数学的極限の定義について

味　木　博

§1　序　数学における極限の概念は解析学において本質的な役割を演ずることはいうまでもない．その極限は数学における無限の概念を限定し一つの演算として案出形成されたものである．そもそも無限は有限に対置されるものであるが，数学における無限の概念は基本的には無限集合として把握される．すなわち，B. Bolzano〔1〕, G. Cantor〔2〕, R. Dedekind〔3〕は集合 M とそのある真部分集合との間に1対1対応が存在するとき，M を無限集合，無限集合ではない集合を有限集合と定義した．この定義は無限集合を対応の概念によって積極的に定義したものとして一般的に認容されているが，しかしながら論文〔4〕で指摘されているようにこの定義には無限を定義するために無限を用いるという循環論法 (vicious circle) が潜在しているのである．無限をどのように認識し，確立するかについては古来多くの研究〔5〕がなされてきたが，上述のとおりこれを数学的極限という一つの演算として数学の中で活用することによって偉大なる成果がもたらされたのである．無限に関する哲学的思考や認識はともかくとして，これを極限操作として定式化することにより微分積分なり G. Cantor の集合論が創造されたことも顧みるならば敢えて喋々力説することもないであろう．さて，数学的極限の概念にしても歴史的に幾多の変遷を辿っている．とくに変数 x がある数 a に限りなく近ずくことを通常 $x\to a$ とかくが，限りなく近ずくということは果して可能かどうか，もし可能だとしてもその方法を明示しなければならない．そのことなくしては決して論理的な定式化とはいえないのである．上述の限りなく近ずくという定義では極めてあいまいであろう．19世紀に入ってから A. L. Cauchy はこれを任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し $|x-a|<\varepsilon$ が成り立つと定義した〔6〕．この方法が現代的な極限の定義であるが前者の極限の定義からみればその明快さにおいて一段の進歩を画するといえるであろう．そしてその本質的な点は不等式と″任意の″という限定記号 (Quantifier) を併用しているところにある．これはいわば，無限の概念を有限的操作によって有限化する一つの試みである．いいかえれば，無限概念に対する価値観の転換と称することができる．ともあれ，数学的極限に対するかゝる定義は解析学の厳密な論証に役立っばかりでなく，その確固たる構成に寄与しているのである．このように考えるならば，この定義の重要性が益々認識されるけれど，他方教育的観点に立って眺める場合，これを理解体得することは仲々困難であるようにみうけられる．それゆえわれわれは以上の趣旨に基づき本文において解析学の基礎にある若干の具体的な例を引用しつつその意味するところを解明したいと思う．とくに，解析学においては具体的な事例はしばしば理解を助けるばかりではなく，あいまいさを除去するに役立っものであることを強調しておこう．

§2　数学的極限の定義　われわれは前節において極限の概念を有限的操作によって有限化することをのべたが，まづ取り扱いとして最も簡単な実数列からはじめよう．いま，実数列 $\{a_n\}$, $n=1, 2,\cdots$（以不簡単に $\{a_n\}$ とかく）に対しある実数 a が存在して，n を限りなく大きくすれば，各項 a_n が a に限りなく近ずくとき，$\{a_n\}$ は a に収束するといい，

a を $\{a_n\}$ の極限値とよぶ．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ とかく．こゝで，各 a_n は自然数 n の一つの写像 f によって決定される，すなわち $a_n=f(n)$ であることはいうまでもない．この定義では″限りなく″という修飾語とどんな仕方で各項 a_n が a に″近ずく″かがあいまいである．また，もし $a_n=1$, $n=1, 2,\cdots$ として数列が与えられるとき，上の定義に例外的に極限値 $a=1$ を含ませることが通常行なわれている．一般に数学では例外やあいまいさをいとうものであるから19世紀以来つぎのように定義するようになった．すなわち，実数列 $\{a_n\}$ に対しある実数 a が存在し，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対しある自然数 n_o を定め，$n_o<n$ なる任意の自然数 n について $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つとき $\{a_n\}$ は a に収束するといい，a を $\{a_n\}$ の極限値，$\lim_{n\to\infty} a_n=a$ とかくことは前と同様である．

もちろんこの定義は基本的に A. L. Cauchy の考えに依存している．また，これによれば前者の″限りなく″は″任意の″で″近ずく″は不等式で代用され，さらに $a_n=1$, $n=1, 2,\cdots$ の例外的なものまで不等式の中へ解消される．しかも，こゝで用いられた ε, n_o, n, $|a_n-a|<\varepsilon$ がすべて有限数，有限区間を表わしていることに注意すれば限定記号″任意の″″存在する″を用いて有限的操作に転換したということができる．またこゝで用いた″任意の″(any) は通常 $\forall$ で表わされ，″すべての″，″各々の″(all, every, each) と同義語と考えてよい〔7〕が″任意の正数 $\varepsilon>0$″として用いる場合には ε の動く範囲，すなわち個体領域 (individual domain) Ω を明示しなければならない．このとき Ω はすべての正数の集合で無限集合であるので″任意の″は無限の概念と密接な関係の中で有効に働いていることが分る．″任意の″は Ω から任意に特定の要素を指定する意味と Ω のすべての要素にわたる意味との二義性をもっている．論文〔8〕においては前者を″任意特定″後者を″任意一般″として区別しているが上述の極限の定義ではこの二義性を併用しているものとみることができる．また，しばしば″任意特定″に記号 $\mathcal{A}$ を用いることがある〔9〕．なお，限定記号″存在する″(there exist) は″ある…″(some) と同義語でともに記号 $\exists$ で表わされ個体領域を考えることは $\forall$ の場合と同様である．以上の議論はそのまゝ連続変数の極限，または関数の極限の場合にもあてはまる．連続変数 x が一つの数 a に限りなく近ずくとき，それに対応して定まる関数値 $f(x)$ が一つの数 A に限りなく近ずくならば A を $f(x)$ の $x=a$ におおける極限値といい，$\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{A}$ とかく．″限りなく近ずく″と任意の x に対し $f(x)=1$ となる例外に注意すればつぎの定義に到達するであろう．すなわち，関数 $f(x)$ に対しある数 A が存在して，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対しある正数 $\delta>0$ が定まって $0<|x-a|<\delta$ なる任意の x について $|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$ が成り立つとき A を $x=a$ における $f(x)$ の極限値といい，$\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{A}$ とかく．ここで用いた x, a, δ, ε, $0<|x-a|<\delta$, $|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$ はすべて有限数，有限区間で表わされ，ε, δ, x の個体領域はそれぞれ無限集合を表わすから，$\forall$, $\exists$ は無限集合に対し前と同様，効果的に働らいていることが分るが，とくに既述の数列 $\{a_n\}$ の場合自然数 n の個体領域が散点的 (discrete) な集合であるのに反し関数の極限における連続的変数の個体領域が連続的集合であることが本質的に異なっている．いづれにしても，限定記号 $\forall$, $\exists$ を用いて有限化する方法としては変りないのである．しかしながら，比較的単純な散点的集合をとびこして連続的集合を一挙に有限化する方法であることに着目すれば上の定義は極めて有力な方法であることが分るであろう．さて，散点的な変数と連続的変数を結ぶ強力な定理がある．すなわち，$\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{A}$ であるための必要かつ十分な条件は a に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ に対し

て $\lim_{x_n \to a} f(x_n) = \mathrm{A}$ が成り立っことである．こゝでも限定記号〝任意の〞が大きく働らいている．これより連続的変数によって定義された関数の極限が散点的変数による収束によって顕現されたといつてよいのであるが，つまるところ極限の有限化の定義を媒体として行なわれたものであることを見逃してはならない．あるいは，このような制約の下で価値観の転換が行なわれたといつてもよいであろう．つぎに関数の極限に関連して関数の連続性についてのべよう．もし $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ならば関数 $f(x)$ は $x = a$ において連続であるという．いいかえると任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある正数 $\delta > 0$ が定まって $|x - a| < \delta$ なる任意の x について $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立っことである，ただし δ は ε と a に関係して定まる．この定義は関数 $f(x)$ のグラフが $x = a$ において切れていないというだけでなく，a が微小に変化するときそれにともなって $f(a)$ も微小に変化することを意味している．また区間Iの各点 x で関数 $f(x)$ が連続ならば $f(x)$ はIで連続であるという．関数 $f(x)$ が区間Iで定義されているとき，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある正数 $\delta > 0$ がIのすべての点 a に無関係に定められて $|x - a| < \delta$ なる任意の x について $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つならば $f(x)$ はIで一様連続（uniformly continuous）であるという．

Iで一様連続な関数はもちろん連続であるがその逆は必らずしも成り立たない．たとえば開区間 $\mathrm{I} = (0, 1)$ で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ をみればよい．すなわち，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある正数 $\delta(\varepsilon, x) > 0$ を定めるとき $x \to 0$ ならば $\delta \to 0$ となる．しかしながら，関数 $f(x)$ が閉区間Iで連続であるための必要かつ十分な条件はそれがIで一様連続であることである．また一様連続性を定義する場合，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある正数 $\delta(\varepsilon, x) > 0$ を定めるとき，x が区間Iのすべての点を動くときえられる集合 $\{\delta(\varepsilon, x)\}$ の下端 $\delta_o = inf\{\delta(\varepsilon, x)\}$ が0でないならばこの δ_o は x に無関係に定まるのでこれをもつて一様連続性の定義とすることがあるが余り適当ではない．なぜならば，この場合関数の定義域は無限集合で，各 $\delta(\varepsilon, x)$ をすべて求めることは不可能であるから．さらにこの $\delta_o(\neq 0)$ を具体的に求める際多少技巧を要する場合があるので注意しておく〔10〕．数列の極限の一つの拡張として関数列の極限がある．区間Iで定義された関数列 $\{f_n(x)\}$, $n=1, 2, \cdots$（以下簡単に $\{f_n(x)\}$ とかく）に対しIで定義されるある関数 $f(x)$ が存在して，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 n_o が定まり $n_o < n$ なる任意の自然数 n について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ，ただし n_o は ε と x に関係して定まる，とき $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ へ点毎収束（pointwise convergent）するといい，$f(x)$ を $\{f_n(x)\}$ の極限関数とよぶ．このとき $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ とかく．これはIの各点 x を固定したとき各数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が $f(x)$ へ収束すると考えればよい．また上の点毎収束の定義においてとくに n_o が ε に関係してもよいが，Iのすべての点 x に無関係に定まるとき $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ へ一様収束（uniformly convergent）するという．既述した一様連続性とこの一様収束性は解析学の最も基本的な概念であるが十分な理解に到達するにはかなりの修練が必要であろう．なお一様収束性は N. Abel によりはじめて指摘され，K. Weierstrass によって解析学の基礎概念としてとり上げられたことは衆知の事実である〔11〕．そしてこの有効性はいろいろな方面にわたっているが，たとえば関数項の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ の収束の場合にとくにその偉力を発揮するものといえよう．いま，区間Iで定義された $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ に対しある関数 $\mathrm{S}(x)$ が存在し，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 n_o が定まり，$n_o < n$ なる任意の

自然数 n について $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \mathrm{S}(x)| < \varepsilon$ が成り立つ，ただし n_0 は通常 ε のみではなく x にも関係して定まる，とき $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathrm{S}(x)$ へ点毎収束するといい， $\mathrm{S}(x)$ を $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ の和とよび，$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ とかく．こゝでとくに n_0 が I のすべての点 x に無関係に定まるとき（ε に関係してもよい）$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathrm{S}(x)$ へ一様収束するという．さて各関数 $f_n(x)$, $n=1, 2, \cdots$ が閉区間 $\mathrm{I} = [a, b]$ で連続で，$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が一様収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \mathrm{S}(x)dx$，こゝで $\int_a^b$ は，リーマン積分を表わす，が成り立つ（項別積分定理）し，また各関数 $f_n(x)$, $n=1, 2, \cdots$ が I で微分可能，$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ が一様収束すれば $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ が成り立つ（項別微分定理）のであるがこれらは極限算法 $\sum_{n=1}^{\infty}$ と積分または微分演算の順序が一様収束性を媒介として交換可能であることを示している．このことが実は解析学の具体的な計算に非常に役立つのである．なぜならば，一般に関数列，関数項の級数においてはこのような順序の交換は許されないからである．こゝに極限概念の取扱いのむずかしさがあるのではなかろうか．また数列や関数列（もちろん無限級数，関数項の級数についても同様）の極限値や極限関数を具体的に求めることは一般に仲々むずかしいが，たとえ極限関数を具体的に求められなくも，その存在性さえ分れば一様収束性を用いてある程度その性質が予測できるのである．このような意味からその重要性が認識されるであろう．さていまのべた一様収束性に関連してこれより広い意味のいわゆる広義の一様収束性，すなわち区間 I に含まれる任意の閉区間で一様収束する場合と，I の各点 x で一様収束する場合とあるが考えとしていままでのべたものと殆んど変りないからこれ以上ふれないでおく．その他解析学の研究の必要に応じて様々の収束性が考えられているがいずれにしても基本的には A. L. Cauchy によって厳格に打建てられた方法に基ずいているのである．
われわれ次節において具体的な事例にしたがって以上の見解を裏づけてみよう．

§3　具体的な事例　まず第一に，われわれは数列 $\{\frac{1}{n}\}$, $n=1, 2, \cdots$ を考えてみよう．n を十分大きくとれば各項 $\frac{1}{n}$ は次第に 0 に近ずくであろう．そこで任意特定の正数 $\varepsilon > 0$ に対し自然数 n_0 を $[\log \frac{1}{\varepsilon}] + 1$（[　] は Gauss の記号）と定めれば $n_0 < n$ なる任意の自然数 n について $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ が成り立つことが分る．すなわち $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. こゝで注意すべきことは，$\varepsilon$ は任意特定の正数，いいかえれば証明が終るまで一時固定しておくこと，n_0 は ε に関係して定まるある自然数で一般に n_0 に対応する項は上の不等式を満すかどうかはどうでもよいが $n_0 < n$ なる任意の自然数 n に対応する項は必らず不等式を満すこと，また ε が非常に大きい場合はすべての項について上の不等式が成り立つこともありうるので，むしろ ε が非常に小さいときそれに対応して定まる n_0 より大きい任意の n に対応する各項が上の不等式を満すことが核心である．これより″任意の正数 $\varepsilon > 0$″ を″任意に小さい正数 $\varepsilon > 0$″ とおきかえてもよいことが分る．このことを解析的に示すには $\varepsilon > \varepsilon'$ なる正数 ε' を任意に小さくとれば $\varepsilon = \alpha\varepsilon'$, $\alpha > 0$ がつねに定まり ε' に対応して n_0 を定めるとき結局 n_0 は ε に対応して定まることになるからである．さて数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2^m},\ n=100m,\ m=1, 2, \cdots$$
$$a_n = \frac{1}{n},\ n \neq 100m$$

とすれば任意特定の正数 $\varepsilon > 0$ に対し不等式 $|\frac{1}{2^m} - 0| < \varepsilon$, $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ を満す自然数

をそれぞれ m_1, n_2 とするとき $n_1=100m_1$ となるから $n_0=\mathrm{M}ax(n_1, n_2)$ をとれば $n_0<n$ なる任意の自然数について $|a_n-0|<\varepsilon$ が成り立つ．以上の2例から分るように，任意の正数 $\varepsilon>0$ を与えたとき，n_0 をいかに決定するかは多少の技巧を要するものである．以上の考え方は解析学の基礎を通じしばしば現われてくるものである．たとえば，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$ が成り立つことを証明するために任意特定の正数 $\varepsilon>0$ に対しある自然数 n_1, n_2 が定まり $n_1<n$ なる任意の自然数 n について $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $n_2<n$ なる任意の自然数 n について $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つから $n_0=\mathrm{M}ax(n_1, n_2)$ とすれば $n_0<n$ なる任意の自然数 n について $|a_n+b_n-(a+b)|\leqq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ となる．よって $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$. さてこゝで注意すべきことは極限値の存在性と具体的に極限値を計算することは区別しなければならないことである．たとえば，$0<b<a$ のとき $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$, $b_n=\sqrt{a_{n-1}\ b_{n-1}}$, $n=1, 2, \cdots$, ただし $a_0=a$, $b_0=b$ とすれば2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は明らかに単調有界数列であるから収束しそれらの極限値を A, B とすれば A=B であることが証明される．しかし A の値を求めるには若干の知識を必要とするのである〔12〕．また $a_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}, n=1, 2, \cdots$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めるためにいきなり $n\to\infty$ とすることはできない．いま任意特定の正数 $\varepsilon>0$ に対し $|\frac{1}{n}|<\frac{\varepsilon}{2}$ となるある自然数 n' を定めるとき $n'<n$ なる任意の自然数 n について $|\frac{1}{n}|<\frac{\varepsilon}{2}$. また $\frac{n'}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ なるある自然数を n_0 とすれば $n_0<n$ なる任意の自然数 n について $\frac{n'}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. よって $n_0<n$ なる任意の自然数 n について

$$|a_n-0|=\left|\frac{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n'})+\frac{1}{n'+1}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\right|<\frac{n'}{n}+\frac{n-n'}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

すなわち $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. これは A. L. Cauchy による極限の定義の優秀性を示唆するものである．

さて数列の理論はそのまゝ無限級数論に移される．すなわち，数列 $\{a_n\}$ に対し無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が一定値Sへ収束するとは $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\mathrm{S}$ が成り立つことと定義され $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\mathrm{S}$ とかく．こゝで無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を逐次無限回加えてゆくと考えてはならない．それは無限回の操作はわれわれにとって不可能であるから．これを数列 $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \cdots, a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, \cdots$ へ還元して有限的操作にきりかえたものと解すべきである．また応用面では数列よりも無限級数の方がかなり広いことはいうまでもない．以上の考え方は関数の極限の場合にも全く同様であってたとえば，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\mathrm{A}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\mathrm{B}$ ならば $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ を示すために，任意特定の正数 $\varepsilon>0$ に対しある正数 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ を定めると $0<|x-a|<\delta_1$ ならば $|f(x)-\mathrm{A}|<\frac{\varepsilon}{2}$, $0<|x-a|<\delta_2$ ならば $|g(x)-\mathrm{B}|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つからいま $\delta=\mathrm{M}in(\delta_1, \delta_2)$ とすれば $0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)+g(x)-(\mathrm{A}+\mathrm{B})|\leqq|f(x)-\mathrm{A}|+|g(x)-\mathrm{B}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ が成り立つのである．こゝで δ は ε に関係して定まる．さらに $\mathrm{A}=f(a)$, $\mathrm{B}=g(a)$ とすれば $f(x)$, $g(x)$ が一点 a で連続の場合にもそのまゝ成り立つ．また区間Iで定義された関数 $f(x)$ がIの各点 x で連続の場合とくに一様連続性が問題になるがそのことについては小論〔13〕において例示して論じているのでこゝではふれない．さて閉区間 $\mathrm{I}=[0, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)$

$=x^n$, $n=1, 2, \cdots$ は極限関数 $f(x)=0\ (x\neq 1)$, $f(1)=1\ (x=1)$ へ点毎収束するが，$f(x)$ はⅠで不連続であるからこの関数列は一様収束しない．もしⅠから一点 $x=1$ を除いた場合，すなわち区間 $I_1=[0, 1)$ で上の関数列が定義された場合 $f(x)=0$ で，I_1 で連続となるけれどなおその関数列は一様収束しない．なぜならば，任意特定の正数 $\varepsilon>0$ に対しある自然数 n_0 を $|x^n-0|<\varepsilon$ より $n>\dfrac{\log\varepsilon}{\log x}$ すなわち $n_0=[\dfrac{\log\varepsilon}{\log x}]+1$ ([ ] は Gauss の記号）と定めると $x\to 1$ のとき $n_0\to\infty$ となり I_1 で一様収束性が失なわれるのである．しかし明らかに I_1 で広義の一様収束性は成り立つ．つぎに，閉区間 $I=[-1, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=\dfrac{n|x|}{1+n^2|x|^2}$, $n=1, 2, \cdots$ の極限関数 $f(x)=0$ はⅠで連続であるがこの関数列はⅠで一様収束でもなければ，広義の一様収束でもない．なぜならば $x=\pm\dfrac{1}{n}$ のとき $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$, $n=1, 2, \cdots$ であるから．また一様収束性はいろいろな応用がある〔14〕．いま，閉区間 $I=[0, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$, $n=1, 2, \cdots$ の極限関数は $f(x)=0$，しかしこの関数列は明らかに一様収束でない．また $\int_0^1 f(x)\,dx=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\dfrac{1}{2}$ より $\int_0^1 f(x)dx\neq\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$．すなわち一般に極限算法と積分演算の順序の交換は許されない．しかしたとえば閉区間 $I=[0, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=e^{-n(x+1)}$, $n=1, 2, \cdots$ はⅠで極限関数 $f(x)=0$ へ一様収束する．よって $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=0$．こゝで注意すべきことは閉区間 $I=[-1, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $n=1, 2, \cdots$ は連続な極限関数 $f(x)=0$ へ点毎収束するが一様収束ではない．しかし $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx=0$ となることである．さて閉区間 $I=[-1, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $n=1, 2, \cdots$ は極限関数 $f(x)=0$ へ点毎収束する．よって $f'(x)=0$．また $f'_n(x)=\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $n=1, 2, \cdots$ であるが関数列 $\{f'_n(x)\}$ はⅠで一様収束しない．なぜならば $x=0$ とおけばよい．いま $x=0$ において $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)=1$．よってⅠで $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)\neq f'(x)$．しかし閉区間 $I=[0, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=e^{-n(1+x)}$, $n=1, 2, \cdots$ は極限関数 $f(x)=0$ へ一様収束するから $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)=f'(x)=0$ が成り立つ．上述の場合と同じように注意すべきことは，たとえば閉区間 $I=[0, 1]$ で定義された関数列 $f_n(x)=x^n$, $n=1, 2, \cdots$ の極限関数は $0\leqq x<1$ のとき $f(x)=0$, $f(1)=1$ であるから $0\leqq x<1$ のとき $f'(x)=0$, $f'(1)=\infty$．他方 $0\leqq x<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)=0$, $x=1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)=\infty$ であるが明らかに関数列 $\{f'_n(x)\}$ は一様収束しない．しかしⅠで $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)=f'(x)$ が成り立つのである．

§4　結び　われわれは§1において無限の概念を数学的極限として把える場合解析学の基礎においては A. L. Cauchyによる定義が厳密な意味で理論構成に役立つこと，§2においては数列の極限，関数の極限，関数列の極限等についてそれらの定義と注釈を与え，§3においては具体的な範例をあげてその補注としたが，つまるところすべて数列の理論に還元されることが分るであろう．そして極限の概念を有限的操作によって把握する際とくに留意すべき若干の要件をのべた．しかしながら数学的極限を論ずる場合かゝる有限的操作のみではないことはいうまでもない．それは G. Cantor によって創造された集合論をみれば明らかであろう．そこでは可附番的算法，非可附番的算法による極限概念の設定が常用されているが，一貫していえることはこれらのものが限定記号〝任意の（すべての)〞〝存在する（あ

る…)″ の関連の中でとらえられていることであろう．そしてまたそれらの算法をうまく活用することによって多くの成果がえられるのである．われわれはこゝではかゝる算法の問題にふれないが，無限を取り扱う場合とくに細心の注意を必要とするものであることをつけ加えておこう．

参 考 文 献

〔1〕 B. Bolzano ; Paradoxien des Unendlichen, Leipzig Bei C. H. Reclam Sen. (1851), Der philosophischen Bibliothek Band 99. Verlag von Felix Meiner in Leipzig 1920.

〔2〕 G. Cantor ; Gesammelte Abhandlungen, Georg／OLMS Verlags Hildesheim, 1962

〔3〕 R. Dedekind ; Was sind und was sollen die Zahlen? FRIEDR. VIEWEG & SOHN BRAUNSCHWEG 1960.

〔4〕 小野勝次；数理哲学の諸問題㈠，㈡，㈢，哲学雑誌，哲学会編輯岩波書店刊，1940年，643号(9月) pp. 556-575，644号（10月）pp. 635-654，645号（11月）pp. 685-705.

〔5〕 下村寅太郎；無限論の形成と構造，弘文堂書房刊，昭和19年2月．

〔6〕 A. L. Cauchy 著，小堀憲訳・解説；コーシー微分積分学要論，共立出版刊，昭和44年7月，pp. 217-219.

〔7〕 味木博；数学教育の一視点，信州大学教養部紀要，自然科学第4号，昭和45年2月，pp. 48-49.

〔8〕 末綱恕一；数学の基礎，岩波書店刊，1952年3月，p. 13.

〔9〕 佐藤徳意；数学解析序説，共立出版刊，昭和43年5月，p. 9.

〔10〕 柴垣和三雄；解析学通論（上），丸善株式会社刊，昭和38年7月，pp. 99-101.

〔11〕 藤原松三郎，微分積分学第一巻，内田老鶴圃新社刊，昭和42年1月，pp. 228-229.

〔12〕 *ibid*. 〔11〕，pp. 27-28.

〔13〕 味木博；数学教育に関する若干の注意，信州大学教養部紀要，自然科学第5号，昭和46年3月，pp. 14-15.

〔14〕 岡田良知；級数論，岩波書店刊，昭和11年2月，pp. 152-156.