completo para afirmações geométricas construtivas envolvendo ângulos completos.*

Demonstração Se a conclusão G de uma afirmação geométrica construtiva tiver a forma $\sum_{i=1}^{k_1} a_i\angle[l_i, m_i] = \sum_{j=1}^{k_2} b_j\angle[u_j, v_j]$, onde $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$, para $1 \leqslant i \leqslant k_1$ e $1 \leqslant j \leqslant k_2$, então pela proposição 2 podemos provar que $\operatorname{tg}(\sum_{i=1}^{k_1} a_i\angle[l_i, m_i]) = \operatorname{tg}(\sum_{j=1}^{k_2} b_j\angle[u_j, v_j])$, igualdade que pode ser expressa utilizando a área orientada e a diferença de Pitágoras.

Por outro lado, se a afirmação geométrica construtiva fizer uso da construção elementar CE6, então pela proposição 9 podemos reescrever esta afirmação utilizando a construção elementar do método da área CE5.

Logo as afirmações geométricas construtivas envolvendo ângulos completos pertencem à classe das afirmações geométricas construtivas demonstráveis pelo método da área que é completo [13]. $\square$

2.5. Lemas de Eliminação

Terminamos a apresentação do método do ângulo completo com exposição dos lemas de eliminação associados a este método. O método da área também possui vários lemas de eliminação, cujos enunciados e respectivas demonstrações podem ser consultados em [13, 21].

Lema 1 (LE1) *Para qualquer recta EF verifica-se $\angle[AB, CD] = \angle[AB, EF] + \angle[EF, CD]$.*

Demonstração Este resultado é consequência da definição de soma de ângulos completos e de $EF \parallel EF$. □

Lema 2 (LE2) *Se $EF \parallel CD$, então $\angle[AB, EF] = \angle[AB, CD]$.*

Demonstração Como $EF \parallel CD$, então $\angle[EF, CD] = \angle[0]$. Logo

$$\begin{array}{rcll}
\angle[AB, EF] & = & -\angle[EF, AB] & \text{Proposição 8} \\
& = & -(\angle[EF, CD] + \angle[CD, AB]) & \text{Lema 1} \\
& = & -(\angle[0] + \angle[CD, AB]) & \text{Hipótese} \\
& = & -(\angle[CD, AB] + \angle[0]) & \text{Proposição 4} \\
& = & -\angle[CD, AB] & \text{Proposição 7} \\
& = & \angle[AB, CD] & \text{Proposição 8}
\end{array}$$

□

Lema 3 (LE3) *Se X pertence à recta CD, então $\angle[AB, CX] = \angle[AB, CD]$.*

Demonstração Se X pertence à recta CD, então $CX \parallel CD$. Logo decorre do lema de eliminação 2 que $\angle[AB, CX] = \angle[AB, CD]$, conforme pretendíamos demonstrar. □

Lema 4 (LE4) *Se $EF \perp CD$, então $\angle[AB, EF] = \angle[1] + \angle[AB, CD]$.*

Demonstração Atendendo a que $EF \perp CD$, então $\angle[CD, EF] = \angle[1]$. Assim

$$\begin{array}{rcll}
\angle[AB, EF] & = & \angle[AB, CD] + \angle[CD, EF] & \text{Lema 1} \\
& = & \angle[AB, CD] + \angle[1] & \text{Hipótese} \\
& = & \angle[1] + \angle[AB, CD] & \text{Proposição 4}
\end{array}$$

□

Lema 5 (LE5) *Se $XA = XB$, então $\angle[AX, AB] = \angle[AB, XB]$.*

Demonstração Comecemos por reescrever o que pretendemos mostrar. Pela proposição 2,

$$\angle[AX, AB] = \angle[AB, XB] \Leftrightarrow \mathrm{tg}(\angle[AX, AB]) = \mathrm{tg}(\angle[AB, XB]),$$

donde, atendendo à definição de tangente de um ângulo completo,

$$\mathrm{tg}(\angle[AX, AB]) = \mathrm{tg}(\angle[AB, XB]) \Leftrightarrow \frac{4\mathcal{S}_{AAXB}}{\mathcal{P}_{ABXA}} = \frac{4\mathcal{S}_{AXBB}}{\mathcal{P}_{ABBX}}.$$

Assim, temos de provar que

$$\frac{\mathcal{S}_{AAXB}}{\mathcal{P}_{ABXA}} = \frac{\mathcal{S}_{AXBB}}{\mathcal{P}_{ABBX}}. \tag{2.1}$$

Das propriedades da área orientada de um quadrilátero e da diferença de Pitágoras de um quadrilátero (vd. [13, 21]) sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{AAXB} &= \mathcal{S}_{AXBB} && (2.2)\\ \mathcal{P}_{ABXA} &= \mathcal{P}_{BAX} = \overline{BA}^2 + \overline{AX}^2 - \overline{BX}^2 && (2.3)\\ \mathcal{P}_{ABBX} &= \mathcal{P}_{ABX} = \overline{AB}^2 + \overline{XB}^2 - \overline{AX}^2. && (2.4) \end{aligned}$$

Logo, das equações 2.3 e 2.4 e atendendo à hipótese, verifica-se

$$\mathcal{P}_{ABXA} = \mathcal{P}_{ABBX}. \tag{2.5}$$

Assim das equações 2.2 e 2.5 concluímos que também se verifica a equação 2.1, conforme pretendíamos. □

Por restrições temporais os seguintes resultados são apresentados sem demonstração.

Lema 6 (LE6 (Teorema do ângulo inscrito)) *Se A, B, C e D são cíclicos, então $\angle[AD, CD] = \angle[AB, CB]$.*

Lema 7 (LE7) *Se O é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$ e M é o ponto médio de AB, então $\angle[AO, OM] = \angle[AC, BC]$.*

Lema 8 (LE8) *Se $MA = MB$ e A, B, P e M são cíclicos, então $\angle[PA, PM] = \angle[PM, PB]$.*

Capítulo 3

Planeamento da Implementação

Neste capítulo vamos abordar o planeamento da implementação do método do ângulo completo. Começamos expor os algoritmos do método do ângulo completo e do método da área, já que este último pode ser necessário dependendo dos objectivos pretendidos. De seguida, apesar dos algoritmos serem independentes da implementação, apresentamos o *OpenGeoProver*, um projecto para implementação de demonstradores automáticos de teoremas em geometria. Terminamos com um breve menção a outras implementações do método do ângulo completo.

3.1. Descrição da Implementação

O algoritmo do método da ângulo completo, assim como o do método da área, utilizam um método de inferência designado por *backward chaining*. Trabalhando a partir do consequente (a conjectura) para o antecedente, o método vai tentar verificar se existe informação disponível que valide o consequente.

Com efeito, dada uma afirmação geométrica construtiva $S = (C_1, C_2, \ldots, C_n, G)$, o objectivo é verificar se S é um teorema, i.e., se G é uma consequência dedutiva da construção $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Para tal, partindo da conclusão G, os pontos e rectas introduzidos durante a construção são eliminados pela ordem inversa à sua introdução.

Comecemos por apresentar o algoritmo para o método do ângulo completo.

Algoritmo Estrito do Método do Ângulo Completo

Input

$S = (C_1, C_2, \ldots, C_n, G)$ onde G está na forma 2 da definição 10.

Output

Se S for um teorema, a demonstração passo a passo. Se S não for um teorema, ou não for possível concluir nada acerca de S ou foi excedido o tempo limite para efectuar a demonstração, uma mensagem com essa indicação.

Algoritmo

1. Converter a conclusão G para uma equação de ângulos completos G' com a forma $\sum_{i=1}^{k} a_i \angle[l_i, m_i] = \angle[0]$ onde cada $a_i \in \mathbb{Z}$, para $1 \leqslant i \leqslant k$.

2. Processar os passos construtivos por ordem inversa, utilizando propriedades e lemas de eliminação do método do ângulo completo como regras de reescrita.

3. A demonstração termina quando ser verificar uma das seguintes condições:

   - após a reescrita da conclusão G', esta foi transformada numa equação com a forma $\angle[0] = \angle[0]$, situação em que S é um teorema;
   - após a reescrita da conclusão G', não foi possível transformar esta numa equação com a forma $\angle[0] = \angle[0]$, situação em que S não é um teorema ou nada se pode concluir acerca de S;
   - o tempo limite para efectuar a demonstração foi excedido, situação em que nada se pode concluir.

Conforme foi afirmado, o método do ângulo completo não é individualmente completo. Assim, se apenas desejamos estudar as possibilidades do método do ângulo completo, o algoritmo apresentado é suficiente. Contudo, se desejarmos ter um procedimento de decisão completo, então temos de implementar o método da área. Em [13] é possível encontrar uma explicação detalhada do algoritmo que apresentamos de seguida.

Algoritmo do Método do Área

Input

$S = (C_1, C_2, \ldots, C_n, G)$ onde G está na forma 1 da definição 10.

Output

Se S for um teorema, a demonstração passo a passo. Se S não for um teorema, ou não for possível concluir nada acerca de S ou foi excedido o tempo limite para efectuar a demonstração, uma mensagem com essa indicação.

Algoritmo

1. Processar os passos construtivos por ordem inversa, aplicando as propriedades e lemas de eliminação do método da área como regras de reescrita, até que não seja possível reescrever a conclusão G.

2. A demonstração termina quando ser verificar uma das seguintes condições:

- após a reescrita da conclusão, agora com forma $\alpha = \beta$, se α é literalmente igual a β, então S é um teorema;
- após a reescrita da conclusão, agora com forma $\alpha = \beta$, se α não é literalmente igual a β, então S não é um teorema ou nada se pode concluir acerca de S;
- o tempo limite para efectuar a demonstração foi excedido, situação em que nada se pode concluir.

Podemos, finalmente, apresentar um algoritmo que, combinando o algoritmo do método do ângulo completo com o algoritmo do método da área, é um procedimento de decisão completo.

Algoritmo Lato do Método do Ângulo Completo

Input

$S = (C_1, C_2, \ldots, C_n, G)$.

Output

Se S for um teorema, a demonstração passo a passo. Se S não for um teorema, ou não for possível concluir nada acerca de S ou foi excedido o tempo limite para efectuar a demonstração, uma mensagem com essa indicação.

Algoritmo

1. Se G está na forma 2 da definição 10, aplicar o *Algoritmo Estrito do Método do Ângulo Completo*, e terminar num dos seguintes casos:
   - for obtida uma demonstração;
   - for obtida uma refutação da conjectura.
2. Se G está na forma 2 da definição 10, reescrever a conclusão G utilizando para tal a proposição 2.
3. Se G está na forma 1 da definição 10 e utiliza a quantidade geométrica tangente do ângulo completo, então reescrever G substituindo cada tangente do ângulo completo por uma expressão envolvendo unicamente quantidades do método da área, conforme a definição 9.
4. Aplicar o *Algoritmo do Método da Área*

3.2. O *OpenGeoProver*

O *OpenGeoProver*[1] é um projecto de código livre, da autoria de Ivan Petrović, estudante de doutoramento sob orientação de Predrag Janičić, professor na Universidade de Belgrado, e que tem por objectivo implementar vários demonstradores automáticos de teoremas em geometria. Pode ser utilizado como ferramenta individual ou pode ser integrado em sistemas dinâmicos de geometria, por exemplo, decorre trabalho para integrar o *OpenGeoProver* no *GeoGebra* [19].

No seu estado actual o *OpenGeoProver* é um sistema que apresenta alguma dificuldade na sua utilização como ferramenta individual. Por exemplo, a escrita de uma afirmação geométrica construtiva para posterior demonstração é bastante complicada para um ser humano. Ainda assim, tendo em conta que é um projecto relativamente recente e dada a sua elevada complexidade, o *OpenGeoProver* já implementa dois métodos algébricos, o método característico, também conhecido como método de Wu, e o método das bases de Gröbner, bem como um método semi-sintético, o método da área.

Tendo como propósito implementar o método do ângulo completo no *OpenGeoProver*, estabeleci contacto com os autores que mostraram satisfação com esta iniciativa. Até ao momento da entrega deste trabalho já atingi os seguintes objectivos:

- foi criado um ramo de desenvolvimento para o método do ângulo completo no projecto, o que na prática se traduz pela disponibilização (parcial) do código por parte dos autores, para assim poder implementar o método do ângulo completo sem afectar o restante sistema;
- foi criada uma página *Wiki* para documentação do método do ângulo completo e respectiva implementação;
- estudei as normas para escrita de código utilizadas neste projecto.

Neste momento estou a estudar o código existente, por exemplo, o reconhecedor e a estrutura de dados que permite descrever uma afirmação geométrica construtiva. Este estudo tornou patente que, com vista a compreender a representação das afirmações geométricas construtivas, necessitarei de estudar XML, um formato para a criação de documentos com dados organizados de forma hierárquica. Após a alteração do reconhecedor de modo a aceitar ângulos completos, irei implementar as propriedades e lemas de eliminação necessários.

[1] `https://code.google.com/p/open-geo-prover/`

Para participar neste projecto foi necessário o estudo da linguagem de programação *Java*, que ainda prossigo, visto ser a linguagem utilizada na implementação do *OpenGeoProver*. Além disso foi fundamental aprender a trabalhar com diversas ferramentas utilizadas pelo projecto, as quais de diversos modos permitem o trabalho em grupo. Destas destaco o *Eclipse*[2] e o *Subversion*[3].

3.3. Outras Implementações

Além da implementação original desenvolvida pelos autores que propuseram o método, existem, tanto quanto me é possível saber, outras três implementações nos seguintes provadores automáticos de teoremas em geometria:

- *Geometry Expert* [10], da autoria Chou, Gao e Zhang;
- *Java Geometry Expert*, também da autoria de Chou, Gao e Zhang;
- *Geometry Explorer* [27] da autoria da Wilson e Fleuriot.

Destes provadores apenas o *Java Geometry Expert* parece ainda ser um projecto activo.

[2] `http://www.eclipse.org/`
[3] `http://subversion.apache.org/`

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho apresentou-se o método do ângulo completo que, em conjunto com o método da área, são dois dos métodos mais significativos na demonstração automática de teoremas em geometria, ambos propostos por Chou, Gao e Zhang no início dos anos 1990.

A importância do método do ângulo completo deve-se não só ao seu interesse matemático intrínseco, isto é, o estudo de um método para realizar demonstrações automáticas de teoremas em geometria, independentemente da sua eventual aplicação, mas também pelo facto de, com este método, ser possível efectuar demonstrações de teoremas com uma vasta gama de dificuldade, estas serem legíveis para um matemático, elegantes e, muitas vezes, curtas [5, 6, 13]. Com efeito, por um lado os métodos sintéticos, apesar de produzirem demonstrações legíveis, não conseguem demonstrar bastantes teoremas de dificuldade moderada [5]. Por outro lado, os métodos algébricos apesar de demonstrarem com sucesso teoremas de elevada dificuldade, "substituem a dificuldade qualitativa pela complexidade quantitativa" (palavras de H. Wang [26]), ou seja, as demonstrações são efectuadas através de cálculos algébricos massivos sem nenhuma ligação directa ao conteúdo geométrico. Restam os métodos semi-sintéticos como o estudado neste trabalho

4.1. Aplicações e Trabalho Futuro

Com o método do ângulo completo as demonstrações fazem uso de quantidades geométricas que possuem um significado geométrico claro. Este facto aliado ao modo de funcionamento do método permite que as demonstrações sejam legíveis, algo que é naturalmente importante mas que no caso da geometria é determinante. A geometria com o seu forte conteúdo visual e também forte ligação entre esse conteúdo visual e a respectiva especificação formal, é uma área onde as ferramentas computacionais podem ajudar no estudo e ensino desta disciplina. Com efeito, os sistemas dinâmicos de geometria (DGS, do inglês *dynamic geometry software*), dos quais o mais conhecido é provavelmente o *GeoGebra*, ajudam a adquirir conhecimentos sobre objectos geométricos e, mais genericamente, rigor matemático. A inclusão de demonstradores automáticos de teoremas em geometria (GATP, do inglês *geometric automated theorem provers*) capazes de validar uma construção e produzir demonstrações legíveis num DGS, terá como possível consequência a consolidação dos conhecimentos adquiridos com a utilização do DGS. Afinal a demonstração produzida pelo GATP, se sintética, poderá ser objecto de estudo, disponibilizando uma explicação lógica para a construção. Assim a utilização de um GATP é algo desejável e é actualmente objecto de investigação [14, 20, 22, 23].

A implementação do método do ângulo completo no sistema *OpenGeoProver* fará parte do projecto *Web Geometry Laboratory* (WGL). Este projecto tem como objectivo criar um ambiente *Web* para o ensino de geometria, adaptável e colaborativo, integrando DGS e GATP. Em particular a implementação de um GATP que produza demonstrações sintéticas, curtas e legíveis pelos alunos, como o método do ângulo completo, é bastante importante para o sucesso do WGL.

Resta ainda salientar que será interessante explorar a aplicação do método do ângulo completo a geometria euclidiana no espaço e mesmo a geometrias não-euclidianas.

Bibliografia

[1] Shang-Ching Chou. *Proving and Discovering Geometry Theorems using Wu's Method*. PhD thesis, University of Texas, Austin, 1985.

[2] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated production of traditional proofs for constructive geometry theorems. In *Proceedings of the Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS '93*, pages 48–56, June 1993.

[3] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. A collection of 110 geometry theorems and their machine produced proofs using full-angles. Technical Report 94-4, Department of Computer Science, The Wichita State University, March 1994.

[4] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. *Machine Proofs in Geometry*, volume 6 of *Series on Applied Mathematics*. World Scientific, 1994.

[5] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, I. multiple and shortest proof generation. *Journal of Automated Reasoning*, 17(13):325–347, 1996.

[6] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II. theorem proving with full-angles. *Journal of Automated Reasoning*, 17(13):349–370, 1996.

[7] Hélder Coelho and Luís Moniz Pereira. Automated reasoning in geometry theorem proving with Prolog. *Journal of Automated Reasoning*, 2(4):329–390, 1986.

[8] George E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition: a synopsis. *SIGSAM Bulletin*, 10(1):10–12, February 1976.

[9] E. W. Elcock. Representation of knowledge in geometry machine. *Machine Intelligence*, 8:11–29, 1977.

[10] Xiao-Shan Gao. Using dynamic visual and logic models in education — An introduction to Geometry Expert. 1998.

[11] H. Gelernter. *Computers & Thought*, chapter Realization of a Geometry-Theorem Proving Machine, pages 134–152. MIT Press, 1995.

[12] James G. Greeno, Maria E. Magone, and Seth Chaiklin. Theory of constructions and set in problem solving. *Memory and Cognition*, 7(6):445–461, November 1979.

[13] Predrag Janičić, Julien Narboux, and Pedro Quaresma. The area method: A recapitulation. *Journal of Automated Reasoning*, 4(4):489–532, 2012.

[14] Predrag Janičić and Pedro Quaresma. Automatic verification of regular constructions in dynamic geometry systems. In Francisco Botana and Tomás Recio, editors, *Automated Deduction in Geometry*, volume 4869 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 39–51. Springer, 2007.

[15] Deepak Kapur. Geometry theorem proving using Hilbert's nullstellensatz. In *SYMSAC '86 Proceedings of the fifth ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 202–208. ACM Press, 1986.

[16] Deepak Kapur. Using Gröbner bases to reason about geometry problems. *Journal of Symbolic Computation*, 2(4):399–408, December 1986.

[17] H. Li. Clifford algebra approaches to mechanical geometry theorem proving. In Xiao-Shan Gao and Dongming Wang, editors, *Mathematics Mechanization and Applications*, pages 205–299. Academic Press, 2000.

[18] Arthur J. Nevins. Plane geometry theorem proving using forward chaining. *Artificial Intelligence*, 6(1):1–23, 1975.

[19] Ivan Petrović and Predrag Janičić. Integration of OpenGeoProver with GeoGebra, February 2012.

[20] Pedro Quaresma and Predrag Janičić. Integrating dynamic geometry software, deduction systems, and theorem repositories. In *Mathematical Knowledge Management*, pages 280–294, 2006.

[21] Pedro Quaresma and Predrag Janičić. The area method, rigourous proofs of lemmas in Hilbert's style axiom system. Technical Report 2009/006, Center for Informatics and Systems of the University of Coimbra, 2009.

[22] Vanda Santos and Pedro Quaresma. Integrating DGSs and GATPs in an adaptative and collaborative blended-learning Web-environment. In *First Workshop on CTP Components for Educational Software (ThEdu'11)*, volume 79 of *EPTCS*, 2012.

[23] Vanda Santos and Pedro Quaresma. Collaborative aspects of the WGL project. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 2013. (To appear).

[24] Alfred Tarski. A decision method for elementary algebra and geometry. Technical Report R-109, RAND Corporation, 1951.

[25] Dongming Wang. Reasoning about geometric problems using an elimination method. In Johen Pfalzgraf and Dongming Wang, editors, *Automated Practical Reasoning*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, pages 147–185. Springer Vienna, 1995.

[26] H. Wang. A variant of Turing's theory of computing machines. *Jornal of the Association for Computing Machinery*, 4:63–92, 1957.

[27] Sean Wilson and Jacques D. Fleuriot. Combining dynamic geometry, automated geometry theorem proving and diagrammatic proofs. In *Proceedings of UITP 2005 (User Interfaces for Theorem Provers) Workshop*, April 2005.

[28] Wen-Tsun Wu. *Automated Theorem Proving: After 25 Years*, volume 29 of *Contemporary Mathematics*, chapter On the decision problem and the mechanization of theorem proving in elementary geometry, pages 213–234. American Mathematical Society, 1984.