# Studien over topologische algebra

van Dantzig, David



*Publication date:*
1931

# INLEIDING.

Het belang dat het getallencontinuum voor de geheele wiskunde heeft, berust in hoofdzaak op tweeërlei eigenschappen. Eenerzijds bestaan namelijk tusschen de elementen van het getallencontinuum eenvoudige *algebraische* (of arithmetische) betrekkingen, d.z. betrekkingen tusschen telkens *eindig vele* getallen: de reëele resp. complexe getallen vormen een *lichaam*. Anderzijds bestaan er echter eenvoudige *topologische* (continuïteits-) relaties, d.z. zijn betrekkingen tusschen telkens *oneindig vele* getallen: de reëele resp. complexe getallen vormen een *continuum*. En wel culmineeren de algebraische betrekkingen in de stelling van d'Alembert (hoofdstelling der algebra): „Iedere algebraische vergelijking met complexe coëfficienten bezit in het lichaam der complexe getallen minstens één wortel". en de topologische betrekkingen in de stelling van Bolzano-Weierstrass: „Iedere begrensde oneindige getallenverzameling bezit minstens één verdichtingspunt". Zuiver algebraisch zegt de stelling van d'Alembert, dat het lichaam der complexe getallen *algebraisch afgesloten* is; zuiver topologisch zegt de stelling van Bolzano-Weierstrass, dat de verzameling der reëele resp. complexe getallen *mikrocompact* [1]) is.

In de oudere wiskunde werden deze beide aspecten van het getallencontinuum niet van elkaar onderscheiden, zooals b.v. blijkt uit de zuiver algebraische stelling van d'Alembert, welks bewijs wezenlijk op de zuiver topologische stelling van Bolzano-Weierstrass berust. De oorzaak ligt daarin, dat de reëele resp. complexe getallen zelf niet zuiver algebraisch (uitgaande van de

1) *Mikrocompact* („kompakt im kleinen") is eene verzameling, als ieder punt in eene omgeving met compacte afsluiting (bij afkorting: eene compacte omgeving) bevat is. *Compact* is eene verzameling als iedere oneindige deelverzameling daarvan minstens één limespunt in de gegeven verzameling bezit.

natuurlijke getallen) gedefinieerd kunnen worden, maar dat daartoe de *convergentie* van bepaalde rijen van rationale getallen, een *topologische* eigenschap dus, beschouwd moet worden.

De scheiding der beide aspecten van het getallencontinuum heeft zich onder invloed van de axiomatiseeringstendentie van de vorige eeuw geleidelijk voltrokken; in het bijzonder was het Dedekind, die in zekeren zin zoowel de topologische als de algebraische eigenschappen der getallen afzonderlijk onderzocht heeft. Sindsdien hebben topologie en algebra zich tot afzonderlijke takken der wiskunde ontwikkeld.

Daarmede ontstaat echter een nieuw probleem. Het getallencontinuum heeft geen eigenschap, die het algebraisch van andere algebraisch afgesloten lichamen van de karakteristiek nul en oneindigen transcendentiegraad onderscheidt. Topologisch beschouwd bestaat er een menigte van meetkundige puntverzamelingen, die niet minder eenvoudige eigenschappen bezitten dan dit een- of tweedimensionale continuum. *Waarin is dan echter de eigenlijke oorzaak gelegen van de fundamenteele rol, die het getallencontinuum in de geheele wiskunde vervult?*

Klaarblijkelijk moet dit eene combinatie van topologische en algebraische eigenschappen zijn. Daarmede ontstaat echter een nieuw onderdeel van de wiskunde, de *topologische algebra: in een verzameling mogen zoowel topologische als algebraische relaties gegeven zijn, waartusschen eenvoudige continuiteitsrelaties bestaan; men vraagt, deze* (axiomatisch gedefinieerde) *verzamelingen in het algemeen te onderzoeken en te classificeeren.*

Dit onderzoek is nog in een ander opzicht van belang. Naast het lichaam der reëele en dat der complexe getallen en min of meer gelijkwaardig daarmede verschijnen in de moderne getallentheorie een reeks van andere lichamen: die der p-adische en der $\mathfrak{p}$-adische getallen van Hensel [1]), die evenals het lichaam der reëele getallen door metriseering of „Bewertung" en een zekere afsluiting (completeering) uit het lichaam der rationale getallen ontstaan. Voor de beschrijving dezer lichamen als metrische (bewertete) lichamen heeft men het lichaam der reëele getallen als hulpmiddel noodig. Om nu deze lichamen zonder gebruik te maken van de reëele ge-

1) K. Hensel, Zahlentheorie, Leipzig, Göschen, 1913; Theorie der algebraischen Zahlen, Teubner, 1908.

tallen op te bouwen en door interne eigenschappen te karakteriseeren, moet men de metriek door een topologisch omgevingssysteem vervangen: men komt dus weer op het terrein der topologische algebra.

In deze dissertatie zal een beknopt overzicht over de tot dusverre bereikte resultaten gegeven worden. Ter bekorting worden de voornaamste eigenschappen, zoowel uit de topologie [1]) als uit de algebra [2]) bekend ondersteld, en worden de meeste bewijzen slechts kort aangeduid. In eene serie artikelen, die ik binnenkort onder den titel „Zur topologischen Algebra" hoop te publiceeren, zullen de bewijzen volledig worden weergegeven en zal ook vollediger naar de bestaande litteratuur worden verwezen.

In Hoofdstuk I worden de begrippen T-groep, T-ring en T-lichaam, benevens het fundamenteele begrip der *completeering* ingevoerd. Hoofdstuk II bevat de theorie der $\mathfrak{b}_\nu$-adische ringen, die o.a. de theorie der geheele p-adische en $\mathfrak{p}$-adische getallen van Hensel en der geheele „ideale" getallen van Prüfer als bijzondere gevallen omvat. Hoofdstuk III bevat enkele stellingen over topologische, in het bijzonder Cantorsche groepen. In Hoofdstuk IV tenslotte wordt het in den aanvang gestelde probleem volledig opgelost. En wel blijkt, wanneer men afziet van het triviale geval, dat alle punten van elkaar geïsoleerd zijn (dat dus eigenlijk in het geheel geen topologische relaties bestaan), dat het lichaam der complexe getallen door de beide bovengenoemde existentiepostulaten van d' Alembert en Bolzano-Weierstrass volledig gekarakteriseerd is: *het lichaam der complexe getallen is het eenige mikroperfecte* [3]) *algebraisch afgesloten lichaam.* Tevens wordt aan de lichamen der p-adische en $\mathfrak{p}$-adische getallen hun plaats temidden der T-lichamen aangewezen.

De eigenlijke aanleiding tot deze studie der topologische algebra was de ontdekking, dat er, behalve het getallencontinuum en de

---

1) Vgl. bv. F. Hausdorf, Grundzüge der Mengenlehre, erste Auflage, Leipzig, Veit & Comp., 1914; Tietze-Vietoris, Enz. der math. Wiss.

2) Vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Julius Springer, I 1930, II 1931.

3) *Mikroperfect* wordt hier in de beteekenis van: mikrocompact en dicht in zich zelf gebruikt.

daaruit afgeleide meerdimensionale varieteiten, nog andere verzamelingen zijn, met name de Cantorsche verzameling en de daaruit afgeleide „solenoiden" en „solenoidale varieteiten", [1]) die zoowel topologisch als algebraisch hoogst eenvoudige eigenschappen bezitten. Kort te voren was door O. Schreier [2]) de theorie der limesgroepen opgesteld. Met behulp der toen door ons opgestelde completeeringstheorie trachtten B. L. van der Waerden en ik in 1926 (destijds zonder succes) de perfectiseerbare lichamen te classificeeren. Vervolgens ontstond in 1928 de theorie der $\mathfrak{b}_\nu$-adische ringen, en gelukte in het voorjaar van 1930 de classificatie der mikroperfecte lichamen. De stellingen over T-groepen dateeren in hoofdzaak van Januari 1931. Inmiddels zijn van andere zijde (Krull, Baer e.a.) belangrijke topologisch-algebraische onderzoekingen verschenen.

---

1) D. van Dantzig, Ueber topologisch homogene Kontinua, Fundamenta Mathematicae, **14** (1930) 102—125.

2) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg **4** (1925) 15—32; Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im grossen, idem **5** (1926) 233—244.