Involuties in de stralenruimte

van Dijk, Herman Cornelis Marie

Publication date:
1935

ZUSAMMENFASSUNG.

Die projektive Liniengeometrie ist bekanntlich die Geometrie auf einer vierdimensionalen Fläche zweiter Ordnung in einem Raume R_5 von 5 Dimensionen. Die Geraden in R_5, welche die Bildpunkte je zweier Strahlen verbinden, die einander zugeordnet sind in einer Involution, deren Strahlenpaare sich im allgemeinen nicht schneiden, bilden ein System S_4 von ∞^4 Geraden in R_5, die im allgemeinen nicht auf der vierdimensionalen Fläche liegen.

Ein derartiges System hat drei Charakteristiken r_1, r_2, r_3.

Die Charakteristik r_1 ist die Zahl der Geraden von S_4, die durch einen gegebenen Punkt von R_5 gehen; r_2 Geraden des Systems liegen in einem vierdimensionalen Raume und schneiden überdies eine in diesem R_4 gegebene Gerade; in einem R_3 von R_5 liegen r_3 Geraden van S_4. Die Charakteristiken des einer Involution I entsprechenden Systems S_4 werden die Rangzahlen der Involution genannt. In dieser Dissertation wird erörtert, welche die Strahleninvolutionen mit Rangzahlen $\leqslant 2$ sind, für welche $r_1 = 1$, ist, während mindestens eine der Zahlen r_2 und r_3 den Wert 2 hat.

1. Gefunden sind folgende Systeme S_4 (1, 2, 0):

a. Jeder Punkt einer Geraden l ist Scheitel eines zu einem Büschel gehörenden Kegels V_4^2; die Strahlen von S_4 sind die Erzeugenden dieser Kegel. Ein durch l gehender R_4 berührt sämtliche Kegel des büschels längs dieser Geraden.

b. Die Geraden von S_4 sind die Geraden, welche l und eine V_3^2, mit welcher l einen Schnittpunkt hat, in im allgemeinen verschiedenen Punkten schneiden. (Sonderfall von a.).

c. Die Punkte der Geraden l werden den quadratischen Flächen eines in einem R_3 liegenden Büschels projektiv zugeordnet. Die Geraden durch einen Punkt von l in den Ebenen durch l und die Punkte der entsprechenden Fläche gehören zu S_4.

d. Die R_4 eines Büschels schneiden eine Ebene U in Geraden, die durch den Schnittpunkt S des dreidimensionalen Achsenraumes mit U gehen. S ist ein Punkt eines in U liegenden Kegelschnittes k^2. Die in einem R_4 des Büschels liegenden Geraden, die durch den von S verschiedenen Schnittpunkt des R_4 mit k^2 gehen, gehören zu S_4.

Die Involution, die dem Systeme *a* entspricht, kann in folgender Weise beschrieben werden:

Eine Gerade l_1 ist Doppelstrahl eines quadratischen Komplexes Γ_1^2, zu dem eine Gerade l_2 gehört, welche Doppelstrahl eines Komplexes Γ_2^2 ist, in dem l_1 liegt. Die durch l_1 und l_2 gehenden Regelschaaren der beiden Komplexe liegen in einem und demselben Gewinde C. Eine Gerade t bestimmt mit l_1 und l_2 eine Regelschaar ρ^2; auszer dem Doppelstrahle und l_2 gehört eine Gerade p von ρ^2 zu Γ_1^2; es sei q die dritte zu Γ_2 gehörende Gerade der Regelschaar. In der durch die Geradenpaare l_1, p und l_2, q bestimmten Involution in ρ^2 wird der Geraden t eine Gerade t' zugeordnet.

Im Falle d betrachten wir einen Büschel (C) und eine einfach unendliche quadratische Menge V^2 von Gewinden; V^2 gehört zu einem Netze N von linearen Komplexen. Das Gewinde S von N, das sich mit dem Büschel (C) in Involution befindet, gehört zu V^2. Jedes Gewinde C_i von (C) ist in Involution mit einem Büschel des Netzes, zu dem auszer S ein zweiter Komplex Γ_i von V^2 gehört. Die in I einem Strahle t von C_i entsprechende Gerade t' ist zu t in Bezug auf das Gewinde Γ_i konjugiert.

2. Es gibt nur entartete Involutionen mit Rangzahlen (1, 0, 2) oder (1, 1, 2).

3. Die Strahlen eines Systems S_4 (1, 1, 2) schneiden eine Ebene U. Die ∞^2 S-Geraden durch einen Punkt von U sind die Strahlen eines Bündels. Als S-Räume bezeichnen wir die R_3, in denen diese Bündel liegen. Die ∞^1 S-Räume, welche die ∞^3 Strahlen von S_4 enthalten, die U in den Punkten einer Geraden schneiden, sind die R_3 einer auf einer V_4^2 mit einer Doppelgeraden liegenden Schaar.

a. Die Geraden, welche U und zwei gegebene dreidimensionale Räume schneiden, sind die Strahlen von S_4.

b. Eine Gerade c in U gehört zu S_4 und ist Doppelstrahl der V_4^2, auf der die Geraden von S_4 liegen, welche c schneiden. Zu jeder Geraden der Ebene U gehört ein Doppelstrahl einer V_4^2, in jedem S-Raume liegt eine Regelschaar von Doppelstrahlen; die Doppelstrahlen bilden eine V_3^3.

c. Die S-Räume gehen durch eine feste Gerade l, die U schneidet. Die Schnittpunkte der S-Räume mit einer Ebene V sind den Punkten von U, welche die Scheitel der in den S-Räumen liegenden Bündel von S_4 sind, in einer bestimmten quadratischen Verwandtschaft zugeordnet.

d. In U liegt ein Büschel S von zu S_4 gehörenden Strahlen. Die S-Räume gehen durch den Punkt S und haben keine gemeinsame Gerade. Auf eine nähere Beschreibung musz hier verzichtet werden.

e. Die S-Räume gehen durch die Ebene U. Wenn wir jedem Punkte P einer Ebene V den Punkt P′ von U zuordnen, durch welchen die in dem durch P und U bestimmten R_3 liegenden Geraden von S_4 gehen, ergibt sich, dasz die Punkte von U und V sich in einer quadratischen Verwandtschaft entsprechen.

Ich beschreibe nur die zu *a* gehörende Involution I. In jedem von zwei gegebenen Gewindebüscheln befindet sich ein Komplex, zu dem eine gegebene Gerade *t* gehört; *t* bestimmt mit einer gegebenen Regelschaar ein Strahlennetz C. Die der Geraden *t* in I zugeordnete Gerade *t'* ist der zweite gemeinsame Strahl der Kongruenz C und der Schnittkongruenz der beiden Gewinde.

4. Die Systeme S_4 (1, 2, 2).

a. Die Strahlen von S_4 sind die Geraden, welche eine in einem Raume C_3 liegende quadratische Fläche O^2 und zwei dreidimensionale Räume schneiden[1]), deren Schnittgeraden mit C_3 auf O^2 liegen und sich schneiden.

b. Die Geraden, welche eine quadratische Fläche O^2 und eine Ebene, mit der O^2 einen Schnittpunkt hat, in verschiedenen Punktten schneiden, sind die Strahlen von S_4.

c. Eine Ebene U schneidet eine quadratische Fläche O^2 in einem Punkte C. O^2 liegt in einem Raume C_3. Die Punkte S und T einer durch C gehenden Geraden der Ebene sind Scheitel zweier Geradenbüschel in U. Durch den Punkt C wird eine Tangente *c* an O^2 gezogen. Die in C_3 liegenden Ebenen durch die Gerade *c* werden den Strahlen des Büschels S projektiv zugeordnet. Die Gerade SC entspricht der Tangentenebene. Die Geraden von S_4, die durch einen Punkt P von U gehen, sind die Strahlen der Büschel mit Scheitel P in den Ebenen durch die Gerade TP und die Punkte des Kegelschnittes der Fläche O^2 in der Ebene des Raumes C_3, die dem Strahle SP des Büschels S entspricht.

d. Die S-Geraden schneiden eine Ebene U. Jeder Punkt van U ist Scheitel zweier Bündel. Die Räume, in denen die Bündel liegen, gehen durch U. Zu jedem Punkte P einer Ebene V gehört ein Punkt P' in U, der Scheitel ist des in dem durch P und U bestimmten R_3 liegenden Bündels von S_4. Einem Punkte P' von U entsprechen die Schnittpunkte der beiden R_3, welche die durch P' gehenden Strahlen von S_4 enthalten, mit der Ebene V. Es ergibt sich, dasz die Punkte der Ebenen U und V einander in einer 2—1-deutigen quadratischen Verwandtschaft zugeordnet sind.

Die entsprechenden Strahleninvolutionen lassen sich nicht kurz beschreiben.

---

[1]) In verschiedenen Punkten.