

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE  
(CONCENTRATION GÉNIE MÉCANIQUE)

PAR  
ANIS ZEGGAR

ÉTUDE DE L'UTILISATION D'ÉLÉMENTS FINIS QUADRATIQUES DANS LE  
CADRE DE L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DU MOUVEMENT NORMAL

FÉVRIER 2016

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## DÉDICACE

*À ma famille*

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction conjointe des professeurs Jean-Christophe Cuillière et Vincent François de l'Équipe de Recherche en Intégration CAO-CALcul (ERICCA) du Département de Génie Mécanique à l'Université du Québec à Trois-Rivières. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe et leur grande disponibilité.

Je remercie ma sœur pour son appui inconditionnel.

Je remercie mes parents qui ont toujours été là pour me soutenir depuis le début de mes études.

Enfin, je salue mes collègues de l'équipe de recherche ERICCA.

## RÉSUMÉ

L'objectif de cette recherche est d'intégrer une méthode d'optimisation de structures au processus de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) avec un maillage quadratique. La méthode utilisée est la méthode du mouvement normal (MMN) qui vise à uniformiser la valeur des contraintes sur la frontière d'une structure en déplaçant de manière itérative les points de design dans la direction normale. La méthode a été implémentée précédemment dans le Modèle de Topologie Unifié (MTU) de l'Équipe de Recherche en Intégration CAO-Calcul (ERICCA) de l'Université du Québec à Trois-Rivières avec un maillage linéaire. Néanmoins, pour les structures courbes, les éléments linéaires ne permettent pas d'avoir une bonne approximation de la géométrie contrairement à des éléments curvilignes. La MMN est implémentée avec un maillage quadratique et appliquée sur un tube en porte-à-faux définis avec des zones de design et de non design. La méthode conduit à l'amélioration de la répartition des contraintes et une diminution de la contrainte moyenne dans le tube, mais conduit aussi à l'apparition d'un déplacement trop important à la jonction entre la zone de design et la zone de non design près de l'encastrement. Pour cela, plusieurs méthodes sont utilisées pour contrôler le déplacement des nœuds. Une méthode de lissage (lissage Taubin), filtres (filtrage des déplacements) et la MMN modifiée. Les différents contrôles utilisés permettent d'avoir une forme valide géométriquement. Finalement, la MMN avec et sans contrôle est appliquée à plusieurs structures tubulaires et une reconstruction géométrique des résultats d'optimisation d'un tube en porte-à-faux (sans zone de non-design) est effectuée afin de valider les résultats de la méthode.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	2
RÉSUMÉ .....	3
TABLE DES MATIÈRES .....	4
LISTE DES TABLEAUX.....	7
LISTE DES FIGURES.....	9
LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS .....	14
1 CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	17
1.1 Mise en contexte.....	17
1.2 Problématique.....	17
1.3 Objectif principal.....	17
1.4 Organisation du mémoire .....	18
2 CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE ET OBJECTIFS .....	19
2.1 Introduction .....	19
2.2 Modélisation géométrique.....	19
2.2.1 Modèles de type fil de fer.....	20
2.2.2 Modèles surfaciques.....	23
2.2.3 Modèles solides.....	25
2.3 Génération de maillage linéaire.....	27
2.3.1 Méthode frontale .....	28
2.3.2 Méthode Delaunay-Voronoi .....	28
2.4 Maillage curviligne.....	29
2.4.1 Validité et qualité d'un maillage curviligne.....	32
2.4.2 Optimisation des maillages curvilignes .....	38
2.5 Optimisation des structures .....	40
2.5.1 Formulation.....	41
2.5.2 Type de méthodes d'optimisation de structures.....	41
2.5.3 Méthode du mouvement normal (MMN).....	44
2.6 Objectifs spécifiques .....	54
2.7 Hypothèses .....	55
3 CHAPITRE 3 INTÉGRATION D'ÉLÉMENTS FINIS DE COQUES QUADRATIQUES .....	56

3.1	Introduction .....	56
3.2	Environnement de développement .....	56
3.3	Éléments de structures minces.....	57
3.3.1	Les éléments de plaques.....	57
3.3.2	Les éléments de coques.....	58
3.3.3	Formulation des éléments plaques et coques .....	59
3.3.4	Les éléments COQUE_3D triangulaires .....	61
3.4	Implémentation des éléments de coques .....	62
3.5	Génération et validité d'un maillage quadratique .....	62
3.5.1	Génération d'un maillage quadratique .....	62
3.5.2	Résultats .....	69
3.5.3	Validité du maillage quadratique .....	72
3.5.4	Validation des résultats .....	81
3.6	Validation des résultats de calcul avec Code_Aster.....	84
3.7	Conclusion.....	88
4	CHAPITRE 4 INTÉGRATION, APPLICATION ET CONTRÔLE DE LA MÉTHODE DU MOUVEMENT NORMAL .....	90
4.1	Introduction .....	90
4.2	Algorithme de la MMN non contrôlée .....	90
4.2.1	Calcul de normale .....	92
4.2.2	Algorithme de recentrage.....	93
4.2.3	Algorithme d'optimisation des éléments .....	94
4.3	Application de la MMN à un tube en porte-à-faux sans contrôle .....	96
4.3.1	Forme initiale .....	96
4.3.2	Valeur des paramètres d'optimisation.....	99
4.3.3	Conclusion .....	106
4.4	Lissage Laplacien .....	106
4.5	Lissage Taubin .....	107
4.5.1	Application de la MMN avec lissage Taubin.....	108
4.5.2	Comparaison entre la MMN avec et sans lissage Taubin .....	109
4.6	Utilisation de filtres .....	111
4.6.1	Application de la méthode du mouvement normal avec filtre .....	112

4.6.2	Comparaison entre la MMN avec et sans filtre.....	113
4.6.3	Comparaison entre la MMN et la MMN avec différents rayons de filtre 115	
4.7	Méthode du mouvement normal modifiée .....	118
4.7.1	Application de la MMN modifiée 1 .....	120
4.7.2	Comparaison entre la MMN et la MMN modifiée 1.....	122
4.7.3	Application de la MMN modifiée 2.....	124
4.7.4	Comparaison entre la MMN et la MMN modifiée 2.....	126
4.8	Comparaison entre les différentes méthodes de contrôle.....	128
4.9	Comparaison de l'utilisation de la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire et un maillage quadratique.....	134
4.10	Convergence de la MMN .....	137
4.11	Conclusion.....	138
5	CHAPITRE 5 RÉSULTATS .....	140
5.1	Introduction .....	140
5.2	Cadre de vélo - cas de chargement 1 .....	140
5.3	Cadre de vélo - cas de chargement 2.....	143
5.4	Table.....	146
5.5	Pont - cas 1 .....	149
5.6	Pont - cas 2 .....	152
5.7	Tube soumis à une pression interne .....	155
5.8	Tube elliptique soumis à une pression interne .....	158
5.9	Tube en porte-à-faux (sans zone de non design).....	161
5.10	Reconstruction géométrique.....	164
6	CHAPITRE 6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	167
	RÉFÉRENCES.....	169
	ANNEXE A .....	173
	ANNEXE B.....	178



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Ordre du jacobien et nombre de coefficients de contrôle pour un élément d'ordre P .....	35
Tableau 3.1 Fonctions d'interpolation et dérivées pour un triangle à six nœuds (Cuillère 2011) .....	65
Tableau 3.2 Poids et points de Gauss (Schneider et Eberly 2002).....	68
Tableau 3.3 Valeurs de $\xi$ et $\eta$ aux nœuds du triangle quadratique.....	75
Tableau 3.4 Coordonnées des nœuds du triangle quadratique étudié .....	82
Tableau 3.5 Jacobien aux nœuds obtenus avec MTU et GMSH.....	83
Tableau 3.6 Coefficients de contrôle obtenus avec MTU et GMSH .....	83
Tableau 3.7 Coefficients de contrôle de la subdivision obtenu avec MTU et GMSH.....	84
Tableau 3.8 Déplacements suivant les axes X, Y et Z au nœud N .....	87
Tableau 3.9 Contrainte de Von Mises obtenues au nœud N .....	88
Tableau 4.1 Caractéristiques du tube initial.....	97
Tableau 4.2 Contraintes de Von Mises initiales .....	98
Tableau 4.3 Paramètres de la MMN .....	99
Tableau 4.4 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN .....	101
Tableau 4.5 Paramètres de la MMN .....	102
Tableau 4.6 Nombre d'éléments invalides en utilisant la MMN avec et sans optimisation et recentrage.....	102
Tableau 4.7 Paramètres de la MMN .....	103
Tableau 4.8 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN après 100,150 et 200 itérations .....	105
Tableau 4.9 Pourcentage de diminution de la contrainte moyenne et de l'écart type après 100,150 et 200 itérations.....	106
Tableau 4.10 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN avec lissage Taubin.....	109
Tableau 4.11 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec lissage Taubin .....	111
Tableau 4.12 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN avec filtre .....	113
Tableau 4.13 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre .....	115
Tableau 4.14 Caractéristiques des filtres .....	115
Tableau 4.15 Déplacement maximal pour les différents rayons et pourcentage d'écart avec la MMN sans filtre.....	116
Tableau 4.16 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre 7, 21 et 35 mm .....	118
Tableau 4.17 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN modifiée 1 .....	122
Tableau 4.18 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN modifiée 1 .....	124
Tableau 4.19 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN modifiée 2 .....	126
Tableau 4.4.20 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN modifiée 1 ..	128
Tableau 4.21 Valeurs des paramètres de la MMN avec gradient.....	129
Tableau 4.22 Pourcentage de diminution de l'écart type et de la contrainte moyenne ainsi que le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale .....	130

Tableau 4.23 Taille des éléments, nombre de nœuds et d'éléments des maillages linéaires et quadratiques .....	134
Tableau 4.24 Pourcentage de diminution de l'écart type et de la contrainte moyenne ainsi que le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale pour les différents maillages .....	137
Tableau 4.25 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN après 100 et 200 itérations	138
Tableau 5.1 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et 2 ...	141
Tableau 5.2 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2 .....	143
Tableau 5.3 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2 .....	146
Tableau 5.4 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2 .....	149
Tableau 5.5 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2 .....	152
Tableau 5.6 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre .....	156
Tableau 5.7 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre .....	159
Tableau 5.8 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2 .....	161
Tableau 5.9 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2 .....	165

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Modèle filaire d'un cylindre .....	20
Figure 2.2 Modèle surfacique d'un cylindre .....	24
Figure 2.3 Carreau de Bézier (Mortenson 1985) .....	25
Figure 2.4 Modèle solide d'un cylindre .....	26
Figure 2.5 Étapes de maillage par la méthode frontale (Camarero 2015).....	28
Figure 2.6 Triangulation de Delaunay et polygones de Voronoï (Camarero 2010).....	29
Figure 2.7 Approches pour générer un maillage curviligne (Dey, O'Bara et al. 2001).....	29
Figure 2.8 Transformation d'un maillage linéaire en maillage curviligne (Toulorge, Geuzaine et al. 2013) .....	30
Figure 2.9 Interpolation dans l'espace de coordonnées paramétriques (adapté de lu 2011)..	31
Figure 2.10 Illustration des étapes associées à la génération d'un maillage curviligne avec analogie avec l'élasticité linéaire a) maillage linéaire b) ajout de nœuds c) déplacement imposé aux nœuds d) maillage curviligne final (Xie, Sevilla et al. 2013) .....	31
Figure 2.11 Différents exemples de triangles curvilignes invalides (George et Borouchaki 2011).....	35
Figure 2.12 Coefficients de contrôle et jacobien aux nœuds d'un triangle quadratique (adapté de George et Borouchaki 2011) .....	36
Figure 2.13 Raffinement par élévation de degré (Lu 2011).....	37
Figure 2.14 Raffinement par subdivision (Lu 2011).....	37
Figure 2.15 Raffinement par subdivision d'un triangle a) Coefficients de contrôle avant subdivision b) Coefficients de contrôle après subdivision (Johnen, Remacle et al. 2013).....	38
Figure 2.16 Exemples de modification locale de maillage (luo, shephard et al 2011) .....	39
Figure 2.17 Illustration de la méthode d'optimisation (Toulorge, Geuzaine et al. 2013).....	40
Figure 2.18 Illustration de l'optimisation des matériaux (Firl 2010).....	42
Figure 2.19 Illustration de l'optimisation dimensionnelle (Firl 2010).....	42
Figure 2.20 Illustration de l'optimisation de forme (Firl 2010).....	43
Figure 2.21 Illustration de l'optimisation topologique (Firl 2010) .....	44
Figure 2.22 Optimisation par la méthode SIMP a) Géométrie initiale et conditions aux limites b) Maillage c) Résultats bruts de la méthode SIMP d) Forme et topologie finales (Cuillière, François et al. 2011) .....	44
Figure 2.23 Illustration de la méthode du mouvement normal .....	45
Figure 2.24 Processus d'optimisation par la MMN .....	46
Figure 2.25 Zones de design (en bleu) et de non-design (en gris) d'une structure tubulaire	47
Figure 2.26 Influence du coefficient de convergence sur la convergence de la MMN (Heller, Keye et al. 1999).....	49
Figure 2.27 Lissage du point de design (Q) en utilisant les nœuds voisins (P) et (R) (Peng et Jones 2009) .....	51
Figure 2.28 Trou dans une plaque sous tension biaxiale optimisé par la MMN a) Forme et état de contrainte initial b) Forme et état de contrainte final (Peng et Jones 2009) .....	52

Figure 2.29 Congé dans une plaque sous tension uniaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (en ligne continue) et par la méthode du gradient conjugué (en ligne pointillée) (Parvizian et Fenner 2002) .....	53
Figure 2.30 Trou dans une plaque sous tension uniaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (Maduramuthu et Fenner 2004).....	53
Figure 3.1 Les éléments de coques linéiques (a) Coques à symétrie de révolution autour de l'axe Oy (b) Coques à sections invariantes le long de l'axe Oz [R3.07.02] .....	59
Figure 3.2 Variables cinématiques pour les éléments de plaques et coques [U2.02.01].....	60
Figure 3.3 Efforts résultants pour un élément de plaque ou de coque [U2.02.01].....	61
Figure 3.4 Différents type d'éléments finis pour le triangle isoparamétrique .....	61
Figure 3.5 Illustration de l'interpolation dans l'espace des coordonnées paramétriques (adapté de Lu 2011) .....	63
Figure 3.6 Triangle quadratique (Cuillière 2011) .....	66
Figure 3.7 Déplacement du nœud milieu (adapté de Lu 2011).....	69
Figure 3.8 Comparaison pour un cône entre a), b) Un maillage linéaire et c), d) Un maillage quadratique.....	70
Figure 3.9 Comparaison pour une plaque entre a), b) Un maillage linéaire et c), d) Un maillage quadratique.....	71
Figure 3.10 Comparaison pour un cylindre entre a), b) Un maillage linéaire et c), d) Un maillage quadratique.....	71
Figure 3.11 Coque maillée avec six éléments.....	82
Figure 3.12 Coque mince encastée modélisée dans SolidWorks Simulation .....	85
Figure 3.13 Maillage dans a) Solidworks Simulation b) MTU.....	85
Figure 3.14 Contraintes pour les coques dans SolidWorks Simulation <a href="http://help.solidworks.com/2014/french/SolidWorks/cworks/doc1292870572840.image">http://help.solidworks.com/2014/french/SolidWorks/cworks/doc1292870572840.image</a> ....	86
Figure 3.15 Déplacements obtenus sur la coque a) Suivant X dans SolidWorks Simulation b) Suivant Y dans SolidWorks Simulation c) Suivant Z dans SolidWorks Simulation d) Suivant X dans Code_Aster e) Suivant Y dans Code_Aster f) Suivant Z dans Code_Aster .....	87
Figure 3.16 Contraintes de Von Mises obtenues sur la coque a) Sur la face supérieure avec SolidWorks Simulation b) Sur la face inférieure avec SolidWorks Simulation c) Sur la face supérieure avec Code_Aster d) Sur la face inférieure avec Code_Aster .....	88
Figure 4.1 illustration de l'intervalle d'incertitude (lu 2011) .....	95
Figure 4.2 Algorithme de la MMN avec un maillage quadratique .....	96
Figure 4.3 Tube à paroi mince en porte-à-faux modélisé dans SolidWorks .....	97
Figure 4.4 Tube maillé avec des triangles quadratiques .....	97
Figure 4.5 Contraintes de Von Mises initiales aux nœuds a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D.....	98
Figure 4.6 Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....	100
Figure 4.7 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D.....	101
Figure 4.8 Forme obtenue par la MMN a) Avec recentrage et optimisation b) Sans recentrage et optimisation.....	102

Figure 4.9	Forme optimisée par la MMN en Vue 3D .....	103
Figure 4.10	Forme obtenue par la MMN après a) 100 itérations b) 150 itérations et c) 200 itérations.....	104
Figure 4.11	Comparaison de l'état de contrainte a) Initial et l'état de contrainte après b) 100 itérations c) 150 itérations et d) 200 itérations.....	105
Figure 4.12	Forme obtenue par la MMN avec lissage Laplacien après 50 itérations .....	107
Figure 4.13	Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....	108
Figure 4.14	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN avec lissage Taubin a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D ....	109
Figure 4.15	Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN avec lissage Taubin .....	110
Figure 4.16	Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN b) La MMN avec lissage Taubin .....	110
Figure 4.17	Illustration du filtre.....	111
Figure 4.18	Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....	112
Figure 4.19	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN avec filtre a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D .....	113
Figure 4.20	Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN avec filtre .....	114
Figure 4.21	Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN et b) La MMN avec filtre.....	114
Figure 4.22	Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN, la MMN avec filtre de rayon b) 7 mm c) 21 mm d) 35 mm .....	116
Figure 4.23	Forme obtenue à l'itération 200 en vue de gauche avec la MMN avec un filtre de 35 mm .....	117
Figure 4.24	Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN et la MMN avec un rayon de filtre de b) 7mm c) 21mm d) 35mm.....	117
Figure 4.25	Illustration de la MMN modifiée 1 .....	119
Figure 4.26	Illustration de la MMN modifiée 2.....	120
Figure 4.27	Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....	121
Figure 4.28	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN modifiée 1 a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D .....	122
Figure 4.29	Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN modifiée 1 .....	123
Figure 4.30	Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN et b) La MMN modifiée 1 .....	124
Figure 4.31	Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....	125
Figure 4.32	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN modifiée 1 a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D .....	126

Figure 4.33 Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN modifiée 2	127
Figure 4.34 Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN et b) La MMN modifiée 2	127
Figure 4.35 Comparaison des formes obtenues par a) La MMN b) MMN avec lissage Taubin c) MMN avec filtre d) MMN modifiée 1 e) MMN modifiée 2 et f) MMN avec gradient...	131
Figure 4.36 Comparaison des formes obtenues en vue de dessus par a) La MMN b) MMN avec lissage Taubin c) MMN avec filtre d) MMN modifiée 1 e) MMN modifiée 2 et f) MMN avec gradient.	131
Figure 4.37 Comparaison de l'état de contrainte final obtenu avec a) La MMN b) la MMN avec lissage Taubin c) la MMN avec filtre d) MMN modifiée 1 e) MMN modifiée 2 f) MMN avec gradient.	132
Figure 4.38 Forme obtenue avec la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire d'une taille d'éléments de a) 4 mm, b) 5 mm et c) 6.5 mm et avec un maillage quadratique d'une taille d'éléments de d) 7 mm, e) 10 mm et f) 13 mm.	135
Figure 4.39 Comparaison de l'état de contrainte final obtenu avec la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire d'une taille d'éléments de a) 4 mm, b) 5 mm et c) 6.5 mm et avec un maillage quadratique d'une taille d'éléments de d) 7 mm, e) 10 mm et f) 13 mm	136
Figure 4.40 Comparaison de l'état de contrainte a) Initial et b) Final après 200 itérations de la MMN en vue de dessus.	138
Figure 5.1 Cadre de vélo a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2	141
Figure 5.2 Cadre de vélo a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2	142
Figure 5.3 Cadre de vélo a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2	144
Figure 5.4 Cadre de vélo a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2	145
Figure 5.5 Table a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2	147
Figure 5.6 Table a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2	148
Figure 5.7 Pont a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2	150
Figure 5.8 Pont a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2	151

Figure 5.9 Pont a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2 .....	153
Figure 5.10 Pont a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2 .....	154
Figure 5.11 tube a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 en vue de dessus.....	155
Figure 5.12 Tube a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN avec filtre c) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre d) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre en vue de dessus .....	157
Figure 5.13 tube a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 en vue de dessus.....	158
Figure 5.14 Tube a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN avec filtre c) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre d) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre en vue de dessus .....	160
Figure 5.15 Tube en porte à faux a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2 .....	162
Figure 5.16 Tube en porte à faux a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2 .....	163
Figure 5.17 Étapes pour la reconstruction géométrique.....	164
Figure 5.18 Reconstruction géométrique des résultats d'optimisation a) Forme initiale b) MMN c) MMN modifiée 1 d) MMN modifiée 2.....	165
Figure 5.19 Contraintes de Von Mises sur la face supérieure et inférieure a) b) MMN c) d) MMNM1 e) f) MMNM2.....	166

## LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS

$B_{i,n}(u)$	Polynôme de Bernstein
$b_{i,j}$	Coefficients de contrôle du jacobien du triangle quadratique
$C$	Coefficient de convergence de la méthode du mouvement normal
$d_i^j$	Déplacement du nœud $i$ à l'itération $j$
$\overline{d_e}$	Déplacement calculé avec le filtre
$E$	Module de Young du matériau
$I$	Distorsion (mesure de la qualité d'un élément curviligne)
$[J]$	Matrice jacobienne
$J(\xi, \eta)$	Jacobien d'un élément curviligne
$J_i$	Jacobien au nœud $i$
$k$	facteur de cisaillement transverse
$L$	Limite de convergence de la méthode du mouvement normal
$M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}$	Moments de flexion
$N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}$	Efforts résultants de membranes
$\mathbf{n}$	Normale unitaire du triangle linéaire
$\mathbf{n}(\xi, \eta)$	Normale d'un triangle quadratique
$\mathbf{n}_e$	Normale au nœud $e$ d'un triangle quadratique
$N_{i,K}(u)$	Polynôme de la base B-spline
$N_i$	Fonctions d'interpolation sur l'élément de référence
$\mathbf{p}(u)$	Vecteur position d'un point d'une courbe paramétrique
$\mathbf{p}(u, v)$	Vecteur position d'un point d'une surface paramétrique
$\mathbf{p}(u, v, w)$	Vecteur position d'un point d'un solide paramétrique
$Q_F$	Qualité de forme



$T_{i,j}^{(2)}(\xi, \eta)$	Fonction de Bézier d'un triangle quadratique
$T_{B \rightarrow L}^{(2)}$	Matrice qui permet le calcul des jacobiens aux nœuds à partir des coefficients de contrôle du jacobien
$T_{L \rightarrow B}^{(2)}$	Matrice qui permet le calcul des coefficients de contrôle du jacobien à partir des des jacobiens aux nœuds
$u, v, w$	Coordonnées paramétriques
$V_i$	Polyèdre de Voronoï associé au point $i$
$V_x, V_y$	Efforts tranchants
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes
$x_j^i, y_j^i, z_j^i$	Coordonnées du nœud $i$ à l'itération $j$
$\alpha$	Pas de l'algorithme du gradient
$\varepsilon$	Critère d'arrêt de l'algorithme du gradient
$\nu$	Coefficient de Poisson du matériau
$\sigma_o$	Contrainte de Von Mises objectif de la MMN
$\sigma_{VM_i}$	Contrainte de Von Mises au nœud $i$
$\xi, \eta$	Coordonnées paramétriques de l'élément de référence
$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	Dérivées des fonctions d'interpolation par rapport à $\xi$
$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	Dérivées des fonctions d'interpolation par rapport à $\eta$
% NSM	Pourcentage de nœuds supérieurs à la contrainte maximale

### Abréviations

BEM	Boundary Element Method
BREP	Boundary Representation
CAD	Computer-Aided Design

*LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS*

CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CSG	Constructive Solid Geometry
EDF	Électricité De France
ERICCA	Équipe de Recherche en Intégration CAO-Calcul
FSD	Fully Stressed Design
MAGIC	MAGIC Mailleur Automatique de Géométries Issues de la CAO
MMN	Méthode du Mouvement Normal
MTU	Modèle de Topologie Unifié
NURBS	Non-Uniform Rational B-spline
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
STEP	Standard for the Exchange of Product model data
UQTR	Université du Québec à Trois-Rivières

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Mise en contexte

Une structure en mécanique est définie comme tout assemblage de matériaux qui est destiné à supporter des charges. L'optimisation signifie de faire une chose de la meilleure façon tout en respectant un ensemble de critères. Ainsi, l'optimisation structurelle vise à faire supporter à un assemblage de matériaux des charges de la meilleure façon (Gordon 1978).

L'optimisation structurelle est utilisée dans diverses industries, comme le montre un sondage effectué dans l'industrie aéronautique, automobile et sidérurgique (Roy et Hinduja 2008) et le processus d'optimisation est basé sur l'expertise du concepteur. Ce processus se fait généralement de façon manuelle, le concepteur modifie et juge si la forme obtenue est optimale. Cette méthodologie présente plusieurs inconvénients : elle prend beaucoup de temps (au moins 50% du cycle de design d'un produit selon le sondage), elle est limitée par l'expérience du concepteur et elle est sujette à des erreurs lorsque le nombre de variables augmente. L'optimisation de design automatisée ou l'intégration de l'optimisation au processus de conception est nécessaire afin d'améliorer la qualité du produit ou du processus, de faciliter et d'accélérer le développement de produits (Park et Dang 2010).

### 1.2 Problématique

Les méthodes d'optimisation n'étant généralement pas intégrées aux outils de conception assistée par ordinateur, l'Équipe de Recherche en Intégration CAO-CALcul (ERICCA) travaille depuis quelques années sur le développement d'une plateforme visant l'intégration d'un ensemble de méthodes d'optimisation au processus CAO, dont la méthode du mouvement normal, qui est une méthode d'optimisation de forme.

### 1.3 Objectif principal

L'objectif de ce projet se situe dans la poursuite des travaux entrepris par l'équipe concernant l'intégration de la méthode du mouvement normal au sein du processus de développement de produits par la CAO. Le sujet de ce mémoire consiste à développer

une variante de la méthode du mouvement normal basée sur l'utilisation d'éléments finis coques quadratiques. Ce développement implique de résoudre des problèmes de maillage, de calcul par éléments finis d'éléments quadratiques, de déplacements itératifs des nœuds du maillage afin d'obtenir une géométrie optimale qui soit valide d'un point de vue géométrique.

#### **1.4 Organisation du mémoire**

Le premier chapitre présente le contexte, la problématique et l'objectif de ce mémoire.

Le second chapitre présente l'état de l'art de la modélisation géométrique, les maillages curvilignes et l'optimisation des structures. Les trois types de modélisation géométrique sont présentés : modélisation fil de fer, modélisation surfacique et modélisation solide. Ensuite la génération, la validité et l'optimisation des maillages curvilignes. Puis les différents types de méthodes d'optimisation de structures sont présentés. La méthode du mouvement normal est décrite en détail.

Le troisième chapitre traite de l'intégration des éléments finis de coques quadratiques dans le Modèle de Topologie Unifié (MTU) (François et Cuillière 2014). Les étapes d'un calcul éléments finis ainsi que les différents éléments de structures disponibles dans le solveur sont présentés. Puis la méthodologie utilisée pour générer et déterminer la validité d'un maillage quadratique est décrite. Finalement, les résultats de calcul sont validés avec un logiciel de calcul par éléments finis.

Le quatrième chapitre présente l'intégration de la méthode du mouvement normal avec un maillage quadratique. La méthode est appliquée à un tube à paroi mince en porte-à-faux. Les résultats obtenus mettent en évidence la nécessité de contrôler le déplacement des nœuds. Différentes stratégies sont utilisées pour contrôler la méthode, les résultats obtenus avec les différents contrôles sont comparés avec les résultats obtenus sans contrôle et entre eux.

Finalement, dans le cinquième chapitre la MMN, avec et sans contrôle, est appliquée sur des structures tubulaires.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LA LITTÉRATURE ET OBJECTIFS

#### 2.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, la modélisation géométrique ainsi que les différents types de modèles géométriques sont présentés.

Dans la seconde partie, les deux principales méthodes de génération de maillages linéaires automatique sont décrites brièvement ainsi que les maillages curvilignes. Les méthodes de génération de maillages curvilignes, les critères de validité ainsi que les différentes méthodes d'optimisation de la qualité de ces maillages sont présentés.

Dans la troisième partie, les différentes méthodes d'optimisation de structures sont présentées. La méthode d'optimisation de forme « méthode du mouvement normal (MMN) » est décrite de manière plus détaillée. Finalement, les objectifs spécifiques et les hypothèses de cette recherche sont définis. Les informations contenues dans la section 2.2 proviennent essentiellement de Mortenson (1985).

#### 2.2 Modélisation géométrique

La modélisation géométrique est une collection de méthodes mathématiques utilisées pour décrire la forme d'un objet ou pour exprimer un processus physique avec les représentations géométriques appropriées. Un modèle est un substitut commode et économique de l'objet ou du processus réel. L'utilisation d'un modèle géométrique s'avère utile dans la pratique car il sera plus facile, et rentable en temps et en coût, d'analyser les résultats des simulations plutôt que de réaliser des tests sur l'objet réel modifié, cela à plusieurs reprises. Une telle approche s'avère utile lorsque l'objet modélisé possède de grandes dimensions, ou trop petites, a une géométrie complexe difficile à reproduire lors des tests réels ou encore des coûts associés aux tests. Au-delà des avantages de l'analyse, le modèle mathématique de la géométrie d'un objet est un moyen efficace pour extraire des informations. Il existe trois types de modèles géométriques : les modèles de type fil de fer, les modèles surfaciques et les modèles solides.

### 2.2.1 Modèles de type fil de fer

Les modèles fil de fer représentent un objet par ses arêtes, donc des entités de dimension 0 (points) et de dimension 1 (droite, courbes...). Ce modèle est incomplet car il n'y a pas de notion de surface ou de volume, néanmoins il permet une visualisation rapide d'un objet (François 1998). La figure 2.1 montre le modèle filaire d'un cylindre.

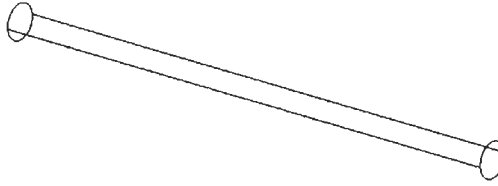


Figure 2.1 Modèle filaire d'un cylindre

#### 2.2.1.1 Équations intrinsèques des courbes

L'équation intrinsèque d'une courbe décrit la forme de la courbe indépendamment de sa position dans un système de coordonnées. La description d'une courbe nécessite deux équations intrinsèques, l'inverse de sa courbure  $\rho$  et sa torsion  $\tau$  en fonction de la longueur d'arc  $s$  le long de la courbe;

$$f(s) = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad g(s) = \tau \quad (2.1)$$

#### 2.2.1.2 Équations explicites et implicites d'une courbe

Dans un plan, l'équation explicite d'une courbe est définie par l'équation suivante;

$$y = f(x). \quad (2.2)$$

Sous cette forme, il y a seulement une valeur de  $y$  pour chaque valeur de  $x$ , en conséquence cette forme ne peut représenter toutes les courbes du plan. On ne retrouve pas ces limitations lorsque la courbe est représentée par une relation implicite de la forme;

$$f(x, y) = 0. \quad (2.3)$$

### 2.2.1.3 Équations paramétriques des courbes

Une méthode adéquate pour représenter une courbe en modélisation géométrique est celle des équations paramétriques. Une courbe en 3D est définie à l'aide de trois fonctions d'un paramètre;

$$x = x(u), y = y(u), z = z(u), \quad u \in [u_{min}, u_{max}]. \quad (2.4)$$

Une telle courbe a une représentation vectorielle définie comme suit;

$$\mathbf{p}(u) = [x(u) \ y(u) \ z(u)], \quad u \in [u_{min}, u_{max}]. \quad (2.5)$$

$u$  est le paramètre de la courbe. Chaque valeur de  $u$  donne une valeur spécifique de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et donc un point sur la courbe. Le domaine de  $u$  est souvent normalisé, ce qui veut dire que sa valeur est comprise entre 0 et 1, soit  $0 \leq u \leq 1$ .

#### *Courbes de Hermite*

La forme algébrique d'une courbe paramétrique cubique est donnée par;

$$\begin{cases} x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x, \\ y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y, \\ z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z. \end{cases} \quad (2.6)$$

Les coefficients  $(a_i, b_i, c_i, d_i)$ , appelés coefficients algébriques, définissent une courbe unique. En notation vectorielle nous avons;

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{a}u^3 + \mathbf{b}u^2 + \mathbf{c}u + \mathbf{d}, \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{p}(u)$  est le vecteur position de n'importe qu'elle point sur la courbe et  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  sont les équivalents vectoriels des coefficients algébriques. Les composantes de  $\mathbf{p}(u)$  correspondent aux coordonnées cartésiennes d'un point.

La forme de Hermite permet de définir un segment de courbe en fonction des conditions aux extrémités. Ces conditions sont les coordonnées des points aux extrémités et les vecteurs tangents en ces points. Soient  $\mathbf{p}(0)$  et  $\mathbf{p}(1)$  les coordonnées aux extrémités et les vecteurs tangents correspondants  $\mathbf{p}'(0)$  et  $\mathbf{p}'(1)$ . En tout  $u \in [0,1]$ , on a;

$$\mathbf{p}(u) = F_1(u)\mathbf{p}(0) + F_2(u)\mathbf{p}(1) + F_3(u)\mathbf{p}^u(0) + F_4(u)\mathbf{p}^u(1) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{p}(u) = F_1(u)\mathbf{p}_0 + F_2(u)\mathbf{p}_1 + F_3(u)\mathbf{p}_0^u + F_4(u)\mathbf{p}_1^u \quad (2.9)$$

La relation (2.9) est la forme géométrique de la courbe et les vecteurs  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_0^u$  et  $\mathbf{p}_1^u$  sont les coefficients géométriques. Les termes  $F_i$  sont les fonctions de la base de Hermite.

### *Courbes de Bézier*

Contrairement à une courbe de Hermite qui interpole un ensemble donné de points (la courbe passe par ces points), une courbe de Bézier approxime ces points. Une courbe de Bézier est définie par l'expression;

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,n}(u), \quad u \in [0,1],$$

avec,

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \quad (2.10)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad (2.11)$$

où les  $\mathbf{p}_i$  sont appelés les points de contrôle. Ils représentent les  $n+1$  sommets d'un polygone dit caractéristique. Les  $B_{i,n}(u)$  sont les fonctions de base appelées les polynômes de Bernstein. Avec  $n+1$  points de contrôle et où  $B_{i,n}(u)$  est un polynôme de degré  $n$ .

### *Courbes B-spline*

Une courbe B-spline diffère d'une courbe de Hermite ou de Bézier, car elle est composée de plusieurs segments de courbe. Chaque segment est défini et influencé par un certain nombre de points de contrôle. La forme non rationnelle d'une courbe B-spline est donnée par l'expression;



$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i N_{i,K}(u), \quad (2.12)$$

où les  $\mathbf{p}_i$  sont les points de contrôle. Pour une courbe de Bézier, le nombre de points de contrôle détermine le degré des fonctions de base. Pour une B-spline, un paramètre  $k$  définit le degré ( $k - 1$ ) des polynômes de base et il est indépendant du nombre de points de contrôle. Les fonctions de base sont définies comme suit; pour  $i = 0, \dots, n$ ;

$$\begin{cases} N_{i,1}(u) = 1 & \text{si } t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ N_{i,1}(u) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{i,1}(u) = \frac{(u - t_i)N_{i,K-1}(u)}{t_{i+K-1} - t_i} + \frac{(t_{i+K} - u)N_{i+1,K-1}(u)}{t_{i+K} - t_{i+1}}. \quad (2.13)$$

Les valeurs  $t_i$  sont appelés nœuds. Ils relient la variable paramétrique  $u$  aux points de contrôle et ils sont définis comme suit;

$$\begin{cases} t_i = 0 & \text{si } i < K \\ t_i = i - K + 1 & \text{si } K \leq i \leq n \\ t_i = n - K + 2 & \text{si } i > n \end{cases} \quad (2.14)$$

avec  $i = 0, \dots, n + K$ .

### *Courbes B-spline non uniformes rationnelles*

Un des outils les plus versatiles pour modéliser des courbes est la courbe B-spline non uniforme rationnelle, ou courbe NURBS. Une telle courbe est le quotient de deux fonctions de base B-spline non rationnelles, où  $h_i$  sont les poids;

$$\mathbf{p}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{p}_i N_{i,K}(u)}{\sum_{i=0}^n h_i N_{i,K}(u)}. \quad (2.15)$$

### **2.2.2 Modèles surfaciques**

Pour ce type de modélisation, une pièce est décrite à l'aide des surfaces qui constituent son enveloppe. Dans ce cas, c'est la frontière de l'objet qui est modélisée. Les modèles surfaciques sont plus complets que les modèles fil de fer. Comme pour les courbes,

une représentation paramétrique est plus avantageuse. La figure 2.2 montre le modèle surfacique d'un cylindre.



Figure 2.2 Modèle surfacique d'un cylindre

### 2.2.2.1 Équations paramétriques des surfaces

L'élément mathématique le plus simple pour modéliser une surface est un carreau. Un carreau est une portion de surface bornée par quatre courbes en général, dont les coordonnées sont des fonctions de deux paramètres (deux variables) continues et de la forme;

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (2.16)$$

avec  $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}_{min}, \mathbf{u}_{max}]$  et  $\mathbf{v} \in [\mathbf{v}_{min}, \mathbf{v}_{max}]$ .

#### *Surfaces de Hermite bi-cubique*

La forme algébrique d'un carreau de Hermite bi-cubique est donnée par;

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} u^i v^j, \quad (u, v) \in [0,1]. \quad (2.17)$$

Les  $\mathbf{a}_{ij}$  sont les vecteurs des coefficients algébriques du carreau.

#### *Surfaces de Bézier*

Les points sur le carreau de Bézier sont donnés par le produit tensoriel suivant;

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v), \quad (u, v) \in [0,1]. \quad (2.18)$$

Les  $\mathbf{P}_{ij}$  comprennent un réseau structuré de  $(m + 1) \times (n + 1)$  points de contrôle.  $B_{i,m}(u)$  et  $B_{j,n}(v)$  sont les polynômes de Bernstein, définies de la même façon que

pour les courbes de Bézier. La figure (2.3) illustre un carreau de Bézier avec son réseau de points de contrôle.

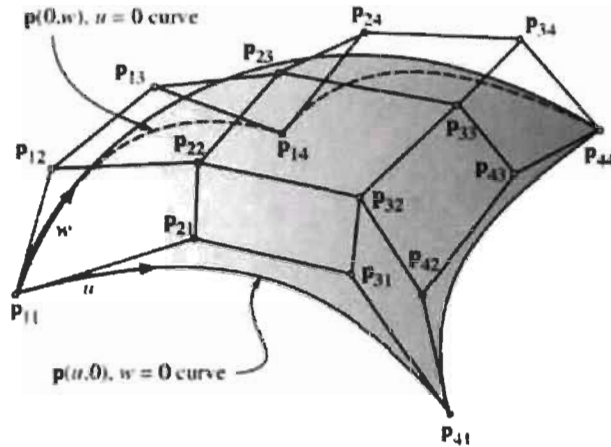


Figure 2.3 Carreau de Bézier (Mortenson 1985)

### Surfaces B-spline

L'équation d'une surface B-spline est;

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,K}(u) N_{j,L}(v), \quad (u, v) \in [0,1]. \quad (2.19)$$

Les  $P_{ij}$  sont les points de contrôle et les sommets du polyèdre caractéristique. Les  $N_{i,K}(u)$  et  $N_{j,L}(v)$  sont les fonctions de base définies de la même façon que pour les courbes de B-spline.

### Surfaces B-spline rationnelles non uniformes (NURBS)

Une surface NURBS est définie comme suit;

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} h_{i,j} N_{i,K}(u) N_{j,L}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n h_{i,j} N_{i,K}(u) N_{j,L}(v)}, \quad (u, v) \in [0,1]. \quad (2.20)$$

où  $h_{i,j}$  sont les poids, comme pour les courbes rationnelles. Les  $N_{i,K}(u)$  et  $N_{j,L}(v)$  sont les fonctions de base définies de la même façon que pour les courbes NURBS.

### 2.2.3 Modèles solides

En plus de la discrétisation géométrique (équations paramétriques, équations des frontières,...), les modèles solides contiennent des informations sur la topologie de

l'objet. Ce sont les modèles les plus complets. Le solide est caractérisé par ses limites (le solide occupe un espace fini) et ses frontières qui définissent un intérieur et un extérieur au volume. La figure 2.4 montre le modèle volumique d'un cylindre.



Figure 2.4 Modèle solide d'un cylindre

### 2.2.3.1 Solides paramétriques

L'équivalent en volumique du carreau de surface est un solide paramétrique. Les équations paramétriques de la région occupé par le solide sont;

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), \quad (2.21)$$

avec les variables paramétriques  $u, v$ , et  $w \in [0,1]$ . Ces fonctions définissent les coordonnées des points qui composent le solide (intérieur et extérieur) et localement elles doivent, selon les cas, respectées certains critères de régularité (continuité, dérivabilité, etc.).

### 2.2.3.2 Modélisation par balayage

La modélisation par balayage est basée sur la notion de déplacement d'une courbe, surface ou solide le long d'une trajectoire. Les points générés par ce processus définissent un nouvel objet bi ou tridimensionnel. En général, un balayage est soit un balayage en translation ou un balayage en rotation autour d'un axe. Un balayage en translation, ou extrusion, est le déplacement d'une courbe, ou forme plane, le long d'une ligne droite, ce qui génère une surface ou un solide. Un balayage en rotation est la rotation d'une courbe ou forme plane autour d'un axe. D'autres types de balayage utilisent une trajectoire plus complexe. La trajectoire est d'ordre supérieur à 1 (courbe quadratique, cubique,...). Par ailleurs, un balayage ne permet la modélisation que d'un nombre restreint d'objets.

### 2.2.3.3 Modélisation par arbre CSG

La modélisation par arbre CSG (Constructive Solid Geometry) permet de représenter un solide complexe comme une composition de solides simples. Les opérateurs booléens (union, soustraction ou intersection) sont utilisés pour créer un modèle procédural d'un solide complexe. Le modèle est représenté par un arbre binaire, où les feuilles sont les formes primitives simples (bloc, cylindre,...), dimensionnées et positionnées dans l'espace et où les nœuds sont les opérateurs ensemblistes (union, différence, et intersection).

### 2.2.3.4 Modélisation par les frontières BREP

Le principe de la représentation par les frontières (Boundary representation ou BREP) est de construire une représentation complète d'un solide à partir de sa frontière, qui est de nature surfacique. Un solide peut être représenté comme une union de faces (définies notamment par une surface sous-jacente), bornée par des arêtes (définies notamment par une courbe sous-jacente), qui sont à leur tour bornées par des sommets (définies notamment par un point sous-jacent). Un modèle de frontière stocke les données mathématiques (informations géométriques) sur la géométrie de la surface sur laquelle se trouve la face, sur la géométrie de la courbe sur laquelle se trouve l'arête et sur la géométrie du point (coordonnées des sommets). Le modèle de frontières contient aussi des informations topologiques, que sont les liens et l'orientation des différentes entités topologiques.

## 2.3 Génération de maillage linéaire

La méthode des éléments finis sert à résoudre des problèmes physiques définis à l'aide d'équations aux dérivées partielles dont les solutions exactes sont impossibles à déterminer. Le principe de cette méthode est de résoudre le problème d'équations aux dérivées partielles défini sur un milieu continu en définissant une formulation intégrale équivalente sur un milieu discrétisé. On appelle maillage l'espace discrétisé du domaine (François 1998). Un maillage se compose d'un ensemble d'éléments de forme simple que l'on appelle éléments finis. En 2D (cas bidimensionnels et surfaciques), ces éléments sont exclusivement des points, des segments, des triangles et des quadrangles alors qu'en volumique, ce sont en plus des hexaèdres, des pentaèdres et des tétraèdres (Cuillère 1993). Ces éléments finis sont définis par des points que l'on

appelle nœuds. La solution est calculée uniquement aux nœuds grâce à des méthodes numériques. La solution générale est obtenue par interpolation de la solution du problème discret. Les méthodes les plus utilisées pour générer automatiquement un maillage non structuré linéaire sont les méthodes de Delaunay-Voronoi et la méthode frontale.

### 2.3.1 Méthode frontale

Les éléments du maillage sont construits sur un domaine à partir d'un front, le front est la frontière entre la partie du domaine qui est maillé de la partie non maillée. Le front se compose de segments en 2D ou de triangles en 3D (Frey et George 1999). La méthode commence à partir d'un front initial qui représente la discrétisation de la frontière, puis ce front se propage à l'intérieur du domaine de façon itérative. La méthode s'arrête lorsque le front est vide. La figure 2.5 montre les étapes d'un maillage par la méthode frontale.

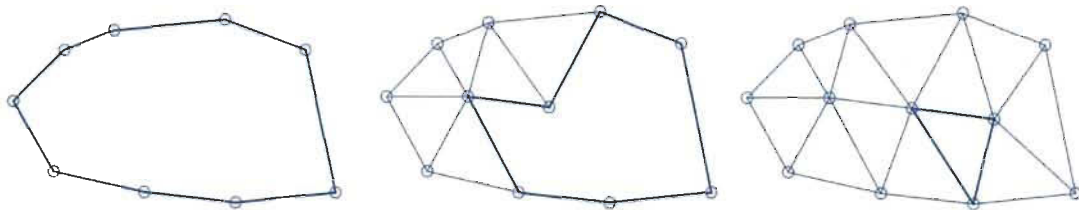


Figure 2.5 Étapes de maillage par la méthode frontale (Camarero 2015)

### 2.3.2 Méthode Delaunay-Voronoi

De façons générales, Soit un ensemble de points  $P_i$  avec  $i = 1..n$ ; soit  $V_i$  le polyèdre de Voronoi associé au point  $P_i$ . Le polyèdre  $V_i$  correspond à l'ensemble des points de l'espace les plus proches de  $P_i$  que de n'importe autre point, l'ensemble des  $V_i$  constituent les polyèdres de Voronoi (Frey et George 1999). La triangulation de Delaunay est obtenue en reliant les centroïdes des polyèdres adjacents (voisins), comme illustré à la figure 2.6.

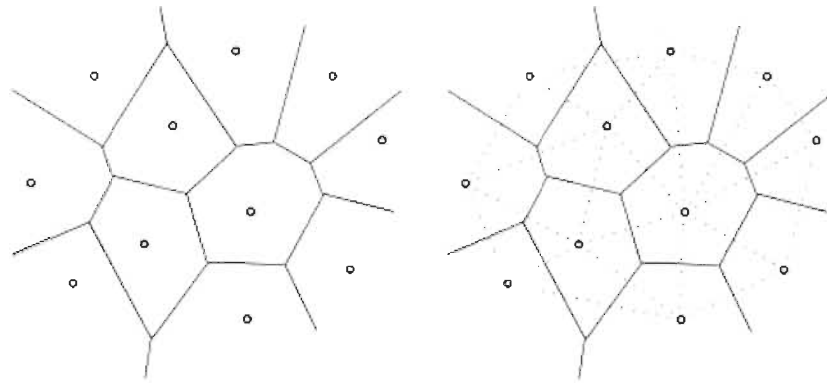


Figure 2.6 Triangulation de Delaunay et polygones de Voronoï (Camarero 2010)

## 2.4 Maillage curviligne

Il existe deux approches pour générer un maillage curviligne (Dey, O'Bara et al. 2001); l'approche directe et l'approche dite a postériori (Figure 2.7) :

- L'approche directe consiste à générer un maillage curviligne directement sur le modèle;
- L'approche a postériori consiste à générer un maillage curviligne à partir d'un maillage linéaire droit.

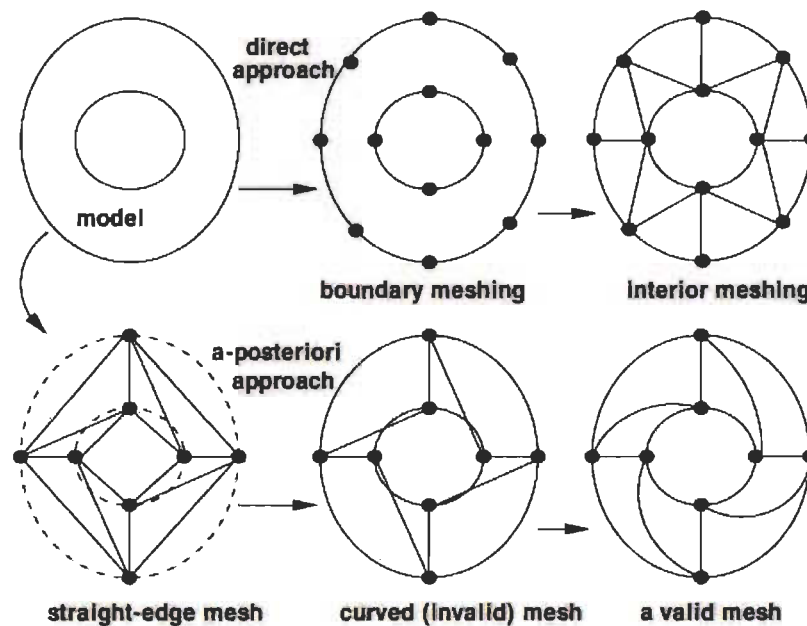


Figure 2.7 Approches pour générer un maillage curviligne (Dey, O'Bara et al. 2001)

L'approche a posteriori est l'approche la plus utilisée, car elle repose sur la génération de maillage linéaire qui est une procédure qui est déjà bien développée et bien maîtrisée. Cette approche consiste en 3 étapes :

- 1) Générer un maillage linéaire;
- 2) Augmenter l'ordre des éléments en ajoutant des nœuds et courber les éléments du maillage jusqu'à ce qu'ils correspondent aux frontières de la géométrie (figure 2.8);
- 3) Optimiser et corriger le maillage si nécessaire : la procédure précédente peut engendrer des éléments invalides ou de mauvaise qualité d'où la nécessité d'optimiser la position des nœuds.

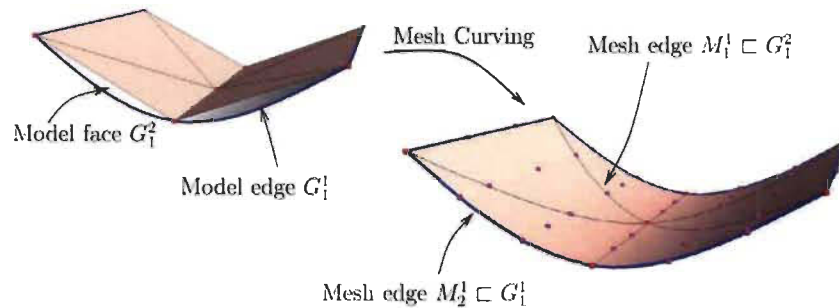


Figure 2.8 Transformation d'un maillage linéaire en maillage curviligne (Toulorge, Geuzaine et al. 2013)

Plusieurs approches sont utilisées pour avoir des éléments curvilignes (étape 2).

La méthode la plus simple et la plus utilisée (Dey, O'Bara et al. 2001; Toulorge, Geuzaine et al. 2013; Lu 2011; Gargallo-Peiro, Roca et al. 2013) est l'interpolation linéaire dans l'espace de coordonnées paramétriques. La position des nouveaux nœuds est déterminée après interpolation linéaire entre les nœuds du maillage dans l'espace paramétrique de l'entité géométrique à laquelle ils sont associés. Par exemple, à la figure 2.9, un triangle est associé à une face (figure 2.9 (a)) et l'interpolation de nouveaux nœuds est faite dans l'espace des coordonnées paramétriques  $(u, v)$  de la face (figure 2.9 (b)). Puis le passage de l'espace de coordonnées paramétriques vers l'espace de coordonnées cartésiennes permet d'obtenir les coordonnées des nouveaux nœuds dans cet espace (figure 2.9 (c)) et l'élément curviligne.



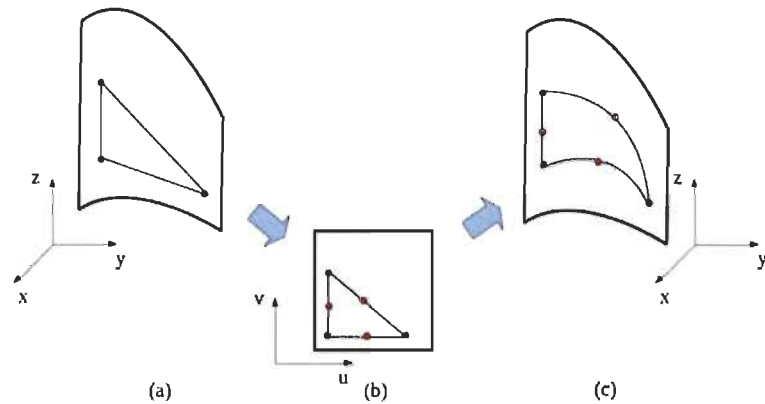


Figure 2.9 Interpolation dans l'espace de coordonnées paramétriques (adapté de lu 2011)

Persson et Peraire (2009) utilisent une analogie avec l'élasticité non linéaire où le domaine à mailler est considéré comme un solide élastique. Le maillage linéaire est l'état initial avant déformation, puis un déplacement est imposé aux frontières du maillage jusqu'à ce qu'elles correspondent aux frontières du domaine.

Xie et Sevilla (2013) utilisent une approche similaire où un déplacement est aussi imposé, mais en utilisant une analogie avec l'élasticité linéaire. L'équation qui régit la déformation d'un milieu élastique linéaire est utilisée pour déformer un maillage linéaire. La figure 2.10 illustre les étapes associées à la génération d'un maillage curviligne selon l'analogie faite avec l'élasticité linéaire.

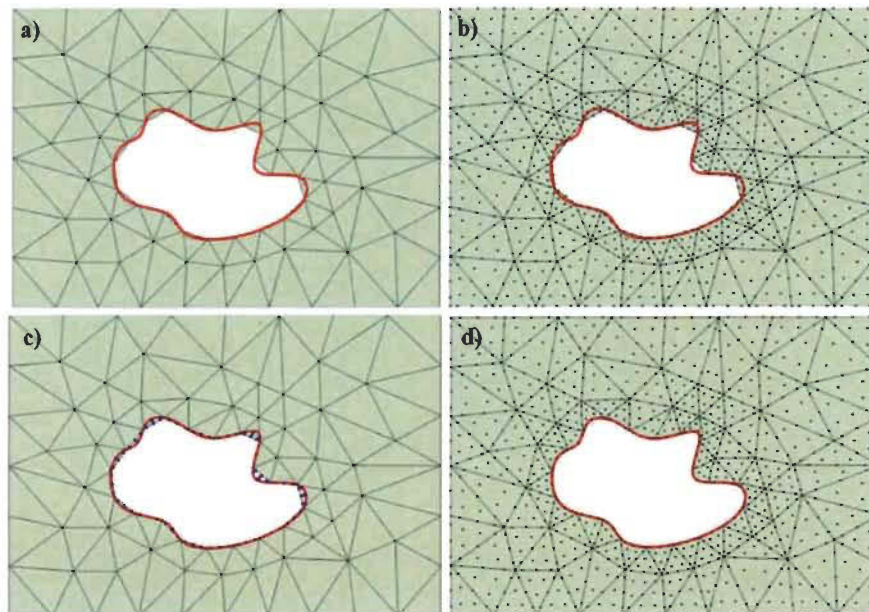


Figure 2.10 Illustration des étapes associées à la génération d'un maillage curviligne avec analogie avec l'élasticité linéaire a) maillage linéaire b) ajout de nœuds c) déplacement imposé aux nœuds d) maillage curviligne final (Xie, Sevilla et al. 2013)

### 2.4.1 Validité et qualité d'un maillage curviligne

Soit l'espace des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et l'espace des coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ . La relation entre les deux espaces de coordonnées est donnée par;

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad (2.22)$$

La transformation des opérateurs différentiels et intégraux entre ces deux espaces se fait à l'aide de la matrice jacobienne  $[J]$ ;

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne, appelé le jacobien ( $J = \det[J]$ ), d'un triangle linéaire ou d'un tétraèdre linéaire est constant à l'intérieur de l'élément. Pour le triangle, par exemple, le jacobien est égal à deux fois son aire, pour le tétraèdre le jacobien est égal à 6 fois son volume.

Pour un élément curviligne, le jacobien n'est pas constant, c'est un polynôme; un polynôme d'ordre 2 pour un triangle quadratique (6 nœuds), d'ordre 3 pour un tétraèdre quadratique (10 nœuds).

La mesure la plus utilisée (Dey, O'Bara et al. 2001; Lu 2011; Persson et Peraire 2009; Xie, Sevilla et al. 2013) pour évaluer la qualité d'un élément curviligne est la distorsion  $I$ . C'est le rapport entre la valeur minimale et maximale du jacobien calculé pour un élément  $e$  du maillage;

$$I = \frac{J \min_e}{J \max_e}. \quad (2.24)$$

Gargallo-Peiro et Roca (2013) proposent une autre mesure de la distorsion calculée à partir de l'intégrale du jacobien divisé par le jacobien de l'élément droit (linéaire).

La qualité en forme est une mesure proposée par George et Borouchaki (2011) et elle est définie par;

$$Q_F = \alpha \frac{\rho}{h}, \quad (2.25)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de normalisation,  $h$  est la plus grande distance entre les nœuds de l'élément du maillage et  $\rho$  est l'équivalent d'un rayon inscrit.

Un maillage curviligne est valide si le jacobien en tout point (et non pas les nœuds seulement) de chaque élément est strictement positif (Dey, O'Bara et al. 2001). Soit  $e$  un élément du maillage et  $\hat{e}$  son élément de référence;

$$J(\xi, \eta) > 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \hat{e}. \quad (2.26)$$

Comme vu précédemment, le jacobien est un polynôme dans le cas d'éléments non linéaires et déterminer la valeur minimale d'un polynôme peut être une opération longue et compliquée.

Une des méthodes utilisées pour évaluer la validité d'un élément est de calculer le jacobien en un très grand nombre de points (Dey, O'Bara et al. 2001; Persson et Peraire 2009; Xie, Sevilla et al. 2013) de l'élément et si un des jacobiens calculés est négatif ou nul alors l'élément est considéré comme invalide, dans le cas contraire l'élément est considéré comme valide.

Cette méthode n'est pas optimale, car elle nécessite le calcul du jacobien en un très grand nombre de points et ne garantit pas la validité de l'élément puisque le jacobien peut être positif aux points échantillonnés, mais négatif aux points non échantillonnés.

L'autre approche est l'utilisation des fonctions de Bézier et de leurs propriétés (George et Borouchaki 2011 ; Luo, Shephard et al. 2011; Johnen, Remacle et al. 2013). Soit le polynôme de Bézier suivant;

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_{i,m}(\xi) B_{j,n}(\eta). \quad (2.27)$$

Les  $\mathbf{p}_{ij}$  sont les points de contrôle.  $B_{i,m}(\xi)$  et  $B_{j,n}(\eta)$  sont les polynômes de Bernstein.

Une surface (courbe) de Bézier est à l'intérieur de l'enveloppe convexe formée par ses points de contrôle, borné par ses points de contrôle maximal et minimal, donc en exprimant le jacobien par les polynômes de Bézier il est possible de déterminer ses bornes minimale et maximale. Soit le déterminant de la matrice jacobienne exprimé par les polynômes de Bézier;

$$J(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} B_{i,m}(\xi) B_{j,n}(\eta). \quad (2.28)$$

Les  $b_{ij}$  sont les coefficients de contrôle du jacobien de l'élément. Johnen et Remacle (2013) utilisent les jacobiens aux nœuds pour le calcul des  $b_{ij}$  et pour (Luo, Shephard et al. 2011; Lu 2011) le calcul se fait en fonction des points de contrôle de l'élément. Le jacobien est borné par ses coefficients de contrôle minimal et maximal (Luo, Shephard et al. 2011);

$$\min(b_{ij}) \leq J(\xi, \eta) \leq \max(b_{ij}). \quad (2.29)$$

Un élément curviligne est valide si son jacobien est strictement positif en tous points et donc, si la valeur minimale des coefficients de contrôle est strictement positive (équation 2.29) cela garantit la validité de l'élément;

$$\min(b_{ij}) > 0. \quad (2.30)$$

Le tableau 2.1 montre l'ordre du jacobien et le nombre de coefficients de contrôle pour différents éléments. Pour un triangle d'ordre  $P = 2$ , le jacobien est d'ordre  $n = 2$  et le nombre de coefficients de contrôle est de six. Pour un tétraèdre d'ordre  $P = 2$ , le jacobien est d'ordre  $n = 3$  et le nombre de coefficients de contrôle est de vingt.

Tableau 2.1 Ordre du jacobien et nombre de coefficients de contrôle pour un élément d'ordre P

Élément d'ordre P	Ordre (n) du jacobien	Nombre de coefficients de contrôle
Ligne	P-1	n+1
Triangle	2(P-1)	$(n+1)(n+2)/2$
Quadrangle	2P-1	$(n+1)(n+1)$
tétraèdre	3(P-1)	$(n+1)(n+2)(n+3)/6$
Prisme	3P-1	$(n+1)(n+1)(n+2)/2$
Hexaèdre	3P-1	$(n+1)(n+1)(n+2)$

La figure 2.11 montre différents exemples de triangles curvilignes invalides. Soit  $A_i$  les nœuds de l'élément et  $C_i$  les points de contrôle, avec  $i = 1$  à 6. En (a) et (b), on a un triangle auto-tangent. Un triangle auto-tangent est un triangle dont deux tangentes en un sommet sont colinéaires. En (a), au sommet  $A_1$ , l'angle  $\widehat{C_6 A_1 C_4}$  est plat et en (b), au sommet  $A_1$ , l'angle  $\widehat{C_6 A_1 C_4}$  est nul. La figure 2.11 (c) montre un triangle auto-intersectant.

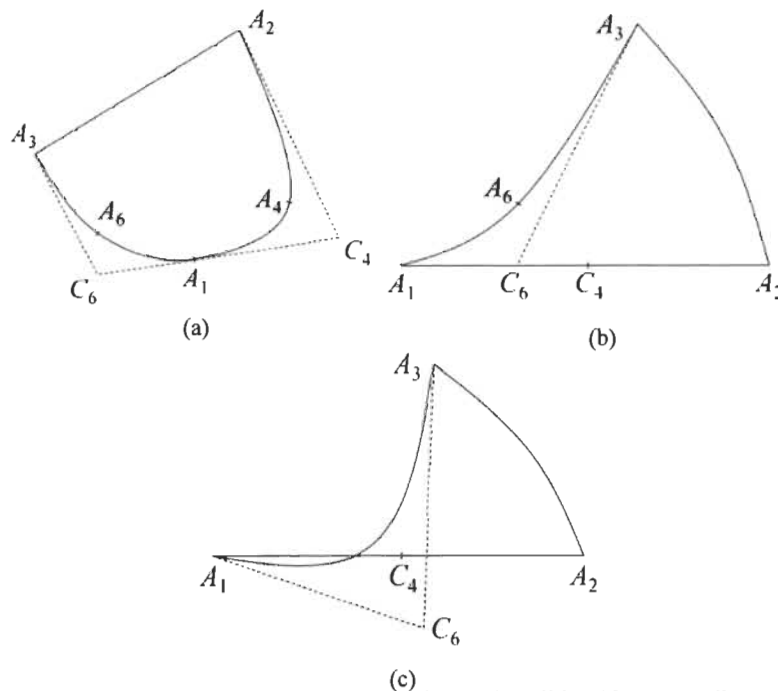


Figure 2.11 Différents exemples de triangles curvilignes invalides (George et Borouchaki 2011)

D'après l'équation 2.29, la valeur minimale des coefficients de contrôle est inférieure ou égale à la valeur minimale du jacobien. On sait aussi que le jacobien à un sommet est égal à la valeur du coefficient de contrôle associé au sommet de l'élément. Comme on peut la voir dans la figure 2.12, qui représente un triangle quadratique, on a  $b_1 = J_1$ ,  $b_3 = J_3$  et  $b_5 = J_5$ . Si  $\min(b_{ij})$  correspond à un coefficient de contrôle d'un sommet de l'élément, alors  $\min(b_{ij}) = \min J(\xi, \eta)$ , et si  $\min(b_{ij}) \leq 0$  alors l'élément est invalide. Néanmoins, si  $\min(b_{ij})$  correspond à un coefficient de contrôle intermédiaire ( $b_2$ ,  $b_4$  et  $b_6$  à la figure 2.12) et  $\min(b_{ij}) \leq 0$  cela ne veut pas nécessairement dire que l'élément est invalide car on a:  $\min(b_{ij}) \leq J(\xi, \eta)$  et il est possible que  $\min(b_{ij})$  soit négatif et  $\min J(\xi, \eta)$  positif, si  $\min(b_{ij})$  n'est pas assez proche de  $\min J(\xi, \eta)$ . L'écart entre  $\min(b_{ij})$  et  $\min J(\xi, \eta)$  dépend essentiellement du nombre de coefficients de contrôle utilisé pour représenter le polynôme. Pour obtenir des bornes plus fines, il faut augmenter le nombre de coefficients de contrôle et des algorithmes de raffinement sont utilisés à cet effet.

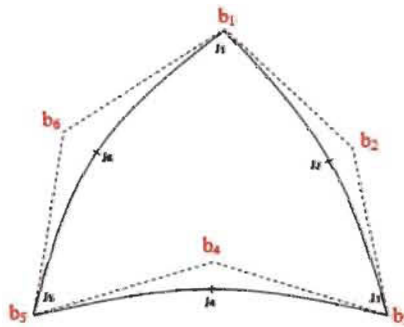


Figure 2.12 Coefficients de contrôle et jacobien aux nœuds d'un triangle quadratique (adapté de George et Borouchaki 2011)

### *Raffinement par élévation de degré*

Cette méthode consiste à élever le degré du polynôme de Bézier, qui conduit à l'augmentation du nombre de coefficients de contrôle (Lu 2011). L'augmentation du nombre de coefficients de contrôle permet d'avoir des bornes plus fines. La figure 2.13 montre le raffinement par élévation de degré. La figure 2.13 (a) montre les coefficients de contrôle d'une arête d'un tétraèdre quadratique qui sont au nombre de quatre avant

élévation de degré  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  et de cinq après élévation de degré  $(p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*)$ . La figure 2.13 (b) montre une répétition du degré d'élévation.

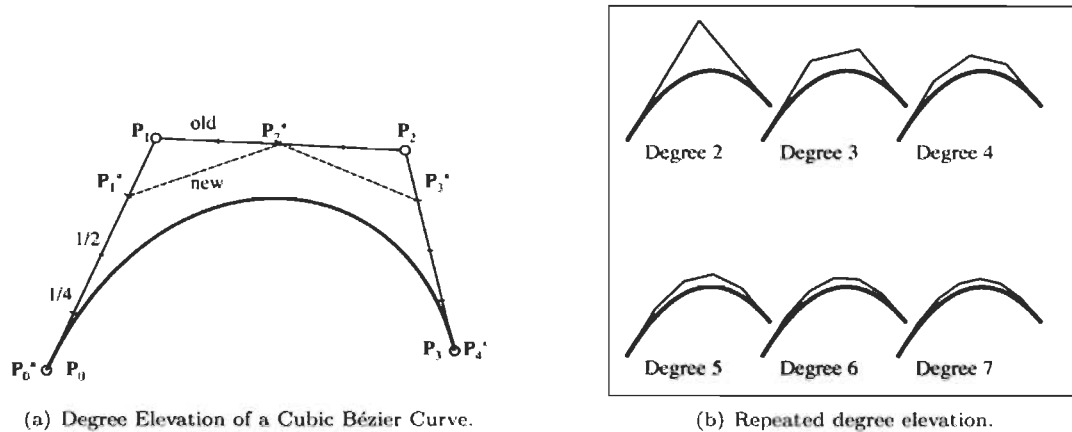


Figure 2.13 Raffinement par élévation de degré (Lu 2011)

*Raffinement par subdivision*

Il est aussi possible d'augmenter le nombre de coefficients de contrôle en subdivisant le polynôme de Bézier en sous-polynômes, en utilisant l'algorithme de Casteljau (Lu 2011). Pour chaque sous-polynôme, sont calculés de nouveaux coefficients de contrôle. Pour cette méthode de raffinement, le polynôme garde le même degré. La figure 2.14 montre un raffinement par subdivision.

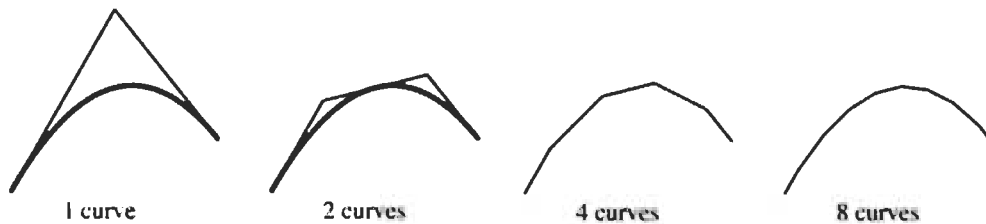


Figure 2.14 Raffinement par subdivision (Lu 2011)

*Raffinement par subdivision d'éléments*

Dans cette méthode, l'élément est subdivisé en sous-éléments, puis les coefficients de contrôle de chaque sous-élément sont calculés. La figure 2.15 montre la subdivision d'un triangle d'ordre trois. En (a), les coefficients de contrôle du triangle (en bleu) avant subdivision et en (b) les coefficients de contrôle après subdivision en vert. Le

calcul des coefficients de contrôle se fait avec une matrice de transformation à partir du jacobien aux nœuds (Johnen, Remacle et al. 2013).

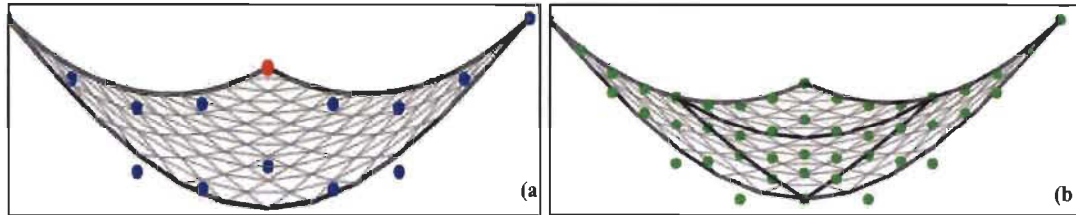


Figure 2.15 Raffinement par subdivision d'un triangle a) Coefficients de contrôle avant subdivision b) Coefficients de contrôle après subdivision (Johnen, Remacle et al. 2013)

Pour un triangle en maillage surfacique (triangle en 3D), George et Borouchaki (2011) proposent les critères suivants pour déterminer la validité d'un élément sans utiliser le jacobien.

Les trois angles du triangle : les angles des tangentes aux sommets. Si le cosinus d'un angle est égal à zéro ou à -1, l'élément est auto-tangent est donc invalide, si le cosinus est proche de la valeur 1, l'élément est de mauvaise qualité.

La déviation au sommet : c'est l'angle entre le plan tangent et le plan du triangle droit (triangle avec les sommets) d'un élément. Si la mesure est trop grande, cela indique une arête trop courbée, voire un retournement, donc un triangle invalide.

#### 2.4.2 Optimisation des maillages curvilignes

Si le maillage curviligne contient des éléments invalides ou de mauvaise qualité, il est nécessaire d'optimiser la qualité des éléments.

Une des approches utilisées consiste à modifier localement le maillage en utilisant des opérateurs de modification de maillage (Luo, Shephard et al. 2011; Dey, O'Bara et al. 2001; Lu 2011). Ces opérateurs sont utilisés localement sur les éléments invalides. Les opérateurs les plus utilisés sont: *splitting*, *collapsing* et *swapping* (figure 2.16). Une opération de « *splitting* » consiste à insérer un ou plusieurs nœuds sur une entité et à la subdiviser (figure 2.16 a). Une opération de « *swapping* » consiste à changer la connectivité d'une entité (figure 2.16 b). Une opération de « *collapsing* » consiste à contracter une arête en un seul sommet (figure 2.16 c).



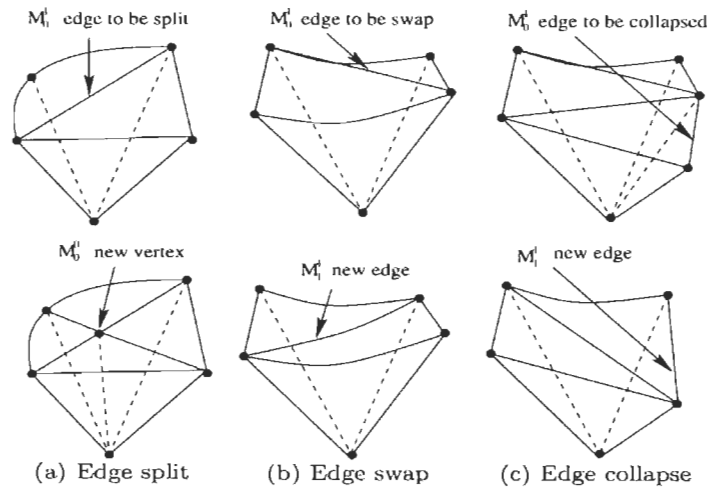


Figure 2.16 Exemples de modification locale de maillage (luo, shephard et al 2011)

Une autre approche consiste à utiliser des algorithmes d'optimisation. Le principe de ces algorithmes est de trouver les emplacements des nœuds qui minimisent une fonction objectif qui caractérise la validité du maillage (Geuzaine, Johnen et al. 2015).

Toulorge et Geuzaine (2013) proposent un algorithme d'optimisation qui cible spécifiquement le jacobien d'un élément invalide et modifie la localisation des nœuds jusqu'à ce que l'élément devienne valide. Le processus d'optimisation correspond à la minimisation d'une fonction avec la méthode du gradient conjugué. Cette méthode peut être appliquée au maillage au complet, néanmoins cette procédure n'est pas avantageuse en termes de temps de calcul. Elle peut être appliquée localement. Après identification de tous les éléments invalides dans un maillage, des «Blobs» (groupe d'éléments autour de chaque élément invalide) sont créés et l'optimisation est appliquée aux blobs uniquement (figure 2.17).

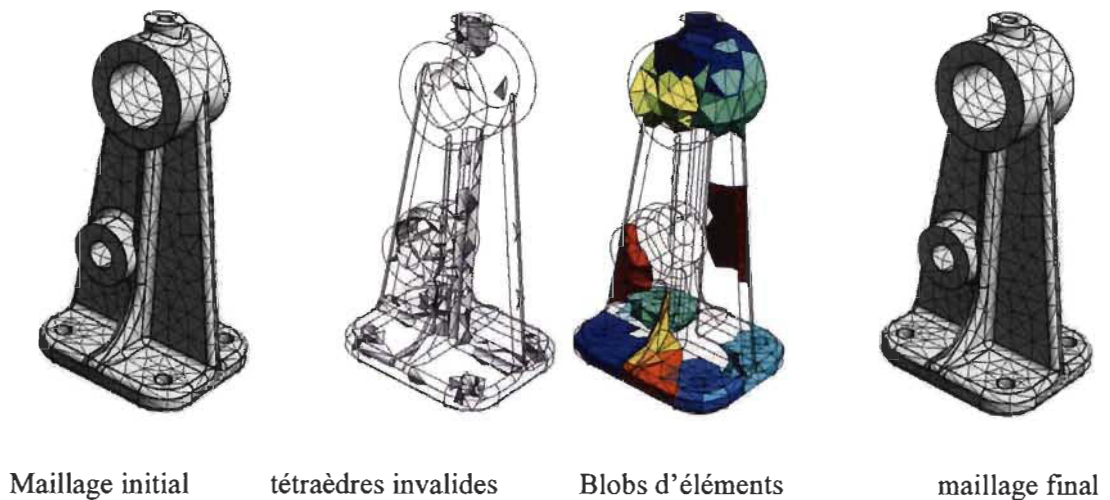


Figure 2.17 Illustration de la méthode d'optimisation (Toulorge, Geuzaine et al. 2013)

Un autre algorithme d'optimisation a été développé par Gargallo-Peiro et Roca (2013) pour les maillages triangulaires surfaciques curvilignes. Cette procédure d'optimisation utilise les coordonnées paramétriques des nœuds, ce qui assure que les nœuds restent toujours sur la surface. Le principe de cet algorithme est qu'un nœud a une localisation idéale si la valeur de la distorsion  $n_u$  (mesure algébrique) est égale à 1, mais pour un nœud sur une surface donnée cette position idéale n'est généralement pas atteignable (le nœud doit rester sur la face). Le but de l'algorithme est d'obtenir la valeur de la distorsion la plus proche possible de 1. La méthode des moindres carrés est utilisée pour minimiser la valeur de la distorsion. Lu (2011) utilise l'algorithme du nombre d'or (golden section) pour trouver la position optimale des nœuds le long d'une ligne droite.

## 2.5 Optimisation des structures

Au cours des dernières années, une attention croissante a été portée sur la conception optimale des composants et structures industrielles, attention motivée par des objectifs économiques : réduction des coûts, augmentation de l'efficacité ou pour des objectifs écologiques afin de réduire l'utilisation des ressources (Arnout, Firl et al. 2010). En raison de sa formulation très générale et flexible, l'optimisation structurelle est maintenant largement utilisée comme un outil puissant de conception.

### 2.5.1 Formulation

L'optimisation des structures peut être formulée comme un problème d'optimisation mathématique :

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(x) \\ \text{avec } g(x) \leq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

La fonction  $f(x)$  est la fonction objectif, elle est minimisée durant l'optimisation. Le volume total, la masse ou l'énergie de déformation sont communément utilisés comme fonction objectif.

Le vecteur  $x$  contient les variables de design qui peuvent être reliées à la taille, la forme ou la topologie de la structure. Les variables de design sont les paramètres de la structure qui sont modifiés par l'optimisation afin de minimiser la fonction objectif. Parmi les types de variables de design, on trouve par exemple les propriétés du matériau, les coordonnées des points de design ou la distribution du matériau. Le choix du type de paramètres conduit à un type d'optimisation différente (Firl 2010).

La fonction  $g(x)$  représente les contraintes de comportement. Ces contraintes sont les restrictions imposées au problème et qui doivent être satisfaites pour que le résultat de la conception soit acceptable. Autrement dit, les contraintes définissent le domaine faisabilité (Camprubi 2004). Par exemple, la masse de la structure ne doit pas dépasser une certaine valeur.

### 2.5.2 Type de méthodes d'optimisation de structures

Les méthodes d'optimisation de structures peuvent être classées en quatre méthodes : les méthodes d'optimisation des matériaux, les méthodes d'optimisation dimensionnelle, les méthodes d'optimisation de forme et les méthodes d'optimisation topologique (Firl 2010).

#### 2.5.2.1 Optimisation des matériaux

Cette méthode utilise les paramètres (caractéristiques) du matériau comme variables de design, la géométrie et la topologie restent inchangées. Cette méthode est très utilisée pour l'optimisation des matériaux composites où l'objectif est de trouver la

direction des fibres ou la séquence d'empilement la plus optimale (Firl 2010). La figure 2.18 illustre un exemple d'optimisation des matériaux.

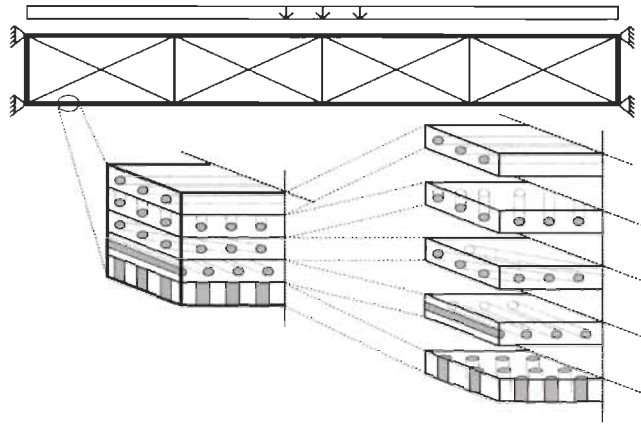


Figure 2.18 Illustration de l'optimisation des matériaux (Firl 2010)

### 2.5.2.2 Optimisation dimensionnelle

Méthode utilisée pour trouver les dimensions géométriques spécifiques optimales qui sont reliées au modèle (Firl 2010). Par exemple, l'épaisseur d'une coque ou la section d'une barre. La figure 2.19 illustre un exemple d'optimisation dimensionnelle.

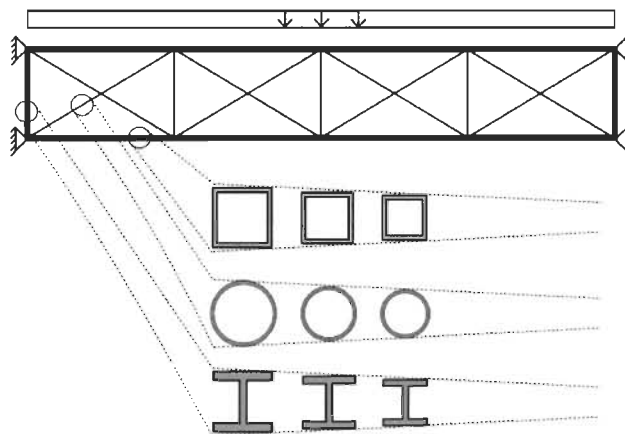


Figure 2.19 Illustration de l'optimisation dimensionnelle (Firl 2010)

### 2.5.2.3 Optimisation de forme

Cette méthode est utilisée pour trouver la forme optimale de la frontière d'une pièce. Les variables d'optimisation sont les coordonnées des nœuds du maillage, les coordonnées des points de contrôle du modèle ou « morphing boxes » (Firl 2010). La

topologie de la structure demeure inchangée, ce qui empêche la génération de trous (absence de matériau) dans celle-ci. L'optimisation de forme est complexe et nécessite un temps de calcul plus important que l'optimisation dimensionnelle. La figure 2.20 illustre un exemple d'optimisation de forme.

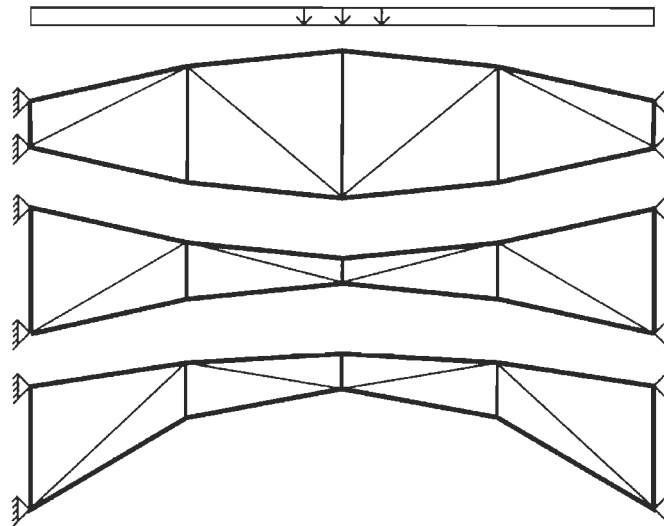


Figure 2.20 Illustration de l'optimisation de forme (Firl 2010)

La méthode du mouvement normal (MMN) s'inscrit dans la famille des méthodes d'optimisation de forme. Cette méthode est de type FSD (Fully Stressed Design). Les méthodes FSD visent à obtenir une structure dont la contrainte est uniforme sur son domaine ce qui permet d'obtenir une meilleure distribution de la matière par rapport aux efforts appliqués. La méthode consiste à déplacer la frontière de la structure dans la direction normale pour uniformiser la valeur de la contrainte sur celle-ci. La méthode du mouvement normal est décrite plus en détail dans la partie 2.5.3.

#### 2.5.2.4 Optimisation topologique

Cette méthode d'optimisation est la plus flexible car elle permet un changement dans la forme et la topologie de la structure à optimiser (Firl 2010). La méthode permet de trouver la distribution de matériau la plus optimale. La figure 2.21 illustre un exemple d'optimisation topologique.

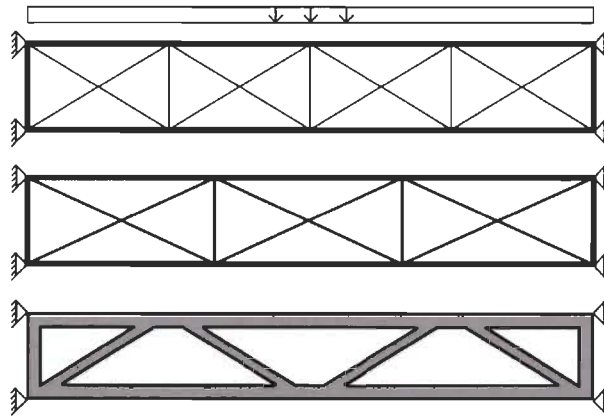


Figure 2.21 Illustration de l'optimisation topologique (Firl 2010)

Il existe plusieurs méthodes d'optimisation topologique, la plus utilisée est la méthode SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization) qui optimise la distribution de porosité (vide) afin de maximiser la rigidité de la structure (Bendsoe et Sigmund, 2003). La figure 2.22 illustre la méthode SIMP.

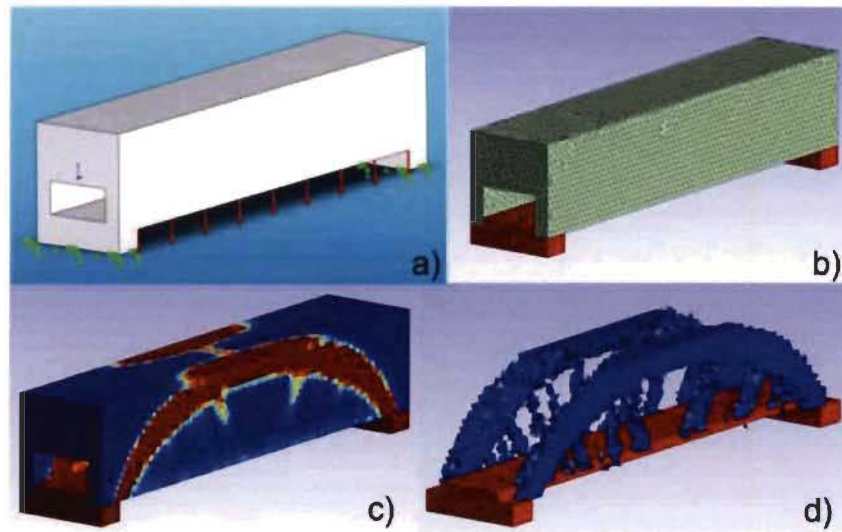


Figure 2.22 Optimisation par la méthode SIMP a) Géométrie initiale et conditions aux limites b) Maillage c) Résultats bruts de la méthode SIMP d) Forme et topologie finales (Cuillère, François et al. 2011)

### 2.5.3 Méthode du mouvement normal (MMN)

La méthode du mouvement normal (MMN) (Mattheck et Burkhardt 1990; Parvizian et Fenner 1997; Le riche et Cailletaud 1998; Li, Steven et al. 1999; Parvizian et Fenner 2002; Maduramuthu et Fenner 2004; Wessel, Cisilino et al. 2004; Wu 2005; Peng et

Jones 2008; Zehsaz et al. 2013) repose sur le principe que la forme optimale d'un objet peut être obtenue en déplaçant, avec une certaine amplitude, des points de design situés sur la frontière dans la direction normale de façon itérative. Cette méthode a pour but d'uniformiser la valeur de la contrainte sur la frontière d'un objet autour d'une contrainte objectif  $\sigma_o$ , en déplaçant les points de design dans la direction normale. La contrainte objectif  $\sigma_o$  est la contrainte à atteindre sur toute la frontière de l'objet. Celle-ci peut être fixée a priori ou actualisée à chaque itération. Par exemple,  $\sigma_o$  peut correspondre à la valeur moyenne des contraintes sur la frontière. L'ampleur du déplacement  $d_i$  dépend de l'écart entre la contrainte objectif  $\sigma_o$  et la contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM_i}$  au point de design  $i$ . La figure 2.23 illustre la MMN.

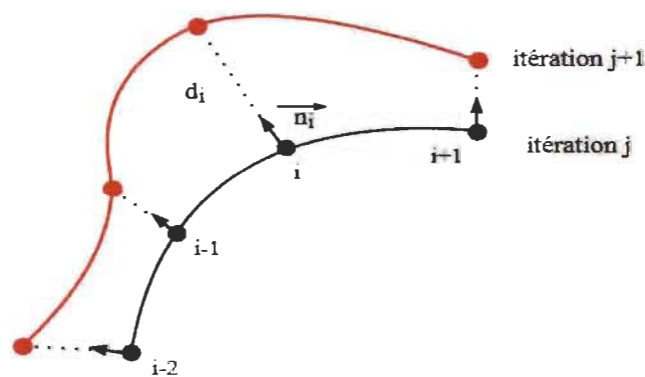


Figure 2.23 Illustration de la méthode du mouvement normal

### 2.5.3.1 Étapes de la méthode du mouvement normal

Les étapes de la MMN, illustrées à la figure 2.24, sont :

1. Modélisation de la géométrie à optimiser;
2. Application des conditions aux limites et définition du matériau;
3. Choix des zones de design et de non-design;
4. Choix des points de design;
5. Calcul des contraintes aux points de design;
6. Déplacement des points de design dans la direction normale suivant la contrainte en ces points;
7. Répétition des étapes 5 et 6 jusqu' à l'atteinte du critère d'arrêt.

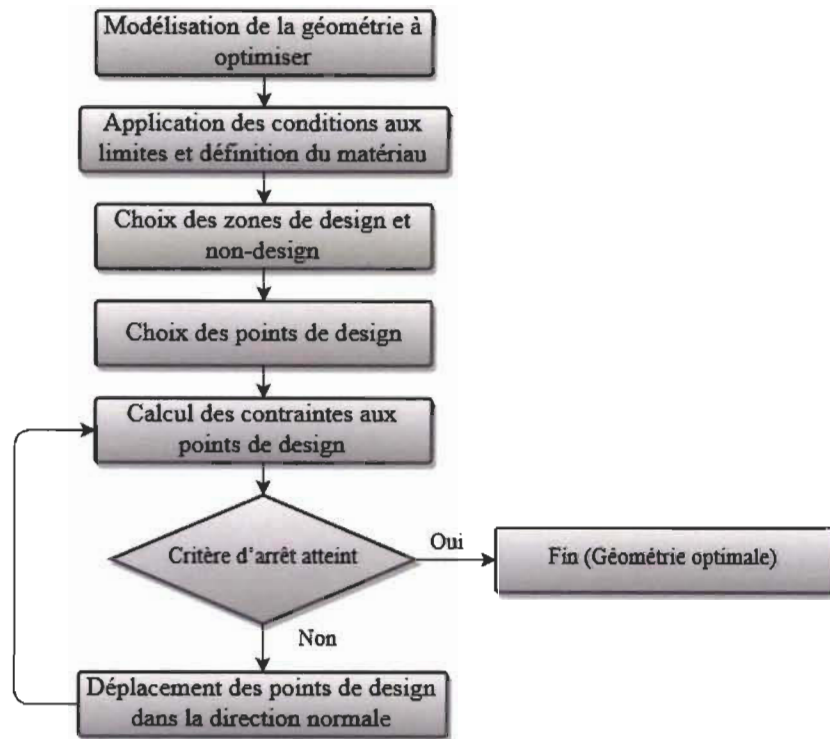


Figure 2.24 Processus d'optimisation par la MMN

### *Création du modèle géométrique*

Dans un premier temps, la géométrie de la structure à optimiser est modélisée, ce qui fournit la forme initiale sur laquelle sera appliquée la MMN, cette forme évolue tout au long du processus itératif.

### *Matériau et conditions aux limites*

Puis, les caractéristiques du matériau sont définies ainsi que les conditions aux limites que sont les déplacements imposés (encastrement, appui, etc.) et les chargements (ponctuels, linéiques, surfaciques ou volumiques).

### *Zones de design et de non-design*

Les zones de design sont les zones où la méthode est appliquée. Ce sont les zones où l'on veut obtenir une contrainte uniforme. Les zones de non-design sont les zones qui ne sont pas affectées par la méthode, c'est-à-dire que la forme ne change pas dans ces zones. Les zones de design et de non design sont définies en utilisant une modélisation



BREP. La figure 2.25 montre les zones de non-design en gris et les zones de design en bleu d'une structure.



Figure 2.25 Zones de design (en bleu) et de non-design (en gris) d'une structure tubulaire

### *Choix des points de design*

Après le choix des zones de design vient celui des points de design. Les points de design sont les points dont la position change durant le processus d'optimisation. Il existe deux approches possibles pour le choix des points de design (Wu, 2005).

Les points de design sont les points de contrôle qui définissent la géométrie de la frontière. Peng et Jones (2008) et Le riche et Cailletaud (1998) proposent d'utiliser des B-splines et Wu (2005) propose d'utiliser des courbes de Ferguson (cubic splines). L'avantage de ce type de représentation est la possibilité d'avoir des formes lisses, néanmoins dans ces exemples, la méthode est utilisée en 2D et sur des formes simples et l'application de cette approche en 3D et avec des formes complexes peut s'avérer compliquée.

La seconde approche consiste à utiliser les nœuds du maillage comme points de design. L'avantage de cette approche est que la forme optimale obtenue est précise. L'inconvénient est la nécessité d'utiliser un grand nombre de points avec une méthode pour lisser (contrôler) le mouvement des nœuds, due au fait que la contrainte aux nœuds est très sensible à la position des nœuds voisins, particulièrement pour les maillages fins (Wu 2005).

*Résolution du problème d'élasticité*

Le calcul des contraintes peut se faire à l'aide de différentes méthodes.

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée (Mattheck et Burkhardt 1990 ; Wu 2005 ; Zehsaz et al. 2013). L'autre méthode utilisée est la méthode des éléments finis de frontière ou « Boundary Element Method (BEM) » (Wessel, Cisilino et al. 2004 ; Parvisian et Fenner 2002 ; Maduramuthu et Fenner 2004). Le calcul des contraintes se fait sur la frontière. L'avantage de cette méthode est la facilité de remaillage par rapport à la méthode des éléments finis et la diminution du temps de calcul puisque seulement les frontières sont discrétisées. La contrainte équivalente de Von Mises est la contrainte la plus souvent utilisée avec cette méthode (Mattheck et Burkhardt 1990; Parvizian et Fenner 1997; Li, Steven et al. 1999; Parvizian et Fenner 2002; Wu 2005).

*Déplacement des points de design*

Les points de design dont la contrainte est supérieure à la contrainte objectif sont déplacés de telle façon que la contrainte en ces points baisse et les points dont la contrainte est inférieure à la contrainte objectif sont déplacés de façon à ce que la contrainte en ces points augmente. La direction de mouvement optimal est la direction normale (Parvisian et Fenner 2002). Le déplacement se fait le long d'un vecteur normal unitaire  $\vec{n}_p$ . Les points de design dont la contrainte est supérieure à la contrainte objectif sont déplacés dans la direction de la normale sortante (vers extérieur) et les points de design dont la contrainte est inférieure à la contrainte objectif sont déplacés dans la direction de la normale entrante (vers l'intérieur).

L'ampleur du déplacement dépend de l'écart entre la contrainte objectif  $\sigma_o$  et la contrainte  $\sigma_{VM_i}$  au point de design  $i$ . Le déplacement au point de design  $i$  à l'itération  $j$   $d_i^j$  se calcule par la formule suivante :

$$d_i^j = C \frac{\sigma_{VM_i}^j - \sigma_o}{\sigma_o}, \quad (2.32)$$

où  $C$  est un facteur d'échelle appelé pas ou coefficient de convergence, lequel peut être constant ou variable (Wu 2005). Ce coefficient est déterminé expérimentalement. La réduction de la valeur de  $C$  conduit à un nombre d'itérations plus important, une valeur plus grande permet une convergence plus rapide mais augmente le risque de divergence de la méthode (Maduramuthu et Fenner 2004).

La figure 2.26 montre l'évolution de la contrainte objectif suivant le nombre d'itérations pour des coefficients de convergence différents. Pour un coefficient de 0.4, la méthode diverge à l'itération quatre. Avec un coefficient de 0.35 la méthode converge, mais à l'itération cinq la méthode est proche de diverger. Avec un coefficient de 0.2 et 0.3 la méthode converge et la contrainte objectif diminue de façon monotone. Les coordonnées des points de design  $i$  à l'itération  $j+1$  sont;

$$\begin{cases} x_i^{j+1} = x_i^j + d_i^j \cdot n_{x_i}^j \\ y_i^{j+1} = y_i^j + d_i^j \cdot n_{y_i}^j \\ z_i^{j+1} = z_i^j + d_i^j \cdot n_{z_i}^j \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $x_i^j, y_i^j$  et  $z_i^j$  sont respectivement les coordonnées  $x, y$  et  $z$  du point de design  $i$  à l'itération  $j$  et  $n_{x_i}^j, n_{y_i}^j$  et  $n_{z_i}^j$  sont les coordonnées de la normale unitaire au point de design  $i$  à l'itération  $j$ .

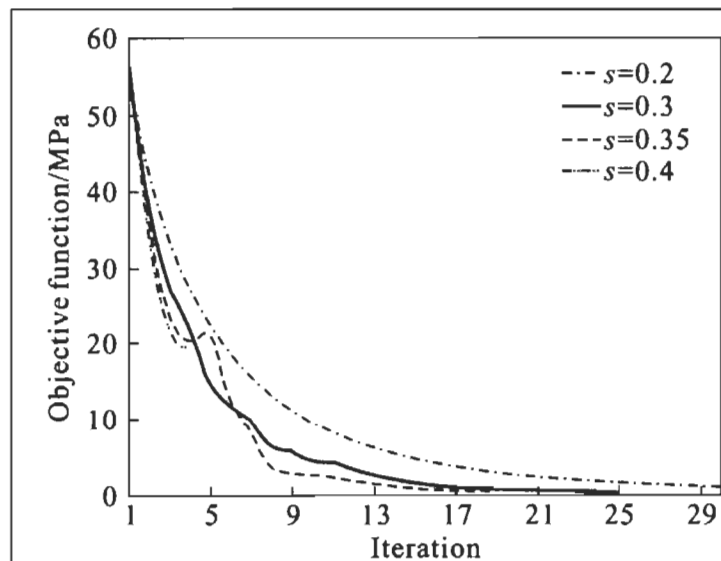


Figure 2.26 Influence du coefficient de convergence sur la convergence de la MMN (Heller, Keye et al. 1999)

*Itération et convergence*

Le calcul des contraintes aux points de design et le déplacement de ces points se fait de manière itérative, jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint avec  $L$  la limite de convergence. Umetani et Hirai (1975) proposent que le processus itératif de la méthode s'arrête lorsque la contrainte à tous les points de design se trouve dans l'intervalle suivant;

$$(1 - L) \cdot \sigma_o \leq \sigma_{VM} \leq (1 + L) \cdot \sigma_o. \quad (2.34)$$

L'inégalité peut s'écrire sous la forme suivante;

$$\frac{|\sigma_{VM} - \sigma_o|}{\sigma_o} \leq L. \quad (2.35)$$

Wu (2005) utilise l'erreur relative  $RE$  comme critère d'arrêt de la méthode;

$$RE = \left| \frac{\sigma_{VM_{max}} - \sigma_{VM_{min}}}{\sigma_{VM_{max}} + \sigma_{VM_{min}}} \right| \leq L. \quad (2.36)$$

Lorsque la contrainte devient uniforme sur la frontière, l'erreur relative  $RE$  tend vers zéro. L'écart entre la contrainte maximale et la contrainte minimale devient très faible.

Zehsaz et al. (2013) utilisent le critère d'arrêt  $\psi$  suivant;

$$\psi = \frac{\sigma_{VM_{max}} - \sigma_{VM_{min}}}{\sigma_o} \leq L. \quad (2.37)$$

Comme pour le critère précédent, le critère  $\psi$  tend vers zéro lorsque la contrainte devient uniforme sur la frontière.

Pour tous ces critères, il suffit que la contrainte maximale soit trop grande ou que la contrainte minimale soit trop faible en un seul point de design pour que la méthode diverge, comme que nous le verrons dans la section 4.10.

**2.5.3.2 Contrôle de la MMN**

Comme vu précédemment, l'utilisation des nœuds du maillage comme points de design nécessite l'utilisation d'une méthode de contrôle. L'une des méthodes utilisées est le barycentrage ou lissage Laplacien (Peng et Jones 2009 ; Heller, Keye et al. 1999).

Le barycentrage consiste à trouver la position d'un nœud en faisant la moyenne de la position des nœuds voisins. À la figure 2.27, Q est le point de design et les points P et R sont deux points voisins. La nouvelle position de Q est obtenue à partir de la position de P et R.

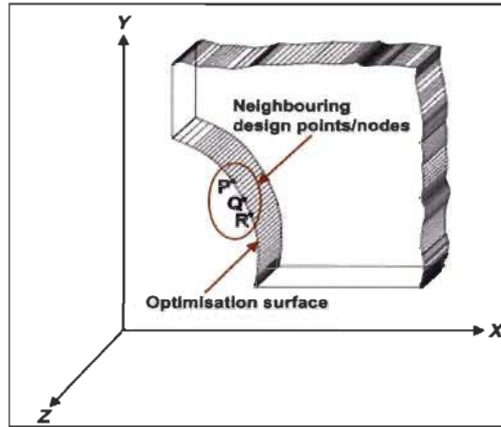


Figure 2.27 Lissage du point de design (Q) en utilisant les nœuds voisins (P) et (R) (Peng et Jones 2009)

De façon générale, la position finale (après lissage) du point Q ( $X_Q^j, Y_Q^j, Z_Q^j$ ) se calcule avec l'équation 2.38, avec  $n$  le nombre de nœuds voisins;

$$\begin{cases} X_Q^j = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^j}{n} \\ Y_Q^j = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^j}{n} \\ Z_Q^j = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^j}{n} \end{cases} \quad (2.38)$$

### 2.5.3.3 Exemples d'applications de la MMN

On présente trois exemples d'applications de la méthode du mouvement normal : l'optimisation d'un trou dans une plaque rectangulaire sous tension biaxiale, un segment dans une plaque sous tension uniaxiale et un trou dans une plaque carrée sous tension uniaxiale.

#### *Trou dans une plaque rectangulaire sous tension biaxiale*

Peng et Jones (2009) proposent d'optimiser la forme d'un trou circulaire dans une plaque rectangulaire soumise à un effort de tension biaxiale, 50 MPa suivant l'axe X

et 100 MPa suivant l'axe Y. Du à la symétrie, seul le quart de la plaque est modélisée comme on peut le voir à figure 2.28.

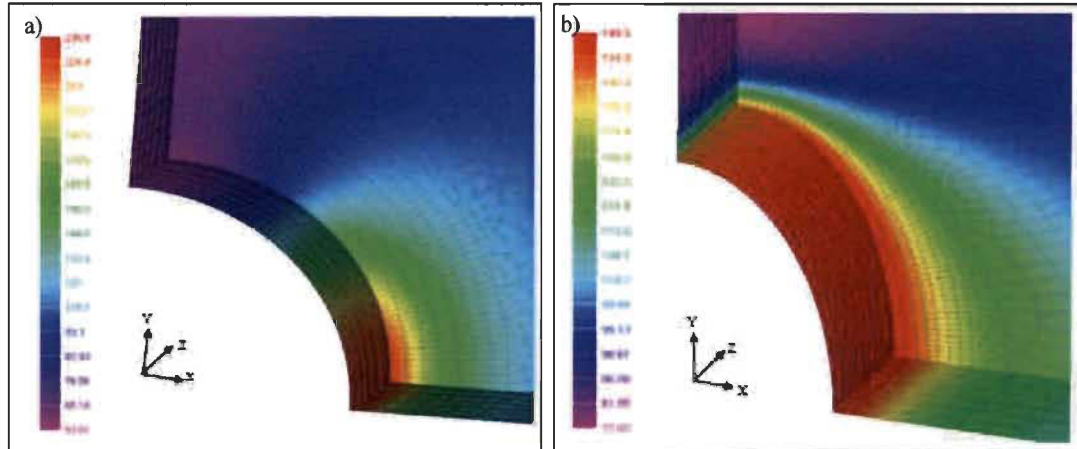


Figure 2.28 Trou dans une plaque sous tension biaxiale optimisé par la MMN a) Forme et état de contrainte initial b) Forme et état de contrainte final (Peng et Jones 2009)

La figure 2.28 a) montre la forme et l'état de contrainte initial du trou et la figure 2.28 b) montre la forme et l'état de contrainte final du trou après optimisation. La contrainte de Von Mises devient uniforme autour du trou et le trou épouse une forme elliptique.

#### *Congé dans une plaque sous tension*

Parvisian et Fenner (2002) proposent d'optimiser un segment entre deux sections dans une plaque sous tension uniaxiale en utilisant la méthode du mouvement normal et une analyse de sensibilité. La figure 2.29 a) montre le segment AB à optimiser et la figure 2.29 b) montre en continu le résultat obtenu avec la méthode du mouvement normal et en pointillés, le résultat obtenu avec l'analyse de sensibilité. Le résultat obtenu est similaire, mais la MMN est plus simple à programmer et elle nécessite un temps de calcul moins important, car elle ne nécessite pas de calcul des dérivées.

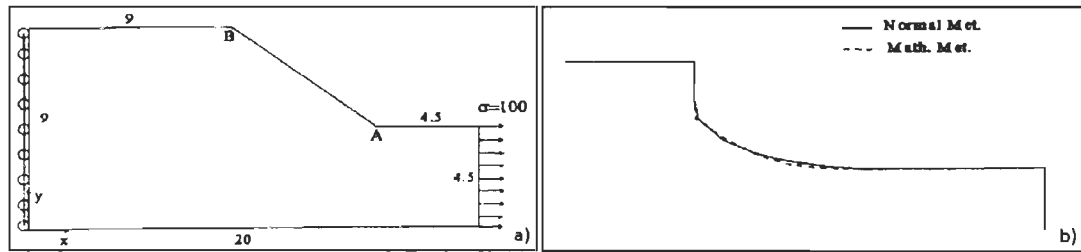


Figure 2.29 Congé dans une plaque sous tension uniaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (en ligne continue) et par la méthode du gradient conjugué (en ligne pointillée) (Parvizian et Fenner 2002)

*Trou dans une plaque sous tension uniaxiale en utilisant des éléments quadratiques*

Maduramuthu et Fenner (2004) proposent d'optimiser un trou dans une plaque carrée soumise un à une tension uniaxiale. Étant donné la symétrie de la plaque, seul le quart est modélisé. Les éléments utilisés sont des quadrangles quadratiques (8 nœuds). La figure 2.30 a) montre la forme initiale du trou et la figure 2.30 b) montre la forme du trou après optimisation qui est elliptique.

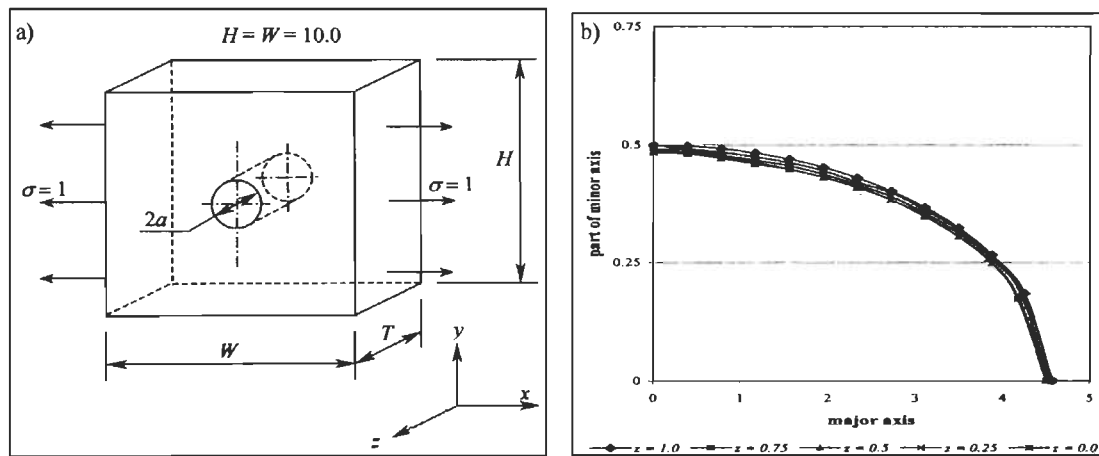


Figure 2.30 Trou dans une plaque sous tension uniaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (Maduramuthu et Fenner 2004)

Le changement de position de chaque nœud est unique et dépend de la contrainte de Von Mises en ce nœud, mais les nœuds qui se situent au milieu de l'arête de l'élément doivent rester au milieu à chaque itération. Un repositionnement ou recentrage de ces nœuds est nécessaire.

### 2.5.3.4 Avantages et inconvénients de la méthode du mouvement normal

#### *Avantages*

Plusieurs méthodes d'optimisation dépendent d'une analyse de sensibilité. Une quantité considérable de calcul est nécessaire pour trouver les dérivées, ce qui limite le nombre de variables de design qui peuvent être utilisés. Bien que ce ne soit pas très significatif en 2D, c'est plus important en 3D, où un plus grand nombre de variables de design est nécessaire pour représenter la frontière. La MMN est une méthode sans gradient, aucun calcul de dérivée n'est nécessaire ce qui permet l'utilisation d'un grand nombre de points de design. La méthode est aussi facile à programmer.

#### *Inconvénients*

La contrainte aux nœuds est très sensible à la position des nœuds voisins, une petite irrégularité qui se développe dans la surface localement peut entraîner des concentrations de contraintes.

La méthode du mouvement normal a pour principe qu'ajouter de la matière (déplacement vers l'extérieur) conduit à une baisse des contraintes, mais selon Hsu, Sheppard et al. (1995) ce n'est pas toujours le cas et cela peut conduire à une concentration des contraintes si la courbure n'est pas prise en compte.

L'utilisation des nœuds du maillage comme points de design nécessite l'utilisation d'une méthode de contrôle du déplacement des nœuds.

Un remaillage partiel ou total peut être nécessaire si le changement de forme est important, le remaillage peut être fait de manière périodique ou à chaque itération (Maduramuthu et Fenner 2004).

## 2.6 Objectifs spécifiques

Comme décrit précédemment, l'objectif principal de ce mémoire est l'intégration d'une méthode d'optimisation de forme au processus de CAO. Les objectifs spécifiques sont :

- Développer une méthodologie pour générer un maillage quadratique;



- Intégrer les éléments finis de coques dans le Modèle de Topologie Unifié (MTU) (François et Cuillière 2014) et valider les résultats avec un autre logiciel;
- Développer une méthodologie pour l'utilisation de la méthode du mouvement normal avec les éléments finis de coques quadratiques;
- Développer une méthodologie pour contrôler le déplacement des nœuds;
- Appliquer la MMN sur des structures tubulaires à parois minces.

## 2.7 Hypothèses

- Le maillage utilisé est un maillage quadratique, triangles à six nœuds;
- La méthode des éléments finis est utilisée pour le calcul des contraintes aux nœuds;
- Le calcul éléments finis se fait avec des éléments de coque;
- L'épaisseur reste constante durant le processus d'optimisation;
- La contrainte objectif  $\sigma_0$  est la contrainte de Von Mises moyenne dans la zone de design, actualisée à chaque itération de la MMN;
- La contrainte considérée est la contrainte de Von Mises maximale entre les plans inférieur, moyen et supérieur.

## CHAPITRE 3

# INTÉGRATION D'ÉLÉMENTS FINIS DE COQUES QUADRATIQUES

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente dans un premier temps l'environnement de développement, les différents éléments de structures disponibles au sein du solveur par éléments finis et la méthodologie utilisée pour intégrer les éléments de coques quadratiques. Puis, on décrit la méthode utilisée pour générer un maillage quadratique et déterminer sa validité. Finalement, on valide l'intégration des éléments de coques en comparant les résultats de calcul obtenus sur une coque mince avec un logiciel commercial de calcul par éléments finis.

### 3.2 Environnement de développement

L'Équipe de Recherche en Intégration CAO-CALcul (ERICCA) travaille depuis plusieurs années sur l'intégration de la méthode des éléments finis et des méthodes d'optimisation au sein du processus de développement de produits par la CAO. Ce travail se fait dans un environnement de développement. L'environnement de développement est un Framework orienté objet basé sur un Modèle de Topologie Unifié (MTU) (François et Cuillière 2014). L'acronyme MTU est utilisé pour désigner l'environnement.

Il est possible d'effectuer différents types de calculs par éléments finis dans le MTU : calcul en élasticité linéaire, en utilisant des éléments volumiques ou des éléments de plaques pour les structures à parois minces et calcul en thermique. Des travaux sont en cours afin de permettre le calcul en élasticité non linéaire. Vu la structure de l'environnement, il est possible d'intégrer facilement de nouveaux développements. Les éléments de coques ont été intégrés dans cet environnement dans le cadre de ce mémoire.

L'importation de la géométrie sur laquelle on souhaite faire un calcul par éléments finis dans le MTU se fait en utilisant les bibliothèques d'Open CASCADE Technology, qui est une plateforme libre de développement en CAO et en modélisation 3D.

Le calcul par éléments finis est effectué avec les bibliothèques de Code\_Aster (Analyse des structures et thermomécanique pour des études et des recherches). Ce logiciel libre a été développé par électricité de France (EDF) en 1989. C'est un solveur qui utilise la méthode des éléments finis pour résoudre, entre autres, des problèmes en mécanique et en thermique.

Un fichier de maillage et un fichier de commandes sont nécessaires pour effectuer un calcul dans Code\_Aster. Le fichier de maillage définit la description géométrique et topologique du maillage. Le fichier de commandes contient un ensemble de commandes, exprimées dans un langage spécifique à Code\_Aster. À noter que la documentation du logiciel est disponible dans la section « Documentation » du site Internet de Code\_Aster. Chaque document de référence est identifié par une clé documentaire du type « U0.00.00 ». La visualisation des résultats du calcul se fait avec le logiciel GMSH. GMSH est un logiciel libre de maillage par éléments finis offrant plusieurs options en pré et post traitement (Geuzaine et Remacle 2009).

### 3.3 Éléments de structures minces

Les éléments de coques et de plaques sont particulièrement utilisés pour modéliser des structures minces où les rapports épaisseur/longueur caractéristique sont très inférieurs à 1/10 (coques minces) ou de l'ordre de 1/10 (coques épaisses). Il y a trois catégories d'éléments de structures minces dans Code\_Aster :

#### 3.3.1 Les éléments de plaques

Ces éléments sont des éléments plans, donc la courbure de la structure à représenter n'est pas prise en compte et il est nécessaire d'utiliser un grand nombre d'éléments pour avoir une bonne approximation de la géométrie de la structure. Les éléments de plaques disponibles dans Code\_Aster sont :

*Les éléments de plaques plans [R3.07.03]*

Il existe deux types d'éléments de plaques plans dans Code\_Aster. Les éléments pour lesquels la distorsion transverse est nulle. Les éléments DKT, DKQ, DKTG et DKQG. Ces éléments ont une formulation "Discrete Kirchhoff ". Les éléments pour lesquels

la distorsion transverse reste constante et non nulle dans l'épaisseur. Les éléments DST, DSQ et Q4G. Ces éléments ont une formulation "Discrete Shear".

Il est conseillé d'utiliser le second type d'éléments lorsque la structure à mailler a un rapport épaisseur sur longueur caractéristique comprise entre 1/20 et 1/10 et les premiers dans le restant des cas.

Les éléments DKT, DKTG et DST sont des éléments isoparamétriques triangulaires et les éléments DKQ, DKQG, DSQ et Q4G sont des éléments isoparamétriques quadrilatéraux. Les éléments de plaque DKT ont été implémentés dans le MTU (Gervais-Lavoie, 2015).

### 3.3.2 Les éléments de coques

Ces éléments sont des éléments courbes, qui fournissent une meilleure approximation de la géométrie de la structure. Les éléments de coques disponibles dans Code\_Aster sont :

*Les éléments de coques linéiques [R3.07.02]*

Ces éléments sont utilisés pour la modélisation mécanique de structures minces à surface moyenne de géométrie particulière.

Les coques à symétrie de révolution autour de l'axe  $Oy$  (figure 3.1 a). La géométrie est définie de façon unidimensionnelle par le méridien dans le plan  $Oxy$ . C'est la modélisation COQUE\_AXIS.

Les coques à sections quelconques invariantes le long de l'axe  $Oz$  (figure 3.1 b). La géométrie est définie de façon unidimensionnelle par la section de la coque dans le plan  $Oxy$ . C'est la modélisation COQUE\_C\_PLAN en contraintes plane ou COQUE\_D\_PLAN en déformation plane.

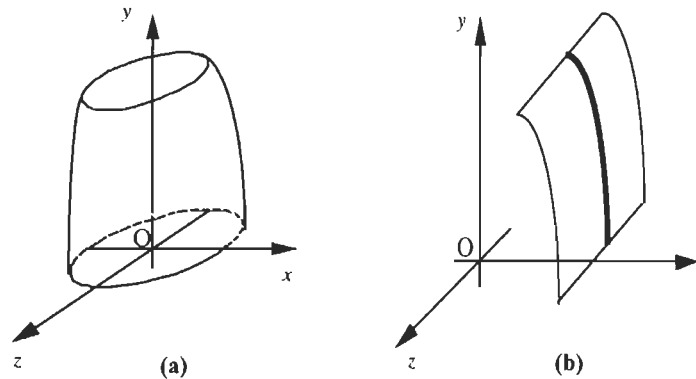


Figure 3.1 Les éléments de coques linéiques (a) Coques à symétrie de révolution autour de l'axe  $Oy$   
(b) Coques à sections invariantes le long de l'axe  $Oz$  [R3.07.02]

#### *Les éléments de coques tridimensionnelles* [R3.07.04]

Ces éléments sont utilisés pour la modélisation des structures 3D à géométrie quelconque. Les éléments coques tridimensionnels disponibles dans Code\_Aster sont le triangle à 7 nœuds et le quadrangle à 9 nœuds. Ce sont les éléments COQUE\_3D. Ce sont les éléments utilisés dans le cadre de travail.

### **3.3.3 Formulation des éléments plaques et coques**

Les éléments de plaques et coques reposent sur la théorie des plaques et des coques selon laquelle :

Les champs de déplacements varient linéairement dans l'épaisseur de la plaque. Le tenseur de déformation comprend les composantes de membrane, de flexion et de cisaillement transversal.

La contrainte transversale  $\sigma_z$  est nulle (hypothèse des contraintes planes).

La variation de l'épaisseur et de la déformation  $\varepsilon_z$  n'est pas décrite.

La prise en compte du cisaillement transverse dépend du facteur de cisaillement transverse  $k$ . Pour les éléments de plaques avec une distorsion transverse nulle, le facteur de cisaillement transverse est égal à  $k=1$  (théorie de Hencky-Love-Kirchhoff). Pour les éléments de plaques avec une distorsion transverse non nulle, le facteur de cisaillement transverse est égal à  $k=5/6$  (théorie de Reissner).

Pour les éléments de coques, le coefficient de cisaillement  $k$  peut être modifié dans l'opérateur `AFPE_CARA_ELEM` sous le mot-clé `A_CIS`. Par défaut, la valeur du coefficient est  $k=5/6$  (théorie de Reissner), si  $k=1$  (théorie Hencky-Mindilin-Naghdi) et si  $k$  est très grand (théorie de Love-Kirchhoff) pour des structures très minces, néanmoins il est conseillé de ne pas changer ce coefficient (les éléments fournissent une solution physiquement correcte, que la coque soit épaisse ou mince).

Il y a cinq variables cinématiques pour les éléments plaques et coques non linéiques : les déplacements de membranes  $u$  et  $v$  dans le plan de référence  $z = 0$ , le déplacement transversal  $w$  et les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  de la normale à la surface moyenne dans les plans  $yz$  et  $xz$ . Il y a trois variables cinématiques pour les éléments linéiques : les déplacements  $u$  et  $v$  dans le plan de référence  $z = 0$  et la rotation  $\beta_n$  de la normale à la surface moyenne dans le plan  $xy$ .

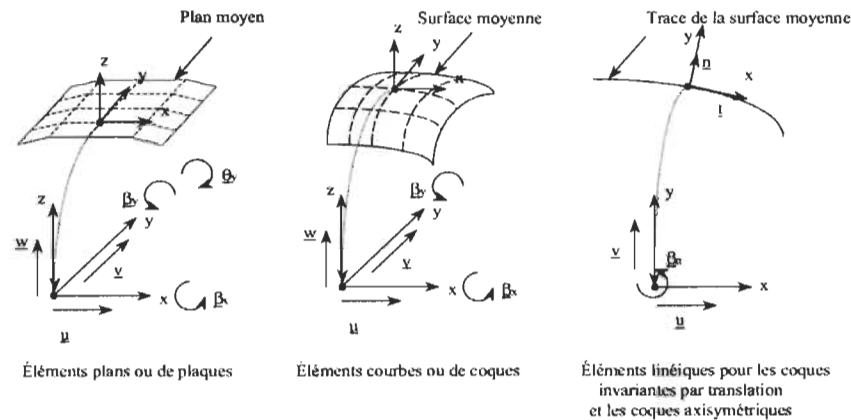


Figure 3.2 Variables cinématiques pour les éléments de plaques et coques [U2.02.01]

Il y a trois efforts résultants de membranes notés  $N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}$  et trois moments de flexion notés  $M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}$  et deux efforts tranchants notés  $V_x$  et  $V_y$  pour les éléments de plaque et de coques non linéiques. Il y'a trois efforts résultants de membranes notés  $N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}$  et trois moments de flexion notés  $M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$  pour les éléments linéiques.

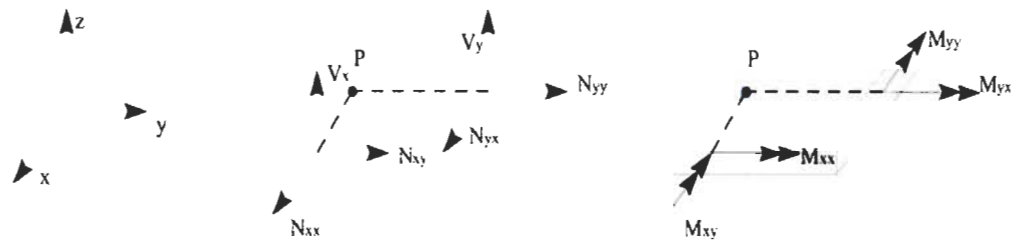


Figure 3.3 Efforts résultants pour un élément de plaque ou de coque [U2.02.01]

### 3.3.4 Les éléments COQUE\_3D triangulaires

Ces éléments permettent d'effectuer des calculs de structures coques de formes quelconques avec une meilleure approximation de la géométrie et de la cinématique que dans le cas des éléments plaques. L'élément qui nous est disponible pour une modélisation COQUE\_3D est l'élément triangulaire Hétérosis à 7 nœuds. Pour cet élément, les déplacements sont calculés par des fonctions d'interpolation de l'élément Sérendip et les rotations par les fonctions de l'élément de Lagrange (figure 3.4).

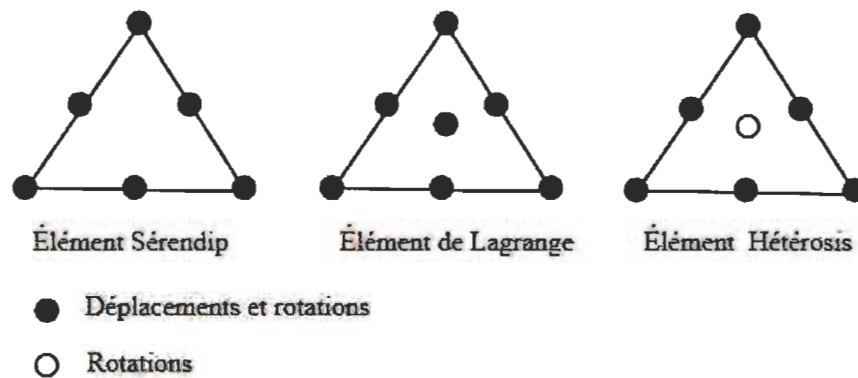


Figure 3.4 Différents type d'éléments finis pour le triangle isoparamétrique

Des risques de blocage (verrouillage) de membrane ou de cisaillement apparaissent lorsque l'épaisseur de la coque devient petite par rapport à son rayon de courbure, pour cela une intégration numérique sélective est utilisée.

L'intégration sélective de l'élément consiste en une intégration réduite des termes de membrane et de cisaillement, et une intégration normale des termes de flexion.

Pour certains types de conditions aux limites (encastrement) avec l'élément Sérendip le verrouillage persiste malgré l'intégration sélective. En outre, pour l'élément de Lagrange, ce type d'intégration conduit à des singularités dans la matrice de rigidité. L'élément Hétérosis avec intégration sélective ne rencontre pas les problèmes mentionnés.

### 3.4 Implémentation des éléments de coques

Il est possible de faire un calcul par éléments finis sur des structures à parois minces avec Code\_Aster en utilisant les éléments de plaques (DKT). Étant plan (linéaire) ces éléments ne permettent d'avoir une bonne approximation de la géométrie contrairement aux éléments de coques (COQUE\_3D) courbes. L'utilisation d'éléments de COQUE\_3D nécessite un maillage quadratique. La méthodologie utilisée pour générer un maillage quadratique est décrite à la section 3.5. Après la génération d'un maillage quadratique (triangle à six nœuds), celui-ci est transformé en un maillage avec des éléments à sept nœuds grâce à une commande de Code\_Aster. Le calcul par éléments finis se fera sur ce maillage et les résultats obtenus seront projetés sur le maillage initial à l'aide d'une commande spécifique de Code\_Aster. Pour plus de détails, ce référer à l'annexe B.

### 3.5 Génération et validité d'un maillage quadratique

On présente dans cette partie la méthode utilisée pour générer un maillage quadratique et la méthode utilisée pour déterminer la validité de ce maillage. Les résultats obtenus sont validés et comparés avec ceux obtenus un autre logiciel.

#### 3.5.1 Génération d'un maillage quadratique

L'approche utilisée pour générer un maillage quadratique est une approche a posteriori. Le maillage quadratique est généré à partir d'un maillage linéaire et la méthode utilisée pour générer le nœud milieu est l'interpolation dans l'espace des coordonnées paramétriques. L'interpolation ne garantit pas que le nœud interpolé soit au milieu de l'arête du triangle. Pour cela, on ajoute une étape qui consiste à vérifier si le nœud est au milieu de l'arête après interpolation et à le repositionner si ce n'est pas le cas. Les étapes pour générer un maillage quadratique sont :

1. Génération d'un maillage linéaire;



2. Interpolation dans l'espace des coordonnées paramétriques;
3. Repositionnement du nœud si nécessaire.

Le MTU contient un mailleur qui utilise la méthode frontale pour générer automatiquement un maillage linéaire non structuré.

Comme vu dans le chapitre 2, l'interpolation consiste en une interpolation linéaire entre les nœuds du maillage, dans l'espace des coordonnées paramétriques correspondant à l'entité géométrique à laquelle ils sont associés. La figure 3.5 illustre cette interpolation dans l'espace des coordonnées paramétriques.

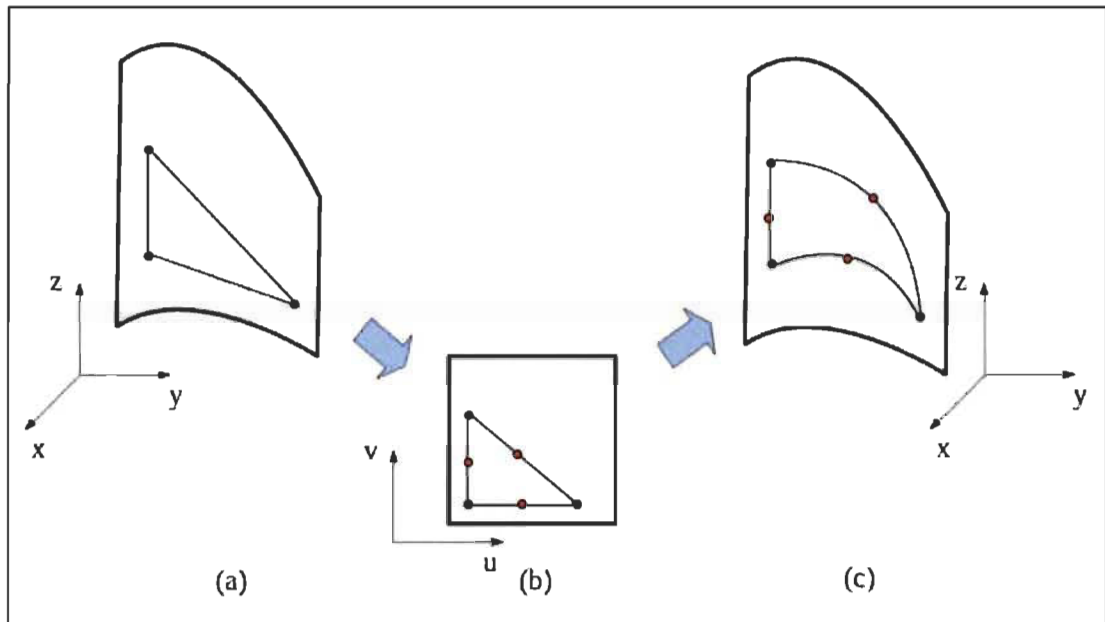


Figure 3.5 Illustration de l'interpolation dans l'espace des coordonnées paramétriques (adapté de Lu 2011)

En (a), on a un triangle linéaire appartenant à une face dans l'espace des coordonnées cartésiennes. En (b), le triangle est dans l'espace des coordonnées paramétriques de la face. Les coordonnées du nœud milieu sont calculées dans cette espace. Soit une arête du triangle composée du nœud 1 et du nœud 2, et notons  $(u_1, v_1)$  les coordonnées paramétriques du nœud 1 et  $(u_2, v_2)$  les coordonnées du nœud 2. Les coordonnées du nœud milieu dans l'espace paramétrique sont;

$$\begin{cases} u_m = \frac{u_1 + u_2}{2} \\ v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} \end{cases} \quad (3.1)$$

En (c), on passe de l'espace de coordonnées paramétriques vers l'espace de coordonnées cartésiennes, où l'on obtient les coordonnées du nœud milieu en (X, Y et Z) et le triangle devient curviligne.

L'interpolation ne garantit pas que les nœuds seront au milieu de chaque arête du triangle. Pour, éventuellement corriger leur position, on calcule la distance curviligne entre les nœuds 1 et 2 et le nœud milieu.

Soit  $L_1$  la distance entre le nœud 1 et le nœud milieu et  $L_2$  la distance entre le nœud 2 et le nœud milieu. Nous avons;

- Si  $L_1 = L_2$ , le nœud est au milieu de l'arête du triangle;
- Si  $L_1 > L_2$ , le nœud intermédiaire est déplacé de manière itérative vers  $L_1$  jusqu'à ce que  $L_1=L_2$ ;
- Si  $L_2 > L_1$ , le nœud intermédiaire est déplacé de manière itérative vers  $L_1$  jusqu'à ce que  $L_1=L_2$ ;

Pour calculer les distances  $L_1$  et  $L_2$  on a besoin de l'équation de l'arête du triangle, on détermine cette équation de la manière suivante :

Soit un triangle à six nœuds T, dont les coordonnées des nœuds dans l'espace cartésien sont  $(x_i, y_i, z_i), i = 1$  à 6.

Soit  $(\xi, \eta)$  l'espace des coordonnées paramétriques. La relation entre les deux espaces de coordonnées est donnée par une transformation de la forme;

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \\ z = z(\xi, \eta) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec

$$\mathbf{p}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \quad (3.3)$$

et

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 x_i N_i(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 y_i N_i(\xi, \eta) \\ z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 z_i N_i(\xi, \eta) \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation quadratique du triangle de référence. Les fonctions d'interpolation et dérivées sont présentées au tableau 3.1.

Tableau 3.1 Fonctions d'interpolation et dérivées pour un triangle à six nœuds (Cuillière 2011)

$i$	$N_i$	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$(1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$	$-3 + 4\xi + 4\eta$	$-3 + 4\xi + 4\eta$
2	$4\xi(1 - \xi - \eta)$	$4 - 8\xi - 4\eta$	$-4\xi$
3	$-\xi(1 - 2\xi)$	$4\xi - 1$	0
4	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$
5	$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$4\eta - 1$
6	$4\eta(1 - \xi - \eta)$	$-4\eta$	$4 - 4\xi - 8\eta$

Pour l'arête 1 du triangle de référence, composée des nœuds 1, 2 et 3 (figure 3.6), pour laquelle  $\eta = 0$  et  $\xi \in [0,1]$  nous avons;

$$x(\xi, 0) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)(x_1) + (4\xi - 4\xi^2)(x_2) + (-\xi + 2\xi^2)(x_3)$$

$$y(\xi, 0) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)(y_1) + (4\xi - 4\xi^2)(y_2) + (-\xi + 2\xi^2)(y_3)$$

$$z(\xi, 0) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)(z_1) + (4\xi - 4\xi^2)(z_2) + (-\xi + 2\xi^2)(z_3)$$

Si nous posons  $u = \xi \in [0,1]$  nous obtenons la paramétrisation suivante de l'arête 1:

$$x(u) = (1 - 3u + 2u^2)(x_1) + (4u - 4u^2)(x_2) + (-u + 2u^2)(x_3)$$

$$y(u) = (1 - 3u + 2u^2)(y_1) + (4u - 4u^2)(y_2) + (-u + 2u^2)(y_3)$$

$$z(u) = (1 - 3u + 2u^2)(z_1) + (4u - 4u^2)(z_2) + (-u + 2u^2)(z_3)$$

Similairement, pour l'arête 2, composée des nœuds 1, 5 et 6, pour laquelle  $\xi = 0$  et  $\eta \in [0,1]$  nous avons;

$$x(u) = (1 - 3u + 2u^2)(x_1) + (4u - 4u^2)(x_6) + (-u + 2u^2)(x_5)$$

$$y(u) = (1 - 3u + 2u^2)(y_1) + (4u - 4u^2)(y_6) + (-u + 2u^2)(y_5)$$

$$z(u) = (1 - 3u + 2u^2)(z_1) + (4u - 4u^2)(z_6) + (-u + 2u^2)(z_5)$$

Pour l'arête 3 du triangle, composée des nœuds 3, 4 et 5, où  $\eta = 1 - \xi$  et  $\xi \in [0,1]$  nous obtenons;

$$x(\xi, 1 - \xi) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)(x_5) + (4\xi - 4\xi^2)(x_4) + (-\xi + 2\xi^2)(x_3)$$

$$y(\xi, 1 - \xi) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)(y_5) + (4\xi - 4\xi^2)(y_4) + (-\xi + 2\xi^2)(y_3)$$

$$z(\xi, 1 - \xi) = (1 - 3\xi + 2\xi^2)(z_5) + (4\xi - 4\xi^2)(z_4) + (-\xi + 2\xi^2)(z_3)$$

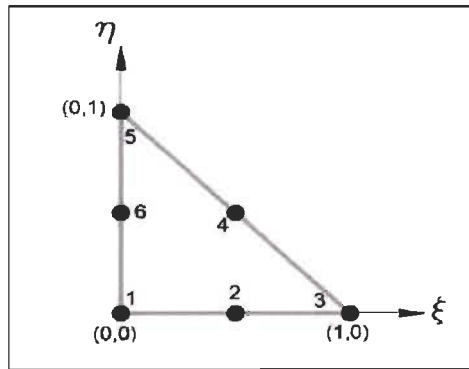


Figure 3.6 Triangle quadratique (Cuillière 2011)

En exprimant cette équation par la variable  $u$  :

$$x(u) = (1 - 3u + 2u^2)(x_5) + (4u - 4u^2)(x_4) + (-u + 2u^2)(x_3)$$

$$y(u) = (1 - 3u + 2u^2)(y_5) + (4u - 4u^2)(y_4) + (-u + 2u^2)(y_3)$$

$$z(u) = (1 - 3u + 2u^2)(z_5) + (4u - 4u^2)(z_4) + (-u + 2u^2)(z_3)$$

De manière générale, l'équation de l'arête d'un triangle quadratique  $\mathbf{p}(u)$  est définie comme :

$$\mathbf{p}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad (3.5)$$

Avec

$$x(u) = (1 - 3u + 2u^2)(x_1) + (4u - 4u^2)(x_m) + (-u + 2u^2)(x_2)$$

$$y(u) = (1 - 3u + 2u^2)(y_1) + (4u - 4u^2)(y_m) + (-u + 2u^2)(y_2)$$

$$z(u) = (1 - 3u + 2u^2)(z_1) + (4u - 4u^2)(z_m) + (-u + 2u^2)(z_2)$$

Où  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_m, y_m, z_m)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  sont respectivement les coordonnées du premier nœud, nœud milieu et deuxième nœud de l'arête. La longueur d'arc, notée  $S$ , d'une courbe vectorielle  $\mathbf{p}(u)$  de  $a$  jusqu'à  $b$  est donnée par (Parent 2001 ; Guenter et Parent 1990);

$$S = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{p}}{du} \right\| du, \quad (3.6)$$

où

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \left( \frac{dx(u)}{du}, \frac{dy(u)}{du}, \frac{dz(u)}{du} \right), \quad (3.7)$$

et

$$\left\| \frac{d\mathbf{p}}{du} \right\| = \sqrt{\left( \frac{dx(u)}{du} \right)^2 + \left( \frac{dy(u)}{du} \right)^2 + \left( \frac{dz(u)}{du} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Avec :

$$\frac{dx(u)}{du} = (-3 + 4u)x_1 + (4 - 8u)x_m + (-1 + 4u)x_2$$

$$\frac{dy(u)}{du} = (-3 + 4u)y_1 + (4 - 8u)y_m + (-1 + 4u)y_2$$

$$\frac{dz(u)}{du} = (-3 + 4u)z_1 + (4 - 8u)z_m + (-1 + 4u)z_2$$

Pour ce qui suit, on note :

$$f(u) = \left\| \frac{dp}{du} \right\|. \quad (3.9)$$

Les quadratures de Gauss sont utilisées pour calculer la longueur d'arc. Pour cela il est nécessaire de changer l'intégrale sur  $[a, b]$  en une intégrale sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par un changement de variable. L'intégrale devient;

$$\int_a^b f(u)du = \int_{-1}^{+1} \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt. \quad (3.10)$$

En utilisant les quadratures de Gauss sur  $[-1, 1]$ ;

$$\int_a^b f(u)du = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{2} w_i f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right). \quad (3.11)$$

Les  $w_i$  sont les poids, les  $t_i$  sont les points ou les nœuds de la quadrature et  $n$  le nombre de points de Gauss utilisé. On prend une formule de Gauss à cinq nœuds. Le tableau 3.6 montre les valeurs de  $w_i$  et  $t_i$ ,  $i = 1$  à 5.

Tableau 3.2 Poids et points de Gauss (Schneider et Eberly 2002)

$i$	$w_i$	$t_i$
1	0.5688888888888889	0.0000000000000000
2	0.4786286704993665	-0.5384693101056831
3	0.4786286704993665	0.5384693101056831
4	0.2369268850561891	-0.9061798459386640
5	0.2369268850561891	0.9061798459386640

Pour la longueur  $L_1$  ( $a = 0$  et  $b = 0.5$ ), nous avons;

$$L_1 = \sum_{i=1}^5 \frac{0.5-0}{2} w_i f\left(\frac{0.5-0}{2}t_i + \frac{0+0.5}{2}\right) = \sum_{i=1}^5 0.25 w_i f(0.25t_i + 0.25).$$

Pour la longueur  $L_2$  ( $a = 0.5$  et  $b = 1$ ), nous avons;

$$L_2 = \sum_{i=1}^5 \frac{1-0.5}{2} w_i f\left(\frac{1-0.5}{2} t_i + \frac{0.5+1}{2}\right) = \sum_{i=1}^5 0.25 w_i f(0.25t_i + 0.75).$$

Si les valeurs de  $L_1$  et  $L_2$  sont différentes, on déplace le nœud interpolé le long d'une droite dans l'espace de coordonnées paramétriques (figure 3.7) de façon itérative et à chaque nouvelle position on recalcule et on compare les valeurs de  $L_1$  et  $L_2$  jusqu'à ce que ces deux valeurs soient identiques.

Si  $L_1 > L_2$  l'équation de la droite sur laquelle on déplace le nœud est;

$$\begin{cases} u_m = (-u_p + u_1) * i + u_p, \\ v_m = (-v_p + v_1) * i + v_p. \end{cases} \quad (3.12)$$

Si  $L_2 > L_1$  l'équation de la droite sur laquelle on déplace le nœud est;

$$\begin{cases} u_m = (-u_p + u_2) * i + u_p, \\ v_m = (-v_p + v_2) * i + v_p. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ici,  $(u_p, v_p)$  sont les coordonnées du nœud milieu après interpolation et  $(u_m, v_m)$  les nouvelles coordonnées du nœud milieu à chaque itération.

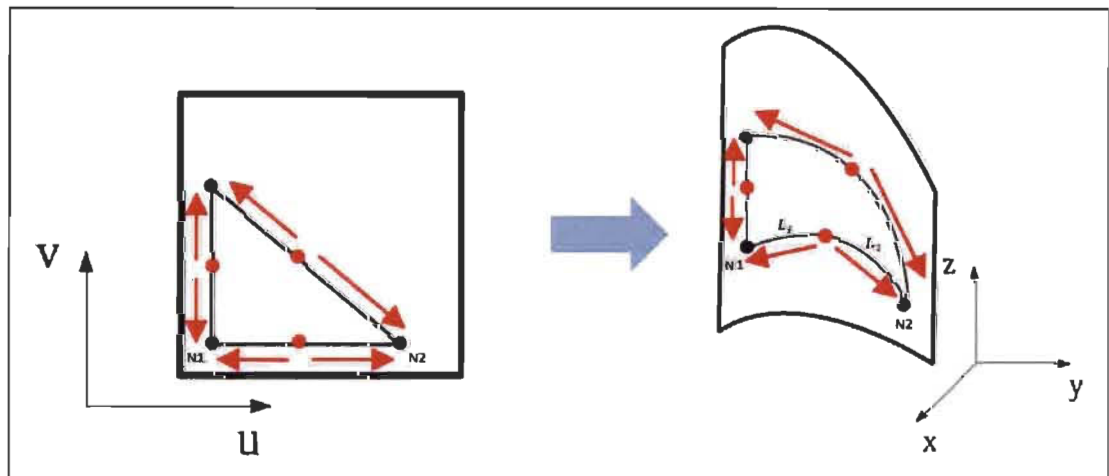


Figure 3.7 Déplacement du nœud milieu (adapté de Lu 2011)

### 3.5.2 Résultats

On maille différentes géométries avec un maillage linéaire et un maillage quadratique et on compare visuellement les résultats obtenus. La figure 3.8 représente un cône, la figure 3.9 une plaque courbe et la figure 3.10 un tube cylindrique. Sur toutes ces

figures, on observe que le maillage quadratique permet d'obtenir une meilleure approximation de la géométrie. Le maillage quadratique donne une représentation plus fidèle de la géométrie.

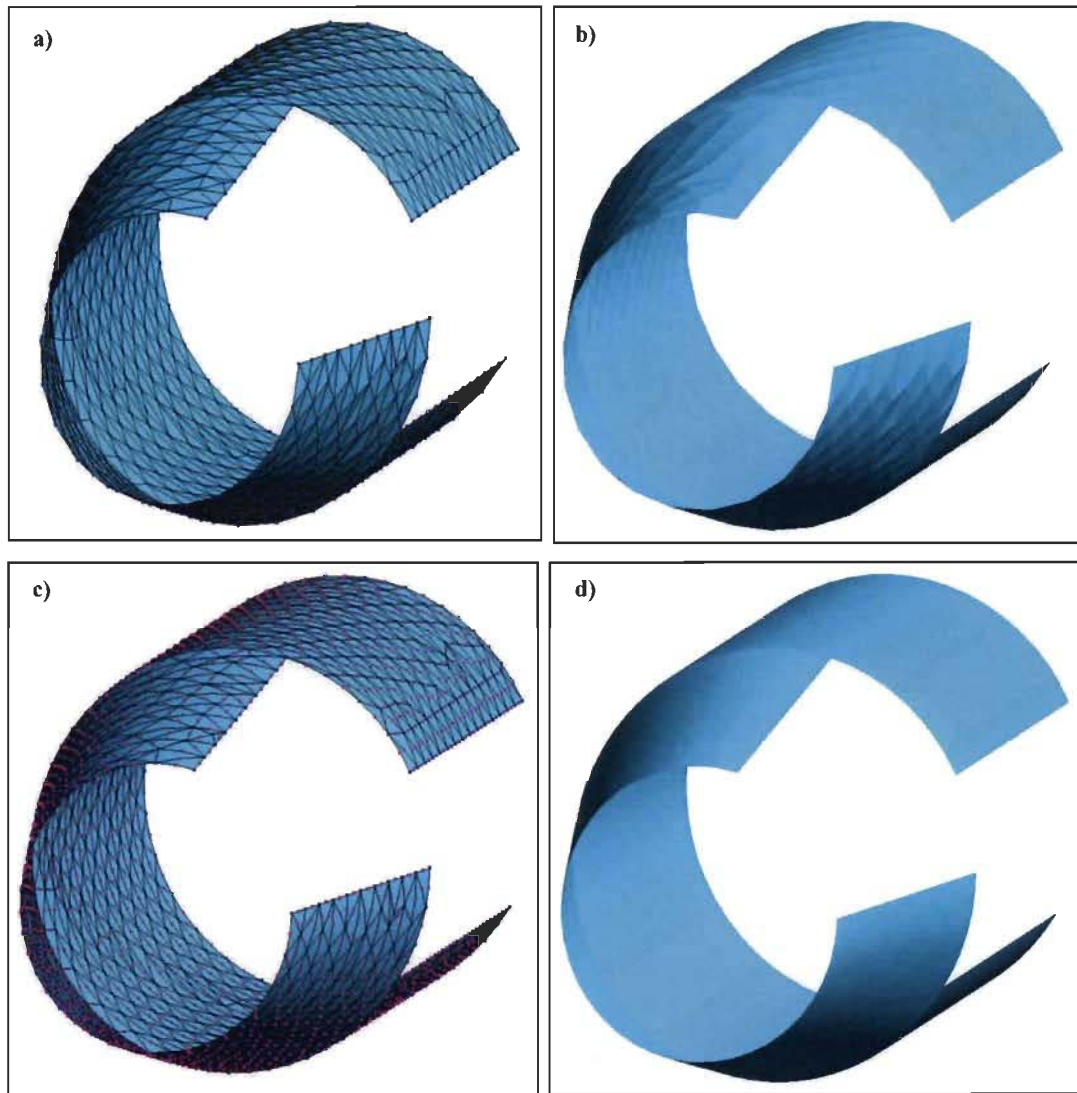


Figure 3.8 Comparaison pour un cône entre a), b) Un maillage linéaire et c), d) Un maillage quadratique



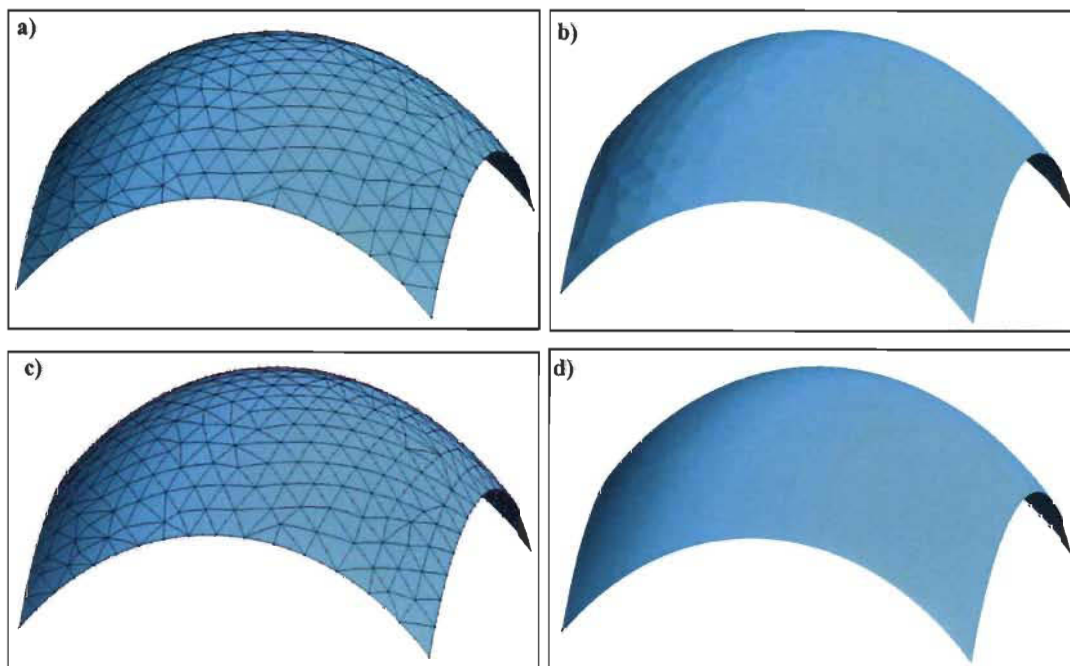


Figure 3.9 Comparaison pour une plaque entre a), b) Un maillage linéaire et c), d) Un maillage quadratique

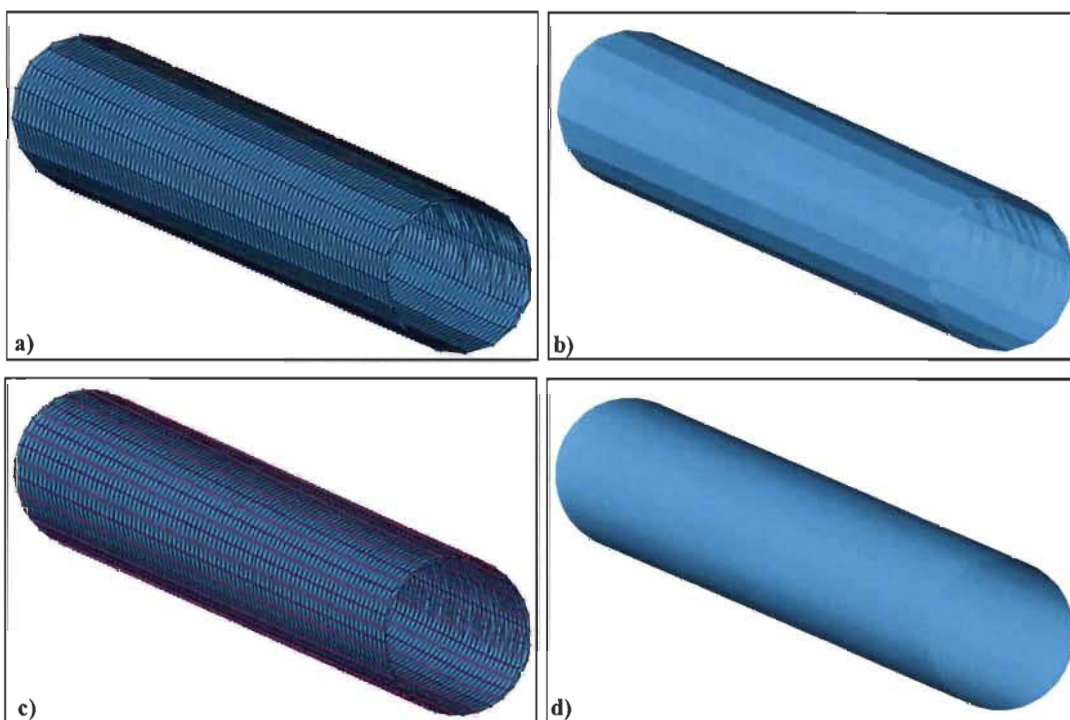


Figure 3.10 Comparaison pour un cylindre entre a), b) Un maillage linéaire et c), d) Un maillage quadratique

### 3.5.3 Validité du maillage quadratique

Les fonctions de Bézier sont utilisées pour déterminer la validité d'un maillage quadratique, cette méthode a été développée par Johnen, Remacle et al. (2013) et elle est utilisée dans le logiciel GMSH. La méthode se présente comme suit :

Les fonctions de Bézier définies sur un triangle à six nœuds sont définies pour,  $i + j \leq 2$ , par;

$$T_{i,j}^{(2)}(\xi, \eta) = \binom{2}{i} \binom{2-i}{j} \xi^i \eta^j (1 - \xi - \eta)^{2-i-j}, \quad (3.14)$$

où  $\xi \geq 0$ ,  $\eta \geq 0$ ,  $\xi + \eta \leq 1$ .

Le jacobien peut être défini en termes de polynômes de Lagrange;

$$J(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 J_i \mathcal{L}_i^{(2)}(\xi, \eta), \quad (3.15)$$

où les  $J_i$  sont les valeurs du jacobien aux nœuds. Les polynômes de Lagrange correspondent aux fonctions d'interpolation aux nœuds du triangle. Le jacobien peut s'écrire en fonction de la base des polynômes de Bézier;

$$J(\xi, \eta) = \sum_{i+j \leq 2} b_{i,j} T_{i,j}^{(2)}(\xi, \eta), \quad (3.16)$$

et où les  $b_{i,j}$  sont les coefficients de contrôle.

Comme vu au chapitre 2, un triangle quadratique est valide si la valeur minimale des coefficients de contrôle est strictement positive ( $\min(b_{i,j}) > 0$ ).

Le calcul de la valeur des coefficients de contrôle à partir du jacobien aux nœuds et l'inverse se fait avec une matrice de transformation. La matrice  $T_{B \rightarrow L}^{(2)}$  permet le calcul des  $J_i$  à partir des  $b_{i,j}$ , cette matrice se calcule en évaluant les fonctions de Bézier (équation 3.14) aux nœuds. La matrice inverse  $T_{L \rightarrow B}^{(2)}$  permet de calculer les valeurs de  $b_{i,j}$  à partir des  $J_i$ . Donc, on a;

$$J = T_{B \rightarrow L}^{(2)} B \quad (3.17)$$

$$B = T_{L \rightarrow B}^{(2)} J \quad (3.18)$$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2)} = \left( T_{B \rightarrow L}^{(2)} \right)^{(-1)} \quad (3.19)$$

$J$  est le vecteur contenant les valeurs du jacobien aux nœuds et  $B$  le vecteur contenant les valeurs des coefficients de contrôle.

Les étapes pour calculer la valeur des coefficients de contrôle sont :

1. Calcul du jacobien aux six nœuds du triangle;
2. Calcul de la matrice de transformation  $T_{B \rightarrow L}^{(2)}$  ;
3. Calcul de la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2)}$  ;
4. Calcul de la valeur des coefficients de contrôle à partir de la valeur du jacobien aux nœuds.

### Calcul du jacobien aux nœuds

Soit un triangle à six nœuds  $T$ , dont les coordonnées des nœuds dans l'espace de coordonnées cartésiennes sont  $(x_i, y_i, z_i)$  avec  $i = 1$  à 6. Soit l'espace des coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta)$  propre à chaque triangle, la relation entre les deux espaces de coordonnées est donnée par :

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \\ z = z(\xi, \eta) \end{cases}$$

La transformation entre ces deux espaces se fait avec la matrice jacobienne  $[J]$ ;

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La matrice jacobienne  $[J]$  se calcule de la manière suivante;

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{x_i\} \quad \{y_i\} \quad \{z_i\}] \quad (3.21)$$

Avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire du triangle linéaire composé des nœuds sommets 1,3 et 5 du triangle quadratique;

$$\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} \quad (3.22)$$

Les composantes de la matrice jacobienne sont :

$$J_{11} = (-3 + 4\xi + 4\eta)(x_1) + (4 - 8\xi - 4\eta)(x_2) + (4\xi - 1)(x_3) \\ + (4\eta)(x_4) - (4\eta)(x_6)$$

$$J_{12} = (-3 + 4\xi + 4\eta)(y_1) + (4 - 8\xi - 4\eta)(y_2) + (4\xi - 1)(y_3) \\ + (4\eta)(y_4) - (4\eta)(y_6)$$

$$J_{13} = (-3 + 4\xi + 4\eta)(z_1) + (4 - 8\xi - 4\eta)(z_2) + (4\xi - 1)(z_3) \\ + (4\eta)(z_4) - (4\eta)(z_6)$$

$$J_{21} = (-3 + 4\xi + 4\eta)(x_1) - (4\xi)(x_2) + (4\xi)(x_4) + (4\eta - 1)(x_5) - (4 \\ - 8\xi - 4\eta)(x_6)$$

$$J_{22} = (-3 + 4\xi + 4\eta)(y_1) - (4\xi)(y_2) + (4\xi)(y_4) + (4\eta - 1)(y_5) - (4 \\ - 8\xi - 4\eta)(y_6)$$

$$J_{23} = (-3 + 4\xi + 4\eta)(z_1) - (4\xi)(z_2) + (4\xi)(z_4) + (4\eta - 1)(z_5) - (4 \\ - 8\xi - 4\eta)(z_6)$$

$$J_{31} = n_x$$

$$J_{32} = n_y$$

$$J_{33} = n_z$$

Pour chaque nœud, on calcule les composantes de la matrice jacobienne puis le déterminant de cette matrice, les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour chaque nœud sont données dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  aux nœuds du triangle quadratique

Nœud	1	2	3	4	5	6
$\xi$	0	0.5	1	0.5	0	0
$\eta$	0	0	0	0.5	1	0.5

Le calcul du déterminant se fait par la formule suivante :

$$J_i = J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23}) + J_{12}(J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33}) + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22}) \quad (3.23)$$

### Calcul de la matrice de transformation $T_{B \rightarrow L}^{(2)}$

La matrice  $T_{B \rightarrow L}^{(2)}$  est définis par :

$$T_{B \rightarrow L}^{(2)} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^{(2)}(0,0) & T_{1,0}^{(2)}(0,0) & T_{2,0}^{(2)}(0,0) & T_{1,1}^{(2)}(0,0) & T_{0,2}^{(2)}(0,0) & T_{0,1}^{(2)}(0,0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2},0) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2},0) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2},0) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2},0) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2},0) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2},0) \\ T_{0,0}^{(2)}(1,0) & T_{1,0}^{(2)}(1,0) & T_{2,0}^{(2)}(1,0) & T_{1,1}^{(2)}(1,0) & T_{0,2}^{(2)}(1,0) & T_{0,1}^{(2)}(1,0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(0,1) & T_{1,0}^{(2)}(0,1) & T_{2,0}^{(2)}(0,1) & T_{1,1}^{(2)}(0,1) & T_{0,2}^{(2)}(0,1) & T_{0,1}^{(2)}(0,1) \\ T_{0,0}^{(2)}(0,\frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(0,\frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(0,\frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(0,\frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(0,\frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(0,\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

Le calcul donne la matrice suivante :

$$T_{B \rightarrow L}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

### Calcul de la matrice de transformation $T_{L \rightarrow B}^{(2)}$

Le calcul de la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2)}$  se fait en inversant la matrice  $T_{B \rightarrow L}^{(2)}$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

### Calcul des coefficients de contrôle

Le calcul des coefficients de contrôle se fait en multipliant la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2)}$  par le vecteur  $J$  et ce qui donne le vecteur  $B$  :

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{bmatrix}$$

Et donc les coefficients de contrôle du triangle en fonction du jacobien aux nœuds sont :

$$B_1 = b_{0,0} = J_1$$

$$B_2 = b_{1,0} = -0.5 J_1 + 2 J_2 - 0.5 J_3$$

$$B_3 = b_{0,2} = J_3$$

$$B_4 = b_{1,1} = -0.5 J_3 + 2 J_4 - 0.5 J_5$$

$$B_5 = b_{2,0} = J_5$$

$$B_6 = b_{1,1} = -0.5 J_1 + 2 J_6 - 0.5 J_5$$

Un triangle est valide si  $\min B_i > 0$

### Raffinement

Comme vu dans le chapitre 2, pour avoir une approximation plus précise il faut augmenter le nombre de coefficients de contrôle. L'augmentation du nombre de coefficients de contrôle se fait avec un raffinement. Le triangle est subdivisé en quatre sous-triangles, et pour chaque sous-triangle, les coefficients de contrôle sont calculés.

Le calcul des coefficients de contrôle dans un sous-triangle  $q$  se fait à partir des coefficients de contrôle calculés précédemment (vecteur  $B$ ) :

$$B^{[q]} = \begin{bmatrix} T_{L \rightarrow B}^{(2)} & T_{L \rightarrow B}^{(2) [q]} \end{bmatrix} B = M^{[q]} B \quad (3.24)$$

$B^{[q]}$ : vecteur contenant les coefficients de contrôle dans le sous-triangle  $q$ ,

$T_{L \rightarrow B}^{(2)}$ : matrice de transformation calculée précédemment,

$T_{L \rightarrow B}^{(2) [q]}$ : matrice de transformation calculée dans le sous-triangle  $q$ ,

$B$ : vecteur contenant les coefficients de contrôle calculés précédemment,

$M^{[q]}$ : produit de la multiplication des matrices  $T_{L \rightarrow B}^{(2)}$  et  $T_{L \rightarrow B}^{(2) [q]}$ .

### Calcul pour le premier sous-triangle $q = 1$

Calcul de la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2) [1]}$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [1]} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^{(2)}(0,0) & T_{1,0}^{(2)}(0,0) & T_{2,0}^{(2)}(0,0) & T_{1,1}^{(2)}(0,0) & T_{0,2}^{(2)}(0,0) & T_{0,1}^{(2)}(0,0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \\ T_{0,0}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(0, \frac{1}{4}) & T_{1,0}^{(2)}(0, \frac{1}{4}) & T_{2,0}^{(2)}(0, \frac{1}{4}) & T_{1,1}^{(2)}(0, \frac{1}{4}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, 0) \end{bmatrix}$$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5625 & 0.3750 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.1250 & 0.0625 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5625 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0.3750 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice  $M^{[1]}$

$$M^{[1]} = T_{L \rightarrow B}^{(2)} T_{L \rightarrow B}^{(2) [1]}$$

$$M^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Calcul du vecteur  $B^{[1]}$

$$B^{[1]} = M^{[1]}B$$

$$B_1^{[1]} = B_1$$

$$B_2^{[1]} = 0.5 B_1 + 0.5 B_2$$

$$B_3^{[1]} = 0.25 B_1 + 0.5 B_2 + 0.25 B_3$$

$$B_4^{[1]} = 0.25 B_1 + 0.25 B_2 + 0.25 B_4 + 0.25 B_6$$

$$B_5^{[1]} = 0.25 B_1 + 0.25 B_5 + 0.5 B_6$$

$$B_6^{[1]} = 0.5 B_1 + 0.5 B_6$$

**Calcul pour le deuxième sous-triangle  $q = 2$**

Calcul de la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2) [2]}$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [2]} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, 0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{3}{4}, 0) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{3}{4}, 0) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{3}{4}, 0) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{3}{4}, 0) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{3}{4}, 0) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{3}{4}, 0) \\ T_{0,0}^{(2)}(1, 0) & T_{1,0}^{(2)}(1, 0) & T_{2,0}^{(2)}(1, 0) & T_{1,1}^{(2)}(1, 0) & T_{0,2}^{(2)}(1, 0) & T_{0,1}^{(2)}(1, 0) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \end{bmatrix}$$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [2]} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0625 & 0.3750 & 0.5625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5625 & 0.3750 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.1250 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice  $M^{[2]}$

$$M^{[2]} = T_{L \rightarrow B}^{(2)} T_{L \rightarrow B}^{(2) [2]}$$

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$



Calcul du vecteur  $B^{[1]}$

$$B^{[2]} = M^{[2]}B$$

$$B_1^{[2]} = 0.25 B_1 + 0.5 B_2 + 0.25 B_3$$

$$B_2^{[2]} = 0.5 B_2 + 0.5 B_3$$

$$B_3^{[2]} = B_3$$

$$B_4^{[2]} = 0.5 B_3 + 0.5 B_4$$

$$B_5^{[2]} = 0.25 B_3 + 0.25 B_5 + 0.25 B_4$$

$$B_6^{[2]} = 0.25 B_2 + 0.25 B_3 + 0.25 B_4 + 0.25 B_6$$

**Calcul pour le troisième sous-triangle  $q = 3$**

Calcul de la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2) [3]}$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [3]} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(0, \frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ T_{0,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & T_{1,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & T_{2,0}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & T_{1,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & T_{0,2}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) & T_{0,1}^{(2)}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ T_{0,0}^{(2)}(0,1) & T_{1,0}^{(2)}(0,1) & T_{2,0}^{(2)}(0,1) & T_{1,1}^{(2)}(0,1) & T_{0,2}^{(2)}(0,1) & T_{0,1}^{(2)}(0,1) \\ T_{0,0}^{(2)}(0, \frac{3}{4}) & T_{1,0}^{(2)}(0, \frac{3}{4}) & T_{2,0}^{(2)}(0, \frac{3}{4}) & T_{1,1}^{(2)}(0, \frac{3}{4}) & T_{0,2}^{(2)}(0, \frac{3}{4}) & T_{0,1}^{(2)}(0, \frac{3}{4}) \end{bmatrix}$$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [3]} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.0625 & 0.1250 & 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0625 & 0.3750 & 0.5625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0.5625 & 0.3750 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice  $M^{[3]}$

$$M^{[3]} = T_{L \rightarrow B}^{(2)} T_{L \rightarrow B}^{(2) [3]}$$

$$M^{[3]} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Calcul du vecteur  $B^{[3]}$

$$B^{[3]} = M^{[3]}B$$

$$B_1^{[3]} = 0.25 B_1 + 0.25 B_5 + 0.5 B_6$$

$$B_2^{[3]} = 0.25 B_2 + 0.25 B_4 + 0.25 B_5 + 0.25 B_6$$

$$B_3^{[3]} = 0.25 B_3 + 0.25 B_5 + 0.25 B_4$$

$$B_4^{[3]} = 0.5 B_3 + 0.5 B_4$$

$$B_5^{[3]} = B_5$$

$$B_6^{[3]} = 0.5 B_5 + 0.5 B_6$$

**Calcul pour le quatrième sous-triangle  $q = 4$**

Calcul de la matrice  $T_{L \rightarrow B}^{(2) [4]}$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [4]} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & T_{1,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & T_{2,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & T_{1,1}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & T_{0,2}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & T_{0,1}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ T_{0,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) & T_{1,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) & T_{2,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) & T_{1,1}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) & T_{0,2}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) & T_{0,1}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ T_{0,0}^{(2)}\left(0, \frac{1}{2}\right) & T_{1,0}^{(2)}\left(0, \frac{1}{2}\right) & T_{2,0}^{(2)}\left(0, \frac{1}{2}\right) & T_{1,1}^{(2)}\left(0, \frac{1}{2}\right) & T_{0,2}^{(2)}\left(0, \frac{1}{2}\right) & T_{0,1}^{(2)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ T_{0,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) & T_{1,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) & T_{2,0}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) & T_{1,1}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) & T_{0,2}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) & T_{0,1}^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ T_{0,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) & T_{1,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) & T_{2,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) & T_{1,1}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) & T_{0,2}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) & T_{0,1}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ T_{0,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) & T_{1,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) & T_{2,0}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) & T_{1,1}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) & T_{0,2}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) & T_{0,1}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$T_{L \rightarrow B}^{(2) [4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.0625 & 0.1250 & 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.1250 & 0.0625 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.125 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice  $M^{[4]}$

$$M^{[4]} = T_{L \rightarrow B}^{(2)} T_{L \rightarrow B}^{(2) [4]}$$

$$M^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Calcul du vecteur  $B^{[4]}$

$$B^{[4]} = M^{[4]} B$$

$$B_1^{[4]} = 0.25 B_3 + 0.25 B_5 + 0.25 B_4$$

$$B_2^{[4]} = 0.25 B_2 + 0.25 B_4 + 0.25 B_5 + 0.25 B_6$$

$$B_3^{[4]} = 0.25 B_1 + 0.25 B_5 + 0.5 B_6$$

$$B_4^{[4]} = 0.25 B_1 + 0.25 B_2 + 0.25 B_4 + 0.25 B_6$$

$$B_5^{[4]} = 0.25 B_1 + 0.5 B_2 + 0.25 B_3$$

$$B_6^{[4]} = 0.25 B_2 + 0.25 B_3 + 0.25 B_4 + 0.25 B_6$$

### 3.5.4 Validation des résultats

On valide la méthode décrite précédemment en comparant les résultats de calcul obtenus dans le MTU et les résultats obtenus par la méthode décrite par Johnen, Remacle et al. (2013) et utilisée dans GMSH. La comparaison se fait sur une coque maillée avec six éléments. La comparaison se fait dans un premier lieu concernant le jacobien aux nœuds, puis les coefficients de contrôle et finalement les coefficients de contrôle de la subdivision. On présente les résultats pour un seul élément, les résultats pour les cinq autres sont présentés en annexe. La figure 3.11 montre une coque maillée avec les six éléments.



Figure 3.11 Coque maillée avec six éléments

Les coordonnées des nœuds de l'élément dont les résultats sont présentés sont données dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 Coordonnées des nœuds du triangle quadratique étudié

	Coordonnées en X	Coordonnées en Y	Coordonnées en Z
<b>1</b>	-100.000000000000	20.16670391657437	-58.75336482769455
<b>2</b>	-77.05985291772339	28.85252377516086	-81.05901264267402
<b>3</b>	50.000000000000	20.710820277549	-100.000000000000
<b>4</b>	-77.05985291772339	15.32827384642874	-100.000000000000
<b>5</b>	-100.000000000000	1.040834085586080e-14	-100.000000000000
<b>6</b>	-77.05985291772339	28.85252377516086	-81.05901264267402

*Comparaison des valeurs du jacobien aux nœuds*

On trouve dans le tableau 3.5 le résultat de calcul du jacobien aux nœuds obtenu avec MTU et GMSH. Les résultats sont identiques à deux décimales près.

Tableau 3.5 Jacobien aux nœuds obtenus avec MTU et GMSH

$J$	MTU	GMSH
$J_1$	2476.31	2476.31
$J_2$	2449.43	2449.43
$J_3$	2515.91	2515.91
$J_4$	2400.83	2400.83
$J_5$	2285.74	2285.74
$J_6$	2381.02	2381.02

*Comparaison entre les valeurs des coefficients de contrôle*

On trouve dans le tableau 3.6 le résultat de calcul des coefficients de contrôle obtenu avec MTU et GMSH. Les résultats sont identiques à deux décimales près.

Tableau 3.6 Coefficients de contrôle obtenus avec MTU et GMSH

$B$	MTU	GMSH
$B_1$	2476.31	2476.31
$B_2$	2402.74	2402.74
$B_3$	2515.91	2515.91
$B_4$	2400.83	2400.83
$B_5$	2285.74	2285.74
$B_6$	2381.02	2381.02

*Comparaison entre les valeurs des coefficients de contrôle de la subdivision*

On trouve dans le tableau 3.7 le résultat du calcul des coefficients de contrôle de la subdivision obtenu avec MTU et GMSH. Les résultats de calcul sont identiques à deux décimales près.

Tableau 3.7 Coefficients de contrôle de la subdivision obtenu avec MTU et GMSH

<b>B</b>	<b>MTU</b>	<b>GMSH</b>
<b>Sous triangle 1</b>	2476.31	2476.31
	2439.53	2439.53
	2449.43	2449.43
	2415.23	2415.23
	2381.02	2381.02
	2428.67	2428.67
<b>Sous triangle 2</b>	2449.43	2449.43
	2459.33	2459.33
	2515.91	2515.91
	2458.37	2458.37
	2400.83	2400.83
	2425.13	2425.13
<b>Sous triangle 3</b>	2381.02	2381.02
	2367.58	2367.58
	2400.83	2400.83
	2343.28	2343.28
	2285.74	2285.74
	2333.38	2333.38
<b>Sous triangle 4</b>	2400.83	2400.83
	2367.58	2367.58
	2381.02	2381.02
	2415.23	2415.23
	2449.43	2449.43
	2425.13	2425.13

### 3.6 Validation des résultats de calcul avec Code\_Aster

Pour valider les résultats de calculs avec Code\_Aster, le cas d'une coque encastrée soumise à une pression est utilisé. La coque est illustrée à la figure 3.12 ainsi que le nœud  $N$  qui se trouve au centre de la coque. Les résultats obtenus avec Code\_Aster sont comparés avec ceux obtenus avec SolidWorks Simulation.

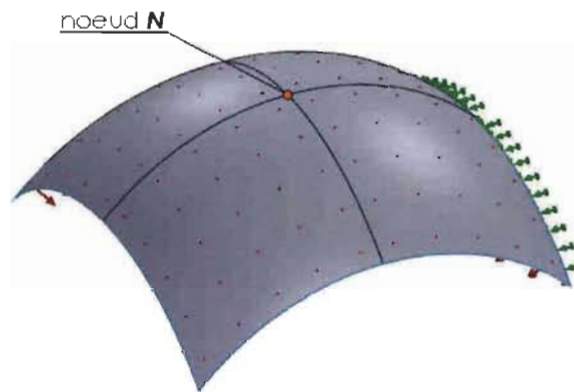


Figure 3.12 Coque mince encastée modélisée dans SolidWorks Simulation

Le calcul se fait avec les caractéristiques suivantes :

- Une épaisseur de coque de 1 mm;
- Un module de Young  $E= 6.9 \text{ GPa}$ ;
- Un coefficient de poisson  $\nu=0.33$ ;
- Une pression  $P= -500 \text{ N/m}^2$ ;
- Un encastrement comme déplacement imposé;
- Une taille d'éléments de 2 mm pour le maillage utilisé avec code\_ Aster et une taille de 1.83 mm pour le maillage de SolidWorks Simulation, pour avoir le même nombre de nœuds. Les deux maillages sont montrés à la figure 3.13.

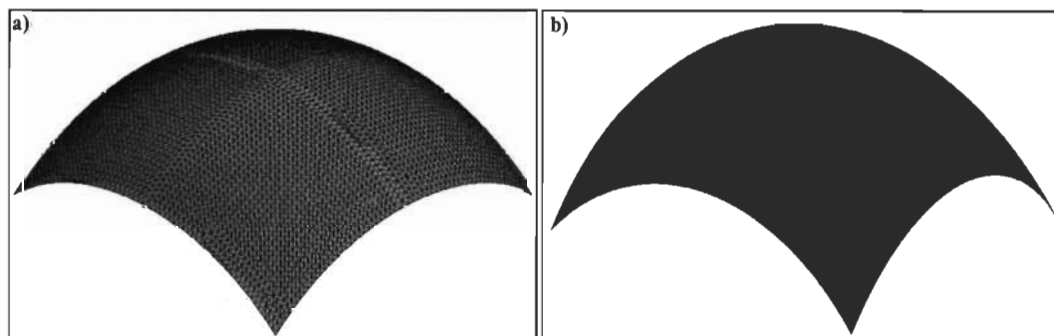


Figure 3.13 Maillage dans a) Solidworks Simulation b) MTU

Dans SolidWorks Simulation, la coque est encastée en utilisant « *Déplacements Imposés* → *Géométrie fixe* », soumise à une pression de 500 N/m « *Chargements externes* → *Pression* ». Le matériau utilisé est « *alliage aluminium 1060* ». Le type de

maillage utilisé est « *Maillage* → *Maillage de qualité haute* ». Dans SolidWorks Simulation, un maillage de qualité haute correspond à un maillage quadratique. La taille des éléments est de 1.83 mm.

SolidWorks Simulation permet la visualisation des Contraintes totales (membrane + flexion) de la face supérieure et la face inférieure ainsi que les composantes de contrainte de membrane et de flexion (figure 3.14). Donc, il ne permet pas de visualiser les contraintes sur la surface médiane contrairement à Code\_Aster. Pour cette raison la comparaison des résultats de contraintes se fera entre les contraintes de la face supérieure et la face inférieure.

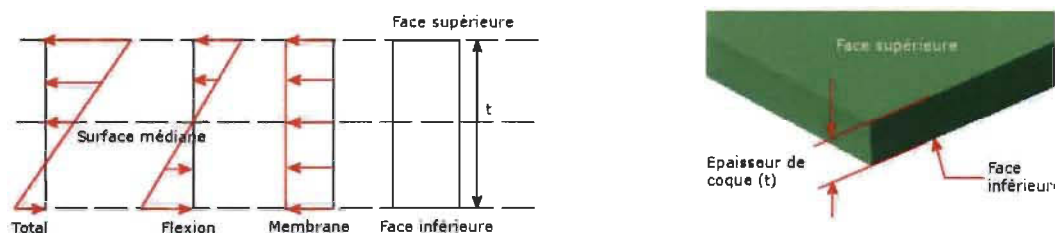


Figure 3.14 Contraintes pour les coques dans SolidWorks Simulation  
<http://help.solidworks.com/2014/french/SolidWorks/cworks/doc1292870572840.image>

### Comparaison des résultats

La figure 3.15 montre les déplacements obtenus sur la coque avec SolidWorks Simulation et Code\_Aster suivant les axes X, Y et Z. La répartition des déplacements sur la coque est similaire. Le tableau 3.8 montre les déplacements obtenus suivant les axes X, Y et Z avec Solidworks Simulation et Code\_Aster au nœud N. Les déplacements obtenus avec Code\_Aster sont similaires à ceux obtenus avec SolidWorks Simulation.



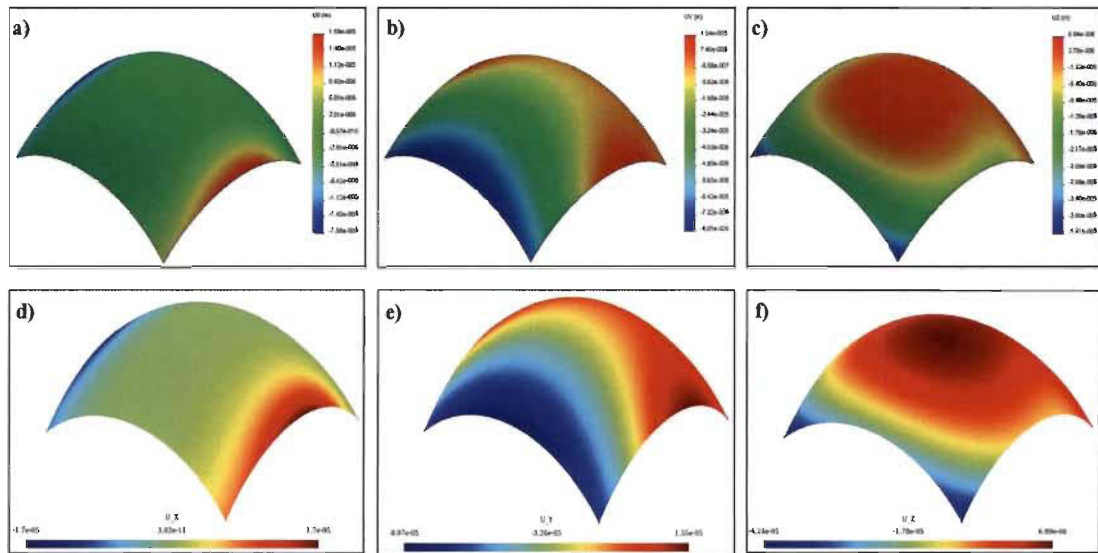


Figure 3.15 Déplacements obtenus sur la coque a) Suivant X dans SolidWorks Simulation b) Suivant Y dans SolidWorks Simulation c) Suivant Z dans SolidWorks Simulation d) Suivant X dans Code\_Aster e) Suivant Y dans Code\_Aster f) Suivant Z dans Code\_Aster

Tableau 3.8 Déplacements suivant les axes X, Y et Z au nœud N

	$U_X$ (m)	$U_Y$ (m)	$U_Z$ (m)
SolidWorks	$-4.17 \cdot 10^{-10}$	$-2.09 \cdot 10^{-5}$	$6.84 \cdot 10^{-5}$
Code_Aster	$-4.21 \cdot 10^{-10}$	$-2.11 \cdot 10^{-5}$	$6.89 \cdot 10^{-5}$

La figure 3.16 montre les contraintes de Von Mises obtenues sur la coque avec SolidWorks Simulation et Code\_Aster sur la face supérieure et inférieure. La répartition des contraintes dans la coque est similaire. Le tableau 3.9 montre la contrainte de Von Mises au nœud N dans la face supérieure et inférieure. Les résultats obtenus avec Code\_Aster sont similaires à ceux obtenus avec SolidWorks Simulation. On en déduit que les calculs par éléments finis effectués dans Code\_Aster avec des éléments de coques sont valides.

Tableau 3.9 Contrainte de Von Mises obtenues au nœud *N*

	Contrainte de Von Mises Face supérieure (N/m <sup>2</sup> )	Contrainte de Von Mises Face inférieure (N/m <sup>2</sup> )
SolidWorks	8.10 10 <sup>+5</sup>	6.98 10 <sup>+5</sup>
Code_Aster	8.06 10 <sup>+5</sup>	6.62 10 <sup>+5</sup>

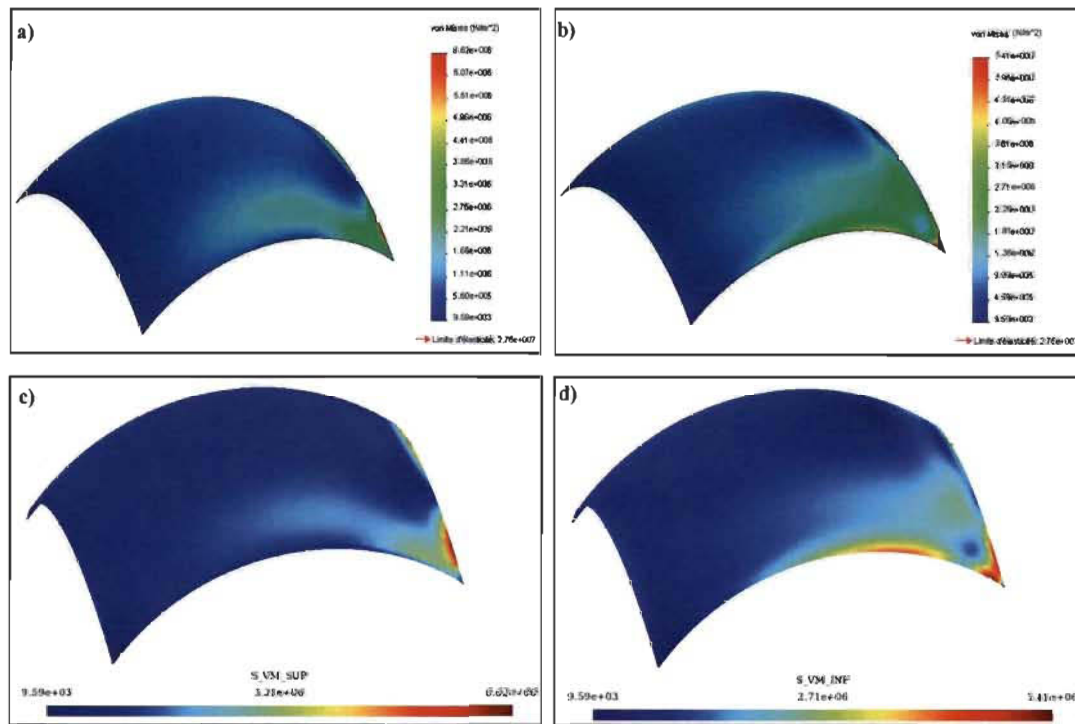


Figure 3.16 Contraintes de Von Mises obtenues sur la coque a) Sur la face supérieure avec SolidWorks Simulation b) Sur la face inférieure avec SolidWorks Simulation c) Sur la face supérieure avec Code\_Aster d) Sur la face inférieure avec Code\_Aster

### 3.7 Conclusion

Les étapes d'un calcul par éléments finis utilisant un Modèle de Topologie Unifié (MTU) ont été présentées ainsi que les éléments de structure disponibles dans le solveur. La méthodologie utilisée pour la génération et la détermination de la validité d'un maillage quadratique triangulaire a été présentée. Différents exemples de maillages quadratiques ont été montrés et comparés avec des maillages linéaires et il a été démontré que les maillages quadratiques permettent d'avoir une meilleure

approximation de la géométrie. La méthode utilisée pour déterminer la validité d'un maillage a été validée avec le logiciel GMSH. Finalement, un exemple de calcul par des éléments de coques quadratiques a été effectué et les résultats obtenus ont été validés avec le logiciel SolidWorks Simulation.

## CHAPITRE 4

# INTÉGRATION, APPLICATION ET CONTRÔLE DE LA MÉTHODE DU MOUVEMENT NORMAL

### 4.1 Introduction

Une méthodologie est développée pour l'utilisation de la méthode du mouvement normal (MMN) avec un maillage quadratique. La MMN est appliquée au problème d'optimisation d'un tube à paroi mince en porte-à-faux. Dans un premier temps, la méthode est appliquée sans contrôle du déplacement des nœuds, ce qui conduit à une forme non valide géométriquement. Puis, différentes méthodes sont utilisées pour contrôler le déplacement des nœuds et les résultats obtenus sont comparés avec la MMN sans contrôle.

### 4.2 Algorithme de la MMN non contrôlée

La méthode du mouvement normal a été implantée antérieurement avec un maillage linéaire (triangle à trois nœuds). La méthode consiste en une boucle itérative du calcul des contraintes et des déplacements associés (Gervais-Lavoie, 2015). Les étapes de la MMN sont :

1. Modélisation de l'objet à optimiser dans un logiciel de CAO;
2. Importation du modèle sous forme de fichier STEP;
3. Orientation de la coque;
4. Définition des conditions de calcul telles que les déplacements imposés, les efforts externes appliqués, le matériau, l'épaisseur de la coque et les zones de non-design;
5. Génération du maillage éléments finis;
6. Calcul de l'état de contraintes initiales par Code\_Aster;
7. Calcul de la normale en chaque nœud;
8. Calcul des déplacements et déplacement des nœuds;
9. Calcul de l'état de contrainte final;
10. Visualisation de la forme optimisée avec GMSH.

Les étapes 1 à 6 représentent les étapes préalables à l'optimisation et les étapes 7 à 9 représentent la boucle itérative de la méthode du mouvement normal.

Le déplacement  $d_i^j$  (étape 8) du nœud  $i$ , à l'itération  $j$ , le long de la normale est défini par l'équation (2.32);

$$d_i^j = C \frac{\sigma_{VM_i}^j - \sigma_o}{\sigma_o},$$

où  $C$  est le coefficient de convergence et  $\sigma_o$  la contrainte objectif qui correspond à la contrainte de Von Mises moyenne aux nœuds, actualisée à chaque itération. Les nœuds sont déplacés jusqu'à ce que la contrainte en chaque nœud tende vers la valeur objectif. La méthode s'arrête lorsque le critère de convergence donnée par l'équation (2.35) est atteint pour chaque nœud  $i$ ;

$$\frac{|\sigma_{VM_i} - \sigma_o|}{\sigma_o} \leq L.$$

Un nombre maximal d'itérations doit être prévu dans l'éventualité où la méthode ne converge pas.

La forme optimisée résultant de la MMN peut être visualisée à l'aide du logiciel Gmsh. Le déplacement des nœuds par rapport à leur position d'origine, ainsi que la distribution des contraintes aux nœuds du maillage, pour la forme initiale et finale, sont des résultats pouvant être visualisés.

Les étapes préalables à l'optimisation par la méthode du mouvement normal avec un maillage linéaire sont identiques à ceux de l'optimisation par la MMN avec un maillage quadratique. Les étapes de la boucle itérative sont par ailleurs différentes.

En effet, la normale à un triangle linéaire est constante et le calcul de la normale en un nœud de celui-ci est la moyenne des normales des triangles adjacents pondérée par les aires. Pour un triangle quadratique, la normale varie dans l'élément. Le calcul de la normale aux nœuds se fait de manière différente pour maillage quadratique et il est décrit à la section 4.2.1.

L'utilisation de la MMN avec un maillage quadratique est soumise à des contraintes que l'on ne retrouve pas avec un maillage linéaire. En effet, puisque la méthode est itérative la position des nœuds change à chaque itération, ce qui peut conduire à;

1. Un nœud milieu n'est plus au milieu de l'arête du triangle or, il est impératif que tout nœud intermédiaire (milieu) soit toujours au milieu de l'arête du triangle et cela à chaque itération. Un algorithme de recentrage des nœuds milieu est nécessaire. L'algorithme utilisé est décrit dans la section 4.2.2;
2. La nouvelle position des nœuds conduit à la baisse de la qualité des éléments, ou introduire des éléments invalides. Un algorithme d'optimisation de la qualité des éléments est nécessaire. L'algorithme utilisé est décrit dans la section 4.2.3.

#### 4.2.1 Calcul de normale

Pour un triangle quadratique, comme vue dans le chapitre 3 on a :

$$\mathbf{p}(\xi, \eta) = \{x(\xi, \eta) \ y(\xi, \eta) \ z(\xi, \eta)\}$$

La dérivée suivant  $\xi$  donne;

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} = \left\{ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \ \frac{dz(\xi)}{d\xi} \right\} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(\xi)}{d\xi} &= (-3 + 4\xi + 4\eta)(x_1) + (4 - 8\xi - 4\eta)(x_2) + (4\xi - 1)(x_3) \\ &\quad + (4\eta)(x_4) - (4\eta)(x_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(\xi)}{d\xi} &= (-3 + 4\xi + 4\eta)(y_1) + (4 - 8\xi - 4\eta)(y_2) + (4\xi - 1)(y_3) \\ &\quad + (4\eta)(y_4) - (4\eta)(y_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(\xi)}{d\xi} &= (-3 + 4\xi + 4\eta)(z_1) + (4 - 8\xi - 4\eta)(z_2) + (4\xi - 1)(z_3) \\ &\quad + (4\eta)(z_4) - (4\eta)(z_6) \end{aligned}$$

La dérivée suivant  $\eta$  donne:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\eta} = \left\{ \frac{dx(\eta)}{d\eta} \quad \frac{dy(\eta)}{d\eta} \quad \frac{dz(\eta)}{d\eta} \right\} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(\eta)}{d\eta} = & (-3 + 4\xi + 4\eta)(x_1) - (4\xi)(x_2) + (4\xi)(x_4) + (4\eta - 1)(x_5) \\ & - (4 - 4\xi - 8\eta)(x_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(\eta)}{d\eta} = & (-3 + 4\xi + 4\eta)(y_1) - (4\xi)(y_2) + (4\xi)(y_4) + (4\eta - 1)(y_5) \\ & - (4 - 4\xi - 8\eta)(y_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(\eta)}{d\eta} = & (-3 + 4\xi + 4\eta)(z_1) - (4\xi)(z_2) + (4\xi)(z_4) + (4\eta - 1)(z_5) - (4 \\ & - 4\xi - 8\eta)(z_6) \end{aligned}$$

La normale  $\mathbf{n}(\xi, \eta)$  est donnée par l'expression suivante;

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} \times \frac{d\mathbf{p}}{d\eta}}{\left\| \frac{d\mathbf{p}}{d\xi} \times \frac{d\mathbf{p}}{d\eta} \right\|}. \quad (4.3)$$

En donnant les valeurs  $(\xi, \eta)$ , on obtient la valeur de la normale à n'importe quel point du triangle. Comme le passage entre deux éléments est discontinu, on considère une formulation discrète de la normale pour exprimer le vecteur normal en chaque nœud. Pour la méthode du mouvement normal, on a besoin de la normale aux six nœuds du triangle. La normale unitaire  $\mathbf{n}_i$  en un nœud  $i$  du maillage est;

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{e=1}^{nb} \mathbf{n}_e}{nb}, \quad (4.4)$$

où  $nb$  est le nombre de triangles rattachés à ce nœud et  $\mathbf{n}_e$  la normale unitaire en ce nœud pour le triangle  $e$ . Étant donné que les éléments sont curvilignes, la normale varie légèrement d'un triangle à un autre.

#### 4.2.2 Algorithme de recentrage

Dans l'éventualité où un nœud milieu n'est plus au milieu de l'arête du triangle dans sa nouvelle position (après déplacement), il est nécessaire de le recentrer. La méthode

utilisée dans le cas de la génération du maillage quadratique (chapitre 3) ne peut être utilisée ici, car il n'y a plus de géométrie correspondante. Pour cela, on utilise une autre méthode que nous décrivons ci-dessous.

Soit  $p(u)$  l'équation vectorielle de l'arête du triangle,  $S(u_{min}, u_{max})$  l'équation qui donne la longueur de l'arête du triangle et  $L_t$  la longueur curviligne totale de l'arête. On calcule la valeur de  $u$  :  $S(u_{min}, u) = 0.5L_t$ . Le calcul de  $u$  à partir d'une longueur précise est appelé «reparamétrisation par longueur d'arc» (Schneider et Eberly 2002 ; Parent 2001 ; Guenter et Parent 1990), : cela se fait en résolvant l'équation suivante;

$$0.5L_t - S(u_{min}, u) = 0 \quad (4.5)$$

La solution de l'équation donne la valeur de  $u$  qui est à une longueur de  $0.5L_t$ . La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour trouver la racine de l'équation, car elle converge rapidement et nécessite peu de calcul à chaque itération.

### 4.2.3 Algorithme d'optimisation des éléments

La méthode est une méthode itérative, la position des nœuds change à chaque itération, ce qui peut conduire à la détérioration de la qualité des éléments ou à l'apparition d'éléments invalides. Pour cela, un algorithme d'optimisation de la qualité des éléments est nécessaire. L'algorithme utilisé a été présenté par Lu (2011). L'algorithme se base sur le principe suivant : la distorsion est la mesure utilisée pour déterminer la validité et la qualité d'un élément quadratique et est donnée par  $I = \frac{J_{min}}{J_{max}}$ .

Pour améliorer la valeur de la distorsion, on augmente celle de  $J_{min}$ . On augmente cette valeur en déplaçant les nœuds qui y sont associés.

Le déplacement du nœud d'un triangle affecte la qualité des triangles adjacents et l'amélioration de la qualité d'un élément peut conduire à la diminution de la qualité d'un triangle voisin. Pour cette raison, l'algorithme recherche la position optimale d'un nœud. La position optimale est la position où la valeur de la distorsion la plus faible entre des triangles voisins a été améliorée au maximum. La recherche se fait le long d'une ligne droite définie par le nœud milieu de l'arête curviligne et le nœud au milieu de ses sommets, comme on peut le voir en trait mixte à la figure 4.1, où  $P$  est le milieu



de l'arête curviligne et  $P'$  milieu l'arête droite définie par les sommets de l'arête curviligne. Cette ligne est appelée l'intervalle d'incertitude.

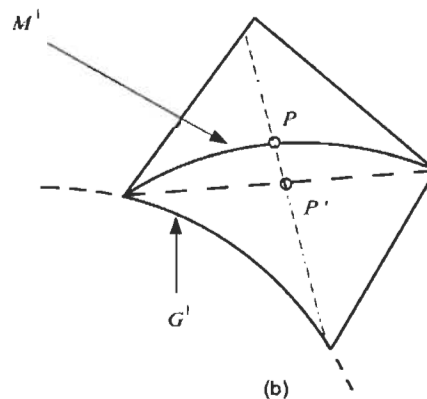


Figure 4.1 illustration de l'intervalle d'incertitude (lu 2011)

L'algorithme du nombre d'or (Golden section) est utilisé pour faire la recherche de la position optimale. L'algorithme évalue la fonction objectif (distorsion) à partir des deux extrémités de l'intervalle d'incertitude. Puis en comparant ces valeurs, environ 38% de l'intervalle est éliminé à chaque fois et le reste sert de nouvel intervalle d'incertitude pour la prochaine recherche, jusqu'à ce que la position optimale soit trouvée.

L'algorithme de recentrage ainsi que l'algorithme d'optimisation des éléments sont appliqués à chaque itération de la MMN.

La figure 4.2 montre l'algorithme de la MMN avec un maillage quadratique.

La section suivante traite de l'optimisation, par la MMN, d'un tube à paroi mince en porte-à-faux.

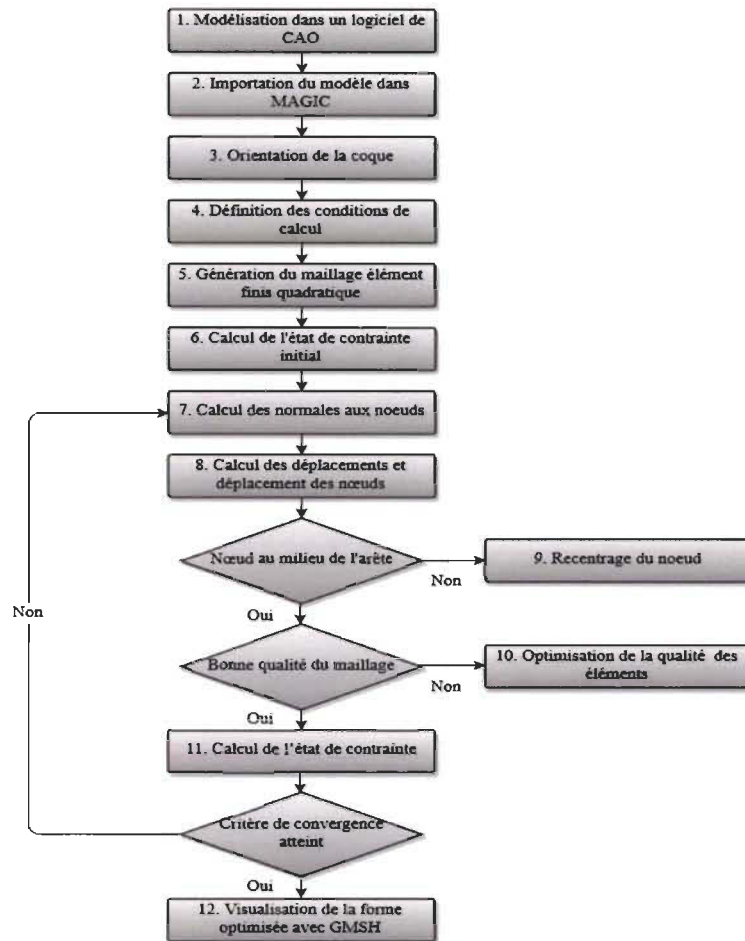


Figure 4.2 Algorithme de la MMN avec un maillage quadratique

### 4.3 Application de la MMN à un tube en porte-à-faux sans contrôle

La méthode du mouvement normal est appliquée à un tube à paroi mince d'épaisseur constante, en porte à faux soumis à un effort de flexion. Les caractéristiques du tube ainsi que les différentes conditions de calcul sont décrites dans la partie suivante.

#### 4.3.1 Forme initiale

Le tube a une longueur totale de 600 mm, un diamètre de 32 mm et une épaisseur constante de 2 mm. Son arête gauche est encastree tandis qu'une force verticale de 500 N est appliquée sur son arête droite. La longueur de la zone de design est de 500 mm (zone en gris sur la figure 4.3), la longueur de la zone de non-design est de 50 mm du côté droit et de 50 mm du côté gauche (les zones en bleu sur la figure 4.3).

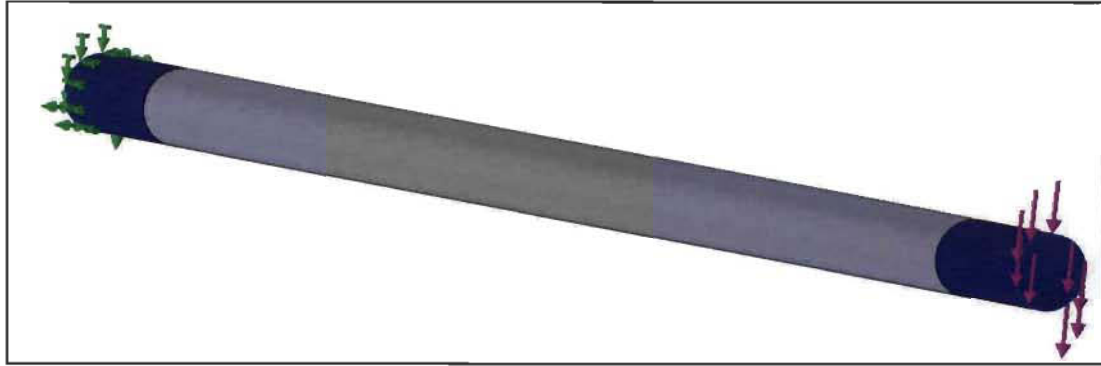


Figure 4.3 Tube à paroi mince en porte-à-faux modélisé dans SolidWorks

Le matériau utilisé est l'aluminium. Le tube est maillé avec des éléments triangulaires de 7 mm de taille. Le maillage se compose de 2806 éléments. La figure 4.4 présente le maillage quadratique qui est obtenu en utilisant l'approche présentée au chapitre 3. Le tableau 4.1 regroupe les informations relatives à la géométrie, aux conditions aux limites, au matériau et au maillage du tube.

Tableau 4.1 Caractéristiques du tube initial

Catégories	Informations	Valeurs
<b>Géométrie</b>	Longueur totale	600 mm
	Longueur zone de design	500 mm
	Diamètre	32 mm
	Épaisseur	2 mm
<b>Conditions aux limites</b>	Déplacements imposés	Arête gauche encastrée
	Chargements externes	Force verticale 500N
<b>Matériau</b>	Module de Young	69 GPa
	Coefficient de Poisson	0.33
<b>Maillage</b>	Taille d'éléments	7 mm
	Nombre de nœuds	5632
	Nombre d'éléments	2806

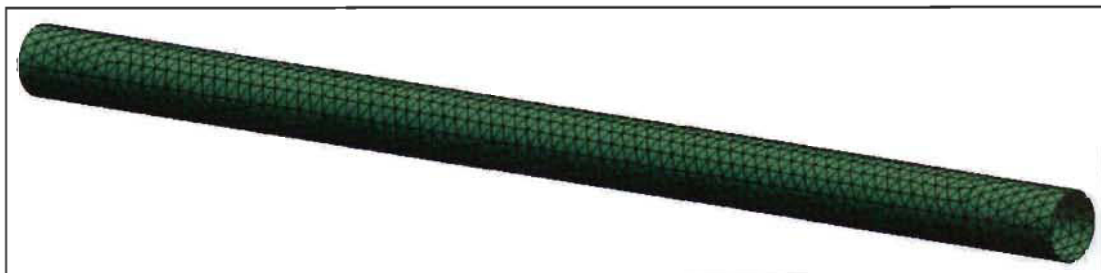


Figure 4.4 Tube maillé avec des triangles quadratiques

La figure 4.5 illustre l'état de contrainte initial (plus précisément la valeur maximale entre les trois plans de calcul inférieur, moyen et supérieur) en vues de dessus (a), face (b) et 3D (c) dans le tube. Les contraintes dans la zone de non-design ne sont pas représentées. D'après la figure, on remarque que la contrainte diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'encastrement, la contrainte maximale vaut 181,95 MPa et se situe à la jonction entre la zone design et non-design près de l'encastrement. Les nœuds qui se trouvent sur l'axe neutre ont une contrainte qui tend vers zéro. La contrainte moyenne dans la zone de design vaut 64,04 MPa. Ces valeurs ainsi que l'écart type sont regroupées dans le tableau 4.2. L'écart type est utilisé pour mesurer la dispersion des contraintes de Von Mises autour de la valeur moyenne.

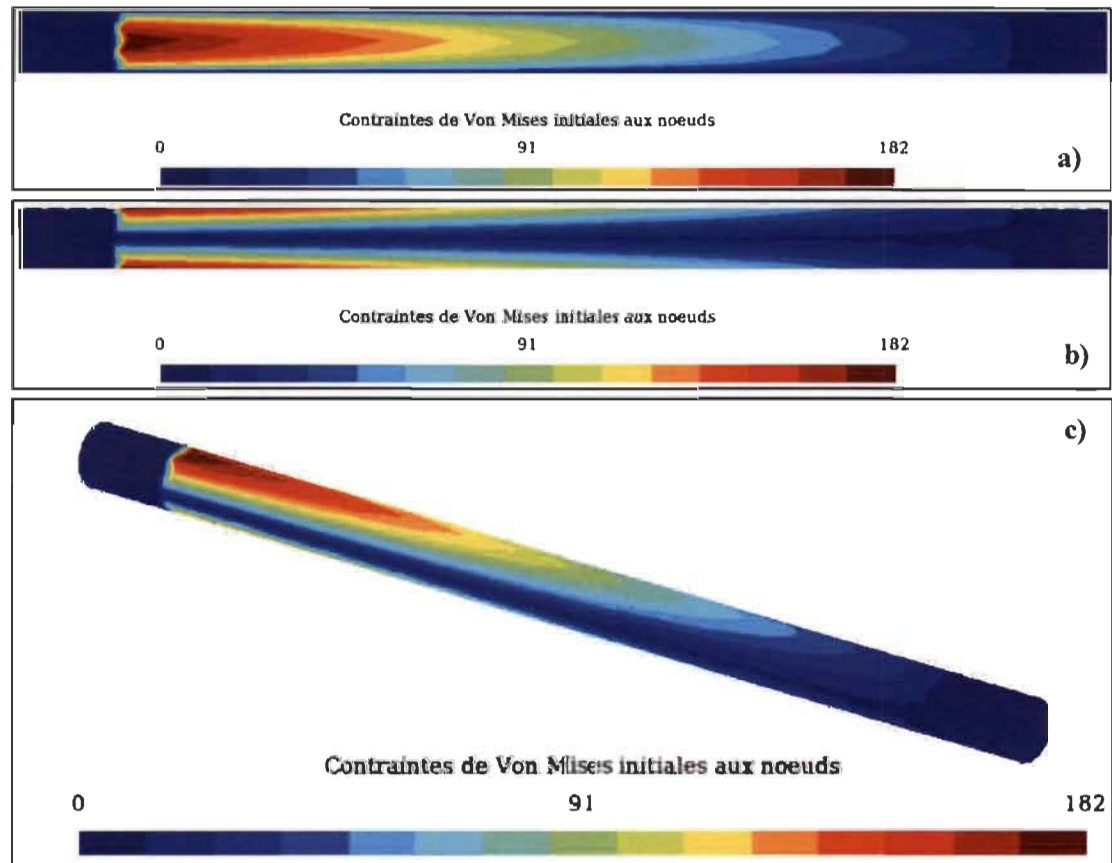


Figure 4.5 Contraintes de Von Mises initiales aux nœuds a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

Tableau 4.2 Contraintes de Von Mises initiales

$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	Écart type
181,95	64,04	8,87	44,41

Les nœuds dont la contrainte est supérieure à la contrainte moyenne seront déplacés vers l'extérieur (direction normale sortante) et les nœuds dont la contrainte est inférieure à la contrainte moyenne seront déplacés vers l'intérieure (direction normale entrante). L'ampleur de déplacement d'un nœud dépend de l'écart entre la valeur en ce nœud et la contrainte moyenne. D'après l'état de contrainte initial, l'écart entre la contrainte moyenne et la contrainte maximale est de 117,91 MPa, donc il y aura un déplacement important dans la zone près de l'encastrement dans la direction extérieure.

#### 4.3.2 Valeur des paramètres d'optimisation

La contrainte objectif est la contrainte moyenne, cette contrainte est recalculée à chaque itération. La valeur du coefficient de convergence est de 0.05. La limite de convergence vaut 10% (0.01). Le nombre maximal d'itérations est de 100. Les paramètres de la MMN sont regroupés dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 Paramètres de la MMN

Paramètres	Valeurs
Contrainte objective $\sigma_0$	$\sigma_{vm}$ moyenne
Coefficient de convergence $C$	0.05
Limite de convergence $L$	0.1
Nombre maximal d'itérations	100

#### Forme optimisée par la MMN non contrôlée

La méthode ne converge pas et le processus itératif s'arrête après 100 itérations. La figure 4.6 présente le déplacement des nœuds après 100 itérations. La figure montre la forme obtenue dans les vues de dessus (a), face (b) et 3D (c). On peut voir que le déplacement est régulier dans le tube à part à la jonction entre la zone de design et de non design près de l'encastrement où le déplacement est très important, donnant une forme irrégulière et une variation brusque de la section du tube. Le déplacement maximal vaut 28.6 mm. Les nœuds qui se trouvent sur l'axe neutre se déplacent vers l'intérieur du tube.

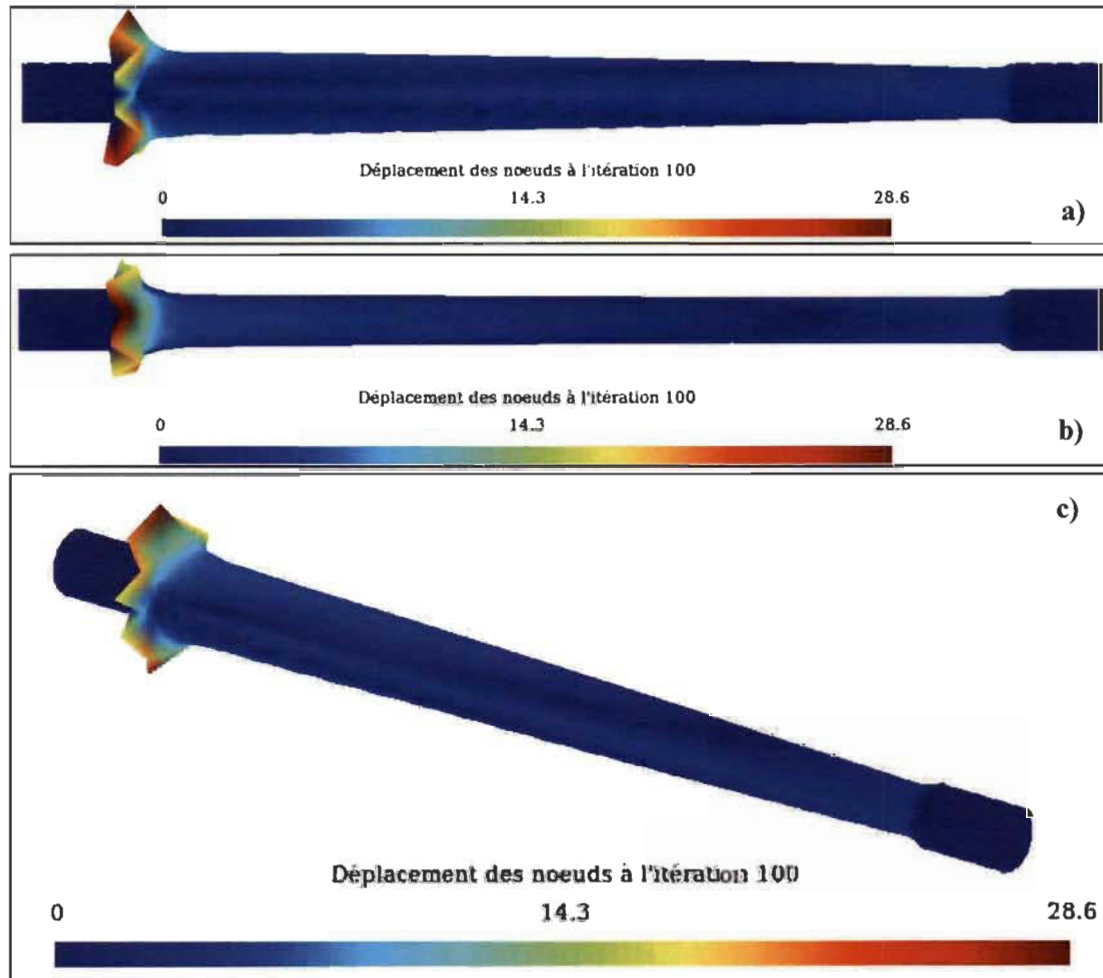


Figure 4.6 Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

La figure 4.7 montre l'état de contrainte initial en vues de dessus (a), face (b) et 3D (c) et l'état de contrainte final obtenu par la méthode en vues de dessus (d), face (e) et 3D (f). D'après la figure, on voit que la répartition des contraintes tend à s'uniformiser sur le tube à part dans la zone de design la plus proche de l'encastrement où les contraintes augmentent. La contrainte maximale passe de 181.95 à 380.95 MPa. Ceci est dû à la variation brusque et importante de la forme à la jonction (côté gauche) entre la zone de design et de non design, ce qui conduit à une concentration de contraintes. Variation causée par l'écart important entre la contrainte maximale qui se situe sur cette zone et la contrainte moyenne. On ne retrouve pas ce phénomène à la jonction (côté droit) entre la zone de design et de non design où l'écart entre la contrainte objective et la contrainte moyenne n'est pas aussi important. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale dans la forme obtenue avec la MMN est de

1.75%, c'est le pourcentage de nœuds qui ont dépassé la valeur de 181.95 MPa. On désignera cette mesure par %NSM.

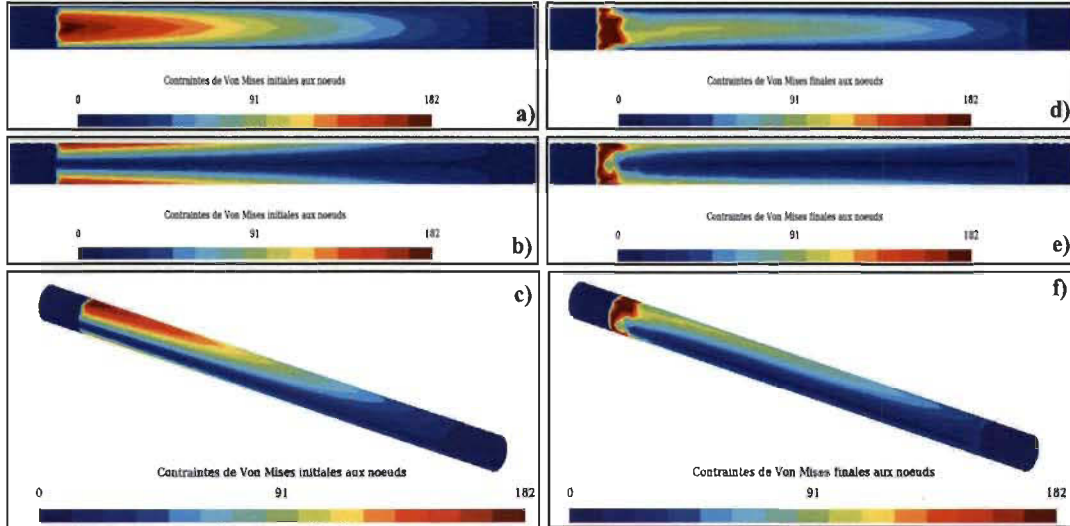


Figure 4.7 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

La contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04MPa à 52,66 MPa, soit une baisse de 18% et l'écart type passe de 44,41 à 41,04, soit une baisse de 8%. La diminution de ces deux valeurs montre que la méthode tend à uniformiser les contraintes. Le tableau 4.4 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant et après optimisation et le %NSM. Dans les tableaux le %NSM sera désigné par % nœuds  $>\sigma_{VM}$  max.

Tableau 4.4 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN

	$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	% nœuds $>\sigma_{VM}$ max	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>final</b>	380,59	52,66	2,74	1,75	41,04

### *Influence de l'algorithme d'optimisation et de l'algorithme recentrage*

Dans cette partie, on voit l'influence de l'algorithme de recentrage et d'optimisation des éléments sur la MMN. On applique la méthode avec et sans les algorithmes et l'on

compare les résultats obtenus. Le tableau 4.5 regroupe les valeurs des paramètres utilisées.

Tableau 4.5 Paramètres de la MMN

Paramètres	Valeurs
Contrainte objective $\sigma_0$	$\sigma_{vm}$ moyenne
Coefficient de convergence $C$	0.1
Limite de convergence $L$	0.1
Nombre maximal d'itérations	50

La figure 4.8 montre la forme obtenue par la MMN avec optimisation et recentrage a) et sans optimisation et recentrage b). On observe que l'utilisation de la MMN sans recentrage et optimisation conduit à l'apparition de pics et à une forme irrégulière du tube.

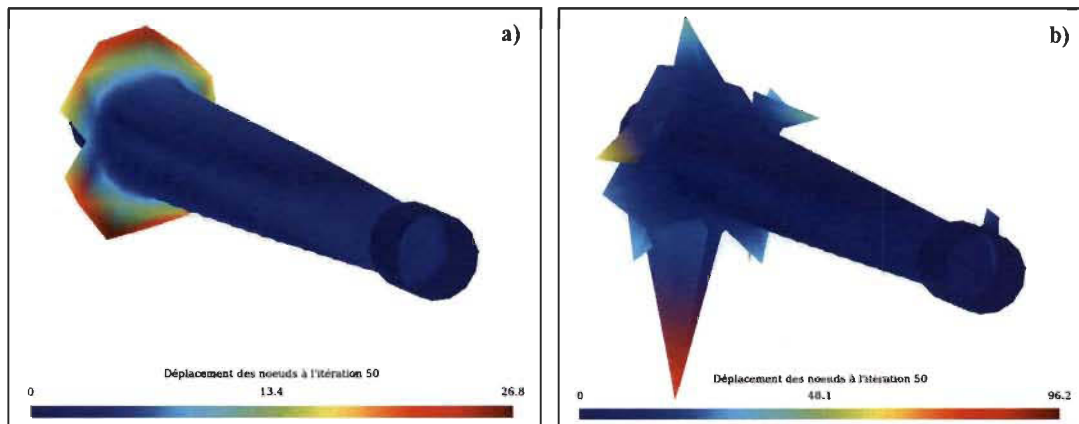


Figure 4.8 Forme obtenue par la MMN a) Avec recentrage et optimisation b) Sans recentrage et optimisation

Le tableau 4.6 montre le nombre d'éléments invalides obtenu en utilisant la MMN avec et sans recentrage et optimisation. Des éléments invalides apparaissent lorsque la MMN est utilisée sans les algorithmes, le nombre d'éléments invalides augmente avec le nombre d'itérations.

Tableau 4.6 Nombre d'éléments invalides en utilisant la MMN avec et sans optimisation et recentrage

itérations	10	20	30	40	50
Nbre d'éléments invalides (sans optimisation et recentrage)	0	10	58	125	195
Nbre d'éléments invalides (avec optimisation et recentrage)	0	0	0	0	0



### *Influence du coefficient de convergence*

Dans cette partie, on voit l'influence du coefficient de convergence sur la méthode du mouvement normal. On utilise un coefficient de convergence de 0.2 et un nombre de 50 itérations. Les valeurs des paramètres de la méthode sont regroupées dans le tableau 4.7.

Tableau 4.7 Paramètres de la MMN

Paramètres	Valeurs
Contrainte objective $\sigma_0$	$\sigma_{vm}$ moyenne
Coefficient de convergence $C$	0.2
Limite de convergence $L$	0.1
Nombre maximal d'itérations	50

La figure 4.9 montre la forme obtenue par la MMN en vue 3D. On observe que le déplacement est très important au niveau de la jonction entre la zone de design et de non design du côté de l'encastrement et l'apparition de pics. L'utilisation d'un coefficient de convergence plus important conduit à un déplacement plus conséquent des nœuds à chaque itération, ce qui conduit à une variation très brusque de la section du tube près de l'encastrement. Cette variation conduit à l'apparition de contraintes d'une valeur très élevée et donc à des déplacements très importants.

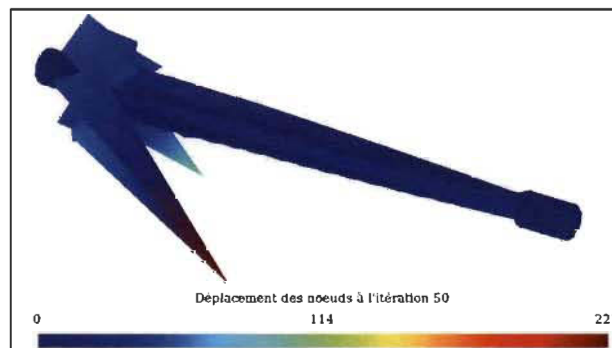


Figure 4.9 Forme optimisée par la MMN en Vue 3D

### *Influence du nombre d'itérations*

On voit l'influence du nombre d'itérations sur la MMN, le coefficient de convergence est constant, égal à 0.05 et le nombre d'itérations est égal à 100, 150 et 200. La figure 4.10 montre la forme obtenue pour les différents nombres d'itérations, après 100 itérations (a), 150 itérations (b) et 200 itérations (c).

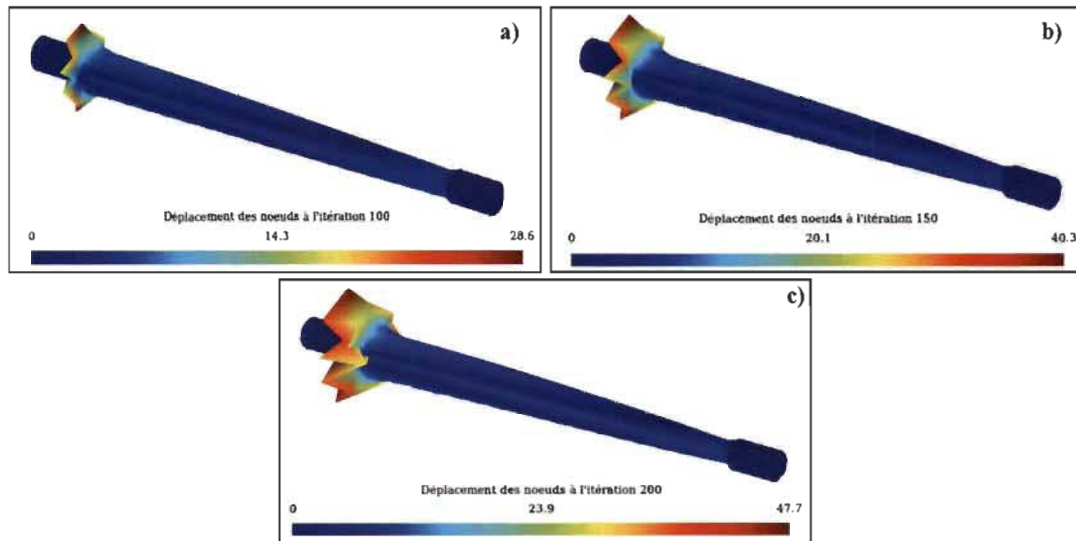


Figure 4.10 Forme obtenue par la MMN après a) 100 itérations b) 150 itérations et c) 200 itérations

Le déplacement au niveau de la jonction entre la zone de design et de non design augmente au fur et à mesure des itérations et les nœuds qui se trouvent sur l'axe neutre se déplacent vers l'intérieur du tube, ce qui conduit à une réduction de la section du tube.

La figure 4.11 montre l'état de contrainte initial a) et l'état de contrainte après 100 itérations b) ,150 itérations c) et 200 itérations d). On observe que les contraintes s'uniformisent au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente mis à part à la jonction près de l'encastrement.

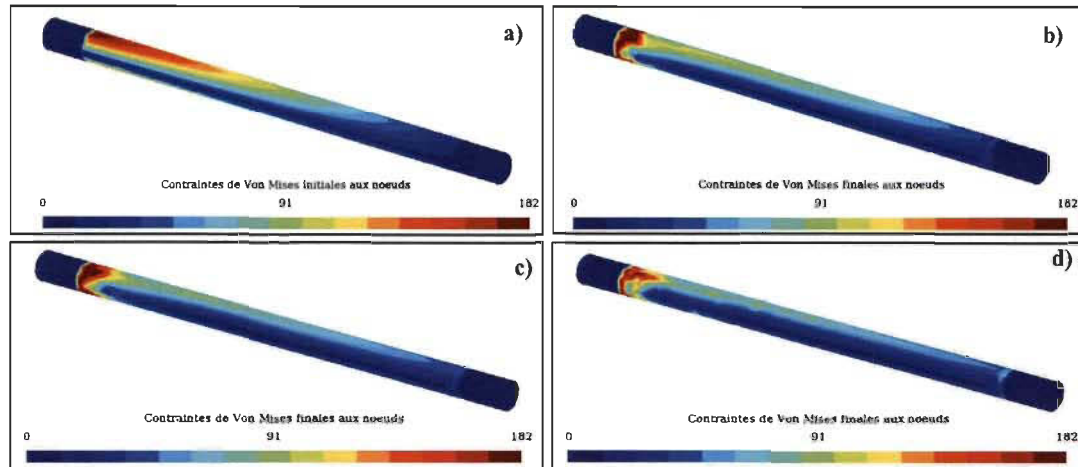


Figure 4.11 Comparaison de l'état de contrainte a) Initial et l'état de contrainte après b) 100 itérations c) 150 itérations et d) 200 itérations.

Le tableau 4.8 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant et après optimisation pour les différents nombres d'itérations utilisées.

Tableau 4.8 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN après 100,150 et 200 itérations

	$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>100 itér</b>	380,59	52,66	2,74	1,75	41,04
<b>150 itér</b>	281,11	48,64	2,45	1.90	35,82
<b>200 itér</b>	367,34	44,99	2,27	1.80	30,50

Pour un nombre d'itérations égal à 100, la contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 à 52,66 MPa, soit une baisse de 18% et l'écart type passe de 44,41 à 41,04, soit une baisse de 8%. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 1.75%.

Pour un nombre d'itérations égal à 150, la contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 à 48,64 MPa, soit une baisse de 24% et l'écart type passe de 44,41 à 35,82, soit une baisse de 19%. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 1.90%.

Pour un nombre d'itérations égal à 200, la contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 à 44,99 MPa, soit une baisse de 30% et l'écart type passe de 44,41 à 30,50, soit une baisse de 31%. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 1.80%.

Le tableau 4.9 montre le pourcentage de diminution de la contrainte moyenne et de l'écart type pour les différents nombres itérations. La contrainte moyenne et l'écart type diminuent au fur et à mesure des itérations, ce qui veut dire que les contraintes tendent à s'uniformiser et correspond aux résultats observés à la figure 4.11.

Tableau 4.9 Pourcentage de diminution de la contrainte moyenne et de l'écart type après 100,150 et 200 itérations

	<b>100</b> <b>itérations</b>	<b>150</b> <b>itérations</b>	<b>200</b> <b>itérations</b>
<b><math>\sigma_{VM}</math> moy</b>	-18%	-24%	-30%
<b>Écart type</b>	-8%	-19%	-31%

### 4.3.3 Conclusion

La méthode du mouvement normal permet d'avoir une répartition des contraintes plus uniforme et une diminution importante de la contrainte moyenne, mais il y a nécessité de contrôler le déplacement des nœuds. Le déplacement au niveau de la jonction entre la zone de design et de non design du côté de l'encastrement est très important, ce qui conduit à une forme non valide géométriquement. Dans la section suivante, différentes méthodes de contrôle sont utilisées et les résultats obtenus sont comparés avec la MMN sans contrôle.

### 4.4 Lissage Laplacien

Comme vue dans le chapitre 2, le lissage Laplacien (barycentrage) est l'une des méthodes utilisées pour contrôler le déplacement des nœuds de la MMN et consiste à calculer la nouvelle position d'un nœud en faisant la moyenne de la position des nœuds voisins. On applique la MMN avec le lissage Laplacien, une seule passe de lissage est effectuée à chaque itération de la MMN. La figure 4.12 montre la forme obtenue en utilisant le lissage Laplacien avec la MMN.

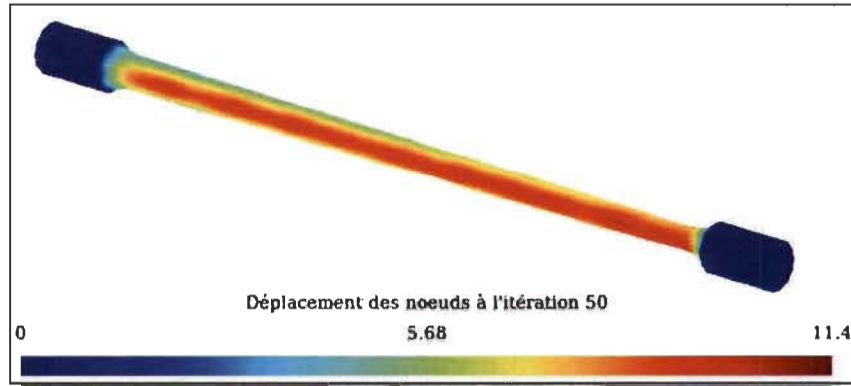


Figure 4.12 Forme obtenue par la MMN avec lissage Laplacien après 50 itérations

D'après la figure, on constate une diminution importante de la section du tube. L'utilisation du lissage Laplacien avec la MMN conduit à un rétrécissement du maillage au fur et à mesure des itérations. Le rétrécissement causé par le lissage Laplacien est un phénomène que l'on retrouve dans la littérature (Taubin 1995; Brentzen, Gravesen et al. 2012; Ohtake, Belyaev et al. 2001) et pour pallier à cela, on utilise une autre méthode de lissage.

#### 4.5 Lissage Taubin

Le lissage Taubin (Taubin 1995) consiste en deux passes de lissage. La première passe utilise un facteur d'échelle positif ( $\lambda > 0$ ), cette étape est dite étape de rétrécissement (shrink). La seconde utilise un facteur d'échelle négatif ( $\mu < 0$ ), cette étape est dite étape d'élargissement ou de dé-rétrécissement (inflate). Soit un nœud  $e$  dont la position est définie par  $x^*$ , le lissage Taubin est défini comme :

Première  
passe :

$$x^* = x^* + \lambda \Delta x^* \quad (4.6)$$

Seconde  
passe :

$$x^* = x^* + \mu \Delta x^* \quad (4.7)$$

Avec

$$\Delta x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^* - x_i^*) \quad (4.8)$$

$$0 < \lambda < -\mu$$

où  $N$  est le nombre de nœuds voisins du nœud  $e$  et  $x_i^*$  la position du nœud voisin  $i$ . La valeur des facteurs d'échelle utilisée est de  $\lambda = 0.5$  et  $\mu = -0.526$ .

#### 4.5.1 Application de la MMN avec lissage Taubin

La MMN avec lissage Taubin est appliquée au tube en flexion. Les paramètres de la méthode utilisés sont les mêmes qu'utilisés précédemment (tableau 4.3).

##### *Forme obtenue*

La figure 4.13 montre la forme obtenue en utilisant la méthode du mouvement normal avec lissage Taubin en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c). On n'observe pas de rétrécissement du maillage contrairement au lissage Laplacien. Le déplacement est régulier dans le tube. La transition entre la zone de design et de non design se fait de manière progressive, le déplacement maximal vaut 10,2 mm.

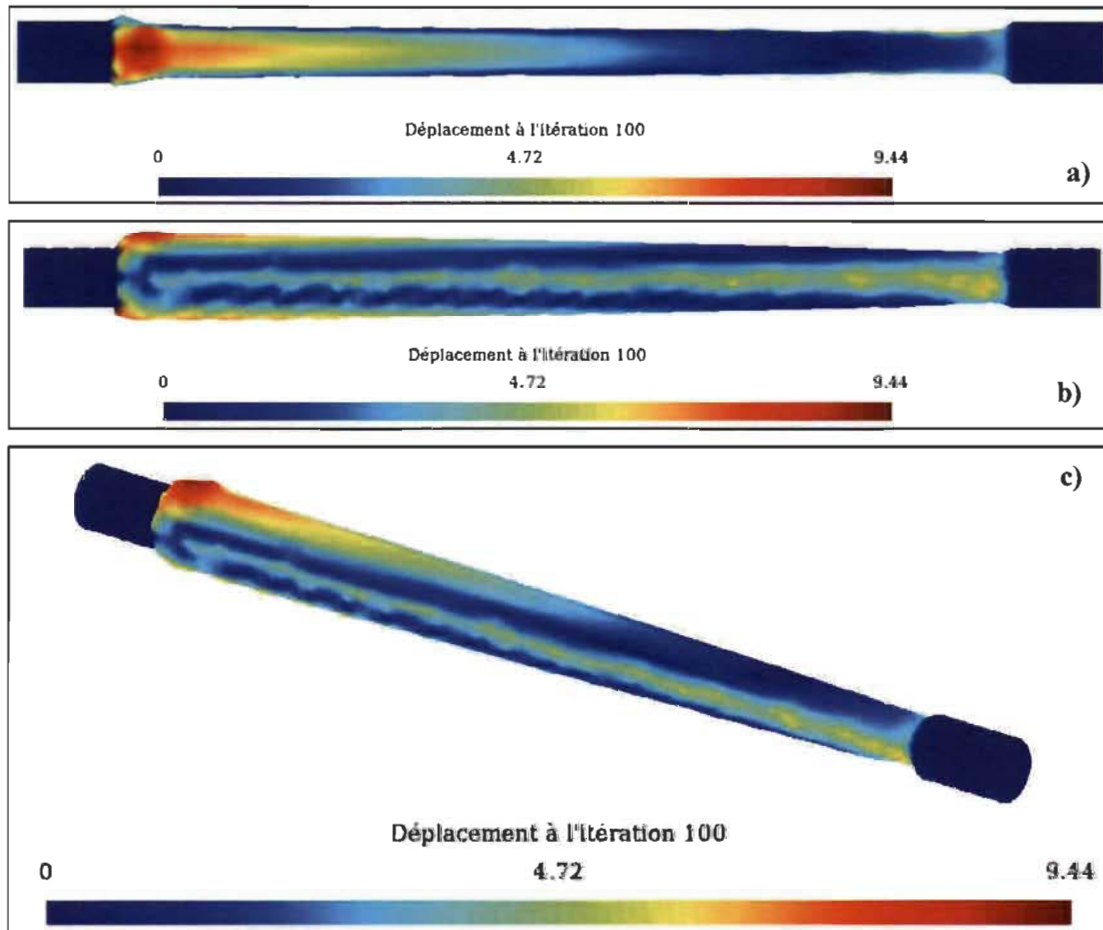


Figure 4.13 Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

La figure 4.14 montre l'état de contrainte initial en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c) et l'état de contrainte final obtenu par le lissage Taubin en vue de dessus (d), face (e) et 3D (f). On voit que les contraintes tendent à s'uniformiser (on a une meilleure

répartition des contraintes) à part à la jonction gauche entre la zone de design et de non design où on a une augmentation des contraintes.

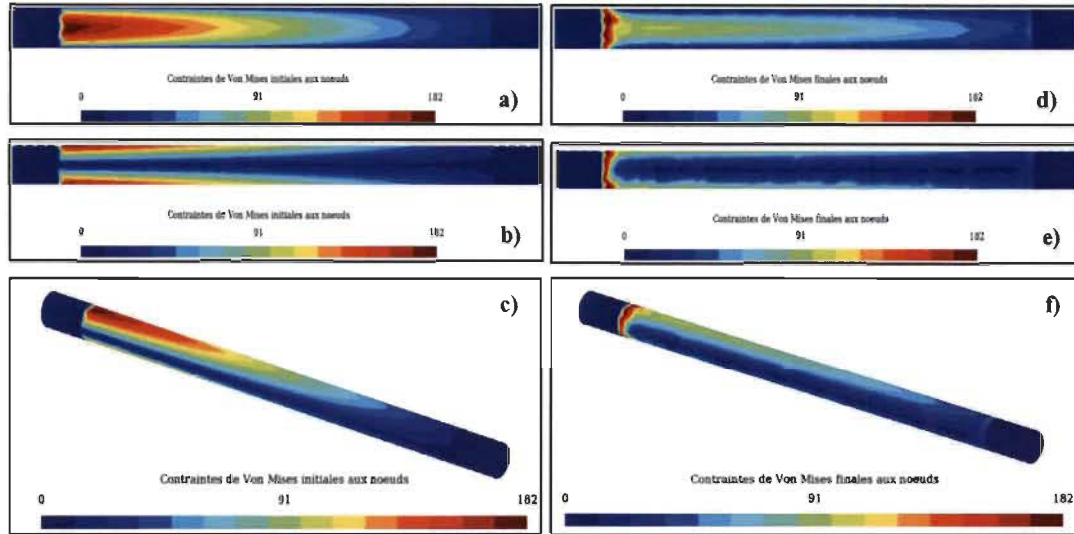


Figure 4.14 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN avec lissage Taubin a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

Le tableau 4.10 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant et après optimisation. La contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 MPa à 49,32 MPa, soit une baisse de 28% et l'écart type passe de 44,41 à 37,45, soit une baisse de 16%. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 0.82%.

Tableau 4.10 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN avec lissage Taubin

	$\sigma_{VM} \text{ max}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ moy}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ min}$ (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM} \text{ max}$	Écart type
<b>initiale</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>finale</b>	420,72	49,32	4,79	0.75	37,45

#### 4.5.2 Comparaison entre la MMN avec et sans lissage Taubin

La figure 4.15 montre le déplacement obtenu avec la MMN (a) et la MMN avec lissage Taubin (b).

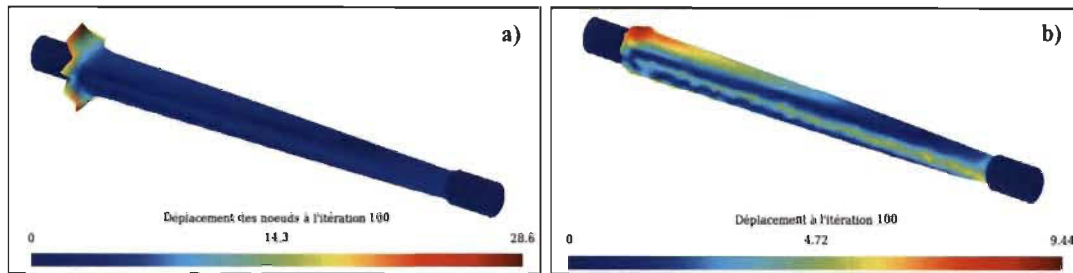


Figure 4.15 Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN avec lissage Taubin

On voit que l'utilisation du lissage permet d'avoir une transition entre la zone de design et de non design plus progressive et moins brusque (zone la plus proche de l'encastrement). Le déplacement maximal vaut 28,6 mm avec la MMN tandis que pour la méthode MMN avec lissage Taubin le déplacement maximal vaut 9,44 mm, une baisse de 67%. Le lissage consiste à faire la moyenne de la somme de la position des nœuds voisins, ce qui permet de repositionner les nœuds qui ont un déplacement important et qui se trouvent dans une position éloignée par rapport aux nœuds voisins.

La figure 4.16 montre l'état de contraintes obtenu avec la MMN a) et la MMN avec lissage Taubin b). On observe que la répartition est quasiment identique, la zone où les contraintes sont plus élevées est plus importante avec la MMN.

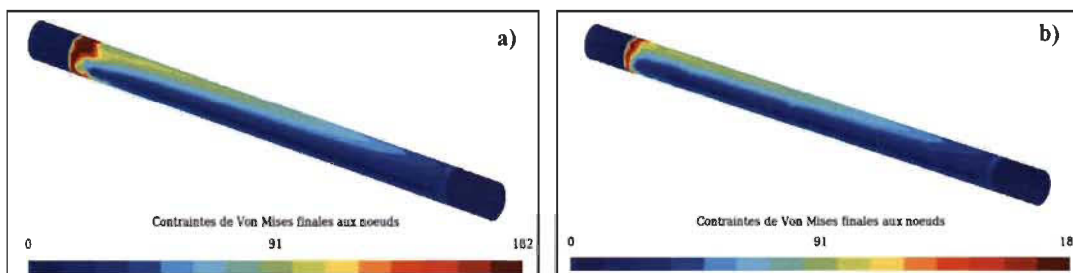


Figure 4.16 Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN b) La MMN avec lissage Taubin

Le tableau 4.11 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avec la MMN et la MMN avec lissage Taubin. La contrainte moyenne baisse de 18% pour la MMN et de 28% pour la MMN avec lissage et l'écart type baisse de 8% pour la MMN et de 16% pour la MMN avec lissage. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 1.75% pour la MMN et de 0.75% pour la MMN avec lissage. Le lissage permet d'avoir 57% de nœuds dépassant la contrainte max de moins que la MMN. L'utilisation du lissage Taubin permet d'avoir une diminution



plus importante de la contrainte moyenne et de l'écart type et un %NSM moins importante que la MMN.

Tableau 4.11 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec lissage Taubin

	$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	Écart type
<b>initiale</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>MMN</b>	380,59	52,66	2,74	1,75	41,04
<b>Taubin</b>	420,72	49,32	4,79	0,75	37,45

#### 4.6 Utilisation de filtres

L'utilisation de filtres est très répandue dans l'optimisation topologique pour réduire l'influence du maillage sur le résultat. Les méthodes les plus communes sont le filtrage de la sensibilité de la compliance ou de la densité (Bendsoe et Sigmund, 2003). Le filtrage consiste à faire une moyenne pondérée de la quantité à filtrer dans le voisinage de l'élément ou du nœud. Dans notre cas, c'est le déplacement qui est filtré. Pour chaque nœud  $e$ , on détermine la liste des nœuds qui sont à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  et qui entourent ce nœud (figure 4.17).

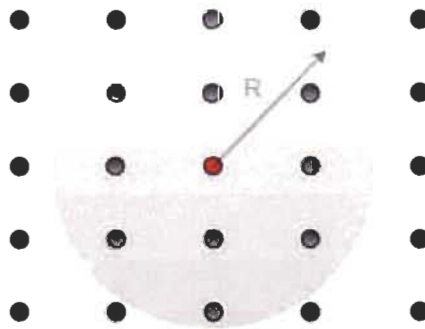


Figure 4.17 Illustration du filtre

Pour  $N$  nombre de nœud qui entourent le nœud  $e$ , la nouvelle valeur  $\bar{d}_e$  du déplacement se calcul comme suit;

$$\bar{d}_e = \frac{\sum_{i=1}^N w_i d_i}{\sum_{i=1}^N w_i}, \quad (4.9)$$

où  $d_i$  est le déplacement du nœud voisin et  $w_i$  est le coefficient de pondération défini comme suit;

$$w_i = (R - R_{ei}), \quad (4.10)$$

où  $R_{ei}$  est la distance entre le nœud  $e$  et le nœud voisin  $i$  et  $R$  le rayon du filtre.

#### 4.6.1 Application de la méthode du mouvement normal avec filtre

La MMN est appliquée au tube en flexion avec un filtre de rayon de 7 mm. Les paramètres de la méthode sont les mêmes que ceux utilisés précédemment (tableau 4.3).

##### Forme obtenue

La figure 4.18 montre la forme obtenue en vue de dessus (a), de face (b) et 3D (c).

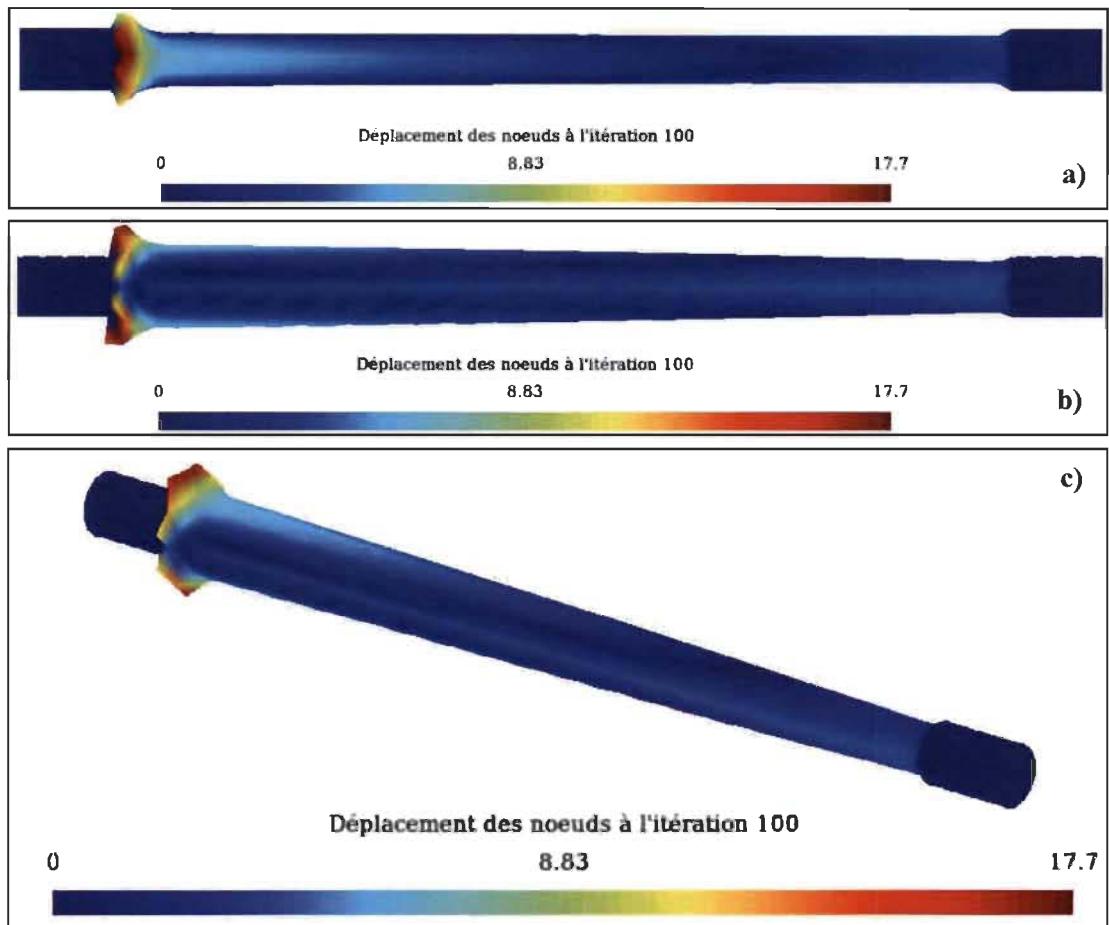


Figure 4.18 Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

On remarque un déplacement important à la jonction entre la zone de design et de non design du côté de l'encastrement, la section varie brusquement. Le déplacement maximal vaut 17 mm. Le déplacement est régulier dans le reste du tube.

La figure 4.18 montre l'état de contrainte initial en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c) et l'état de contrainte final obtenu avec la MMN avec filtre en vue de dessus (d), face (e) et 3D (f). Les contraintes tendent à s'uniformiser à part à la jonction gauche entre la zone de design et de non design où on a une augmentation des contraintes. Le tableau 4.12 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant et après optimisation. La contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 MPa à 52,46 MPa, soit une baisse de 18% et l'écart type passe de 44,41 à 43,12, soit une baisse de 3%. Le pourcentage de nœuds dont la contrainte est supérieure à la contrainte max est de 1.79%.

Tableau 4.12 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN avec filtre

	$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>final</b>	495,88	52,46	4,14	1,79	43,12

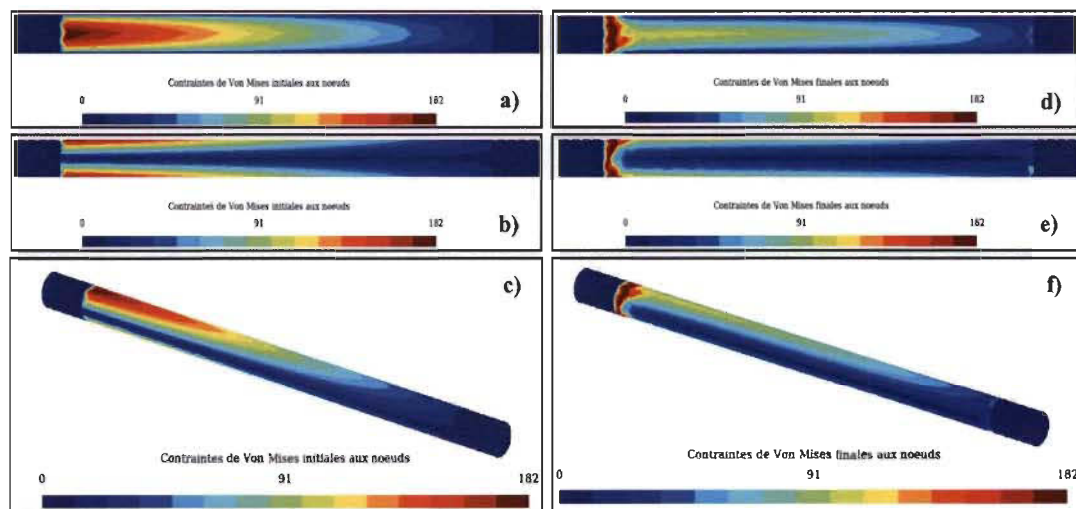


Figure 4.19 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN avec filtre a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

#### 4.6.2 Comparaison entre la MMN avec et sans filtre

La figure 4.20 montre le déplacement obtenu avec la MMN (a) et la MMN avec filtre (b).

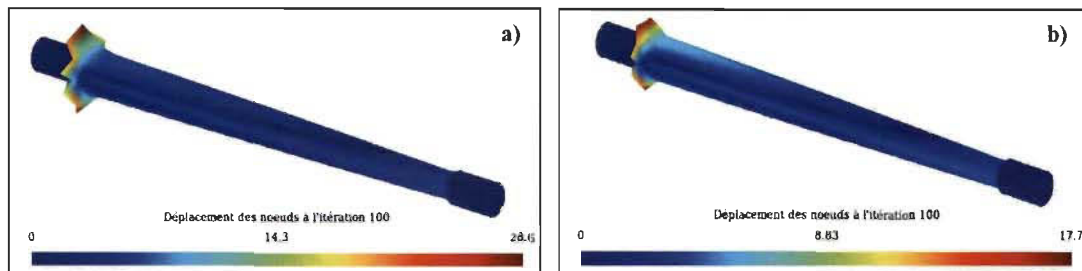


Figure 4.20 Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN avec filtre

En comparant la forme obtenue avec la MMN et la forme obtenue avec la méthode du mouvement normal sans filtre, on voit que la variation de la section est moins importante à la jonction près de l'encastrement avec la MMN avec filtre. La valeur de déplacement maximal est de 28.6 mm pour la MMN et de 17mm pour la MMN avec filtre, soit une baisse d'environ 40%. Le déplacement dans l'autre partie du tube est similaire entre les deux méthodes.

Le filtre consiste à faire une moyenne des déplacements à l'intérieur du rayon, ce qui a pour effet de faire baisser le déplacement des nœuds dont le déplacement est très grand. Le déplacement en un nœud est atténué par le déplacement des nœuds voisins : si le déplacement en un nœud est supérieur la valeur du déplacement des nœuds voisins l'utilisation du filtre conduit à la baisse du déplacement en ce nœud. Quand le déplacement en un nœud est similaire au déplacement des nœuds voisins alors le filtre influe légèrement sur le déplacement en ce nœud.

La figure 4.21 montre l'état de contrainte obtenue par la MMN (a) et la MMN avec filtre (b). On observe que la répartition est quasiment identique. Le tableau 4.13 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avec la MMN et la MMN avec filtre. La valeur de la contrainte moyenne et l'écart type sont similaires.

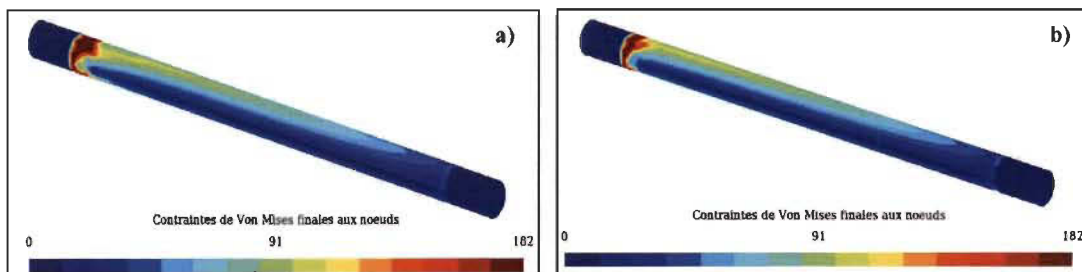


Figure 4.21 Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN et b) La MMN avec filtre

L'utilisation d'un filtre de rayon de 7 mm permet d'avoir un déplacement moins important à la jonction près de l'encastrement, mais ce déplacement reste toujours beaucoup trop important.

Tableau 4.13 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre

	$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>MMN filtre</b>	495,88	52,46	4,14	1,79	43,12
<b>MMN</b>	380,59	52,66	2,74	1,75	41,04

L'augmentation du rayon du filtre permet d'augmenter le nombre de nœuds à l'intérieur du rayon, ce qui aura pour effet de faire baisser de façon plus importante le déplacement des nœuds dont le déplacement est beaucoup trop grand. Mais l'augmentation du rayon conduit aussi à une variation plus faible de la forme. Donc en augmentant le rayon du filtre on augmente le nombre d'itérations.

On applique la méthode du mouvement normal avec différents rayons de filtre et différents nombres d'itérations.

#### 4.6.3 Comparaison entre la MMN et la MMN avec différents rayons de filtre

La méthode du mouvement normal est appliquée au tube en flexion décrit précédemment avec différents rayons de filtre. Les différents rayons, ainsi que le nombre d'itérations utilisé sont décrits dans le tableau 4.14.

Tableau 4.14 Caractéristiques des filtres

<b>Rayon (mm)</b>	7	21	35
<b>Nombre d'itérations</b>	100	150	200

La figure 4.22 montre la forme obtenue avec la MMN (a), la MMN avec un filtre de rayon de 7mm (b), 21mm (c) et 35mm (d). L'augmentation du rayon permet d'avoir une transition entre la zone de design et de non design du côté de l'encastrement plus progressive et moins brusque. Le tableau 4.15 contient la valeur du déplacement

maximale pour les différents rayons ainsi que l'écart en pourcentage avec le déplacement maximale de la MMN sans filtre.

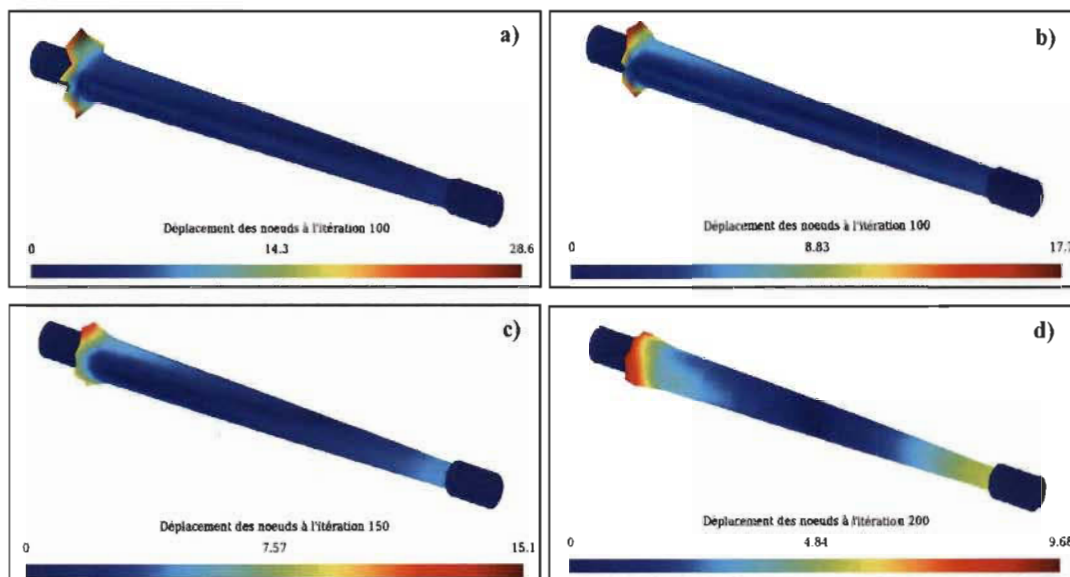


Figure 4.22 Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN, la MMN avec filtre de rayon b) 7 mm c) 21 mm d) 35 mm

D'après le tableau, on remarque que plus on augmente la valeur du rayon du filtre plus la valeur du déplacement maximal diminue.

Tableau 4.15 Déplacement maximal pour les différents rayons et pourcentage d'écart avec la MMN sans filtre

Rayon (mm)	7	21	35
Déplacement (mm)	17,7	11,5	9,68
% d'écart avec le déplacement MMN	40%	60%	66%

On observe aussi à la figure 4.22 que les nœuds qui se trouvent autour de l'axe neutre se déplacent vers l'intérieur avec un rayon de filtre de 7 mm et la MMN tout le long du tube, mais se déplacent vers l'extérieur sur la première moitié du tube et vers l'intérieur dans la deuxième moitié avec un rayon de 21 et 35 mm. Les nœuds qui se trouvent autour de l'axe neutre ont une contrainte très faible donc se déplacent vers l'intérieur (direction normale entrante). Les nœuds sur la surface supérieure ont une contrainte supérieure à la moyenne et se déplacent vers l'extérieur (direction normale sortante). Le nombre de nœuds se déplaçant vers l'extérieur est beaucoup plus

important sur la première moitié du tube. Puisque le filtre consiste à faire la moyenne des déplacements autour du nœud, en augmentant son rayon on augmente le nombre de nœuds ayant un déplacement vers l'extérieur. Dans la seconde moitié du tube, les contraintes sont inférieures à la moyenne tout autour du tube et donc tous les nœuds se déplacent vers l'intérieur.

En observant le dégradé de couleurs du déplacement on voit qu'il est uniforme autour du tube par région, pour le filtre de rayon 35 mm. Ce qui veut dire que ces nœuds ont le même déplacement autour du tube, comme on peut le voir à la figure 4.23, qui montre le déplacement obtenu avec un filtre de 35 mm en vue de gauche.

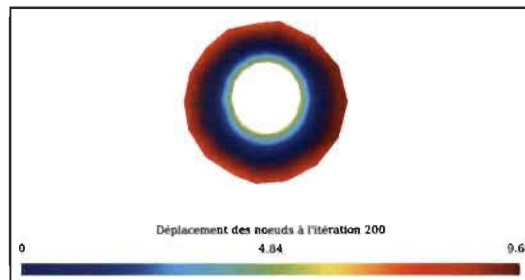


Figure 4.23 Forme obtenue à l'itération 200 en vue de gauche avec la MMN avec un filtre de 35 mm

La figure 4.24 montre l'état de contrainte final obtenu avec MMN (a), avec un filtre de 7(b), 21(c) et 35(d). Les contraintes ont tendance à s'uniformiser pour les différents rayons, mais plus le rayon augmente plus les contraintes sont moins uniformes.

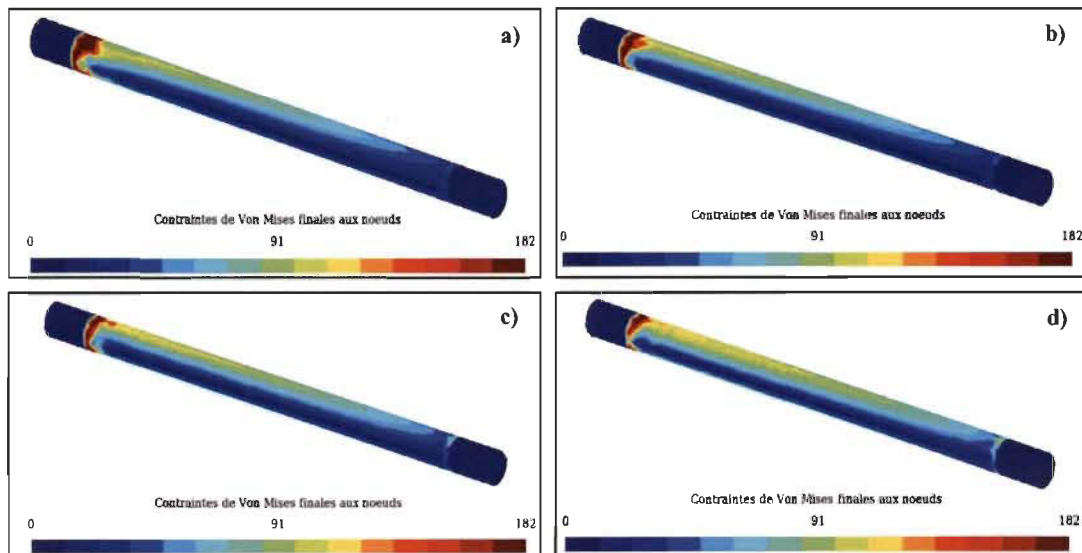


Figure 4.24 Comparaison de l'état de contrainte final entre a) La MMN et la MMN avec un rayon de filtre de b) 7mm c) 21mm d) 35mm

Le tableau 4.16 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avec la MMN et la MMN avec les différents rayons de filtre. Pour un rayon de filtre de 7 mm, la contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 MPa à 52,46 MPa, soit une baisse de 18% et l'écart type passe de 44,41 à 43,12, soit une baisse de 3%. Le pourcentage de nœuds dont la contrainte est supérieure à la contrainte max est de 1.79%.

Pour un rayon de filtre de 21 mm, la contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 MPa à 57,96 MPa, soit une baisse de 9% et l'écart type de 44,41 à 41,16, soit une baisse de 7%. Le pourcentage de nœuds dont la contrainte est supérieure à la contrainte max est de 1.47%.

Tableau 4.16 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre 7, 21 et 35 mm

	$\sigma_{VM} \text{ max}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ moy}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ min}$ (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM} \text{ max}$	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>MMN</b>	380,59	52,66	2,74	1,75	41,04
<b>Filtre (7mm)</b>	495,88	52,46	4,14	1.79	43,12
<b>Filtre (21mm)</b>	457,33	57,96	2,26	1.47	41,16
<b>Filtre (35mm)</b>	578,76	64,79	2,53	1.44	41,70

Pour un filtre de rayon de 35 mm, la contrainte moyenne dans le tube passe de 64,04 MPa à 64,79 MPa, soit une augmentation de 1% et l'écart type passe de 44,41 à 41,70, soit une baisse de 6%. Le pourcentage de nœuds dont la contrainte est supérieure à la contrainte max est de 1.44%.

L'augmentation du rayon du filtre permet d'avoir un déplacement moins important à la jonction près de l'encastrement et une diminution du %NSM, mais conduit aussi à une augmentation de la contrainte moyenne dans le tube et à une répartition des contraintes moins uniforme.

#### 4.7 Méthode du mouvement normal modifiée

Dans l'algorithme de la méthode du mouvement normal, les nœuds dont la contrainte est supérieure à la contrainte objective sont déplacés vers l'extérieur, ce qui devrait



faire baisser la valeur de la contrainte en ces nœuds; et les nœuds dont la contrainte est inférieure à la contrainte objective sont déplacés vers l'intérieur, ce qui devrait faire augmenter la valeur de la contrainte en ces nœuds. Néanmoins, vu les résultats obtenus précédemment, ce n'est pas toujours le cas, le déplacement vers l'extérieur n'entraîne pas nécessairement une baisse des contraintes et le déplacement des vers l'intérieur n'entraîne pas nécessairement une augmentation des contraintes.

Pour cela, on propose de modifier la méthode du mouvement normal, plus précisément le déplacement des nœuds.

Soit  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  la contrainte de Von-Mises en un nœud à l'itération  $i$  et  $i+1$ ,

- Si la contrainte en ce nœud à l'itération  $i$  est supérieure à la contrainte objectif alors à l'itération  $i+1$  la contrainte en ce nœud doit baisser, c'est la condition 1.
- Si la contrainte en ce nœud à l'itération  $i$  est inférieure à la contrainte objectif alors à l'itération  $i+1$  la contrainte en ce nœud doit augmenter, c'est la condition 2.

Si la condition 1 ou 2 n'est pas respectée alors:

Le nœud est repositionné à sa position précédente, position à l'itération  $i$ . C'est la méthode du mouvement normal modifié 1. La figure 4.25 illustre la MMN modifiée 1. En (a) on a la position du nœud à l'itération  $i$ , en (b) la position du nœud à l'itération  $i+1$ ; si le nœud ne respecte pas les conditions énumérées précédemment le nœud revient à sa position initiale comme montrée en (c).

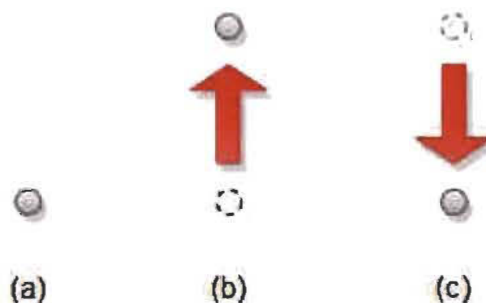


Figure 4.25 Illustration de la MMN modifiée 1

Le nœud est repositionné dans la direction opposée à celle de l'itération  $i+1$ . C'est la méthode du mouvement normal modifiée 2. La figure 4.26 montre la MMN modifiée 2. En (a) on a la position du nœud à l'itération  $i$ , en (b) la position du nœud à l'itération  $i+1$ ; si le nœud ne respecte pas les conditions énumérées précédemment alors le nœud est repositionné dans la direction opposée comme montrée en (c).

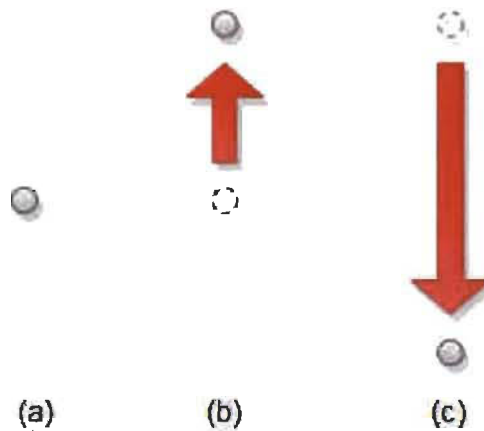


Figure 4.26 Illustration de la MMN modifiée 2

#### 4.7.1 Application de la MMN modifiée 1

La méthode du mouvement normal modifiée 1 est appliquée au tube en flexion. Les paramètres de la méthode utilisés sont les mêmes qu'utilisés précédemment (tableau 4.3).

##### *Forme obtenue*

La figure 4.27 illustre la forme obtenue avec la méthode du mouvement normal modifiée 1 en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c). Le déplacement est régulier dans tout le tube et on remarque que la transition entre la zone de design et de non design se fait de manière progressive. Le déplacement maximal vaut 10,2 mm. On remarque aussi que les nœuds qui se situent sur l'axe neutre restent à leurs positions initiales.

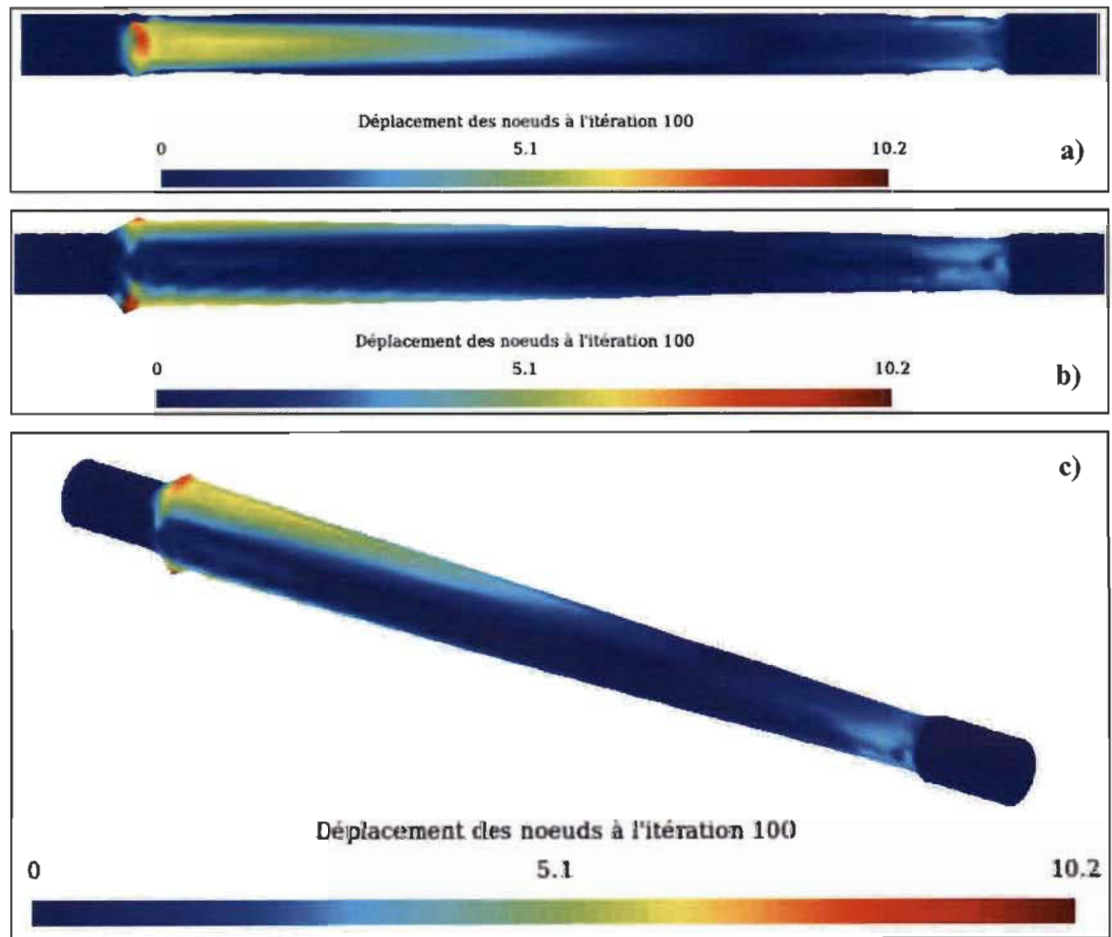


Figure 4.27 Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

La figure 4.28 montre l'état de contrainte initial en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c) et l'état de contrainte final obtenu par la méthode modifiée 1 en vue de dessus (d), face (e) et 3D (f). On voit que les contraintes tendent à s'uniformiser sauf à la jonction gauche entre la zone de design et de non design où l'on a une augmentation des contraintes.

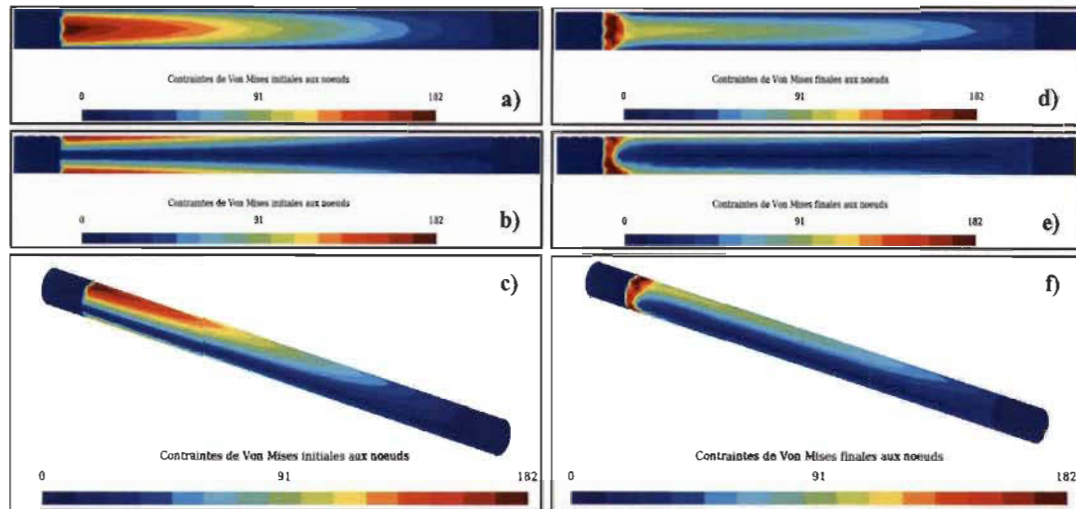


Figure 4.28 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN modifiée 1 a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

Le tableau 4.17 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant et après optimisation. La contrainte moyenne dans la pièce passe de 64,04 MPa à 50,34 MPa, soit une baisse de 21% et l'écart type de 44,41 à 34,46, soit une baisse de 22%. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 0.95%.

Tableau 4.17 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN modifiée 1

	$\sigma_{VM} \text{ max}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ moy}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ min}$ (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM} \text{ max}$	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>finale</b>	305,43	50,34	3,72	0.95	34,46

#### 4.7.2 Comparaison entre la MMN et la MMN modifiée 1

La figure 4.28 montre le déplacement obtenu avec la MMN (non modifiée) (a) et la MMN modifiée 1 (b).

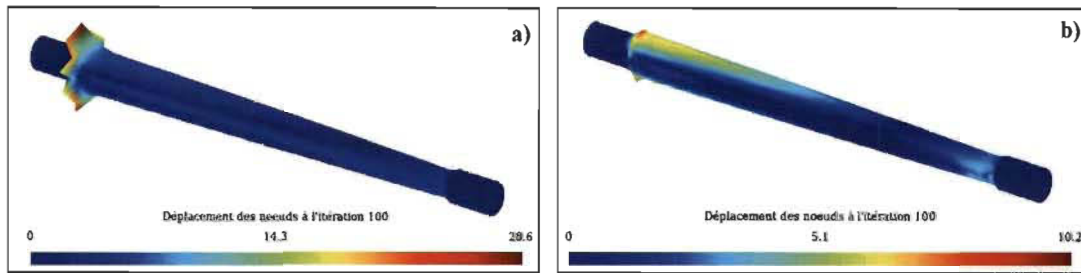


Figure 4.29 Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN modifiée 1

Les formes obtenues sont différentes, plus particulièrement dans la zone la plus proche de l'encastrement où pour la MMN on a un déplacement très important et brusque. Le déplacement maximal pour la MMN vaut 28,6 mm tandis que pour la méthode modifiée le déplacement est plus progressif, le déplacement maximal vaut 10 mm, déplacement trois fois moins important (baisse de 64%). Cette différence s'explique par le fait que dans cette zone les contraintes sont beaucoup plus grandes que la contrainte objectif et donc les nœuds sont déplacés vers l'extérieur afin de faire baisser la valeur de ces contraintes, mais ce déplacement ne conduit pas à une baisse des contraintes, ce qui conduit à un déplacement toujours plus important des nœuds vers l'extérieur au fur et à mesure des itérations. Dans cette zone, la condition 1 n'est pas respectée. Puisque cette condition n'est pas respectée, avec la MMN modifiée 1 les nœuds sont repositionnés à leurs positions précédentes, ce qui conduit à un déplacement moins important.

L'autre différence est la position des nœuds qui se trouvent sur l'axe neutre, pour la MMN ces nœuds se déplacent vers l'intérieur du tube tandis que pour la méthode modifiée ces nœuds restent à leurs positions initiales. La contrainte en ces nœuds est quasiment nulle, donc ces nœuds sont déplacés vers l'intérieur afin que la contrainte augmente, mais ce déplacement ne conduit pas à une augmentation. C'est la condition 2 qui n'est pas respectée, alors ces nœuds sont repositionnés à leur position initiale (précédente) avec la méthode modifiée 1.

La figure 4.30 montre l'état de contrainte final obtenu avec la MMN (a) et en la MMN modifiée 1 (b). On observe que la répartition est quasiment identique, la zone où les contraintes sont plus élevées est plus importante avec la MMN non modifiée. Les contraintes sur l'axe neutre restent quasiment nulles pour les deux méthodes.

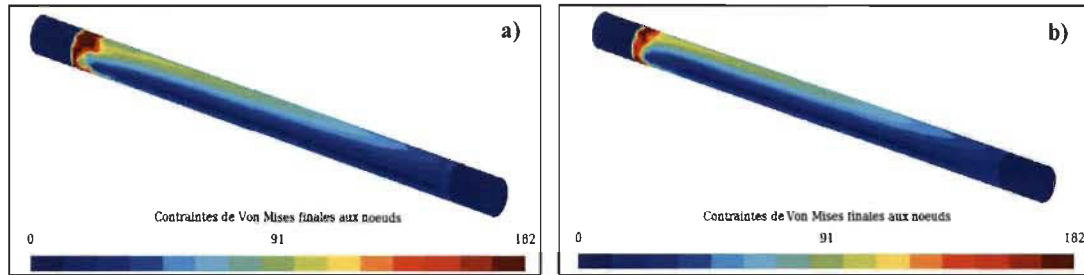


Figure 4.30 Comparaison de l'état de contrainte final entre a) La MMN et b) La MMN modifiée 1

Le tableau 4.18 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avec la MMN et la MMN modifiée 1. La contrainte moyenne baisse de 18% pour la MMN et de 21% pour la méthode modifiée et l'écart type baisse de 8% pour la MMN tandis que cette diminution est de 22% pour la méthode modifiée 1. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 1.75% pour la MMN et de 0.95% pour la MMN modifiée 1, ce qui veut dire que la méthode modifiée permet d'avoir 46% de nœuds en moins dépassant la contrainte maximale. L'utilisation de la MMN modifiée 1 permet d'avoir une diminution plus importante de la contrainte moyenne et de l'écart type et un %NSM moins important que la MMN.

Tableau 4.18 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN modifiée 1

	$\sigma_{VM} \text{ max}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ moy}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ min}$ (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM} \text{ max}$	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>MMN</b>	380,59	52,66	2,74	1.75	41,04
<b>MMN mod1</b>	305,43	50,34	3,72	0.95	34,46

### 4.7.3 Application de la MMN modifiée 2

La méthode du mouvement normal modifiée 2 est appliquée au tube en flexion, les paramètres de la méthode utilisés sont les mêmes qu'utilisés précédemment (tableau 4.3).

#### *Forme obtenue*

La figure 4.31 illustre la forme obtenue avec la méthode du mouvement normal modifiée 2 en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c). Le déplacement est régulier dans tout le tube, on remarque que la transition entre la zone de design et de non design se

fait de manière progressive. Le déplacement maximal vaut 7.4 mm. Les nœuds qui se situent autour de l'axe neutre se trouvent légèrement vers l'extérieur.

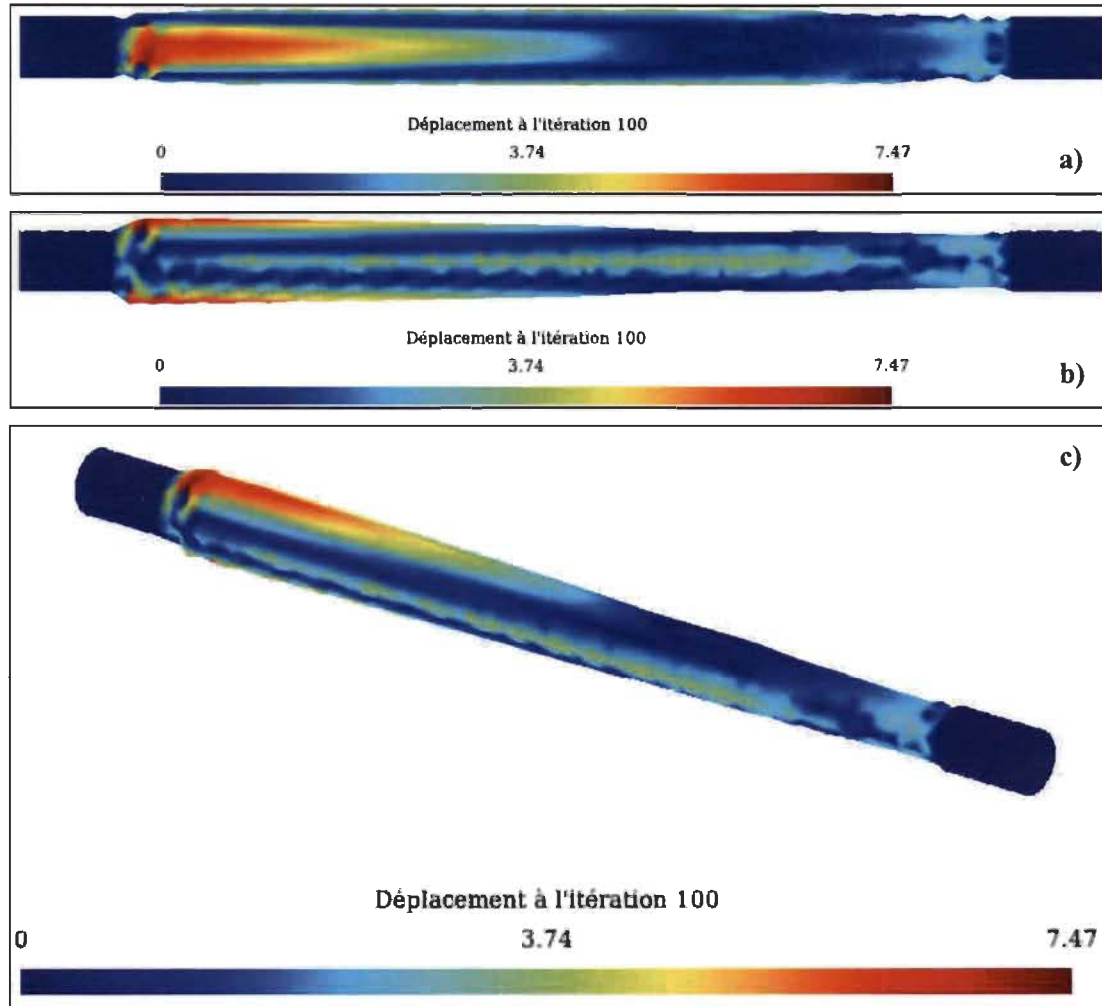


Figure 4.31 Forme optimisée après 100 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

La figure 4.32 montre l'état de contrainte initial en vue de dessus (a), face (b) et 3D (c) et l'état de contrainte final obtenu par la méthode en vue de dessus (d), face (e) et 3D (f). On voit que les contraintes ont tendance à s'uniformiser sauf à la jonction entre la zone de design et de non design près de l'encastrement où les contraintes augmentent.

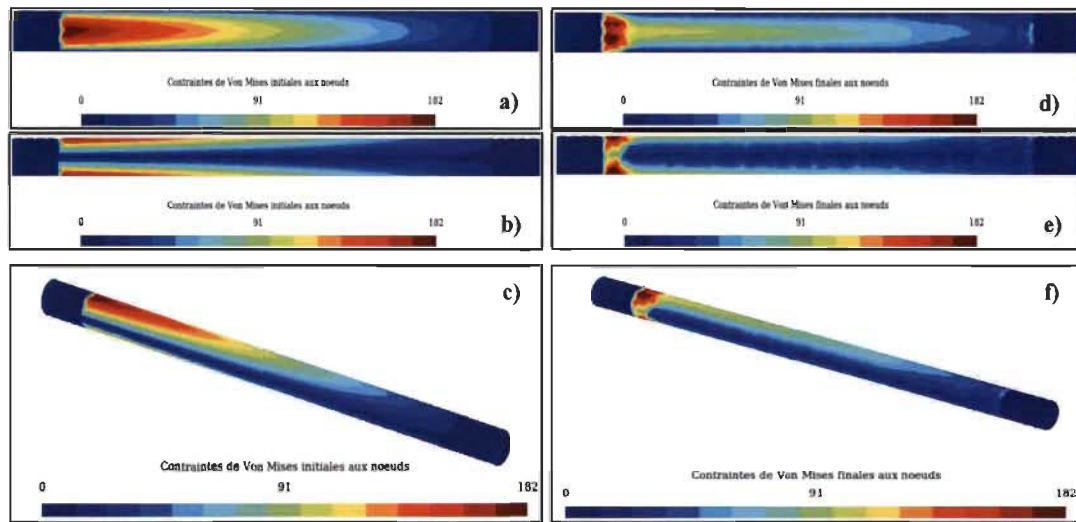


Figure 4.32 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 100 itérations de la MMN modifiée 1 a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

Le tableau 4.19 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant et après optimisation. La contrainte moyenne dans la pièce passe de 64,04 MPa à 52,14 MPa, soit une baisse de 19 % et l'écart type passe de 44,41 à 33,42, soit une baisse de 25%. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 0.82%.

Tableau 4.19 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN modifiée 2

	$\sigma_{VM}$ max (MPa)	$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	$\sigma_{VM}$ min (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	Écart type
<b>initial</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>final</b>	265,53	52,14	4,78	0.82	33,42

#### 4.7.4 Comparaison entre la MMN et la MMN modifiée 2

La figure 4.33 montre le déplacement obtenu avec la MMN (non modifiée) (a) et la MMN modifiée 2 (b).



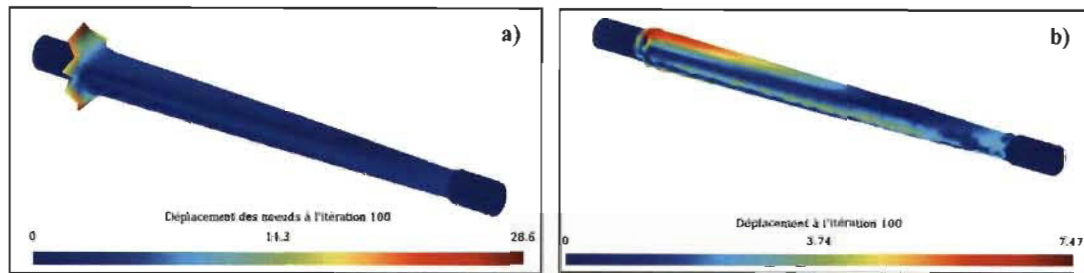


Figure 4.33 Comparaison de la forme obtenue par a) La MMN et b) La MMN modifiée 2

Les formes obtenues sont différentes, plus particulièrement dans la zone la plus proche de l'encastrement. Pour la MMN, on a un déplacement très important et brusque, avec un déplacement maximal de 28,6 mm tandis que pour la méthode modifiée 2, le déplacement est plus progressif. Le déplacement maximal vaut 7.7 mm, déplacement quatre fois moins important (baisse de 76%).

Comme vu précédemment, les nœuds qui se trouvent sur la zone la plus près de l'encastrement ne respectent pas la condition 1, et sont repositionnés dans le sens opposé ce qui conduit à un déplacement moins important vers l'extérieur par rapport à la MMN.

Comme avec la méthode modifiée 1, la position des nœuds qui sont sur l'axe neutre est différente entre la méthode MMN modifiée 2 et la MMN, puisque la condition 2 n'est pas respectée, ces nœuds sont déplacés vers l'extérieur à l'opposé de leur position avec la MMN où ils sont positionnés vers l'intérieur.

La figure 4.34 montre l'état de contrainte final obtenu avec la MMN (a) et la MMN modifiée 2 (b). On observe que la répartition est quasiment identique, la zone où les contraintes sont plus élevées est plus importante avec la méthode du mouvement normal non modifiée 2. Les contraintes sur l'axe neutre restent quasiment nulles pour les deux méthodes.

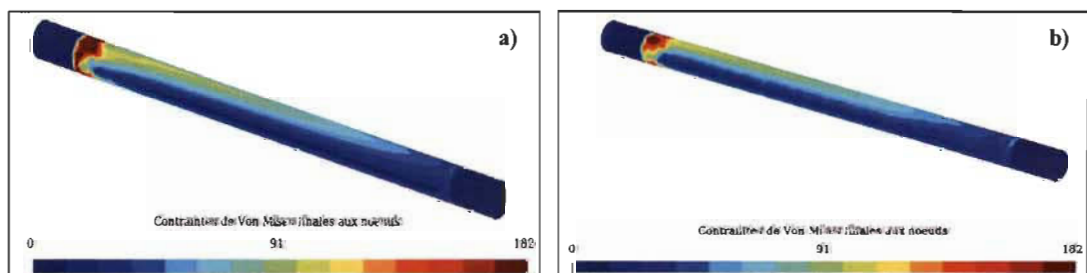


Figure 4.34 Comparaison de l'état de contrainte finale entre a) La MMN et b) La MMN modifiée 2

Le tableau 4.20 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avec la MMN et la MMN modifiée 2. La contrainte moyenne baisse de 18% pour la MMN et de 21% pour la méthode modifiée et l'écart type baisse de 8% pour la MMN et de 25% pour la méthode modifiée. Le pourcentage de nœuds dépassant la valeur de la contrainte maximale initiale est de 1.75% pour la MMN et de 0.82% pour la MMN modifiée, la méthode modifiée 2 permet d'avoir 53% de nœuds dépassant la contrainte max de moins que la MMN. L'utilisation de la MMN modifiée 2 permet d'avoir une diminution plus importante de la contrainte moyenne et de l'écart type et un %NSM moins importante que la MMN.

Tableau 4.4.20 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN modifiée 1

	$\sigma_{VM} \text{ max}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ moy}$ (MPa)	$\sigma_{VM} \text{ min}$ (MPa)	% nœuds > $\sigma_{VM} \text{ max}$	Écart type
<b>initiale</b>	181,95	64,04	8,87	0	44,41
<b>MMN</b>	380,59	52,66	2,74	1.75	41,04
<b>MMN mod2</b>	265,53	52,14	4,78	0.82	33.42

#### 4.8 Comparaison entre les différentes méthodes de contrôle

Dans cette section, on compare les résultats obtenus avec les différentes méthodes de contrôle décrites précédemment ainsi que la méthode de contrôle utilisée avec la MMN implémentée avec un maillage linéaire, méthode dite du gradient. Les méthodes de contrôle sont appliquées sur le tube en porte-à-faux décrit précédemment.

La méthode du gradient consiste à respecter une valeur seuil sur la norme du vecteur gradient de déplacement de chaque triangle situé dans la zone de design possédant deux nœuds fixes. Initialement, ce sont les triangles situés aux jonctions entre la zone de design et de non design, ces triangles ont deux nœuds fixes et un nœud mobile. Si la norme du vecteur gradient de déplacement dépasse le seuil, le nœud mobile de chacun de ces triangles est remplacé itérativement dans la direction inverse à la normale jusqu'à ce que la norme du gradient de déplacement soit respectée. Le remplacement des nœuds mobiles est appréhendé sous la forme d'un problème de minimisation de la somme de l'erreur au carré entre la norme du gradient de déplacement de chaque

triangle et la valeur maximale imposée. Les nœuds mobiles replacés sont fixés pour les itérations suivantes. Pour plus de détails, se référer à Gervais-Lavoie, 2015.

Les paramètres de la méthode du gradient sont :

- Norme maximale  $s$  du gradient de déplacement d'un triangle (critère pour limiter le déplacement des nœuds par rapport à leur position initiale);
- Pas  $\alpha$  de l'algorithme du gradient (facteur servant à calculer le remplacement du nœud par l'algorithme du gradient);
- Critère d'arrêt  $\varepsilon$  de l'algorithme du gradient (valeur cible de la norme du gradient de la fonction à minimiser pour l'arrêt de l'algorithme du gradient);
- Variation minimale de la norme du gradient de la fonction à minimiser (variation seuil minimale de la norme du gradient de la fonction à minimiser, entre 2 itérations de l'algorithme du gradient, pour l'arrêt de l'algorithme);
- Nombre maximal d'itérations de l'algorithme du gradient (nombre maximal d'itérations auquel l'algorithme s'arrête s'il n'a pas convergé). La valeur de ces paramètres est montrée dans le tableau 4.21.

Tableau 4.21 Valeurs des paramètres de la MMN avec gradient

Paramètres	Valeurs utilisées
Norme maximale $s$ du gradient de déplacement d'un triangle	0,2
Pas $\alpha$ de l'algorithme du gradient	1*déplacement du nœud au début de l'algorithme
Critère d'arrêt $\varepsilon$ de l'algorithme du gradient	0,001
Variation minimale de la norme du gradient de la fonction à minimiser	0,0000001
Nombre maximal d'itérations de l'algorithme du gradient	1000

Les comparaisons se feront à partir des critères suivants;

- La forme obtenue;
- La répartition des contraintes;
- Le pourcentage de diminution de la contrainte moyenne par rapport à la contrainte moyenne initiale;
- Le pourcentage de diminution de l'écart type par rapport l'écart type initial;
- Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale.

Le pourcentage de diminution de l'écart type et de la contrainte moyenne ainsi que le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale obtenu avec les différentes méthodes de contrôle sont regroupés dans le tableau 4.22.

Tableau 4.22 Pourcentage de diminution de l'écart type et de la contrainte moyenne ainsi que le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale

	$\sigma_{VM}$ moy %	Écart type %	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max
<b>MMN mod 1</b>	-21	-22	0.95
<b>MMN mod 2</b>	-19	-25	0.82
<b>MMN Taubin</b>	-28	-16	0.75
<b>Filtre (21mm)</b>	-9	-7	1.47
<b>gradient</b>	-13	-15	0.19

#### *Comparaison de la forme obtenue*

La figure 4.35 montre la forme obtenue avec la MMN a), la MMN avec lissage Taubin b), la MMN avec filtre c), MMN modifiée 1 d), MMN modifié 2 e) et MMN avec gradient f).

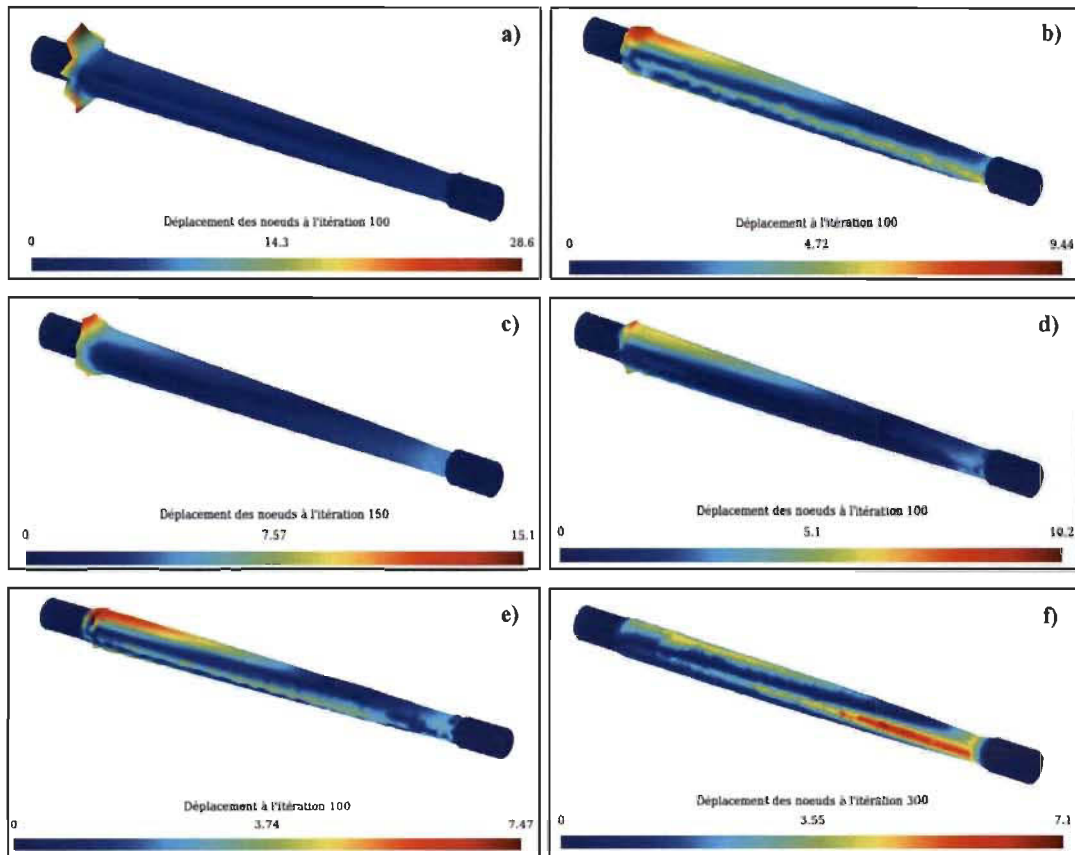


Figure 4.35 Comparaison des formes obtenues par a) La MMN b) MMN avec lissage Taubin c) MMN avec filtre d) MMN modifiée 1 e) MMN modifiée 2 et f) MMN avec gradient.

Comme vu précédemment, toutes les méthodes de contrôle permettent d'avoir une transition entre la zone de design et de non design du côté de l'encastrement moins brusque et plus progressive. La différence entre les formes obtenues se situe dans la position des nœuds qui se trouvent autour de l'axe neutre (figure 4.36).

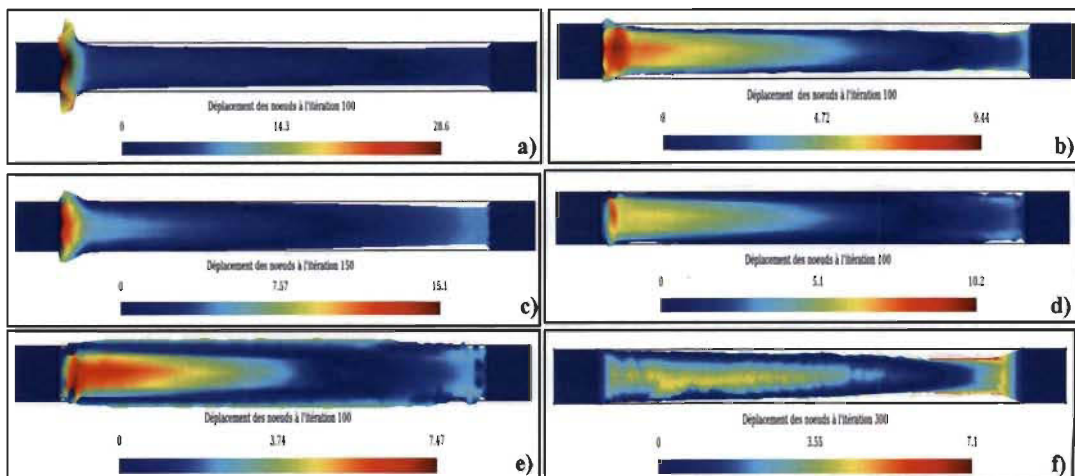


Figure 4.36 Comparaison des formes obtenues en vue de dessus par a) La MMN b) MMN avec lissage Taubin c) MMN avec filtre d) MMN modifiée 1 e) MMN modifiée 2 et f) MMN avec gradient.

Pour la MMN avec lissage Taubin, ces nœuds se déplacent vers l'intérieur, le long du tube (figure 4.36 (b)), pour la MMN avec filtre, les nœuds se trouvent vers l'extérieur dans la première moitié du tube et vers l'intérieur dans la deuxième moitié (figure 4.36 (c)). Pour la MMN modifiée 1, les nœuds restent à leur position initiale (figure 4.36 (d)). Pour la MMN modifiée 2, les nœuds se trouvent légèrement vers l'extérieur (figure 4.36 (e)) et pour la méthode du gradient, les nœuds se déplacent vers l'intérieur, le long du tube (figure 4.36 (f)).

*Comparaison de la répartition des contraintes*

La figure 4.37 montre l'état de contrainte final obtenu avec la MMN a), la MMN avec lissage Taubin b), la MMN avec filtre c), MMN modifiée 1 d), MMN modifiée 2 e) et MMN avec gradient f).

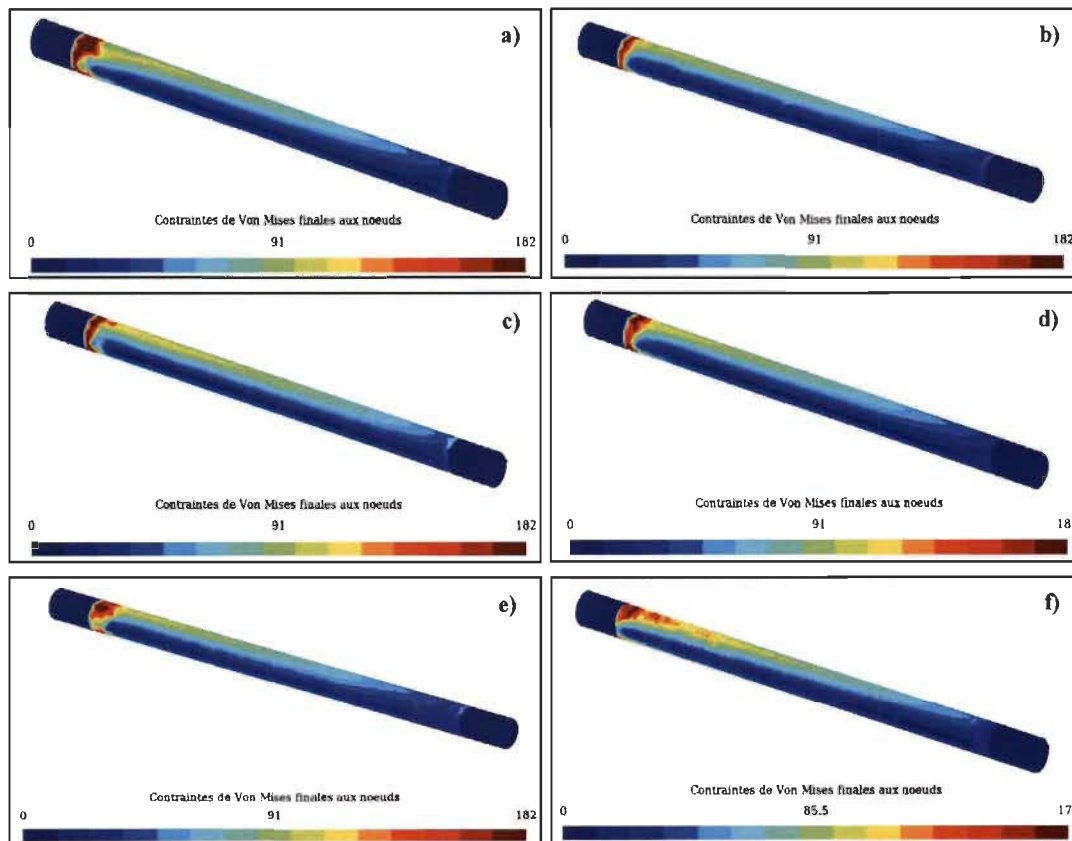


Figure 4.37 Comparaison de l'état de contrainte final obtenu avec a) La MMN b) la MMN avec lissage Taubin c) la MMN avec filtre d) MMN modifiée 1 e) MMN modifiée 2 f) MMN avec gradient

On a une meilleure répartition et uniformisation des contraintes en utilisant la méthode modifiée 1 et 2 et le lissage Taubin par rapport à l'utilisation de la MMN avec filtre et

gradient. La méthode du gradient donne la répartition des contraintes la moins uniforme et des régions avec des concentrations de contraintes au milieu du tube, et ce malgré un nombre d'itérations plus important (300 itérations).

*Le pourcentage de diminution de la contrainte moyenne*

Les méthodes modifiées et le lissage Taubin ont le pourcentage de diminution de la moyenne le plus important (MMNM1 21%, MMNM2 19%, lissage Taubin 28%). Cette diminution est moins importante en utilisant un filtre 9% et la méthode du gradient 13%. En analysant ces résultats, on remarque qu'il y a une correspondance avec les résultats des comparaisons précédents : les méthodes donnant une répartition de contraintes la plus uniforme ont une baisse de la contrainte moyenne la plus importante.

*Le pourcentage de diminution de l'écart type*

On a une diminution de l'écart type avec toutes les méthodes de contrôle utilisées, ce qui veut dire que les contraintes tendent à s'uniformiser. La MMN avec lissage Taubin et la MMN modifiée 1 et 2 ont le pourcentage de diminution le plus important.

*Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale*

Les méthodes de contrôle permettent d'avoir un pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale inférieur à 1%. Il y a une corrélation entre le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale et le déplacement dans la jonction entre la zone de design et de non design près de l'encastrement, plus le déplacement en cette région est grand plus le pourcentage augmente. La méthode du gradient a le déplacement le plus faible dans cette région et le %NSM le plus faible, tandis que la MMN avec filtre a le déplacement le plus grand et le %NSM le plus important.

D'après ces comparaisons on peut déduire que les méthodes modifiées 1 et 2 et le lissage Taubin donnent les meilleurs résultats, puisqu'elles permettent une meilleure uniformisation des contraintes, une plus grande diminution de la contrainte moyenne et un pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max moins importants. Mais les

méthodes modifiées ont un avantage sur le lissage Taubin, qui est la position des nœuds sur l'axe neutre.

La contrainte des nœuds qui se trouvent sur l'axe neutre est quasiment nulle et cette contrainte ne change pas malgré le déplacement des nœuds vers l'intérieur. Ce qui conduit à une diminution de la section du tube au fur et à mesure des itérations en utilisant le lissage Taubin, mais en utilisant les méthodes modifiées, les nœuds ne se déplacent pas vers l'intérieur et la section du tube ne diminue pas.

#### 4.9 Comparaison de l'utilisation de la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire et un maillage quadratique

Dans cette section, on compare les résultats obtenus en utilisant la méthode du mouvement normal modifiée 1 avec un maillage quadratique et un maillage linéaire sur le tube en flexion décrit précédemment. On compare les résultats obtenus avec différentes tailles d'éléments. Le tableau 4.23 montre la taille des éléments, le nombre de nœuds et le nombre d'éléments de chaque maillage.

Tableau 4.23 Taille des éléments, nombre de nœuds et d'éléments des maillages linéaires et quadratiques

	Maillage linéaire			Maillage quadratique		
Taille (mm)	3.5	5	6.5	7	10	13
Nb de nœuds	5654	2803	1661	5632	2840	1624
Nb d'éléments	11268	5582	3306	2806	1414	808

La figure 4.38 montre la forme obtenue avec la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire d'une taille d'éléments de 3.5 mm a), 5 mm b) et 6.5 mm c) et avec un maillage quadratique d'une taille d'éléments de 7 mm d), 10 mm e) et 13 mm f). La forme obtenue avec les différents maillages linéaires n'est pas régulière. On remarque l'apparition de petits pics à la jonction entre la zone de design et de non design près de l'encastrement. La forme obtenue avec les différents maillages quadratiques est plus



régulière. La transition entre la zone de design et de non design près de l'encastrement se fait de manière progressive.

Pour une taille de 7 mm (figure 4.38 (d)), on peut observer une légère irrégularité là où le déplacement est maximal. Le déplacement maximal vaut 10,2 mm. La contrainte aux nœuds est très sensible à la position des nœuds voisins, particulièrement pour les maillages fins. L'utilisation d'un maillage trop fin peut causer l'apparition d'irrégularités locales. Ces irrégularités peuvent engendrer des concentrations de contraintes qui conduisent à un déplacement trop important. Pour une taille de 10 mm (figure 4.38 (e)), le déplacement maximal vaut 6,68 mm. Cette taille d'éléments donne la forme la plus régulière. Pour une taille de 13 mm (figure 4.38 (f)), on remarque l'apparition d'ondulations. Un lissage ou un autre traitement pourrait être utilisé pour régulariser la forme. Le déplacement maximal vaut 7,38 mm.

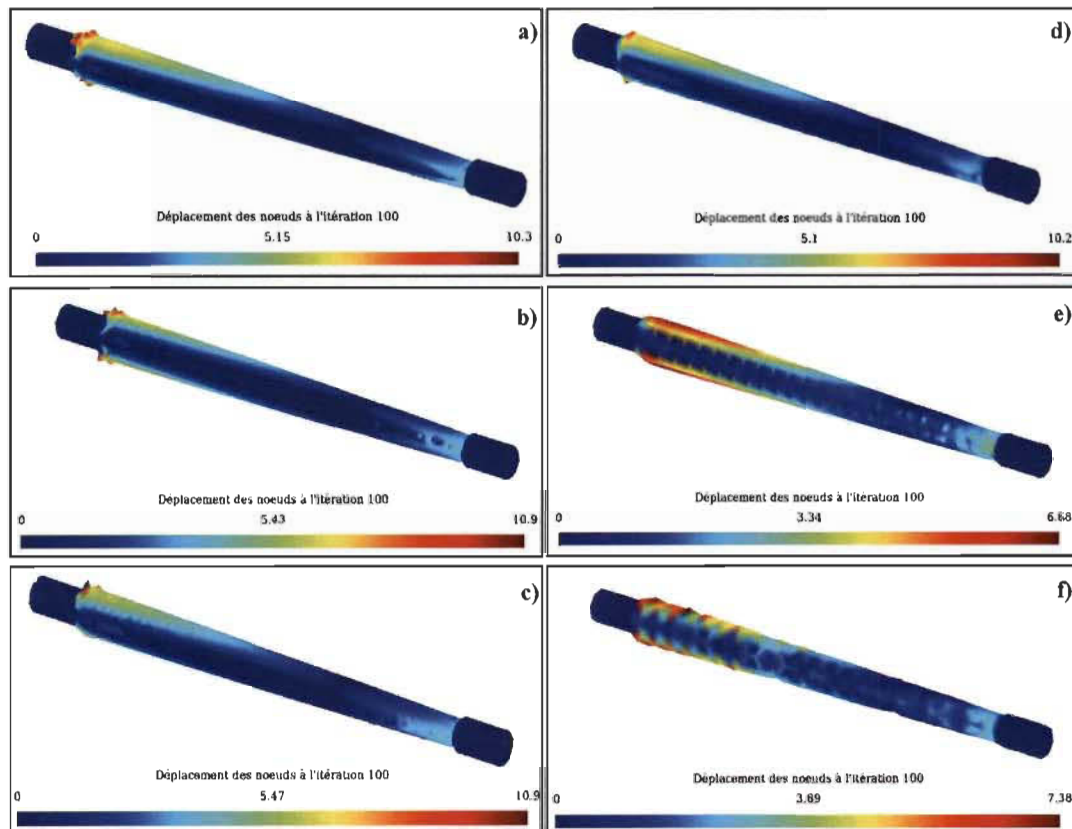


Figure 4.38 Forme obtenue avec la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire d'une taille d'éléments de a) 3.5 mm, b) 5 mm et c) 6.5 mm et avec un maillage quadratique d'une taille d'éléments de d) 7 mm, e) 10 mm et f) 13 mm

La figure 4.39 montre l'état de contrainte final obtenu avec la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire d'une taille d'éléments de 3.5 mm a), 5 mm b) et 6.5 mm c) et avec un maillage quadratique d'une taille d'éléments de 7 mm d), 10 mm e) et 13 mm f). On a une uniformisation des contraintes pour les différents maillages. On observe aussi que l'on n'a pas de concentration de contraintes à la jonction entre la zone de design et de non design près de l'encastrement pour les maillages quadratiques avec une taille d'éléments de 10 mm et de 13 mm.

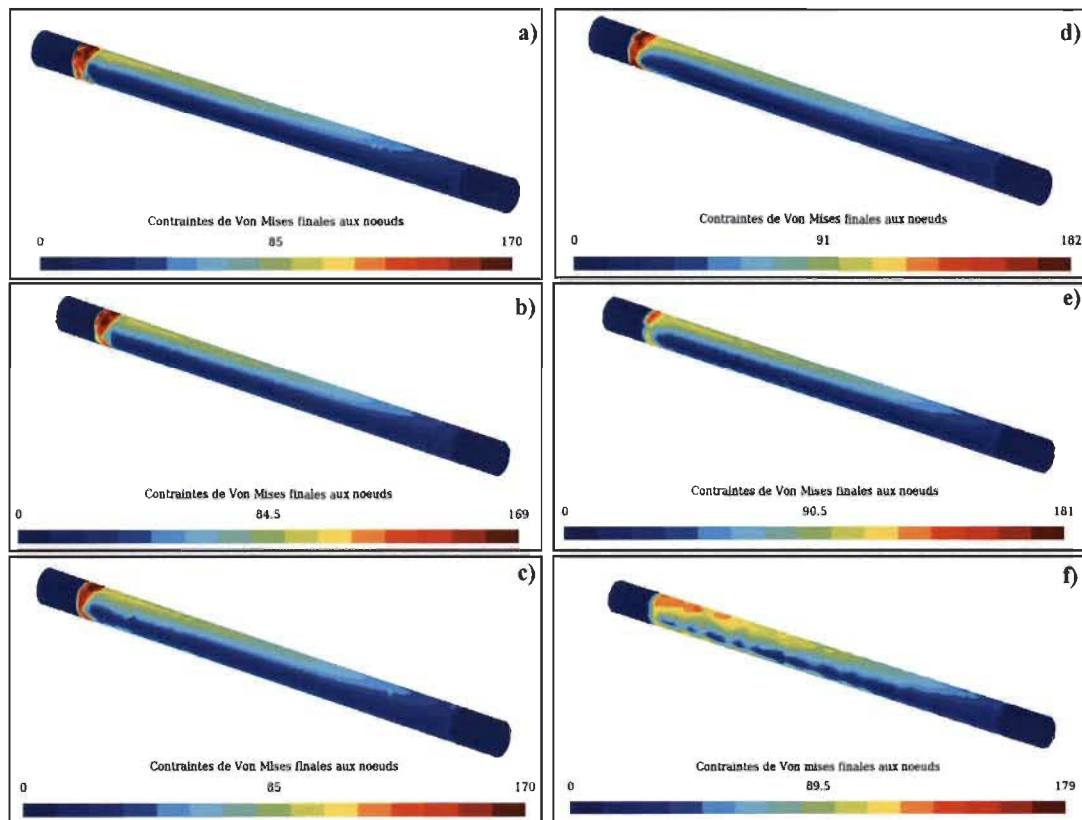


Figure 4.39 Comparaison de l'état de contrainte final obtenu avec la MMN modifiée 1 avec un maillage linéaire d'une taille d'éléments de a) 3.5 mm, b) 5 mm et c) 6.5 mm et avec un maillage quadratique d'une taille d'éléments de d) 7 mm, e) 10 mm et f) 13 mm

Le tableau 4.24 montre le pourcentage de diminution de l'écart type et de la contrainte moyenne ainsi que le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale obtenu. La contrainte moyenne baisse d'environ 20% pour les maillages quadratiques avec une taille d'éléments de 7 mm et de 10 mm ainsi que les maillages linéaires avec une taille d'éléments de 3.5 mm et de 5mm. Pour le maillage linéaire avec une taille

d'éléments de 6.5 mm et le maillage quadratique avec une taille d'éléments de 13 mm la contrainte moyenne baisse de 6% seulement. L'écart type diminue de 33% pour le maillage quadratique avec une taille d'éléments de 10 mm et diminue d'environ 25% pour les maillages restants. Le %NSM est nul pour les maillages quadratiques avec une taille d'éléments de 10 mm et de 13 mm. La contrainte maximale diminue pour ces deux maillages. Comme vu précédemment, ces deux maillages ont une transition régulière et progressive entre la zone de design et de non design ce qui prévient l'apparition de concentration de contraintes. D'après les différents résultats obtenus, on peut dire que la taille d'éléments optimale pour ce cas d'étude est de 10 mm (maillage quadratique).

Tableau 4.24 Pourcentage de diminution de l'écart type et de la contrainte moyenne ainsi que le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale pour les différents maillages

	$\sigma_{VM}$ moy %	Écart type %	% nœuds > $\sigma_{VM}$ max
<b>Linéaire 3.5 mm</b>	-21	-22	0.88
<b>Quadratique 7 mm</b>	-21	-25	0.66
<b>Linéaire 5 mm</b>	-19	-25	0.48
<b>Quadratique 10 mm</b>	-23	-33	0
<b>Linéaire 6.5 mm</b>	-6	-27	0.44
<b>Quadratique 13 mm</b>	-6	-24	0

#### 4.10 Convergence de la MMN

Pour que la MMN converge, il faut que le critère de convergence, basé sur l'écart admissible entre la valeur de contrainte en chaque nœud et la contrainte objectif, soit atteint. Le tableau 4.25 montre les valeurs des contraintes et l'écart type après 100 et 200 itérations obtenues par la MMN. On voit que la contrainte maximale augmente. Elle se situe dans la jonction entre la zone design et non-design près de l'encastrement ou l'on a une concentration de contraintes. La contrainte minimale reste très faible, et

ce malgré l'utilisation de la MMN. Cela correspond aux nœuds qui se trouvent sur l'axe neutre. Cela veut dire que les nœuds qui se trouvent dans la jonction près de l'encastrement et autour de l'axe neutre n'atteignent pas le critère de convergence et la méthode diverge. Le processus itératif s'arrête lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint.

Tableau 4.25 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN après 100 et 200 itérations

	initial	100 itér	200 itér
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	181,95	380,59	367,34
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	64,04	52,66	44,99
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	8,87	2,74	2,27
Écart type	44,41	41,04	30,50

Mais d'après le tableau 4.25, on voit que la valeur de la contrainte moyenne et de l'écart type diminue de manière importante (30%), ce qui veut dire que la méthode tend à uniformiser les contraintes et atteint une certaine convergence. Cela correspond aux résultats que l'on observe dans la figure 4.40.

Le critère de convergence est trop restrictif et local. Il suffit que ce critère ne soit pas atteint en un seul nœud pour que la méthode diverge. Un critère de convergence qui prendrait en compte l'état de contrainte global serait mieux adapté.

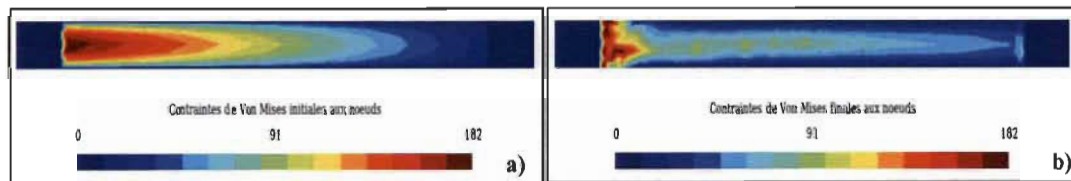


Figure 4.40 Comparaison de l'état de contrainte a) Initial et b) Final après 200 itérations de la MMN en vue de dessus

#### 4.11 Conclusion

La MMN a été intégrée avec un maillage quadratique. L'utilisation de la méthode avec un maillage quadratique nécessite l'utilisation d'un algorithme de recentrage des nœuds milieux et un algorithme d'optimisation de la qualité des triangles.

La méthode a été appliquée à un tube à paroi mince en porte-à-faux. Une meilleure distribution des contraintes et une diminution importante de la contrainte moyenne a été observée, mais aussi un déplacement trop important au niveau de la jonction entre la zone de design et de non design près de l'encastrement, nécessitant un contrôle de la méthode. Plusieurs méthodes de contrôle ont été utilisées : le lissage Taubin, l'utilisation de filtres (filtrage des déplacements) et deux modifications de la MMN. Les différentes méthodes permettent d'avoir une transition entre la zone de design en non design progressive et moins brusque, une diminution de la contrainte moyenne et de l'écart type plus importante et un %NSM moins élevé. Puis les résultats d'optimisation obtenus avec les différentes méthodes de contrôle ont été comparés entre eux. La méthode du MMN modifiée (1 et 2) donne le résultat le plus avantageux. La MMN modifiée 1 a été appliquée avec un maillage linéaire et un maillage quadratique. Différentes tailles d'éléments ont été utilisées. L'utilisation d'un maillage quadratique donne une forme plus régulière.

## CHAPITRE 5

### RÉSULTATS

#### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente des exemples de résultats obtenus par la MMN avec et sans contrôle, sur différentes structures tubulaires et la reconstruction géométrique d'un résultat d'optimisation. La valeur du coefficient de convergence a été posée à 0.05 pour tous les exemples.

Pour chaque exemple de ce chapitre, les résultats sont présentés sous la forme d'un tableau et de deux figures. Le tableau contient les valeurs des contraintes de Von Mises, l'écart type et le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte maximale initiale. La première figure montre en a) la forme initiale et les conditions aux limites, en b) la forme obtenue par la MMN, c) forme obtenue par la MMN modifiée 1 et d) la forme obtenue par la MMN modifiée 2. La seconde figure montre en a) l'état de contrainte initial, en b) l'état de contrainte final obtenu par la MMN, c) l'état de contrainte final obtenu par la MMN modifiée 1 et d) l'état de contrainte final obtenu par la MMN modifiée 2.

#### 5.2 Cadre de vélo - cas de chargement 1

La figure 5.1 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites. Les tiges de gauche sont bloquées en translation suivant les axes X, Y et Z, le tube de direction est bloqué suivant l'axe Y. Une force de 2500N est appliquée sur l'arête supérieure du tube vertical (siège), perpendiculaire à celui-ci. Le tableau 5.1 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

La contrainte moyenne augmente de 11% pour la MMN et de 3% pour la méthode modifiée 2 et elle baisse de 2% pour la méthode modifiée 1. L'écart type augmente de 34 % pour la MMN tandis qu'il baisse de 20% pour la méthode modifiée 1 et reste le même pour la méthode modifiée 2. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 4.56% pour la MMN, 0.64% pour la méthode modifiée 1 et 2.30% pour la méthode modifiée 2. D'après ces résultats, on en déduit que la méthode modifiée 1 donne résultat le plus avantageux.

Tableau 5.1 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et 2

	initial	MMN	Mod1	Mod2
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	0.51	1.77	0.67	0.30
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	10.98	12.45	10.78	11.27
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	22.14	71.22	35.82	53.27
Écart type	4.57	6.14	3.66	4.57
%nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0.0	4.56	0.64	2.30

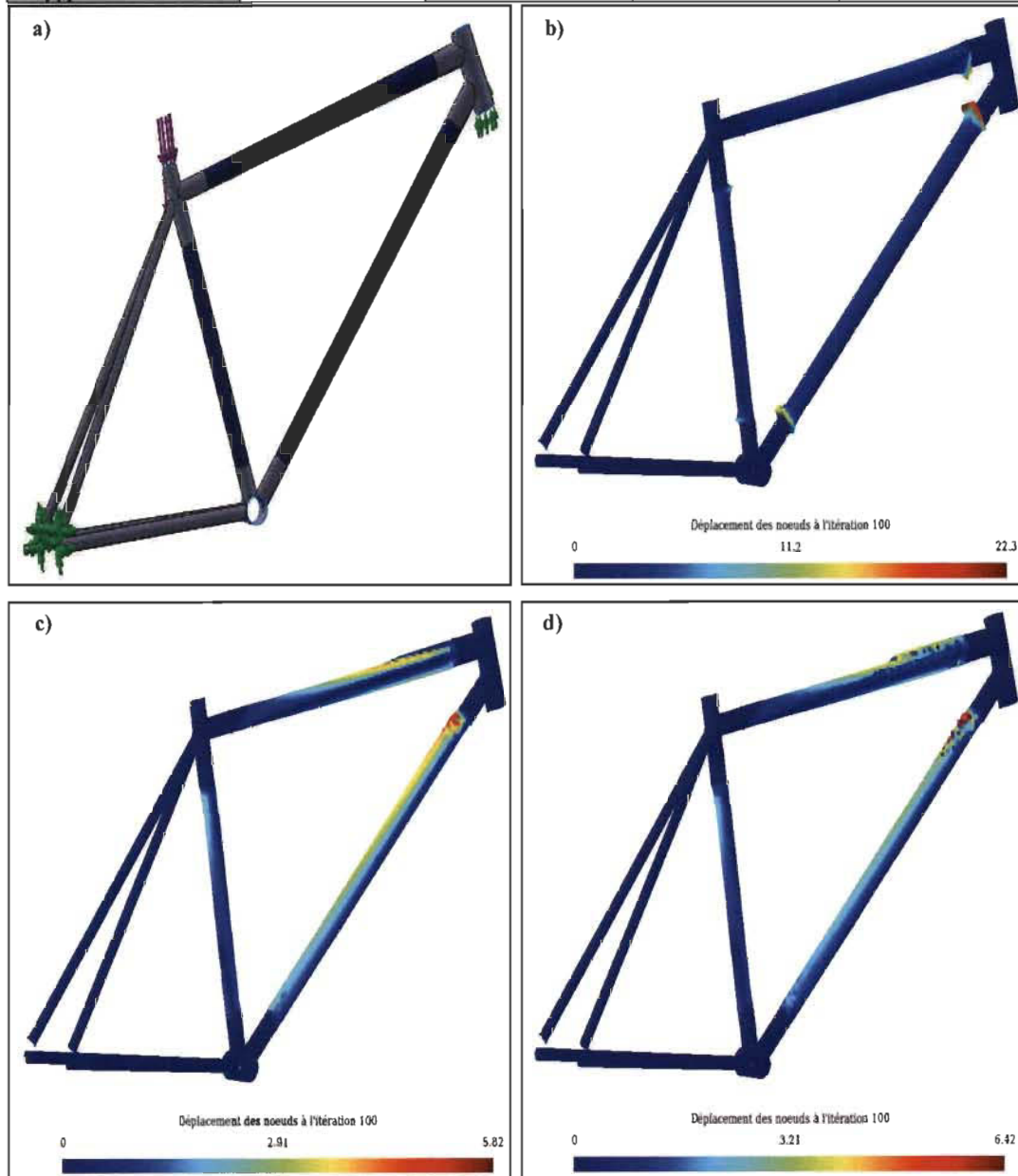


Figure 5.1 Cadre de vélo a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2

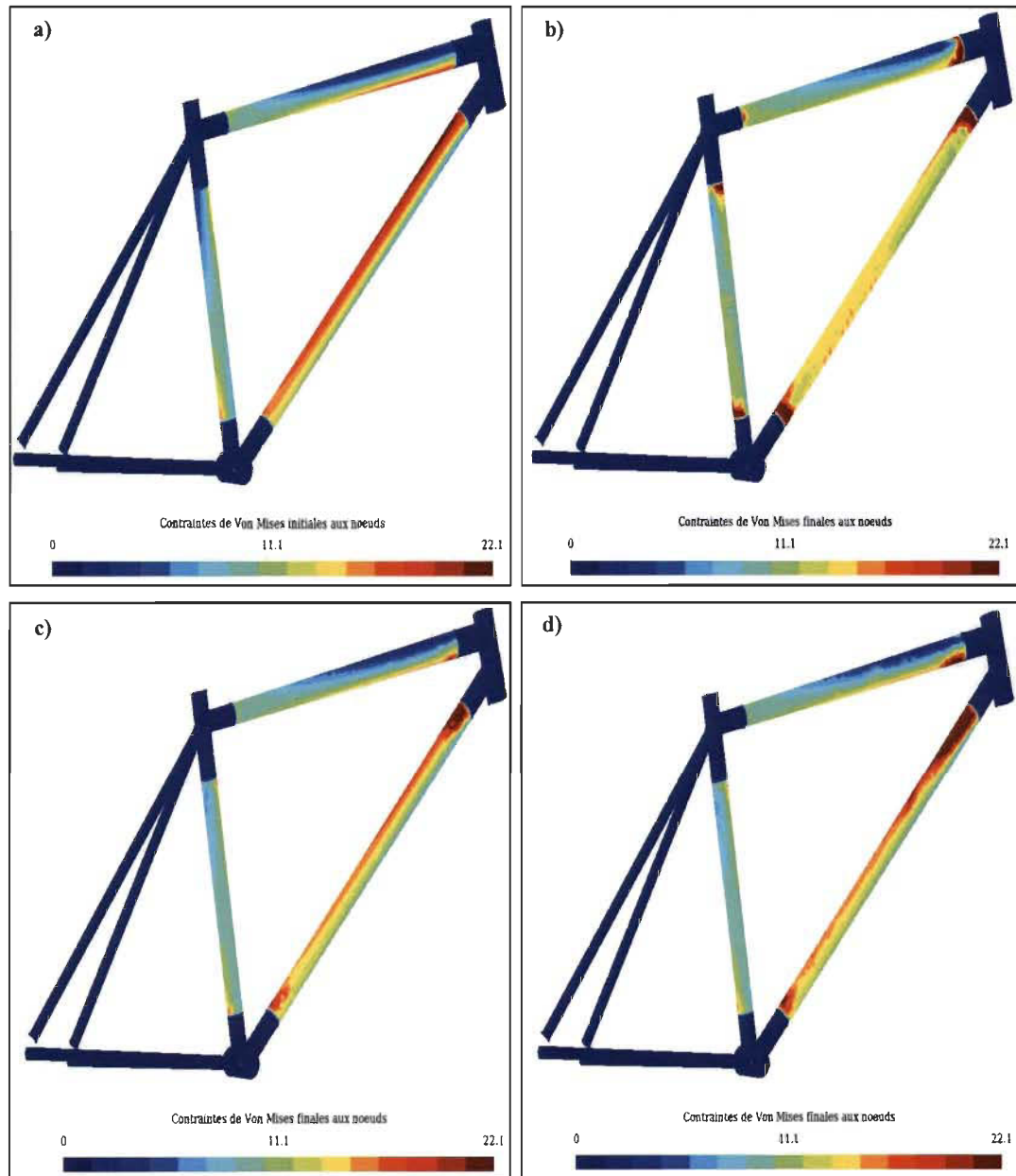


Figure 5.2 Cadre de vélo a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2



### 5.3 Cadre de vélo - cas de chargement 2

La figure 5.3 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites. Les tiges de gauche sont bloquées en translation suivant les axes X, Y et Z. Le tube de direction est bloqué en translation suivant l'axe Y. Une force de 274 N suivant l'axe X et une force de 406 N suivant l'axe Y est appliquée sur l'arête supérieure du tube vertical (siège). Deux forces sont appliquées sur le boîtier de pédalier, une force de 200 N suivant l'axe X et une force de 1960 N suivant l'axe Y. Sur le tube de direction, une force de 71N suivant l'axe X et une force de 69.2 N suivant l'axe Y est appliquée. Le tableau 5.2 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

Tableau 5.2 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2

	initial	MMN	Mod1	Mod2
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	0.25	0.25	0.35	0.18
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	5.77	5.99	5.61	5.91
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	11.37	30.56	21.15	26.07
Écart type	2.72	3.53	2.18	2.66
% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0	5.92	1.02	3.34

La contrainte moyenne augmente de 11% pour la MMN et de 2% pour la méthode modifiée 2 et elle baisse de 2% pour la méthode modifiée 1. L'écart type augmente de 30 % pour la MMN tandis qu'il baisse de 20% pour la méthode modifiée 1 et de 2% pour la méthode modifiée 2. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 5.92% pour la MMN, 1.02% pour la méthode modifiée 1 et 3.34% pour la méthode modifiée 2. La méthode modifiée 1 donne le meilleur résultat.

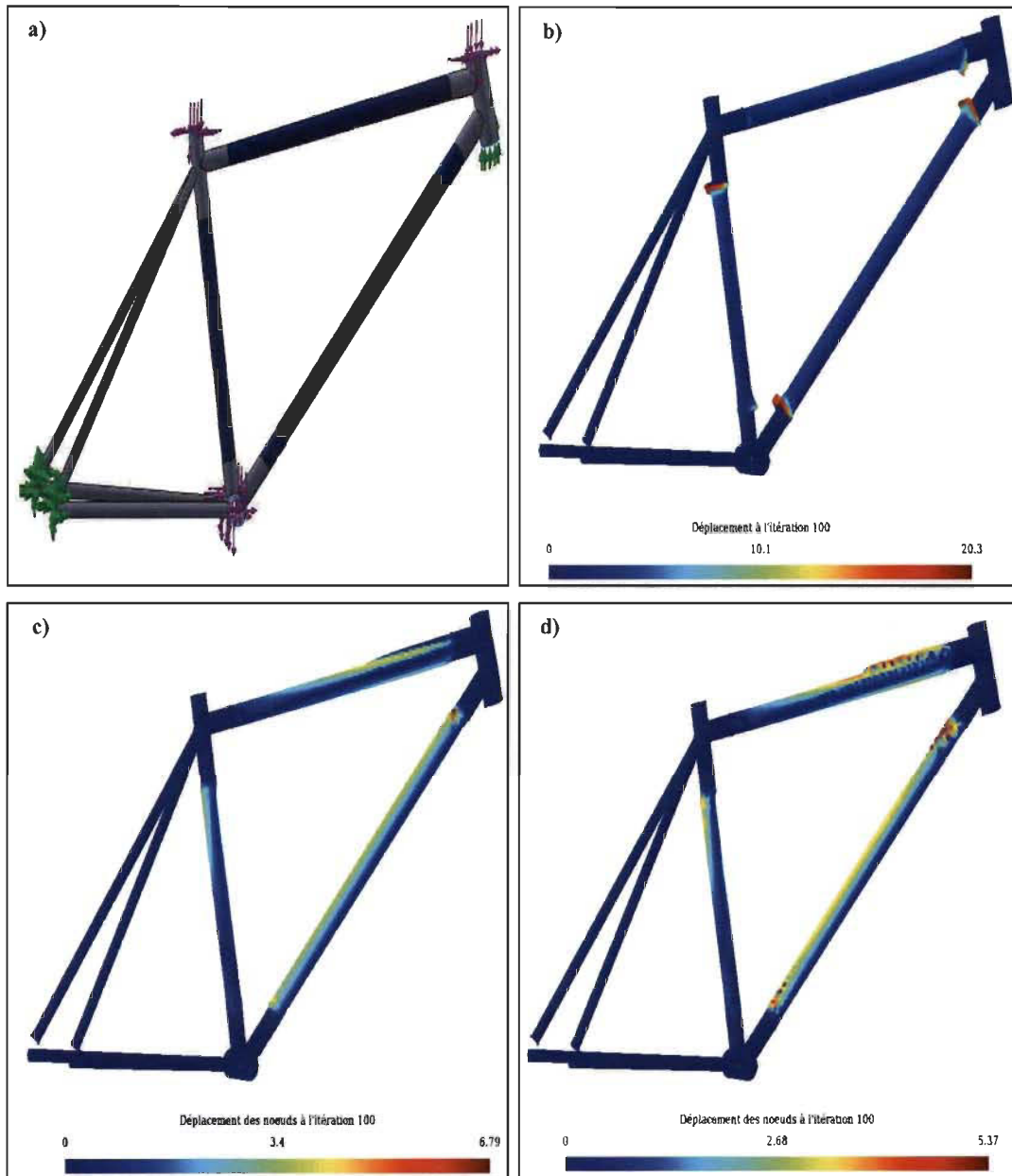


Figure 5.3 Cadre de vélo a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2

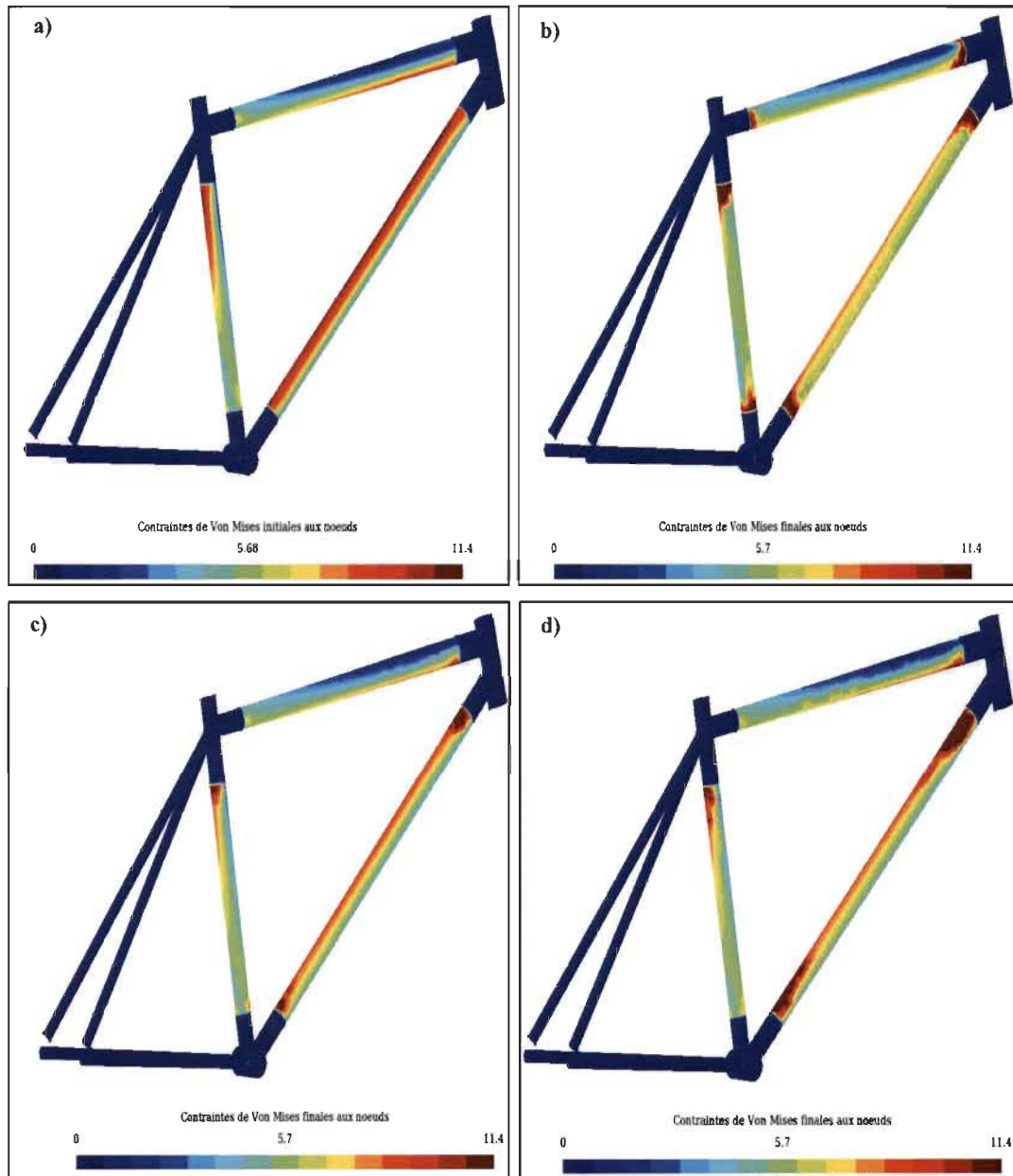


Figure 5.4 Cadre de vélo a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2

### 5.4 Table

La figure 5.5 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites. Les arêtes des pieds sont bloquées en translation suivant les axes X, Y et Z et une pression de 500 Pa est appliquée sur le haut de la structure. Le tableau 5.3 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

Tableau 5.3 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2

	<b>initial</b>	<b>MMN</b>	<b>Mod1</b>	<b>Mod2</b>
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	0.20	0.28	0.13	0.26
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	3.81	3.48	3.50	3.74
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	6.64	6.54	5.88	7.37
Écart type	1.48	1.42	1.45	1.49
% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0	0	0.0	0.07

La contrainte moyenne baisse de 9% pour la MMN, de 8% pour la méthode modifiée 1 et de 2% pour la méthode modifiée 2. L'écart type baisse de 4 % pour la MMN et de 2% pour la méthode modifiée 1 et augmente de 1% pour la méthode modifiée 2. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 0% pour la MMN et la méthode modifiée 1 et 0.07% pour la méthode modifiée 2. On déduit que la MMN et la MMN modifiée 1 donnent les meilleurs résultats.

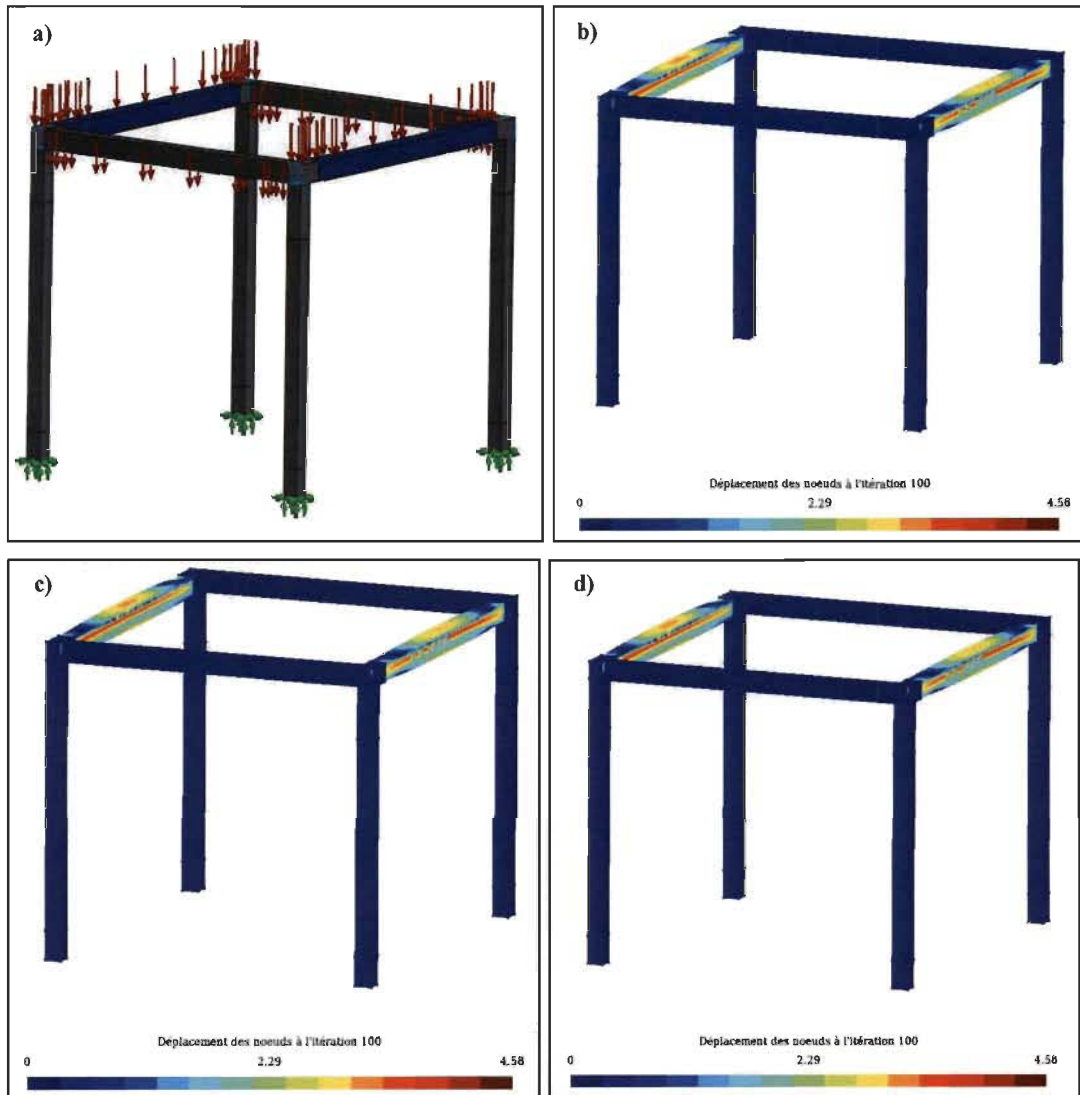


Figure 5.5 Table a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2

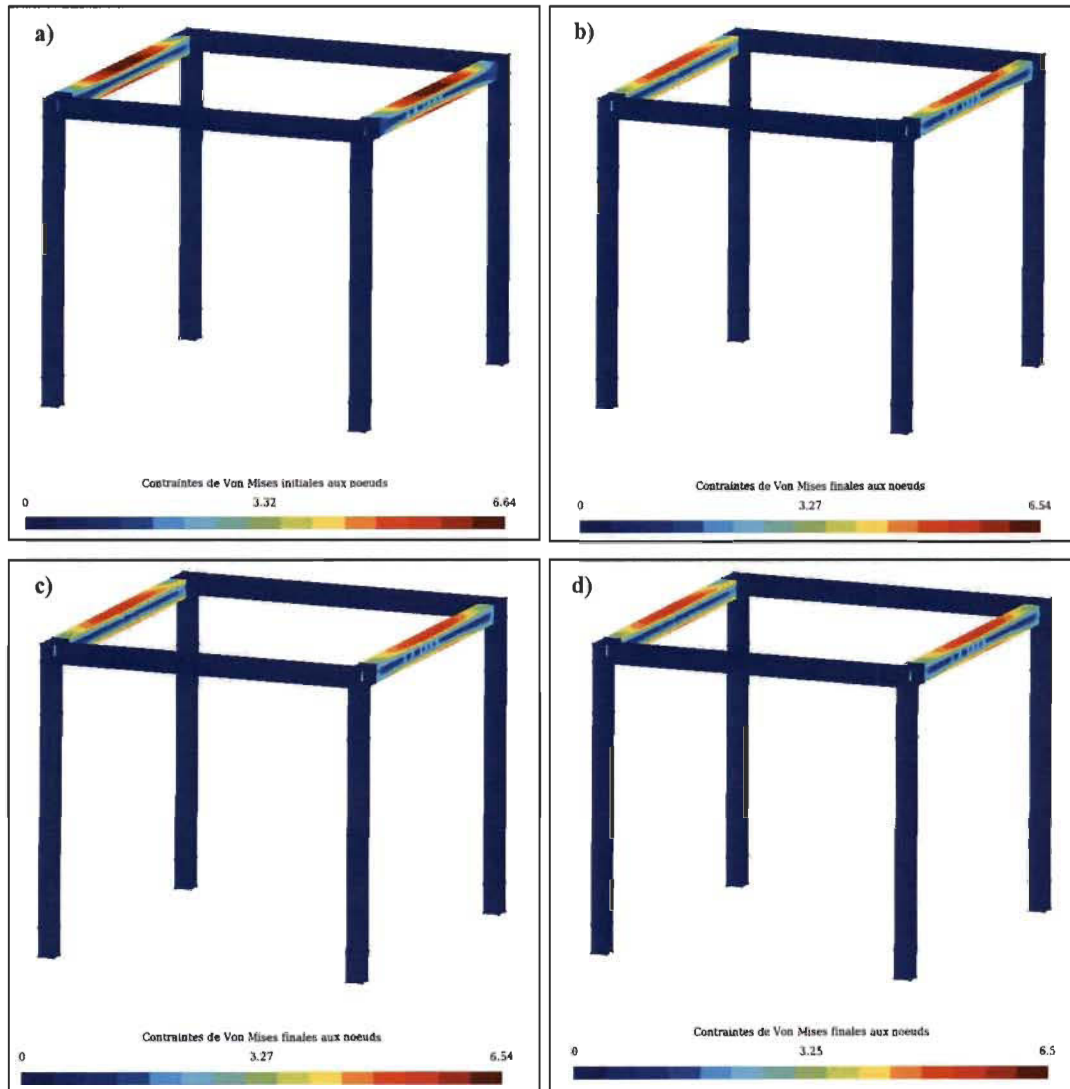


Figure 5.6 Table a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2

### 5.5 Pont - cas 1

La figure 5.7 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites. Les quatre arêtes, deux à gauche et deux à droite sont encastées, une pression de 1000 Pa est appliquée sur le haut de la structure. Le tableau 5.4 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

Tableau 5.4 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2

	initial	MMN	Mod1	Mod2
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	1.16	2.44	2.16	1.66
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	6.88	7.37	6.81	7.06
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	20.14	39.12	29.82	26.88
Écart type	2.78	3.06	2.74	2.81
% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0	1.18	0.27	0.52

La contrainte moyenne augmente de 7% pour la MMN et de 3% pour la méthode modifiée 2 et baisse de 1% pour la méthode modifiée 1. L'écart type augmente de 10% pour la MMN et de 1% pour la méthode modifiée 2 et baisse de 1% pour la méthode modifiée 1. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 1.18% pour la MMN, 0.27% pour la méthode modifiée 1 et 0.52% pour la méthode modifiée 2. La méthode modifiée 1 donne les meilleurs résultats.

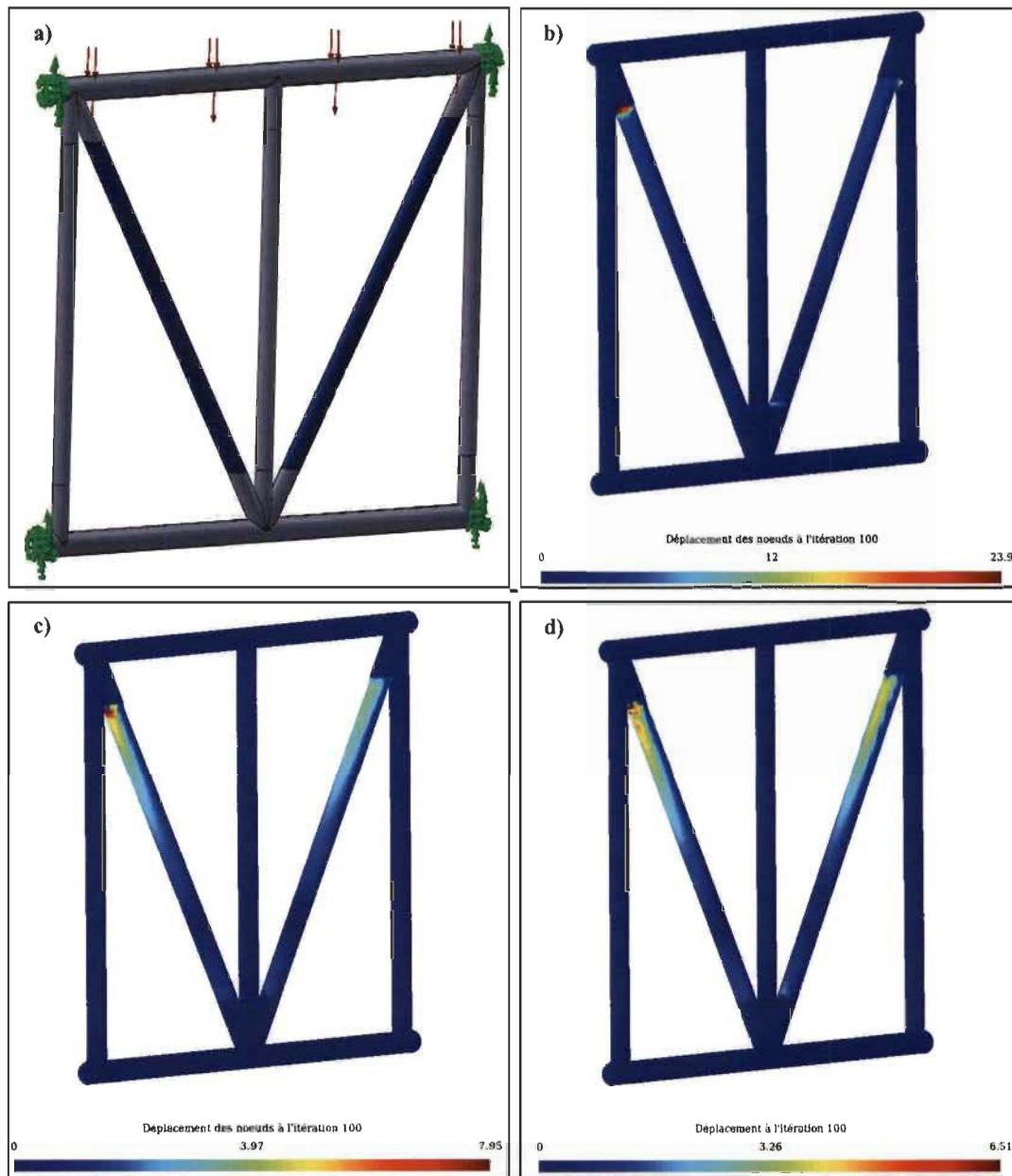


Figure 5.7 Pont a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2



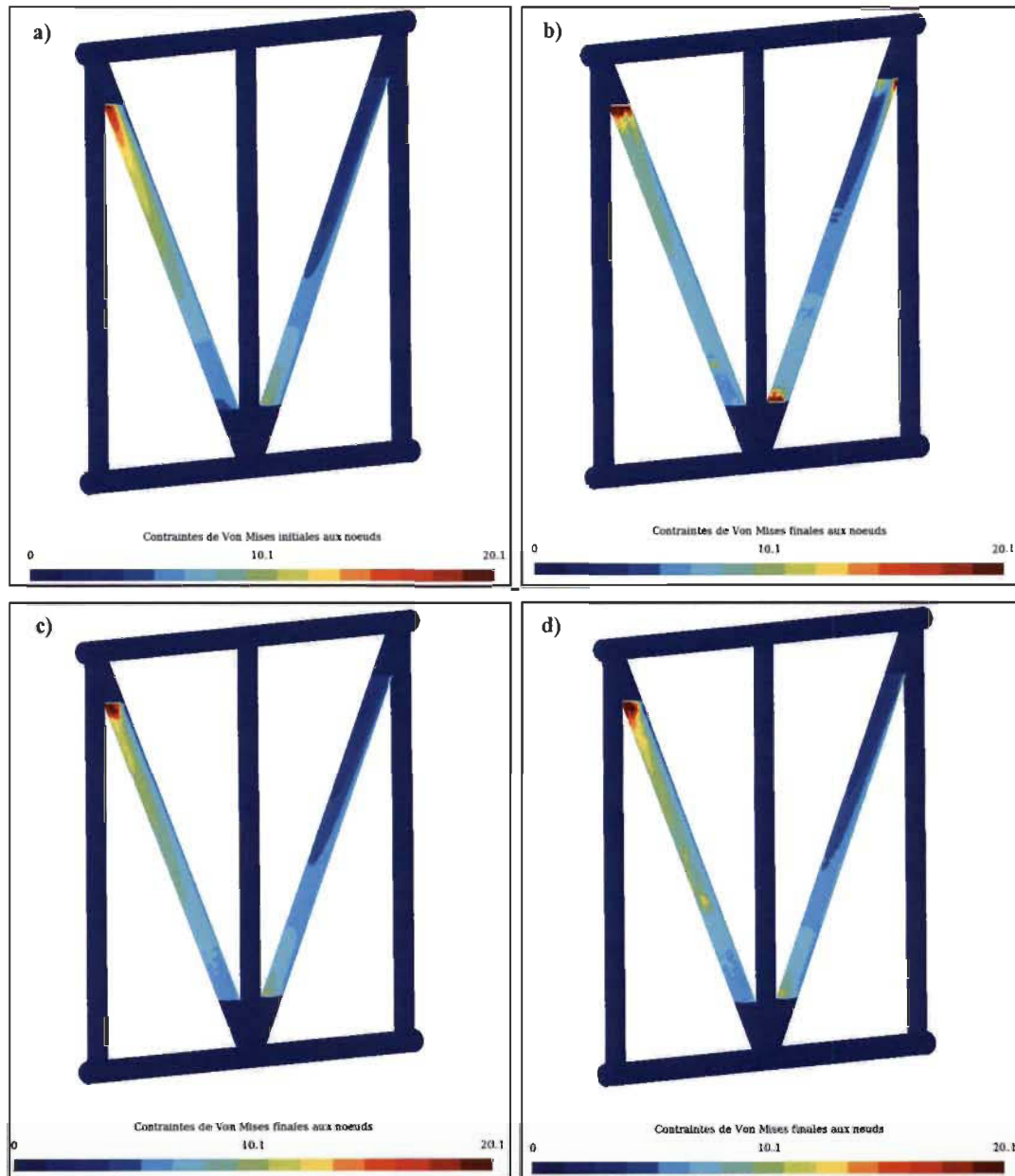


Figure 5.8 Pont a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2

## 5.6 Pont - cas 2

On reprend les conditions aux limites décrites dans le cas 1 et on change les zones de design comme montrer à la figure 5.9 a). Le tableau 5.5 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

Tableau 5.5 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2

	<b>initial</b>	<b>MMN</b>	<b>Mod1</b>	<b>Mod2</b>
$\sigma_{VM} \text{ min (MPa)}$	0.15	0.11	0.29	0.36
$\sigma_{VM} \text{ moy (MPa)}$	4.30	4.28	4.27	4.62
$\sigma_{VM} \text{ max (MPa)}$	14.15	29.83	14.42	23.62
<b>Écart type</b>	2.40	2.29	2.17	2.66
<b>% nœuds &gt; <math>\sigma_{VM} \text{ max}</math></b>	0	1.01	0.02	0.73

La contrainte moyenne baisse de 1% pour la MMN et de 1% pour la méthode modifiée1 et augmente de 7% pour la méthode modifiée 2. L'écart type baisse de 5% pour la MMN et de 10% pour la méthode modifiée1 et augmente de 11% pour la méthode modifiée2. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 1.01% pour la MMN, 0.02% pour la méthode modifiée 1 et 0.73% pour la méthode modifiée 2. La méthode modifiée 1 donne le meilleur résultat.

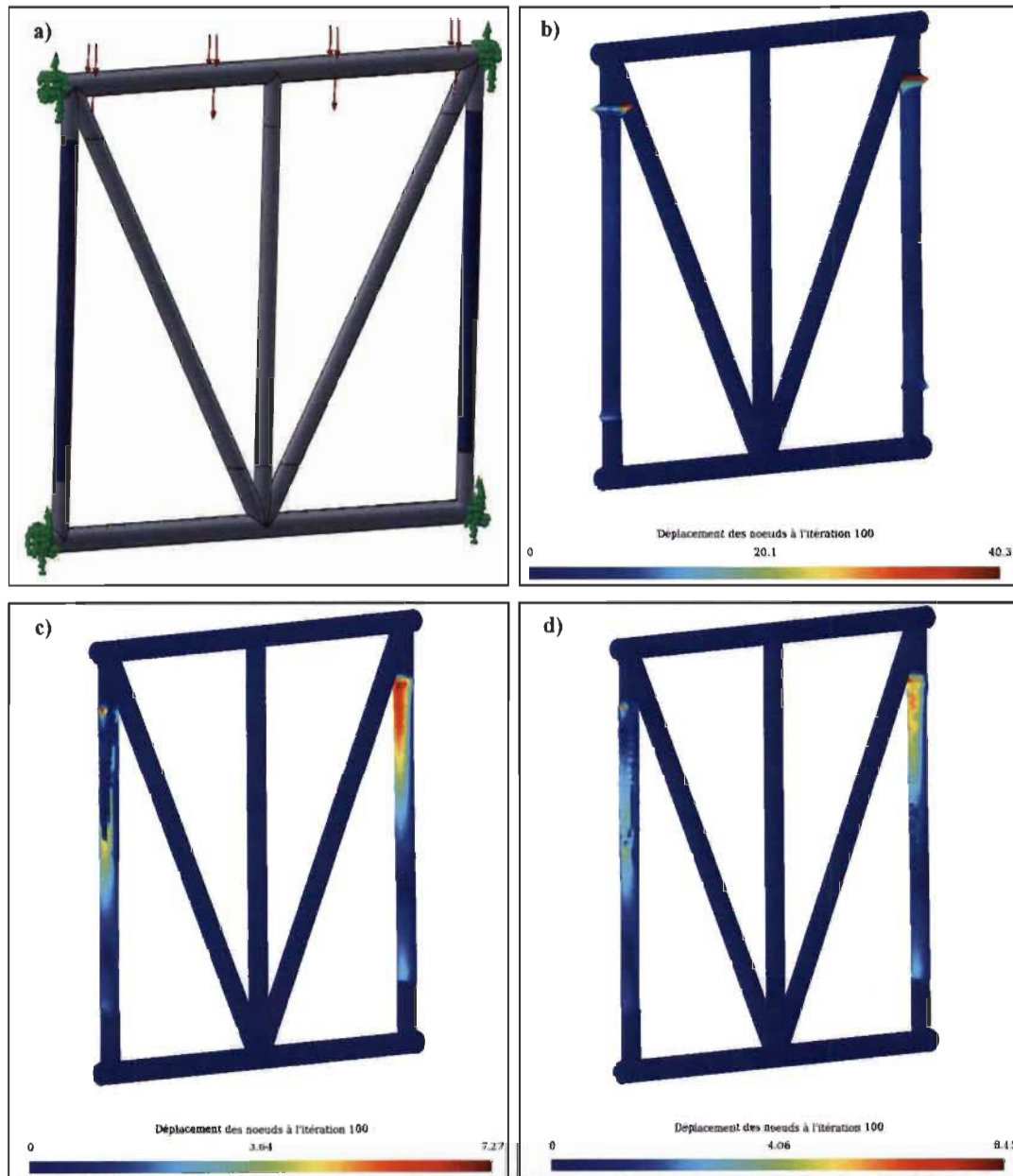


Figure 5.9 Pont a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2

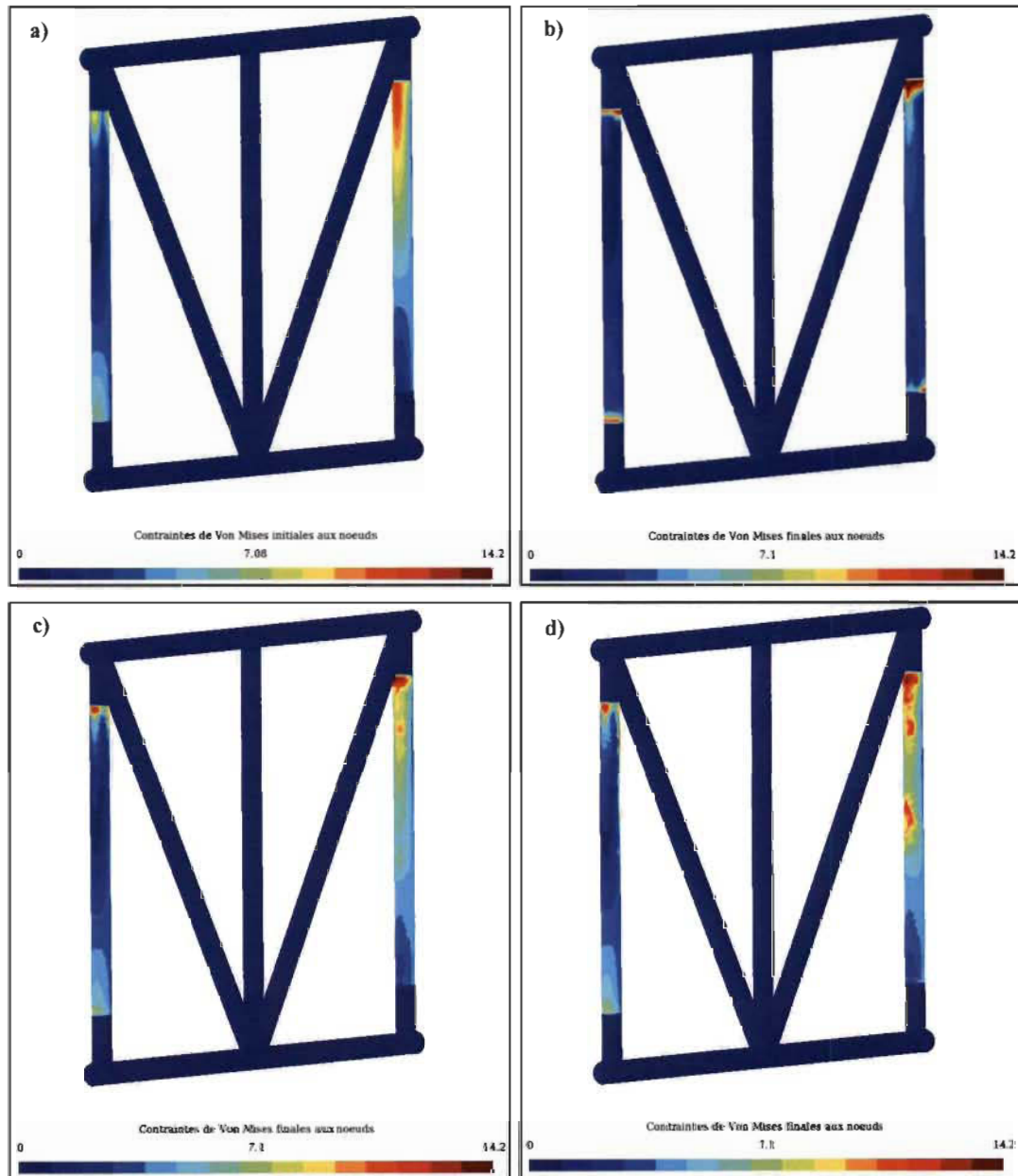


Figure 5.10 Pont a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2

### 5.7 Tube soumis à une pression interne

Un tube de forme carré est soumis à une pression interne. La figure 5.11 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites. Le tube est soumis à une pression de 10 Pa, les arêtes 1 et 2 sont bloquées en translation dans la direction de l'axe X, les arêtes 3 et 4 sont bloquées en translation dans la direction de l'axe Z, l'arête 5 est bloquée en translation suivant l'axe Y.

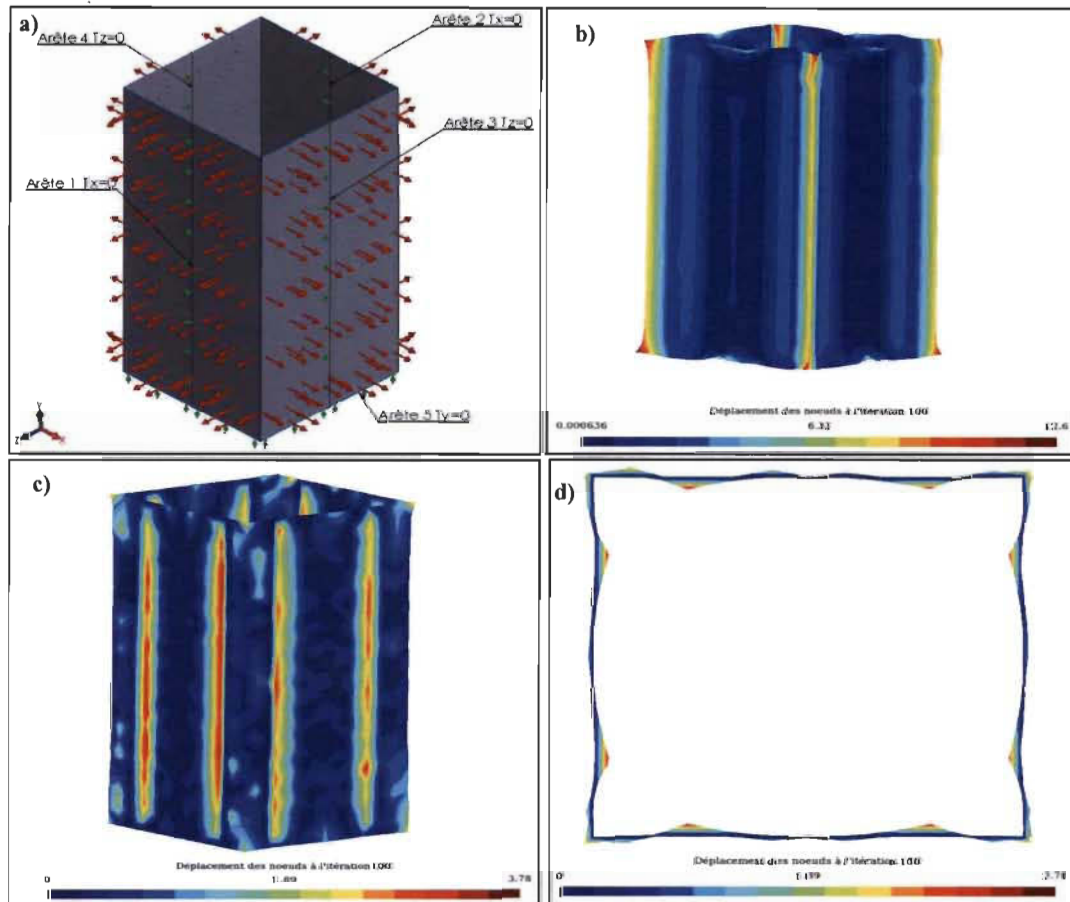


Figure 5.11 tube a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 en vue de dessus

Pour ce cas, l'utilisation des méthodes modifiées ne permet pas à la forme d'évoluer, comme on peut le voir dans la figure 5.11, pour cela on utilise un filtre comme méthode de contrôle. Le nombre d'itérations utilisées est de 300. La figure 5.12 montre les résultats obtenus avec la MMN avec filtre. On remarque que la forme du tube tend à devenir circulaire sauf dans les coins. Dans les coins, il y a concentration de contraintes

et donc des contraintes élevées, ce qui conduit à un déplacement vers l'extérieur des nœuds qui se trouvent dans cette zone. Le tableau 5.6 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre.

Tableau 5.6 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre

	<b>initial</b>	<b>MMN</b>	<b>MMN (Filtre)</b>
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	0.12	0.21	0.26
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	1.14	1.39	1.69
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	3.07	5.53	6.34
Écart type	0.62	0.74	0.81
% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0	4.50	6.45

Pour la MMN, la contrainte moyenne augmente de 18%. L'écart type augmente de 19%. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 4.50%. Pour la MMN avec filtre, la contrainte moyenne augmente de 48%. L'écart type augmente de 30%. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 6.45%.

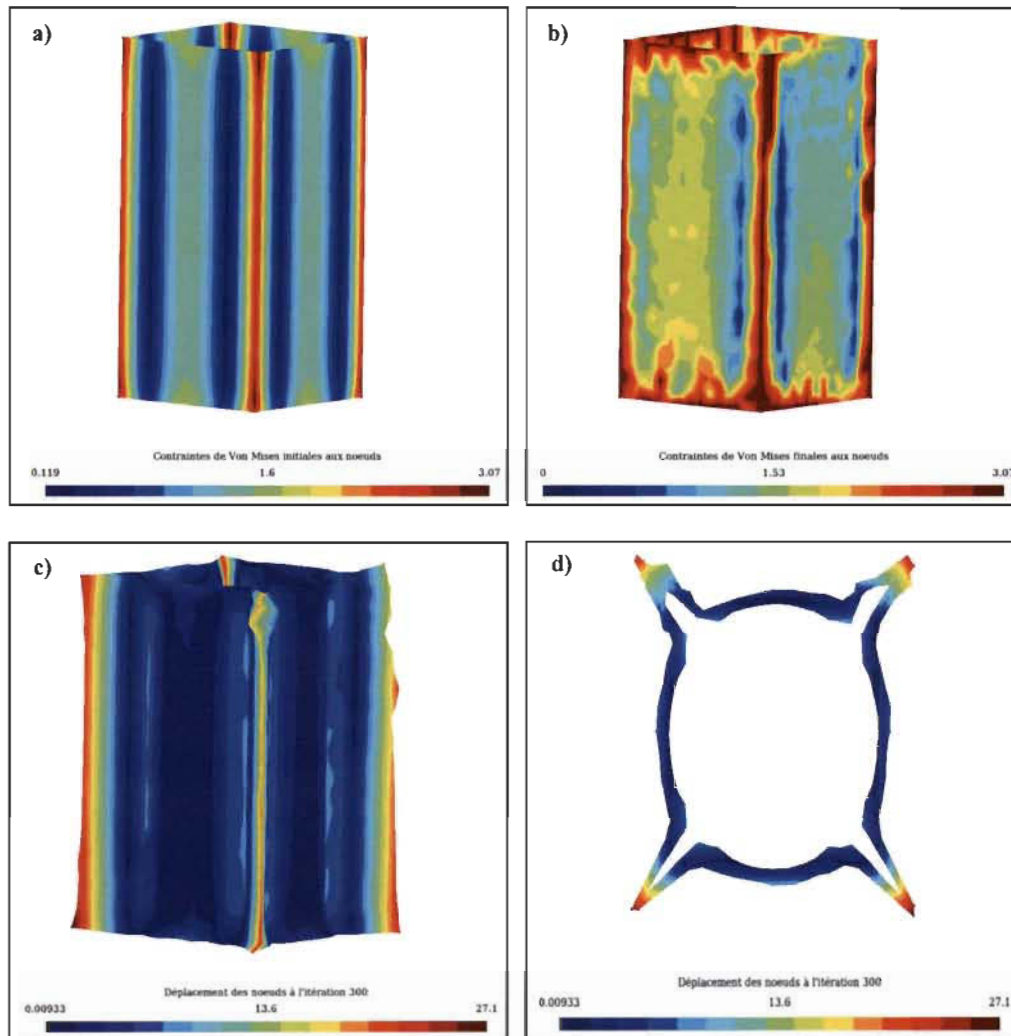


Figure 5.12 Tube a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN avec filtre c) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre d) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre en vue de dessus

### 5.8 Tube elliptique soumis à une pression interne

Un tube de forme elliptique est soumis à une pression interne. La figure 5.13 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites. Le tube est soumis à une pression de 10 Pa, les arêtes 1 et 2 sont bloquées en translation dans la direction de l'axe Z, les arêtes 3 et 4 sont bloquées en translation dans la direction de l'axe X, l'arête 5 est bloquée en translation suivant l'axe Y. Comme pour le cas précédent, l'utilisation des méthodes modifiées ne permet pas à la forme d'évoluer, comme on peut le voir dans la figure 5.48.

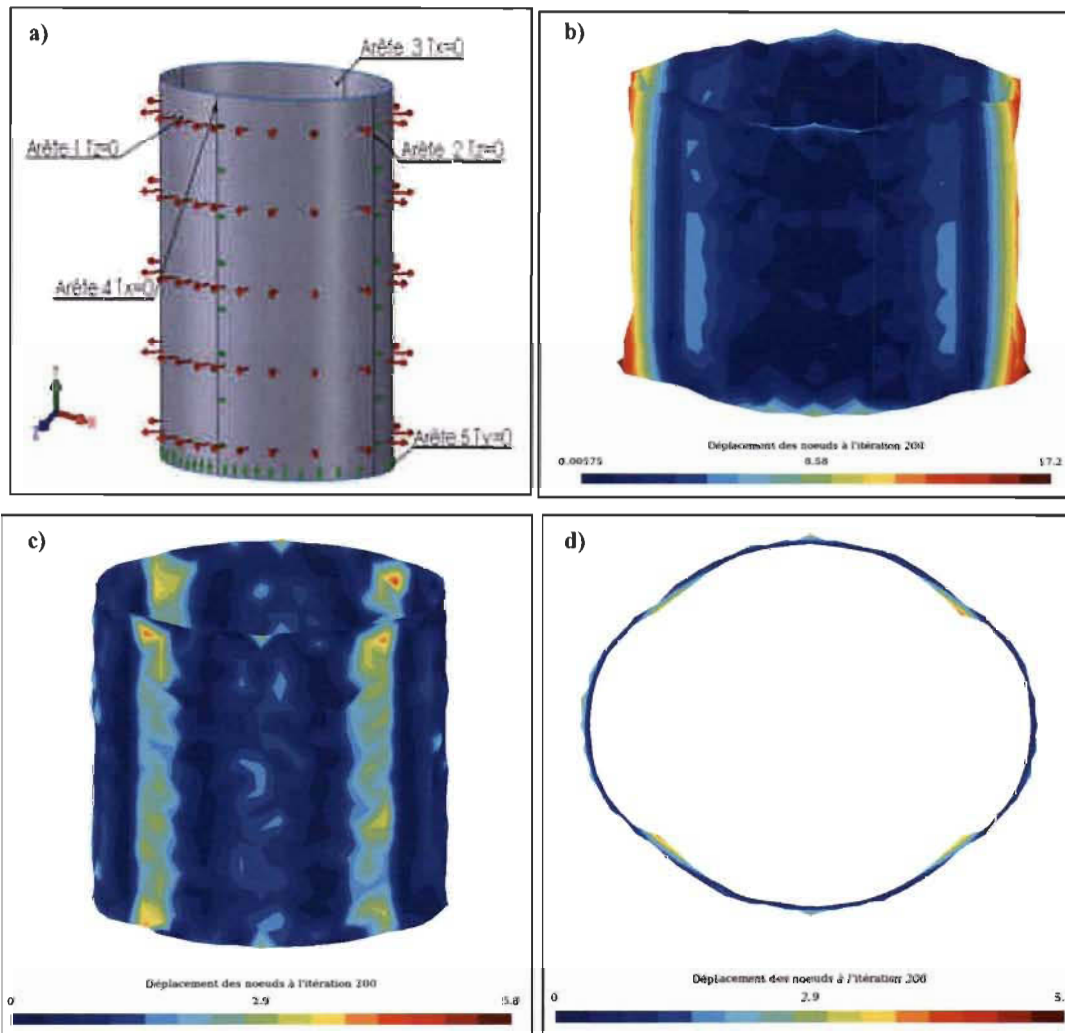


Figure 5.13 tube a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 en vue de dessus



On utilise un filtre comme méthode de contrôle. Le nombre d'itérations est de 400. La figure 5.14 montre les résultats obtenus avec la MMN avec filtre. La forme du tube tend à devenir circulaire comme dans l'exemple précédent. Le tableau 5.7 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre.

Tableau 5.7 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN et la MMN avec filtre

	<b>initial</b>	<b>MMN</b>	<b>MMN (Filtre)</b>
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	0.11	0.12	0.28
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	0.84	1.08	2.03
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	1.48	4.28	9.73
Écart type	0.38	0.59	1.05
% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0	16.71	77.19

Pour la MMN, la contrainte moyenne augmente de 29%. L'écart type augmente de 55%. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 16.71%. Pour la MMN avec filtre, la contrainte moyenne augmente de 140%. L'écart type augmente de 175%. Le pourcentage de nœuds dépassant la contrainte max est de 77.19%.

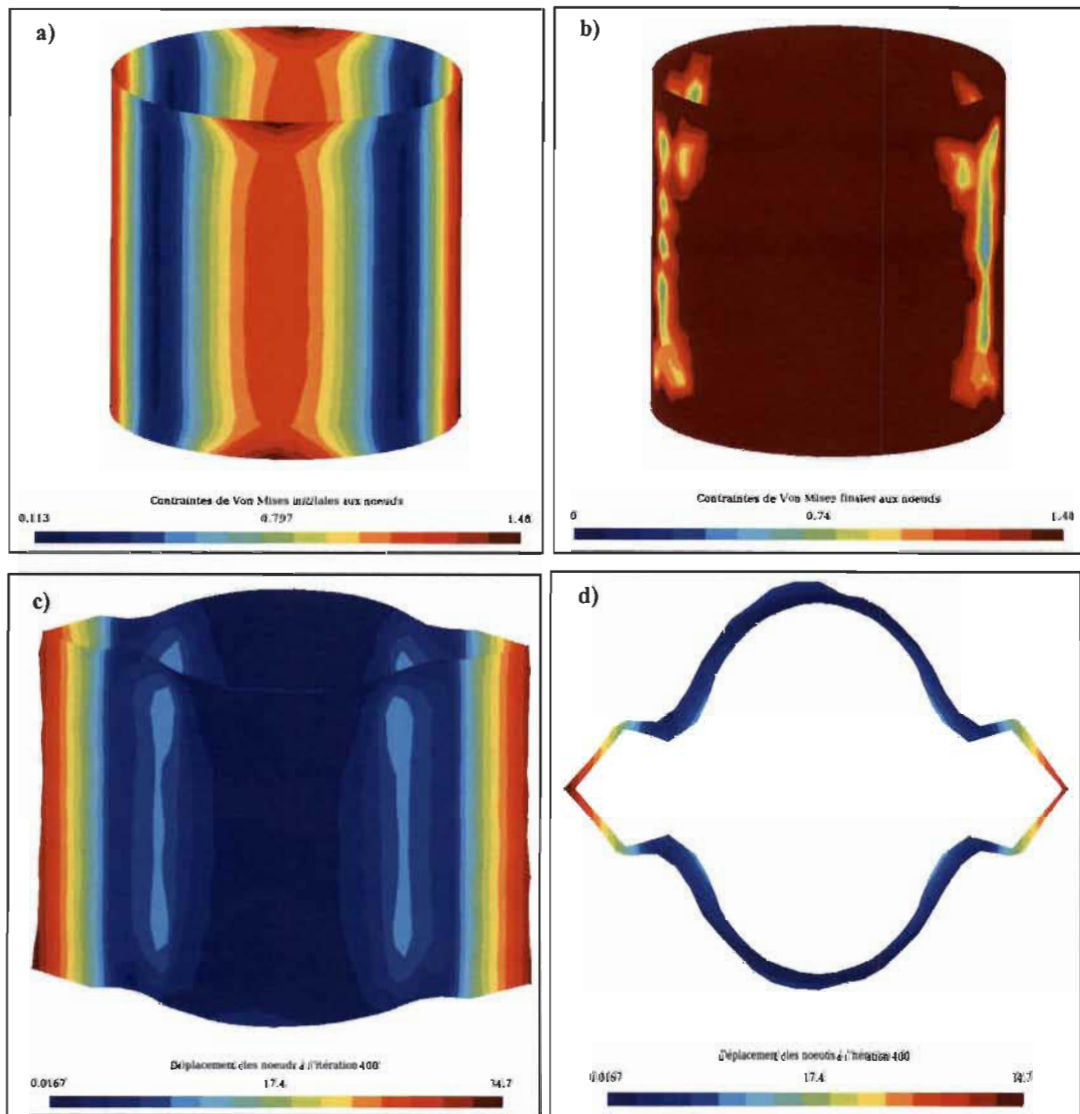


Figure 5.14 Tube a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN avec filtre c) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre d) Forme optimisée après 300 itérations par la MMN avec filtre en vue de dessus

### 5.9 Tube en porte-à-faux (sans zone de non design)

La figure 5.15 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites du tube. L'arête gauche est encadrée tandis qu'une force verticale de 1000 N est appliquée sur son arête droite. Le tableau 5.8 montre les contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

Tableau 5.8 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2

	initial	MMN	Mod1	Mod2
$\sigma_{VM}$ min (MPa)	0.0	5.32	5.01	7.53
$\sigma_{VM}$ moy (MPa)	98.14	48.39	56.78	66.93
$\sigma_{VM}$ max (MPa)	374.17	202.63	192.32	249.64
Écart type	74.09	30.25	34.77	38.44
% nœuds > $\sigma_{VM}$ max	0	0	0	0

La contrainte moyenne baisse de 51% pour la MMN, de 42% pour la méthode modifiée1 et de 32% pour la méthode modifiée 2. L'écart type baisse de 59 % pour la MMN, de 53% pour la méthode modifiée 1 et de 48% pour la méthode modifiée2. La contrainte maximale baisse de 46% pour la MMN, de 49% pour la méthode modifiée1 et de 33% pour la méthode modifiée 2. On obtient de très bons résultats avec les trois méthodes, mais la MMN et la MMN modifiée 1 permettent une diminution plus importante de la contrainte moyenne et maximale par rapport à la MMN modifiée 2.

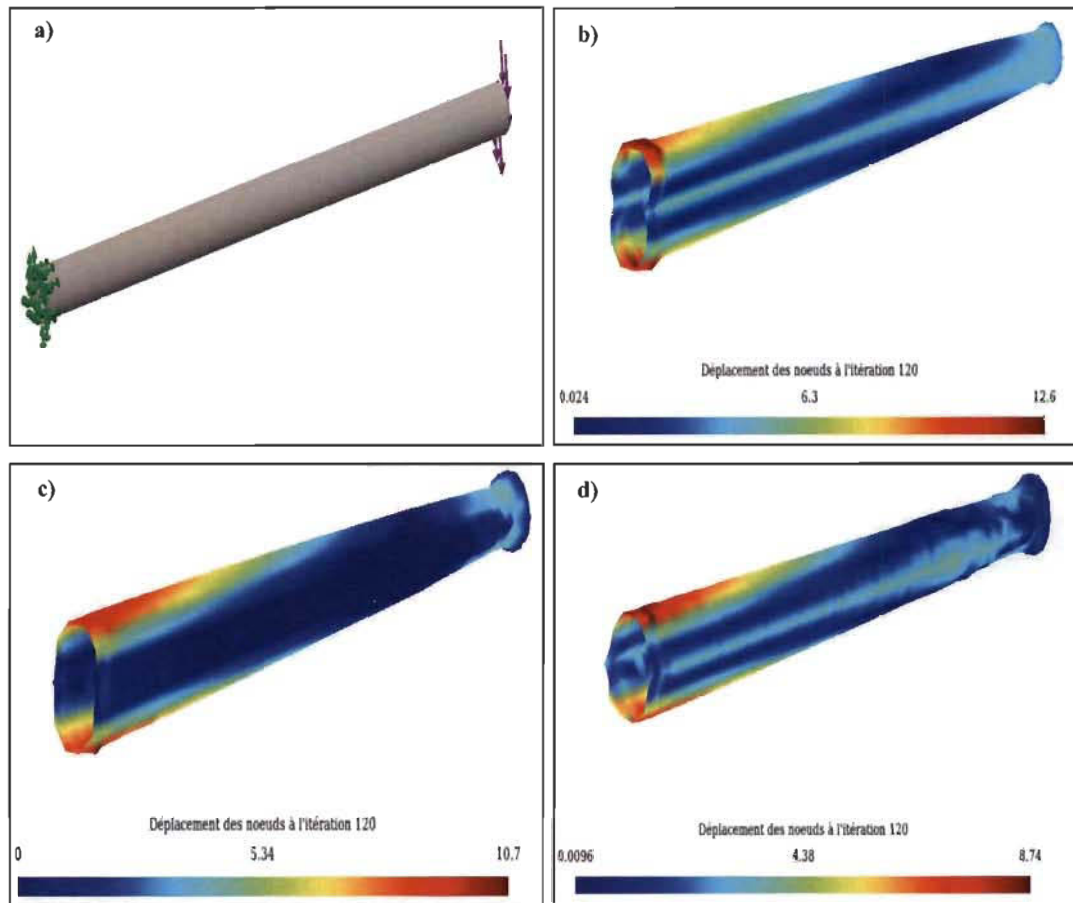


Figure 5.15 Tube en porte à faux a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 100 itérations par la MMN c) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM1 d) Forme optimisée après 100 itérations par la MMNM2

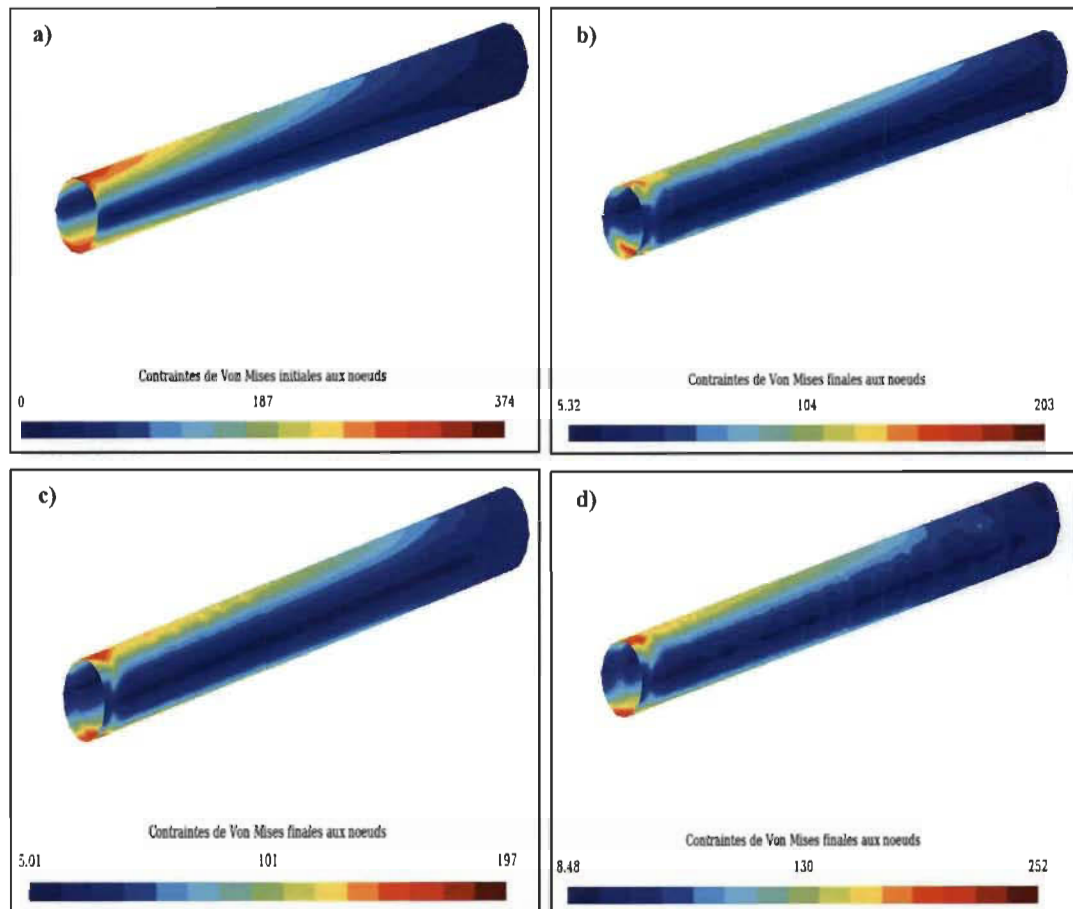


Figure 5.16 Tube en porte à faux a) État de contrainte initial b) État de contrainte final obtenu par la MMN c) État de contrainte final obtenu par la MMNM1 d) État de contrainte final obtenu par la MMNM2

### 5.10 Reconstruction géométrique

Les résultats obtenus avec la méthode d'optimisation sont sous la forme d'un maillage. Pour obtenir les résultats sous forme de géométrie (surface dans notre cas), il est nécessaire de procéder à une reconstruction géométrique. On reconstruit les résultats obtenus dans l'exemple précédent afin de valider les résultats d'optimisation de la MMN avec et sans contrôle. On reconstruit une surface à partir du maillage obtenu en utilisant le logiciel SOLIDWORKS. Les étapes sont montrées à la figure 5.17.

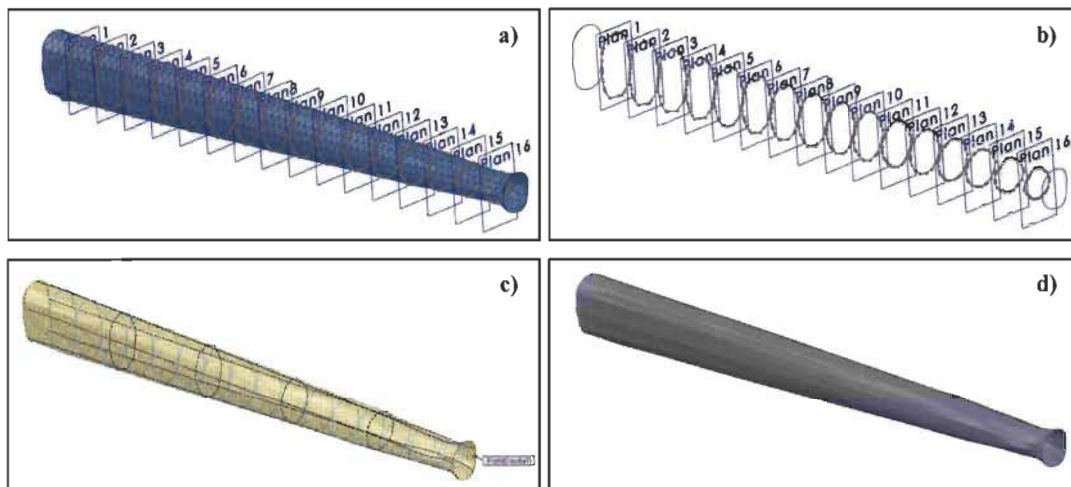


Figure 5.17 Étapes pour la reconstruction géométrique

Dans un premier temps on enregistre le maillage obtenu sous format STL. On ouvre le fichier STL dans SolidWorks et on crée des plans le long du tube comme on peut le voir dans la figure 5.17 a). L'intersection entre ces plans et le maillage donne des points, qui raccordés donnent des courbes (figure 5.17 b)). Une fois les courbes créées, on utilise la commande *surface lissage* dans SolidWorks qui permet de générer une surface en reliant les courbes entre eux (figure 5.17 c)). Finalement, on obtient la surface reconstruite (figure 5.17 d)). La figure 5.18 montre les résultats de la reconstruction géométrique des résultats d'optimisation obtenus avec la méthode du MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2.

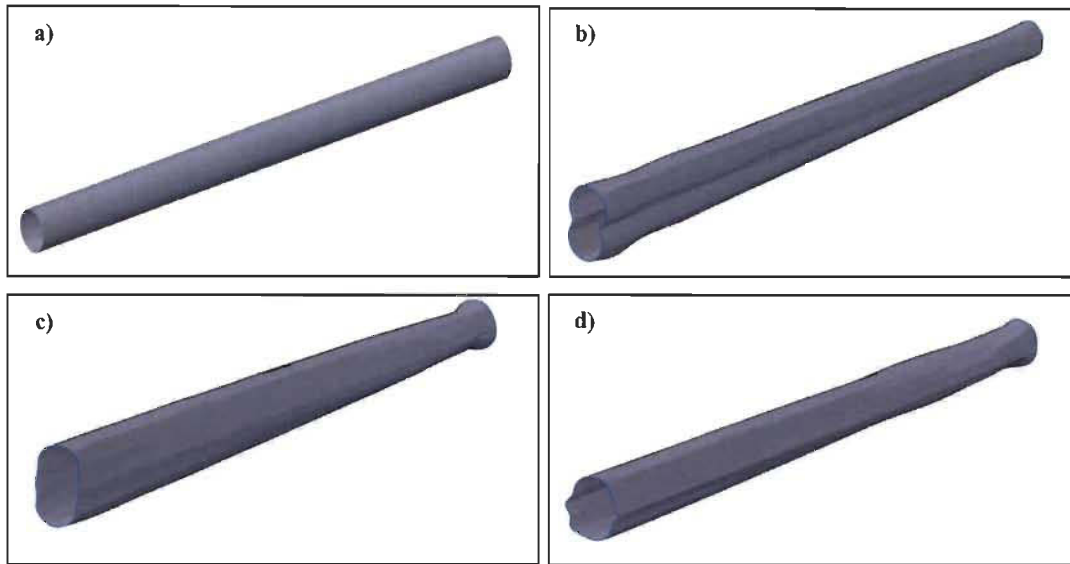


Figure 5.18 Reconstruction géométrique des résultats d'optimisation a) Forme initiale b) MMN c) MMN modifiée 1 d) MMN modifiée 2

On applique les conditions aux limites décrites précédemment sur les géométries obtenues par reconstruction et on fait le calcul des contraintes de Von Mises dans SolidWorks Simulation. Le tableau 5.9 montre les contraintes de Von Mises obtenues.

Tableau 5.9 Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN, la MMN modifiée 1 et la MMN modifiée 2

	<b>initial</b>	<b>MMN</b>	<b>Mod1</b>	<b>Mod2</b>
$\sigma_{VM}$ sup (MPa)	322.41	157.92	155.75	187.54
$\sigma_{VM}$ inf (MPa)	425.14	219.72	222.68	258.84
Surface (cm <sup>2</sup> )	502.84	543.81	558.59	597.36

Pour la MMN, la contrainte maximale baisse de 51% dans la couche supérieure et baisse de 48% dans la couche inférieure et la surface augmente de 8%. Pour la MMN modifiée 1, la contrainte maximale baisse de 51% dans la couche supérieure et baisse de 47% dans la couche inférieure et la surface augmente de 11%. Pour la MMN modifiée 2, la contrainte maximale baisse de 41% dans la couche supérieure et baisse de 39% dans la couche inférieure et la surface augmente de 18%. Ces résultats permettent de voir que l'on obtient avec la MMN une diminution d'environ 50% dans le tube pour une augmentation de la surface d'environ 10% uniquement.

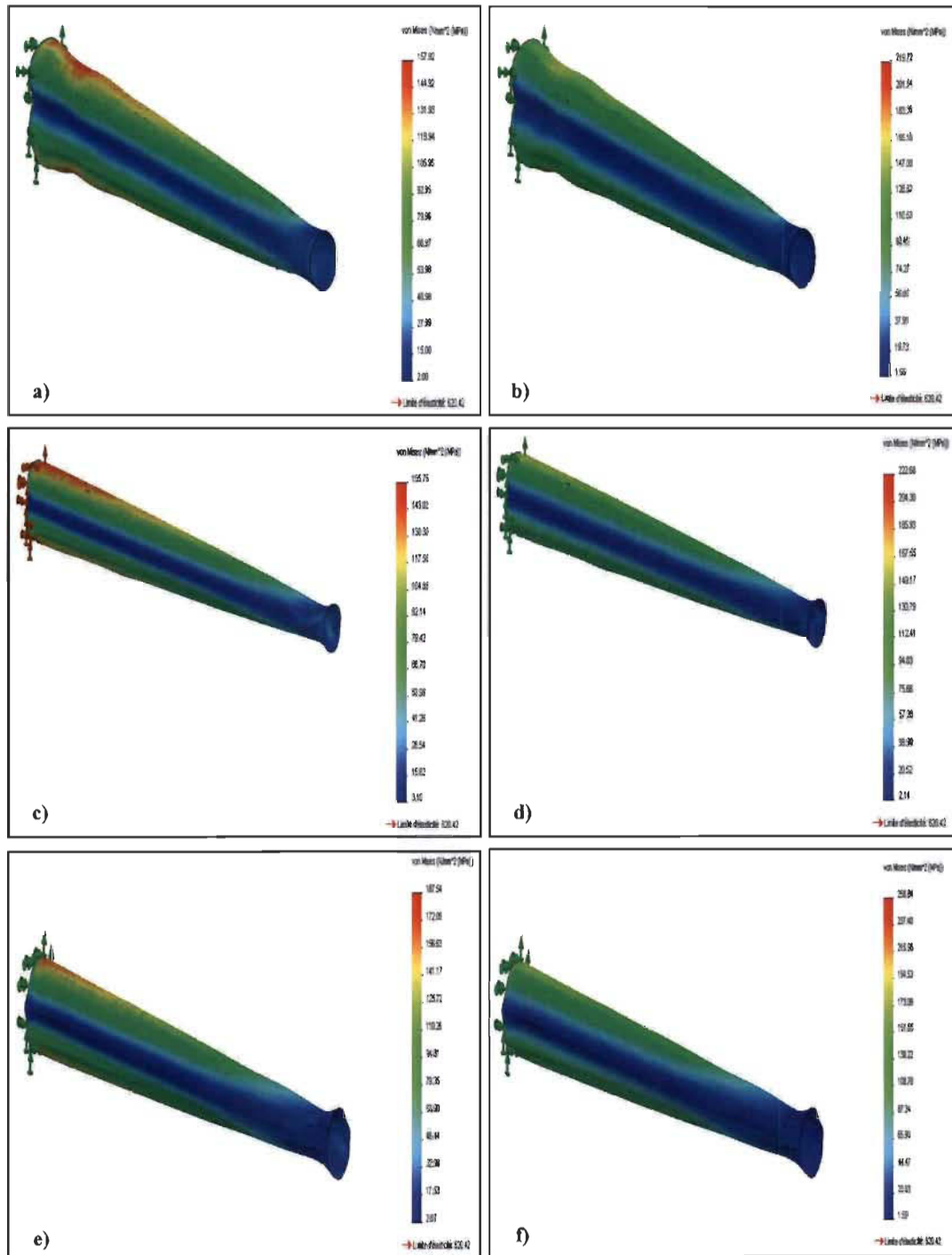


Figure 5.19 Contraintes de Von Mises sur la face supérieure et inférieure a) b) MMN c) d) MMNM1 e) f) MMNM2



## CHAPITRE 6

### CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette recherche visait à intégrer une méthode d'optimisation de forme, la méthode du mouvement normal, au processus de CAO avec un maillage quadratique. Dans un premier temps, un maillage quadratique a été généré et les éléments finis de coques ont été intégrés dans le MTU. Puis, une méthodologie a été développée afin d'utiliser la MMN avec des éléments finis de coques quadratiques.

La méthode a été appliquée à un tube à paroi mince en porte-à-faux. On a pu observer que l'utilisation de la méthode permettait d'avoir une meilleure répartition des contraintes et une baisse significative de la contrainte moyenne, mais aussi la nécessité de contrôler le déplacement des nœuds. Plusieurs méthodes de contrôle ont été utilisées : un lissage appliqué à chaque itération, appelé lissage Taubin, l'application de filtres (filtrage du déplacement des nœuds) et deux stratégies de modification du mouvement des nœuds dans la MMN (MMN modifiée 1 et MMN modifiée 2). Les différentes méthodes de contrôle permettent d'avoir une forme valide géométriquement. Les résultats obtenus avec les différents contrôles ont été comparés avec la MMN et entre eux.

Finalement, la MMN avec et sans contrôle a été appliquée sur différentes structures tubulaires, ou l'on a observé suivant les cas, une meilleure distribution des contraintes, une diminution de la contrainte moyenne et maximale.

Au cours de ce travail, il a été démontré que le déplacement des nœuds dans la direction de la normale sortante (vers l'extérieur) ne conduit pas nécessairement à une diminution des contraintes et le déplacement des nœuds dans la direction de la normale entrante (vers l'intérieur) ne conduit pas nécessairement à une augmentation des contraintes.

L'utilisation de la MMN avec des éléments quadratiques nécessite l'utilisation d'un algorithme de recentrage pour repositionner les nœuds milieu et un algorithme d'optimisation de la qualité des éléments.

Il a aussi été démontré l'importance du choix du coefficient de convergence sur la MMN, un coefficient trop grand conduit à un déplacement beaucoup trop important et à des formes irrégulières.

L'utilisation de la MMN modifiée 1 avec un maillage quadratique permet d'obtenir une forme plus régulière que celle obtenue avec un maillage linéaire. Le choix d'une taille d'éléments trop petite peut conduire à l'apparition d'irrégularités locales. Le choix d'une taille d'éléments trop grande peut conduire à l'apparition d'oscillations. La taille d'éléments du maillage influence le résultat d'optimisation obtenu.

L'utilisation d'un remaillage partiel ou total avec la MMN serait une approche intéressante.

Pour le contrôle de la MMN, une seule méthode de contrôle a été utilisée à la fois. Une combinaison des méthodes de contrôle serait une approche intéressante. Par exemple, une MMN modifiée avec un lissage Taubin effectué à chaque itération ou à la fin uniquement.

Pour que la MMN converge, il faut que le critère de convergence soit atteint en chaque nœud du maillage et il suffit que la contrainte soit trop faible ou trop forte en un seul nœud pour que la méthode ne converge pas. Ce critère de convergence est trop restrictif. Il serait plus judicieux de considérer un critère de convergence plus global.

Dans ce travail, on a considéré une épaisseur de coque constante durant le processus d'optimisation. Une autre extension du travail présenté dans ce mémoire serait d'utiliser une épaisseur de coque variable.

La reconstruction géométrique des résultats d'optimisation a été faite de façon manuelle. L'automatisation de la reconstruction géométrique des résultats d'optimisation serait une extension intéressante de ce travail. Cela représente un objectif ambitieux si l'on veut pouvoir traiter automatiquement des structures tubulaires quelconques. Cependant, cela permettrait de compléter la boucle d'automatisation de l'optimisation des structures tubulaires par la méthode du mouvement normal.

RÉFÉRENCES

- Arnout, S., G. Lombaert, et al. (2012). "Optimal Design of Shells with FE based Parameterization", *Proceedings of the 9<sup>th</sup> National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*.
- Bendsoe, M. P. et O, Sigmund. (2003). "Topology optimization - Theory, Methods and Applications, 2nd édition". Springer.
- Brentzen, J. A, J. Gravesen, et al (2012). "Guide to Computational Geometry Processing: Foundations, Algorithms, and Methods". *Springer Publishing Company, Incorporated*.
- Camarero, R. (2015). "Maillages et modélisation géométrique". Notes de cours MEC6212, École polytechnique de Montréal.
- Camprubi, N. (2004). "Design and Analysis in Shape Optimization of Shells, Thèse de doctorat."
- Cuillère, J. C. (1993). "Pré-optimisation de maillages automatiques tridimensionnels pour les méthodes numériques - Application à l'ingénierie simultanée, Thèse de doctorat."
- Cuillère, J. C. (2011). " Introduction à la méthode des éléments finis ", *Éditions Dunod*.
- Cuillère, J. C., V. François, et al. (2011). From CAD to Topology Optimization Applied to Parts and Structures. *Design and Modelling of Mechanical Systems international conference, May*. Sousse, Tunisia.
- Cuillère, J. C. et V. François (2014). "Integration of CAD, FEA and topology optimization through a unified topological model." *Computer-aided design and applications*.
- Das, R. et R. Jones (2009). "Development of a 3D Biological method for fatigue life based optimisation and its application to structural shape design." *International Journal of Fatigue* 31: 309-321.
- Dey, S., R. M. O'Bara, et al. (2001). "Towards curvilinear meshing in 3D: The case of quadratic simplices." *CAD Computer Aided Design*, 33(3), 199-209.
- Firl, M. (2010). "Optimal Shape Design of Shell Structures, Thèse de doctorat."
- François, V. (1998). "Méthodes de maillage et de remaillage automatiques appliquées la modification de modèle dans le contexte de l'ingénierie simultanée, Thèse de doctorat."
- Frey, P.J. et P.L. George (1999). "Maillage : Applications aux éléments finis." *Hermes Science, Paris*.

- George, P.L. et H.Borouchaki. (2011). "Analyse et correction des maillages de surface de degré 2, Tech. rep., INRIA, France, 2011.
- Gervais-Lavoie, J. (2015). "Intégration de la méthode du mouvement normal au processus de CAO pour l'optimisation de cadres de vélos, mémoire de maîtrise."
- Geuzaine, C. et J. F. Remacle (2009). "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post- processing facilities." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11): 1309-1331.
- Geuzaine, C., A. Johnen, et al. (2015). "The generation of valid curvilinear meshes". In IDIHOM : Industrialization of High-Order Methods - A Top-Down Approach, volume 128 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer International Publishing.
- Gordon, J. G. (1978). "Structures or Why Things Don't Fall Down." Penguin.
- Guenter, B., R. Parent (1990). "Motion Control: Computing the Arc Length of Parametric Curves", *IEEE Computer Graphics and Applications*, v.10 n.3, p.72-78.
- Heller, M., R. Kaye, et al (1999). "A gradientless finite element procedure for shape optimization." *Journal of Strain Analysis*, 1999, 34: 323–336.
- Hsu, Y. L., S. D. Sheppard, et al. (1995). "The curvature function method for two-dimensional shape optimization under stress constraints." *Computers and Structures* 55(4): 647-657.
- Lambrechts, J., J.-F. Remacle, et al. (2012). "Generation of Provably Correct Curvilinear Meshes". *PDEs on the sphere*.
- Li, Q., G. P. Steven, et al. (1999). "On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization." *Structural Optimization* 18(1):67-73.
- Lu, Q. (2011). "Developments of parallel curved meshing for high-order finite element simulations, Mémoire de maîtrise."
- Luo, X. J., M. S. Sheppard, et al. (2011). Moving curved mesh adaptation for higher-order finite element simulations. *Engineering with Computers*, 27(1), 41-50.
- Johnen, A., J. F. Remacle, et al. (2013). "Geometrical validity of curvilinear finite elements." *Journal of Computational Physics*, 233(1), 359-372.
- Mattheck, C. et S. Burkhardt (1990). "A new method of structural shape optimization based on biological growth." *International Journal of Fatigue* 12(3): 185-190.
- Mortenson E., M. (1985). "Geometric Modeling." *John Wiley & Sons*.

- Maduramuthu, P. et R. T. Fenner. (2004). "Three-dimensional shape design optimization of holes and cavities using the boundary element method." *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 39(1), 87-98.
- Ohtake, Y., A. Belyaev, et al. (2001). "Mesh regularization and adaptive smoothing". *Computer. Aid. Design* 33, 789-800.
- Parent R. (2001)."Computer Animation: Algorithms and Techniques". *Morgan Kaufmann*.
- Park, H. S. et X. P. Dang. (2010)."Structural optimization based on CAD-CAE integration and metamodeling techniques." *Computer-Aided Design*, Vol. 42, No. 10, pp. 889–902.
- Parvizian, J. et R. T. Fenner (1997). "Shape optimisation by the boundary element method: A comparison between mathematical programming and normal movement approaches." *Engineering Analysis with Boundary Elements* 19(2):137-145.
- Parvizian, J. et R. T. Fenner (2002). "Shape optimization of fillets by the boundary element method." *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 37(2): 93-100.
- Peng, D. et R. Jones, "An approach based on biological algorithm for three-dimensional shape optimization with fracture strength constrains." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, Issues 49–50, pp. 4383–4398.
- Persson, P. O. et J. Peraire. (2009). "Curved mesh generation and mesh refinement using lagrangian solid mechanics". Proceedings of the 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Orlando (FL), USA, 5–9 January 2009.
- Riche, R. L. et G. Cailletaud. (1998). "A mixed evolutionary/heuristic approach to shape optimization." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41, 1463–1484.
- Roy, R., S. Hinduja, et al. (2008)."Recent advances in engineering design optimisation: challenges and future trends." *CIRP Annals-Manufacturing Technology* 2008;57: 697–71.
- Schneider, P.J., D.H. Eberly. (2002)."Geometric Tools for Computer Graphics". *Korgan Kaufmann Publishers*, San Francisco, USA.
- Taubin, G. (1995). "Curve and surface smoothing without shrinkage", Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision, p.852, June 20-23.
- Toulorge, T., C. Geuzaine, et al. (2013). "Robust untangling of curvilinear meshes." *Journal of Computational Physics*, 254(0), 8-26.

- Umetani, Y. et S. Hirai (1975). "Adaptive shape optimization method for structural material using the growing-reforming procedure." Joint JSME-ASME AppliedMechanics Western Conference: 359-365.
- Wessel, C., A. Cisilino, et al. (2004). "Structural shape optimisation using boundary elements and the biological growth method." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 28(2-3): 221-227.
- Wu, Z. (2005). "An efficient approach for shape optimization of components." *International Journal of Mechanical Sciences* 47(10): 1595-1610.
- Xie, Z. Q., R. Sevilla, et al. (2013). "The generation of arbitrary order curved meshes for 3D finite element analysis." *Computational Mechanics*, 51(3), 361-374.
- Zehsaz, M., K. E. Torkanpouriet, et al. (2013). "Convergence of shape optimization calculations of mechanical components using adaptive biological growth and iterative finite element methods". *Journal of Central South University*, 20(1): 76-82.

## ANNEXE A

## Comparaison entre les valeurs du jacobien

	MTU	GMSH
ELEMENT 2	2285.73	2285.73
	2400.82	2400.82
	2515.91	2515.91
	2449.43	2449.43
	2476.32	2476.32
	2381.02	2381.02
ELEMENT 3	3147.32	3147.32
	3285.54	3285.54
	3423.76	3423.76
	3335.77	3335.77
	3383.21	3383.21
	3265.26	3265.26
ELEMENT 4	3383.2	3383.2
	3335.76	3335.76
	3423.75	3423.75
	3285.23	3285.23
	3147.31	3147.31
	3265.26	3265.26
ELEMENT 5	5818.67	5818.67
	5825.32	5825.32
	5817.51	5817.51
	5424.05	5424.05
	4896.71	4896.71
	5423.45	5423.45
ELEMENT 6	4896.71	4896.71
	5424.05	5424.05
	5817.52	5817.52
	5825.34	5825.34
	5818.68	5818.68
	5423.46	5423.46

**Comparaison entre les valeurs des coefficients de contrôle**

	<b>MTU</b>	<b>GMSH</b>
ELEMENT 2	2285.73	2285.73
	2400.82	2400.82
	2515.91	2515.91
	2402.75	2402.75
	2476.32	2476.32
	2381.02	2381.02
ELEMENT 3	3147.32	3147.32
	3285.54	3285.54
	3423.76	3423.76
	3268.05	3268.05
	3381.21	3381.21
	3265.26	3265.26
ELEMENT 4	3383.2	3383.2
	3268.05	3268.05
	3423.75	3423.75
	3285.53	3285.53
	3147.31	3147.31
	3265.26	3265.26
ELEMENT 5	5818.67	5818.67
	5832.56	5832.56
	5817.51	5817.51
	5490.98	5490.98
	4896.71	4896.71
	5489.22	5489.22
ELEMENT 6	4896.71	4896.71
	5490.99	5490.99
	5817.52	5817.52
	5832.57	5832.57
	5818.68	5818.68
	5489.22	5489.22



**Comparaison entre les valeurs des coefficients de contrôle après subdivision**

	<b>MTU</b>	<b>GMSH</b>
ELEMENT 2	2285.73	2285.73
	2343.28	2343.28
	2400.82	2400.82
	2367.58	2367.58
	2381.02	2381.02
	2333.38	2333.38
	2400.82	2400.82
	2458.37	2458.37
	2515.91	2515.91
	2459.33	2459.33
	2449.43	2449.43
	2425.13	2425.13
	2381.02	2381.02
	2415.23	2415.23
	2449.43	2449.43
	2439.53	2439.53
	2476.32	2476.32
	2428.67	2428.67
	2449.43	2449.43
	2415.23	2415.23
2381.02	2381.02	
2367.58	2367.58	
2400.82	2400.82	
2425.13	2425.13	
ELEMENT 3	3147.32	3147.32
	3216.43	3216.43
	3285.54	3285.54
	3241.54	3241.54
	3265.26	3265.26
	3206.29	3206.29
	3285.54	3285.54
	3354.65	3354.65
	3423.76	3423.76
	3345.9	3345.9
	3335.77	3335.77
	3310.65	3310.65
	3265.26	3265.26
	3300.51	3300.51
	3335.77	3335.77
	3325.63	3325.63
	3383.21	3383.21
3324.23	3324.23	
3335.77	3335.77	

	3300.51	3300.51
	3265.26	3265.26
	3241.54	3241.54
	3285.54	3285.54
	3310.65	3310.65
ELEMENT 4	3383.2	3383.2
	3325.63	3325.63
	3335.76	3335.76
	3300.51	3300.51
	3265.26	3265.26
	3324.23	3324.23
	3335.76	3335.76
	3345.9	3345.9
	3423.75	3423.75
	3354.64	3354.64
	3285.53	3285.53
	3310.65	3310.65
	3265.26	3265.26
	3241.54	3241.54
	3285.53	3285.53
	3216.42	3216.42
	3147.31	3147.31
	3206.29	3206.29
	3285.53	3285.53
	3241.54	3241.54
	3265.26	3265.26
	3300.51	3300.51
	3335.76	3335.76
3310.65	3310.65	
ELEMENT 5	5818.67	5818.67
	5825.61	5825.61
	5825.32	5825.32
	5657.86	5657.86
	5423.45	5423.45
	5653.94	5653.94
	5825.32	5825.32
	5825.03	5825.03
	5817.51	5817.51
	5654.25	5654.25
	5424.05	5424.05
	5657.57	5657.57
	5423.45	5423.45
	5427.37	5427.37
	5424.05	5424.05
	5193.85	5193.85

	4896.71	4896.71
	5192.97	5192.97
	5424.05	5424.05
	5427.37	5427.37
	5423.45	5423.45
	5657.86	5657.86
	5825.32	5825.32
	5657.57	5657.57
ELEMENT 6	4896.71	4896.71
	5193.85	5193.85
	5424.05	5424.05
	5427.37	5427.37
	5423.46	5423.46
	5192.97	5192.97
	5424.05	5424.05
	5654.25	5654.25
	5817.52	5817.52
	5825.05	5825.05
	5825.34	5825.34
	5657.58	5657.58
	5423.46	5423.46
	5657.87	5657.87
	5825.34	5825.34
	5825.63	5825.63
	5818.68	5818.68
	5653.95	5653.95
	5825.34	5825.34
	5657.87	5657.87
	5423.46	5423.46
5427.37	5427.37	
5424.05	5424.05	
5657.58	5657.58	

## ANNEXE B

Les différentes étapes nécessaires pour faire un calcul dans Code\_Aster avec les éléments COQUE\_3D sont :

**Étape 1**

Lire le maillage initial avec la commande *LIRE\_MAILLAGE* [U4.21.04], la lecture se fait à partir d'un fichier maillage (.MAIL). Le maillage initial consiste en un maillage triangulaire quadratique (triangles à 6 nœuds).

**Étape 2**

Transformer le maillage à six nœuds en maillage à sept nœuds : comme vue précédemment les éléments triangulaires disponibles pour les coques sont les triangles à sept nœuds, donc il est nécessaire de transformer les triangles à 6 nœuds en triangles à 7 nœuds, cela se fait avec la commande *CREA\_MAILLAGE* [U4.23.02]. Le nœud supplémentaire est obtenu comme le barycentre géométrique des nœuds sommets.

**Étape 3**

Affecter les modèles en utilisant la commande *AFFE\_MODELE* [U4.41.01], une modélisation 'COQUE\_3D' pour le maillage avec des triangles à sept nœuds et une modélisation '3D' pour le maillage initial (triangles a six nœuds).

**Étape 4**

Affecter des caractéristiques des éléments coques en utilisant la commande *AFFE\_CARA\_ELEM* [U4.42.01], l'épaisseur de la coque est définie en utilisant cette commande.

**Étape 5**

Définir les caractéristiques du matériau en utilisant la commande *DEFI\_MATERIAU* [U4.43.01], ces caractéristiques sont le module de Young et le coefficient de Poisson. Puis affecter le matériau défini précédemment au maillage avec la commande *AFFE\_MATERIAU* [U4.43.03].

### **Étape 6**

Affecter les conditions aux limites (chargements et blocage) avec la commande *AFFE\_CHAR\_MECA* [U4.44.01].

### **Étape 7**

Calcul mécanique avec la commande *MECA\_STATIQUE* [U4.51.01], commande qui permet de résoudre soit un problème de mécanique statique linéaire avec superposition de différentes conditions aux limites et de différents chargements, ou bien une analyse thermomécanique pour une liste donnée d'instant.

### **Étape 8**

Calcul du champ (déformation, contrainte...) par élément avec la commande *CALC\_ELEM* [U4.81.01]. Il est possible de faire le calcul des déformations et des contraintes dans la couche supérieure, moyenne et inférieure avec les éléments coques et plaques dans Code\_Aster.

### **Étape 9**

Calcul du champ aux nœuds avec la commande *CALC\_NO* [U4.81.02], pour calculer un champ aux nœuds (contraintes ou déformations), il est nécessaire de calculer au préalable un champ par élément (avec *CALC\_ELEM*). Cette commande permet aussi de faire le calcul des réactions nodales.

### **Étape 10**

Projection des champs aux nœuds calculés dans l'étape précédente avec *PROJ\_CHAMP* [U4.72.05]. Projection des champs aux nœuds calculés du modèle du maillage avec des triangles à sept nœuds vers le modèle du maillage initial. Ce qui permet d'avoir les résultats de calcul pour un maillage avec des triangles à 6 nœuds.

### **Étape 11**

Impression des résultats de calcul en utilisant la commande *IMPR\_RESU* [U4.91.01], commande qui permet d'écrire un maillage et/ou des valeurs de résultats dans

différents formats en vue, en particulier, d'une visualisation graphique. L'impression des résultats se fait dans un fichier résultats (.RESU).