

Modélisation, analyse mathématique et simulation numérique de la dynamique des glaciers

THÈSE N° 4677 (2010)

PRÉSENTÉE LE 30 AVRIL 2010

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE
CHAIRE D'ANALYSE ET DE SIMULATION NUMÉRIQUE
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Guillaume JOUVET

acceptée sur proposition du jury:

Prof. B. Dacorogna, président du jury
Prof. J. Rappaz, Dr M. Picasso, directeurs de thèse
Prof. A. Abdulle, rapporteur
Prof. H. Blatter, rapporteur
Prof. M. Funk, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2010

Résumé

Nous adressons le problème à frontière libre qui consiste à trouver la forme d'un glacier en trois dimensions sur une période et avec des conditions climatiques données. Les glaciers évoluent par glissement, par déformation interne et par échange de masse avec l'extérieur. La glace est modélisée comme un fluide non Newtonien. Sa vitesse est obtenue en résolvant un problème de Stokes non linéaire avec une condition de glissement entre la glace et le lit rocheux. La forme du glacier est décrite par une fonction "Volume Of Fluid" (VOF), laquelle satisfait une équation de transport. Les effets climatiques (accumulation et ablation de glace) sont pris en compte dans le terme source de cette équation. Un algorithme découplé avec deux maillages permet de calculer la vitesse et la fonction VOF en utilisant différentes techniques numériques, telles que la méthode des éléments finis et la méthode des caractéristiques.

Sur un plan théorique, on prouve l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Stokes non linéaire. Des estimations *à priori* pour la convergence de la méthode des éléments finis sont établies en utilisant une technique de quasi-norme. Finalement, la convergence de schémas de linéarisation, tels que la méthode de point fixe ou la méthode de Newton, est prouvée.

Plusieurs applications démontrent le potentiel de la méthode numérique pour simuler le mouvement d'un glacier sur une longue période. La première consiste à simuler le glacier du Rhône et le glacier d'Aletsch de 1880 à 2100 en utilisant des données climatiques fournies par les glaciologues. La reconstitution des 120 dernières années est validée par des mesures. Ensuite, plusieurs scénarios climatiques sont considérés dans le but de prédire la forme du glacier jusqu'en 2100. Un retrait dramatique des deux glaciers est attendu au 21^{ème} siècle. La deuxième application est un problème inverse. Elle consiste à trouver une paramétrisation du climat qui fasse qu'un glacier épouse l'une de ses moraines.

Deux autres aspects de la glaciologie sont également traités dans cette thèse. Le premier consiste à modéliser et à simuler l'effondrement de blocs de glace lors du vèlage. Le modèle doit être enrichi d'une variable d'endommagement, laquelle décrit la présence de microfissures dans la glace. Un schéma numérique additionnel permet de résoudre le champ d'endommagement et de simuler le vèlage en deux dimensions. Le deuxième problème consiste à prouver l'existence d'une forme stationnaire de glacier en considérant un modèle à couche mince et une géométrie simplifiée. Des expériences numériques confirment le résultat théorique et montrent des propriétés physiques de la solution.

Mots clefs : glaciologie, fluide non Newtonien, méthode d'éléments finis, méthode "volume of fluid", mécanique de l'endommagement, modèle à couche mince.

Abstract

We address the free boundary problem that consists in finding the shape of a three dimensional glacier over a given period and under given climatic conditions. Glacier surface moves by sliding, internal shear and external exchange of mass. Ice is modelled as a non Newtonian fluid. Given the shape of the glacier, the velocity of ice is obtained by solving a stationary non-linear Stokes problem with a sliding law along the bedrock-ice interface. The shape of the glacier is updated by computing a Volume Of Fluid (VOF) function, which satisfies a transport equation. Climatic effects (accumulation and ablation of ice) are taken into account in the source term of this equation. A decoupling algorithm with a two-grid method allows the velocity of ice and the VOF to be computed using different numerical techniques, such that a Finite Element Method (FEM) and a characteristics method.

On a theoretical level, we prove the well-posedness of the non-linear Stokes problem. *A priori* estimates for the convergence of the FEM are established by using a quasi-norm technique. Eventually, convergence of the linearisation schemes, such that a fixed point method and a Newton method, is proved.

Several applications demonstrate the potential of the numerical method to simulate the motion of a glacier during a long period. The first one consists in the simulation of Rhone et Aletsch glacier from 1880 to 2100 by using climatic data provided by glaciologists. The glacier reconstructions over the last 120 years are validated against measurements. Afterwards, several different climatic scenarios are investigated in order to predict the shape the glaciers until 2100. A dramatic retreat during the 21st century is anticipated for both glaciers. The second application is an inverse problem. It aims to find a climate parametrization allowing a glacier to fit some of its moraines.

Two other aspects of glaciology are also adressed in this thesis. The first one consists in modeling and in simulating ice collapse during the calving process. The previous ice flow model is supplemented by a Damage variable which describes the presence of micro crack in ice. An additional numerical scheme allows the Damage field to be solved and a two dimensional simulation of calving to be performed. The second problem aims to prove the existence of stationary ice sheet when considering shallow ice model and a simplified geometry. Numerical investigation confirms the theoretical result and shows physical properties of the solution.

Keywords : glaciology, non Newtonian flow, finite element method, "volume of fluid" method, damage mechanics, shallow ice approximation.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont au Professeur Jacques Rappaz qui m'a proposé un sujet de thèse passionnant et qui m'a accordé une grande confiance dans le travail. Ses encouragements et son soutien m'ont toujours permis d'aller de l'avant et de progresser dans ma thèse. J'adresse mes sincères remerciements au Docteur Marco Picasso qui m'a co-encadré. Grâce à lui, j'ai beaucoup appris sur l'analyse numérique et ses aspects computationnels. Je suis très reconnaissant aux Professeurs Heinz Blatter et Martin Funk pour m'avoir initié à la glaciologie, pour leur grande gentillesse et pour leur volonté de mener une collaboration fructueuse. Mes séjours à l'ETHZ ont toujours été une grande source d'inspiration et de connaissance. Je remercie le Professeur Assyr Abdulle pour avoir participé à mon jury de thèse et pour ses remarques constructives sur le document. Je suis également reconnaissant au Professeur Bernard Dacorogna pour avoir accepté de présider le jury. Je remercie le Fond National pour la Recherche Scientifique pour avoir financé ce travail.

Je remercie chaleureusement Mathias Huss, qui a rendu possibles les simulations des glaciers du Rhône et d'Aletsch. Au cours de mes années de thèse, de nombreuses discussions avec des collègues internes et externes m'ont permis d'apprendre plus sur la glaciologie et les méthodes numériques. Dans un ordre chronologique, je remercie Pierre Kirner, Antoine Pralong, Daniel Farinotti, Andreas Bauder, Arne Keller, Denis Cohen, Marco Discacciati et Alexandre Caboussat. Merci également à mon père pour sa relecture du manuscrit.

Enfin, je remercie tous mes collègues de la chaire d'Analyse et Simulation Numérique : en particulier, les secrétaires Mme Mosetti et Mme Abitbol pour leur dévouement, Vicky, Léonard et Gilles pour le support informatique, Michel, Alexandre M. et Thomas. Un grand merci à Vira et Gilles pour le partage du bureau, pour leur sympathie et pour les bons moments passés aux cafés. Malgré l'éparpillement inévitable de tous, je garderai un excellent souvenir des moments passés avec l'équipe CMCS : Gonçalo, Annalisa, Beni et Paolo. Merci à vous tous. Enfin, je remercie chaleureusement mes amis GC : Aga, Sarah, Claire et Manuel, pour tous les bons moments passés ensemble. Un grand merci à tous mes autres amis de Lausanne plus inclassables, parmi lesquels : Vicky, Ilaria, Maria, Alessio, Nouara, Madeleine, Rachel, Bastien et Silvia, puis ceux que j'ai oublié ... Je n'oublie pas mes amis Franc-Comtois : Merci à Guillaume, Clémence, Nathalie et Pauline. Un immense merci à mes parents pour leur soutien sans limite ainsi qu'à mon frère Lionel et à ma sœur Lucie.

Merci à Chantal que j'aime.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Introduction	1
1 Modélisation	5
1.1 Dynamique de la glace	5
1.1.1 Déformations et contraintes	6
1.1.2 Loi de Glen	7
1.1.3 Équations de Stokes	8
1.1.4 Conditions de bord	10
1.2 Description de la surface libre	11
1.2.1 Bilan de masse	11
1.2.2 Une description lagrangienne	12
1.2.3 Une description eulérienne	12
1.2.4 Relation avec l'équation de Saint-Venant	14
1.3 Résumé du modèle	14
2 Méthode numérique	17
2.1 Discrétisation en temps	17
2.1.1 Étape d'advection	17
2.1.2 Étape de diffusion	19
2.2 Discrétisation en espace	19
2.3 Problème d'advection	20
2.3.1 Résolution de (2.3) - (2.4)	20
2.3.2 Algorithmes complémentaires	21
2.3.3 Problème d'accumulation et d'ablation	21
2.3.4 Test de convergence 2D pour l'algorithme de transport	23
2.4 Interpolation de φ^n sur \mathcal{T}_H et définition de Ω_H^n	24
2.5 Problème de diffusion	25
2.5.1 Formulation variationnelle	26
2.5.2 Pénalisation des composantes normales de la vitesse sur $\Gamma_B^{S,n}$	27
2.5.3 Discrétisation en espace	28
2.5.4 Linéarisation du problème	29
2.5.5 Formulation matricielle	31
2.6 Interpolation de \mathbf{u}^n sur \mathcal{T}_h	32
2.7 Organigramme	33

3	Résultats théoriques	35
3.1	Propriétés des fonctions μ et α	35
3.2	Le problème continu	38
3.2.1	Espaces fonctionnels	38
3.2.2	Formulation réduite	39
3.2.3	Formulation mixte	42
3.3	Le problème discret	44
3.4	Estimation d'erreur <i>a priori</i>	45
3.4.1	Résultats théoriques	45
3.4.2	Tests numériques 2D	51
3.5	Convergence de la méthode de linéarisation	52
3.5.1	Résultats théoriques	52
3.5.2	Tests numériques 2D	61
4	Résultats numériques	63
4.1	Comparaison avec une solution exacte du "Shallow Ice Approximation"	63
4.2	Glacier du Rhône	64
4.2.1	Génération des maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h	64
4.2.2	Simulation de 1874 à 2007	65
4.2.3	Simulation de 2007 à 2100	71
4.3	Glacier d'Aletsch	77
4.4	Glacier de Vadret Muragl	83
4.4.1	Positions reconstruites du glacier	83
4.4.2	Paramétrisation du bilan de masse	83
4.4.3	Géométrie stationnaire	84
4.4.4	Positions de "Margun" et "Punt Muragl"	86
4.4.5	Conclusions et perspectives	89
5	Simulation du vêlage avec un modèle d'endommagement	91
5.1	Modélisation	92
5.1.1	Problème du vêlage	92
5.1.2	Variable d'endommagement	93
5.1.3	Loi de Glen endommagée	93
5.1.4	Équation d'évolution pour l'endommagement	95
5.1.5	Description "Volume of Fluid"	96
5.2	Méthode numérique	97
5.2.1	Discrétisation en temps	97
5.2.2	Discrétisation en espace	98
5.2.3	Étape d'advection	99
5.2.4	Étape de diffusion	99
5.2.5	Adaptation du pas de temps	100
5.3	Résultats numériques	100
5.3.1	Simulation du vêlage d'un glacier	100
5.3.2	Tests de sensibilité	101
5.4	Conclusions et perspectives	103

6	Solution stationnaire pour un problème d'islandis	107
6.1	Modélisation	108
6.2	Analyse mathématique	109
6.2.1	Reformulation du problème	110
6.2.2	Existence d'un minimiseur	111
6.2.3	Propriétés du minimiseur	112
6.2.4	Existence d'une solution	115
6.3	Méthode numérique	116
6.4	Résultats numériques	117
6.5	Conclusions et perspectives	120
	Conclusion	121
	Annexe	123
	Bibliographie	128
	<i>Curriculum Vitae</i>	135

Introduction

L'histoire de la terre a été marquée par une alternance régulière de longues périodes froides et d'intermèdes tempérés. Au cours de l'ère quaternaire (dernier million d'années), une dizaine de cycles froids, appelés ères glaciaires, se sont produits en raison de modifications de la position et de l'orientation de la terre par rapport au soleil. Ces changements de température ont induit des variations significatives de la quantité de glace présente sur terre. La dernière période glaciaire (dite de "Würm" de -120 000 à -20 000) a marqué le paysage européen en laissant derrière elle une multitude de vestiges morphologiques. La localisation et la datation de moraines alpines a ainsi pu démontrer que l'actuelle Suisse romande était entièrement couverte de glace à la fin du l'âge de Würm. Par la suite (de -20 000 à -10 000), une augmentation des températures moyennes (entre 5° et 8°) a fait entrer la Terre dans la période interglaciaire actuelle [39]. Les glaciers alpins se sont alors retirés ne laissant aujourd'hui en Suisse qu'une quantité de glace relativement petite (comparable au volume du lac Léman) [33]. Dans une moindre échelle de temps, le "petit âge glaciaire" (1550-1850), période en moyenne 0.5° plus froide que maintenant, a eu un impact sur les glaciers bien visible par l'homme.

Le volume de glace présent sur terre est fortement corrélé à la température moyenne [106, 39]. Ainsi, le récent retrait de nombreux glaciers du monde est révélateur du réchauffement climatique. A plus petite échelle, l'observation des glaciers alpins fournit des données précieuses pour étudier les effets du changement climatique. Le climat est un facteur clef quant à l'avancement ou au retrait d'un glacier. En effet, les précipitations neigeuses régénèrent les glaciers alors que le rayonnement solaire contribue à leurs fontes. D'autres raisons mécaniques font qu'un glacier peut avancer ou se retirer. D'une part, son énorme poids le conduit à s'affaisser et donc à s'étendre. D'autre part, un glacier peut localement glisser tel un solide sur un plan incliné. Pour modéliser la physique des glaciers, il convient donc d'étudier aussi bien la dynamique interne de la glace que l'échange de masse avec l'extérieur.

A l'échelle d'années, un glacier se comporte comme un fluide visqueux qui se déforme sous l'effet de la gravité. Deux facteurs prépondérants accélèrent la glace : la hauteur de glace et la pente du terrain. La glace est un matériau rhéologique, c'est-à-dire qu'elle jouit de propriétés de mécanique des fluides incompressibles (écoulement) et de mécanique des solides (glissement). Son comportement visqueux est modélisé par la loi de Glen [46], connue depuis les années 1950. A la base du glacier, une loi mécanique modélise le glissement [105]. Le calcul du champ de vitesse conduit à la résolution d'une équation de Stokes non linéaire avec une condition de bord non linéaire. Le modèle est complété d'une équation de transport établie d'un bilan de masse prenant en compte le flux, l'accumulation et l'ablation de glace.

Dès les années 1980, les premières méthodes numériques ont été développées pour calculer l'évolution des calottes polaires. Le premier modèle considéré est le "Shallow Ice Approximation" (SIA), basé sur une hypothèse de type "couche mince" [57, 80, 49]. Les équations du flux

de glace et du bilan de masse se réduisent à l'équation du "Shallow Ice". Plusieurs schémas numériques aux différences finies sont proposés, voir [37, 15, 18, 58]. Ces méthodes présentent l'avantage d'être peu coûteuses, simples et efficaces. Cependant, ce premier modèle s'avère déficient aux marges du glacier ou lorsque la pente basale est importante [68]. Dans les années 1990, un second modèle de type "couche mince", le "First Order Approximation" (FOA), améliore la physique du glacier aux marges de celui-ci, voir [9, 81]. Pour résoudre les équations résultantes, des schémas aux différences finies sont proposés dans [9, 81] et aux éléments finis dans [93, 84]. Plus récemment, des modèles sans simplification ont été implémentés en utilisant des méthodes d'éléments finis [50, 42, 64, 90] et de volumes finis [30]. Le modèle de surface libre le plus populaire est basé sur une description lagrangienne de la masse glaciaire via une fonction hauteur de glace [84]. Sa résolution numérique est la plupart du temps basée sur un schéma aux différences finies [84, 81]. Une description eulérienne par une fonction de type "level set" de la frontière libre est utilisée dans [90]. Dans cette thèse (à l'exception du chapitre 6), nous utilisons une autre description eulérienne, basée sur une fonction du type "Volume-Of-Fluid" [98, 75].

L'objet de cette thèse est la modélisation, l'analyse mathématique et la simulation numérique de phénomènes dynamiques se produisant dans un glacier. La simulation numérique est devenue un outil précieux pour comprendre l'impact du changement climatique sur les glaciers. Nous adressons le problème à frontière libre qui consiste à trouver la forme d'un glacier sur une période et sous des conditions climatiques données. Un modèle isotrope est établi en prenant en compte la dynamique interne de la glace, le contact du glacier sur le lit rocheux et les phénomènes climatiques extérieurs. La description "Volume-Of-Fluid" est choisie pour sa capacité à traiter des géométries complexes et des changements de topologie. L'application à plusieurs glaciers montre que la méthode numérique employée est robuste et adaptée au problème étudié. Une comparaison entre simulations et mesures de glaciers permet une validation des modèles physiques et numériques. Une analyse mathématique des équations traitées est indispensable pour assurer d'une part que le problème admet une unique solution et d'autre part que les algorithmes mis en œuvre convergent vers cette solution. D'autres problèmes à une échelle différente sont traités dans cette thèse. A petite échelle, le vèlage est le processus de fracturation de la glace qui a lieu au front d'un glacier en contact avec de l'eau. Une modélisation et un traitement numérique particulier doivent être effectués pour prendre en compte l'initialisation et la propagation des fissures. A grande échelle, l'évolution des calottes polaires ne peut se modéliser sans faire une hypothèse de type "couche mince". On adresse le problème de l'existence de forme stationnaire de calotte polaire avec une paramétrisation physique du bilan de masse.

Le chapitre 1 est consacré à la modélisation. La rhéologie de la glace y est décrite et permet l'établissement d'une équation de Stokes non linéaire pour la vitesse et la pression. L'incompressibilité de la glace et plusieurs conditions de bord viennent clore le modèle. On introduit, ensuite, la notion de bilan de masse qui prend en compte l'accumulation due aux précipitations neigeuses et l'ablation due à la fonte. On décrit la présence de glace par une fonction du type "Volume-Of-Fluid" qui prend la valeur 1 à l'intérieur du glacier et 0 à l'extérieur [98, 75]. Un bilan de masse local conduit à une équation de transport pour cette fonction. L'échange de masse avec l'extérieur due à l'accumulation et l'ablation est pris en compte par le terme source de l'équation de transport.

Le chapitre 2 concerne la méthode numérique mise en œuvre pour résoudre les équations établies au chapitre 1. Un algorithme de "splitting" est utilisé pour découpler les problèmes de transport et de diffusion [75]. Deux maillages différents sont utilisés pour résoudre ces deux problèmes. Le problème de Stokes linéarisé est résolu par une méthode d'éléments finis sur un

maillage non structuré qui épouse le lit rocheux alors que le problème de transport est résolu par la méthode des caractéristiques sur une grille structurée qui recouvre le glacier en entier. Un algorithme supplémentaire permet de réduire la diffusion numérique due au transport d'une fonction discontinue [98, 75]. Enfin, on propose plusieurs méthodes (dont une méthode de point fixe et une méthode de Newton) pour résoudre la non-linéarité du problème de Stokes discrétisé.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse mathématique. Dans un premier temps, on traite le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution du problème stationnaire de Stokes non linéaire qui détermine la vitesse et la pression à l'intérieur d'un glacier. En utilisant des arguments d'analyse convexe, on prouve l'existence et l'unicité d'un champ de vitesse, solution du problème réduit. Grâce à une condition *inf sup*, on montre que le problème mixte sous sa forme faible est bien posé. On établit ensuite une estimation *a priori* entre la solution du problème exacte et la solution du problème approchée. La non linéarité du problème est la principale difficulté pour l'obtention de cette estimation. On utilise une technique de quasi-norme [7] pour contourner cette difficulté. Enfin, on démontre la convergence de plusieurs algorithmes pour résoudre la non linéarité du problème de Stokes. Les théorèmes de convergence établis dans ce chapitre font l'objet de tests numériques qui les valident.

Le chapitre 4 expose les applications accomplies grâce à la méthode numérique exposée au chapitre 2. Il s'agit de simulations réalisées sur les glaciers du Rhône, d'Aletsch et de Vadret Muragl. La méthode numérique, déjà éprouvée, à plusieurs reprises pour la résolution de problèmes à frontière libre [20], donne entière satisfaction pour la simulation des glaciers. En particulier, elle s'avère robuste pour traiter les géométries complexes du front glaciaire (avec changements de topologies) et du terrain accidenté sur lequel il évolue. La première application consiste à reconstruire deux glaciers Suisses majeurs au 20^{ème} siècle : le glacier du Rhône et le glacier d'Aletsch puis de faire des prévisions d'avancement sur les 100 prochaines années. La seconde application consiste à retrouver les paramètres climatiques (du bilan de masse) qui permettent à un glacier (Vadret Muragl) aujourd'hui disparu d'épouser ses moraines, vieilles de 10 000 ans. Ce problème (inverse) a pour but de déduire des informations climatiques des vestiges laissés par le glacier.

Le but du chapitre 5 est de simuler la rupture de blocs de glace qui se produit lors du vêlage d'un glacier. Pour cela, le modèle rhéologique du chapitre 1 est enrichi d'une variable d'endommagement [87]. La méthode numérique du chapitre 2 est ensuite adaptée à la résolution du champ d'endommagement. Un critère d'adaptation en temps permet de faire la transition entre la phase d'initialisation et la phase de propagation des fissures. Des résultats bidimensionnels sont présentés dans un cas réaliste de vêlage avec une géométrie simple. L'influence du maillage sur la propagation des fissures ainsi que la sensibilité de paramètres physiques et numériques sont testées.

Le chapitre 6 traite un problème de calotte polaire avec un modèle simplifié (du type couche mince) : le "Shallow Ice Approximation". On adresse le problème de l'existence de formes stationnaires lorsque le bilan de masse dépend de l'altitude. Si la géométrie est simple, on peut prouver l'existence mathématique d'une telle solution par des arguments d'analyse convexe. Un schéma aux différences finies permet l'obtention de solutions numériques pour le problème évolutif associé. Des expériences numériques confirment l'existence d'une solution stationnaire physiquement admissible.



Chapitre 1

Modélisation

Un glacier est une masse de glace sur un support rocheux qui se forme par le tassement de couches de neige accumulées. Écrasée sous son propre poids, la neige expulse l'air qu'elle contient, se soude en une masse compacte et se transforme en glace. Nous distinguons deux phénomènes qui contribuent à la variation de masse de glace. L'accumulation est le phénomène qui regroupe les processus de gain de masse tels que les précipitations neigeuses et les avalanches. L'ablation est le phénomène qui regroupe les processus de perte de masse tels que l'érosion et la fonte sous l'effet du rayonnement solaire. Le bilan de masse est la différence entre l'accumulation et l'ablation en chaque point de la surface du glacier. On appelle ainsi "zone d'ablation" l'ensemble des points où le bilan de masse est négatif et "zone d'accumulation" l'ensemble des points où le bilan de masse est positif. La topographie des régions montagneuses favorise la naissance des glaciers "de vallée" que l'on peut caractériser par : un (ou plusieurs) bassin d'alimentation en forme de cirque dans sa partie haute, une masse de glace allongée occupant toute la largeur d'une vallée et un front glaciaire donnant naissance à un torrent. Le mouvement des glaciers a été mis en évidence par l'observation du déplacement des débris rocheux présents sur la surface. Au XIXe siècle, l'idée naît qu'un glacier se comporte comme un fluide visqueux soumis à la force gravitationnelle [97]. Il faut attendre les années 50 pour que les lois de la mécanique des fluides soient appliquées à l'écoulement des glaciers [46]. Cependant, la déformation de la glace n'est pas l'unique raison du mouvement observé en surface. En effet, déjà au XIXe siècle, on suspectait que, tel un solide sur un plan incliné, un glacier puisse glisser à sa base [97]. Depuis, le glissement a pu être mesuré et modélisé. La vitesse de surface est ainsi une combinaison de la vitesse de glissement et de la vitesse d'écoulement.

Ce chapitre est consacré au modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un glacier de vallée en trois dimensions. La glace est considérée comme un fluide non newtonien. Par conséquent, vitesse et pression doivent satisfaire une équation de Stokes non linéaire. Plusieurs conditions de bord sont proposées. En particulier, une condition de glissement sur le lit rocheux est établie. L'évolution de la frontière libre est décrite au moyen d'une fonction "Volume-Of-Fluid" (VOF) qui vaut un à l'intérieur du domaine de glace et zéro en dehors. La loi de conservation de la masse aboutit à une équation de transport pour cette fonction VOF avec un terme source qui dépend du bilan de masse.

1.1 Dynamique de la glace

Nous modélisons l'évolution d'un glacier dans l'intervalle de temps $[0, T]$ où $T > 0$. Le domaine de glace est noté $\Omega(t)$ où t est la variable du temps. La variable d'espace est notée

\mathbf{x} et se décompose en trois composantes $\mathbf{x} = (x, y, z)$. On définit la cavité pavée :

$$\Lambda := [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}] \times [0, \bar{Z}] \subset \mathbb{R}^3,$$

où $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} > 0$, qui inclut le domaine de glace en tout temps :

$$\Omega(t) \subset \Lambda, \quad \forall t \in [0, T].$$

On appelle Q_T le domaine d'espace-temps que l'on définit par :

$$Q_T = \{(\mathbf{x}, t) \in \Omega(t) \times (0, T); \quad 0 \leq t \leq T\},$$

ce qui nous permet de définir les fonctions $\mathbf{u} = (u, v, w) : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement, le champ de vitesse et la pression. La figure 1.1 illustre les quantités introduites. Comme tout matériau, la glace possède une loi de comportement qui relie la déformation à la contrainte appliquée. Nous commençons par définir ces deux notions mécaniques.

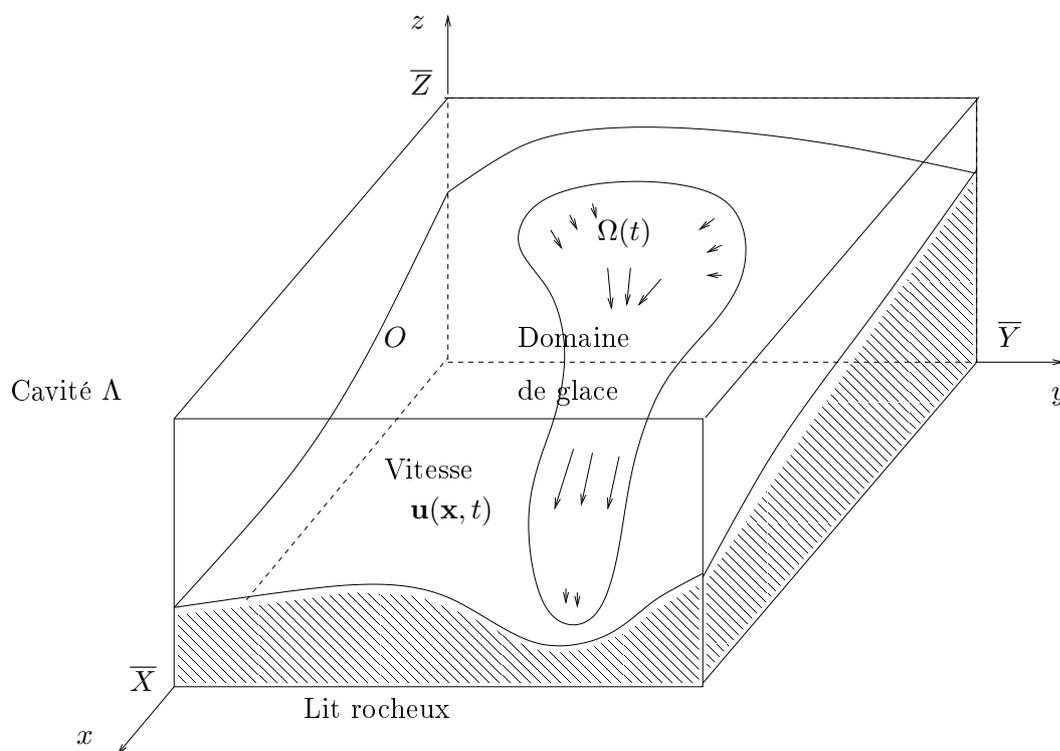


FIG. 1.1. Vue schématique d'un glacier en trois dimensions avec les notations.

1.1.1 Déformations et contraintes

Les **déformations** locales au sein d'un fluide sont données par les dérivées spatiales des composantes de la vitesse. On appelle tenseur du taux de déformation la partie symétrique du gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t).$$

On appelle σ le tenseur des contraintes (ou le tenseur de Cauchy). La quantité $\sigma \mathbf{n}$ désigne la force sur le bord d'une surface orientée de normale \mathbf{n} et de vecteurs tangents $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$; il est commode de décomposer $\sigma \mathbf{n}$ comme suit :

$$\sigma \mathbf{n} = \underbrace{[(\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]}_{\sigma_n} \mathbf{n} + \underbrace{[(\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_1]}_{\sigma_{t_1}} \mathbf{t}_1 + \underbrace{[(\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_2]}_{\sigma_{t_2}} \mathbf{t}_2. \quad (1.1)$$

On introduit le premier invariant de la contrainte σ :

$$\sigma_I := \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma). \quad (1.2)$$

Pour des matériaux incompressibles, comme la glace, le premier invariant ne contribue pas à la déformation. Par conséquent, on définit la **contrainte déviée** τ :

$$\tau := \sigma - \sigma_I I,$$

où I est la matrice identité. Le deuxième invariant est défini par :

$$\tau_{II} := \sqrt{\frac{1}{2} \tau : \tau} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\tau \tau)}. \quad (1.3)$$

1.1.2 Loi de Glen

La glace possède plusieurs phases avec des structures cristallines fondamentalement différentes qui dépendent de la température, de la pression et de l'histoire de la cristallisation. La capacité de la glace à se déformer sous une contrainte est directement reliée à l'agencement des cristaux de glace. A l'échelle d'une année, la glace s'écoule comme un fluide incompressible et visqueux. Puisque la déformation de la glace est extrêmement lente (de l'ordre de 100 mètres par année), les effets d'élasticité sont négligés. Dans les années 50, des travaux expérimentaux initiés par J. Glen [46] ont montré l'adéquation d'une loi de type "puissance" pour modéliser le comportement de la glace. Plus précisément, la déformation d'un bloc de glace est proportionnelle à une puissance de la contrainte appliquée. Pour modéliser le comportement de la glace, nous utilisons une version régularisée de la "loi de Glen" [46, 49] :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = A(\tau_{II}^{m-1} + \tau_0^{m-1})\tau, \quad (1.4)$$

où $m \geq 1$ est l'exposant de Glen, A est appelé le facteur d'Arrhenius et $\tau_0 \geq 0$ est un paramètre de régularisation. La loi de Glen reste largement utilisée en glaciologie [57, 42, 50]. Des études empiriques ont permis d'estimer les paramètres A et m . Ainsi, l'exposant de Glen m le plus approprié est proche de 3, voir [50]. Le facteur A dépend directement de la température et de la nature de la glace (type de cristallisation et présence d'impuretés). Afin de connaître la température en tout point d'un glacier, le modèle doit être complété par une équation pour la thermique [66]. Cependant, nous supposons que la glace est isotherme et donc que le coefficient A est constant. Notons que cette simplification est raisonnable pour modéliser les glaciers alpins qui n'ont pas d'importantes variations de température interne. L'incompressibilité de la glace se traduit par une densité ρ constante et par une relation sur la matrice des déformations :

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) = 0. \quad (1.5)$$

En mécanique des fluides newtoniens, la relation entre la déformation et la contrainte déviée est linéaire et fait intervenir un terme de viscosité μ :

$$\tau = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}). \quad (1.6)$$

En utilisant les relations (1.4) et (1.6), on définit la viscosité μ de la glace comme étant la solution (voir le lemme 3.1.1 pour la démonstration de l'existence d'une solution) de la relation implicite suivante :

$$\frac{1}{2\mu} = A(\tau_0^{m-1} + (\sqrt{2}\mu|\varepsilon(\mathbf{u})|)^{m-1}), \quad (1.7)$$

où $|\varepsilon(\mathbf{u})| := \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})}$.

Lorsque $\tau_0 = 0$, on peut exprimer explicitement μ par :

$$\mu = \frac{1}{2}A^{-\frac{1}{m}} \left(\frac{|\varepsilon(\mathbf{u})|}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1-m}{m}}. \quad (1.8)$$

La dernière relation traduit le caractère adoucissant de la glace : la viscosité décroît avec la déformation $|\varepsilon(\mathbf{u})|$. On remarque que la viscosité de l'équation (1.8) devient infinie lorsque la déformation est nulle. Pour rendre finie cette viscosité tout en conservant le même comportement lorsque la déformation devient grande, on utilise un paramètre de régularisation τ_0 strictement positif, voir figure 1.2. Si $m = 1$, la viscosité μ est constante :

$$\mu = \frac{1}{2A},$$

et la glace est considérée comme un fluide newtonien. Si $m = 2$, (1.7) se réduit en une équation du deuxième degré en μ résoluble :

$$\mu = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2A\tau_0)^2 + 8\sqrt{2}A|\varepsilon(\mathbf{u})|} - 2A\tau_0}{4\sqrt{2}A|\varepsilon(\mathbf{u})|}, & \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| > 0, \\ \frac{1}{2A\tau_0}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Quand $m = 3$, (1.7) est une équation du troisième degré en μ qui peut être résolue en utilisant la formule de Cardan :

$$\mu = \begin{cases} B_+^{\frac{1}{3}} - B_-^{\frac{1}{3}}, \text{ où } B_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{1}{8A|\varepsilon(\mathbf{u})|^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_0^2}{6|\varepsilon(\mathbf{u})|^2}\right)^3} \pm \frac{1}{8A|\varepsilon(\mathbf{u})|^2}, & \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| > 0, \\ \frac{1}{2A\tau_0^2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque m est différent de 1, 2, 3 ou 4, l'équation (1.7) n'est plus résoluble analytiquement. On s'oriente alors vers une méthode numérique : méthode de point fixe ou méthode de Newton.

1.1.3 Équations de Stokes

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit [85, 31] :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \operatorname{div}(\sigma) = \rho \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.10)$$

où ρ est la densité, \mathbf{g} est le vecteur gravité et $\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ est la dérivée convective. En adimensionnalisant l'équation (1.10), nous allons voir que le terme d'inertie $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ est largement négligeable.

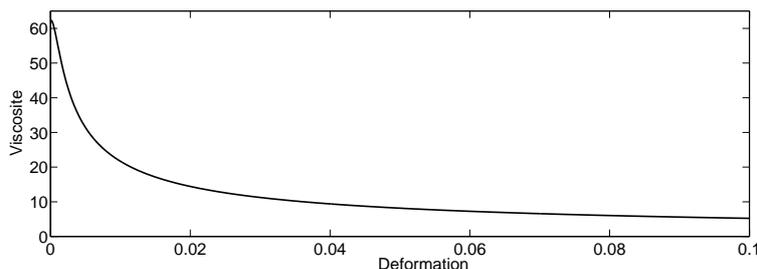


FIG. 1.2. Viscosité μ (unité : bar a, où a : année) en fonction du taux de déformation $|\varepsilon(\mathbf{u})|$ (unité : a^{-1}). Les paramètres sont $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$, $m = 3$ et $\sigma_0 = \sqrt{0.1} \text{ bar}$.

Soit $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{x}\}$, $\{t\}$ et $\{\sigma\}$, respectivement, la vitesse, la longueur, le temps et la contrainte caractéristique d'un glacier. Posons :

$$\tilde{\mathbf{u}} := \frac{\mathbf{u}}{\{\mathbf{u}\}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{\{\mathbf{x}\}}, \quad \tilde{t} := \frac{t}{\{t\}}, \quad \tilde{\sigma} := \frac{\sigma}{\{\sigma\}}, \quad \tilde{\rho} := \frac{\rho}{\{\rho\}}, \quad \tilde{\mathbf{g}} := \frac{\mathbf{g}}{\{\mathbf{g}\}}.$$

Si de plus, on pose $\{\mathbf{t}\} = \{\mathbf{x}\}\{\mathbf{u}\}^{-1}$, alors (1.10) se réécrit :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\tilde{t}} - \frac{1}{Re} \frac{1}{\tilde{\rho}} \operatorname{div}(\tilde{\sigma}) = \tilde{\mathbf{g}} \frac{1}{Fr}, \quad (1.11)$$

où

$$Re := \frac{\{\rho\}\{\mathbf{u}\}^2}{\{\sigma\}} \quad \text{et} \quad Fr := \frac{\{\mathbf{u}\}^2}{\{\mathbf{x}\}\{\mathbf{g}\}}$$

sont respectivement les nombres de Reynolds et de Froude. D'après [10], nous avons les ordres de grandeur suivants (en unités SI) :

$\{u\}$	$\{x\}$	$\{t\}$	$\{\sigma\}$	$\{\rho\}$	$\{g\}$
10^{-6}	10^4	10^{10}	10^5	10^3	10

Du tableau, on déduit que $Re = 10^{-14}$ et $Fr = 10^{-17}$. Il est clair que le terme $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\tilde{t}}$ dans (1.11) est négligeable. L'élimination du terme d'inertie $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ dans le modèle a la signification physique suivante : les vitesses sont entièrement déterminées par la géométrie du glacier. Si on ôte $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ dans l'équation (1.10) alors la vitesse \mathbf{u} et la pression p doivent satisfaire :

$$- \operatorname{div}(\sigma) = \rho \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.12)$$

$$\sigma = 2 \mu \varepsilon(\mathbf{u}) - pI, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.13)$$

où μ est la viscosité définie par la relation (1.7), ainsi que la contrainte d'incompressibilité (1.5) :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega(t). \quad (1.14)$$

Pour clore le système (1.12) - (1.14), nous devons ajouter des conditions aux bords du domaine $\Omega(t)$. Ceci est l'objet de la section suivante.

Remarque 1.1.1. *En glaciologie, il est courant de faire une hypothèse de couche mince qui prend en compte la faible épaisseur du domaine de glace (le ratio caractéristique entre la longueur et la hauteur varie de 10^{-1} pour un glacier à 10^{-3} pour un islandis), voir le chapitre 6 à ce sujet. Cela conduit à des modèles simplifiés tels que "Shallow Ice Approximation" [57] ou "First Order Approximation" [9, 81]. Un avantage certain de ces méthodes est la réduction de degrés de liberté (la pression et la composante verticale sont ainsi éliminées). Un inconvénient est dû au fait que l'inclinaison de la surface intervient dans le terme source de l'équation.*

1.1.4 Conditions de bord

Le bord du domaine de glace $\Omega(t)$ est divisé en deux parties : $\Gamma_S(t)$ est la surface en contact avec l'air et $\Gamma_B(t)$ est la partie en contact avec le lit rocheux (la base du glacier). Afin d'introduire des conditions de glissements, le bord $\Gamma_B(t)$ est divisé en deux parties disjointes $\Gamma_B(t) = \Gamma_B^{NS}(t) \cup \Gamma_B^S(t)$: la partie où la glace ne glisse pas est notée $\Gamma_B^{NS}(t)$ ($\neq \emptyset$) alors que $\Gamma_B^S(t)$ est la partie où la glace glisse sur le rocher, voir figure 1.3.

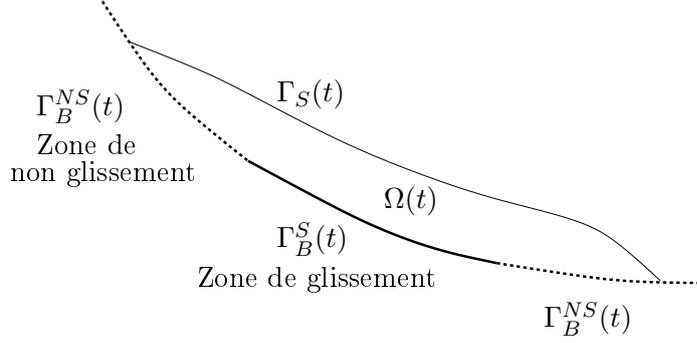


FIG. 1.3. Le bord du domaine de glace $\Omega(t)$ est divisé en plusieurs parties. Sur $\Gamma_S(t)$, la force exercée sur la glace est nulle, sur $\Gamma_B^{NS}(t)$ la glace adhère au rocher, sur $\Gamma_B^S(t)$ la glace glisse sur le rocher.

En négligeant l'effet de la pression atmosphérique sur le glacier, la condition sur la surface du glacier est donnée par l'équilibre des forces qui se traduit par la relation :

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_S(t), \quad (1.15)$$

où \mathbf{n} est la normale unité sortante du domaine $\Omega(t)$. Sur la base rocheuse, deux cas de figure se produisent. La glace peut adhérer au rocher. Ceci se produit lorsque la température est assez basse. Dans ce cas, la glace est collée au socle et cela interdit tout phénomène de glissement. Cela se traduit par la condition de Dirichlet suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_B^{NS}(t). \quad (1.16)$$

Si la température basale est trop élevée, et si les contraintes tangentielles sont importantes, alors la glace peut se détacher du rocher et glisser comme un solide sur un plan incliné. Dans cette configuration, on a :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_B^S(t). \quad (1.17)$$

Cette condition doit être complétée d'une loi de glissement. Beaucoup de modélisations proposées dans la littérature [42, 99, 103, 35] prennent en compte les caractéristiques du lit rocheux et la présence éventuelle d'eau de fonte infiltrée. Nous retenons une version régularisée de la loi de Weertman [105, 57] :

$$\sigma_{t_i} = -\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_B^S(t), \quad (1.18)$$

où $\mathbf{t}_i, i = 1, 2$ sont deux vecteurs tangents, $\sigma_{t_i}, i = 1, 2$ sont les contraintes tangentielles définies par (1.1). Ci-dessus, le coefficient de frottement $\alpha = \alpha(|\mathbf{u}|)$ est une fonction de la vitesse $|\mathbf{u}|$:

$$\alpha = \alpha(|\mathbf{u}|) := \frac{C}{(|\mathbf{u}| + s_0)^{1 - \frac{1}{m}}}, \quad (1.19)$$

où $|\cdot|$ est la norme vectorielle euclidienne dans \mathbb{R}^3 , C est un coefficient, $s_0 > 0$ est un paramètre de régularisation qui permet à α de rester fini lorsque $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et m est l'exposant de Glen utilisé dans

(1.4). Notons que s_0 joue un rôle similaire à τ_0 dans la loi de Glen régularisée (1.4). Puisque α ne dépend que de $|\mathbf{u}|$, la loi de glissement (1.18) est indépendante du choix des vecteurs tangents \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 . Remarquons que si $m = 1$, alors α est constant.

Remarque 1.1.2. *Si on prend $s_0 = 0$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, alors la loi (1.18) - (1.19) se réécrit :*

$$|\mathbf{u}|^{1-\frac{1}{m}} (\sigma_{t_1} \mathbf{t}_1 + \sigma_{t_2} \mathbf{t}_2) = -C \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

En prenant la norme vectorielle de (1.20) puis la puissance $-m$, nous obtenons :

$$|\mathbf{u}| = C^{-m} |\sigma_{t_1} \mathbf{t}_1 + \sigma_{t_2} \mathbf{t}_2|^m. \quad (1.21)$$

On vérifie que (1.20) et (1.21) aboutissent à :

$$\mathbf{u} = C^{-m} |\sigma_{t_1} \mathbf{t}_1 + \sigma_{t_2} \mathbf{t}_2|^{m-1} (\sigma_{t_1} \mathbf{t}_1 + \sigma_{t_2} \mathbf{t}_2), \quad (1.22)$$

qui correspond à la loi énoncée dans [57] p. 454.

Remarque 1.1.3. *Les quantités α et μ , fonctions respectives de $|\mathbf{u}|$ et $|\varepsilon(\mathbf{u})|$, ont le même comportement à l'infini, voir la figure 1.2 et les lemmes 3.1.1 et 3.1.2. Cette similarité s'explique par le fait que la loi (1.22) peut être obtenue ainsi : la couche basale est remplacée par une bande de glace de faible épaisseur sur laquelle la loi de Glen (1.4) s'applique. D'importantes simplifications basées sur une hypothèse de couche mince conduisent à la loi (1.22). On trouvera les détails de cette modélisation dans [103].*

1.2 Description de la surface libre

1.2.1 Bilan de masse

Nous avons vu dans la section précédente que la glace s'écoule le long du lit rocheux sous l'effet de la gravité. Le deuxième facteur prépondérant qui détermine l'état d'avancement d'un glacier est le climat. En effet, au cours d'une année, les précipitations neigeuses, la température, l'exposition au soleil et le vent font que le glacier perd ou gagne de la masse. Le bilan de masse annuel b est défini comme étant l'accumulation de masse de glace moins l'ablation cumulée au cours d'une année, voir les formules (1) et (2) en annexe. La fonction $b = b(\mathbf{x}, t)$ est donc une fonction d'espace et de temps. La zone où les précipitations neigeuses sont plus importantes que la fonte au cours d'une année est appelée la zone (ou le bassin) d'accumulation. Puisque la température décroît avec l'altitude, cette zone est la partie supérieure du glacier. De façon opposée, la zone où la fonte domine les précipitations, appelée la zone ablation, est la partie basse du glacier. Les deux zones sont séparées, en altitude, par la ligne d'équilibre z_{ELA} . De nos jours, cette ligne se situe autour de 3000 mètres pour les glaciers alpins, voir la figure 1.4. On dit qu'un glacier est dans un état d'équilibre si l'accumulation, l'ablation et son mouvement interne se compensent. Dans cette configuration, la surface glaciaire est stationnaire.

Le calcul du bilan de masse est une tâche complexe que doivent accomplir les glaciologues. Plusieurs approches sont possibles. Le bilan de masse peut, par exemple, être mesuré sur le terrain en observant l'évolution de la hauteur de glace autour de piquets plantés en surface. Cependant, cette opération ne peut pas être réalisée sur tout le glacier en permanence. Les glaciologues ont donc recours à des modèles qui relient les données de température et de précipitation au bilan de masse effectif. Une paramétrisation du bilan de masse très simple, basée sur l'altitude, est proposée au chapitre 4.4. Une seconde paramétrisation plus complexe, basée sur les travaux de

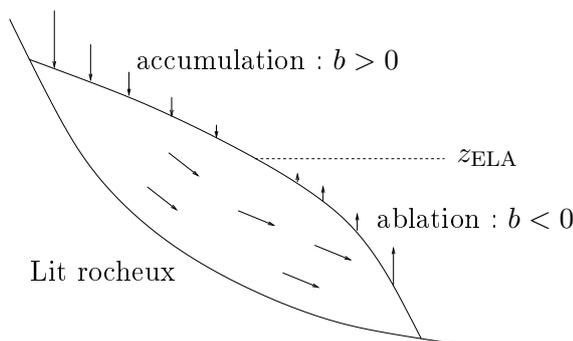


FIG. 1.4. La fonction "bilan de masse" b : Quand $b > 0$ (resp. $b < 0$), il y a accumulation (resp. ablation) de glace. L'altitude de ligne d'équilibre z_{ELA} se situe là où $b = 0$.

[55], est utilisée à la section 4.2 et détaillée en annexe.

Dans la partie suivante, on décrit la topographie d'un glacier de deux façons différentes, voir la figure 1.5. La première description - la plus couramment utilisée en glaciologie - utilise la hauteur de glace, fonction de la position horizontale et du temps [84]. La seconde décrit la présence de glace par une fonction discontinue à deux valeurs, zéro ou un. Cette description peut, contrairement à la première, décrire tous les changements de topologie. Nous retiendrons cette description dans notre modèle.

1.2.2 Une description lagrangienne

On définit la hauteur de glace par la fonction $H(x, y, t) = S(x, y, t) - B(x, y)$, où S et B désigne respectivement l'altitude de la surface et de la base rocheuse, voir la figure 1.5. En appliquant le principe de conservation du volume, un bilan de masse le long d'une colonne verticale [84, 30] conduit à l'équation de Saint-Venant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} H + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}H) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}H) \right) (x, y, t) = b(x, y, S(x, y, t), t), \quad (1.23)$$

où

$$\bar{u}(x, y, t) = \frac{1}{H(x, y, t)} \int_{B(x, y)}^{S(x, y, t)} u(x, y, z, t) dz,$$

et $\bar{v}(x, y, t)$ est défini de façon similaire. La fonction H n'est plus définie dès lors qu'une paroi verticale apparaît. De plus, cette description ne permet pas de décrire tous les changements de topologie. La description suivante n'a pas cette limitation et permet de décrire un ensemble plus large de formes de glacier.

1.2.3 Une description eulérienne

Parmi les descriptions eulériennes, la description par lignes de niveau (ou "level set") est la plus populaire [79] pour modéliser un problème à frontière libre. Elle a notamment été utilisée pour décrire l'évolution d'un glacier dans [90]. Dans la suite, la description par "Volume of Fluid" (VOF) [98] est préférée pour suivre la frontière du domaine de glace $\Omega(t)$. La méthode "level set" définit la surface libre comme étant la ligne de niveau d'une fonction régulière alors que la

description VOF utilise une fonction discontinue à deux valeurs. Plus précisément, la fonction VOF $\varphi : \Lambda \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, voir la figure 1.5, est définie par :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega(t), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.24)$$

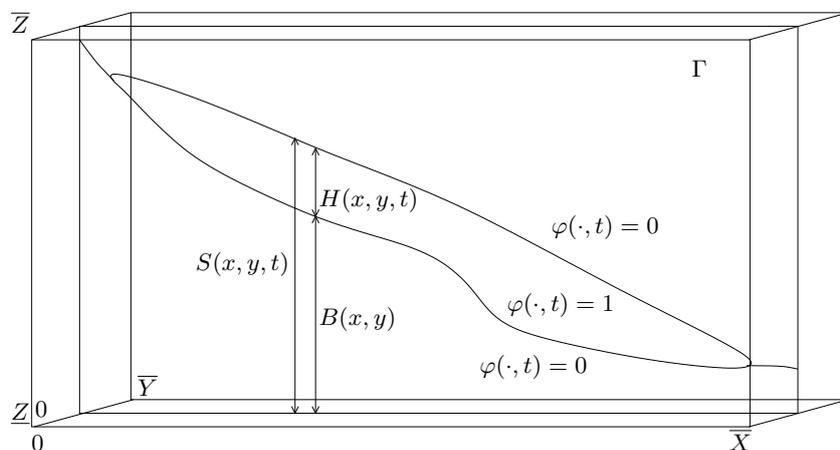


FIG. 1.5. Deux façons de décrire la géométrie d'un glacier : en utilisant la fonction hauteur H ou en utilisant la fonction φ .

Cette méthode a déjà été utilisée pour simuler des fluides newtoniens et viscoélastiques avec des surfaces libres complexes, voir [76, 11, 21]. Le principal avantage de la description (1.24), comme de la description par lignes de niveau, est qu'elle autorise le domaine à changer de topologie. Les inconvénients des méthodes eulériennes apparaissent lors de l'approximation numérique. Les méthodes "level set" conservent difficilement la masse alors que la méthode "VOF" nécessite un artifice complémentaire pour réduire la diffusion numérique, voir la section 2.3.2. Ci-dessous, nous établissons une équation de transport pour φ qui découle d'un bilan de masse.

Au temps t , on considère un volume arbitraire V , voir la figure 1.6. La différence de masse dans le volume V entre les temps t et $t + \Delta t$ est donnée par :

$$\int_V \rho \varphi(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_V \rho \varphi(\mathbf{x}, t) dV. \quad (1.25)$$

En supposant que le champ de vitesse \mathbf{u} dans la glace puisse être étendu de façon régulière dans la cavité Λ , le flux de masse entre t et $t + \Delta t$ dans le volume V est égal à :

$$-\Delta t \int_{\partial V} \rho \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.26)$$

où ∂V est le bord de V et \mathbf{n} est le vecteur normal unité sortant. Par ailleurs, le gain et la perte extérieure de masse entre t et $t + \Delta t$ dans le volume V est égal à :

$$+\Delta t \rho \int_{\Gamma_S(t) \cap V} b dS. \quad (1.27)$$

où b est la fonction bilan de masse. En considérant l'égalité de (1.25) avec (1.26) plus (1.27) et en appliquant le théorème de la divergence, nous obtenons, lorsque Δt tend vers zéro :

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV = - \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{u}) dV + \int_{\Gamma_S(t) \cap V} b dS. \quad (1.28)$$

Puisque \mathbf{u} est à divergence nulle, on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) \delta_{\Gamma_S(t)}, \quad (1.29)$$

où $\delta_{\Gamma_S(t)}$ est la densité de surface qui est définie par :

$$\int_V f \delta_{\Gamma_S(t)} dV = \int_{\Gamma_S(t) \cap V} f dS,$$

pour tout volume V et pour toute fonction régulière f . Puisque la fonction $\varphi(\mathbf{x}, t)$ est discontinue sur l'interface $\Gamma_S(t) \cup \Gamma_B(t)$, ses dérivées spatiales et temporelles dans (1.29) doivent être comprises au sens faible.

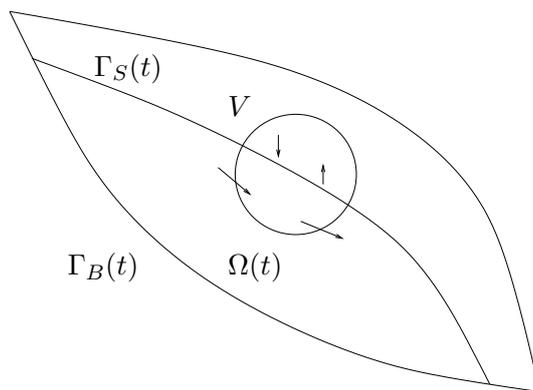


FIG. 1.6. Le principe de conservation de la masse dans un volume V .

1.2.4 Relation avec l'équation de Saint-Venant

On montre que le modèle VOF (1.29) inclut le modèle de Saint-Venant (1.23) dans le sens suivant : si φ est une solution de (1.29) et si $H(t, x, y)$ est définie par :

$$H(x, y, t) = \int_{\underline{Z}}^{\overline{Z}} \varphi(x, y, z, t) dz, \quad (1.30)$$

alors $H(x, y, t)$ est solution de (1.23). Ceci est la conséquence d'une intégration formelle de (1.29) de \underline{Z} à \overline{Z} , voir la figure 1.5. Notons que φ peut être déduit de H en utilisant la relation suivante :

$$\varphi(x, y, z, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq z - B(x, y) \leq H(x, y, t), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Le modèle VOF (1.29) inclut strictement le modèle de Saint-Venant (1.23) dans le sens suivant. Il existe des formes que peut décrire la fonction φ mais que ne peut pas décrire la fonction H . Par exemple, seule la fonction φ peut représenter une paroi verticale.

1.3 Résumé du modèle

Dans cette partie, nous rassemblons les équations établies précédemment. Nous supposons connu au temps initial, $\varphi(\mathbf{x}, 0)$, ou de façon équivalente le domaine initial de glace $\Omega(0)$. Notre

but est de trouver la fonction φ définie dans $\Lambda \times [0, T]$, la vitesse \mathbf{u} et la pression p définis dans le domaine de glace Q_T , satisfaisant les équations de la dynamique :

$$- \operatorname{div} (\sigma) = \rho \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.32)$$

$$\sigma = 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) - pI, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.33)$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.34)$$

avec les conditions de bord :

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_S(t), \quad (1.35)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_B^{NS}(t), \quad (1.36)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_B^S(t), \quad (1.37)$$

$$(\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_i = -\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{sur } \Gamma_B^S(t), \quad (1.38)$$

où μ et α sont respectivement définis par (1.7) et (1.19), l'équation de transport :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) \delta_{\Gamma_S(t)}, \quad \text{dans } \Lambda \times (0, T), \quad (1.39)$$

et les relations :

$$\Omega(t) = \{\mathbf{x} \in \Lambda; \varphi(\mathbf{x}, t) = 1\},$$

$$Q_T = \{(\mathbf{x}, t) \in \Omega(t) \times (0, T); 0 \leq t \leq T\}.$$

Pour une géométrie donnée assez régulière, on démontre au théorème 3.2.1 que le problème stationnaire (1.32) - (1.38) admet une unique solution faible. Le chapitre suivant est consacré à l'approximation numérique des équations (1.32) - (1.39).

Chapitre 2

Méthode numérique

Dans ce chapitre, nous décrivons la résolution des équations de Stokes précédemment établies, couplées à l'équation de transport de la fonction VOF. Chacune des équations nécessite une méthode numérique différente. L'équation de transport, qui est du type hyperbolique, est résolue par la méthode des caractéristiques [85, 91] (**étape d'advection**, section 2.1.1) alors que le problème de Stokes, qui est du type elliptique, est résolu par une méthode d'éléments finis [91, 38] (**étape de diffusion**, section 2.1.2). Plusieurs stratégies sont proposées pour résoudre la non-linéarité du problème de Stokes : algorithme de point fixe ou algorithme de Newton. Chacune des résolutions se fait sur deux maillages de nature différente. L'implémentation de la méthode des caractéristiques a lieu sur une grille fine et structurée alors que le problème de Stokes est résolu sur un maillage plus grossier, non structuré et délimité par la topographie du lit rocheux. Chaque maillage est fixe dans le temps. Nous verrons que l'étape d'advection est nécessairement suivie d'un algorithme qui réduit la diffusion numérique [98]. Cette méthode présente l'avantage d'être inconditionnellement stable. Le découplage des problèmes avec deux maillages a déjà démontré son potentiel pour la simulation de fluides divers : fluide newtonien [74, 76] ; fluide newtonien avec bulles d'air [19, 21] ; fluide viscoélastique [11].

2.1 Discrétisation en temps

Soit $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = T$ où $N \in \mathbb{N}$, une subdivision pour la variable t de l'intervalle de temps $[0, T]$. On définit $\tau^n = t^n - t^{n-1}$ le $n^{\text{ième}}$ pas de temps, $n = 1, 2, \dots, N$. Lorsque le pas de temps τ^n est constant, on note $\Delta t = \tau^n$. On considère φ^{n-1} , \mathbf{u}^{n-1} et p^{n-1} , les approximations respectives de φ , de la vitesse \mathbf{u} et de la pression p . En supposant φ^{n-1} , \mathbf{u}^{n-1} et p^{n-1} connus, nous détaillons maintenant comment obtenir φ^n , \mathbf{u}^n et p^n .

2.1.1 Étape d'advection

Nous commençons par calculer φ^n , la solution au temps t^n du problème de transport :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) \delta_{\Gamma_S^{n-1}}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Lambda \times (t^{n-1}, t^n), \quad (2.1)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t^{n-1}) = \varphi^{n-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda, \quad (2.2)$$

où $\Gamma_S^{n-1} = \Gamma_S(t^{n-1})$. La résolution de (2.1) - (2.2) est coupée en deux (voir les méthodes de "splitting" dans le chapitre 2 de [47]) : on appelle $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$ une approximation de la solution au

temps t^n du système :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Lambda \times (t^{n-1}, t^n), \quad (2.3)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t^{n-1}) = \varphi^{n-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda. \quad (2.4)$$

Remarquons que nous avons obtenu (2.3) en ôtant le terme source de (2.1). Ce problème peut être résolu par la méthode des caractéristiques [85, 91]. On définit la ligne caractéristique $\mathbf{X}(t)$ passant par \mathbf{x} au temps t^{n-1} comme étant la solution du système différentiel :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{X}(t)), \quad \text{dans } \Lambda, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{X}(t^{n-1}) = \mathbf{x}, \quad \text{dans } \Lambda. \quad (2.6)$$

En utilisant la définition de $\mathbf{X}(t)$, si φ est solution de (2.3) alors :

$$\frac{d}{dt} (\varphi(\mathbf{X}(t), t)) = 0, \quad \text{dans } \Lambda, \quad (2.7)$$

ce qui montre que la solution φ de (2.3) - (2.4) est constante le long des lignes caractéristiques. En particulier, nous avons que :

$$\varphi(\mathbf{X}(t^n), t^n) = \varphi^{n-1}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

En utilisant l'approximation suivante de la solution du système différentiel (2.5) - (2.6) au temps t^n :

$$\mathbf{X}(t^n) \simeq \mathbf{x} + \tau^n \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}), \quad (2.9)$$

on utilise (2.8) pour définir $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$ en fonction de φ^{n-1} :

$$\varphi^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} + \tau^n \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})) = \varphi^{n-1}(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Ensuite, on note φ^n une approximation de la solution au temps t^n de l'équation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) \delta_{\Gamma_S^{n-1}}, \quad \text{dans } \Lambda, \quad (2.11)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t^{n-1}) = \varphi^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Lambda. \quad (2.12)$$

Remarquons que nous avons obtenu (2.11) en ôtant le terme convectif de (2.1). Cette étape traduit l'accumulation et l'ablation de glace. Le modèle lagrangien qui décrit la forme d'un glacier par une fonction hauteur de glace H convient mieux que le modèle eulérien basé sur φ pour implémenter le problème (2.11) - (2.12). Nous reformalisons donc (2.11) - (2.12) en terme de H . On commence par définir $H^{n-\frac{1}{2}}$ la hauteur de glace déduite de $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$ en utilisant (1.30) :

$$H^{n-\frac{1}{2}}(x, y) = \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \varphi^{n-\frac{1}{2}}(x, y, z) dz. \quad (2.13)$$

En utilisant les relations (1.30) et (1.31), on montre que résoudre (2.11) - (2.12) est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, y, t) = b(x, y, B(x, y) + H^{n-\frac{1}{2}}(x, y), t^{n-1}), & \text{dans } [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}], \\ H(x, y, t^{n-1}) = H^{n-\frac{1}{2}}(x, y), & \text{dans } [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}]. \end{cases} \quad (2.14)$$

Une approximation de la solution de l'équation (2.14) au temps t^n est donnée par le schéma d'Euler explicite :

$$H^n(x, y) \simeq H^{n-\frac{1}{2}}(x, y) + \tau^n b(x, y, B(x, y) + H^{n-\frac{1}{2}}(x, y), t^{n-1}). \quad (2.15)$$

Finalement, φ^n est déduit de H^n en utilisant (1.31) :

$$\varphi^n(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq z - B(x, y) \leq H^n(x, y), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.16)$$

La connaissance du nouveau domaine de glace, via la fonction φ^n , permet de résoudre le nouveau champ de vitesse \mathbf{u}^n .

2.1.2 Étape de diffusion

Puisque φ^n est connu de l'étape précédente, on définit le domaine de glace par :

$$\Omega^n := \{\mathbf{x} \in \Lambda ; \varphi^n(\mathbf{x}) = 1\},$$

ce qui permet d'identifier les contours $\Gamma_S^n := \Gamma_S(t^n)$, $\Gamma_B^{S,n} := \Gamma_B^S(t^n)$ et $\Gamma_B^{NS,n} := \Gamma_B^{NS}(t^n)$. Par la suite, on résout le problème de Stokes non linéaire suivant : on cherche $\mathbf{u}^n : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $p^n : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$-2\operatorname{div}(\mu \varepsilon(\mathbf{u}^n)) + \nabla p^n = \rho \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega^n, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}^n) = 0, \quad \text{dans } \Omega^n, \quad (2.18)$$

et

$$2\mu \varepsilon(\mathbf{u}^n) \mathbf{n} - p^n \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_S^n, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_B^{NS,n}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_B^{S,n}, \quad (2.21)$$

$$(2\mu \varepsilon(\mathbf{u}^n) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_i = -\alpha \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{sur } \Gamma_B^{S,n}, \quad (2.22)$$

où μ et α sont respectivement définis par (1.7) et (1.19) avec \mathbf{u}^n à la place de \mathbf{u} .

2.2 Discrétisation en espace

Deux maillages fixes différents sont utilisés pour prendre en compte les spécificités du problème de transport (2.1) - (2.2) et du problème elliptique (2.17) - (2.22), voir la figure 2.1. L'utilisation de deux maillages pour résoudre un problème à frontière libre avec une description du fluide du type VOF a déjà montré son efficacité dans [11, 21, 76, 20].

Nous commençons par définir un domaine fixe $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ délimité d'une part par le lit rocheux et d'autre part par une surface assez élevée pour que $\tilde{\Lambda}$ contienne le glacier le temps d'une simulation :

$$\Omega(t) \subset \tilde{\Lambda}, \quad \forall t \in [0, T].$$

On utilise un maillage \mathcal{T}_H de la cavité $\tilde{\Lambda}$ pour résoudre le problème (2.17) - (2.22). Le maillage \mathcal{T}_H est composé de tétraèdres et l'espacement maximal de ces noeuds est H . Puisqu'un glacier de montagne est relativement mince (le rapport caractéristique entre la hauteur et la longueur est de l'ordre de 10^{-1}), le maillage \mathcal{T}_H est de préférence anisotrope. Un maillage fin et structuré \mathcal{T}_h

constitué de cubes de côté h est construit pour l'implémentation de (2.1) - (2.2). Deux raisons justifient l'introduction d'un nouveau maillage. Tout d'abord, la méthode des caractéristiques est facilement implémentable sur une grille structurée. Ensuite, la résolution des équations (2.1) - (2.2) sur \mathcal{T}_h permet de localiser l'interface avec précision. Un rapport judicieux entre la taille des deux maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h , est de l'ordre de cinq : $H \sim 5h$, voir [74]. Des expériences numériques, voir [76], ont montré que ce choix est un bon compromis entre précision, temps CPU et place mémoire.

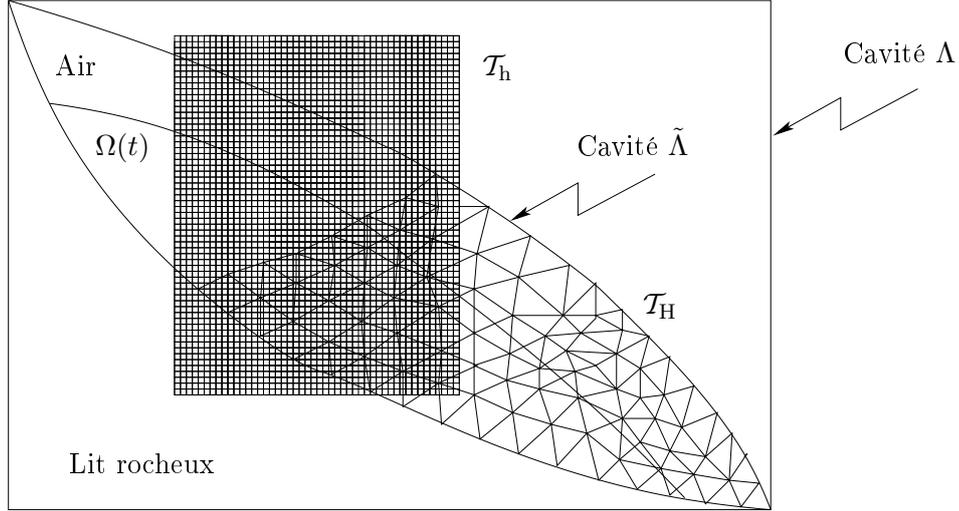


FIG. 2.1. Illustration bidimensionnelle de la double discrétisation spatiale : \mathcal{T}_H est un maillage non structuré alors \mathcal{T}_h est une grille rectangulaire faite de cellules carrées. Le maillage \mathcal{T}_H illustré est isotrope. Cependant, en pratique, il est préférable d'utiliser un maillage anisotrope pour prendre en compte la forme mince du glacier.

On appelle φ_{ijk}^{n-1} et \mathbf{u}_{ijk}^{n-1} les valeurs de φ^{n-1} et \mathbf{u}^{n-1} au centre \mathbf{x}_{ijk} de la cellule (ijk) de la grille structurée \mathcal{T}_h . Rappelons que φ^{n-1} représente le taux de remplissage de la cellule (ijk) au temps t^{n-1} . Le calcul de φ_{ijk}^n et \mathbf{u}_{ijk}^n est décrit à la section suivante.

2.3 Problème d'advection

2.3.1 Résolution de (2.3) - (2.4)

La résolution de (2.3) - (2.4) est basée sur la formule (2.10). L'étape d'advection consiste à transporter, pour chaque cellule (ijk) , la valeur φ_{ijk}^{n-1} du centre \mathbf{x}_{ijk} de la cellule (ijk) par \mathbf{u}_{ijk}^{n-1} . Puisque la cellule transportée ne coïncide pas nécessairement avec une autre cellule, on projette la valeur contenue de la cellule déplacée sur la grille. En 2D, l'algorithme de projection se décrit de la manière suivante : pour chaque cellule (ik) , virtuellement transportée au point $\mathbf{x}_{ik} + \tau^n \mathbf{u}_{ik}^{n-1}$, on trouve les quatre cellules qui l'intersectent. On projette ensuite φ^{n-1} au *prorata* de la surface commune avec les quatre cellules de réception. On trouve les formules de cette étape de projection dans [74]. Une illustration de l'advection avec projection est donnée en une dimension d'espace sur la figure 2.2 de gauche et en deux dimensions sur la figure 2.3 de gauche. On définit le nombre

de Courant-Friedrichs-Levy par :

$$\text{CFL} = \max_{n=1,\dots,M} (\text{CFL}^n) \quad \text{avec} \quad \text{CFL}^n = \max_{ijk} (|\mathbf{u}_{ijk}^n|) \frac{\tau^n}{h}. \quad (2.23)$$

Le déplacement des cellules avec projection, sous la condition $\text{CFL} < 1$, est équivalent à un schéma aux différences finies décentré. Le point fort de la méthode des caractéristiques est sa stabilité inconditionnelle, i.e. qu'aucune condition CFL ne restreint le choix du pas de temps. En pratique on utilise des pas de temps τ^n et un pas d'espace h choisi de sorte que $3 \leq \text{CFL} \leq 5$ [74]. En particulier, cela nous assure que jamais plus de cinq cellules ne sont traversées pendant un pas de temps.

2.3.2 Algorithmes complémentaires

Le précédent algorithme (advection-projection) a deux inconvénients : premièrement, l'étape de projection présente à chaque pas de temps fait que l'approximation de la fonction VOF φ prend des valeurs entre 0 et 1 alors que φ ne prend originalement que deux valeurs : 0 ou 1. On parle alors de diffusion numérique, voir figure 2.2 de gauche. Plus le pas d'espace diminue, plus le nombre de pas de temps est grand et plus cette diffusion est importante. L'interface, originalement décrite par le saut de φ devient alors imprécise. Deuxièmement, si le pas de temps est trop grand, deux cellules peuvent arriver au même endroit. Dans ce cas, les lignes caractéristiques se croisent et une cellule peut recevoir plus d'une unité de VOF φ . On parle ici de compression numérique.

Afin de remédier à la diffusion et à la compression numérique, nous implémentons deux algorithmes : respectivement, l'algorithme SLIC et l'algorithme de décompression. L'algorithme SLIC [23, 98] sert à réduire la largeur de la diffusion numérique. Il consiste à définir la position de la surface libre à l'intérieur des cellules partiellement remplies en tenant compte des valeurs de φ des cellules voisines. L'étape de projection se fait alors avec une cellule dont le fluide a été compressé dans un coin ou sur un bord de la cellule. On trouvera davantage de détails concernant cette méthode dans [76, 74, 98]. La figure 2.2 de droite illustre l'algorithme SLIC en une dimension d'espace et la figure 2.3 de droite en deux dimensions. L'algorithme de décompression sert à redistribuer les cellules qui auraient reçu une valeur de VOF supérieure à un. Pour cela, l'excédent de toutes ces cellules est redistribué aux cellules mi-pleines selon un critère détaillé dans [74]. Notons que la compression numérique est favorisée par de grands pas de temps. Une fois ces deux algorithmes mis en oeuvre, nous observons d'une part que les valeurs de VOF φ restent entre 0 et 1 et d'autre part que la largeur de la diffusion numérique n'excède jamais plus d'une cellule. En d'autres termes, on ne rencontre qu'une seule cellule mi-pleine en traversant l'interface.

2.3.3 Problème d'accumulation et d'ablation

Nous avons vu que résoudre (2.11) - (2.12) revient à prendre en compte l'accumulation et l'ablation de glace. Le processus décrit ci-dessous consiste à remplir ou à vider chaque colonne selon la valeur du bilan de masse donné. Pour chaque colonne verticale (ij) de la grille structurée \mathcal{T}_h , on calcule la hauteur de glace $H_{ij}^{n-\frac{1}{2}}$. En utilisant la formule des rectangles pour évaluer (2.13), nous posons :

$$H_{ij}^{n-\frac{1}{2}} = h \sum_k \varphi_{ijk}^{n-\frac{1}{2}}.$$

Selon l'équation (2.15), $|b(x_i, y_j, B(x_i, y_j) + H_{ij}^{n-\frac{1}{2}}, t^{n-1})| \tau^n$ est la quantité de glace devant être ajoutée ou enlevée, où (x_i, y_j) sont les coordonnées horizontales du centre de la colonne (ij).

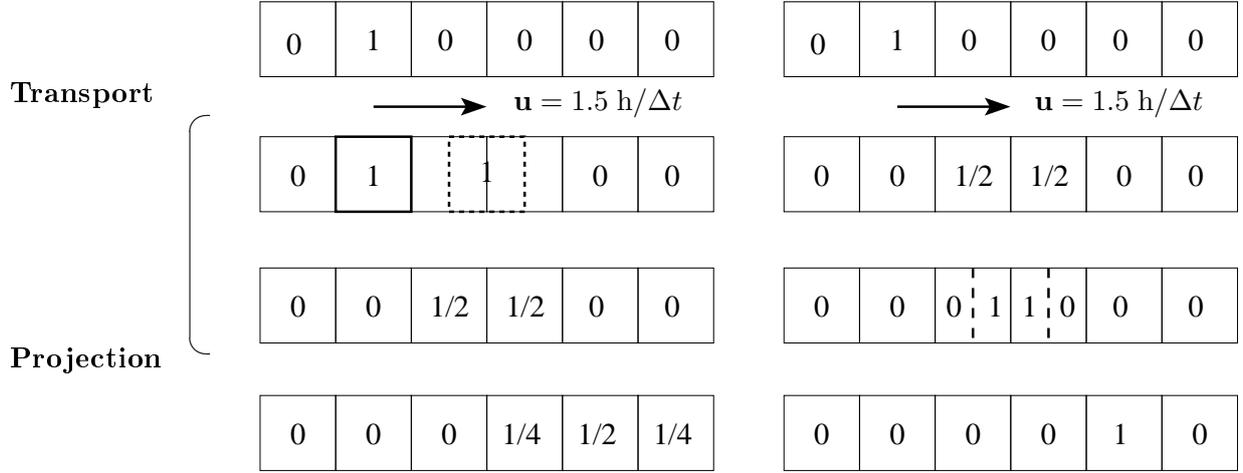


FIG. 2.2. *A gauche : exemple unidimensionnel de l'algorithme d'advection et projection sur deux pas de temps. L'étape de projection induit de la diffusion numérique. A droite : exemple unidimensionnel d'advection et de projection avec l'algorithme SLIC. On observe que l'interface est parfaitement reconstruite après deux pas de temps.*

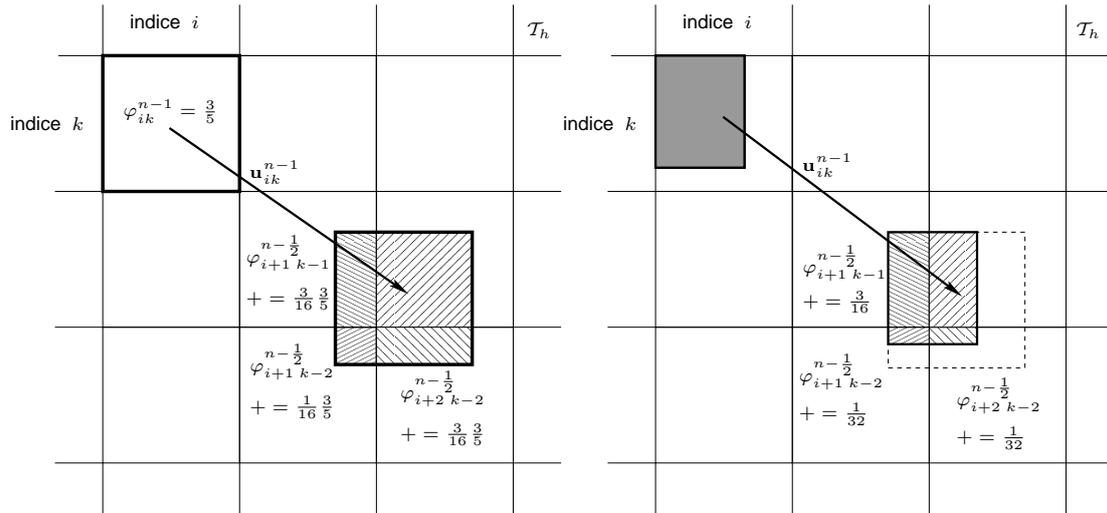


FIG. 2.3. *A gauche : exemple bidimensionnel de l'algorithme d'advection et projection sur un pas de temps. La valeur φ_{ik}^{n-1} issue de la cellule (ik) (ligne en gras) est transportée par u_{ik}^{n-1} puis projetée sur la grille \mathcal{T}_h . Les quatre cellules intersectées reçoivent chacune une contribution de φ_{ik}^{n-1} en fonction de la surface couverte. A droite : advection et projection couplées à l'algorithme SLIC. Dans ce cas, le fluide est d'abord comprimé dans un coin de la cellule avant d'être transporté puis projeté. L'algorithme SLIC permet une diminution significative de la diffusion numérique.*

Nous définissons :

$$I_{ij} := \frac{b(x_i, y_j, B(x_i, y_j) + H_{ij}^{n-\frac{1}{2}}, t^{n-1}) \tau^n}{h}.$$

L'étape suivante consiste à implémenter (2.16). On trouve d'abord le plus grand indice k tel que $\varphi_{ijk-1}^{n-\frac{1}{2}} = 1$ et $\varphi_{ijk}^{n-\frac{1}{2}} < 1$. Par la suite, on remplit la colonne de bas en haut (si $I_{ij} > 0$) ou on

vide la colonne de haut en bas (si $I_{ij} < 0$) de la quantité $|I_{ij}|$. Une illustration est donnée par la figure 2.4. L'algorithme s'écrit comme suit :

Algorithme 2.3.1.

<p>* <u>Si ($I_{ij} > 0$)</u>, alors tant que ($I_{ij} > 0$),</p>	$\varphi_{ijk}^n = \min(\varphi_{ijk}^{n-\frac{1}{2}} + I_{ij}, 1),$ $I_{ij} \leftarrow I_{ij} - (\varphi_{ijk}^n - \varphi_{ijk}^{n-\frac{1}{2}}),$ $k \leftarrow k + 1.$
<p>* <u>Si ($I_{ij} < 0$)</u>, alors tant que ($I_{ij} < 0$),</p>	$\varphi_{ijk}^n = \max(\varphi_{ijk}^{n-\frac{1}{2}} + I_{ij}, 0),$ $I_{ij} \leftarrow I_{ij} - (\varphi_{ijk}^n - \varphi_{ijk}^{n-\frac{1}{2}}),$ $k \leftarrow k - 1.$

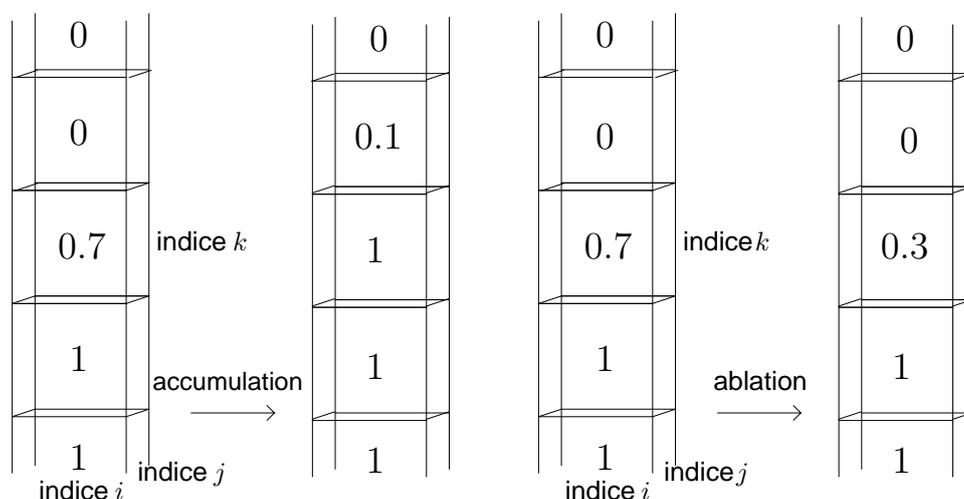


FIG. 2.4. Remplissage à gauche et vidange à droite d'une colonne indexée par (ij) . Le chiffre au centre de chaque cellule est la valeur de φ . Sur la gauche, on a $I_{ij} = 0.4$ ce qui signifie que 0.4 cellule de glace doit être ajoutée en partant de la cellule (ijk) . De la même manière, sur la droite on a $I_{ij} = -0.4$ ce qui signifie que 0.4 cellule de glace doit être supprimée.

Dans la partie suivante, nous testons la convergence de l'algorithme de transport présenté dans la section 2.3.

2.3.4 Test de convergence 2D pour l'algorithme de transport

Le schéma d'advection présenté dans la section 2.3 est inconditionnellement stable et converge à l'ordre $O(\Delta t + \frac{h^2}{\Delta t})$, comme les méthodes du type "characteristic-Galerkin" [85]. L'algorithme d'advection est testé en deux dimensions à partir d'un champ à divergence nulle donné et constant en temps. Le domaine de calcul est le suivant : $\Lambda = [0, 200] \times [0, 200]$. Nous définissons dans Λ le champ de vitesse suivant :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix}.$$

On suppose que la base est plate en définissant $B(x) = 0$ sur $[0, 200]$. On définit la surface libre en posant :

$$H(x, t) = S(x, t) = 100(t + 1) - x, \tag{2.24}$$

la fonction hauteur de glace définie sur $[0, 200]$. En appliquant cette fonction H dans la version bidimensionnelle de (1.23), nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{100(t+1)-x} x \, dz \right) &= 100 + 100(1+t) - x - x \\ &= 2S(x, t) - 100t. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nous déduisons la fonction $b(z, t) = 2z - 100t$ en identifiant (2.25) avec $b(S(t, x), t)$ dans l'équation de transport (1.23). La figure 2.5 montre l'évolution de la région de glace.

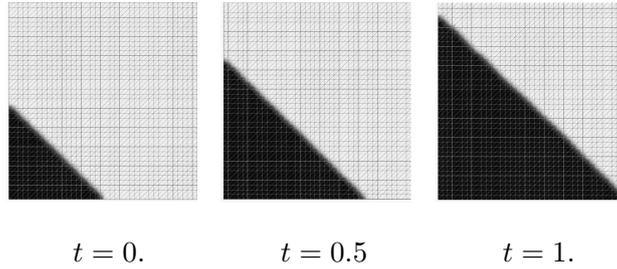


FIG. 2.5. Évolution de l'interface dans le cas où H est défini par (2.24).

L'erreur commise sur φ (définie par (1.31)) est vérifiée au temps final $T = 1$:

$$E := h^2 \sum_{i,k} |\varphi(x_i, z_k, 1) - \varphi_{ik}^N|,$$

où (x_i, z_k) sont les coordonnées du centre de la cellule (ik) . La quantité E est la différence entre le volume calculé et le volume exact. Trois niveaux de raffinement (grossier, moyen et fin) sont construits en divisant le pas d'espace et le pas de temps uniforme par deux simultanément. La table 2.1 présente l'erreur E selon le niveau de raffinement. Une convergence linéaire est observée conformément à l'ordre de convergence attendu (h et Δt sont liés).

TAB. 2.1. Erreur E selon le niveau de raffinement.

	Δt	Grille $\frac{200}{h} \times \frac{200}{h}$	CFL	E
Grossier	0.04	250×250	≈ 5	3359
Moyen	0.02	500×500	≈ 5	1549
Fin	0.01	1000×1000	≈ 5	805

2.4 Interpolation de φ^n sur \mathcal{T}_H et définition de Ω_H^n

La variable φ^n est maintenant disponible sur le maillage structuré \mathcal{T}_h . Elle doit être interpolée sur \mathcal{T}_H afin de définir le domaine de glace au temps t^n . L'approximation φ_P^n de φ^n au noeud P est calculée en considérant l'union des tétraèdres K contenant le sommet P selon la formule

suivante [20] :

$$\varphi_P^n = \frac{\sum_{Q \in K} \sum_{\substack{i,j,k \\ \mathbf{x}_{ijk} \in K}} \phi_Q(\mathbf{x}_{ijk}) \varphi_{ijk}^n}{\sum_{Q \in K} \sum_{\substack{i,j,k \\ \mathbf{x}_{ijk} \in K}} \phi_Q(\mathbf{x}_{ijk})}, \quad (2.26)$$

où ϕ_Q est la fonction de base de type élément fini de degré un, attachée au noeud Q et définie sur le tétraèdre K et \mathbf{x}_{ijk} sont les coordonnées du centre de cellule (ijk) . Cette interpolation est illustrée par la figure 2.6.

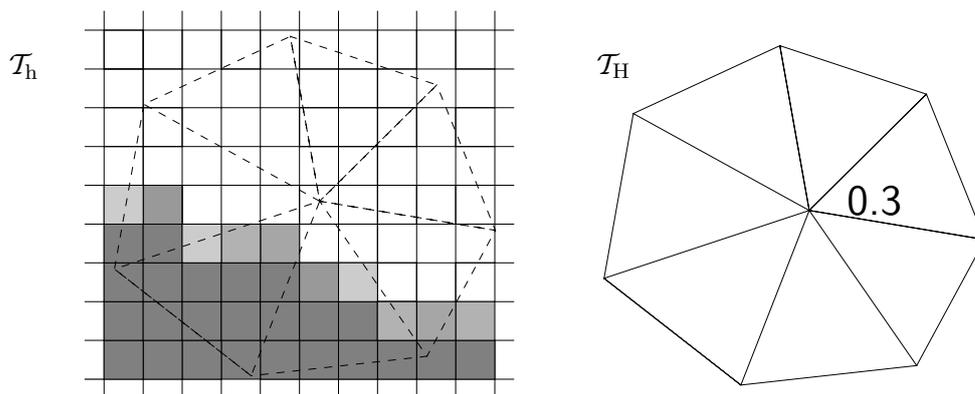


FIG. 2.6. Un exemple d'interpolation de φ sur un noeud de \mathcal{T}_H . Les cellules grisées (à gauche) représentent le taux de remplissage par φ (blanc : $\varphi = 0$, gris sombre $\varphi = 1$). La valeur de φ au noeud est calculée à partir des valeurs de φ sur les cellules appartenant aux éléments qui contiennent le noeud, voir la formule (2.26).

On définit, ensuite, le nouveau domaine de glace Ω_H^n comme étant la réunion d'un certain nombre de tétraèdres de \mathcal{T}_H . On dit qu'un tétraèdre de \mathcal{T}_H est "réveillé" au temps t^n si au moins l'un de ses sommets P est tel que $\varphi_P^n \geq 0.5$. Le domaine de calcul Ω_H^n est alors défini comme étant l'union des éléments "réveillés" de \mathcal{T}_H , voir l'illustration de la figure 2.7. On appelle $\Gamma_{B,H}^{NS,n}$ (resp. $\Gamma_{B,H}^{S,n}$) l'union des segments du bord de Ω_H^n qui sont sur $\Gamma_B^{NS,n}$ (resp. $\Gamma_B^{N,n}$). De la même façon, on appelle $\Gamma_{S,H}^n$ l'union des segments du bord de Ω_H^n qui ne sont ni sur $\Gamma_{B,H}^{NS,n}$ ni sur $\Gamma_{B,H}^{S,n}$. L'algorithme SLIC, décrit à la section 2.3.2, réduit également la diffusion de φ^n sur le maillage \mathcal{T}_H , voir la figure 2.7. Par conséquent, le domaine Ω_H^n est peu sensible au critère $\varphi_P^n \geq 0.5$.

Une fois identifiés les ensembles Ω_H^n , $\Gamma_{S,H}^n$, $\Gamma_{B,H}^{NS,n}$ et $\Gamma_{B,H}^{S,n}$, on peut résoudre le problème de diffusion (2.17) - (2.21).

2.5 Problème de diffusion

Nous rencontrons deux difficultés pour résoudre le problème (2.17) - (2.22). Tout d'abord, la contrainte d'incompressibilité restreint le choix des espaces éléments finis pour la vitesse et pour la pression afin que le problème discret soit bien posé. Il convient d'ajouter un terme de

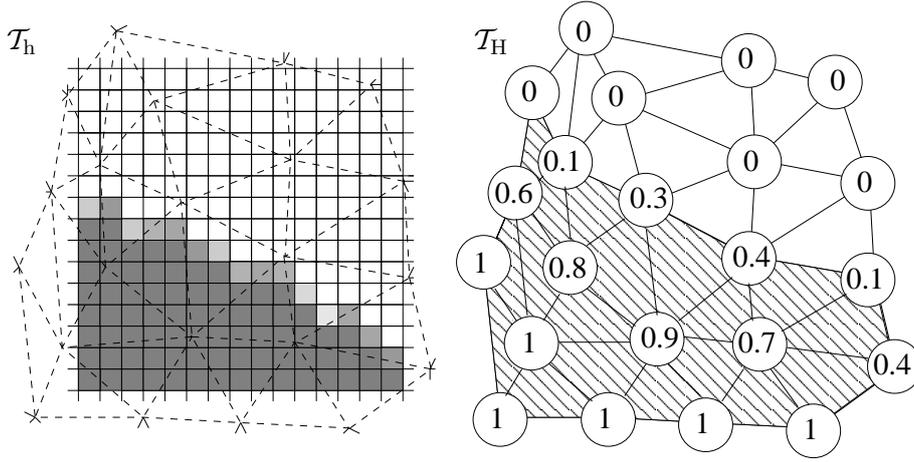


FIG. 2.7. A gauche, les cellules grisées représentent les valeurs de φ sur \mathcal{T}_h . A droite, les valeurs de φ sont interpolées sur les noeuds de \mathcal{T}_H . Le nouveau domaine de calcul Ω_H^n (partie hachurée à droite) est défini comme étant l'union des éléments "réveillés". Un élément est "réveillé" si au moins l'un de ses noeuds a une valeur $\varphi \geq 0.5$.

stabilisation ou d'enrichir l'espace des vitesses, voir [91, 32]. La deuxième difficulté est due à la non-linéarité du problème (2.17) - (2.22) dès lors que $m > 1$, puisque les fonctions μ et α dépendent de la solution. Dans cette section, on établit la formulation variationnelle associée au problème (2.17) - (2.22). On discrétise ensuite la formulation variationnelle en espace pour obtenir un schéma numérique puis on propose plusieurs méthodes pour linéariser ce schéma. Dans la dernière partie, on explicite le système matriciel résultant de la discrétisation spatiale.

2.5.1 Formulation variationnelle

Nous donnons maintenant la formulation faible du problème (2.17) - (2.22). Afin d'alléger les notations, nous appelons \mathbf{u} et p les inconnues du problème (2.17) - (2.22) au lieu de \mathbf{u}^n et p^n dans la section 2.5. Nous notons, dans ce qui suit, les dépendances de μ et α , respectivement, définis par (1.7) et (1.19), par rapport à $|\varepsilon(\mathbf{u})|$ et $|\mathbf{u}|$; cela donne $\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)$ et $\alpha(|\mathbf{u}|)$. Nous multiplions (2.17) et (2.18) par deux fonctions tests \mathbf{v} et q puis nous intégrons sur le domaine liquide Ω^n , nous obtenons :

$$\int_{\Omega^n} (-2\operatorname{div}(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p) \cdot \mathbf{v} dV = \rho \int_{\Omega^n} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (2.27)$$

et

$$\int_{\Omega^n} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q dV = 0. \quad (2.28)$$

En utilisant la formule de Green, l'équation (2.27) se réécrit :

$$2 \int_{\Omega^n} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega^n} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV \quad (2.29)$$

$$+ \int_{\Gamma_B^{S,n} \cup \Gamma_B^{NS,n} \cup \Gamma_S^n} (-2\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n} + p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.30)$$

$$= \rho \int_{\Omega^n} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (2.31)$$

Remarquons que la condition (2.19) rend nulle l'intégrale (2.30) sur le bord Γ_S^n . On choisit \mathbf{v} tel que $\mathbf{v} = 0$ sur $\Gamma_B^{NS,n}$ de sorte que l'intégrale (2.30) soit nulle sur $\Gamma_B^{NS,n}$. Il ne restera alors que la partie sur $\Gamma_B^{S,n}$. En utilisant la décomposition (1.1), le terme (2.30) se réécrit :

$$\int_{\Gamma_B^{S,n}} \left([(-2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n} + p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n} + \sum_{i=1,2} [(-2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_i]\mathbf{t}_i \right) \cdot \mathbf{v} dS. \quad (2.32)$$

En choisissant \mathbf{v} tel que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\Gamma_B^{S,n}$, le terme premier terme de (2.32) disparaît. Par ailleurs, on peut incorporer la condition (2.22) en remplaçant les $[(-2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_i]$ par $\alpha(|\mathbf{u}|)\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i$ où $i = 1, 2$, dans (2.32). Le problème faible consiste donc à trouver (\mathbf{u}, p) tels que $\mathbf{u} = 0$ sur $\Gamma_B^{NS,n}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\Gamma_B^{S,n}$, et :

$$B(\mathbf{u}; \mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}), \quad (2.33)$$

pour tout couple (\mathbf{v}, q) tel que $\mathbf{v} = 0$ sur $\Gamma_B^{NS,n}$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\Gamma_B^{S,n}$. Nous avons noté au-dessus les formes suivantes :

$$B(\mathbf{u}; \mathbf{w}, p; \mathbf{v}, q) := B_\mu(\mathbf{u}; \mathbf{w}; \mathbf{v}) + B_\alpha(\mathbf{u}; \mathbf{w}; \mathbf{v}) + B_{p,div}(\mathbf{v}, p) - B_{p,div}(\mathbf{w}, q), \quad (2.34)$$

avec

$$B_\mu(\mathbf{u}; \mathbf{w}; \mathbf{v}) := 2 \int_{\Omega^n} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{w}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV, \quad (2.35)$$

$$B_\alpha(\mathbf{u}; \mathbf{w}; \mathbf{v}) := \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^{S,n}} \alpha(|\mathbf{u}|)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i) dS, \quad (2.36)$$

$$B_{p,div}(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega^n} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV, \quad (2.37)$$

et la forme linéaire :

$$F(\mathbf{v}) := \rho \int_{\Omega^n} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (2.38)$$

Au chapitre 3, nous précisons les espaces fonctionnels pour la vitesse et la pression qu'il faut considérer pour donner un sens à la formulation variationnelle (2.33) du problème (2.17) - (2.22). Nous démontrons, au théorème 3.2.1, que le problème faible (2.33) admet une unique solution si $\Gamma_B^{NS,n} \neq \emptyset$ et si le domaine Ω^n est assez régulier.

2.5.2 Pénalisation des composantes normales de la vitesse sur $\Gamma_B^{S,n}$

Sur la frontière $\Gamma_B^{S,n}$, on impose la condition essentielle $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et les conditions naturelles $(2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_i = -\alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i$, $i = 1, 2$. On choisit d'approcher la condition essentielle $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ par la condition naturelle :

$$(-2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n} + p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\varepsilon_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.39)$$

où ε_p est un petit paramètre, afin d'avoir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \simeq 0$, voir [74] p. 37. Remarquons que le paramètre ε_p peut être vu comme un paramètre de pénalisation des composantes normales. En considérant (2.39) plutôt que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, la formulation variationnelle est modifiée. En effet, la forme B_α définie par l'équation (2.36) est augmentée du terme :

$$+ \frac{1}{\varepsilon_p} \int_{\Gamma_B^{S,n}} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (2.40)$$

et l'espace fonctionnel des vitesses est relaxé de la contrainte $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. L'intérêt de cette pénalisation est essentiellement pratique. En effet, il est plus simple, lors de la résolution numérique de (2.33), d'ajouter le terme (2.40) dans la formulation variationnelle plutôt que de prendre en compte la contrainte $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ dans l'espace d'approximation des vitesses.

2.5.3 Discrétisation en espace

Nous proposons un schéma numérique issu d'une approximation de Galerkin du problème (2.33) pour calculer (\mathbf{u}_H, p_H) une approximation de (\mathbf{u}, p) sur le maillage \mathcal{T}_H , l'unique solution du problème (2.33) (théorème 3.2.1). Au chapitre 3, V_H et Q_H sont des espaces généraux d'approximation de V et Q alors que \bar{V}_H et \bar{Q}_H est un choix particulier qui est fait dans ce chapitre, voir les définitions (2.41) et (2.42). Le couple d'éléments finis du type $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ (approximation de la vitesse et la pression par des fonctions continues, linéaires par morceaux) est bien connu pour son instabilité. En effet, $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ ne satisfait pas la condition inf sup, voir [38]. La conséquence en est que le problème discret est mal posé [91]. Deux alternatives sont usuellement utilisées pour contourner ce problème. La première consiste à ajouter au schéma des termes de stabilisation [38]. La seconde consiste à enrichir l'espace des vitesses [4] de sorte que la combinaison d'espaces vérifie la condition inf sup. Dans ce chapitre, on opte pour la première stratégie.

Soit $\{P_i\}_{i=1,\dots,N_1}$ les sommets du maillage \mathcal{T}_H situés à l'intérieur du domaine de glace Ω_H^n et sur les bords $\Gamma_{B,H}^{S,n}$ et $\Gamma_{S,H}^n$. Soit $\{P_i\}_{i=N_1+1,\dots,N_2}$ les sommets de \mathcal{T}_H situés sur le bord $\Gamma_{B,H}^{NS,n}$. Pour chaque noeud $i = 1, \dots, N_1$, on dénote ϕ_{P_i} la fonction de base continue, linéaire par morceaux et qui vérifie $\phi_{P_i}(P_j) = \delta_{ij}$ pour tout $j = 1, \dots, N_2$ où δ_{ij} dénote le symbole de Kronecker. On définit les espaces d'approximation de la vitesse \bar{V}_H et de la pression \bar{Q}_H comme étant les espaces vectoriels engendrés par la base $\{\phi_P\}$:

$$\bar{V}_H := [\text{span}\{\phi_{P_i}, i = 1, \dots, N_1\}]^3, \quad (2.41)$$

$$\bar{Q}_H := \text{span}\{\phi_{P_i}, i = 1, \dots, N_2\}. \quad (2.42)$$

Remarquons que la condition essentielle $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ est déjà prise en compte dans l'espace \bar{V}_H . Chaque élément \mathbf{u}_H (resp. p_H) de l'espace \bar{V}_H (resp. \bar{Q}_H) peut se décomposer selon les vecteurs de sa base canonique :

$$\mathbf{u}_H = \sum_{i=1\dots N_1} \mathbf{u}_{P_i} \phi_{P_i} \quad \left(\text{resp.} \quad p_H = \sum_{i=1\dots N_2} p_{P_i} \phi_{P_i} \right).$$

Dans les années 1980 et 1990, plusieurs stabilisations ont été proposées pour un problème linéaire de Stokes [13, 54, 38]. Nous retenons la stabilisation introduite dans [54] qui consiste à ajouter au schéma le résidu de l'équation (2.17) discrétisée sur chaque élément [83] :

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_H \\ K \subset \Omega_H^n}} \delta H_K^2 \int_K (-2\text{div}(\mu \varepsilon(\mathbf{u}_H)) + \nabla p_H - \rho \mathbf{g}) \cdot \nabla q_H dV, \quad (2.43)$$

où δ est un paramètre de stabilisation adimensionnel et H_K est la longueur de l'arête la plus longue du tétraèdre K . Remarquons que le choix de l'espace des vitesses du type \mathbb{P}_1 fait que le terme $-2\text{div}(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H))\varepsilon(\mathbf{u}_H))$ disparaît de (2.43) car μ est approché par une constante sur K .

Remarque 2.5.1. Dans le cas d'un maillage uniforme ($H_K = H$), l'ajout du terme (2.43) revient à relaxer la contrainte d'incompressibilité $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ en la remplaçant par l'équation modifiée :

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \delta H^2 \text{div}(-2\text{div}(\mu \varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p - \rho \mathbf{g}).$$

La formulation faible discrète $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ stabilisée consiste à trouver $(\mathbf{u}_H, p_H) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$ tel que :

$$B_H(\mathbf{u}_H; \mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H) = F_H(\mathbf{v}_H, q_H), \quad (2.44)$$

pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$, où

$$B_H(\mathbf{u}_H; \mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H) := B(\mathbf{u}_H; \mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H) + S_1(p_H, q_H), \quad (2.45)$$

$$F_H(\mathbf{v}_H, q_H) := F(\mathbf{v}_H) + S_2(q_H), \quad (2.46)$$

et

$$S_1(p_H, q_H) := \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_H \\ K \subset \Omega_H^n}} \delta H_K^2 \int_K \nabla p_H \cdot \nabla q_H dV, \quad (2.47)$$

$$S_2(q_H) := \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_H \\ K \subset \Omega_H^n}} \delta H_K^2 \int_K \rho \mathbf{g} \cdot \nabla q_H dV. \quad (2.48)$$

On trouvera dans [74] p. 89, comment choisir le paramètre de stabilisation δ de façon appropriée.

Remarque 2.5.2. *Une méthode alternative consiste à choisir des espaces d'éléments finis stables pour la condition inf sup sans avoir à ajouter de termes de stabilisation. C'est le cas des espaces $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ou $\mathbb{P}_1/\text{Bulle} - \mathbb{P}_1$ [4] qui sont utilisés dans [42, 43] pour résoudre le champ de vitesse dans un glacier.*

Dans le cadre d'espaces éléments finis stables, l'erreur entre la solution (\mathbf{u}, p) du problème continu (2.33) et la solution (\mathbf{u}_H, p_H) du problème discrétisé est analysée au chapitre 3. On prouve au théorème 3.4.3, lorsque $\Gamma_{B,H}^{S,n} = \emptyset$, la convergence de (\mathbf{u}_H, p_H) vers (\mathbf{u}, p) . Des tests numériques sont présentés à la section 3.4.2.

2.5.4 Linéarisation du problème

Nous supposons dans cette partie que $m > 1$. Par conséquent, le problème discrétisé (2.44) est non linéaire. En effet, la viscosité (dans le domaine de glace Ω^n) et le coefficient de glissement α (sur la paroi glissante $\Gamma_{B,H}^{S,n}$) dépendent tout deux du champ de vitesse. Nous proposons trois méthodes pour linéariser le problème (2.44). La première méthode, simple à implémenter, est la plus usuelle en glaciologie [30, 42, 50, 64, 63, 95]. Il s'agit d'un algorithme de point fixe. La deuxième méthode, basée sur un algorithme de Newton, converge plus rapidement, voir [24]. Nous allons voir que l'on passe de la première méthode à la deuxième, plus performante, simplement en ajoutant des termes dans l'équation linéarisée. Enfin, nous proposons une troisième linéarisation qui est une combinaison de la méthode de point fixe et de la méthode de Newton.

Méthode de point fixe

L'algorithme de point fixe consiste à calculer la viscosité μ et le coefficient de glissement α en fonction du champ de vitesse précédent. En supposant connu $(\mathbf{u}_{H,k-1}, p_{H,k-1})$ pour $k \geq 1$, on cherche $(\mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k}) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$ tels que

$$B_H(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k}; \mathbf{v}_H, q_H) = F_H(\mathbf{v}_H, q_H), \quad (2.49)$$

pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$. Dans le cadre d'espaces éléments finis stables et si $\Gamma_{B,H}^{S,n} = \emptyset$, la convergence de cet algorithme de point fixe est démontrée au chapitre 3, voir théorème 3.5.1, pour autant que le point de départ soit assez proche de la solution. De plus, on montre que le taux de convergence dépend de $(m-1)/m$, où $m > 1$ est l'exposant de Glen.

Méthode de Newton

Nous présentons une méthode, basée sur un algorithme de Newton, qui permet d'accélérer la convergence de l'algorithme précédent. Nous cherchons à approcher le couple (\mathbf{u}_H, p_H) qui vérifie :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H) = 0, \quad (2.50)$$

pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (\overline{V}_H, \overline{Q}_H)$, où

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H) := B_H(\mathbf{u}_H; \mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H) - F_H(\mathbf{v}_H, q_H). \quad (2.51)$$

La méthode de Newton [26], appliquée pour approcher le couple (\mathbf{u}_H, p_H) qui vérifie (2.50), consiste à construire une suite $\{(\mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k})\}_k$ d'éléments de $(\overline{V}_H, \overline{Q}_H)$ telle que :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\mathbf{u}_{H,k-1}, p_{H,k-1}; \mathbf{v}_H, q_H) + \\ &\quad \langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{H,k-1}, p_{H,k-1}; \mathbf{v}_H, q_H), (\mathbf{u}_{H,k} - \mathbf{u}_{H,k-1}, p_{H,k} - p_{H,k-1}) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

où $\langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q), (\mathbf{w}, r) \rangle$ est la dérivée de Gâteaux de la fonctionnelle \mathcal{F} au point (\mathbf{u}, p) , dans la direction (\mathbf{w}, r) . En utilisant la définition de \mathcal{F} via (2.51), (2.45), (2.46), (2.34), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38), (2.47) et (2.48), on peut calculer formellement sa dérivée au point (\mathbf{u}_H, p_H) , dans une direction (\mathbf{w}_H, r_H) :

$$\begin{aligned} \langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}_H, p_H; \mathbf{v}_H, q_H), (\mathbf{w}_H, r_H) \rangle &= B_H(\mathbf{u}_H; \mathbf{w}_H, r_H; \mathbf{v}_H, q_H) \\ &\quad + B'_\mu(\mathbf{u}_H; \mathbf{w}_H; \mathbf{v}_H) + B'_\alpha(\mathbf{u}_H; \mathbf{w}_H; \mathbf{v}_H), \end{aligned} \quad (2.53)$$

où

$$B'_\mu(\mathbf{u}; \mathbf{w}; \mathbf{v}) := 2 \int_{\Omega_H^n} \frac{\mu'(|\varepsilon(\mathbf{u})|)}{|\varepsilon(\mathbf{u})|} (\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w})) (\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})) dV, \quad (2.54)$$

et

$$B'_\alpha(\mathbf{u}; \mathbf{w}; \mathbf{v}) := \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{B,H}^{S,n}} \frac{\alpha'(|\mathbf{u}|)}{|\mathbf{u}|} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i) dS. \quad (2.55)$$

Après simplifications, (2.52) se réécrit :

$$\begin{aligned} &B_H(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k}; \mathbf{v}_H, q_H) + B'_\mu(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}; \mathbf{v}_H) + B'_\alpha(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}; \mathbf{v}_H) \\ &= F_H(\mathbf{v}_H, q_H) + B'_\mu(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{v}_H) + B'_\alpha(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{v}_H). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Nous remarquons que la formulation (2.56) possède quatre termes supplémentaires par rapport à la formulation (2.49). Dans le cadre d'espaces éléments finis stables et si $\Gamma_{B,H}^{S,n} = \emptyset$, la convergence de l'algorithme de Newton est prouvée au chapitre 3, théorème 3.5.1 et théorème 3.5.2. On montre notamment que la vitesse de convergence est quadratique ce qui améliore sensiblement l'algorithme de point fixe précédent. Les tests numériques, présentés dans la section 3.5.2, confirment la performance de l'algorithme.

Schéma hybride

Une idée naturelle consiste à construire un schéma hybride aux schémas (2.49) et (2.56) en introduisant un paramètre $\gamma \in [0, 1]$. Le but est tirer le meilleur parti de chaque algorithme : le schéma (2.56) offre la meilleure vitesse de convergence alors le schéma (2.49) est plus robuste (i.e. qu'il autorise une condition initiale (\mathbf{u}_0, p_0) plus éloignée de la solution). En additionnant le

produit de (2.49) par $(1 - \gamma)$ et le produit de (2.56) par γ , on obtient le schéma suivant : nous cherchons $(\mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k}) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$ tels que

$$\begin{aligned} & B_H(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k}; \mathbf{v}_H, q_H) + \gamma [B'_\mu(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}; \mathbf{v}_H) + B'_\alpha(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k}; \mathbf{v}_H)] \\ & = F_H(\mathbf{v}_H, q_H) + \gamma [B'_\mu(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{v}_H) + B'_\alpha(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{v}_H)], \end{aligned} \quad (2.57)$$

pour tout couple $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$.

Notons que si $\gamma = 0$, on retrouve le schéma de point fixe (2.49) et si $\gamma = 1$, on retrouve le schéma de Newton (2.56). L'algorithme complet est le suivant. On construit la suite de fonctions $\{(\mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k})\}_k$ itérativement ainsi :

Algorithme 2.5.1.

Pour $n = 1, 2, 3, \dots$

- Soit $(\mathbf{u}_{H,0}, p_{H,0}) := \begin{cases} (\mathbf{0}, 0), & \text{si } n = 1, \\ (\mathbf{u}_H^{n-1}, p_H^{n-1}), & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$
- Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ jusqu'à ce que $\|\mathbf{u}_{H,k-1} - \mathbf{u}_{H,k}\|_{L_2} < 1\%$: Nous cherchons $(\mathbf{u}_{H,k}, p_{H,k}) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$ qui vérifie (2.57) pour tout couple $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (\bar{V}_H, \bar{Q}_H)$.
- Soit $\mathbf{u}_H^n := \mathbf{u}_{H,k}$ et $p_H^n := p_{H,k}$.

Dans le cadre d'espaces éléments finis stables et si $\Gamma_{B,n}^{S,n} = \emptyset$, la convergence de cet algorithme est prouvée au chapitre 3, théorème 3.5.1. De plus, on montre que le taux de convergence dépend de $\frac{(1-\gamma)(1-\frac{1}{m})}{1-(1-\frac{1}{m})\gamma}$, où $m > 1$ est l'exposant de Glen. Des tests numériques sont présentés dans la section 3.5.2.

2.5.5 Formulation matricielle

Nous présentons maintenant la formulation matricielle associée à la formulation (2.57). Soient \mathbf{U} le vecteur de \mathbb{R}^{3N_1} contenant les inconnues de la vitesse $\mathbf{u}_{P_j} = (u_{P_j}, v_{P_j}, w_{P_j})$ aux noeuds du maillage inclus dans Ω_H^n :

$$\mathbf{U} = [u_{P_1} \quad \dots \quad u_{P_{N_1}} \quad v_{P_1} \quad \dots \quad v_{P_{N_1}} \quad w_{P_1} \quad \dots \quad w_{P_{N_1}}]^t$$

et \mathbf{P} le vecteur de \mathbb{R}^{N_2} contenant les inconnues de la pression p_{P_j} :

$$\mathbf{P} = [p_{P_1} \quad \dots \quad p_{P_{N_2}}]^t.$$

La formulation matricielle associée à (2.57) est la suivante : on cherche (\mathbf{U}, \mathbf{P}) qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_p \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

où $A := R_{\mu,0} + R_{\alpha,0} + \gamma(R_{\mu,1} + R_{\alpha,1})$ et où $R_{\mu,i}$ et $R_{\alpha,i}$ sont respectivement les matrices issues du terme $B_{\mu,i}$ et $B_{\alpha,i}$ pour $i = 1, 2$, \mathbf{B} est la matrice correspondante à $B_{p,div}$ et \mathbf{S} correspond au terme (2.47) de stabilisation de la pression. Le vecteur \mathbf{F}_u contient le terme de force $\rho \mathbf{g}$ ainsi que les termes $B'_\mu(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{v})$ et $B'_\alpha(\mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{u}_{H,k-1}; \mathbf{v})$ alors \mathbf{F}_p contient le dernier terme de stabilisation dans (2.48). En deux dimensions d'espace, la résolution du système linéaire (2.58) est effectuée par une méthode directe de type LU. En trois dimensions, nous employons la méthode itérative GMRES [91] avec un préconditionneur ILU. Notons que l'assemblage des matrices élémentaires est décrit dans [82].

2.6 Interpolation de \mathbf{u}^n sur \mathcal{T}_h

L'étape précédente aboutit à un nouveau champ de vitesses \mathbf{u}^n sur les noeuds de Ω_H^n . Ce champ doit être redéfini sur les cellules du maillage \mathcal{T}_h . Pour cela, nous interpolons linéairement les valeurs des vitesses au centre \mathbf{x}_{ijk} des cellules (ijk) pour obtenir les valeurs \mathbf{u}_{ijk}^n [76], voir la figure 2.8 :

$$\mathbf{u}_{ijk}^n = \sum_{l=1}^4 \phi_{P_l}(\mathbf{x}_{ijk}) \mathbf{u}_{P_l}^n,$$

où ϕ_{P_l} ($l = 1, 2, 3, 4$) sont les fonctions de base de type élément fini d'ordre un associé aux noeuds P_l ($l = 1, 2, 3, 4$) de l'élément contenant la cellule (ijk) et $\mathbf{u}_{P_l}^n$ est la valeur de \mathbf{u}^n au noeud P_l .

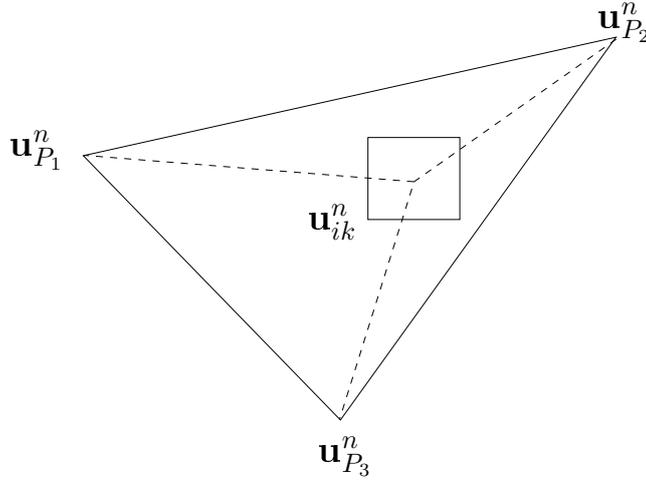
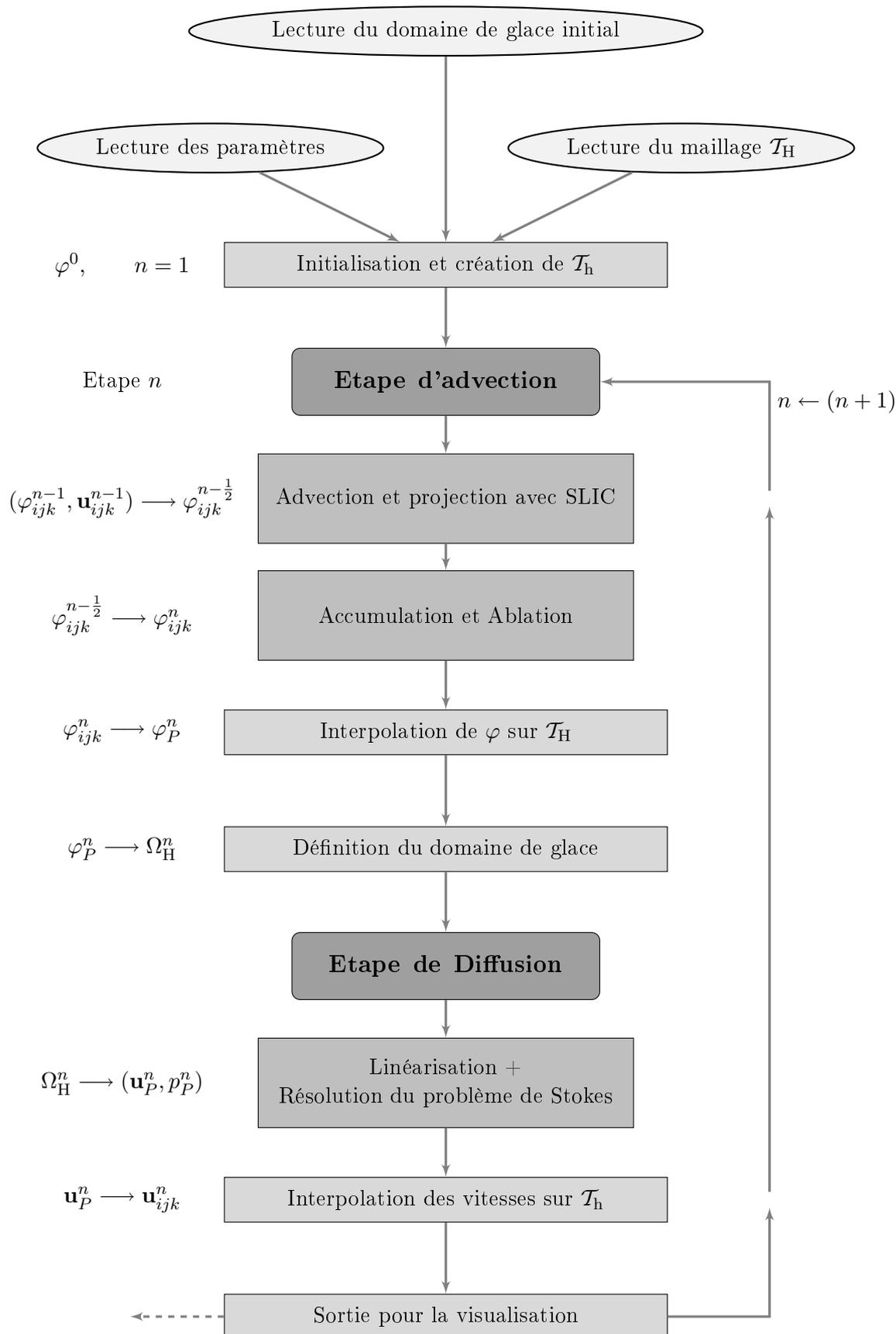


FIG. 2.8. Illustration bidimensionnelle de l'interpolation linéaire de \mathbf{u}^n sur \mathcal{T}_h : \mathbf{u}_{ijk}^n est défini en utilisant les valeurs de \mathbf{u}^n aux sommets P_1 , P_2 et P_3 de l'élément contenant la cellule (ijk) .

La connaissance de φ_{ijk}^n et \mathbf{u}_{ijk}^n sur chaque cellule (ijk) du maillage \mathcal{T}_h permet de recommencer l'algorithme à la prochaine itération, voir l'organigramme qui suit.

2.7 Organigramme



Chapitre 3

Résultats théoriques

Le but de ce chapitre est d'énoncer et de prouver plusieurs résultats théoriques relatifs au chapitre 2 pour le problème non linéaire de Stokes stationnaire. Par commodité, on se place dans un cadre différent du chapitre précédent, en supposant que les espaces d'approximations de la vitesse et de la pression satisfont une condition inf sup. Dans tout ce chapitre, nous notons Ω au lieu de Ω^n . De la même façon, nous omettons la dépendance en temps pour les bords Γ_B^S , Γ_B^{NS} et Γ_S . Nous supposons que Ω est un ouvert connexe et borné à frontière \mathcal{C}^1 et que $\Gamma_B^{NS} \neq \emptyset$. La section 3.2 traite du problème continu. Après avoir défini les espaces fonctionnels adéquats (section 3.2.1), nous prouvons, dans les sections 3.2.2 et 3.2.3, l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème de Stokes non linéaire en utilisant des arguments d'analyse convexe semblables à [28] et [93]. En suivant une démarche similaire, on montre dans la section 3.3 un résultat analogue avec le problème discret. Dans la section 3.4, nous prouvons la convergence de la solution de l'équation discrétisée vers la solution du problème continu en utilisant des arguments similaires à [7] et [48]. Une estimation *a priori* donne les ordres de convergence pour la vitesse et la pression selon la régularité de la solution. Des tests numériques bidimensionnels viennent illustrer ces estimations. Dans la section 3.5, nous prouvons la convergence des schémas itératifs décrits dans la section 2.5.4 pour résoudre la non-linéarité du problème de Stokes. Les résultats démontrés dans ce chapitre sont basés sur des propriétés de la viscosité μ et du coefficient de glissement α , vus, respectivement, comme fonctions de $|\varepsilon(\mathbf{u})|$ et $|\mathbf{u}|$. Nous commençons par énoncer ces propriétés dans les lemmes préliminaires de la première section.

3.1 Propriétés des fonctions μ et α

Rappelons que la viscosité μ est définie par la relation implicite (équation (1.7)) :

$$\frac{1}{2\mu} = A(\tau_0^{m-1} + (\sqrt{2}\mu s)^{m-1}), \quad (3.1)$$

où $s := |\varepsilon(\mathbf{u})|$ et α est défini par (équation (1.19)) :

$$\alpha(\tilde{s}) := \frac{C}{(\tilde{s} + s_0)^{1-\frac{1}{m}}}, \quad (3.2)$$

où $\tilde{s} := |\mathbf{u}|$. Le premier lemme montre, que pour s donné, un seul μ satisfait (3.1). Dès lors, on considère la fonction $s \rightarrow \mu(s)$. Ce lemme donne également des informations sur le comportement de μ et μ' à l'infini.

LEMME 3.1.1. *On suppose que $m > 1$. Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant (3.1), lequel est noté $\mu(s)$. La fonction $s \rightarrow \mu(s)$, définie par (3.1), est $\mathcal{C}^\infty(0, +\infty)$ et décroissante.*

De plus, il existe $\beta_\mu, \gamma_\mu > 0$ tels que :

$$\frac{\beta_\mu}{(1+s)^{1-\frac{1}{m}}} < \mu(s) < \frac{\gamma_\mu}{(1+s)^{1-\frac{1}{m}}}, \quad \forall s > 0. \quad (3.3)$$

Nous avons également la propriété :

$$-s\mu'(s) \leq \left(1 - \frac{1}{m}\right)\mu(s), \quad \forall s > 0. \quad (3.4)$$

Preuve

Fixons $s \in \mathbb{R}_+$. Si $s = 0$ alors $\mu = \frac{1}{2A\tau_0^{m-1}}$. Si $s > 0$, on remarque que $\mu \in \mathbb{R}_+$ satisfait (3.1) si et seulement si $g(s, \mu) := -1 + 2A\tau_0^{m-1}\mu + 2A(\sqrt{2}s)^{m-1}\mu^m = 0$. Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g(s, \cdot)$ est continue, strictement croissante et on a :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} g(s, \mu) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} g(s, \mu) = +\infty.$$

Par conséquent, $g(s, \cdot)$ possède un unique zéro $\mu \in \mathbb{R}_+$ et la fonction $s \rightarrow \mu(s)$ est bien définie. De plus, $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{C}^∞ qui vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial \mu}(s, \mu) = 2A\tau_0^{m-1} + 2Am(\sqrt{2}s)^{m-1}\mu^{m-1} > 2A\tau_0^{m-1} > 0,$$

pour tout $(s, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Par le théorème des fonctions implicites, on obtient que $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Si $s > 0$, on pose $f(s) := \mu(X^{-1}s)$ où $X := (2A)^{\frac{1}{m-1}}\sqrt{2}$ et $T_0 := (2A)^{\frac{1}{m-1}}\tau_0$. En utilisant (3.1), on peut montrer que f vérifie :

$$\frac{1}{f(s)} = (sf(s))^{m-1} + T_0^{m-1},$$

qui est exactement la relation (3) de [48] avec $\alpha = 1 - \frac{1}{m}$. Par conséquent, en appliquant le lemme 1 de [48], on obtient directement que f vérifie (H1) et (H2) de [48]. Puisque $\mu(s) = f(Xs)$, on obtient d'une part que $\mu'(s) < 0$ pour tout $s > 0$ et d'autre part qu'il existe $\beta'_\mu > 0$ et $\gamma'_\mu > 0$ vérifiant :

$$\beta'_\mu(1 + Xs)^{\frac{1}{m}-1} < \mu(s) < \gamma'_\mu(1 + Xs)^{\frac{1}{m}-1}, \quad (3.5)$$

pour tout $s > 0$. Or, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$C_1(1+s)^{\frac{1}{m}-1} \leq (1+Xs)^{\frac{1}{m}-1} \leq C_2(1+s)^{\frac{1}{m}-1}, \quad (3.6)$$

pour tout $s \geq 0$. De (3.5) et (3.6), on en déduit (3.3) avec $\beta_\mu = \beta'_\mu C_1$ et $\gamma_\mu = \gamma'_\mu C_2$. En dérivant (3.1) en fonction de s , on obtient pour $s > 0$:

$$0 = \tau_0^{m-1}\mu'(s) + (\sqrt{2}\mu(s)s)^{m-1} \left(m\mu'(s) + \frac{\mu(s)(m-1)}{s} \right). \quad (3.7)$$

En utilisant (3.1), on remplace $(\sqrt{2}\mu(s)s)^{m-1}$ par $\left(\frac{1}{2A\mu(s)} - \tau_0^{m-1}\right)$ dans (3.7) ce qui donne pour $s > 0$:

$$(m-1)\tau_0^{m-1}(s\mu'(s) + \mu(s)) = \frac{1}{2\mu(s)A}(m(\mu'(s)s + \mu(s)) - \mu(s)). \quad (3.8)$$

Après simplifications, nous obtenons :

$$s\mu'(s) + \mu(s) = \frac{\mu(s)}{m - 2A(m-1)\tau_0^{m-1}\mu(s)}. \quad (3.9)$$

Puisque μ est décroissante, alors $\mu(s) \leq \mu(0) = 1/(2A\tau_0^{m-1})$ pour tout $s > 0$. On en déduit :

$$m \geq m - 2A(m-1)\tau_0^{m-1}\mu(s) \geq 1. \quad (3.10)$$

En combinant (3.9) et (3.10), on obtient : $s\mu'(s) + \mu(s) \geq \frac{1}{m}\mu(s)$, ce qui démontre (3.4). \square

Remarque 3.1.1. La fonction $s \rightarrow \mu(s)$, définie par (3.1), est $C^\infty([0, +\infty[)$.

Dans le lemme suivant, on donne des inégalités semblables à (3.3) et (3.4) pour la fonction α .

LEMME 3.1.2. On suppose que $m > 1$. Il existe $\beta_\alpha, \gamma_\alpha > 0$ tels que

$$\frac{\beta_\alpha}{(1 + \tilde{s})^{1 - \frac{1}{m}}} < \alpha(\tilde{s}) < \frac{\gamma_\alpha}{(1 + \tilde{s})^{1 - \frac{1}{m}}}, \quad \forall \tilde{s} > 0. \quad (3.11)$$

et

$$-\tilde{s}\alpha'(\tilde{s}) \leq (1 - \frac{1}{m})\alpha(\tilde{s}), \quad \forall \tilde{s} > 0. \quad (3.12)$$

où $\tilde{s} \rightarrow \alpha(\tilde{s})$ est la fonction définie par (3.2).

Preuve

Les inégalités (3.11) proviennent directement de la définition (3.2). En utilisant la définition (3.2), on obtient pour $\tilde{s} > 0$:

$$-\tilde{s}\alpha'(\tilde{s}) = -\tilde{s}(\frac{1}{m} - 1)C(\tilde{s} + s_0)^{\frac{1}{m}-2} \leq C(1 - \frac{1}{m})(\tilde{s} + s_0)(\tilde{s} + s_0)^{\frac{1}{m}-2} = (1 - \frac{1}{m})\alpha(\tilde{s}).$$

\square

LEMME 3.1.3. Si $m > 1$, il existe $\omega_1, \omega_2 > 0$ tels que

$$\omega_1(1 + s + r)^{\frac{1}{m}-1}(s - r) \leq s\mu(s) - r\mu(r) \leq \omega_2(1 + s + r)^{\frac{1}{m}-1}(s - r), \quad (3.13)$$

pour tout $s \geq r \geq 0$.

Preuve

Comme dans la preuve du lemme 3.1.1, on pose $f(s) := \mu(X^{-1}s)$ où $X := (2A)^{\frac{1}{m-1}}\sqrt{2}$ et $T_0 := (2A)^{\frac{1}{m-1}}\tau_0$. En utilisant (3.1), on montre que f vérifie la relation (3) de [48] avec $\alpha = 1 - \frac{1}{m}$. Par conséquent, en appliquant le lemme 2 de [48], on obtient directement que $g(s) = sf(s)$ vérifie (H3) de [48]. Puisque $\mu(s) = f(Xs)$, on en déduit qu'il existe $\omega'_1 > 0$ et $\omega'_2 > 0$ qui vérifient :

$$\omega'_1(1 + Xs + Xr)^{\frac{1}{m}-1}(s - r) \leq s\mu(s) - r\mu(r) \leq \omega'_2(1 + Xs + Xr)^{\frac{1}{m}-1}(s - r), \quad (3.14)$$

pour tout $s \geq r \geq 0$. Or, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$C_1(1 + s + r)^{\frac{1}{m}-1} \leq (1 + Xs + Xr)^{\frac{1}{m}-1} \leq C_2(1 + s + r)^{\frac{1}{m}-1}, \quad (3.15)$$

pour tout $s \geq r \geq 0$. A partir de (3.14) et (3.15), on en déduit (3.13) avec $\omega_1 = \omega'_1 C_1$ et $\omega_2 = \omega'_2 C_2$. \square

LEMME 3.1.4. *Si $m > 1$, il existe $\chi_1, \chi_2 > 0$ tels que pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, on a*

$$\left(\mu(|\xi|)\xi - \mu(|\eta|)\eta \right) : (\xi - \eta) \geq \chi_1 \left(1 + |\xi| + |\xi - \eta| \right)^{\left(\frac{1}{m}-1\right)} |\xi - \eta|^2, \quad (3.16)$$

$$\left| \mu(|\xi|)\xi - \mu(|\eta|)\eta \right| \leq \chi_2 \left(1 + |\xi| + |\xi - \eta| \right)^{\left(\frac{1}{m}-1\right)} |\xi - \eta|. \quad (3.17)$$

Preuve

C'est une conséquence du lemme 3.1.3, du lemme 2.1 de [7] et de l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(|\xi| + |\eta|) \leq |\xi| + |\xi - \eta| \leq 2(|\xi| + |\eta|).$$

□

3.2 Le problème continu

En suivant [28] et [93], on prouve l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème de Stokes non linéaire avec une condition de glissement non linéaire. Dans [28], les auteurs montrent un résultat similaire avec le modèle simplifié bidimensionnel du "First Order Approximation" de [9]. Le cas tridimensionnel est traité dans [93] et plusieurs lois de glissement sont considérées dans [100]. Nous introduisons, dans la section 3.2.1, les espaces fonctionnels adéquats pour l'étude du problème. En considérant l'espace des vitesses à divergence nulle, on s'affranchit de la pression et on peut prouver l'existence et l'unicité d'un champ de vitesse, solution du problème réduit (section 3.2.2). Finalement, grâce à une condition inf sup, on montre qu'il existe une unique solution du problème mixte (section 3.2.3).

3.2.1 Espaces fonctionnels

Nous définissons maintenant les espaces fonctionnels pour la vitesse et pour la pression qui permettent de donner un sens à la formulation variationnelle (2.33) (ou ci-après (3.18)). Dans la suite, on note \mathbf{n} la normale extérieure à $\partial\Omega$ (qui a un sens puisque Ω est supposé à frontière C^1) et \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 deux vecteurs tangentiels orthogonaux à \mathbf{n} et linéairement indépendants. On définit les exposants conjugués suivants :

$$r := 1 + \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad r' := m + 1,$$

où m est l'exposant de Glen. On définit les espaces de Banach suivants :

$$V := \{ \mathbf{v} \in [W^{1,r}(\Omega)]^3, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_B^{NS}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_B^S \},$$

muni de la norme $\| \cdot \|_{W^{1,r}}$ et $Q := L^{r'}(\Omega)$, muni de la norme $\| \cdot \|_{L^{r'}}$. Soit $\mathbf{u} \in V$ et $p \in Q$, on montre que : $|\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u})| \leq \gamma_\mu |\varepsilon(\mathbf{u})|^{r-1}$ en utilisant l'inégalité droite de (3.3). On en déduit que :

$$\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) \in [L^{r'}(\Omega)]^{3 \times 3}.$$

En utilisant l'inégalité de trace, voir [12] p. 197 :

$$\| \cdot \|_{L^r(\Gamma_B^S)} \leq \| \cdot \|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\Gamma_B^S)} \leq C \| \cdot \|_{W^{1,r}(\Omega)},$$

nous déduisons que $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i) \in L^r(\Gamma_B^S)$ pour $i = 1, 2$. D'une façon similaire, on montre que : $\alpha(|\mathbf{u}|)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i) \in L^{r'}(\Gamma_B^S)$ pour $i = 1, 2$. L'inégalité de Hölder permet de conclure que la formulation mixte (2.33) du problème qui consiste à chercher $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ vérifiant :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|) \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}|)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i) dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (3.18)$$

pour tout $(\mathbf{v}, q) \in V \times Q$, a bien un sens.

Remarque 3.2.1. Si $\Gamma_S = \emptyset$, la pression dans l'équation (3.18) est définie à une constante près. Il convient alors de remplacer l'espace $Q = L^{r'}$ par $Q = L_0^{r'} = \{q \in L^{r'}, \int_{\Omega} q dV = 0\}$. Si de plus $r = 2$ (si $m = 1$), et $\Gamma_B^S = \emptyset$, μ est constant et il est bien connu que le problème linéaire (3.18) possède une unique solution, voir par exemple [44, 32, 91].

Dans la suite, il sera souvent nécessaire de comparer la norme $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}$ avec $\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^r}$. Pour cela, nous avons besoin du résultat suivant qui est une généralisation de la première inégalité de Korn et de l'inégalité de Friedrich-Poincaré.

LEMME 3.2.1. (*Inégalité de Korn*)

Si $\Gamma_B^{NS} \neq \emptyset$ et si $1 < \gamma < \infty$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,\gamma}} \leq C \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^\gamma} \quad (3.19)$$

soit valable pour tout $\mathbf{v} \in W^{1,\gamma}(\Omega)$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_B^{NS} .

Preuve

Il s'agit d'une application directe du corollaire 4.1 de [86] (avec F est la matrice identité) et du lemme 3.1 p. 40 de [44]. \square

Remarque 3.2.2. La conséquence du lemme 3.2.1 est que $\|\varepsilon(\cdot)\|_{L^r}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W^{1,r}}$ sur l'espace V .

Afin d'éliminer la contrainte d'incompressibilité, nous travaillons dans l'espace des vitesses à divergence nulle suivant :

$$V_{div} := \{\mathbf{v} \in [W^{1,r}(\Omega)]^3, \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_B^{NS}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B^S\}.$$

3.2.2 Formulation réduite

Dans V_{div} , la pression disparaît de la formulation variationnelle. La formulation réduite consiste à chercher $\mathbf{u} \in V_{div}$ vérifiant :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|) \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}|)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i) dS = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (3.20)$$

pour tout $\mathbf{v} \in V_{div}$. On transforme le problème (3.20) en un problème de minimisation. Pour cela, on définit la fonctionnelle J suivante :

$$J(\mathbf{u}) := \int_{\Omega} M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_B^S} N(|\mathbf{u}|) dS - \rho \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} dV,$$

où

$$M(x) := \int_0^x s\mu(s)ds \quad \text{et} \quad N(x) := \int_0^x \tilde{s}\alpha(\tilde{s})d\tilde{s}.$$

On peut montrer que J est Gâteaux différentiable et que sa dérivée DJ , au point \mathbf{u} , dans la direction \mathbf{v} , est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle DJ(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle &= 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})dV \\ &+ \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}|)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i)dS - \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}dV. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.3. Si $\mathbf{u} \in V_{div}$ vérifie :

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_{div}, \quad (3.21)$$

alors $\langle DJ(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in V_{div}$ et \mathbf{u} satisfait (3.20).

Nous énonçons et prouvons plusieurs lemmes préliminaires qui permettent la démonstration du théorème principal : le théorème 3.2.1. Nous montrons ainsi la continuité de J dans le lemme 3.2.3, la stricte convexité de J dans le lemme 3.2.4, et la coercivité (au sens (3.22)) de J dans le lemme 3.2.5. Ensuite, on prouve l'existence et l'unicité d'un minimum dans le théorème 3.2.1, par un argument d'analyse convexe.

LEMME 3.2.2. Soit $f, g \in L^r(\Omega)$, alors on a l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} \| |f|^r - |g|^r \| dV \leq r \| |f| + |g| \|_{L^r}^{r-1} \| f - g \|_{L^r}.$$

Preuve

Voir le lemme 4 de [28]. □

LEMME 3.2.3. La fonctionnelle J est continue pour la norme $\|\cdot\|_{W^{1,r}}$.

Preuve

En utilisant (3.3), (3.11) et $1 - \frac{1}{m} = 2 - r$, nous avons, pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_{div}$:

$$|M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) - M(|\varepsilon(\mathbf{v})|)| = \left| \int_{|\varepsilon(\mathbf{v})|}^{|\varepsilon(\mathbf{u})|} s\mu(s)ds \right| < \left| \gamma_{\mu} \int_{|\varepsilon(\mathbf{v})|}^{|\varepsilon(\mathbf{u})|} s^{r-1}ds \right| = \gamma_{\mu} \left| \frac{|\varepsilon(\mathbf{u})|^r - |\varepsilon(\mathbf{v})|^r}{r} \right|,$$

et

$$|N(|\mathbf{u}|) - N(|\mathbf{v}|)| = \left| \int_{|\mathbf{v}|}^{|\mathbf{u}|} \tilde{s}\alpha(\tilde{s})d\tilde{s} \right| < \left| \gamma_{\alpha} \int_{|\mathbf{v}|}^{|\mathbf{u}|} \tilde{s}^{r-1}d\tilde{s} \right| = \gamma_{\alpha} \left| \frac{|\mathbf{u}|^r - |\mathbf{v}|^r}{r} \right|.$$

lequel implique la continuité de J par rapport à $\|\cdot\|_{W^{1,r}}$ en utilisant le lemme 3.2.2. □

LEMME 3.2.4. Les fonctions $M, N, M(|\cdot|)$ et $N(|\cdot|)$ sont strictement convexes. La fonctionnelle J est strictement convexe sur V .

Preuve

Clairement, $M'(s) = s\mu(s)$ et $M''(s) = s\mu'(s) + \mu(s)$. En utilisant l'inégalité (3.4), on a que $M''(s) = s\mu'(s) + \mu(s) \geq \frac{1}{m}\mu(s) > 0$ si $s > 0$ et donc M est strictement convexe. De la même façon, on montre en utilisant l'inégalité (3.12) que N est strictement convexe. Soit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tels que $\xi \neq \eta$ et $\theta \in (0, 1)$. Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|\theta\xi + (1 - \theta)\eta| \leq \theta|\xi| + (1 - \theta)|\eta|.$$

Puisque M est une fonction croissante et strictement convexe, on a :

$$M(|\theta\xi + (1 - \theta)\eta|) \leq M(\theta|\xi| + (1 - \theta)|\eta|) < \theta M(|\xi|) + (1 - \theta)M(|\eta|),$$

ce qui prouve que $M(|\cdot|)$ est strictement convexe. De la même façon, on montre que $N(|\cdot|)$ est strictement convexe.

Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_{div}$ tels que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ et $\theta \in (0, 1)$. On a $\varepsilon(\mathbf{u}) \neq \varepsilon(\mathbf{v})$. En effet, si $\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{v})$ dans L^r alors, par l'inégalité de Korn (lemme 3.2.1), on aurait immédiatement que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ dans $W^{1,r}$. Par conséquent :

$$\int_{\Omega} M(|\theta\varepsilon(\mathbf{u}) + (1 - \theta)\varepsilon(\mathbf{v})|)dV < \theta \int_{\Omega} M(|\varepsilon(\mathbf{u})|)dV + (1 - \theta) \int_{\Omega} M(|\varepsilon(\mathbf{v})|)dV.$$

La stricte convexité de J est une conséquence immédiate de l'inégalité précédente et de la convexité de $N(|\cdot|)$. \square

Remarque 3.2.4. *Puisque J est convexe, on a la réciproque de la remarque 3.2.3 : si $\mathbf{u} \in V_{div}$ satisfait (3.20) (ou de façon équivalente si $\langle DJ(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in V_{div}$), alors :*

$$J(\mathbf{u}) + \underbrace{\langle DJ(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle}_{=0} \leq J(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_{div}.$$

De plus, puisque J est strictement convexe, alors si le minimum de J existe, il est unique.

LEMME 3.2.5. *Il existe deux constantes positives D_1 et D_2 telles que :*

$$J(\mathbf{u}) \geq D_1 \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}^r - D_2, \quad (3.22)$$

pour tout $\mathbf{u} \in V$.

Preuve

En utilisant l'inégalité (3.3) et $1 - \frac{1}{m} = 2 - r$, nous avons que :

$$M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) \geq \int_0^{|\varepsilon(\mathbf{u})|} \frac{\beta_{\mu} s}{(1+s)^{2-r}} ds = \int_0^{\frac{|\varepsilon(\mathbf{u})|^2}{2}} \frac{\beta_{\mu}}{(1+\sqrt{2t})^{2-r}} dt \geq \frac{|\varepsilon(\mathbf{u})|^2}{2} \beta_{\mu} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})|)^{r-2}.$$

Par conséquent, il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que :

$$M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) \geq C_1(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})|)^r - C_2.$$

Après intégration, on a :

$$\int_{\Omega} M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) dV + C_2|\Omega| \geq C_1 \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})|)^r dV.$$

où $|\Omega| := \int_{\Omega} dV$. En utilisant l'inégalité de Korn (lemme 3.2.1), il existe $C_3 > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) dV + C_2|\Omega| \geq C_3 \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}^r. \quad (3.23)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a, pour tout $\delta > 0$:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g}| dV \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{r' \delta^{r'}} |\rho \mathbf{g}|^{r'} + \frac{\delta^r}{r} |\mathbf{u}|^r \right) dV = \frac{C_4}{\delta^{r'}} |\Omega| + C_5 \delta^r \|\mathbf{u}\|_{L^r}^r, \quad (3.24)$$

où C_4 et C_5 sont deux constantes positives. On choisit δ assez petit de sorte que $C_3 - \delta^r C_5 > 0$. En utilisant $\|\mathbf{u}\|_{L^r}^r \leq \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}^r$, les inégalités (3.23), (3.24) et $N \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (M(|\varepsilon(\mathbf{u})|) - \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g}) dV + \int_{\Gamma_B^S} \frac{1}{2} N(|\mathbf{u}|) dS \\ \geq C_3 \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}^r - C_2 |\Omega| - \frac{C_4}{\delta^{r'}} |\Omega| - C_5 \delta^r \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}^r \\ = D_1 \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}^r - D_2, \end{aligned}$$

où $D_1 := C_3 - C_5 \delta^r$ et $D_2 := C_2 |\Omega| + \frac{C_4}{\delta^{r'}} |\Omega|$ sont deux constantes positives. \square

THÉORÈME 3.2.1. *Il existe un unique $\mathbf{u} \in V_{div}$ tel que*

$$J(\mathbf{u}) = \inf\{J(\mathbf{v}); \mathbf{v} \in V_{div}\}.$$

De plus, \mathbf{u} est l'unique solution de (3.20).

Preuve

Clairement, il existe $\bar{\mathbf{u}} \in V_{div}$ tel que $J(\bar{\mathbf{u}}) < +\infty$. Le lemme 3.2.5 assure l'existence de $\bar{m} = \inf\{J(\mathbf{v}); \mathbf{v} \in V_{div}\}$. Soit $\{\mathbf{u}_\nu\}$ une suite (minimisante) de V_{div} telle que $J(\mathbf{u}_\nu)$ converge vers \bar{m} . Il existe un entier K tel que pour tout $\nu > K$, on a $\bar{m} + 1 > J(\mathbf{u}_\nu)$. Grâce au lemme 3.2.5, la suite $\{\mathbf{u}_\nu\}$ est bornée dans V_{div} . Puisque V_{div} est un sous espace fermé de l'espace réflexif V , alors V_{div} est aussi réflexif. Par conséquent, il existe $\mathbf{u} \in V_{div}$ et une sous suite de $\{\mathbf{u}_\nu\}$ (toujours notée $\{\mathbf{u}_\nu\}$) qui converge faiblement vers \mathbf{u} . Par les lemmes 3.2.3 et 3.2.4, J est faiblement semi-continue inférieurement (voir par exemple le corollaire III.8 de [12] p. 38). On a donc :

$$\bar{m} = \liminf_{\nu \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}_\nu) \geq J(\mathbf{u}) \geq \bar{m}.$$

Par conséquent, J possède au moins un minimum $\mathbf{u} \in V_{div}$. Par stricte convexité de J (lemme 3.2.4), ce minimum est unique. Les remarques 3.2.3 et 3.2.4 établissent l'équivalence entre minimum de J et solution de (3.20). Par conséquent, \mathbf{u} est l'unique solution de (3.20). \square

3.2.3 Formulation mixte

Le théorème 3.2.1 montre l'existence d'une solution \mathbf{u} du problème réduit (3.20). On cherche maintenant $p \in Q$ de sorte que (\mathbf{u}, p) satisfasse la formulation mixte (3.18). Pour cela, on a besoin que les espaces V et Q satisfassent la condition inf sup, voir [7, 104]. Il est démontré dans [2, 32] que si $\Gamma_B^{NS} = \partial\Omega$ (ou de façon équivalente : $\Gamma_S = \Gamma_B^S = \emptyset$), alors les espaces Q (dans ce cas, $Q = L_0^{r'} = \{q \in L^{r'}, \int_{\Omega} q dV = 0\}$) et V (dans ce cas, $V = W_0^{1,r} = \{\mathbf{v} \in W^{1,r}, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega\}$) vérifient la condition inf sup. Nous rappelons ce résultat dans le lemme suivant.

LEMME 3.2.6. *Si ω est un ouvert connexe à frontière Lipchitzienne. Les espaces $L_0^{r'}(\omega)$ et $W_0^{1,r}(\omega)$ vérifient la condition inf sup, i.e. il existe $\bar{C} > 0$ tel que :*

$$\bar{C} < \inf_{q \in L_0^{r'}(\omega)} \sup_{\mathbf{v} \in W_0^{1,r}(\omega)} \frac{\int_{\omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dV}{\|q\|_{L^{r'}(\omega)} \|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}(\omega)}}. \quad (3.25)$$

En suivant la démonstration de la proposition 5.3.2 de [92], on généralise ce résultat si $\Gamma_B^{NS} \cup \Gamma_B^S \subsetneq \partial\Omega$ dans le lemme suivant.

LEMME 3.2.7. Les espaces Q et V vérifient la condition inf sup, i.e. il existe $\bar{C} > 0$ tel que :

$$\bar{C} < \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dV}{\|q\|_{L^{r'}} \|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}}}. \quad (3.26)$$

Preuve

Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert à frontière Lipchitzienne contenant Ω de sorte que $\Gamma_B^{NS} \cup \Gamma_B^S \subsetneq \partial\Omega$, voir la figure 3.1.

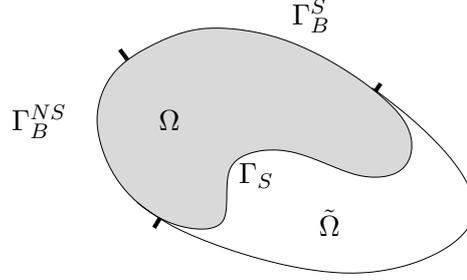


FIG. 3.1. Le domaine étendu $\tilde{\Omega}$.

Soit $q \in L^{r'}(\Omega)$ tel que $q \neq 0$. Soit \tilde{q} le prolongement de q à $\tilde{\Omega}$ égal à zéro en dehors de Ω . On définit $\bar{q} = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{q} dV$ de sorte que $\tilde{q} - \bar{q} \in L_0^{r'}(\tilde{\Omega})$. La propriété (3.25) du lemme 3.2.6 se réécrit :

$$\forall q \in L_0^{r'}(\omega), \quad \exists \mathbf{v} \in W_0^{1,r}(\omega), \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} : \quad \int_{\omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dV > \bar{C} \|q\|_{L^{r'}(\omega)} \|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}(\omega)}. \quad (3.27)$$

En appliquant (3.27) avec $\omega = \tilde{\Omega}$ et $q = \tilde{q} - \bar{q}$, on obtient qu'il existe $\tilde{\mathbf{v}} \in W_0^{1,r}(\tilde{\Omega})$, $\tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$, de sorte que :

$$\int_{\tilde{\Omega}} (\tilde{q} - \bar{q}) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) dV > \bar{C} \|\tilde{q} - \bar{q}\|_{L^{r'}(\tilde{\Omega})} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{W^{1,r}(\tilde{\Omega})}.$$

On pose $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}|_{\Omega} \in W^{1,r}(\Omega)$. En utilisant le fait que $\int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) dV = 0$ puisque $\tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dV &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{q} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) dV = \int_{\tilde{\Omega}} (\tilde{q} - \bar{q}) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) dV > \bar{C} \|\tilde{q} - \bar{q}\|_{L^{r'}(\tilde{\Omega})} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{W^{1,r}(\tilde{\Omega})} \\ &\geq \bar{C} \|q - \bar{q}\|_{L^{r'}(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\|q\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq \|q - \bar{q}\|_{L^{r'}(\Omega)} + \|\bar{q}\|_{L^{r'}(\Omega)}, \quad (3.28)$$

et

$$\begin{aligned} \|\bar{q}\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'} &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{q} dV \right)^{r'} dV = \frac{|\Omega|}{|\tilde{\Omega}|^{r'}} \left(\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{q} dV \right)^{r'} \leq \frac{|\Omega|}{|\tilde{\Omega}|^{r'}} \left(\|q\|_{L^{r'}(\Omega)} \|1\|_{L^r(\tilde{\Omega})} \right)^{r'} \\ &= \frac{|\Omega|^{r'}}{|\tilde{\Omega}|^{r'}} \left(\|q\|_{L^{r'}(\Omega)} \right)^{r'}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En combinant (3.28) et la racine r' ième de (3.29), on obtient :

$$\left(1 - \frac{|\Omega|}{|\tilde{\Omega}|} \right) \|q\|_{L^{r'}(\Omega)} < \|q - \bar{q}\|_{L^{r'}(\Omega)},$$

ce qui prouve l'inégalité inf sup (3.26) avec :

$$\bar{C} = \left(1 - \frac{|\Omega|}{|\tilde{\Omega}|}\right) \bar{C}.$$

□

En utilisant l'existence et l'unicité d'une solution \mathbf{u} du problème (3.20) (théorème 3.2.1) et la condition inf sup (3.26) du lemme 3.2.7, on déduit du théorème 2.1 de [104] l'existence et l'unicité d'une solution du problème mixte dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2.2. *Il existe un unique couple $(\mathbf{u}, p) \in (V, Q)$ satisfaisant*

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|) \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}|) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i) dS \quad (3.30)$$

$$- \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (3.31)$$

pour tout $(\mathbf{v}, q) \in (V, Q)$.

3.3 Le problème discret

Dans la suite, on considère $V_H \subset V$ et $Q_H \subset Q$ des espaces (de dimension finie) d'approximation des espaces V et Q qui vérifient la condition inf sup suivante, i.e., pour tout $\kappa \in (1, \infty)$, il existe une constante $\bar{C}_H(\kappa) > 0$ telle que :

$$\bar{C}_H < \inf_{q_H \in Q_H} \sup_{\mathbf{v}_H \in V_H} \frac{\int_{\Omega} q_H \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)}{\|q_H\|_{L^{\kappa'}} \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}}. \quad (3.32)$$

On s'intéresse au problème discret analogue au problème continu mixte (3.30) (3.31) qui consiste à chercher $(\mathbf{u}_H, p_H) \in (V_H, Q_H)$ satisfaisant :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) \varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}_H|) (\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{t}_i) (\mathbf{v}_H \cdot \mathbf{t}_i) dS \quad (3.33)$$

$$- \int_{\Omega} p_H \operatorname{div} \mathbf{v}_H dV + \int_{\Omega} q_H \operatorname{div} \mathbf{u}_H dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H dV, \quad (3.34)$$

pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (V_H, Q_H)$. Afin d'appliquer la même démarche que pour le problème continu, on élimine la pression en définissant l'espace :

$$V_{div,H} = \{\mathbf{v}_H \in V_H; \int_{\Omega} q_H \operatorname{div}(\mathbf{v}_H) dV = 0; \quad \forall q_H \in Q_H\}. \quad (3.35)$$

Remarque 3.3.1. *L'espace $V_{div,H}$ (analogue discret de V_{div}) n'est pas nécessairement inclus dans V_{div} , voir [92].*

Le problème discret réduit (analogue au problème continu (3.20)) consiste alors à chercher $\mathbf{u}_H \in V_{div,H}$ satisfaisant :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) \varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}_H|) (\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{t}_i) (\mathbf{v}_H \cdot \mathbf{t}_i) dS = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H dV, \quad (3.36)$$

pour tout $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$.

Puisque $V_{div,H}$ est un sous espace de dimension finie de V , il est fermé et on peut réécrire le théorème 3.2.1 et sa preuve en remplaçant V_{div} par $V_{div,H}$. On obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3.1. *Il existe un unique $\mathbf{u}_H \in V_{div,H}$ tel que*

$$J(\mathbf{u}_H) = \inf\{J(\mathbf{v}_H); \quad \mathbf{v}_H \in V_{div,H}\}.$$

De plus, \mathbf{u}_H est l'unique solution de (3.36).

Remarque 3.3.2. *En prenant $\mathbf{v}_H = \mathbf{u}_H$ dans (3.36) et en utilisant les inégalités (3.3), (3.11) et l'inégalité de Korn (lemme 3.2.1), on peut montrer que la solution \mathbf{u}_H du problème (3.36) satisfait :*

$$\|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} \leq C \|\mathbf{g}\|_{L^{r'}}, \quad (3.37)$$

où C est une constante positive indépendante de \mathbf{u}_H .

En utilisant l'existence et l'unicité d'une solution \mathbf{u}_H du problème (3.36) (théorème 3.3.1) et la condition inf sup (3.32), on déduit (à nouveau) du théorème 2.1 de [104] l'existence et l'unicité d'une solution du problème mixte discrétisé dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3.2. *Si V_H et Q_H vérifient la condition inf sup (3.32), il existe un unique couple $(\mathbf{u}_H, p_H) \in (V_H, Q_H)$ satisfaisant (3.33) (3.34).*

Remarque 3.3.3. *Les espaces $\mathbb{P}_1/Bulle - \mathbb{P}_1$ ou $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ sont deux exemples de combinaisons stables, i.e. vérifiant la condition inf sup (3.32) alors que le couple $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ est instable, voir [32].*

3.4 Estimation d'erreur *a priori*

3.4.1 Résultats théoriques

L'analyse de convergence qui suit se base sur les travaux publiés dans [48, 7]. Il s'agit de donner une estimation *a priori* de l'erreur entre la solution du problème continu (3.30) (3.31) et la solution du problème discret (3.33) (3.34). Notons que nous ne prenons pas en compte la condition de glissement en supposant que $\Gamma_B^S = \emptyset$. L'analyse d'erreur pour les équations de Stokes relevant d'un fluide non newtonien avec une loi de type puissance a été d'abord effectuée dans [6] puis complétée [7] pour des couples d'espaces d'éléments finis $V_H - Q_H$ vérifiant la condition inf sup. Une étude similaire a été menée dans [69] avec une méthode stabilisée. En ce qui concerne le modèle d'écoulement de glace, l'analyse d'erreur a été simultanément réalisée avec les équations du "First order approximation" dans [48] et dans [24] pour un problème bidimensionnel et dans [93] pour un problème tridimensionnel. Nous généralisons ce résultat pour un problème de Stokes avec un couple d'espaces d'éléments finis $V_H - Q_H$ qui vérifie la condition inf sup et avec des conditions de bord mixtes ($\partial\Omega = \Gamma_B^{NS} \cup \Gamma_S$). Dans le cas où $m = 1$ (fluide newtonien) et $\Gamma_S = \emptyset$ (ou $\partial\Omega = \Gamma_B^{NS}$), on trouve des estimations *a priori* dans [44, 91, 32]. Dans la suite, on suppose que $m > 1$.

Nous rappelons ici les résultats d'existence des deux sections précédentes en prenant en compte la simplification $\Gamma_B^S = \emptyset$. D'après le théorème 3.2.2, le problème qui consiste à trouver $(\mathbf{u}, p) \in (V, Q)$ satisfaisant :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|) \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dV = 0, \quad (3.39)$$

pour tout $(\mathbf{v}, q) \in (V, Q)$, admet une unique solution. D'après le théorème 3.3.1, le problème : trouver $\mathbf{u}_H \in V_{div,H}$ satisfaisant :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) \varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H dV, \quad (3.40)$$

pour tout $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$, admet une unique solution. On suppose que les espaces $V_H \subset V$ et $Q_H \subset Q$ (de dimension finie) vérifient la condition inf sup (3.32), alors, par le théorème 3.3.2, il existe $p_H \in Q_H$ tel que $(\mathbf{u}_H, p_H) \in (V_H, Q_H)$ satisfasse :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) \varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV - \int_{\Omega} p_H \operatorname{div} \mathbf{v}_H dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H dV, \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega} q_H \operatorname{div} \mathbf{u}_H dV = 0, \quad (3.42)$$

pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (V_H, Q_H)$.

Le but de cette section est de donner des estimations *a priori* les erreurs commises entre la solution (\mathbf{u}, p) du problème exact (3.38) (3.39) et la solution (\mathbf{u}_H, p_H) du problème approché (3.41) (3.42) :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} \quad \text{et} \quad \|p - p_H\|_{L^{r'}}. \quad (3.43)$$

La non-linéarité du problème (3.38) (3.39) induit une difficulté que nous traitons en introduisant (lemme 3.4.1) une quasi-norme adéquate dépendante de la solution (\mathbf{u}, p) , comme dans [7]. L'orthogonalité de l'erreur (lemme 3.4.2) combinée à la propriété (3.16) de la fonction μ permet d'obtenir une estimation en quasi-norme dans le théorème 3.4.1. Les propriétés de la quasi-norme (lemme 3.4.1) permettent d'obtenir des estimations dans les normes standards (3.43) dans le théorème 3.4.2. Finalement, ces estimations combinées à des inégalités d'interpolation et des hypothèses de régularité sur la solution conduisent au théorème de convergence 3.4.3.

LEMME 3.4.1. *Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (3.38) (3.39), alors l'application*

$$\mathbf{v} \longrightarrow |||\mathbf{v}||| := \sqrt{\int_{\Omega} \frac{|\varepsilon(\mathbf{v})|^2}{(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{v}))^{2-r}} dV} \quad (3.44)$$

est une quasi-norme de l'espace V , i.e. elle vérifie toutes les propriétés de la norme à l'exception de la propriété d'homogénéité. De plus, il existe deux constantes strictement positives D_1 et D_2 telles que :

- Pour tout $\mathbf{v} \in W^{1,r}(\Omega)$, on a :

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}}^2 \leq D_1 [1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}}]^{2-r} |||\mathbf{v}|||^2. \quad (3.45)$$

- Pour tout $\kappa \in [r, 2]$ et pour tout $\mathbf{v} \in W^{1,\kappa}(\Omega)$, on a :

$$|||\mathbf{v}|||^2 \leq D_2 \|\mathbf{v}\|_{W^{1,\kappa}}^{\kappa}. \quad (3.46)$$

Preuve :

Ci-dessous, les C_i dénotent des constantes strictement positives. Prouvons d'abord l'inégalité

(3.45). On a :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}}^2 &\leq C_1 \left\{ \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{v})|^r dV \right\}^{\frac{2}{r}} \\
&\text{(en utilisant l'inégalité de Korn, lemme 3.2.1)} \\
&= C_1 \left\{ \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{v})|)^{-\frac{r(r-2)}{2}} \left((1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{v})|)^{\frac{(r-2)}{2}} |\varepsilon(\mathbf{v})| \right)^r dV \right\}^{\frac{2}{r}} \\
&\leq C_1 \left\{ \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{v})|)^r dV \right\}^{\frac{2-r}{r}} \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\text{(en utilisant l'inégalité de Hölder)} \\
&\leq C_2 [1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}\|_{W^{1,r}}]^{2-r} \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\text{(en utilisant l'inégalité } (|a| + |b|)^\rho \leq C(|a|^\rho + |b|^\rho)\text{)}.
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.46) résulte simplement de l'inégalité suivante :

$$(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{v})|)^{r-2} \leq (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{v})|)^{\kappa-2} \leq |\varepsilon(\mathbf{v})|^{\kappa-2}.$$

Clairement $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, et si $\|\mathbf{u}\| = 0$ alors $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ d'après l'inégalité (3.45). De plus, on peut montrer que $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire en reprenant la démonstration du lemme 3.1 de [7]. \square

LEMME 3.4.2. (*Orthogonalité de l'erreur*)

Soit $(\mathbf{u}, p) \in (V, Q)$ la solution du problème (3.38) (3.39) et $\mathbf{u}_H \in V_{div,H}$ la solution du problème (3.40), alors

$$\int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)(p - q_H) dV = 0, \quad (3.47)$$

pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in (V_{div,H}, Q_H)$. De plus, si $V_H - Q_H$ vérifie la condition inf sup (3.32), alors la solution (\mathbf{u}_H, p_H) de (3.41) (3.42) satisfait :

$$\int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)(p - p_H) dV = 0, \quad (3.48)$$

pour tout $\mathbf{v}_H \in V_H$.

Preuve

On prend $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H \in V_{div,H}$ dans (3.38). En égalisant (3.38) et (3.40) et en utilisant le fait que $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)q_H = 0$, on aboutit à (3.47). On prend ensuite $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H \in V_H$ dans (3.38). Si $V_H - Q_H$ vérifie la condition inf sup (3.32), alors (\mathbf{u}_H, p_H) satisfait (3.41) pour tout $\mathbf{v}_H \in V_H$. En égalisant (3.38) et (3.41), on aboutit à (3.48). \square

THÉORÈME 3.4.1. Soit $(\mathbf{u}, p) \in (V, Q)$ la solution du problème (3.38) (3.39) et $\mathbf{u}_H \in V_{div,H}$ la solution du problème (3.40). Pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in V_{div,H} \times Q_H$, on a :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\| \leq D_1 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{2}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\| + \|p - q_H\|_{L^{r'}}), \quad (3.49)$$

où $D_1 > 0$. De plus, si $V_H - Q_H$ vérifie la condition inf sup (3.32), alors la solution (\mathbf{u}_H, p_H) de (3.42) satisfait, pour tout $\kappa \in [r, 2]$ et pour tout $q_H \in Q_H$:

$$\|p - p_H\|_{L^{\kappa'}} \leq D_2 (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{L^{\kappa'}}^{\frac{2}{\kappa}} + \|p - q_H\|_{L^{\kappa'}}), \quad (3.50)$$

où $D_2 > 0$. Notons que les constantes D_1 et D_2 sont indépendantes de \mathbf{u}_H et \mathbf{v}_H .

Preuve :

Tout au long de cette démonstration, les C_i dénotent des constantes strictement positives. En utilisant la définition (3.44) de la quasi-norme $||| \cdot |||$, on a :

$$\begin{aligned}
 |||\mathbf{u} - \mathbf{u}_H|||^2 &= \int_{\Omega} \frac{|\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|^2}{(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|)^{2-r}} dV \\
 &\leq C_1 \left\{ \int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H) dV \right\} \\
 &\quad (\text{en utilisant l'inégalité (3.16) et } 1 - \frac{1}{m} = 2 - r) \\
 &= C_1 \left\{ \underbrace{\int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H) dV}_{:=A_1} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H - \mathbf{u}_H)(p - q_H) dV}_{:=A_2} \right\} = C_1 \{A_1 + A_2\} \\
 &\quad (\text{par l'orthogonalité de l'erreur, équation (3.47)}),
 \end{aligned}$$

où $(\mathbf{v}_H, q_H) \in V_{div,H} \times Q_H$. Par commodité, nous traitons indépendamment A_1 et A_2 . Notons que l'on traite A_1 de façon similaire à [48] et A_2 de façon similaire à [7]. D'une part, nous avons que :

$$\begin{aligned}
 |A_1| &= \left| \int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H) dV \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} 2 \left| (\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) \right| \left| \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H) \right| dV \\
 &\quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz vectorielle}) \\
 &\leq C_2 \int_{\Omega} \frac{|\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)| |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H)|}{(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|)^{2-r}} dV \\
 &\quad (\text{en utilisant l'inégalité (3.17) et } 1 - \frac{1}{m} = 2 - r),
 \end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité (voir le lemme 2.2 dans [7] ou l'équation (3.10) dans [93]) :

$$(1 + a + r)^{-e} r s \leq \alpha(1 + a + r)^{-e} r^2 + \alpha^{-1}(1 + a + s)^{-e} s^2, \quad \forall a, r, s \geq 0, \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

pour $a = |\varepsilon(\mathbf{u})|$, $r = |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|$, $s = |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H)|$ et $e = 2 - r$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |A_1| &\leq C_2 \left\{ \alpha \int_{\Omega} \frac{|\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|^2}{(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|)^{2-r}} dV \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^{-1} \int_{\Omega} \frac{|\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H)|^2}{(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}_H)|)^{2-r}} dV \right\} \\
 &= C_2 \{ \alpha |||\mathbf{u} - \mathbf{u}_H|||^2 + \alpha^{-1} |||\mathbf{u} - \mathbf{v}_H|||^2 \}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons que :

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \left| \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H - \mathbf{u}_H)(p - q_H) dV \right| \\
&\leq \|\operatorname{div}(\mathbf{v}_H - \mathbf{u}_H)\|_{L^r} \|p - q_H\|_{L^{r'}} \\
&\quad (\text{en utilisant l'inégalité de Hölder}) \\
&\leq \frac{1}{2} C_3 \beta \|\mathbf{v}_H - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}}^2 + \frac{1}{2} \beta^{-1} \|p - q_H\|_{L^{r'}}^2 \\
&\quad (\text{en utilisant } \|\operatorname{div} \cdot\|_{L^r} \leq C \|\cdot\|_{W^{1,r}} \text{ ainsi que l'inégalité de Young}) \\
&\leq C_4 \beta [1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} \|\mathbf{v}_H - \mathbf{u}_H\|^2 + \frac{1}{2} \beta^{-1} \|p - q_H\|_{L^{r'}}^2 \\
&\quad (\text{en utilisant l'inégalité (3.45)}) \\
&\leq C_5 \beta [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta^{-1} \|p - q_H\|_{L^{r'}}^2.
\end{aligned}$$

On revient maintenant au calcul de $|A_1| + |A_2|$ et on pose $\alpha = 1/(4C_2C_1)$ (quitte à augmenter C_1 , on peut supposer que $\alpha \in (0, 1]$) et $\beta = 1/(4C_5C_1[1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r})$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|^2 &\leq C_1 \{|A_1| + |A_2|\} \\
&\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|^2 + 4C_2^2 C_1^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|^2 + 2C_1^2 C_5 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} \|p - q_H\|_{L^{r'}(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

En passant $\frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|^2$ à gauche de l'inégalité, on obtient (3.49).

Démontrons maintenant l'inégalité (3.50). Par la condition inf sup (3.32), nous avons, pour tout $q_H \in Q_H$:

$$\bar{C}_H(\kappa) \|q_H - p_H\|_{L^{\kappa'}} < \sup_{\mathbf{v}_H \in V_H} \frac{\int_{\Omega} (q_H - p_H) \operatorname{div}(\mathbf{v}_H) dV}{\|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}}. \quad (3.51)$$

Par l'orthogonalité de l'erreur (équation (3.48)), on a, pour tout $\mathbf{v}_H \in V_H$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)(q_H - p_H) dV = \int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \quad (3.52)$$

$$+ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)(q_H - p) dV. \quad (3.53)$$

De (3.51) et (3.52) - (3.53), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\bar{C}_H(\kappa) \|q_H - p_H\|_{L^{\kappa'}} \\
&< \sup_{\mathbf{v}_H \in V_H} \frac{|\int_{\Omega} 2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H)) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV|}{\|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}} \\
&+ \sup_{\mathbf{v}_H \in V_H} \frac{|\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_H)(q_H - p) dV|}{\|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}} \\
&\leq C_6 \left\{ \|2(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u}) - \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)\varepsilon(\mathbf{u}_H))\|_{L^{\kappa'}} + \|q_H - p\|_{L^{\kappa'}} \right\} \\
&\leq C_7 \left\{ \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|)^{(r-2)\kappa'} |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|^{\kappa'} dV \right\}^{\frac{1}{\kappa'}} + C_6 \|q_H - p\|_{L^{\kappa'}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(en utilisant l'inégalité (3.17) et } 1 - \frac{1}{m} = 2 - r) \\
 & \leq C_8 C_9 \left\{ \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|)^{(r-2)} |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|^2 dV \right\}^{\frac{1}{\kappa'}} + C_6 \|q_H - p\|_{L^{\kappa'}} \\
 & \text{(où } C_8 := \|(1 + |\varepsilon(\mathbf{u})| + |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|)^{(r-2)} |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_H)|^{2-\kappa}\|_{L^\infty}^{\frac{1}{\kappa}} < 1) \\
 & \leq C_9 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{L^{\kappa'}}^{\frac{2}{\kappa'}} + C_6 \|q_H - p\|_{L^{\kappa'}},
 \end{aligned}$$

ce qui établit (3.50) en utilisant l'inégalité $\|p - p_H\|_{L^{\kappa'}} \leq \|q_H - p_H\|_{L^{\kappa'}} + \|p - q_H\|_{L^{\kappa'}}$. \square

THÉORÈME 3.4.2. *Soit $(\mathbf{u}, p) \in (V, Q)$ la solution du problème (3.38) (3.39) et $\mathbf{u}_H \in V_{div,H}$ la solution du problème (3.40). Pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in V_{div,H} \times Q_H$ et pour tout $\kappa \in [r, 2]$, on a (si $\mathbf{u} \in W^{1,\kappa}(\Omega)$) :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} \leq D_1 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - q_H\|_{L^{r'}}), \quad (3.54)$$

où $D_1 > 0$. De plus, si $V_H - Q_H$ vérifie la condition inf sup (3.32), alors la solution (\mathbf{u}_H, p_H) de (3.41) (3.42) satisfait, pour tout $(\mathbf{v}_H, q_H) \in V_H \times Q_H$ et pour tout $\kappa \in [r, 2]$ (si $\mathbf{u} \in W^{1,\kappa}(\Omega)$) :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} \leq D_1 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - q_H\|_{L^{r'}}), \quad (3.55)$$

et

$$\begin{aligned}
 \|p - p_H\|_{L^{\kappa'}} & \leq D_2 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{\kappa'}} \\
 & \left\{ \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - q_H\|_{L^{r'}} \right)^{\frac{2}{\kappa'}} + \|p - q_H\|_{L^{\kappa'}} \right\}, \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

où $D_2 > 0$. Notons que les constantes D_1 et D_2 sont indépendantes de \mathbf{u}_H et \mathbf{v}_H .

Preuve :

Les C_i dénotent des constantes strictement positives. D'une part, l'inégalité (3.54) est une conséquence des inégalités (3.45), (3.49) et (3.46) :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} & \leq C_1 [1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{2}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\| \\
 & \leq C_2 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\| + \|p - q_H\|_{L^{r'}}) \\
 & \leq C_3 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{2-r} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - q_H\|_{L^{r'}}).
 \end{aligned}$$

D'autre part, (3.55) est due à (3.54) et à la propriété suivante (voir l'équation (1.16) p. 115 dans [44]) : pour tout $\mathbf{v} \in V_{div}$ et pour tout $\mathbf{w}_H \in V_H$, il existe $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$ tel que :

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}} \leq C_4 \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_H\|_{W^{1,\kappa}},$$

où C_4 est une constante qui dépend de $\bar{C}_H(\kappa)$. Enfin, on obtient (3.56) en utilisant respectivement les inégalités (3.50), (3.49) et (3.46) :

$$\begin{aligned}
 & \|p - p_H\|_{L^{\kappa'}} \\
 & \leq C_5 (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{L^{\kappa'}}^{\frac{2}{\kappa'}} + \|p - q_H\|_{L^{\kappa'}}) \\
 & \leq C_6 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{\kappa'}} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\| + \|p - q_H\|_{L^{r'}} \right\}^{\frac{2}{\kappa'}} + C_5 \|p - q_H\|_{L^{\kappa'}} \\
 & \leq C_7 [1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{\kappa'}} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - q_H\|_{L^{r'}} \right\}^{\frac{2}{\kappa'}} + C_5 \|p - q_H\|_{L^{\kappa'}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

On peut maintenant prouver le théorème de convergence suivant :

THÉORÈME 3.4.3. (*Convergence*)

On fait l'hypothèse suivante sur les espaces V_H et Q_H . Pour tout $\kappa \in [r, 2]$, il existe un opérateur continu $\pi_H : [W^{2,\kappa}]^3 \rightarrow V_H$ qui vérifie :

$$\|\mathbf{u} - \pi_H(\mathbf{u})\|_{W^{1,\kappa}} \leq CH\|\mathbf{u}\|_{W^{2,\kappa}}, \quad \forall \mathbf{u} \in [W^{2,\kappa}]^3, \quad (3.57)$$

et un opérateur continu $\rho_H : W^{1,\kappa'} \rightarrow Q_H$ qui vérifie :

$$\|p - \rho_H(p)\|_{L^{\kappa'}} \leq CH\|p\|_{W^{1,\kappa'}}, \quad \forall p \in W^{1,\kappa'}, \quad (3.58)$$

où H est le diamètre maximum des tétraèdres de \mathcal{T}_H .

Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (3.38) (3.39) et soit (\mathbf{u}_H, p_H) la solution du problème (3.41) (3.42). On suppose que $(\mathbf{u}, p) \in ([W^{2,\kappa}]^3, W^{1,\kappa'})$ où $\kappa \in [r, 2]$, alors on a :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + (\|p - p_H\|_{L^{\kappa'}})^{\frac{\kappa'}{2}} \leq D H^{\frac{\kappa}{2}}, \quad (3.59)$$

où $D = D(\|\mathbf{u}\|_{W^{2,\kappa}}, \|p\|_{W^{1,\kappa'}}, \bar{C}_H) > 0$.

Preuve :

Les C_i dénotent des constantes strictement positives. On applique l'inégalité (3.55) avec $\mathbf{v}_H = \pi_H(\mathbf{u})$ et $q_H = \rho_H(p)$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} \leq C_1[1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\pi_H(\mathbf{u})\|_{W^{1,r}}]^{2-r} (\|\mathbf{u} - \pi_H(\mathbf{u})\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - \rho_H(p)\|_{L^{\kappa'}}).$$

En utilisant, d'une part la continuité de π_H et l'estimation (3.37), et d'autre part les inégalités (3.57) et (3.58), on obtient :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} \leq C_2[1 + \|\mathbf{g}\|_{L^{r'}} + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}]^{2-r} (H^{\frac{\kappa}{2}} + H) \leq C_3 H^{\frac{\kappa}{2}}. \quad (3.60)$$

D'une façon similaire, on applique l'inégalité (3.56) avec $\mathbf{v}_H = \pi_H(\mathbf{u})$ et $q_H = \rho_H(p)$:

$$\|p - p_H\|_{L^{\kappa'}} \leq C_4[1 + \|\mathbf{u}_H\|_{W^{1,r}} + \|\pi_H(\mathbf{u})\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{\kappa'}} \quad (3.61)$$

$$\left\{ \left(\|\mathbf{u} - \pi_H(\mathbf{u})\|_{W^{1,\kappa}}^{\frac{\kappa}{2}} + \|p - \rho_H(p)\|_{L^{\kappa'}} \right)^{\frac{2}{\kappa'}} + \|p - \rho_H(p)\|_{L^{\kappa'}} \right\}, \quad (3.62)$$

En utilisant, d'une part la continuité de π_H et l'estimation (3.37), et d'autre part les inégalités (3.57) et (3.58), on obtient :

$$\|p - p_H\|_{L^{\kappa'}} \leq C_5[1 + \|\mathbf{g}\|_{L^{r'}} + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}}]^{\frac{2-r}{\kappa'}} \left\{ \left(H^{\frac{\kappa}{2}} + H \right)^{\frac{2}{\kappa'}} + H \right\} \leq C_6 H^{\frac{\kappa}{\kappa'}}. \quad (3.63)$$

L'estimation (3.59) est une conséquence directe des inégalités (3.60) et (3.63). \square

Remarque 3.4.1. La combinaison d'espaces $\mathbb{P}_1/\text{Bulle} - \mathbb{P}_1$ introduite dans [4], satisfait les hypothèses du théorème 3.4.3, voir le lemme 4.20 p. 190 de [32] pour la condition inf sup (3.32) et [44] pour (3.57) et (3.58), pourvu que le maillage \mathcal{T}_H soit régulier.

3.4.2 Tests numériques 2D

Dans cette partie, nous testons l'estimation (3.59) du théorème 3.4.3 grâce à une solution exacte du problème de Stokes dans une géométrie bidimensionnelle simple. On considère le carré unité $\Omega = [0, 1]^2$. Les paramètres de viscosité sont les suivants : $m = 2$, $\sigma_0 = 0.1$ bar et $A = 0.1$ bar⁻² a⁻¹. On se donne le champ de vitesse à divergence nulle et nul sur le bord de Ω suivant :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} (x(1-x))^{\theta+1} (y(1-y))^\theta (1-2y) \\ -(x(1-x))^\theta (y(1-y))^{\theta+1} (1-2x) \end{pmatrix},$$

où $\theta \in [1, 2]$, ainsi que la pression à moyenne nulle suivante :

$$p(x, y) = xy - \frac{1}{4}.$$

Le terme de force $\rho \mathbf{g}$ est modifié par le vecteur $(f_1 \ f_2)^t$ obtenu du calcul suivant :

$$-2\operatorname{div}(\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)\varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Pour que le théorème 3.4.3 soit valable, il suffit que les espaces d'éléments finis $V_{\mathbf{H}}$ et $Q_{\mathbf{H}}$ satisfassent la condition inf sup (3.32) et que les hypothèses d'interpolations (3.57) et (3.58) soient vraies. On opte pour la combinaison $\mathbb{P}_1/Bulle - \mathbb{P}_1$ introduite dans [4], voir la remarque 3.4.1. Les expériences numériques qui suivent sont réalisées grâce au code libre d'Eléments Finis Freefem++, voir [51]. Puisque $m = 2$, on résout le problème non linéaire par l'algorithme 2.5.1 de point fixe décrit à la section 2.5.4. Six maillages $\mathcal{T}_{\mathbf{H}}$ réguliers de type Delaunay sont générés avec des résolutions \mathbf{H} différentes. On applique une condition de Dirichlet sur tout le bord ($\partial\Omega = \Gamma_B^{NS}$). Pour fixer la pression, on ajoute un terme de pénalisation dans la formulation variationnelle afin de contraindre la moyenne de la pression d'être proche de zéro. Une fois calculés $\mathbf{u}_{\mathbf{H}}$ et $p_{\mathbf{H}}$ pour chaque \mathbf{H} , on évalue les erreurs suivantes :

$$E_{\mathbf{H}}^u = \frac{\|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{H}}\|_{L^r}}{\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^r}} \quad \text{et} \quad E_{\mathbf{H}}^p = \frac{\|p - p_{\mathbf{H}}\|_{L^{\kappa'}}}{\|p\|_{L^{\kappa'}}},$$

où on approche la norme $\|\cdot\|_{L^\kappa}$, par la formule des trapèzes :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\kappa} \sim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{\mathbf{H}}} \frac{|K|}{3} |\mathbf{u}|^\kappa \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Remarquons que si $\theta = 2$ alors $\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega)$ alors que si $\theta = 1.34$ alors $\mathbf{u} \notin [W^{2,2}(\Omega)]^2$ mais $\mathbf{u} \in [W^{2,r}(\Omega)]^2$ où $r = \frac{3}{2}$. Notons que $p \in C^\infty(\Omega)$. Utiliser plusieurs valeurs de θ permet ainsi de tester l'estimation du théorème 3.4.3 avec des solutions plus ou moins régulières. La figure 3.2 affiche les erreurs $E_{\mathbf{H}}^p$ et $E_{\mathbf{H}}^u$ en fonction de \mathbf{H} avec $\theta = 2$ et $\theta = 1.34$. Si $\theta = 2$, l'estimation (3.59) donne un ordre de convergence en \mathbf{H} pour $E_{\mathbf{H}}^p$ et $E_{\mathbf{H}}^u$. Si $\theta = 1.34$, l'estimation (3.59) donne un ordre en $\mathbf{H}^{\frac{3}{4}}$ pour $E_{\mathbf{H}}^u$ et en $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}$ pour $E_{\mathbf{H}}^p$. Dans tous les cas, l'ordre de convergence constaté pour la vitesse et la pression est approximativement en \mathbf{H} , ce qui est supérieur à l'estimation. Cela montre que l'estimation (3.59) n'est pas optimale. Notons que ce fait avait déjà été relevé dans [48] pour un problème comparable.

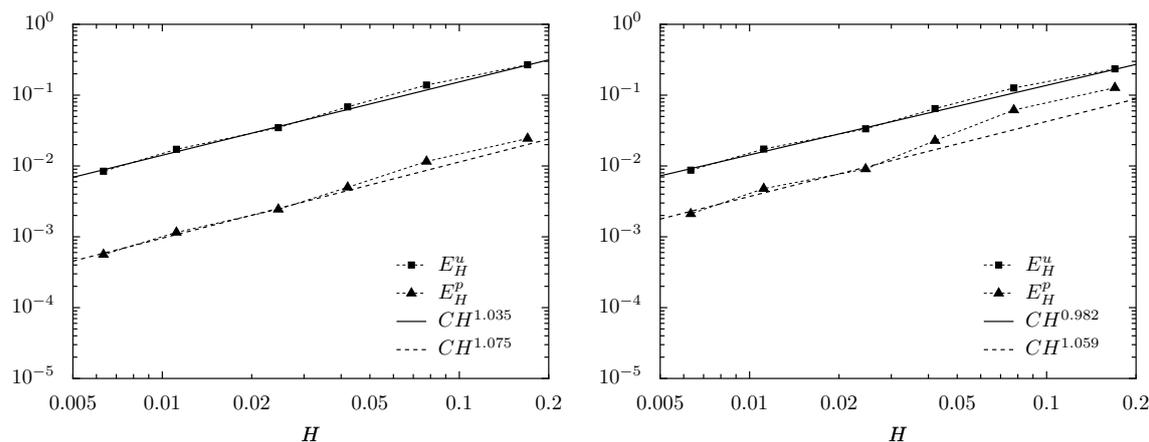


FIG. 3.2. Erreurs E_H^p et E_H^u en fonction de H en échelle log-log avec $\theta = 2$ (à gauche) et avec $\theta = 1.34$ (à droite). Pour chaque nuage de points, la droite de régression (construite à partir des trois derniers points) est dessinée.

3.5 Convergence de la méthode de linéarisation

3.5.1 Résultats théoriques

Dans cette section, on démontre la convergence d'un algorithme de linéarisation similaire à l'algorithme 2.5.1 de la section 2.5.4. Le but de cette méthode itérative est de résoudre la non-linéarité du problème de Stokes stationnaire discrétisé. Deux résultats similaires existent dans la littérature [24, 95] pour un modèle simplifié et pour un algorithme de point fixe. Nous donnons ici un résultat de convergence pour le problème non linéaire de Stokes incluant l'algorithme de Newton. Pour simplifier, nous ne prenons pas en compte le glissement en supposant que $\Gamma_B^S = \emptyset$. On suppose que $m > 1$ (dans le cas où $m = 1$, le problème est linéaire). De plus, on suppose que le maillage \mathcal{T}_H est fixé (H est constant). Dans la suite, on définit une application E qui admet la solution du problème (3.40) comme point fixe. On calcule sa dérivée dans le lemme 3.5.1. Ensuite, le lemme 3.5.2 donne une majoration de cette dérivée dans une norme adéquate. Finalement, on prouve la convergence de l'algorithme dans le théorème 3.5.1. L'algorithme de Newton est traité dans le théorème 3.5.2 où on prouve que la convergence est quadratique. On suppose que les espaces d'approximation $V_H \subset V \cap [W^{1,\infty}(\Omega)]^3$ et $Q_H \subset Q \cap L^\infty(\Omega)$ vérifient la condition inf sup (3.32) et on considère le sous-espace $V_{div,H}$ de V_H défini par (3.35). Dans la suite $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur l'espace $V_{div,H}$. Notons que toutes les normes sont équivalentes puisque $V_{div,H}$ est de dimension finie. On définit l'application E par :

$$E : \begin{cases} V_{div,H} & \longrightarrow V_{div,H} \\ \tilde{\mathbf{u}}_H & \longrightarrow \tilde{\mathbf{w}}_H \end{cases}$$

où $\tilde{\mathbf{w}}_H \in V_{div,H}$ est solution du problème linéaire :

$$\int_{\Omega} 2\mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H)dV \quad (3.65)$$

$$+ \gamma \int_{\Omega} 2\frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|}(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H - \tilde{\mathbf{u}}_H))(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H))dV = \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H dV, \quad (3.66)$$

pour tout couple $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$.

Remarque 3.5.1. *L'application E est bien définie. En effet, on a :*

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV + 2\gamma \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H) \right)^2 dV \\
 & \geq 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV + 2\gamma \int_{\Omega} \mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV \\
 & \text{(en utilisant } \mu' < 0 \text{ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz vectorielle)} \\
 & \geq 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV - 2\gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right) \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV \\
 & \text{(en utilisant l'inégalité (3.4))} \\
 & = 2 \left(1 - \gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV, \\
 & \geq \frac{2\beta_{\mu} \left(1 - \gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)}{\left(1 + \|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)\|_{L^{\infty}}\right)^{1 - \frac{1}{m}}} \int_{\Omega} |\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H)|^2 dV \geq C \|\tilde{\mathbf{w}}_H\|^2 \tag{3.67} \\
 & \text{(en utilisant l'inégalité (3.3) et l'équivalence des normes),}
 \end{aligned}$$

où C est une constante positive. Par conséquent, le problème (3.65) (3.66) est coercif, et par le théorème de Lax-Milgram, voir [32] p. 83, il existe une unique solution $\tilde{\mathbf{w}}_H \in V_{div,H}$ de (3.65) (3.66).

Remarque 3.5.2. *Clairement, \mathbf{u}_H vérifie (3.40) si et seulement si \mathbf{u}_H est un point fixe de E . On en déduit que \mathbf{u}_H est unique.*

Dans la suite, on note \mathbf{u}_H la solution de (3.40). D'après le lemme 3.1.1 et la remarque 3.1.1, la fonction μ est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, le problème (3.65) (3.66) a bien un sens. On définit maintenant la suite $\mathbf{u}_{H,k}$ de façon itérative. On suppose que $\mathbf{u}_{H,0}$ est donné et on construit $\mathbf{u}_{H,k}$ pour tout entier $k \geq 1$ par la relation $\mathbf{u}_{H,k+1} = E(\mathbf{u}_{H,k})$. Notons que cet algorithme est très similaire à l'algorithme 2.5.1 décrit dans la section 2.5.4. Les seules différences sont le choix des espaces V_H et Q_H , l'ajout d'un terme de stabilisation et le fait que la pression n'est ici pas recalculée.

LEMME 3.5.1. *Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_H, \tilde{\mathbf{w}}_H)$ vérifiant $E(\tilde{\mathbf{u}}_H) = \tilde{\mathbf{w}}_H$. On définit l'application :*

$$G : \begin{cases} V_{div,H} & \longrightarrow V_{div,H} \\ \tilde{\mathbf{u}}_H & \longrightarrow \tilde{\mathbf{w}}_H \end{cases}$$

où $\tilde{\mathbf{w}}_H$ est la solution du problème linéaire :

$$2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \tag{3.68}$$

$$+ 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma \left[2 \int_{\Omega} \frac{\mu''(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| - \mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|^3} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) \right) \right. \\
 & \quad \left. \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H - \tilde{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \right] \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

$$+ \gamma \left[2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H - \tilde{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \right] \tag{3.71}$$

$$+ \gamma \left[2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H - \tilde{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \right] \tag{3.72}$$

$$+ \gamma \left[2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H - \tilde{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \right] = 0, \tag{3.73}$$

pour tout $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$.

L'application E est Gâteaux-dérivable au point $\tilde{\mathbf{u}}_H$. En d'autres termes, $DE(\tilde{\mathbf{u}}_H)$ existe et satisfait :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda \bar{\mathbf{u}}_H) - E(\tilde{\mathbf{u}}_H) - \lambda \langle DE(\tilde{\mathbf{u}}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle\|}{\lambda} = 0, \quad (3.74)$$

pour toute fonction $\bar{\mathbf{u}}_H \in V_{div,H}$. De plus, $\langle DE(\tilde{\mathbf{u}}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle = G(\bar{\mathbf{u}}_H)$ pour tout $\bar{\mathbf{u}}_H \in V_{div,H}$.

Remarque 3.5.3. L'application G est bien définie. En effet, on voit que les problèmes (3.65) (3.66) et (3.68) - (3.73) possèdent la même condition de coercivité pour calculer $\bar{\mathbf{w}}_H$ ou $\tilde{\mathbf{w}}_H$ à partir de $\bar{\mathbf{u}}_H$ ou $\tilde{\mathbf{u}}_H$ respectivement. Par conséquent, comme dans la remarque 3.5.1, le problème (3.68) - (3.73) est bien posé par le théorème de Lax-Milgram.

Par commodité, on prouve le lemme 3.5.1 seulement dans le cas $\gamma = 0$. On montre que cette dérivée existe en utilisant la définition (3.74), comme dans [95]. Cependant, si $\gamma \in [0, 1]$, la dérivée s'obtient par un calcul formel. Ainsi, en différentiant (3.65) (3.66) en $\tilde{\mathbf{u}}_H$ dans la direction $\bar{\mathbf{u}}_H$, avec $\tilde{\mathbf{w}}_H = E(\tilde{\mathbf{u}}_H)$ on obtient (3.68) - (3.73). Plus précisément, la dérivée du terme (3.65) correspond à la somme de (3.68) et de (3.69) alors que la dérivée du terme (3.66) correspond à la somme de (3.70), (3.71), (3.72) et de (3.73).

Preuve (Existence d'une dérivée lorsque $\gamma = 0$)

Soit $\lambda > 0$ et $\bar{\mathbf{w}}_H$ défini par la relation $\tilde{\mathbf{w}}_H + \lambda \bar{\mathbf{w}}_H = E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda \bar{\mathbf{u}}_H)$. Par définition de E , on a :

$$\int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda \bar{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H + \lambda \bar{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \quad (3.75)$$

$$= \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV, \quad (3.76)$$

pour tout $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$. Puisque $\mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$, on peut faire un développement limité de la fonction $\mu(|\cdot|)$ au point $\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}))$:

$$\mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}) + \lambda \bar{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}))|) = \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}))|) \quad (3.77)$$

$$+ \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}))|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}))|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x})) : \varepsilon(\lambda \bar{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x})) \right) + g(\lambda, \mathbf{x}), \quad (3.78)$$

avec $g(\lambda, \mathbf{x}) = \mathcal{O}(\lambda^2)$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$. En injectant (3.77) - (3.78) dans (3.75) - (3.76), on obtient, après simplifications :

$$\int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\lambda \bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \quad (3.79)$$

$$+ \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\lambda \bar{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \quad (3.80)$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\lambda \bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\lambda \bar{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \quad (3.81)$$

$$+ \int_{\Omega} g(\lambda, \mathbf{x}) \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_H + \lambda \bar{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV = 0. \quad (3.82)$$

En utilisant la définition de G via (3.68) - (3.69), (3.79) se réécrit :

$$- \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\lambda G(\bar{\mathbf{u}}_H)) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV.$$

Par définition de $\bar{\mathbf{w}}_H$, on a $\lambda\bar{\mathbf{w}}_H = E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda\bar{\mathbf{u}}_H) - E(\tilde{\mathbf{u}}_H)$, et (3.80) se réécrit :

$$\int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon \left(E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda\bar{\mathbf{u}}_H) - E(\tilde{\mathbf{u}}_H) \right) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV.$$

Finalement, on remarque que (3.81) et (3.82) peuvent être remplacés par

$$\mathcal{O}(\lambda^2 \|\mathbf{v}_H\|_{W^{1,r}}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}(\lambda^2 \|\mathbf{v}_H\|_{\mu}),$$

où $\|\cdot\|_{\mu}$, définie par :

$$\|\mathbf{v}_H\|_{\mu}^2 := \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\mathbf{v}_H)|^2 dV, \quad (3.83)$$

est une norme de $V_{div,H}$ puisque, d'après le lemme 3.1.1, on a :

$$0 < \frac{\beta_{\mu}}{(1 + \|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)\|_{L^{\infty}})^{1-\frac{1}{m}}} \leq \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|).$$

Finalement (3.79) - (3.82) se réécrit :

$$\int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon \left(E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda\bar{\mathbf{u}}_H) - E(\tilde{\mathbf{u}}_H) - \lambda G(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV = \mathcal{O}(\lambda^2 \|\mathbf{v}_H\|_{\mu}).$$

En choisissant $\mathbf{v}_H = E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda\bar{\mathbf{u}}_H) - E(\tilde{\mathbf{u}}_H) - \lambda G(\bar{\mathbf{u}}_H) \in V_{div,H}$, on obtient directement :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|E(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda\bar{\mathbf{u}}_H) - E(\tilde{\mathbf{u}}_H) - \lambda G(\bar{\mathbf{u}}_H)\|_{\mu}}{\lambda} = 0.$$

Puisque toutes les normes sont équivalentes, cela montre que E est différentiable au point $\tilde{\mathbf{u}}_H$ et que $\langle DE(\tilde{\mathbf{u}}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle = G(\bar{\mathbf{u}}_H)$ pour tout $\bar{\mathbf{u}}_H \in V_{div,H}$. \square

Pour démontrer la convergence de la suite $\mathbf{u}_{H,k}$, il suffit que nous trouvions une norme pour laquelle l'application E soit une contraction au point \mathbf{u}_H . Cela est l'objet du lemme suivant.

LEMME 3.5.2. *Soit $\gamma \in [0, 1]$ et \mathbf{u}_H le point fixe de E . Alors l'application $DE(\mathbf{u}_H)$ vérifie :*

$$\| \| DE(\mathbf{u}_H) \| \|_{\mu} \leq \frac{(1-\gamma)(1-\frac{1}{m})}{1-(1-\frac{1}{m})\gamma} < 1, \quad (3.84)$$

où $\| \| \cdot \| \|_{\mu}$ dénote la norme subordonnée à la norme définie par :

$$\|\mathbf{v}_H\|_{\mu}^2 := \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\mathbf{v}_H)|^2 dV. \quad (3.85)$$

En particulier, si $\gamma = 1$ alors $DE(\mathbf{u}_H) = \mathbf{0}$.

Preuve

Puisque $E(\mathbf{u}_H) = \mathbf{u}_H$ alors (3.68) - (3.73), avec $\tilde{\mathbf{u}}_H = \mathbf{u}_H$ et $\tilde{\mathbf{w}}_H = \mathbf{u}_H$, devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \\ & + (1-\gamma) \left[\int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)}{|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|} \left(\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \right] \\ & + \gamma \left[\int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)}{|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|} \left(\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H) \right) \left(\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

pour toute fonction $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$. Par la suite, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \\
& \leq (1 - \gamma) \left| \left[\int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)}{|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|} (\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)) (\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H)) dV \right] \right| \\
& + \gamma \left| \left[\int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|)}{|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|} (\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H)) (\varepsilon(\mathbf{u}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H)) dV \right] \right| \\
& \text{(en utilisant (3.86) et l'inégalité triangulaire)} \\
& \leq -(1 - \gamma) \left[\int_{\Omega} \mu'(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\mathbf{u}_H)| |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)| |\varepsilon(\mathbf{v}_H)| dV \right] \\
& - \gamma \left[\int_{\Omega} \mu'(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\mathbf{u}_H)| |\varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H)| |\varepsilon(\mathbf{v}_H)| dV \right] \\
& \text{(en utilisant le fait que } \mu' < 0 \text{ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz vectorielle)} \\
& \leq (1 - \gamma) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[\int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)| |\varepsilon(\mathbf{v}_H)| dV \right] \\
& + \gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[\int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H)| |\varepsilon(\mathbf{v}_H)| dV \right] \tag{3.87} \\
& \text{(en utilisant l'inégalité (3.4)).}
\end{aligned}$$

En prenant $\mathbf{v}_H = \bar{\mathbf{w}}_H$ dans (3.87), on obtient :

$$\|\bar{\mathbf{w}}_H\|_{\mu}^2 \leq (1 - \gamma) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)| |\varepsilon(\bar{\mathbf{w}}_H)| dV + \gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right) \|\bar{\mathbf{w}}_H\|_{\mu}^2. \tag{3.88}$$

Dans (3.88), on passe le dernier terme à gauche, on divise par $1 - (1 - \frac{1}{m})\gamma$, puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\bar{\mathbf{w}}_H\|_{\mu}^2 \leq \left[\frac{(1 - \gamma) \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1 - (1 - \frac{1}{m})\gamma} \right] \|\bar{\mathbf{u}}_H\|_{\mu} \|\bar{\mathbf{w}}_H\|_{\mu}. \tag{3.89}$$

Si $\|\bar{\mathbf{w}}_H\|_{\mu} = 0$ alors (3.84) est clairement vérifié, sinon on peut simplifier (3.89) par $\|\bar{\mathbf{w}}_H\|_{\mu}$ et on obtient directement (3.84) par définition de la norme subordonnée $\|\cdot\|_{\mu}$. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de convergence de la suite $\mathbf{u}_{H,k}$ vers \mathbf{u}_H .

THÉORÈME 3.5.1. *Soit $\gamma \in [0, 1]$. Supposons que le maillage \mathcal{T}_H soit donné et que $\|\cdot\|$ soit une norme de $V_{div,H}$. Soit \mathbf{u}_H la solution de (3.40) et $\mathbf{u}_{H,k}$ la suite définie par $\mathbf{u}_{H,k+1} = E(\mathbf{u}_{H,k})$ avec $\mathbf{u}_{H,0} \in V_{div,H}$ donné. Il existe $\bar{\delta} > 0$ et $C > 0$ tels que si $\|\mathbf{u}_{H,0} - \mathbf{u}_H\| < \bar{\delta}$, alors on a :*

$$\|\mathbf{u}_{H,k} - \mathbf{u}_H\| \leq C \left[\frac{(1 - \gamma) \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1 - (1 - \frac{1}{m})\gamma} \right]^k \|\mathbf{u}_{H,0} - \mathbf{u}_H\|,$$

pour tout k entier et la suite $\mathbf{u}_{H,k}$ converge vers \mathbf{u}_H linéairement.

Preuve

D'après le lemme 3.5.2, le rayon spectral de l'opérateur $DE(\mathbf{u}_H)$ est inférieur à la constante :

$$\left[\frac{(1 - \gamma) \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1 - (1 - \frac{1}{m})\gamma} \right], \tag{3.90}$$

qui est inférieure à 1. On conclut en appliquant le théorème de point fixe de Banach dans l'espace $V_{div,H}$. \square

Remarque 3.5.4. Dans le théorème 3.5.1, il est important de noter que $\bar{\delta} > 0$ dépend à priori de H . A la limite (lorsque $H \rightarrow 0$, i.e. si on remplace \mathbf{u}_H par \mathbf{u}), le résultat du théorème 3.5.1 n'a pas de raison de perdurer. Cependant, dans la pratique, $\bar{\delta}$ ne semble pas dépendre de H , voir la section 3.5.2.

Remarque 3.5.5. Dans le cas où $\Gamma_B^S \neq \emptyset$, le théorème 3.5.1 reste valable. Pour le démontrer, il suffit de dériver l'application du point fixe comme dans le lemme 3.5.1 puis borner les dérivées comme dans le lemme 3.5.2 en utilisant la norme suivante :

$$\|\mathbf{v}_H\|_{\mu,\alpha}^2 := \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_H)|) |\varepsilon(\mathbf{v}_H)|^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_B^S} \alpha(|\mathbf{u}_H|) |\mathbf{v}_H|^2 dS.$$

Voyons à présent le cas $\gamma = 1$. D'après le lemme 3.5.2, $DE(\mathbf{u}_H) = \mathbf{0}$ si \mathbf{u}_H est un point fixe de E . Cela suggère que la convergence de la suite $\mathbf{u}_{H,k}$ est quadratique. Pour prouver l'ordre de convergence, on définit, pour tout $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$, l'application $\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{v}_H) : V_{div,H} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H) := 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV - \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_H dV. \quad (3.91)$$

Remarque 3.5.6. Clairement $\mathcal{F}(\mathbf{u}_H; \mathbf{v}_H) = 0$ pour tout $\mathbf{v}_H \in V_{div,H}$ est équivalent au fait que \mathbf{u}_H est la solution de (3.40).

Pour prouver la convergence de l'algorithme de Newton ($\gamma = 1$), nous avons besoin de calculer les deux premières dérivées de $\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{v}_H)$. On se donne $\tilde{\mathbf{u}}_H \in V_{div,H}$. La différentiabilité de $\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{v}_H)$ au point $\tilde{\mathbf{u}}_H$ peut être démontrée, comme dans la preuve du lemme 3.5.1, en utilisant le développement limité (3.77) (3.78) de $\mu(|\cdot|)$. En d'autres termes, $D\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H)$ existe et satisfait :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H + \lambda \bar{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H) - \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H) - \lambda \langle D\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle}{\lambda} = 0, \quad (3.92)$$

pour toute fonction $\bar{\mathbf{u}}_H \in V_{div,H}$. La dérivée première s'obtient en dérivant formellement (3.91) en $\tilde{\mathbf{u}}_H$ dans la direction $\bar{\mathbf{u}}_H$:

$$\begin{aligned} \langle D\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle &= 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) dV \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV. \end{aligned} \quad (3.93)$$

De la même façon, on peut montrer que l'application $\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{v}_H)$ est une deuxième fois différentiable au point $\tilde{\mathbf{u}}_H$. La dérivée seconde s'obtient en dérivant formellement (3.93) en $\tilde{\mathbf{u}}_H$ dans la direction $\bar{\mathbf{u}}_H$:

$$\begin{aligned} &\langle D^2\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \mathbf{v}_H), \bar{\mathbf{u}}_H, \bar{\mathbf{u}}_H \rangle \\ &= 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \frac{\mu''(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| - \mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|^3} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\mathbf{v}_H) \right) dV. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Le lemme préliminaire suivant établit deux inégalités qui concernent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de l'application $\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{v}_H)$.

LEMME 3.5.3. *On a les inégalités suivantes :*

$$\frac{2}{m} \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV \leq \langle D\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \bar{\mathbf{u}}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle, \quad (3.95)$$

et

$$-\langle D^2\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \bar{\mathbf{u}}_H), \bar{\bar{\mathbf{u}}}_H, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_H \rangle \leq \int_{\Omega} \left(8|\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)| + 2|\mu''(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)| |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| \right) |\varepsilon(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_H)|^2 |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)| dV, \quad (3.96)$$

pour tout $\tilde{\mathbf{u}}_H, \bar{\mathbf{u}}_H, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_H \in V_{div,H}$.

Preuve

En utilisant (3.93) avec $\mathbf{v}_H = \bar{\mathbf{u}}_H$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle D\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \bar{\mathbf{u}}_H), \bar{\mathbf{u}}_H \rangle &= 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV + 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right)^2 dV \\ &\geq 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV + 2 \int_{\Omega} \mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV \\ &\text{(en utilisant } \mu' < 0 \text{ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz vectorielle)} \\ &\geq 2 \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV - 2\left(1 - \frac{1}{m}\right) \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV \\ &\text{(en utilisant l'inégalité (3.4))} \\ &= \frac{2}{m} \int_{\Omega} \mu(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)|^2 dV, \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.95) et en utilisant (3.94) avec $\bar{\mathbf{u}}_H = \bar{\bar{\mathbf{u}}}_H$ et $\mathbf{v}_H = \bar{\mathbf{u}}_H$, on obtient :

$$\begin{aligned} &-\langle D^2\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}_H; \bar{\mathbf{u}}_H), \bar{\bar{\mathbf{u}}}_H, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_H \rangle \\ &= -4 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_H) \right) \left(\varepsilon(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) dV \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \frac{\mu''(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| - \mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|^3} \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_H) \right)^2 \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) dV \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)}{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|} \left(\varepsilon(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) \left(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H) : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H) \right) dV \\ &\leq \int_{\Omega} \left(8|\mu'(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)| + 2|\mu''(|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)|)| |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_H)| \right) |\varepsilon(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_H)|^2 |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_H)| dV, \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.96). □

On peut maintenant prouver que l'ordre de convergence de la suite $\mathbf{u}_{H,k}$ est 2 lorsque $\gamma = 1$.

THÉORÈME 3.5.2. *Supposons que $\gamma = 1$, que le maillage \mathcal{T}_H soit donné et que $\|\cdot\|$ soit une norme de $V_{div,H}$. Soit \mathbf{u}_H la solution de (3.40) et $\mathbf{u}_{H,k}$ la suite définie par $\mathbf{u}_{H,k+1} = E(\mathbf{u}_{H,k})$ avec $\mathbf{u}_{H,0}$ donné. Il existe $\bar{\delta} > 0$ et $C > 0$ tels que si $\|\mathbf{u}_{H,0} - \mathbf{u}_H\| < \bar{\delta}$, alors :*

$$\|\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1}\| \leq C \|\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k}\|^2, \quad (3.97)$$

pour tout entier k et la suite $\mathbf{u}_{H,k}$ converge vers \mathbf{u}_H quadratiquement.

Preuve

Dans la suite, les C_i sont des constantes strictement positives indépendantes de k mais dépendantes de \mathbf{H} et les K_i sont des entiers positifs. D'après le théorème 3.5.1, il existe $\bar{\delta} > 0$ tel que si $\|\mathbf{u}_{\mathbf{H},0} - \mathbf{u}_{\mathbf{H}}\| < \bar{\delta}$ alors $\|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k} - \mathbf{u}_{\mathbf{H}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Par conséquent, il existe un entier K_1 tel que $\|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k} - \mathbf{u}_{\mathbf{H}})\|_{L^\infty} < \bar{\delta}$ pour tout $k > K_1$. On fait le développement de Taylor de \mathcal{F} autour du point $\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}$. Il existe $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k} \in V_{div,\mathbf{H}}$ tel que

$$\|\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k})\|_{L^\infty} < \|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k})\|_{L^\infty} < \bar{\delta}, \quad (3.98)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H}}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}) &= \mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}) + \langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}), \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle D^2\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}), \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k}, \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k} \rangle. \end{aligned} \quad (3.99)$$

En utilisant la définition E (voir les équations (3.65) (3.66)), de \mathcal{F} (voir l'équation (3.91)), de $D\mathcal{F}$ (voir l'équation (3.93)), on montre que :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1} = E(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}),$$

est équivalent à :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}) + \langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}), \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k} \rangle = 0, \quad (3.100)$$

pour tout $\mathbf{v}_{\mathbf{H}} \in V_{div,\mathbf{H}}$. Notons que $\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H}}; \mathbf{v}_{\mathbf{H}}) = 0$ dans (3.99) d'après la remarque 3.5.6. En posant $\mathbf{v}_{\mathbf{H}} = \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}$, on obtient de (3.99) et (3.100) :

$$\begin{aligned} &\langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}), \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle D^2\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}), \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k}, \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k} \rangle. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Puisque $\|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k} - \mathbf{u}_{\mathbf{H}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0$, $\|\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k} - \mathbf{u}_{\mathbf{H}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et que (inégalité (3.3)) :

$$0 < \frac{\beta_\mu}{(1 + \|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H}})\|_{L^\infty})^{1-\frac{1}{m}}} \leq \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H}})|),$$

alors, il existe $C_1, C_2 > 0$ et un entier $K_2 \geq K_1$ de sorte que :

$$C_1 < \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k})|), \quad (3.102)$$

et

$$(8|\mu'(|\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k})|)| + 2|\mu''(|\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k})|)|\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k})) < C_2, \quad (3.103)$$

pour tout $k > K_2$. En appliquant (3.95) avec $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{u}_{\mathbf{H},k}$ et $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}$ avec (3.102), on obtient :

$$C_1 \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1})|^2 dV \leq \langle D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}), \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1} \rangle. \quad (3.104)$$

En appliquant (3.96) avec $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k}$, $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}$ et $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k}$ avec (3.103), on obtient :

$$\begin{aligned} &-\langle D^2\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{H},k}; \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1}), \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k}, \mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k} \rangle \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k})|^2 |\varepsilon(\mathbf{u}_{\mathbf{H}} - \mathbf{u}_{\mathbf{H},k+1})| dV. \end{aligned} \quad (3.105)$$

En combinant (3.101), (3.104) et (3.105), on obtient :

$$\int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})|^2 dV \leq C_3 \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k})|^2 |\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})| dV.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'équivalence des normes, on a :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})\|_{L^2}^2 &\leq C_3 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k})\|_{L^2}^2 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})\|_{L^2} \\ &\leq C_4 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k})\|_{L^1}^2 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})\|_{L^2} \\ &= C_4 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k})\|_{L^2}^2 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient :

$$\|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k+1})\|_{L^2} \leq C_4 \|\varepsilon(\mathbf{u}_H - \mathbf{u}_{H,k})\|_{L^2}^2, \quad (3.106)$$

pour tout $k > K_2$. Quitte à rehausser la constante C_4 , on peut montrer que (3.106) reste vrai pour tout entier k . L'équivalence des normes achève la démonstration. \square

Remarque 3.5.7. *Les théorèmes 3.5.1 et 3.5.2 sont donnés pour des espaces V_H et Q_H qui respectent la condition inf sup (3.32). Cependant, avec des modifications mineures, on peut montrer que ces théorèmes restent valables dans le cadre de la section 2.5.4. En d'autres termes, l'algorithme 2.5.1 converge avec un ordre 1 si $\gamma < 1$ et avec un ordre 2 si $\gamma = 1$.*

3.5.2 Tests numériques 2D

Dans cette partie, nous faisons un test bidimensionnel de l'algorithme 2.5.1 (de linéarisation) présenté dans la section 2.5.4. Le théorème 3.5.1 et la remarque 3.5.7 annoncent une convergence linéaire dépendante de la constante (3.90) lorsque $\gamma \in [0, 1)$ et quadratique si $\gamma = 1$. Chaque problème linéaire est résolu par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ stabilisée, décrite à la section 2.5.3. Nous considérons une coupe longitudinale du glacier de Gries (Valais, Suisse). Nous supposons que le glacier est fixé à la base en négligeant le glissement, i.e. $\Gamma_B^S = \emptyset$. Le bord du domaine Ω se subdivise donc en deux parties : le lit rocheux Γ_B^{NS} et la surface Γ_S . Les paramètres de viscosité sont : $m = 3$, $\sigma_0 = 0.1$ bar et $A = 0.08$ bar $^{-3}$ a $^{-1}$. Connaissant la forme de glacier de Gries en 1961 [66], on procède au calcul du champ de vitesse, voir la figure 3.3.



FIG. 3.3. *Champ de vitesse stationnaire du glacier de Gries. La géométrie est celle de l'année 1961.*

L'algorithme 2.5.1 de la section 2.5.4 est initialisé par $(\mathbf{u}_0, p_0) := (\mathbf{0}, 0)$. Trois valeurs de γ sont considérées : $\gamma = 0$ pour tester la méthode de point fixe, $\gamma = 0.5$ pour tester la méthode hybride et $\gamma = 1$ pour tester la méthode de Newton. Dans un premier temps, on s'assure que chaque algorithme converge en vérifiant que la discrèpence normalisée en norme $\|\cdot\|_{L^2}$ diminue avec le nombre d'itérations. On observe que l'algorithme converge pour tout γ avec une condition initiale éloignée de la solution. On vérifie ensuite qu'au bout de 50 itérations, les trois solutions diffèrent de moins que 10^{-8} . Une de ces solutions, notée $\bar{\mathbf{u}}_H$, est alors assimilée à une solution exacte.

3.5 Convergence de la méthode de linéarisation

Dans un deuxième temps, on apprécie l'erreur de convergence en affichant l'erreur normalisée E_k entre $\mathbf{u}_{H,k}$ et $\bar{\mathbf{u}}_H$ définie par :

$$E_k := \frac{\|\mathbf{u}_{H,k} - \bar{\mathbf{u}}_H\|_{L^2}}{\|\bar{\mathbf{u}}_H\|_{L^2}},$$

à chaque itération k et pour chaque méthode ($\gamma \in \{0, 0.5, 1\}$), voir la figure 3.4.

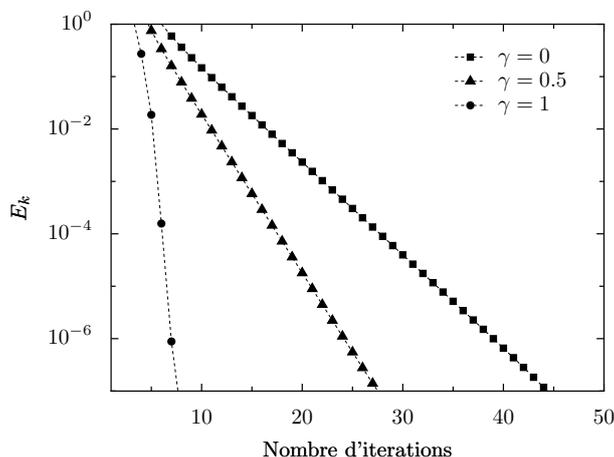


FIG. 3.4. Erreurs E_k en fonction du nombre d'itérations pour chacune des trois méthodes (Point fixe : $\gamma = 0$, Hybride : $\gamma = 0.5$, Newton : $\gamma = 1$). Le graphique est semi-logarithmique en ordonnée et linéaire en abscisse.

Conformément au théorème 3.5.1 et à la remarque 3.5.7, on observe que la méthode de Newton ($\gamma = 1$) est d'ordre 2 alors que la méthode de point fixe ($\gamma = 0$) est d'ordre 1. Par ailleurs, on observe que la méthode hybride ($\gamma = 0.5$) a une convergence surlinéaire. Ceci est cohérent avec le théorème 3.5.1 puisque la convergence dépend de (3.90). Nous concluons que la méthode de Newton est très performante pour le calcul d'un champ de vitesse stationnaire. Dans notre exemple, seulement 5 itérations suffisent contre 50 avec le point fixe pour obtenir une solution approchée de précision égale. Par ailleurs, on vérifie que l'ajout des termes supplémentaires relatifs à l'algorithme de Newton n'altère pas le temps de calcul pour l'inversion de la matrice (2.58) par une méthode directe. On vérifie également que la convergence de E_k n'est pas détériorée par un raffinement du maillage. En effet, en fixant le paramètre γ et en considérant plusieurs maillages de résolutions différentes, le nombre d'itérations pour que l'erreur E_k atteigne un seuil donné reste constant. Notons que ce fait avait déjà été relevé dans [28].

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs applications de la méthode numérique du chapitre 2. La première application est une validation du modèle numérique. On compare la forme stationnaire d'un glacier tridimensionnel simple avec une solution exacte des équations du "Shallow Ice Approximation", modèle du type "couche mince". La seconde application consiste à simuler le glacier du Rhône dans le passé (de 1874 à 2007) en utilisant un modèle de bilan de masse complexe qui prend en compte des données de températures et précipitations. Après une validation avec des données de terrain, plusieurs simulations sont réalisées sur la période 2007-2100 en prenant en compte différents scénarios climatiques. Ce travail a été publié dans [63]. On effectue ensuite des simulations comparables du glacier d'Aletsch. La dernière application concerne le glacier aujourd'hui quasi disparu de Vadret Muragl. La localisation et la datation des moraines ont permis la reconstruction de positions passées du glacier [59]. Le problème (inverse) investi consiste à chercher la paramétrisation du bilan de masse qui fasse que le glacier épouse les positions reconstruites. On en déduit ainsi la ligne d'équilibre du glacier lors de la formation des moraines. Ce travail a été publié dans [64].

4.1 Comparaison avec une solution exacte du "Shallow Ice Approximation"

Nous imaginons un glacier tridimensionnel idéalisé sur une base plate ($B = 0$). Nous supposons que ce glacier peut être décrit au moyen d'une fonction hauteur de glace H qui soit radiale. Son épaisseur maximale est notée H_{\max} et son rayon est noté L . Le rapport $\frac{H_{\max}}{L}$ étant petit, on peut faire une hypothèse de type "couche mince" et utiliser le modèle du "Shallow Ice Approximation" [57, 68], voir également le chapitre 6 à ce propos. La fonction hauteur de glace $H = H(r)$ doit alors satisfaire l'équation (voir [16]) :

$$-\frac{2(\rho|\mathbf{g}|)^m A}{m+2} \operatorname{div}(H^{m+2} |\nabla H|^{m-1} \nabla H) = b(r), \quad (4.1)$$

où la fonction bilan de masse b ne dépend que de la distance horizontale à l'origine $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Quand b est donné par :

$$b(r) = \frac{\alpha}{r} \left(\left(\frac{r}{L} \right)^{\frac{1}{m}} + \left(1 - \frac{r}{L} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^m + \frac{\alpha}{L} \left(\left(\frac{r}{L} \right)^{\frac{1}{m}} + \left(1 - \frac{r}{L} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^{m-1} \left(\left(\frac{r}{L} \right)^{\frac{1}{m}-1} - \left(1 - \frac{r}{L} \right)^{\frac{1}{m}-1} \right), \quad (4.2)$$

avec $\alpha > 0$, alors la solution de (4.1), avec pour condition de bord $H(L) = 0$, est donnée par [16] :

$$H(r) = H_{\max} \left(1 - \frac{m}{m-1} \left(\left(\frac{r}{L} \right)^{1+\frac{1}{m}} - \left(1 - \frac{r}{L} \right)^{1+\frac{1}{m}} + 1 - \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{r}{L} \right) \right)^{\frac{m}{2m+2}}, \quad (4.3)$$

où

$$H_{\max} = \left(\frac{m-1}{m+1} C L \alpha^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{m}{2m+2}} = H(0) \quad \text{et} \quad C = \left(\frac{2m+2}{m} \right) (m+2)^{\frac{1}{m}} (2|\mathbf{g}|^m A)^{-\frac{1}{m}}.$$

Puisque le rapport $\frac{H_{\max}}{L}$ est petit, le modèle (4.1) et sa solution (4.3) sont relativement réalistes, voir [68]. En se plaçant ainsi dans une configuration favorable au modèle simplifié, l'écart avec la solution du modèle original (non simplifié) est faible. On peut donc comparer la solution exacte (4.3) avec une solution numérique obtenue par la méthode numérique du chapitre 2. La fonction hauteur de glace H peut être associée à la fonction VOF φ en utilisant les relations (1.30) et (1.31). Dans l'expérience suivante, nous posons $L = 2000$ m et α de sorte que l'on obtienne $H_{\max} \simeq 190$ m. Dans la loi de Glen (1.4), on pose $m = 3$, $A = 0.08$ bar⁻³ a⁻¹ et $\sigma_0 = \sqrt{0.1}$ bar. Les maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h recouvrent la cavité Λ de taille 5000 m \times 5000 m \times 200 m contenant le domaine glace. Au temps initial, la cavité Λ ne contient pas de glace, $\Omega(0) = \emptyset$. On suppose que la glace est fixée à la base en posant $\Gamma_B^S = \emptyset$. En prenant un pas de temps d'une année ($\Delta t = 1$ a), on observe qu'une forme stationnaire est atteinte après 1000 ans. Celle-ci et la solution exacte (4.3) sont comparées à la figure 4.1. On observe une bonne corrélation entre les deux courbes ce qui valide la méthode numérique présentée au chapitre 2.

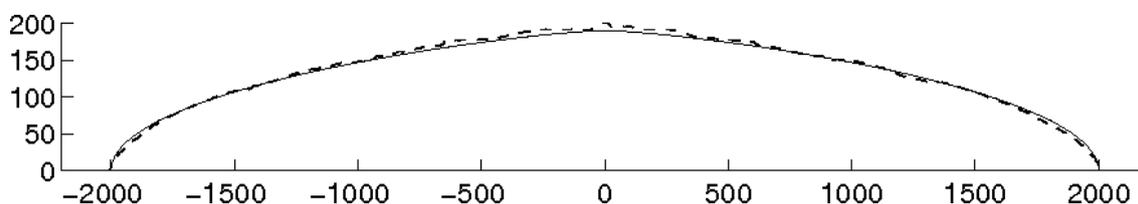


FIG. 4.1. Validation du modèle numérique. Coupe de la forme stationnaire en fonction de la distance radiale r . Ligne discontinue : forme calculée, ligne continue : solution de l'équation du "Shallow Ice Approximation" (4.3).

4.2 Glacier du Rhône

Le glacier du Rhône est situé dans le canton du Valais en Suisse. De par son accessibilité, ce glacier a été particulièrement observé et photographié ces 150 dernières années. Comme la plupart des glaciers alpins, il s'est retiré significativement dès la fin du petit âge glaciaire (aux alentours de 1850), voir la figure 4.2. Depuis 1880, sa langue a perdu 1.2 km de sa longueur [45]. L'objet de ce paragraphe consiste à reproduire le retrait du glacier du Rhône de 1874 – date des premières mesures – à 2007 par la simulation numérique. Ensuite plusieurs scénarios climatiques sont considérés pour prédire l'évolution du glacier de 2007 à 2100. Dans la première section, on décrit la génération des maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h .



FIG. 4.2. Langue du glacier du Rhône en 1856 (à gauche) et 2008 (à droite).

4.2.1 Génération des maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h

Pour chaque point (x_i, y_j) d'une grille horizontale couvrant le rectangle $(0, 4000 \text{ m}) \times (0, 10000 \text{ m})$, l'altitude du lit rocheux ainsi que l'altitude de la surface glaciaire sont fournies [34] ($i = 1, 80$, $j = 1, 200$). La taille de la résolution est de 50 mètres. Un maillage triangulaire de la base et de la surface augmentée de 150 mètres est généré. Par la suite, un maillage non structuré de type Delaunay fait de tétraèdres est généré entre les deux surfaces jointives en utilisant le mailleur TetMesh-GHS3D [41]. Le remaillieur MeshAdapt est utilisé afin de raffiner le maillage verticalement. Le maillage final \mathcal{T}_H contient alors des tétraèdres longs d'environ 10 mètres le long de l'axe vertical et longs de 50 mètres le long de l'axe horizontal. Il possède 240147 points au total, mais seulement 84161 appartiennent à la région de glace initiale Ω^0 , voir la figure 4.3. Le bloc $(0, 4000 \text{ m}) \times (0, 10000 \text{ m}) \times (1700 \text{ m}, 3600 \text{ m})$ contient la cavité $\tilde{\Lambda}$ et est coupé en $400 \times 1000 \times 200$ cellules cubiques pour former \mathcal{T}_h . Les cellules qui n'appartiennent pas à $\tilde{\Lambda}$, ne sont pas considérées dans le calcul. Comme dans [76], une structure hiérarchique du type fenêtre-bloc-cellule est mise en oeuvre pour activer ou désactiver certaines cellules dans le but de réduire les besoins en mémoire. Tous les calculs sont réalisés sur un AMD Opteron 242 CPU avec moins de 8Gb de mémoire. Environ 10 et 3 jours sont nécessaires pour accomplir, respectivement, les simulations sur les périodes 1874-2007 et 2007-2100.

4.2.2 Simulation de 1874 à 2007

Dans cette section, nous détaillons comment reconstituer le glacier du Rhône entre 1874 et 2007. Les bilans de masse (fonction b) sont calculés au moyen de modèles journaliers de précipitations et de fonte. Les précipitations sont extrapolées de données en prenant en compte l'altitude et la redistribution liée à l'érosion. La fonte est essentiellement calculée en fonction de la température et du rayonnement solaire. Les paramètres intervenant dans le modèle sont calibrés selon une série de données entre 1874 et 2007 [55]. Le modèle de bilan de masse est détaillé en annexe. Deux distributions du bilan de masse extrêmes en terme d'accumulation et d'ablation sont dessinées à la figure 4.4.

La calibration des paramètres de viscosité et de glissement est maintenant discutée. L'exposant de Glen est fixé à $m = 3$, qui est la valeur standard utilisée en glaciologie, voir [50]. Les paramètres de régularisations sont fixés à $\sigma_0 = \sqrt{0.1}$ bar et $s_0 = 0.01 \text{ m a}^{-1}$. On vérifie que ces deux paramètres n'ont qu'une influence mineure sur les vitesses calculées. Le pas de temps utilisé

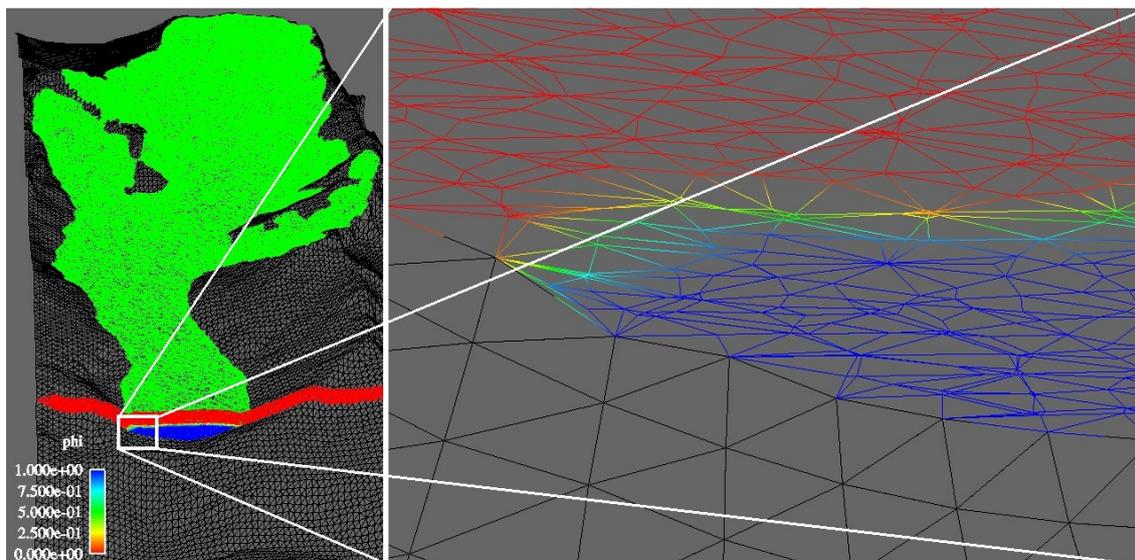


FIG. 4.3. Coupe du maillage \mathcal{T}_H du glacier du Rhône. Gauche : vue générale. Droite : Zoom sur le rectangle blanc. La partie bleue indique le domaine de glace ($VOF > 0.5$) alors que la partie rouge indique le domaine d'air ($VOF < 0.5$). L'interface air-glace est matérialisée par la couleur verte ($VOF = 0.5$). La taille du maillage le long du lit rocheux est d'environ 50 mètres alors que la taille est de l'ordre de 10 mètres le long de la verticale.

est une demi-année ($\Delta t = 0.5$ a). La loi de glissement (1.18) est sujette à de plus grandes incertitudes que le modèle de viscosité (1.7). Par conséquent, nous faisons une première simulation sans condition de glissement sur le lit rocheux, i.e. $\Gamma_B^S = \emptyset$, avec $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$, voir [50]. Le retrait du glacier de 1874 à 1900 est trop rapide au vu des observations, voir les figures 4.6 et 4.7. Plusieurs raisons expliquent une telle différence : i) les conditions de glissements ne sont pas prises en compte ii) le facteur d'Arrhenius A n'est pas adapté iii) la localisation du lit rocheux est trop imprécise. Dans le but d'accélérer le partie terminale du glacier et de réduire l'écart avec les mesures, nous introduisons une partie glissante Γ_B^S . Les paramètres physiques A et C qui interviennent respectivement dans les équations (1.7) et (1.18) sont ajustés à des mesures de vitesses.

Tout d'abord, une zone de glissement Γ_B^S doit être définie. La vitesse en surface a été mesurée sur la période 1875-1885 par l'observation de l'évolution de pierres colorées [77]. Les vitesses correspondantes sont compilées par [78] et représentées à la figure 4.5 b. Les vitesses de la langue glaciaire lors de la période 1875 – 1885 sont remarquablement élevées et ne peuvent être expliquées que par la viscosité de la glace. Bien que le lit rocheux soit très pentu, le glacier est trop mince (environ 100 mètres) pour permettre des vitesses de 200 m a^{-1} . Le glissement est donc prépondérant à cet endroit.

La géométrie de surface l'année 1874 est connue de cartes topographiques. Nous supposons que les vitesses mesurées [77, 78] correspondent à cette date. Selon une évidence mécanique, le glissement a lieu où les vitesses mesurées en surface sont importantes, où la pente est raide, et où le glacier est mince, voir [80]. Le bout du glacier en 1874 combine toutes ces caractéristiques, en particulier la partie la plus pentue localisée entre les abscisses 1000 et 2000, voir figure 4.5 b. De plus, la simulation préliminaire, sans glissement, montre que les vitesses de surface dans la région au sud de l'axe $y = 4000$ sont surestimées alors qu'elles sont significativement sous-estimées au

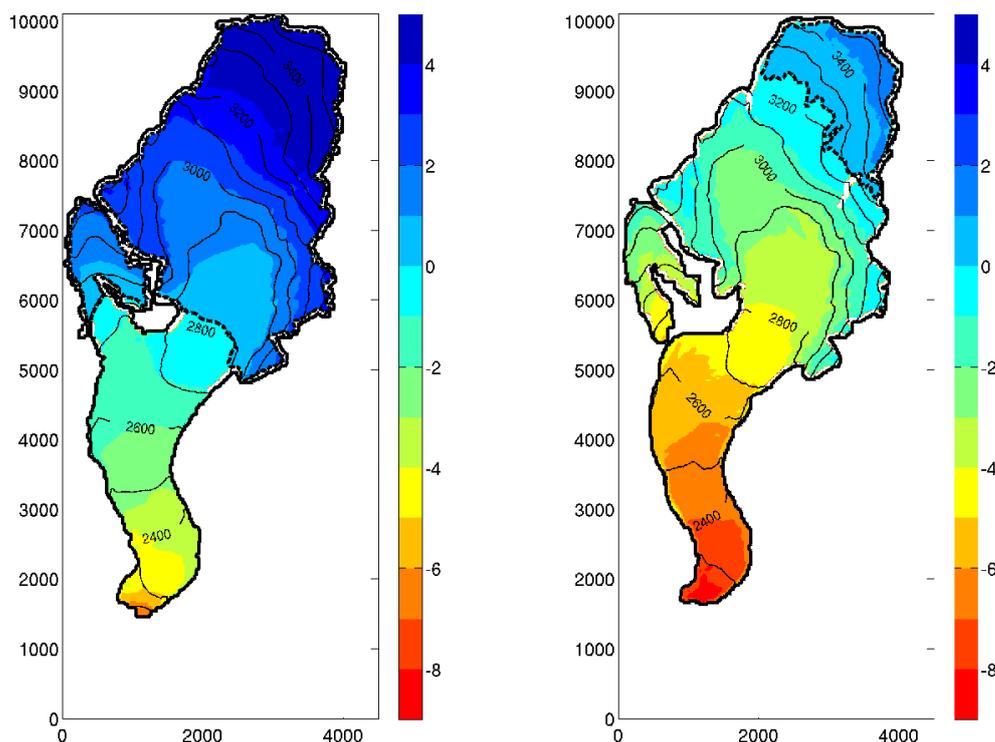


FIG. 4.4. Distribution du bilan de masse annuel sur le glacier du Rhône en 1977 à gauche (gain global de masse) et en 2003 à droite (perte globale de masse). Les lignes de niveau de la surface glaciaire sont dessinées tous les 100 mètres. L'unité de mesure est donnée en mètre d'eau (mètre de glace divisé par la densité). Les résultats sont présentés en utilisant un système de coordonnées locales. L'abscisse du coin bas gauche est 671250 alors que l'ordonnée est 157400 dans le référentiel Suisse.

nord, voir figure 4.5 c. Par conséquent, on fixe la zone de glissement :

$$\Gamma_B^S = \{(x, y, z) \in \Gamma_B \ ; \ y \leq 4000\}. \quad (4.4)$$

Plusieurs couples (A, C) sont testés et $(A, C) = (0.1, 0.3)$ donne la meilleure corrélation avec les mesures disponibles de [45] entre 1880 et 2007. Cette combinaison est donc utilisée pour simuler l'évolution du glacier du Rhône de 1874 à 2007. La position du bout du glacier à travers le temps est comparée en utilisant le modèle sans glissement et le modèle avec glissement, voir les figures 4.6 et 4.7. Bien que le glacier simulé épouse assez bien les positions mesurées la plupart du temps, il y a un écart entre 1910 et 1945. L'extension de la langue du glacier simulé est comparée visuellement à des photographies prises en 1874, 1900, 1932, 1960 et 1985, voir la figure 5.6.

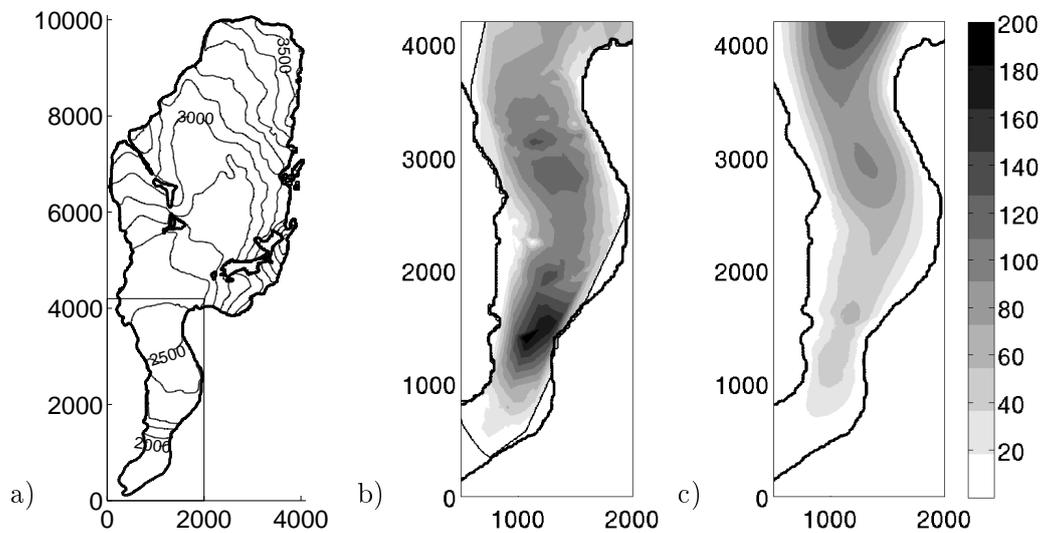


FIG. 4.5. (a) Contours et lignes de niveau de la topographie de surface du glacier du Rhône sur le plan horizontal en 1874. Les altitudes, matérialisées par les lignes transversales, sont espacées de 100 mètres. Le rectangle de la figure (a) correspond aux surfaces considérées aux figures (b) et (c). (b) Vitesses mesurées en surface lors de la période 1875 – 1885 [78]. (c) Vitesse calculée à la surface en 1874 sans condition de glissement et avec le paramètre $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$. La nuance de gris indique la vitesse de surface en m a^{-1} .

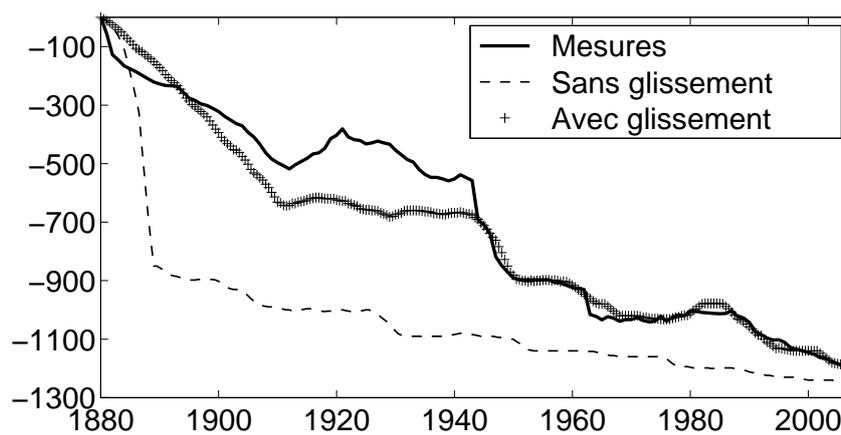


FIG. 4.6. Comparaison entre retrait de la langue glaciaire mesuré et retrait simulé entre 1880 et 2007. Les deux simulations (avec et sans glissement) sont présentées.

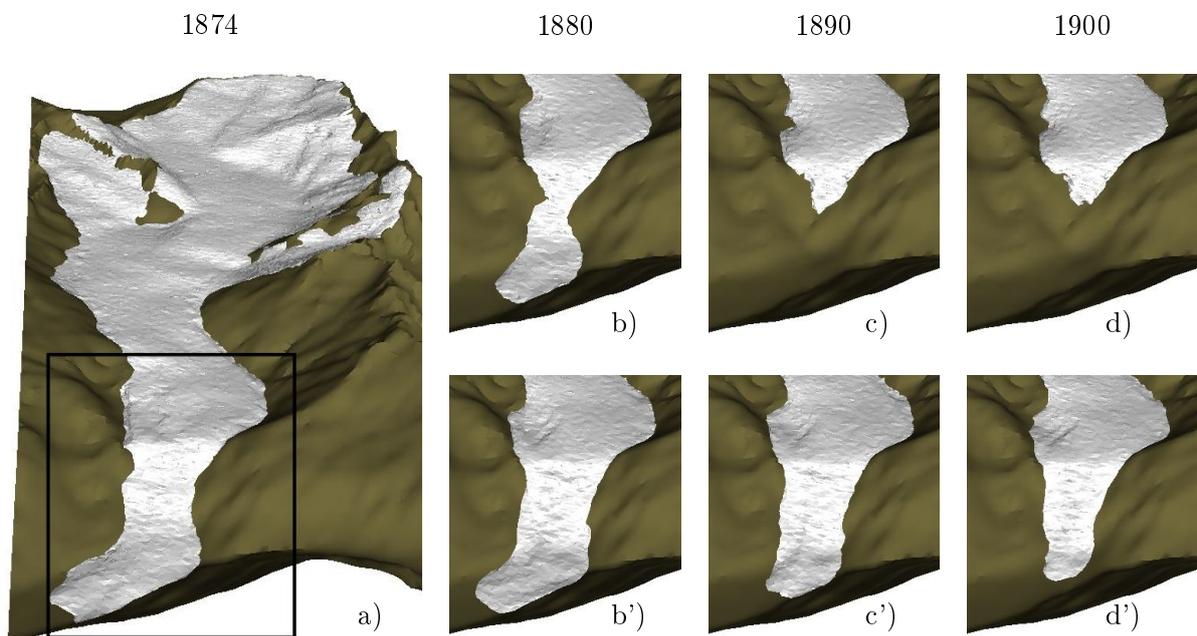


FIG. 4.7. Simulation du glacier du Rhône sur la période 1874-1900. A gauche (a) : glacier initial en 1874 ; à droite : évolution de 1880 à 1900. En haut (b, c, d) : sans condition de glissement sur Γ_B et $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$; en bas (b', c', d') : glissement sur Γ_B^S et $A = 0.10 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$.

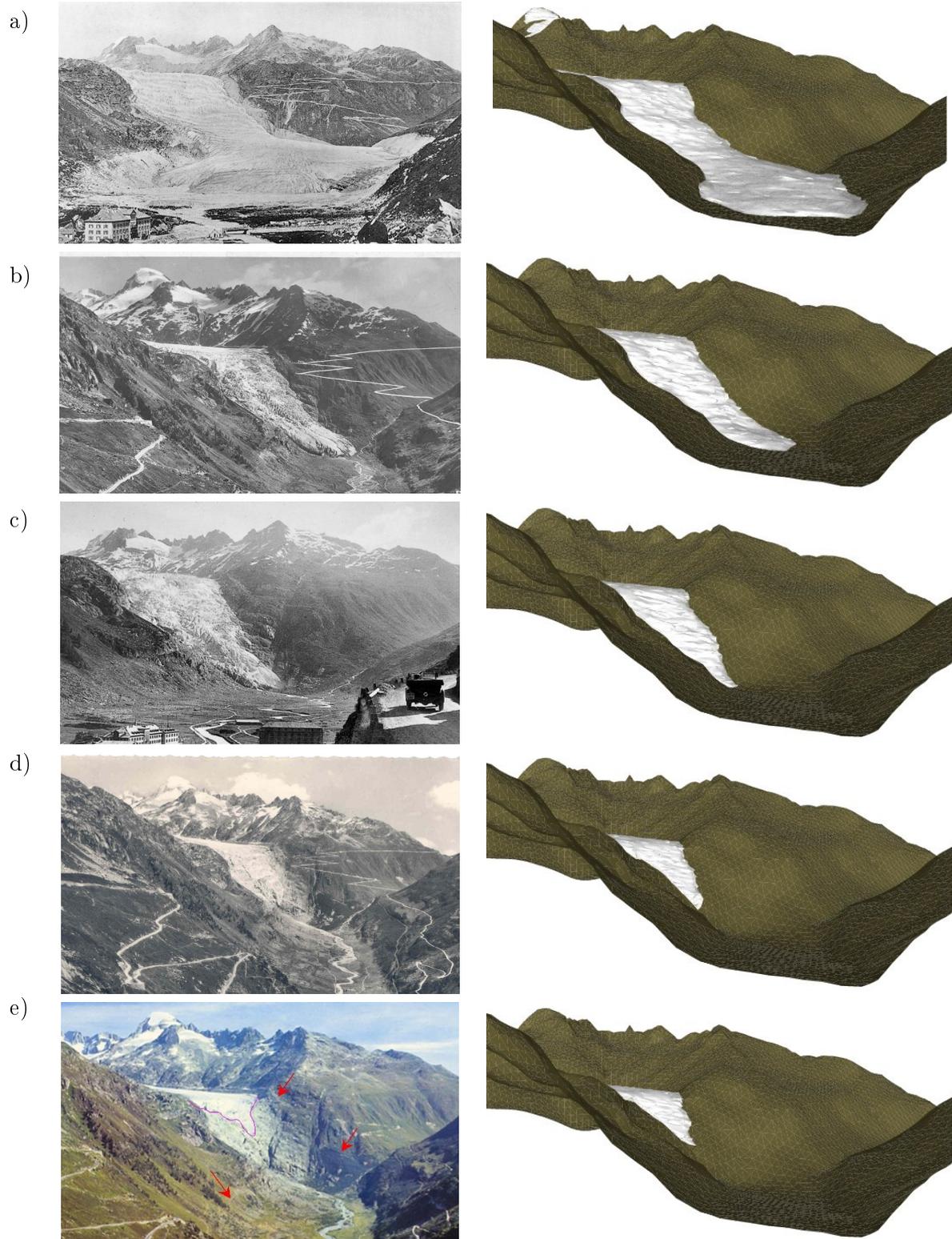


FIG. 4.8. Photographie du glacier du Rhône à gauche et simulation à droite en (a) 1874, (b) 1900, (c) 1932, (d) 1960 et (e) 1985.

4.2.3 Simulation de 2007 à 2100

Nous nous intéressons à la simulation du glacier du Rhône dans le futur. Afin de calibrer les paramètres physiques, nous utilisons des mesures de vitesses établies à partir de photographies aériennes en 2006 [78], voir figure 4.9. Le glacier du Rhône est globalement plus lent en 2006 qu'en 1874. Contrairement à l'année 1874, la prise en compte du glissement n'apporte aucune amélioration et les vitesses calculées l'année 2007 sans glissement épousent relativement bien les vitesses mesurées. Le facteur d'Arrhenius qui donne les meilleurs agréments est $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$. Par conséquent, nous retenons cette valeur et $\Gamma_B^S = \emptyset$ (pas de glissement) pour faire la simulation du glacier du Rhône jusqu'à 2100. Notons que le pas de temps utilisé est toujours d'une demi-année ($\Delta t = 0.5 \text{ a}$).

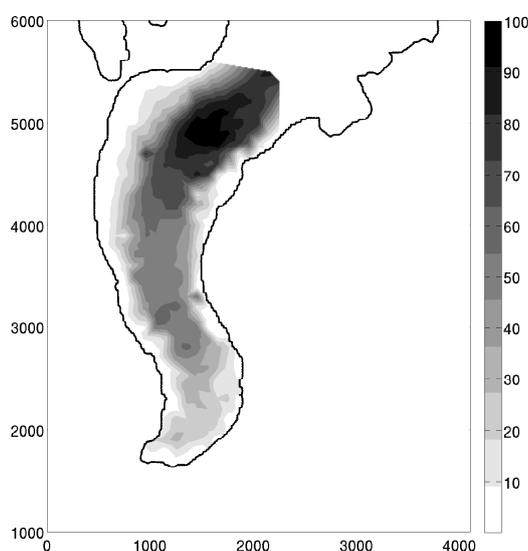


FIG. 4.9. Vitesses mesurées en surface en 2006 [78]. Le résultat est donné dans le même système local de coordonnées qu'à la figure 4.4.

Trois séries de simulations sont réalisées. Dans un premier temps, nous utilisons des bilans de masse calculés selon trois scénarios climatiques différents en terme de températures et de précipitations : un scénario médian (S2) et deux scénarios extrêmes (S1 et S3). Afin de préciser l'influence de la température et des précipitations, nous réalisons deux autres séries de simulations. Nous testons la sensibilité du glacier à une augmentation de la température, en considérant plusieurs scénarios de réchauffement et en laissant constantes les précipitations (T0, T1, T2, T3, T4 et T5). Ensuite, nous testons la sensibilité du glacier à une variation des précipitations en considérant plusieurs tendances et en laissant invariantes les températures (P1, P2 et P3).

Simulation selon un scénario médian et deux scénarios extrêmes.

Nous considérons des séries journalières de précipitations et de températures ajustées selon les tendances climatiques saisonnières relatives au versant nord des Alpes et publiées dans [40]. Trois scénarios y sont considérés. Le premier ("froid et humide", S1) est basé sur le quartile 2.5 % de changement de température et 97.5 % de changements dans les précipitations. Il s'agit du scénario "optimiste" dans le sens où il est le plus favorable à la survie des glaciers. Le scénario

2 (S2) réfère à un changement médian en terme de température (+3.8°) et de précipitations (-6%). Le scénario 3 ("chaud et sec", S3) est basé sur un quartile de 97.5 % de changement dans les températures et 2.5 % de changements dans les précipitations, voir la figure 4.10. Il s'agit du scénario "pessimiste" dans le sens où il est le plus défavorable à la survie des glaciers. La prise en compte de ces tendances dans le calcul du bilan de masse est détaillée en annexe. Le résultat des trois simulations est visible à la figure 4.11 et les volumes glaciaires au cours des années sont dessinés à la figure 4.14 a.

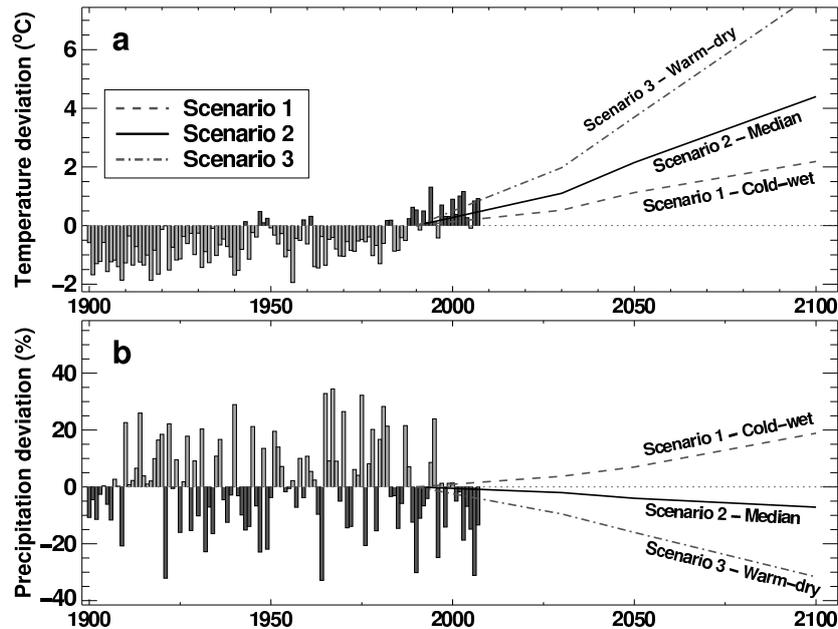


FIG. 4.10. Variation de la température moyenne annuelle (a) et des précipitations (b) par rapport à l'année 1990 sur le versant nord des Alpes. Les mesures réalisées lors du 20ième siècle sont matérialisées par les barres. Les trois scénarios sont dessinés jusqu'à 2100.

Selon le scénario 2, qui est le plus probable, un retrait significatif est attendu dans la deuxième partie du 21ième siècle, ne laissant en 2100 qu'une petite masse de glace au-dessus de 3000 mètres, voir la figure 4.11. La simulation basée sur le scénario 3 montre une complète disparition du glacier vers 2075. De façon contrastée, le scénario 1 ne causerait que des changements mineurs dans l'extension du glacier à la fin du 21ième siècle (en 2100, la diminution du volume est de 34 %). Bien que la marge d'erreur soit large (S1 et S3), ces résultats prédisent au glacier du Rhône une espérance de vie de l'ordre de 100 ans.

Simulations selon plusieurs tendances de températures

Dans cette partie, nous nous intéressons aux conséquences d'une augmentation des températures sur le glacier. Pour cela, nous considérons une série de précipitations journalières neutre (sans changement climatique significatif) et des séries de températures ajustées à six augmentations différentes. On appelle les scénarios T0, T1, T2, T3, T4 et T5, respectivement les cas prenant en compte une augmentation de température de 0, 1, 2, 3, 4 et 5° en 2090 par rapport à l'année 1990. Les résultats des simulations en 2100 sont visibles à la figure 4.12 et les volumes glaciaires au cours des années sont dessinés à la figure 4.14 b. Les résultats montrent une forte influence de l'augmentation de température sur le volume glaciaire attendu en 2100. Ainsi, un

degré de température supplémentaire se traduit par une perte de masse d'environ 20 % supplémentaire en 2100. Dès le seuil de 3°, le glacier du Rhône aurait presque disparu dès 2100 (il n'aurait plus que 20 % de son volume actuel).

Simulations selon plusieurs tendances de précipitations

Dans cette partie, nous nous intéressons aux conséquences de variations des précipitations sur le glacier. On considère une série neutre de températures journalières et des séries des précipitations ajustées selon les tendances des scénarios S1, S3 et S3. On appelle, respectivement les scénarios P1, P2 et P3 correspondants aux scénarios S1, S2 et S3 en terme de précipitations. Les résultats des simulations en 2100 sont visibles à la figure 4.13 et les volumes glaciaires au cours des années sont dessinés à la figure 4.14 c. En 2100, l'amplitude du volume de glace entre chacun des scénarios extrêmes (P1 et P3) et le scénario médian (P2) est d'environ 25 % le volume actuel. On observe ainsi que malgré une augmentation ou diminution importante des précipitations (de l'ordre de 20 %), l'impact est relativement faible sur les volumes glaciaires.

Conclusions

Selon les tendances climatiques publiées dans [40], les résultats précédemment exposés prédisent la disparition complète du glacier du Rhône sur une période de l'ordre de 100 ans. Les scénarios "pessimistes" (S3) et "optimistes" (S1) confirment cette tendance, et anticipent un retrait, respectivement, plus ou moins rapide. Les simulations qui suivent montrent que l'augmentation de température est le facteur prépondérant quant à l'évolution du volume du glacier.

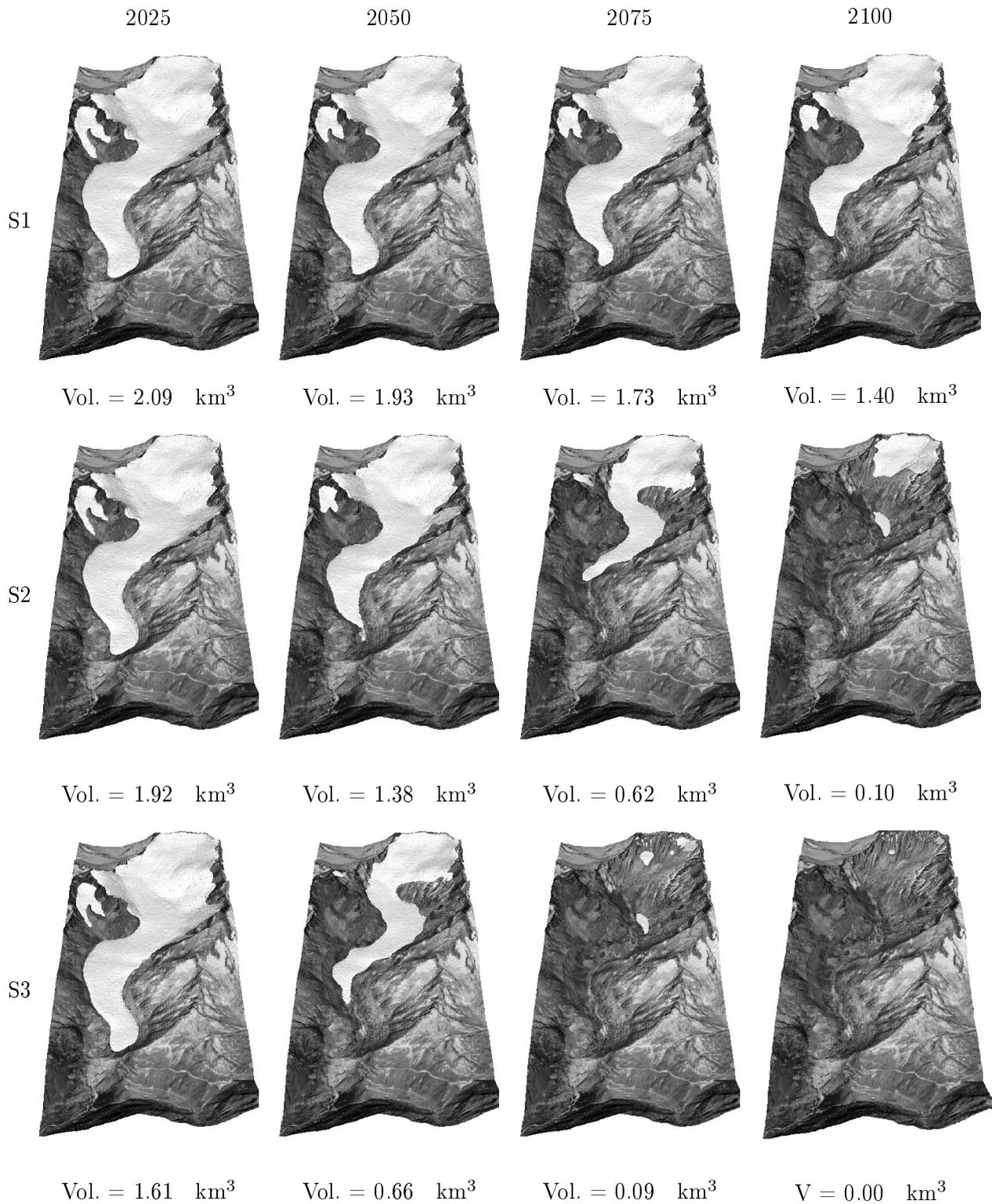


FIG. 4.11. Simulation sur la période 2007-2100 (de gauche à droite). De haut en bas : Scénarios 1,2 et 3. De gauche à droite : Années 2025, 2050, 2075 et 2100. Le volume de glace est inscrit au bas de chaque figure.

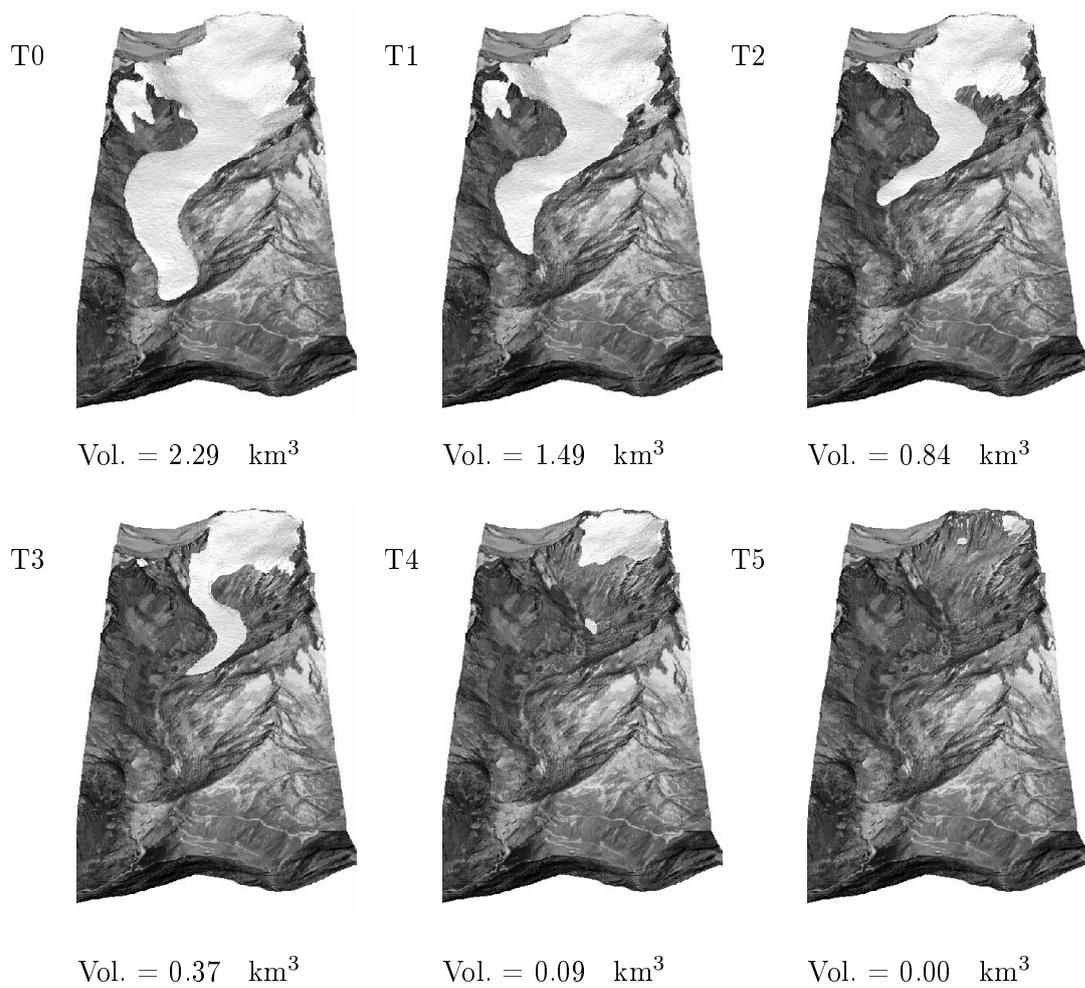


FIG. 4.12. Simulation du glacier du Rhône en 2100. De gauche à droite et de haut en bas : selon les scénarios T0, T1, T2, T3, T4, T5. Le volume de glace est inscrit au bas de chaque figure.

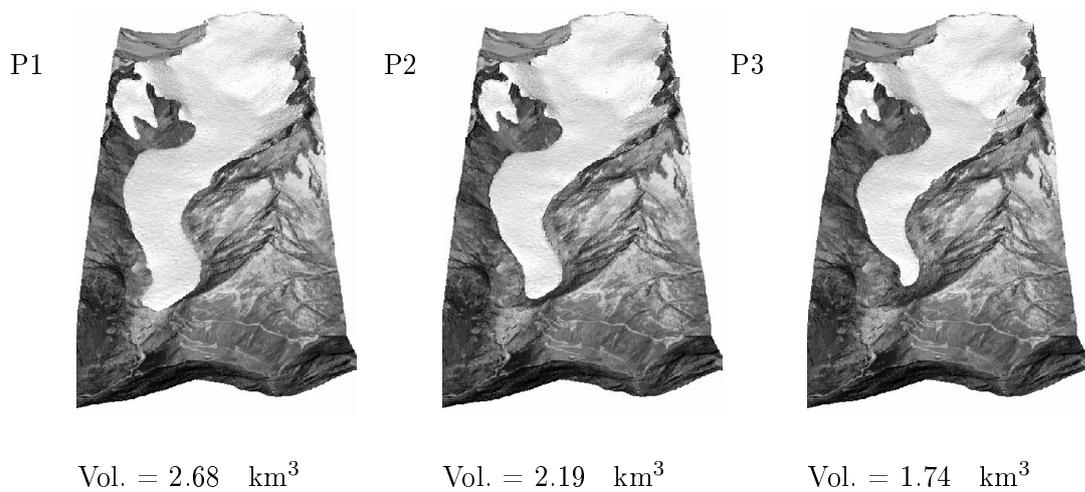


FIG. 4.13. Simulation du glacier du Rhône en 2100. De gauche à droite : selon les scénarios P1, P2 et P3. Le volume de glace est inscrit au bas de chaque figure.

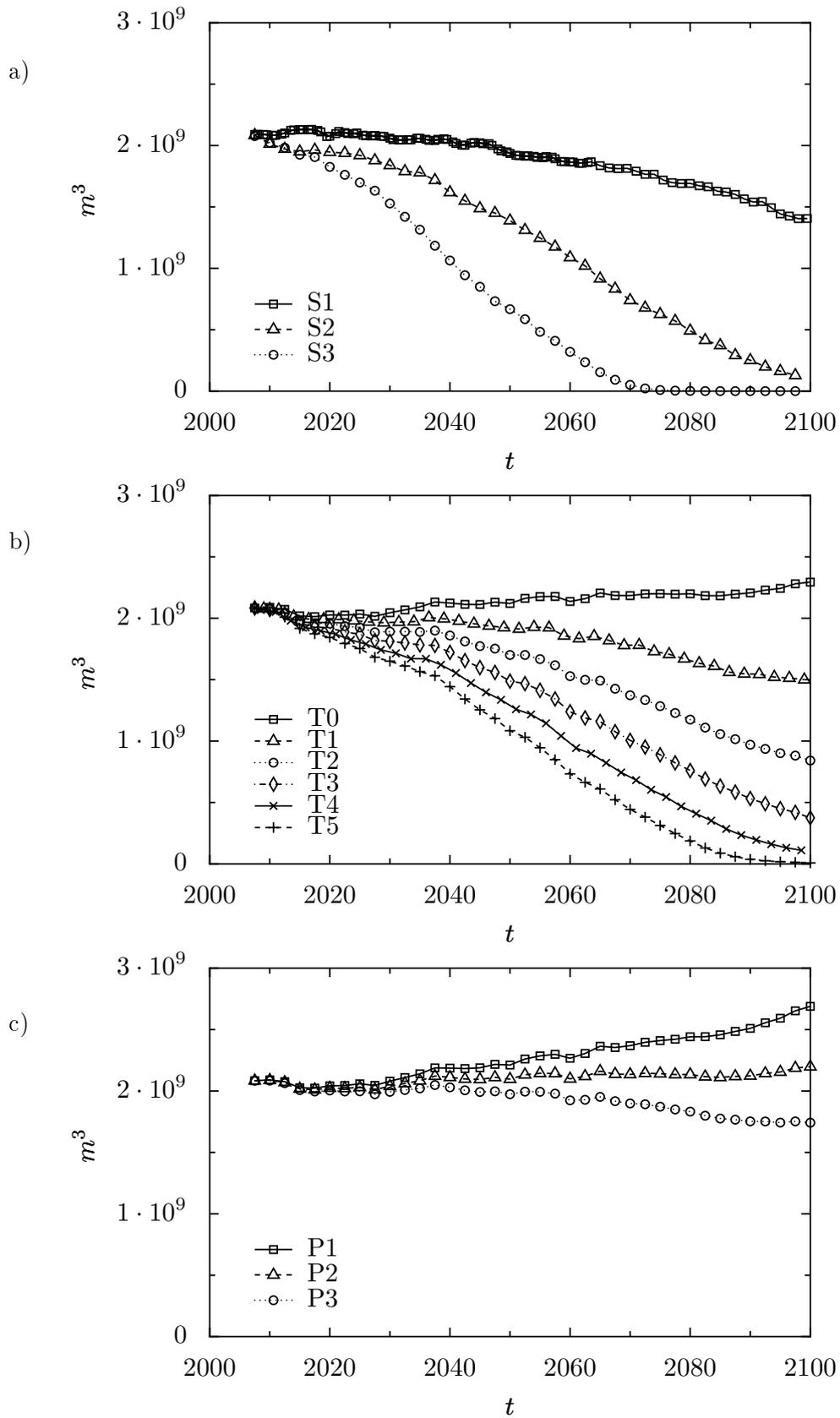


FIG. 4.14. Volume du glacier du Rhône sur la période 2007-2100. De haut en bas : a) scénarios S1, S2 et S3 b) scénarios T0, T1, T2, T3, T4 et T5 c) scénarios P1, P2 et P3.

4.3 Glacier d'Aletsch

Le glacier d'Aletsch (Valais, Suisse) est le plus grand glacier des Alpes, voir la figure 4.15. Sa longueur avoisine 23 kilomètres pour une superficie supérieure à 100 km². Sa taille exceptionnelle l'a rendu particulièrement célèbre. Le glacier d'Aletsch est essentiellement composé de trois bassins d'accumulation que sont le "Grosser Aletschfirn", le "Jungfraufirn" et le "Ewigschneefeld". Ces trois branches se rejoignent à la "Konkordiaplatz" où la glace atteint une épaisseur de 900 mètres [33], voir la figure 4.16 de gauche. En aval de Konkordiaplatz, la partie médiane avance à une vitesse de l'ordre de 200 mètres par an. La partie inférieure du glacier arrive à une altitude d'environ 1500 mètres. Les moraines caractéristiques du glacier d'Aletsch, deux bandes parallèles, se trouvent de part et d'autre du milieu du glacier, voir la figure 4.15. Elles suivent le parcours de la glace depuis Konkordiaplatz jusqu'à la fin de la langue glaciaire. Comme de nombreux glaciers alpins, le glacier d'Aletsch s'est retiré depuis la fin du 19ième siècle. Sa langue a ainsi perdu 2.8 km de sa longueur depuis 1880, voir [45]. Dans les années à venir, le retrait de ce glacier devrait s'accélérer. L'objet de ce paragraphe consiste à simuler le glacier d'Aletsch de 1880 - date des premières mesures - à 2000. Ensuite plusieurs scénarios climatiques sont considérés pour prédire l'évolution du glacier de 1999 à 2100.



FIG. 4.15. *Le glacier d'Aletsch en 2009.*

La génération des maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h est similaire à la procédure décrite à la section 4.2. La calibration des paramètres de viscosité et de glissement est maintenant discutée. L'exposant de Glen est fixé à $m = 3$, voir [50]. Les paramètres de régularisation sont fixés à $\sigma_0 = \sqrt{0.1}$ bar et $s_0 = 0.01$ m a⁻¹. En cinq points du glacier, appelés respectivement P1, P2, P3, P4 et P5 (situés sur la partie médiane et la partie basse), nous disposons [45] de mesures de vitesses obtenues par l'observation de pieux plantés dans les années 1980. Nous disposons également d'une part de la reconstruction du lit rocheux établie par des données radar et d'autre part de la hauteur de glace les années 1880, 1929, 1957, 1980 et 1999, voir [33]. A partir de la géométrie de l'année 1980, nous réalisons plusieurs calculs stationnaires de champs de vitesses. Si nous supposons que la glace est fixée au lit rocheux partout, i.e. $\Gamma_B^S = \emptyset$, l'écart-type optimal entre les vitesses calculées et les vitesses mesurées est obtenu avec $A = 0.16$ bar⁻³ a⁻¹ qui n'est pas une valeur physique. De plus, cet écart-type reste trop important (~ 14). Pour cette raison, nous déterminons une zone de glissement (comme à la section 4.2.2 pour le glacier du Rhône) et trouvons le couple (A, C) qui minimise l'écart type entre les vitesses calculées et les vitesses mesurées. On fixe la zone de

glissement :

$$\Gamma_B^S = \{(x, y, z) \in \Gamma_B \ ; \ z \leq 2400\}. \quad (4.5)$$

La zone autorisée à glisser Γ_B^S s'étend de Konkordiaplatz jusqu'à la fin de la langue glaciaire, voir figure 4.16 de gauche. De cette façon, la zone d'ablation, plus propice que la zone d'accumulation à l'infiltration de l'eau de fonte contient Γ_B^S et il est connu [99, 42, 103] que l'eau infiltrée entre le lit rocheux et le glacier agit comme un lubrifiant qui favorise le glissement. A nouveau, nous réalisons plusieurs calculs stationnaires de champs de vitesses avec plusieurs couples (A, C) . La combinaison $(A, C) = (0.1, 0.3)$ minimise l'écart-type (~ 9). Notons qu'ils s'agit des mêmes valeurs que celle utilisées pour la simulation du glacier du Rhône entre 1874 et 2007. Nous retiendrons donc ces valeurs pour les simulations du glacier d'Aletsch qui sont présentées dans la suite. La figure 4.16 désigne le champ de vitesse basal (à gauche) et en surface (à droite) calculé avec les valeurs optimales $(A, C) = (0.1, 0.3)$ ainsi que les cinq points de mesures.

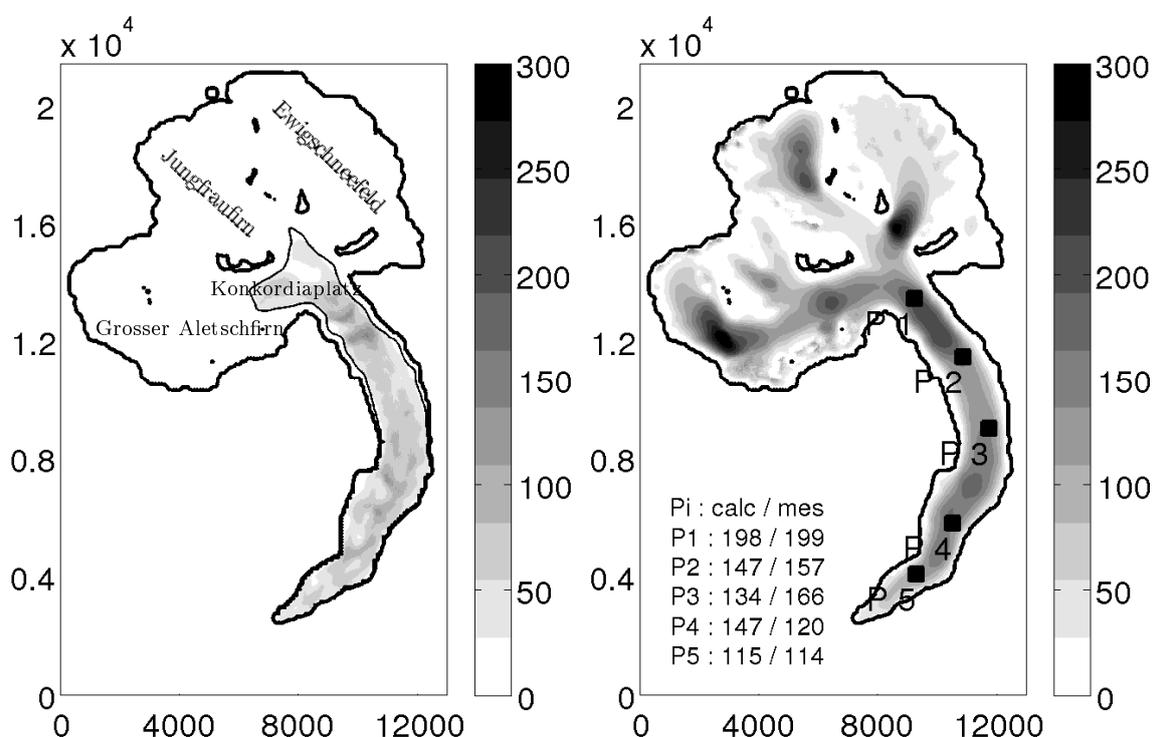


FIG. 4.16. Champ de vitesse basal (à gauche) et en surface (à droite) calculé avec la combinaison optimale $(A, C) = (0.1, 0.3)$. Sur la figure de droite, les cinq points de mesures sont matérialisés par les carrés noirs. En chacun de ces points, la vitesse de surface mesurée et la vitesse de surface calculée sont affichées. Les résultats sont présentés en utilisant un système de coordonnées locales. L'abscisse du coin bas gauche est 637475 alors que l'ordonnée est 135875 dans le référentiel Suisse.

La connaissance de la hauteur de glace en 1880 nous permet d'initialiser le glacier d'Aletsch et de le simuler jusqu'en 2000. Le pas de temps est d'une demi-année ($\Delta t = 0.5$ a). Tout comme dans la section 4.2.2, les bilans de masse sont calculés au moyen d'un modèle complexe, détaillé en annexe. Comme pour le glacier du Rhône, les paramètres intervenant dans ce modèle font l'objet d'une calibration. Le retrait du glacier résultant de la simulation numérique entre 1880 et 2000 est comparé aux mesures. Les années 1929, 1957, 1980 et 1999, la surface simulée est confrontée à la surface mesurée le long d'une ligne de flux partant du haut de Jungfraufirn, traversant Konkordiaplatz et toute la langue glaciaire, voir la figure 4.18. On compare également

le retrait de la langue en confrontant les contours du glacier mesuré et du glacier simulé, voir la figure 4.19. Une comparaison du volume glaciaire est effectuée, voir la figure 4.17. Que ce soit en terme de surface de glacier, de contours de langue ou de volume, les résultats montrent une bonne corrélation entre mesures et simulations. Des images de la simulation, les années 1880 (état initial), 1920, 1960 et 2000 sont présentées à la figure 4.20.

La simulation du glacier d'Aletsch ayant pu être accomplie et validée, nous nous intéressons maintenant à la simulation ce glacier sur la période 1999 - 2100. La zone de glissement Γ_B^S , les paramètres de viscosité et de glissement A , C , m et σ_0 , et les paramètres du bilan de masse, précédemment calibrés, restent les mêmes. Pour le calcul des bilans de masse (via le modèle complexe détaillé en annexe), nous considérons des séries de précipitations et de températures journalières similaires à celles utilisées dans la section 4.2.3 pour le glacier du Rhône et ajustées aux tendances climatiques saisonnières publiées dans [40]. Ainsi, nous reconsidérons les trois scénarios : S1) "froid et humide" S2) "médian" S3) "chaud et sec", définis dans la section 4.2.3. La connaissance de la hauteur de glace en 1999 nous permet d'initialiser le glacier d'Aletsch et de le simuler jusqu'en 2100. Le résultat en image des trois scénarios est donné à la figure 4.22 et les volumes glaciaires sont dessinés à la figure 4.21.

Selon le plus probable des scénarios (S2), un retrait significatif est attendu dans la deuxième partie du 21ème siècle, voir la figure 4.11. Selon ce scénario, la masse du glacier d'Aletsch devrait diminuer de plus de 90 % en 2100. La simulation basée sur le scénario 3 (le plus pessimiste) montre une disparition complète du glacier vers 2085. Selon le scénario 1 (le plus optimiste), le glacier d'Aletsch persisterait en 2100 avec environ 37 % de sa masse actuelle. Le résultat de ces simulations est très comparable aux résultats exposés précédemment à propos du glacier du Rhône. La tendance à la disparition des glaciers Alpains est une nouvelle fois confirmée. Malgré sa réserve de glace considérable, le glacier d'Aletsch ne semble pas épargné (dans un futur proche) du réchauffement attendu au cours du 21ème siècle.

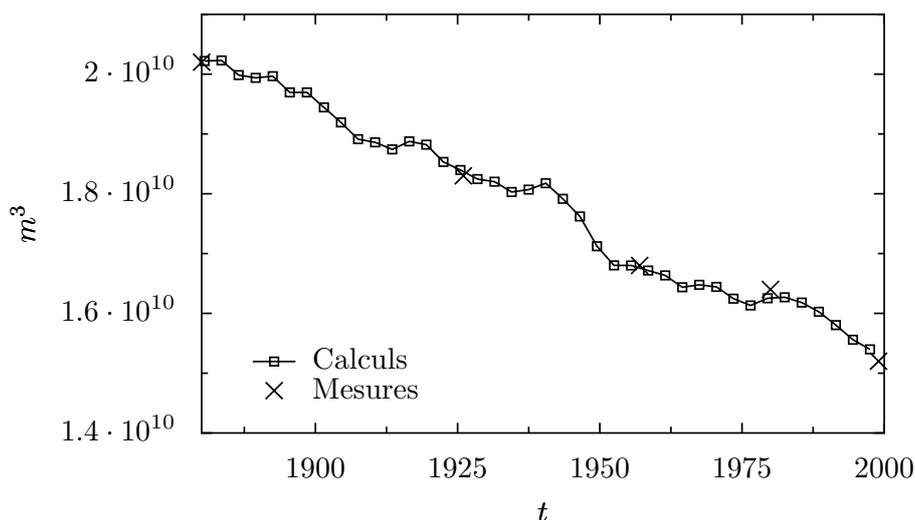


FIG. 4.17. Volume du glacier d'Aletsch simulé sur la période 1880-2000. Comparaison avec des mesures les années 1926, 1957, 1980 et 1999.

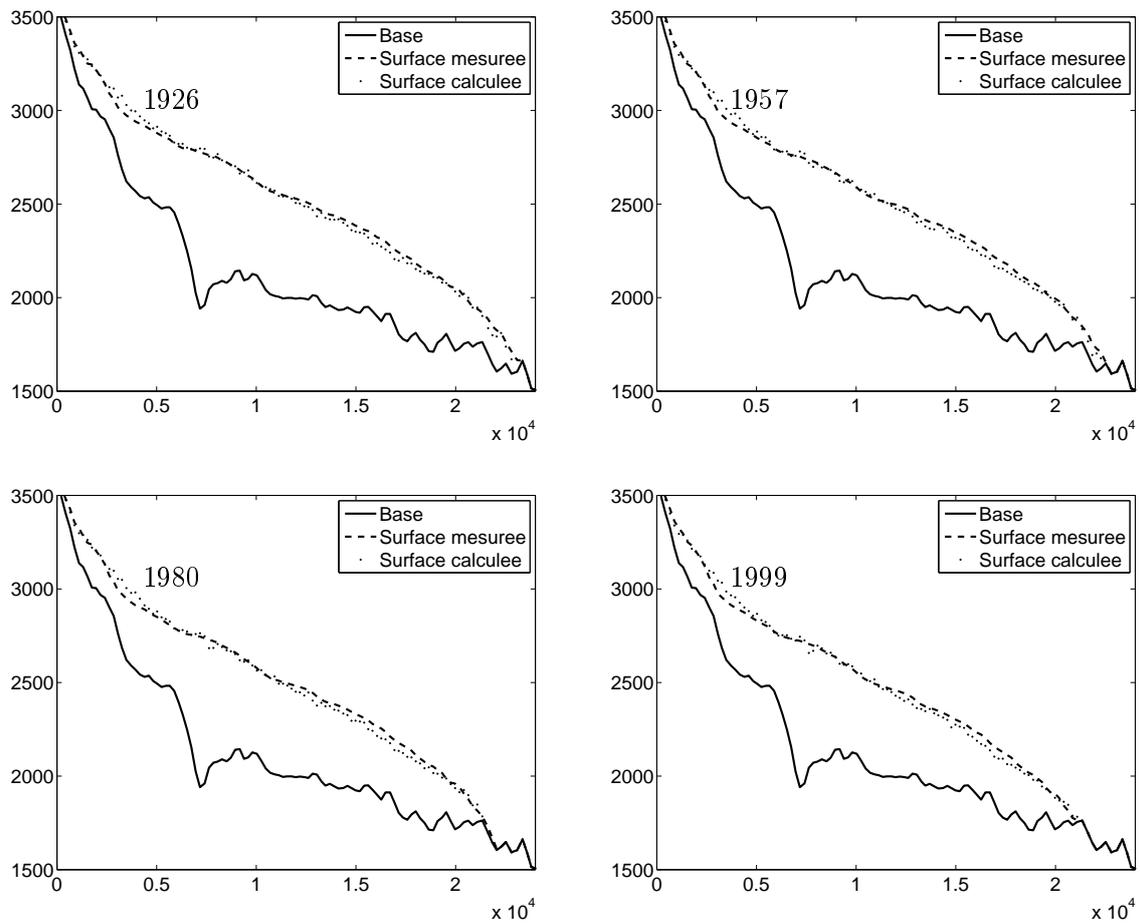


FIG. 4.18. Comparaison entre retrait de la langue glaciaire mesuré et retrait simulé les années 1926, 1957, 1980 et 1999. Surface du glacier le long d'une ligne de flux traversant le glacier d'Aletsch dans sa plus grande longueur.

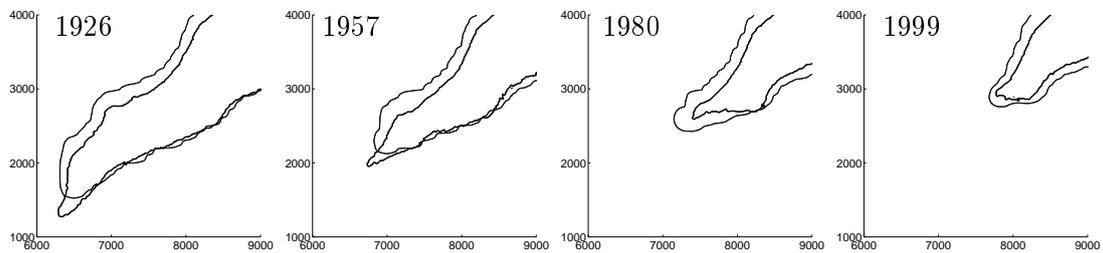


FIG. 4.19. Comparaison entre retrait du glacier mesuré et retrait du glacier simulé les années 1926, 1957, 1980 et 1999. Contours de la langue glaciaire. En trait fin : contours du glacier mesuré. En trait épais : contours du glacier simulé.

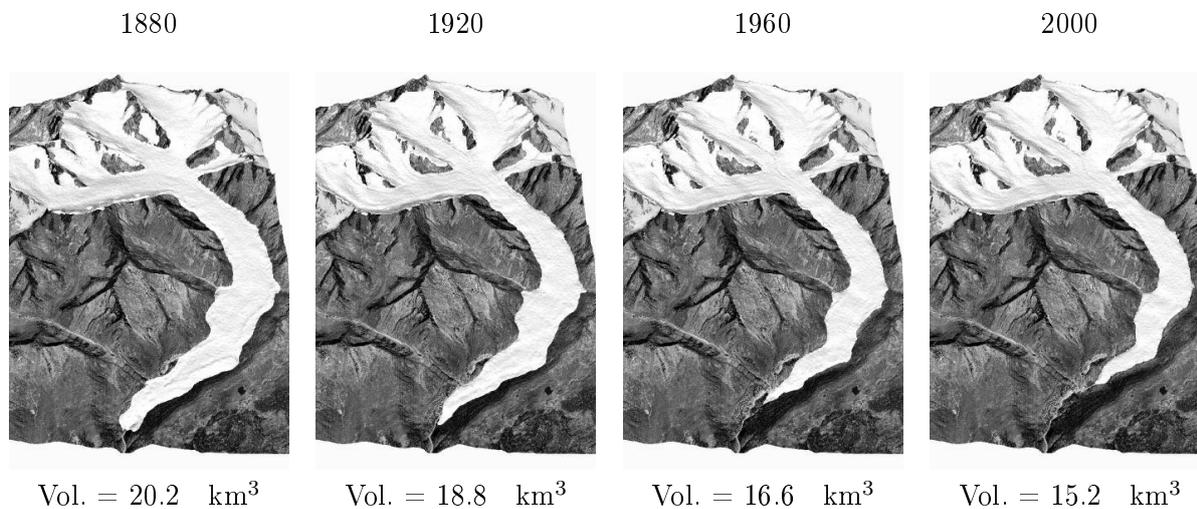


FIG. 4.20. Simulation du glacier d'Aletsch sur la période 1880-2000 (de gauche à droite). Le volume de glace est inscrit au bas de chaque figure.

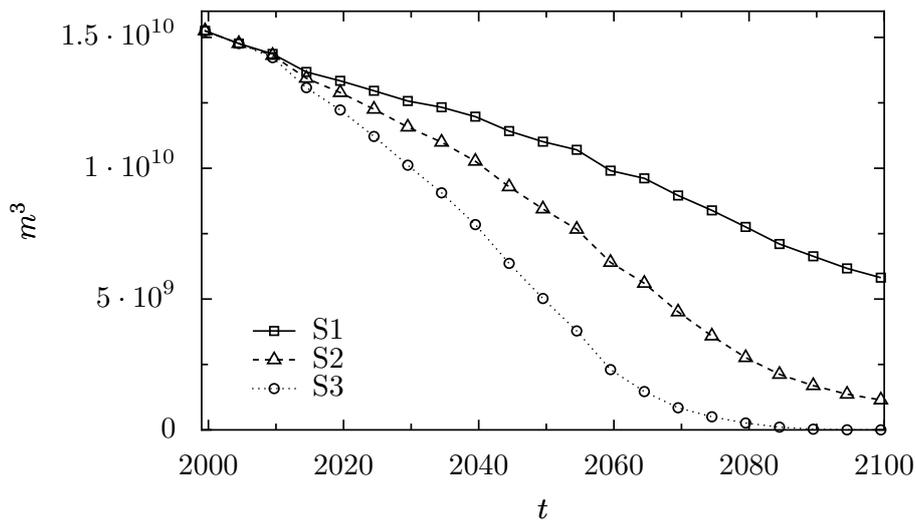


FIG. 4.21. Volume du glacier d'Aletsch sur la période 1999 - 2100. avec les scénarios S1, S2 et S3.

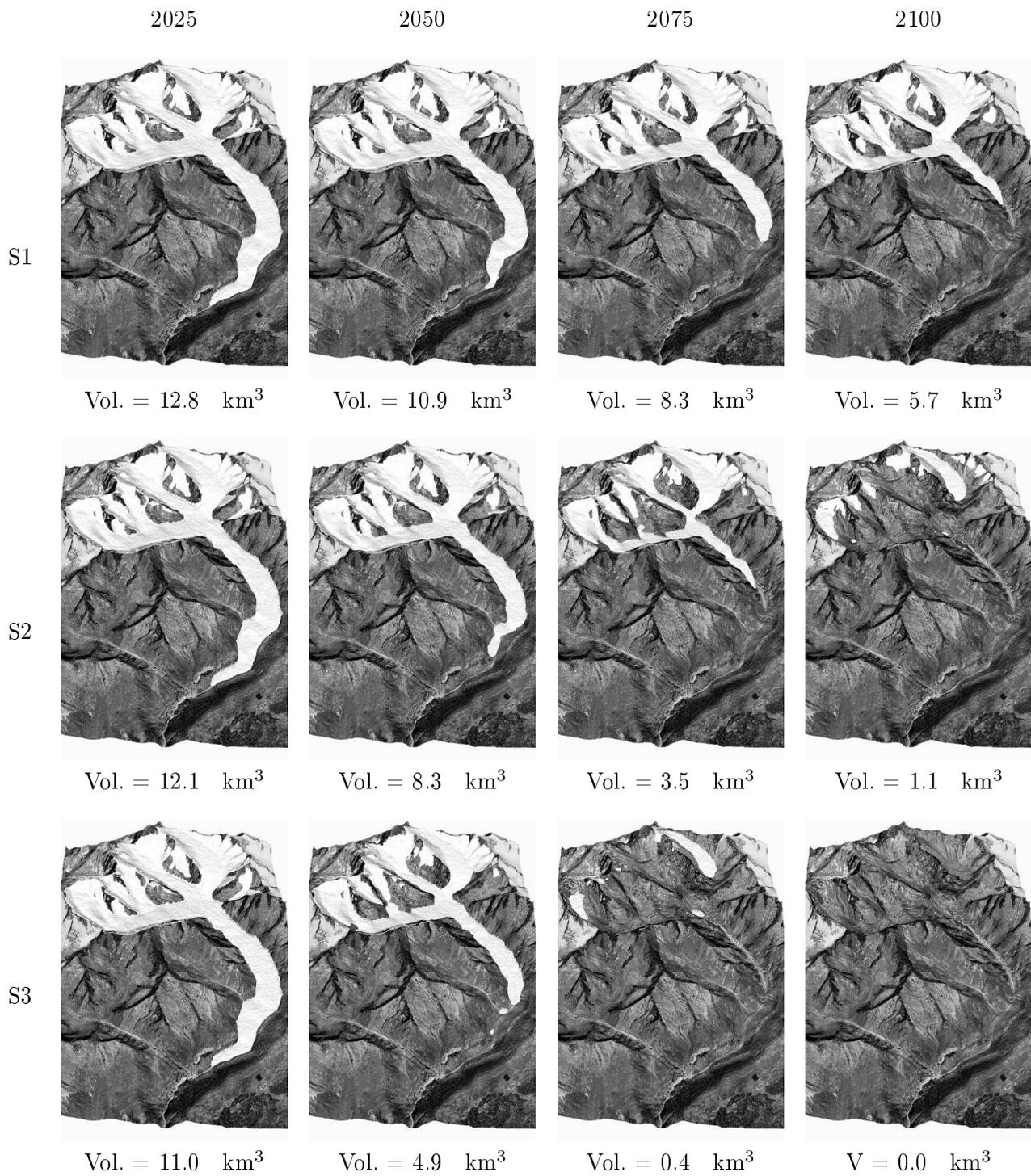


FIG. 4.22. Simulation du glacier d'Aletsch sur la période 1999-2100 (de gauche à droite). De haut en bas : Scénarios 1, 2 et 3. De gauche à droite : Années 2025, 2050, 2075 et 2100. Le volume de glace est inscrit au bas de chaque figure.

4.4 Glacier de Vadret Muragl

Cette application consiste à employer la méthode numérique développée au chapitre 2, pour trouver des formes stationnaires du glacier de Vadret Muragl. Le problème (inverse) qui nous intéresse consiste à chercher la ligne d'équilibre qui permette au glacier stationnaire d'atteindre l'une de ses moraines. Pour cette application, on utilise une paramétrisation simplifiée du bilan de masse.

4.4.1 Positions reconstruites du glacier

De nos jours, Vadret Muragl est un petit glacier long de 200 à 300 mètres situé dans les hauteurs du Valon de Muragl à l'est des Alpes Suisse. Ce glacier atteignait la vallée principale de Pontresina à la fin du dernier âge glaciaire (Würm). Basées sur une évidence géomorphologique, trois positions du glacier, regroupées dans le tableau suivant, ont été reconstruites [96, 59, 73, 60] :

Nom de la position	Longueur du glacier	Datation
"PAG"	1.5 km	~ 1850
"Margun"	3.65 km	entre 12 000 et 10 000 ans avant J.-C.
"Punt Muragl"	5.7 km	entre 12 000 et 10 000 ans avant J.-C.

Les contours du glacier correspondants aux positions de "Margun" et "Punt Muragl" sont dessinés à la figure 4.23.

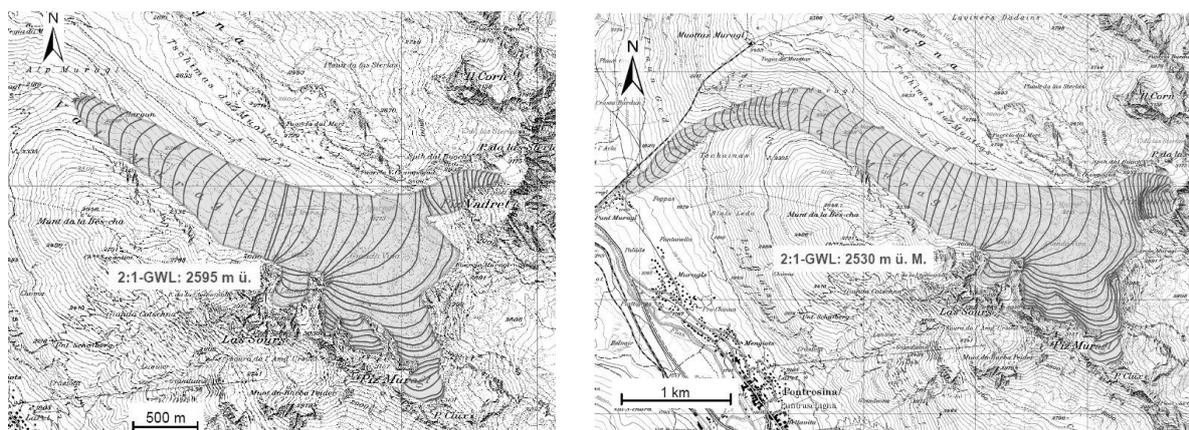


FIG. 4.23. Positions reconstruites de "Margun" à gauche et "Punt Muragl" à droite du glacier de Vadret Muragl, de [59].

Nous utilisons les positions reconstruites de "Margun" et "Punt Muragl" pour tester les hypothèses géomorphologiques et climatiques faites dans [59]. Dans la suite, on fait l'hypothèse que le glacier n'a pas laissé de moraines lors des phases d'avance et de retrait. Dans ce cas, les moraines marquent un état stationnaire du glacier. Bien qu'un glacier puisse conserver une longueur constante sans qu'il soit dans un état d'équilibre, nous ignorons ce cas de figure. En d'autres termes, nous supposons que si le bout de la langue est immobile alors le glacier est stationnaire.

4.4.2 Paramétrisation du bilan de masse

La distribution du bilan de masse sur un glacier dépend des précipitations et de la fonte, lesquelles sont influencées par la topographie, le vent et la présence de débris en surface. Malgré

ces complications, la fonction bilan de masse b reste fortement corrélée à l'altitude. Dans le but de réduire le nombre de degrés de liberté, on paramétrise le bilan de masse par le gradient de fonte a_m , la ligne d'équilibre z_{ELA} et le maximum d'accumulation a_c , voir la figure 4.24 :

$$b(x, y, z) = b(z) = \min [a_m (z - z_{\text{ELA}}), a_c]. \quad (4.6)$$

Cette paramétrisation simple est suggérée par les deux observations suivantes : premièrement, le bilan de masse augmente approximativement linéairement avec l'altitude dans la zone d'ablation. Deuxièmement, le bilan de masse est approximativement constant dans la zone d'accumulation [67, 27, 101]. Par ailleurs, le gradient de fonte a_m est relativement constant d'année en année.

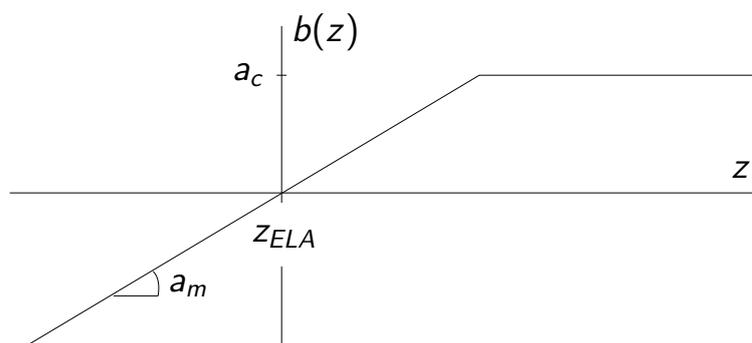


FIG. 4.24. Fonction ablation/accumulation b .

4.4.3 Géométrie stationnaire

Dans cette partie, nous nous intéressons à la forme stationnaire d'un glacier. En fixant les paramètres $(a_m, a_c, z_{\text{ELA}})$ constants avec le temps, tout glacier, à long terme, entre dans un état d'équilibre. L'expérience suivante montre que la forme stationnaire ne dépend que des paramètres $(a_m, a_c, z_{\text{ELA}})$ et est indépendante de l'état initial. Une première simulation est initialisée par une petite masse de glace correspondante à la position "PAG". Une deuxième simulation est initialisée avec une large forme glaciaire correspondant à la position "Punt Muragl". Les paramètres de viscosité (m, A, σ_0) et climatiques $(a_m, a_c, z_{\text{ELA}})$ sont les mêmes pour les deux simulations : l'exposant de Glen est $m = 3$, le facteur d'Arrhenius $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$, le paramètre de régularisation $\sigma_0 = \sqrt{0.1} \text{ bar}$, $z_{\text{ELA}} = 2700 \text{ m}$, $a_c = 0.5 \text{ ma}^{-1}$ et $a_m = 0.004$. Le glacier est supposé être fixé au rocher $\Gamma_B^S = \emptyset$. Le pas de temps (constant) est d'une année ($\Delta t = 1 \text{ a}$) et la taille de la grille \mathcal{T}_h est de $h = 5 \text{ m}$.

Dans les deux cas, nous observons que l'état stationnaire est obtenu après quelques centaines d'années. Les deux formes stationnaires coïncident avec une précision d'environ 50 m, voir figure 4.25. Cet écart n'est pas très significatif puisqu'il s'agit de la taille de deux tétraèdres de \mathcal{T}_h . Bien qu'il n'y ait pas de preuve rigoureuse de l'existence et de l'unicité d'une telle forme stationnaire, nous les supposons vraies dans ce qui suit. Notons à ce propos que l'existence d'une forme stationnaire avec le modèle du "Shallow Ice Approximation" et une paramétrisation du bilan de masse comparable à (4.6) est démontrée au chapitre 6 dans le cas d'une géométrie simple.

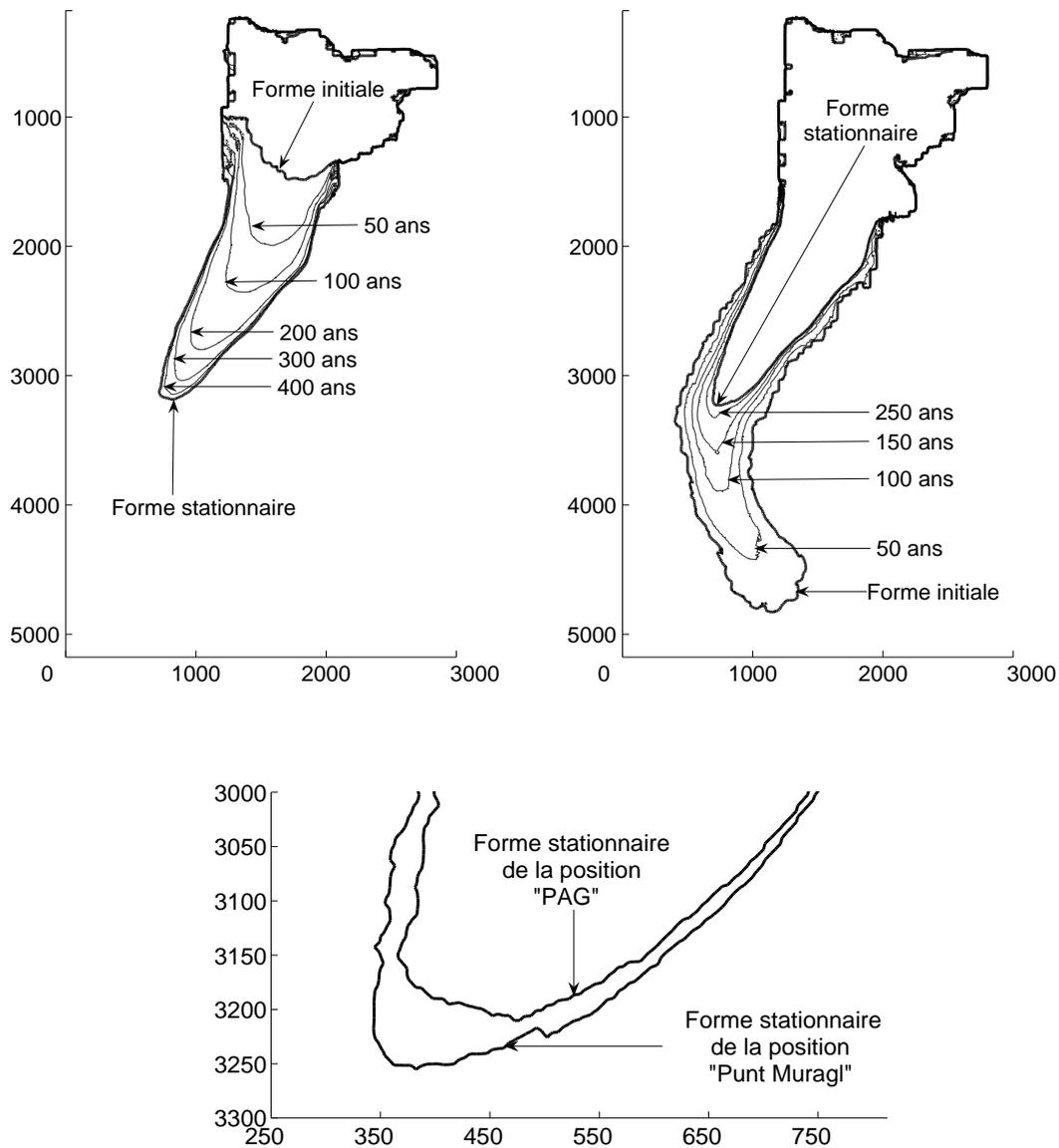


FIG. 4.25. Évolution du glacier de Muragl à partir de la position "PAG" (à gauche) et de la position "Punt Muragl" (à droite). Dans les deux cas, le glacier se stabilise vers la position "Margun". Les valeurs des paramètres sont : $z_{ELA} = 2700 \text{ m}$, $a_c = 0.5 \text{ ma}^{-1}$ et $a_m = 0.004$. La figure du bas montre la différence de localisation entre les deux langues.

A l'état d'équilibre, la masse du glacier oscille autour de zéro avec une amplitude d'environ 1000 m^3 , lequel est 10^{-5} du volume glaciaire total. Un seuil sur le résidu du bilan masse est défini afin d'avoir un critère de stationnarité. Cependant, un glacier peut avoir un bilan de masse nul alors qu'il se trouve dans un état transitoire. Afin d'éviter toute confusion, on introduit un deuxième seuil qui contrôle la variance des fluctuations du résidu sur 20 années.

4.4.4 Positions de "Margun" et "Punt Muragl"

Méthode de la sécante

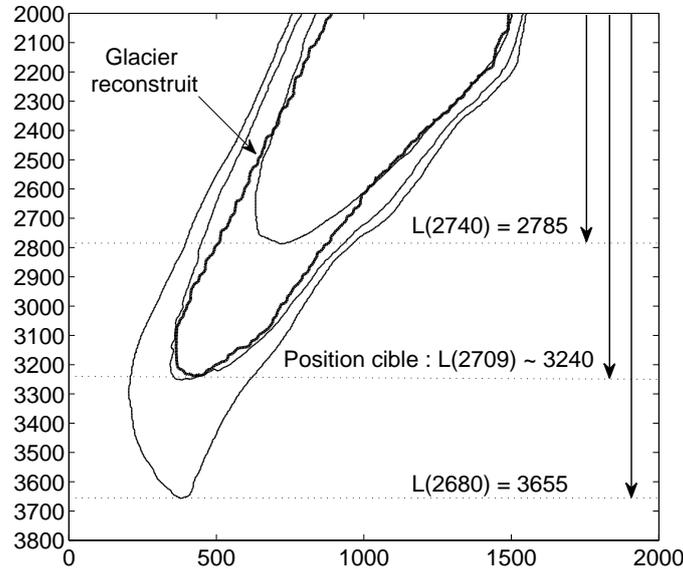


FIG. 4.26. Le calcul de la forme stationnaire pour $z_{\text{ELA}} = 2740$ et $z_{\text{ELA}} = 2680$ indique deux abscisses du bout de la langue : $L(2740) = 2785$ and $L(2680) = 3655$. La méthode de la sécante suggère de recommencer le calcul avec $z_{\text{ELA}} = 2709$. On vérifie ensuite que la nouvelle forme stationnaire atteint presque la position cible. La figure 4.28 montre que la position cible est dans la zone linéaire de la fonction $z_{\text{ELA}} \rightarrow L(z_{\text{ELA}})$. Ceci justifie l'efficacité de la méthode dans ce cas.

L'indépendance de la forme stationnaire capturée par rapport à la géométrie initiale motive le problème inverse : trouver les paramètres du bilan de masse tels que le glacier stationnaire termine à une position donnée (dite "position cible"). Nous nous focalisons, dans cette étude, sur les positions reconstruites de "Margun" et "Punt Muragl". Notre but est de trouver un ensemble de paramètres $(a_c, a_m, z_{\text{ELA}})$, pour lesquels la forme stationnaire s'arrête à la langue de chacun des glaciers reconstruits. Cependant, la solution du problème inverse n'est pas unique. Pour cette raison, nous cherchons des solutions $(a_c, a_m, z_{\text{ELA}})$ dans des intervalles réalistes. Pour des valeurs fixées des deux paramètres a_c et a_m , on cherche la ligne d'équilibre z_{ELA} par un processus itératif. Remarquons que la longueur de langue du glacier est une fonction monotone de z_{ELA} . En effet, augmenter z_{ELA} , revient à augmenter la zone d'ablation et à réduire la zone d'accumulation, ce qui a pour effet de faire reculer le glacier. Par conséquent, la méthode de la sécante, illustrée par la figure 4.26, permet d'ajuster z_{ELA} de façon simple en fonction de la position cible.

Conditions climatiques

Les positions de "Margun" et "Punt Muragl" résultent de conditions climatiques différentes. Pour chaque ensemble de valeurs $(a_c, a_m, z_{\text{ELA}})$, il résulte une valeur L qui mesure la position de la langue du glacier selon l'axe y . Cependant, chaque L peut résulter d'une infinité de combinaisons des trois paramètres. La figure 4.27 montre les lignes d'équilibre pour une série de couples (a_c, a_m) pour les positions de "Margun" et "Punt Muragl". Les intervalles pour (a_c, a_m) sont

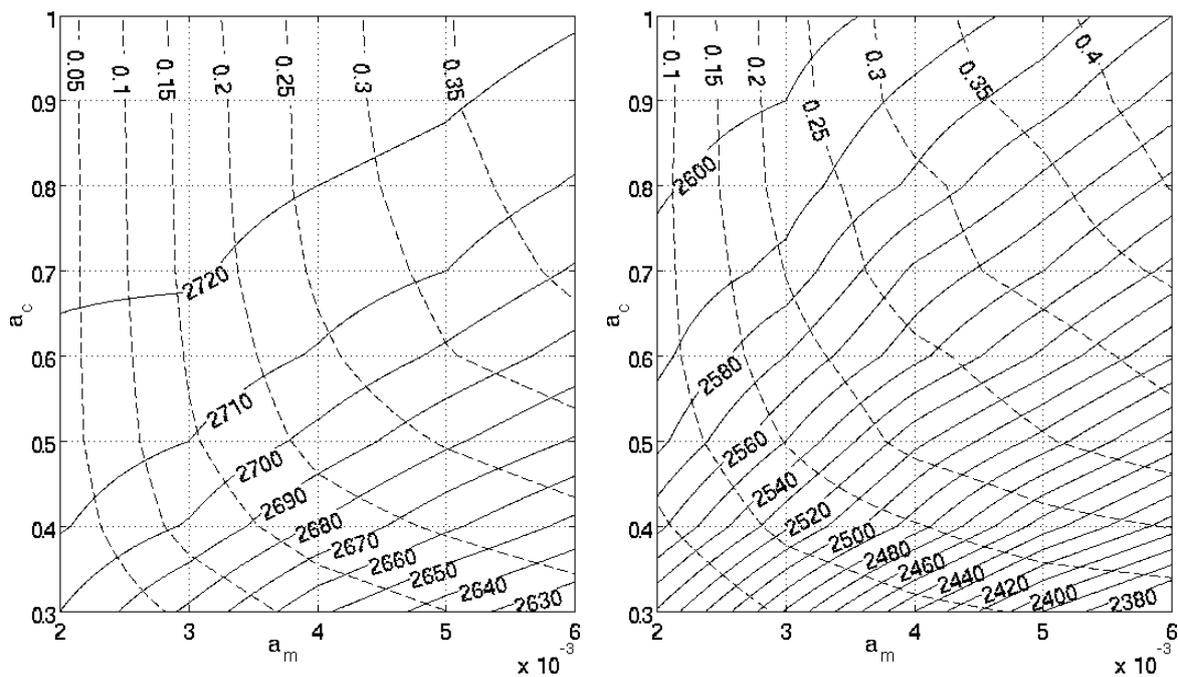


FIG. 4.27. Les courbes de niveau de z_{ELA} en fonction de a_m et a_c (lignes continues) et les variations du volume (en %, pointillés) des formes stationnaires sont données en comparaison avec la plus petite valeur obtenue avec les coefficients $a_m = 0.002$ et $a_c = 0.3$. A gauche : position "Margun", à droite : position "Punt Muragl".

physiques : $0.002 \leq a_m \leq 0.006$ et $0.3 \leq a_c \leq 1.0$. Pour ces paramètres, la ligne d'équilibre varie de 100 m pour la position de "Margun" et 220 m pour la position de "Punt Muragl". Le volume du glacier varie d'environ 40 % pour les deux positions.

Sensibilité au climat

La sensibilité au climat peut être caractérisée par la variation de la position d'équilibre divisée par la variation de la ligne d'équilibre : dL/dz_{ELA} . On considère la longueur du glacier dans les quatre cas extrêmes du gradient de fonte et du maximum d'accumulation. Cela permet de déterminer comment la sensibilité au climat dL/dz_{ELA} dépend des paramètres utilisés pour le modèle de bilan de masse et de la longueur du glacier, voir figure 4.28. Autour de la position "Punt Muragl", qui est une partie plate, la sensibilité est petite (environ 4) alors qu'elle est plus grande autour de la position "Margun" (environ 15), qui est une partie plus pentue.

Facteur d'Arrhenius

Nous choisissons pour facteur d'Arrhenius $A = 0.08 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$ lequel correspond à de la glace tempérée [53, 50, 1]. Dans le but de tester les résultats obtenus, nous considérons deux autres valeurs de A , en doublant et en divisant sa valeur par 2. Ainsi, avec $A = 0.04 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$, la viscosité est augmentée et le glacier est plus lent alors qu'avec $A = 0.16 \text{ bar}^{-3} \text{ a}^{-1}$, la viscosité est réduite et le glacier est plus rapide. Ces deux cas extrêmes permettent de prendre en compte plusieurs situations : une glace froide très visqueuse qui freine le glacier ou des effets de glissement basal qui ont pour effet d'accélérer le glacier. Les expériences sont réalisées avec les paramètres $a_c = 0.5$, $a_m = 0.004$ puis $z_{\text{ELA}} = 2697$ et $z_{\text{ELA}} = 2513$ respectivement pour les

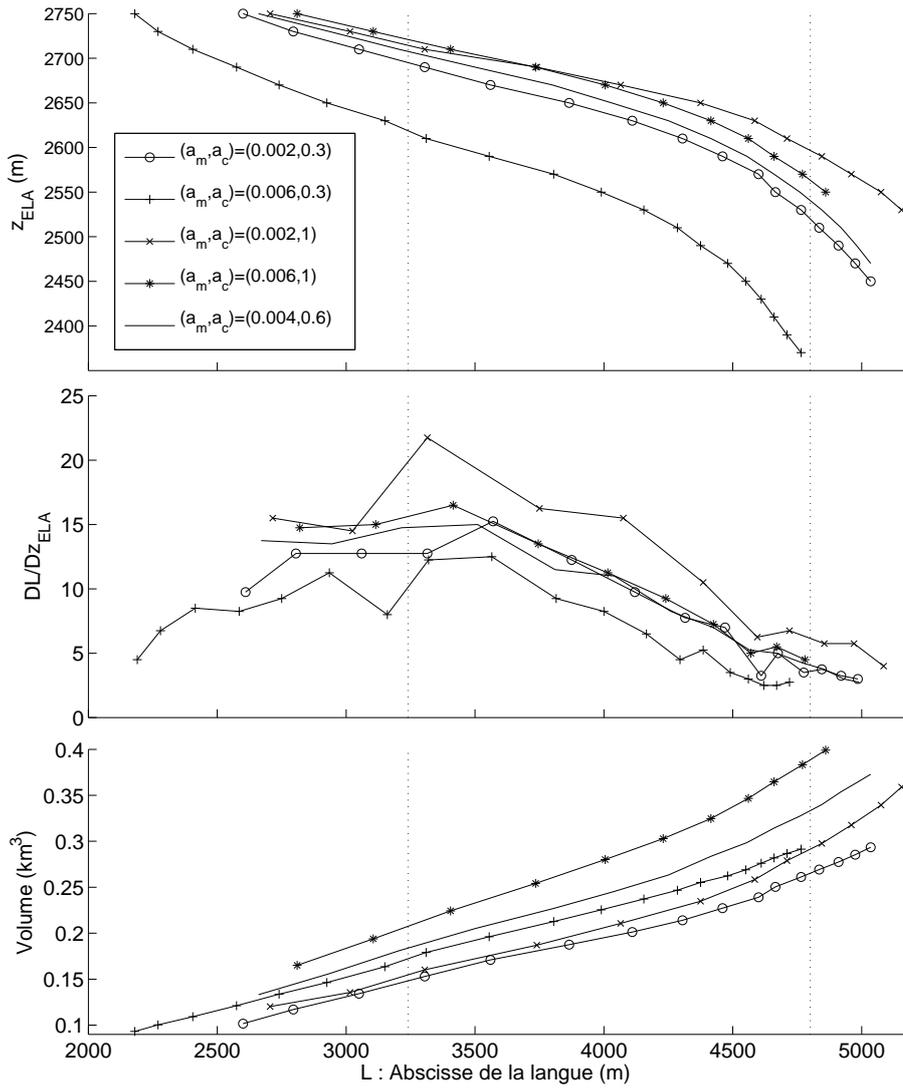


FIG. 4.28. Ligne d'équilibre z_{ELA} , sensibilité au climat DL/Dz_{ELA} et volume comme une fonction de la longueur du glacier d'équilibre L dans quatre cas extrêmes $a_m \in \{0.002, 0.006\}$ et $a_c \in \{0.3, 1.0\}$ et le cas du milieu ($a_m = 0.004$ et $a_c = 0.6$). Les positions "Margun" et "Punt Muragl" sont indiquées par les lignes en pointillé.

positions de "Margun" et de "Punt Muragl".

Pour atteindre la position de "Margun" avec les paramètres moyens $A = 0.08$, $a_c = 0.5$ et $a_m = 0.004$, la ligne d'équilibre doit être $z_{\text{ELA}} = 2697$. Le volume glaciaire est $V = 1.808 \cdot 10^8 \text{ m}^3$. Pour un glacier moins visqueux avec $A = 0.16$ ou plus visqueux avec $A = 0.04$, on attend un glacier, respectivement, plus fin ou plus épais. Le tableau 4.1 rassemble les résultats pour la position de "Margun" avec plusieurs combinaisons de paramètres de bilan de masse et avec plusieurs facteurs A . Nous remarquons que considérer l'une ou l'autre des viscosités extrêmes ne change pas beaucoup la ligne d'équilibre reconstruite (moins de 10 mètres dans les deux cas).

TAB. 4.1. Solutions pour z_{ELA} , a_m et a_c avec plusieurs facteurs A pour la position de "Margun".

A bar ⁻³ a ⁻¹	z_{ELA} m	a_c ma ⁻¹	a_m	Volume V 10 ⁸ m ³
0.08	2697	0.5	0.004	1.808
0.04	2697	0.425	0.004	2.180
0.04	2697	0.5	0.00475	2.323
0.04	2709	0.5	0.004	2.248
0.16	2697	0.55	0.004	1.466
0.16	2697	0.5	0.0035	1.417
0.16	2690	0.5	0.004	1.456

4.4.5 Conclusions et perspectives

Cette application montre que sous certaines hypothèses concernant la formation de moraines et en utilisant une paramétrisation du bilan de masse simplifiée, on peut estimer d'anciennes lignes d'équilibre du glacier. Afin de réduire l'ensemble des combinaisons $(a_c, a_m, z_{\text{ELA}})$, nous devons ajouter des contraintes liées à des informations climatologiques et glaciologiques additionnelles. Dans nos calculs, on vérifie la position du terminus selon la localisation d'une moraine frontale. Une contrainte additionnelle serait de prendre en compte des moraines latérales, et ainsi de contrôler également la largeur du glacier. Dans ce cas, le volume pourrait être une contrainte.

Chapitre 5

Simulation du vêlage avec un modèle d'endommagement

Dans ce chapitre, on s'intéresse au processus de vêlage qui se produit lorsqu'un glacier est partiellement immergé d'eau. Cela arrive, par exemple, en des latitudes élevées, lorsqu'un glacier finit dans la mer ou bien dans les Alpes, lorsqu'un lac se forme à la langue d'un glacier. La présence d'eau au contact de la glace induit une modification importante de la dynamique du glacier. En particulier, la fonte au front et la poussée d'Archimède conduisent la glace à se fracturer. L'effondrement périodique de morceaux de glace est un processus appelé vêlage (*calving* en anglais), voir [8]. Un exemple est donné par le célèbre glacier Perito Moreno en Argentine. Son front progresse dans un lac et donne lieu un vêlage intense. Des blocs de glace de toutes tailles se détachent en permanence du glacier comme l'illustre la figure 5.1. Dû à l'effritement du front glaciaire, le vêlage est une composante importante de l'ablation pour de nombreux glaciers dans le monde. Ce processus peut augmenter significativement en réponse à un changement de vitesse en marge du glacier, avec une conséquence importante sur le niveau d'eau. Il est donc important de bien comprendre les mécanismes qui induisent le vêlage afin de mieux prédire l'augmentation du niveau des océans. Dans ce chapitre, on présente un modèle, une méthode numérique et des simulations pour un problème simplifié de vêlage en deux dimensions.



FIG. 5.1. *Illustration du processus de vêlage au front du glacier Perito Moreno.*

Essentiellement, deux théories permettent de décrire la détérioration d'un matériau. La première, la théorie de la fracture consiste à décrire la géométrie et le comportement de chaque fissure individuellement [61, 62]. La simulation numérique est délicate puisque chaque fissure fait l'objet d'un traitement particulier. La deuxième théorie (dite de l'endommagement continu)

consiste à créer un champ caractérisant la détérioration du matériau en chaque point. Le phénomène de fissuration qui est par nature discontinu est alors décrit par une fonction continue, ce qui est numériquement avantageux. Nous retiendrons, dans la suite, cette deuxième approche. La mécanique continue de l'endommagement décrit la détérioration progressive d'un matériau en introduisant une variable dite d'endommagement, voir [61]. L'endommagement affecte la rhéologie du matériau et modifie sa loi de comportement. Le modèle utilisé dans la suite a été formalisé dans [90, 88, 89] et appliqué pour simuler le vèlage au front du glacier de Gruben ainsi que la formation de crevasses sur la face ouest du glacier suspendu d'Eiger [87, 89]. Pour cela, les auteurs emploient une description eulérienne de la glace du type "level set" [88, 89]. Dans ce travail, on utilise la méthode VOF, présentée aux chapitres 1 et 2, qui s'avère particulièrement avantageuse pour simuler le vèlage. En effet, la méthode VOF est efficace pour traiter des géométries compliquées avec un large ensemble de nombres de Reynolds, voir [20]. Par ailleurs, seule une méthode eulérienne, telle que la méthode VOF, peut prendre en compte les changements de topologie qui apparaissent lorsqu'un bloc de glace se détache. Enfin, le découplage des problèmes de diffusion et de transport permet l'emploi de deux maillages fixes adéquats pour chacun des problèmes. En particulier, l'endommagement (comme la fonction VOF) est résolu sur une grille structurée. De cette façon, la propagation des fissures n'est pas influencée par le maillage.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La section 5.1 est consacrée à la modélisation en deux dimensions du vèlage incluant un modèle d'endommagement. Dans la section 5.2, nous décrivons la résolution numérique de l'équation de transport de l'endommagement et son intégration à la méthode VOF. Dans la section 5.3, nous présentons la simulation du vèlage d'un glacier. Ces résultats numériques sont accompagnés d'une étude d'influence du maillage ainsi que de paramètres physiques et numériques.

5.1 Modélisation

Nous définissons le problème de vèlage dans la section 5.1.1. Nous exposons ensuite le modèle d'endommagement proposé dans [89]. La mécanique de l'endommagement décrit la détérioration de matériaux due à l'augmentation progressive de la densité de micros fissures avant la rupture macroscopique. Cette approche consiste : d'abord, à définir une variable locale D qui quantifie l'endommagement [61] (section 5.1.2) ; deuxièmement, à définir l'influence de D sur la rhéologie du matériau (section 5.1.3) ; troisièmement, à décrire l'évolution de D en espace et en temps (section 5.1.4). Pour clore le modèle, on utilise une variable VOF pour décrire la présence de glace (section 5.1.5).

5.1.1 Problème du vèlage

On présente les notations nécessaires à la modélisation d'un processus de vèlage dans une cavité simplifiée en deux dimensions. Comme au chapitre 1, Λ est une cavité carrée : $[0, \bar{X}] \times [0, \bar{Z}] \subset \mathbb{R}^2$, où $\bar{X}, \bar{Z} > 0$. On note toujours $\Omega(t)$ le domaine de glace, inclus dans Λ , en tout temps $t \in [0, T]$ où $T > 0$. On suppose que l'état initial $\Omega(0)$ est donné, voir la figure 5.2. Un flux entrant de glace est imposé sur le bord gauche, noté $\Gamma_I(t)$. La glace est supposée être fixée à la base $\Gamma_B(t)$. Puisque la paroi de droite est en contact avec l'eau, on applique une force hydrostatique sur la paroi de glace $\Gamma_F(t)$, qui est située en dessous du niveau d'eau, noté z_{wl} . Le bord du domaine de glace $\Omega(t)$ qui ne touche pas $\Gamma_I(t) \cup \Gamma_B(t) \cup \Gamma_F(t)$ est l'interface glace-air et est noté $\Gamma_S(t)$.

L'inversion entre le flux de glace entrant (de la gauche) et la force de l'eau (de la droite) induit une zone fortement cisailée. La formation de fissures est donc attendue dans cette zone

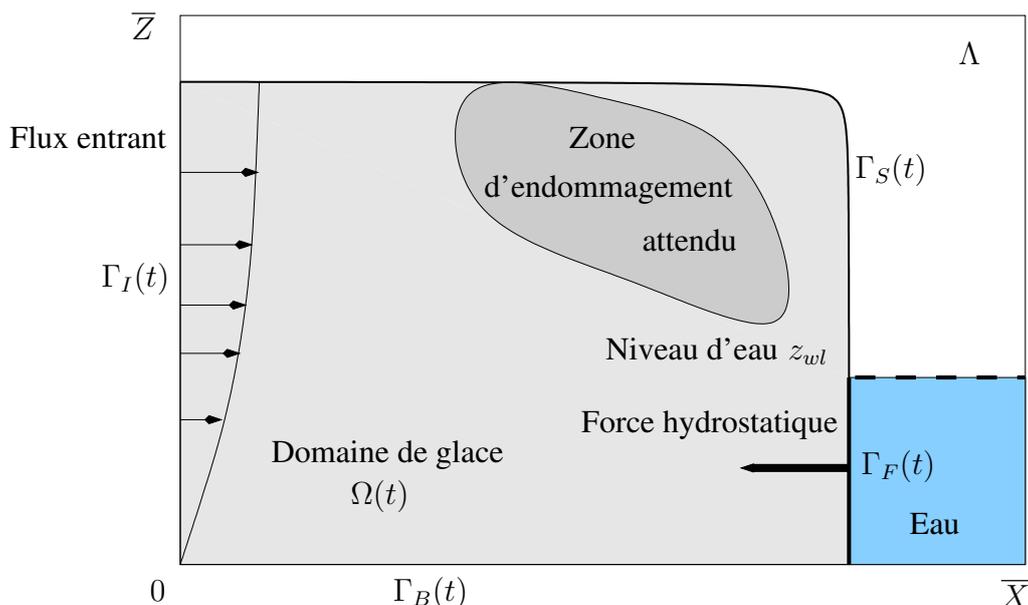


FIG. 5.2. Cavité bidimensionnelle simplifiée incluant le bout d'un glacier en contact avec l'eau.

pour autant que la pression interne ne soit pas trop importante. La zone indiquée sur la figure 5.2 combine cisaillement important et pression interne faible et est, par conséquent, la zone désignée pour être la plus endommagée.

5.1.2 Variable d'endommagement

Dans tout le chapitre, on suppose que l'endommagement est un processus isotrope. En d'autres termes, l'orientation des fissures est supposée uniformément distribuée dans toutes les directions. On représente la proportion de perte de volume due aux microfissures par la variable d'endommagement D . Pour cela, on définit l'Élément de Volume Représentatif (EVR) [61, 88] comme étant un carré large en comparaison à la taille des microfissures mais petit en comparaison à la taille du domaine, voir le carré de gauche à la figure 5.3. On donne une définition géométrique de D au point \mathbf{x} entouré d'un EVR centré en \mathbf{x} . La variable D au point \mathbf{x} est donnée par [61] :

$$D = 1 - \frac{S'}{S},$$

où S est l'aire de l'EVR (fissures incluses) et S' est l'aire de l'EVR (fissures exclues). Le champ d'endommagement est, par conséquent, une densité de microfissures, voir la figure 5.3. Un matériau est vierge de tout endommagement (ou sans fissure) s'il est caractérisé par $D = 0$. Si des fissures apparaissent et se propagent, D augmente jusqu'à atteindre sa valeur limite 1, correspondant à un matériau complètement endommagé.

5.1.3 Loi de Glen endommagée

On note D l'application $Q_T \rightarrow [0, 1]$, définie par la variable d'endommagement à la section précédente. Voyons maintenant comment D interagit avec la rhéologie de la glace. Si $D = 0$ partout, la glace est alors vierge de tout endommagement et son comportement à la déformation

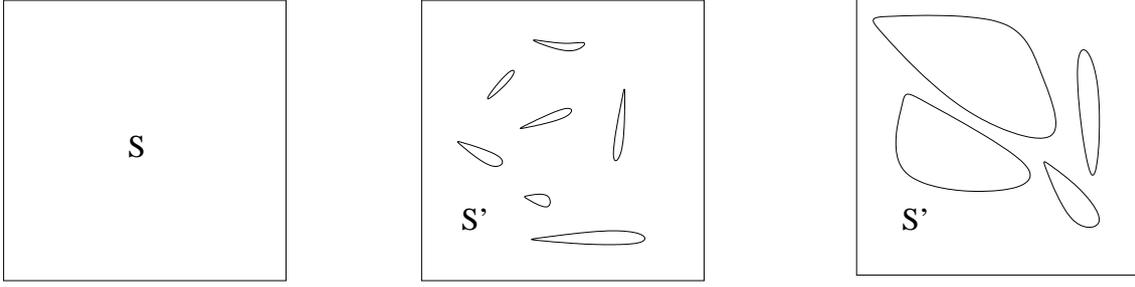


FIG. 5.3. L'endommagement D est défini au centre de l'EVR (premier carré). La détérioration progressive du matériau correspond à une augmentation de D de 0 (vierge, premier carré) aux valeurs intermédiaires $D = 0.1$ et $D = 0.5$ (endommagé, deuxième et troisième carré).

est celui décrit par la loi de Glen régularisée (équation (1.4)) :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = A(\tau_{II}^{m-1} + \tau_0^{m-1})\tau, \quad (5.1)$$

où $m \geq 1$ est l'exposant de Glen, A est le facteur d'Arrhenius et $\tau_0 > 0$ est un paramètre de régularisation. En suivant [89], la loi de Glen est modifiée selon l'endommagement local D . Pour cela, on remplace le tenseur des contraintes déviées :

$$\tau = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \quad (5.2)$$

par le tenseur effectif :

$$\tilde{\tau} = (1 - D)\tau. \quad (5.3)$$

Remarque 5.1.1. Multiplier τ par $(1 - D)$ permet de lier la viscosité de la glace à l'endommagement. Une augmentation de l'endommagement a pour effet une diminution de la viscosité et vice versa.

Dans ce modèle, l'endommagement est indépendant de la densité ρ qui est supposée constante. Par ailleurs, nous supposons que la glace reste incompressible, quel que soit son état d'endommagement. En prenant en compte la loi (5.3), l'équation de conservation des moments conduit aux équations de Navier-Stokes incompressibles suivantes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - 2\operatorname{div}((1 - D)\mu\varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (5.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (5.5)$$

où $\mu = \mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)$ est la viscosité définie par la relation (équation (1.7)) :

$$\frac{1}{2\mu} = A(\tau_0^{m-1} + (\sqrt{2}\mu|\varepsilon(\mathbf{u})|)^{m-1}), \quad (5.6)$$

où $|\varepsilon(\mathbf{u})| := \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})}$.

Remarque 5.1.2. Contrairement à la glace vierge, modélisée dans la section 1.1.3, on ne néglige pas le terme d'inertie du fait que $\mu(1 - D)$ peut devenir petit. Ce modèle prend donc en compte toutes les échelles de temps. Lorsque D est proche de 0, la glace est vierge et $\mu(1 - D)$ est très grand. La diffusion dans l'équation (5.4) est alors prépondérante. A l'inverse, lorsque D

est proche de 1, la glace est endommagée et $\mu(1 - D)$ peut-être petit. L'advection dans l'équation (5.4) est alors prépondérante.

Le problème présenté dans la section 5.1.1 fait intervenir quatre conditions de bord. Premièrement, nous imposons un profil de vitesse sur le bord gauche pendant l'intervalle de temps $[0, T]$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} \quad \text{sur} \quad \Gamma_I(t), \quad (5.7)$$

où \mathbf{u}_{in} est une fonction donnée sur $\Gamma_I(t)$. Deuxièmement, la glace est supposée fixée à sa base (aucun glissement) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_B(t). \quad (5.8)$$

Troisièmement, l'eau exerce une pression hydrostatique sur la paroi de glace immergée :

$$\sigma \mathbf{n} = -\rho_w |\mathbf{g}| (z_{wl} - z) \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_F(t), \quad (5.9)$$

où ρ_w désigne la densité de l'eau. Quatrièmement, on impose sur l'interface glace-air une condition de surface libre :

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_S(t). \quad (5.10)$$

On ajoute, dans la section suivante, une équation supplémentaire qui modélise l'évolution de la variable d'endommagement D en espace et en temps.

5.1.4 quation d'évolution pour l'endommagement

Dans cette section, on reformalise le modèle de [87]. En reprenant les notations de [87] p. 71, l'évolution de l'endommagement est décrite par :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla D = f(D, \sigma), \quad (5.11)$$

où

$$f(D, \sigma) := B \frac{[\psi]_+^r - \lambda_h [-\psi]_+^r}{(1 - D)^k}, \quad (5.12)$$

et

$$\psi = \psi(D, \sigma) := \frac{1}{1 - D} (\alpha \sigma_1 + \beta \sqrt{3\tau_{II}} + (1 - \alpha - \beta) \sigma_I) - \sigma_{th}, \quad (5.13)$$

où σ_1 est la valeur propre maximale de σ , τ_{II} est le second invariant du tenseur dévié τ (voir (1.3) pour la définition) et σ_I est le premier invariant de σ (voir (1.2) pour la définition). Notons que k, λ_h, B, r et σ_{th} sont des paramètres positifs. Les coefficients α et β vérifient la relation [87] :

$$0 \leq \alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta \leq 1.$$

Ci-dessus, on a noté $[x]_+$ la partie positive de x .

Remarque 5.1.3. *Le rôle des coefficients α et β consistent à doser chaque contribution de la somme :*

$$\alpha \sigma_1 + \beta \sqrt{3\tau_{II}} + (1 - \alpha - \beta) \sigma_I. \quad (5.14)$$

Les deux premiers termes sont des contributions positives : la tension σ_1 et le cisaillement $\sqrt{3\tau_{II}}$ endommagent la glace. De façon opposée, le troisième terme est un contributeur négatif : $\sigma_I = -2p$, signifiant que la pression restitue la glace endommagée. D'après (5.12) et (5.13), l'endommagement croît pour autant que la somme pondérée (5.14) divisée par $1 - D$ atteigne le seuil σ_{th} . La division par $1 - D$ dans (5.14) permet le phénomène de propagation. En effet, le

seuil σ_{th} est plus vite atteint si la glace est déjà endommagée. Les paramètres k et r permettent de contrôler la vitesse de propagation, voir la section 5.3.2. Le terme $\lambda_h[-\psi]_+^r$ de (5.12) permet à l'endommagement de décroître. En effet, lorsque la pression interne est importante, la glace endommagée se reconstitue. Ce processus de cicatrisation prend en compte la fermeture des fissures.

Le modèle (5.11) - (5.13) est reformulé et modifié de la façon suivante. En utilisant (1.2), (1.3) et (5.2), on peut exprimer σ_1 , τ_{II} et σ_I en fonction de $\mu(|\varepsilon(\mathbf{u})|)|\varepsilon(\mathbf{u})|$ et p . Par conséquent ψ est également une fonction de D , \mathbf{u} et p :

$$\psi(D, \sigma) = \bar{\psi}(D, \mathbf{u}, p). \quad (5.15)$$

Par ailleurs, un paramètre numérique positif $\epsilon \ll 1$ est introduit de sorte que la variable D n'excède jamais $1 - \epsilon$. En effet, si $D = 1$ alors, l'équation (5.4) dégénère. Pour contraindre la variable D à rester dans l'intervalle $[0, 1 - \epsilon]$, l'équation (5.12) est multipliée par $\chi_{[0, 1 - \epsilon]}(D)$ qui est la fonction caractéristique égale à un quand D appartient à $[0, 1 - \epsilon]$ et zéro ailleurs. L'équation de transport de l'endommagement se réécrit alors :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla D = g(D, \mathbf{u}, p), \quad (5.16)$$

où

$$g(D, \mathbf{u}, p) = B \frac{[\bar{\psi}]_+^r - \lambda_h[-\bar{\psi}]_+^r}{(1 - D)^k} \chi_{[0, 1 - \epsilon]}(D). \quad (5.17)$$

Pour clore le modèle, il faut maintenant décrire le domaine de glace. Une variable "Volume of Fluid" (VOF) est introduite dans la section suivante.

5.1.5 Description "Volume of Fluid"

Dans [90], une approche du type "level set" est utilisée pour décrire les changements topologiques du domaine de glace. Dans ce travail, nous utilisons la méthode "Volume of Fluid" (VOF), présentée aux chapitres 1 et 2 pour suivre les changements du domaine $\Omega(t)$. Tout comme au chapitre 1, la fonction VOF est définie par :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega(t), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.18)$$

Puisque on étudie le phénomène de vèlage sur une courte période (qui n'excède pas une année), on néglige tout phénomène d'accumulation et d'ablation en supposant le bilan de masse nul partout ($b = 0$). Par conséquent, l'équation de transport (1.29) pour φ devient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (5.19)$$

L'intérêt d'une méthode eulérienne telle que la méthode "Volume of Fluid" réside dans le fait que le domaine $\Omega(t)$, défini par φ dans (5.18), peut changer de topologie. Ainsi, le détachement d'un bloc de glace ne pourrait pas être décrit au moyen de la formulation lagrangienne, basée sur la fonction hauteur de glace, présentée dans la section 1.2.2. Supposant connu $\varphi(\cdot, 0)$ et $D(\cdot, 0)$, le problème de vèlage consiste à trouver \mathbf{u} , p , φ et D tels que les équations (5.4) (5.5) avec les conditions de bord (5.7) - (5.10) et les équations (5.16) et (5.19) sont satisfaites.

5.2 Méthode numérique

Cette section est une extension de la méthode numérique développée au chapitre 2, au modèle de la glace endommagée. Deux nouvelles composantes doivent être incluses à la méthode numérique : le terme d'advection dans l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'endommagement. Un algorithme de splitting est utilisé pour i) découpler l'advection et le terme source dans l'équation de transport de l'endommagement (5.16) ii) découpler les phénomènes d'advection et de diffusion de l'équation de Navier-Stokes (5.4). Comme au chapitre 2, on utilise deux maillages fixes pour résoudre chaque équation avec une méthode numérique adaptée.

5.2.1 Discrétisation en temps

On reprend les notations et la discrétisation temporelle et spatiale introduite à la section 2.1. Soit $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = T$ où $N \in \mathbb{N}$, une subdivision pour la variable t de l'intervalle de temps $[0, T]$. On définit $\tau^n = t^n - t^{n-1}$ le $n^{\text{ième}}$ pas de temps, $n = 1, 2, \dots, N$. On considère φ^n , \mathbf{u}^n , p^n et D^n les approximations respectives de la fonction φ , de la vitesse \mathbf{u} , de la pression p et de l'endommagement D au temps t^n . En supposant φ^{n-1} , \mathbf{u}^{n-1} , p^{n-1} et D^{n-1} connus, nous détaillons maintenant comment obtenir φ^n , \mathbf{u}^n , p^n et D^n .

Etape d'advection

Les phénomènes d'advection et de diffusion de l'équation (5.4) sont découplés par une méthode à pas fractionnaires. D'une façon similaire, l'advection et le terme source de l'équation (5.16) sont découplés : on résout l'équation d'abord sans terme source puis ensuite sans terme convectif. Finalement, on résout entre t^{n-1} et t^n les trois problèmes suivants :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla D = 0, \quad (5.22)$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi(t^{n-1}) = \varphi^{n-1}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{u}(t^{n-1}) = \mathbf{u}^{n-1}, \quad (5.24)$$

$$D(t^{n-1}) = D^{n-1}. \quad (5.25)$$

Notons que les équations (5.21) et (5.22) sont respectivement les parties convectives des équations (5.4) et (5.16). La méthode des caractéristiques, décrite dans la section 2.1.1, est utilisée pour résoudre ce système. On appelle respectivement $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et $D^{n-\frac{1}{2}}$ les solutions des équations (5.20) - (5.22) au temps t^n avec les conditions initiales (5.23) - (5.25). La méthode des caractéristiques conduit aux relations suivantes, voir l'équation (2.10) de la section 2.1.1 et [74] :

$$\varphi^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} + \tau^n \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})) = \varphi^{n-1}(\mathbf{x}), \quad (5.26)$$

$$\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} + \tau^n \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}), \quad (5.27)$$

$$D^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} + \tau^n \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})) = D^{n-1}(\mathbf{x}). \quad (5.28)$$

Remarque 5.2.1. Notons que $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et $D^{n-\frac{1}{2}}$ sont des solutions exactes des équations (5.20) - (5.22). En effet, puisque \mathbf{u} résout (5.21), on a :

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.29)$$

où $\mathbf{X}(t)$ est la ligne caractéristique passant par \mathbf{x} au temps t^{n-1} , défini comme étant la solution du système différentiel (2.5) (2.6). De (5.29), on en déduit que les lignes caractéristiques sont des droites [74]. Par conséquent, l'approximation (2.9) est exacte.

On déduit $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et $D^{n-\frac{1}{2}}$ des formules (5.26), (5.27) et (5.28). Puisque $b = 0$, on a directement que $\varphi^n = \varphi^{n-\frac{1}{2}}$. Par la suite, on appelle D^n une approximation de la solution au temps t^n de l'équation :

$$\frac{\partial D}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = g(D^{n-1/2}, \mathbf{u}^{n-1}, p^{n-1}), \quad \text{dans } \Lambda, \quad (5.30)$$

$$D(\mathbf{x}, t^{n-1}) = D^{n-1/2}(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Lambda. \quad (5.31)$$

On définit D^n en utilisant le schéma d'Euler explicite suivant :

$$D^n = D^{n-1/2} + \tau^n g(D^{n-1/2}, \mathbf{u}^{n-1}, p^{n-1}). \quad (5.32)$$

Étape de diffusion

Connaissant φ^n , on peut calculer le nouveau domaine de glace Ω^n :

$$\Omega^n := \{\mathbf{x} \in \Lambda ; \varphi^n(\mathbf{x}) = 1\}.$$

On appelle Γ_I^n et Γ_B^n les bords de Ω^n qui touchent, respectivement, la paroi gauche et la paroi inférieure de la cavité Λ . On appelle Γ_F^n l'ensemble des points de la surface libre d'ordonnées inférieures à z_{wl} et Γ_S^n l'ensemble des points de la surface libre d'ordonnées supérieures à z_{wl} . Connaissant également $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et D^n , on résout le problème de Stokes généralisé suivant : on cherche $\mathbf{u}^n : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p^n : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\rho \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau^n} - 2\text{div}((1 - D^n)\mu\varepsilon(\mathbf{u}^n)) + \nabla p^n = \rho \mathbf{g}, \quad \text{sur } \Omega^n, \quad (5.33)$$

$$\text{div } \mathbf{u}^n = 0, \quad \text{sur } \Omega^n, \quad (5.34)$$

avec les conditions de bords :

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}_{in}, \quad \text{sur } \Gamma_I^n, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_B^n, \quad (5.36)$$

$$2\mu\varepsilon(\mathbf{u}^n)\mathbf{n} - p^n \mathbf{n} = -\rho_w |\mathbf{g}| (z_{wl} - z)\mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma_F^n, \quad (5.37)$$

$$2\mu\varepsilon(\mathbf{u}^n)\mathbf{n} - p^n \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_S^n, \quad (5.38)$$

où la viscosité μ est définie par (5.6) avec \mathbf{u}^n à la place de \mathbf{u} .

5.2.2 Discrétisation en espace

Comme dans la section 2.2, nous utilisons deux maillages différents : la méthode des caractéristiques est implémentée sur une grille structurée \mathcal{T}_h pour résoudre les problèmes d'advection alors que la méthode des éléments finis est implémentée sur un maillage non structuré \mathcal{T}_H pour

résoudre le problème de diffusion, voir la figure 5.4. Cette stratégie a déjà montré son efficacité au chapitre 2 pour la résolution des équations de Stokes pour la glace vierge. Elle présente d'autres avantages pour la résolution du champ d'endommagement. Premièrement, le maillage uniforme \mathcal{T}_h n'influence pas la direction de propagation des fissures. Deuxièmement, la géométrie du domaine de calcul peut être fortement modifiée suite à la rupture d'un bloc et cette méthode s'est déjà montrée performante pour traiter des géométries compliquées [76, 21, 11, 20]. Troisièmement, de forts gradients de vitesse sont attendus en bordure de fissure nécessitant un raffinement local que peut contenir le maillage non structuré \mathcal{T}_H .

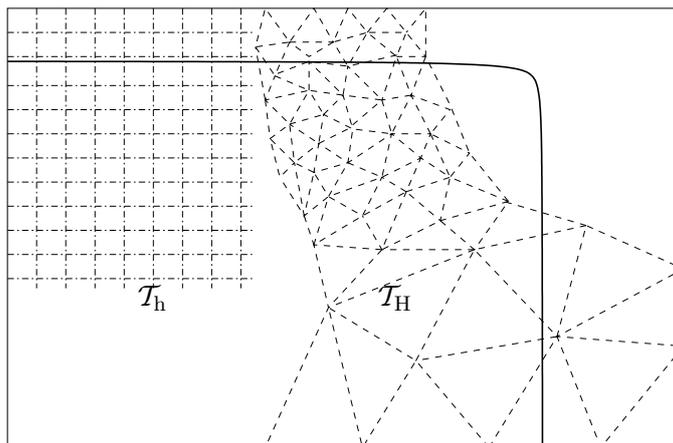


FIG. 5.4. Illustration des deux maillages \mathcal{T}_h and \mathcal{T}_H .

5.2.3 Étape d'advection

L'implémentation des équations (5.26) - (5.28) est très similaire à l'algorithme de transport décrit à la section 2.3. Le transport de φ , via l'équation (5.26), se fait en advectant puis en projetant φ sur la grille \mathcal{T}_h , voir la section 2.3.1. L'algorithme SLIC permet de réduire la diffusion numérique, voir la section 2.3.2. Le transport de \mathbf{u} et D , via les équations (5.27) et (5.28), se fait également par advection puis par projection. Cependant, l'algorithme SLIC est ici inutile puisque ces deux quantités sont continues, contrairement à φ . Des détails sur le transport de \mathbf{u} sont donnés dans [76, 74]. Après l'étape d'advection, on obtient : $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et $D^{n-\frac{1}{2}}$. Puisque $b = 0$, il n'est pas nécessaire d'appliquer l'algorithme d'accumulation et d'ablation de la section 2.3.3. On pose directement $\varphi^n = \varphi^{n-\frac{1}{2}}$ pour toute cellule de \mathcal{T}_h . L'étape suivante consiste à résoudre l'équation (5.32) sur chaque cellule du maillage \mathcal{T}_h pour obtenir D^n . En utilisant la formule (2.26), on interpole les quantités φ^n , $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et D^n de \mathcal{T}_h sur \mathcal{T}_H pour obtenir respectivement φ^n , $\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}$ et D^n en tous les nœuds du maillage \mathcal{T}_H . De façon similaire à la section 2.4, le domaine de calcul est défini comme l'union des éléments de \mathcal{T}_H qui possèdent au moins un nœud P qui vérifie $\varphi_P^n \geq 0.5$.

5.2.4 Étape de diffusion

Tout comme à la section 2.5.1, on résout le système d'équations (5.33) (5.34) avec les conditions de bords (5.35) - (5.38) en utilisant une méthode d'éléments finis. La formulation variationnelle du problème continue est la suivante : on cherche $\mathbf{u}^n : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p^n : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels

que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in}$ sur Γ_I^n , $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_B^n et :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^n} \rho \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau^n} \cdot \mathbf{v} dV + 2 \int_{\Omega^n} (1 - D^n) \mu(|\varepsilon(\mathbf{u}^n)|) \varepsilon(\mathbf{u}^n) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega^n} p^n \operatorname{div} \mathbf{v} dV \\ + \int_{\Omega^n} \operatorname{div} \mathbf{u}^n q dV = \rho \int_{\Omega^n} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \rho_w |\mathbf{g}| \int_{\Gamma_F^n} (z_{wl} - z)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \end{aligned} \quad (5.39)$$

pour tout couple (\mathbf{v}, q) tels que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\Gamma_B^n \cup \Gamma_I^n$.

Comme à la section 2.5.1, on choisit des espaces d'éléments finis continus et linéaires par morceaux pour la vitesse et pour la pression, pour discrétiser en espace l'équation (5.39). Ces espaces prennent en compte les conditions essentielles $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in}$ sur Γ_I^n et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_B^n . Comme à la section 2.5.1, l'équation discrétisée doit être stabilisée par le résidu de l'équation (5.33). On trouvera dans [74, 38] des détails concernant la stabilisation de l'équation de Navier-Stokes. Enfin, on linéarise le problème (5.39) avec la méthode de point fixe décrite à la section 2.5.4.

5.2.5 Adaptation du pas de temps

Dans le modèle d'endommagement, une fissure est vue comme une mince couche de glace avec une viscosité fortement diminuée. Dans l'intervalle de temps $[0, T]$, on distingue deux régimes : quasi statique et dynamique. On passe du régime quasi statique au régime dynamique quand les vitesses maximales dépassent un certain seuil. Ce changement de régime nous contraint à adapter le pas de temps. En régime quasi-statique, le pas de temps ne doit pas être trop grand pour ne pas altérer le processus d'endommagement. En régime dynamique, le pas de temps doit être contrôlé par le nombre CFL, défini par l'équation (2.23). Le nombre CFL est le nombre maximum de fractions de cellules traversées par \mathbf{u}^n pendant une itération. Finalement, chaque pas de temps est calculé selon la formule suivante :

$$\tau^n = \min \left(\frac{\overline{\text{CFL}} \times h}{\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty}}, \Delta t_{max} \right), \quad (5.40)$$

où Δt_{max} et $\overline{\text{CFL}}$ sont des paramètres numériques donnés.

5.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous appliquons le modèle et la méthode numérique décrite dans les sections 5.1 et 5.2 pour simuler le détachement de blocs de glace qui a lieu lors du vêlage d'un glacier. La simulation est exposée dans la première partie. Dans la deuxième partie, on analyse la sensibilité des résultats aux maillages et aux paramètres physiques et numériques.

5.3.1 Simulation du vêlage d'un glacier

Au temps initial, la géométrie de la figure 5.2 est considérée et le champ d'endommagement est supposé nul partout ($D(\cdot, 0) = 0$). Les paramètres physiques et numériques sont reportés au tableau 5.1. Les paramètres A et m qui interviennent dans l'équation (5.6) sont des valeurs standards en glaciologie pour la glace vierge. Comme pour les simulations du chapitre 4, le paramètre de régularisation σ_0 est petit. Les paramètres physiques B, α, β, r, k et λ_h qui interviennent dans (5.16) sont pris dans [87]. La calibration de certains de ces paramètres se trouve dans [89]. Notons que le coefficient σ_{th} est calculé en utilisant l'équation (18) de [89]. Les paramètres physiques r

et k et les paramètres numériques ϵ et Δt_{max} font l'objet d'une discussion dans la section 5.3.2. Le flux de glace entrant est défini par :

$$\mathbf{u}_{in}(z) = C_{pro}(H^{m+1}(0) - (H(0) - z)^{m+1}), \quad (5.41)$$

où $H(x)$ est la fonction hauteur de glace et C_{pro} est un coefficient positif. Notons que le profil de vitesse, défini par (5.41), correspond  une solution exacte des équations du "Shallow Ice Approximation", voir [80]. Le coefficient C_{pro} est choisi pour que la vitesse maximale $C_{pro} H^{m+1}(0)$ du profil soit de l'ordre de 1.5 mètre par années. Le maillage \mathcal{T}_h est une grille formée de 600×800 carrés recouvrant la cavité Λ . Le maillage non structuré \mathcal{T}_H est localement raffiné dans la zone où l'endommagement est attendu. Il possède environ 16000 nœuds et correspond au maillage 3 défini dans la section 5.3.2, voir également la figure 5.7.

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
m	3	-	λ_h	0.4	-
A	6.8×10^{-24}	$\text{Pa}^{-m} \text{s}^{-1}$	r	0.43	-
$ \mathbf{g} $	9.81	m s^{-2}	k	2	-
ρ	900	kg m^{-3}	σ_{th}	44000	Pa
ρ_w	1000	kg m^{-3}	z_{wl}	12	m
B	1.7×10^{-9}	$\text{Pa}^{-r} \text{s}^{-1}$	σ_0	1000	Pa
α	0.21	-	Δt_{max}	10^5	s
β	0.63	-	ϵ	10^{-3}	-
\overline{X}	45	m	CFL	0.9	-
\overline{Z}	35	m	-	-	-

TAB. 5.1. Paramètres physiques et numériques utilisés pour la simulation du vlage.

La simulation du vlage du glacier est reportée  la figure 5.6. La première phase (quasi statique) a lieu du jour 0 au jour 290, voir la figure 5.6 (a,b,c,d,e). L'écoulement est très lent et le pas de temps est maximal, égal  Δt_{max} . Les contraintes internes permettent la création d'endommagement dans la zone attendue (figure 5.6, b). Cette zone s'étend ensuite vers l'intérieur jusqu' traverser l'ensemble du bloc. La deuxième phase (dynamique), voir figure 5.6 (f,g,h), décrit la rupture. Le bloc est bien plus rapide que dans la première phase et la procédure d'adaptation en temps, décrite  la section 5.2.5, réduit considérablement le pas de temps, voir la figure 5.5. Remarquons que la surface libre est aspirée  l'intérieur de la fissure. Cependant, puisque l'algorithme de transport conserve la masse, l'ouverture de la fissure par la surface libre reste limitée tant que le bloc reste attaché sur un coté. L'ouverture est bien plus franche lors de la seconde phase. Notons que la seconde phase est irréaliste puisque la séparation du bloc dure un jour.

5.3.2 Tests de sensibilité

Sensibilité du maillage

Dans cette section, on étudie l'influence du maillage \mathcal{T}_H sur la solution du problème. Trois maillages \mathcal{T}_H sont construits : le maillage 1 est uniforme et est constitué d'éléments d'environ 1 mètre de diamètre et contient environ 1500 nœuds. Le maillage 2 est obtenu en raffinant la zone où de l'endommagement est attendu, voir la figure 5.2. Dans cette zone, la taille des éléments est d'environ 0.5 mètre. Le maillage 2 contient environ 4600 nœuds. Toujours en raffinant cette zone,

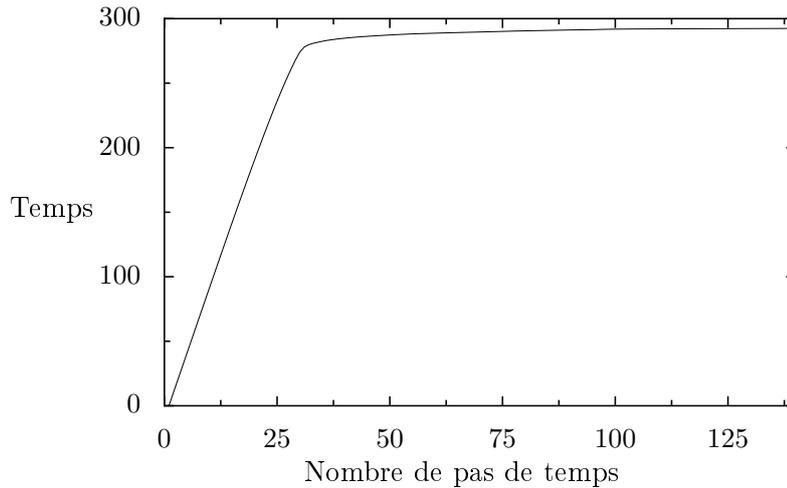


FIG. 5.5. Temps t^n en fonction du nombre de pas de temps n . Les deux phases (quasi-statique et dynamique) sont facilement différenciables.

on construit le maillage 3. Il contient environ 16000 nœuds et la taille des plus petits éléments est d'environ 0.25 mètre. Chaque maillage \mathcal{T}_H correspond à un maillage \mathcal{T}_h qui respecte le rapport d'aspect $H \sim 5h$, conseillé à la section 2.2. On réitère la simulation de la section précédente avec chaque maillage \mathcal{T}_H et les paramètres des tableaux 5.1. L'endommagement et sa propagation peuvent être comparées sur chaque maillage à la figure 5.7.

Pour chaque maillage \mathcal{T}_H , la fissure s'amorce dans la même zone, voir la première colonne de la figure 5.7 et se propage dans la même direction, voir la seconde colonne de la figure 5.7. Remarquons que le maillage le plus fin capte de petites fissures annexes qu'ignorent les deux autres maillages plus grossiers. Le temps de rupture dépend du maillage. En effet, il est de 331 jours avec le maillage 1, de 212 jours avec le maillage 2 et de 198 jours avec le maillage 3. On observe cependant que le temps de rupture se stabilise avec le raffinement du maillage. Remarquons enfin que la largeur de la fissure ne dépend pas du maillage.

Sensibilité des paramètres numériques ϵ et Δt_{max} .

Les paramètres numériques ϵ et Δt_{max} peuvent modifier significativement le processus d'endommagement et changer le temps de rupture. Le rôle du paramètre ϵ consiste à éviter d'obtenir une viscosité endommagée $(1 - D)\mu$ nulle si $D = 1$. Si ϵ est choisi trop petit ($\epsilon = 10^{-6}$), le saut de viscosité est trop important alors que si ϵ est choisi trop grand ($\epsilon = 10^{-1}$), la variable d'endommagement n'affecte pas suffisamment la viscosité. Un compromis doit être trouvé. La figure 5.8 de gauche expose le temps de rupture en fonction de ϵ . Le rôle du paramètre Δt_{max} consiste à limiter le pas de temps pour que la première phase ait lieu de façon quasi statique. La figure 5.8 reporte les temps de ruptures avec plusieurs valeurs de Δt_{max} . A l'exception de ϵ et Δt_{max} , les paramètres reportés dans les tableaux 5.1 sont utilisés. Toutes les expériences ont été réalisées avec le maillage 2, décrit dans la section précédente. Les résultats de la figure 5.8 montrent que ϵ doit être plus petit que 10^{-3} (valeur utilisée dans [88]) et que Δt_{max} doit être inférieur à 10^5 pour réduire autant que possible leurs influences sur le temps de rupture.

Sensibilité des paramètres physiques k et r

Deux paramètres sont particulièrement sensibles parmi tous les paramètres physiques. La figure 5.9 reporte l'influence de k et r sur le temps de rupture. A l'exception de k et r , les paramètres reportés aux tableaux 5.1 ont été utilisés. Toutes les expériences sont réalisées avec le maillage 2. Les résultats de la figure 5.9 confirment la forte influence des paramètres k et r . Ces paramètres doivent être ajustés à des mesures effectuées d'après une expérience physique.

5.4 Conclusions et perspectives

La simulation du vèlage d'un glacier a été réalisée au moyen d'un modèle d'endommagement. L'utilisation de deux maillages avec une description "Volume of Fluid", s'avère efficace, comme le montre la simulation effectuée. Des expériences numériques montrent que le maillage n'a pas d'influence sur la localisation de la fissure. La sensibilité des principaux paramètres numériques et physiques a été testée. Plusieurs extensions du modèle apporteront une amélioration certaine aux résultats physiques. Par exemple, l'introduction d'une loi de glissement basal donnerait lieu à des expériences numériques pertinentes étant donné que le vèlage peut être fortement influencé par le glissement [8]. Une deuxième extension consisterait à coupler le modèle rhéologique à un modèle thermique pour prendre en compte la température de la glace et son influence sur la viscosité et l'endommagement. Une troisième extension concerne la fonte de glace à l'interface eau-glace qui doit être prise en compte comme un processus d'ablation. Le modèle d'endommagement de la glace pourrait être utilisé pour de nombreux autres phénomènes tels que l'ouverture de crevasse ou la rupture de glaciers suspendus [88]. Nous avons vu que le paramètre ϵ joue un rôle essentiel quant au traitement numérique du changement de phase. Le paramètre ϵ doit être choisi aussi petit que possible pour respecter la physique. Cependant si ϵ est trop petit, la méthode numérique est détériorée. Une méthode numérique qui autorise de plus petits ϵ rendrait plus réalistes les simulations présentées dans ce chapitre.

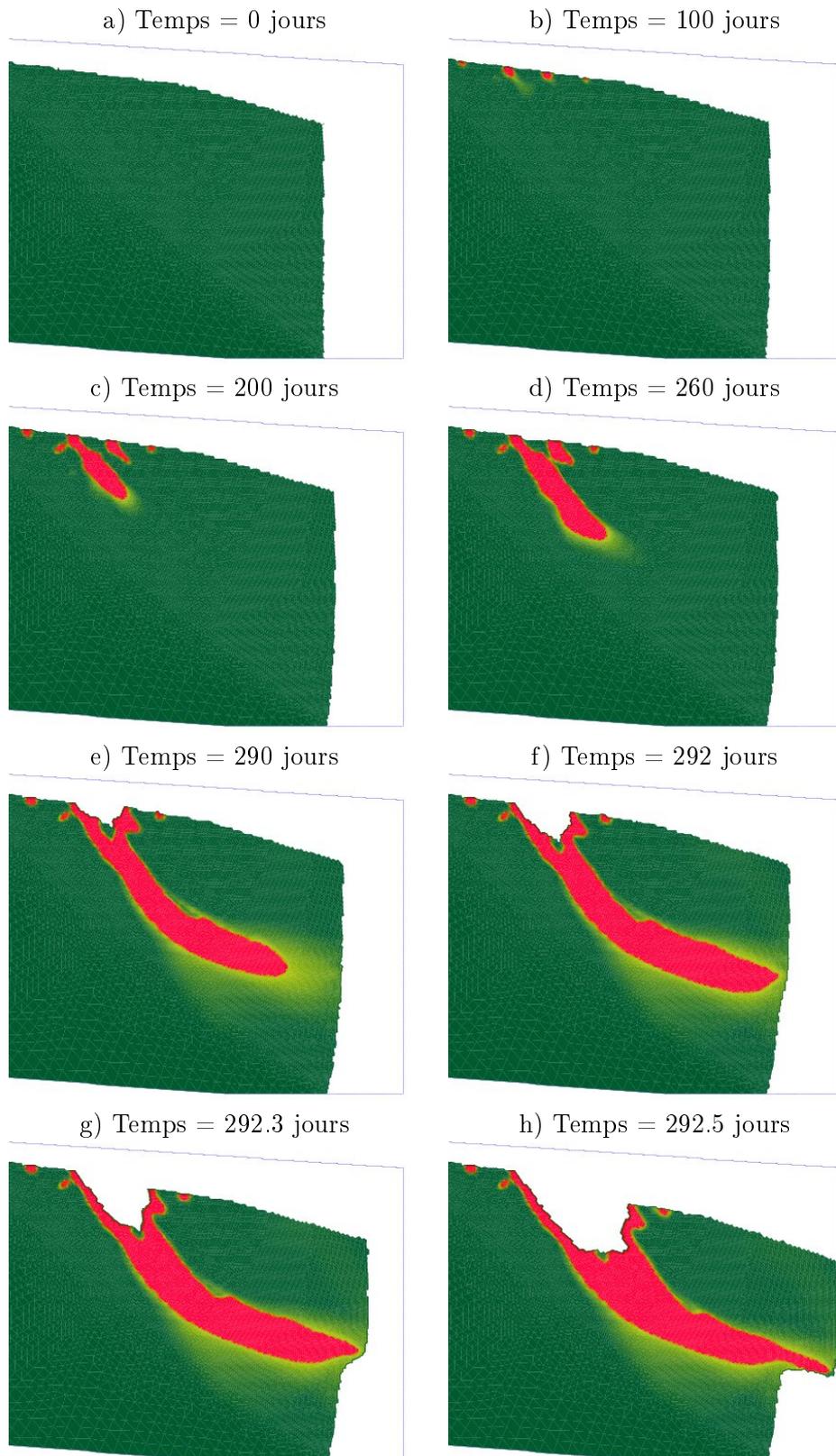
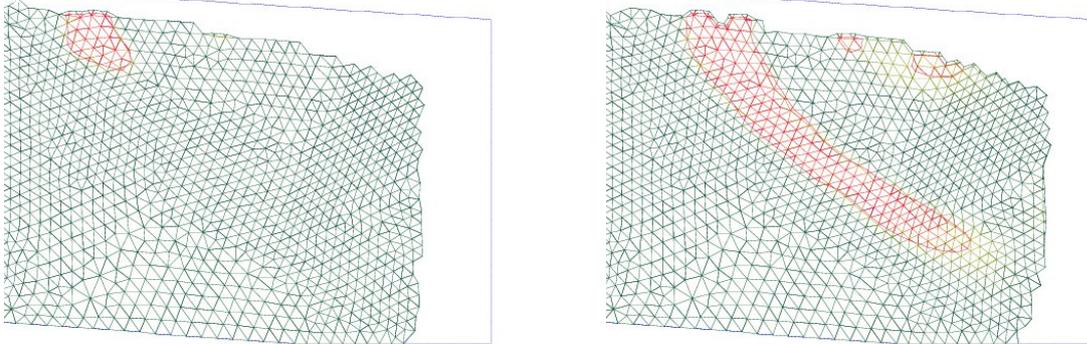
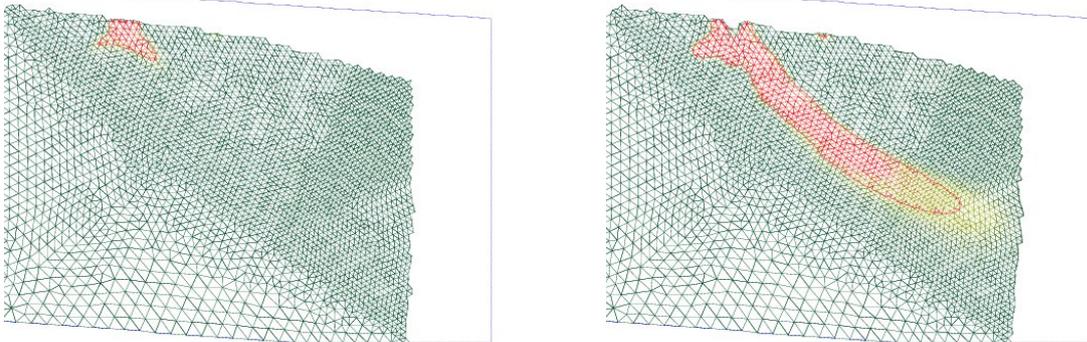


FIG. 5.6. Simulation numérique du processus de vêlage. La couleur verte signifie que l'endommagement est nul ($D = 0$) alors que la couleur rouge signifie que l'endommagement est maximal ($D = 1 - \epsilon$). Au temps initial, le bloc de glace est vierge ($D = 0$). La première phase (quasi statique) correspond aux images a,b,c,d et e. La deuxième phase (dynamique) avec des vitesses élevées correspond aux images f, g et h.

Maillage 1



Maillage 2



Maillage 3

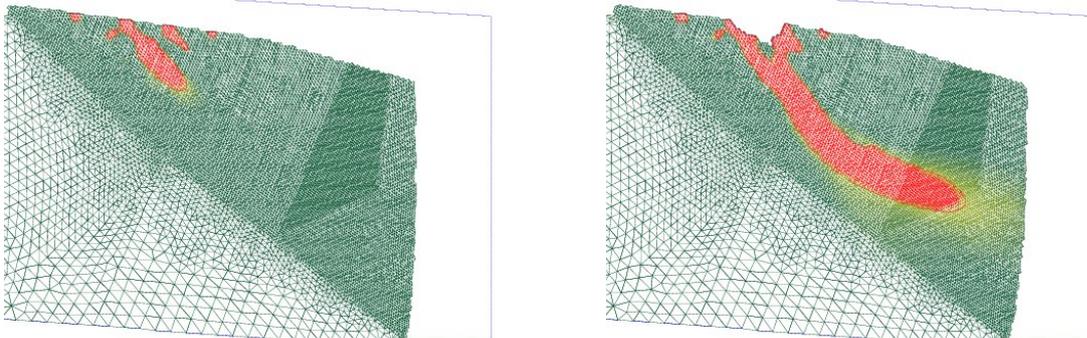


FIG. 5.7. Localisation de la fissure (en rouge, $D = 1$) à 100 jours à gauche et 200 jours à droite avec, respectivement de haut en bas, les maillages 1, 2 et 3. La couleur verte signifie que l'endommagement est minimal ($D = 0$) alors que la couleur rouge signifie que l'endommagement est maximal ($D = 1 - \epsilon$).

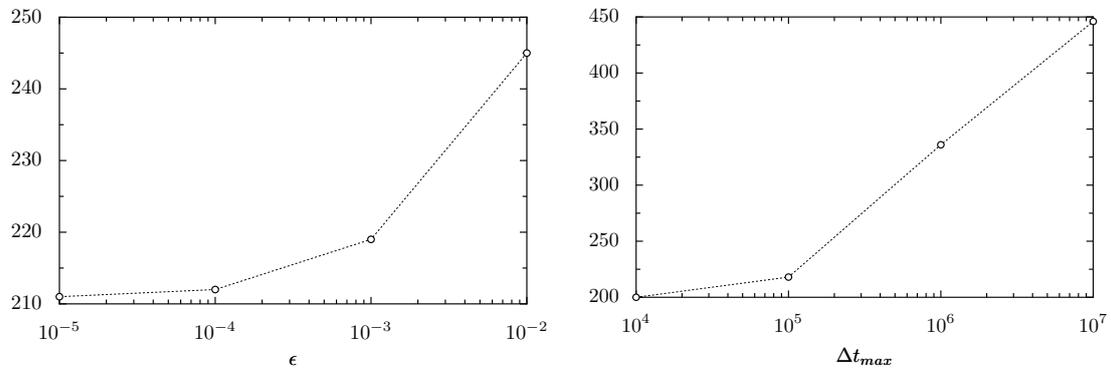


FIG. 5.8. Temps de rupture en fonction des paramètres numériques ϵ et Δt_{max} .

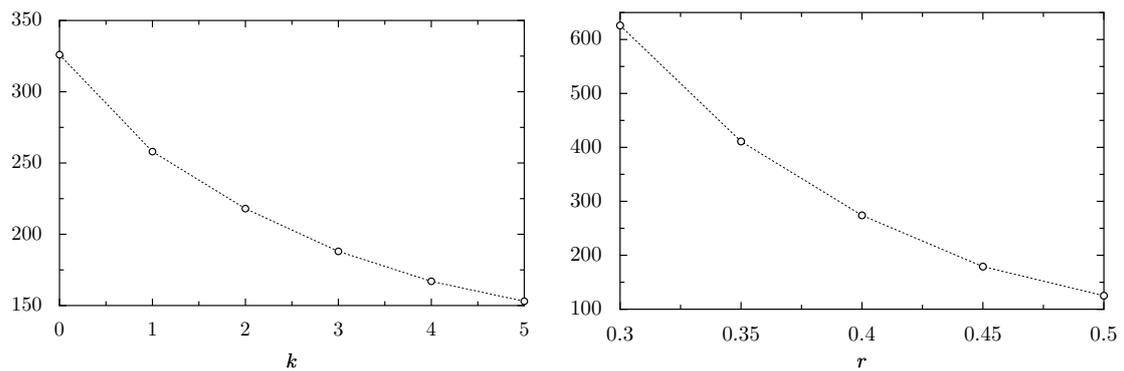


FIG. 5.9. Temps de rupture en fonction des paramètres physiques k et r .

Chapitre 6

Solution stationnaire pour un problème d'islandis

Un islandis (ou calotte polaire) est une très vaste nappe de glace étendue sur une base continentale. A l'heure actuelle, il n'existe que deux islandis : l'un s'étend sur le Groenland et l'autre sur l'Antarctique. Les islandis font l'objet de nombreuses études depuis les années 50. Le retrait substantiel de bon nombre de glaciers du Groenland et d'Antarctique est une des réponses les plus visibles du réchauffement climatique [39]. Cette occurrence a conduit les glaciologues à focaliser leurs recherches sur la réaction des masses glaciaires au changement climatique. La dynamique des islandis est en de nombreux points similaire à celle des glaciers de montagne vue dans le chapitre 1, voir [80, 57]. D'une part, la glace se déforme sous son propre poids et d'autre part, des phénomènes d'accumulation et d'ablation induisent un échange de masse avec l'extérieur. La différence majeure réside dans le rapport entre la longueur caractéristique et la hauteur caractéristique : de l'ordre de 10^{-1} pour un glacier de montagne et de l'ordre de 10^{-3} pour un islandis. Pour modéliser les islandis, le modèle simplifié du "Shallow Ice Approximation" est populaire [36, 57, 80, 49]. Il a plusieurs raisons à cela. Premièrement, il s'agit du modèle le plus simple, basé sur une hypothèse de couche mince. Deuxièmement, des solutions numériques peuvent être facilement implémentées [58, 102, 15]. Troisièmement, des solutions exactes peuvent être trouvées sous certaines hypothèses [18, 16]. Par ailleurs, il existe plusieurs résultats d'existence et d'unicité de solutions des équations du "Shallow Ice Approximation" [22, 3].

Dans ce chapitre, on considère les équations du "Shallow Ice Approximation" pour modéliser un islandis idéalisé sur un socle horizontal plat et fini. Tous les résultats d'existence et d'unicité de solutions existants dans la littérature considèrent une paramétrisation du bilan de masse indépendante de l'altitude [22, 3]. Cependant, l'expérience montre une forte corrélation entre altitude et bilan de masse. On adresse le problème de l'existence d'une forme stationnaire lorsque le bilan de masse croît linéairement avec l'altitude. Ce résultat a été suggéré dans la section 4.4 par l'expérience numérique pour un glacier de montagne avec un modèle de Stokes. Pour un modèle de "Shallow Ice Approximation", des expériences similaires ont été menées dans [72]. Dans ce chapitre, on donne une preuve mathématique d'une telle existence. La nouveauté de ce résultat réside dans le fait que le terme source (le bilan de masse) dépend de l'inconnue (l'altitude de la surface). Un schéma numérique, inspiré de [15], permet de construire une solution numérique au problème évolutif associé et ainsi de voir comment cette solution se stabilise dans le temps. L'expérience numérique met en évidence une unique solution qui possède les propriétés physiques attendues (symétrie, positivité et décroissance radiale), ce qui confirme le résultat théorique. Ce chapitre est organisé de la façon suivante : le modèle est présenté dans la section 6.1. Le théorème d'existence est énoncé et prouvé dans la section 6.2. La méthode numérique est décrite dans la

section 6.3. Les résultats numériques sont exposés dans la section 6.4.

6.1 Modélisation

On considère l'évolution d'un islandis bidimensionnel sur une base horizontale plane, voir la figure 6.1. On adopte, dans ce chapitre, une description lagrangienne du domaine de glace, via la fonction $H(x, t)$, qui est la hauteur de glace au point x et au temps t :

$$H : [-L, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

où $L, T > 0$. Le domaine $[-L, L]$ délimite l'islandis horizontalement. Par conséquent, on doit imposer à la fonction H d'être nulle aux extrémités $-L$ et L . D'une évidence physique, la fonction H doit être positive, paire, maximale en 0 et radialement décroissante sur $[0, L]$. Le domaine de glace $\Omega(t)$ est défini par H :

$$\Omega(t) := \{\mathbf{x} = (x, z) \ ; \ 0 \leq z \leq H(x, t)\},$$

ainsi que ses bords $\Gamma_S(t)$ et $\Gamma_B(t)$:

$$\Gamma_S(t) := \{\mathbf{x} = (x, z) \ ; \ z = H(x, t)\},$$

$$\Gamma_B(t) := \{\mathbf{x} = (x, z) \ ; \ z = 0\}.$$

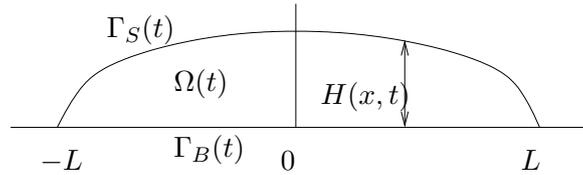


FIG. 6.1. Coupe verticale d'un islandis sur une surface plane.

Au chapitre 1, nous avons vu que la glace peut se mettre en mouvement sous l'effet de la gravité par déformation comme un fluide ou bien par glissement comme un solide. Dans ce chapitre, on néglige tout phénomène de glissement en supposant que la glace est fixée au sol. Nous supposons que la glace est un fluide non newtonien gouverné par la loi de Glen non régularisée (équation (1.4) avec $\tau_0 = 0$). L'équation de conservation de la quantité de mouvement, combinée à une analyse des dimensions, voir section 1.1.3, conduit aux équations de Stokes non linéaires (1.12) - (1.14) avec les conditions de bords (1.15) et (1.16). Le modèle du "Shallow Ice Approximation" est obtenu en faisant une hypothèse de couche mince [57, 36]. Plus précisément, on introduit ϵ qui est le rapport entre la hauteur et la longueur caractéristique d'un islandis. Les équations du "Shallow Ice Approximation" sont obtenues en négligeant dans les équations (1.12) - (1.14) avec les conditions de bords (1.15) et (1.16) les termes en $\mathcal{O}(\epsilon)$, voir [95] pour les détails. De nombreuses simplifications interviennent. D'une part, la pression est hydrostatique, déterminée par la formule :

$$p = \rho |\mathbf{g}| (H - z),$$

(où \mathbf{g} et ρ sont respectivement le vecteur gravité et la densité) et d'autre part, la composante horizontale de la vitesse est donnée par [17, 15] :

$$u = -2A(\rho |\mathbf{g}|)^m \frac{\partial H}{\partial x} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{m-1} \int_0^z (H - \xi)^m d\xi. \quad (6.1)$$

où A et $m > 1$ sont respectivement le facteur d'Arrhenius et l'exposant de Glen. En utilisant la relation d'incompressibilité de la glace (1.14), on en déduit la deuxième composante de la vitesse :

$$w = - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} d\xi.$$

En suivant la section 1.2.2, le modèle est complété de l'équation de Saint-Venant pour la fonction H . En deux dimensions, l'équation (1.23) se réécrit :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{H(x,t)} u(x, z, t) dz \right) = b(x, H(x, t), t), \quad (6.2)$$

où $b = b(x, z, t)$ dénote la fonction bilan de masse, voir la section 1.2.1. On peut écrire (6.1) et (6.2) en une seule équation :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(H^{m+2} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{m-1} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = b(x, H(x, t), t), \quad (6.3)$$

où

$$\Gamma := \frac{2(\rho|\mathbf{g}|)^m A}{m+2},$$

est une constante positive.

Dans la littérature, le bilan de masse est usuellement supposé être une donnée du problème qui ne dépend que de l'abscisse $b = b(x, t)$. En réalité, le bilan de masse peut dépendre fortement de l'altitude z . On utilise une fonction bilan de masse paramétrée par :

$$b(z) = a_m(z - z_{\text{ELA}}), \quad (6.4)$$

où a_m est le gradient de fonte et z_{ELA} est la ligne d'équilibre. Notons que b ne dépend pas du temps, puisque nous sommes intéressés par les solutions stationnaires. Notons que cette définition (4.6) de b est comparable à la définition donnée dans la section 4.4. En résumé, le problème évolutif consiste à trouver $H : [-L, L] \mapsto \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \Gamma (H^{m+2} |H'|^{m-1} H')' = a_m(H - z_{\text{ELA}}), \quad \text{dans } (-L, L) \times (0, T), \quad (6.5)$$

$$H > 0, \quad \text{dans } (-L, L) \times (0, T), \quad (6.6)$$

$$H(-L) = H(L) = 0, \quad (6.7)$$

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad \text{dans } (-L, L), \quad (6.8)$$

où H_0 est la fonction hauteur de glace initiale donnée. Le symbole $'$ désigne la dérivée en espace $\frac{d}{dx}$.

6.2 Analyse mathématique

Dans cette section, on prouve l'existence d'une solution stationnaire du système (6.5) - (6.7). La première étape, qui est l'objet de la section suivante, consiste en une reformulation du problème stationnaire.

6.2.1 Reformulation du problème

Le problème stationnaire associé au système (6.5) - (6.7) est réécrit dans l'intervalle $[-1, 1]$ avec normalisation de H , en posant :

$$\tilde{H}(\tilde{x}) = \frac{H(x)}{z_{\text{ELA}}} \quad \text{et} \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}.$$

On ôte la dérivée de H en temps dans (6.5), puis on reformule les équations (6.5), (6.6) et (6.7) en fonction de \tilde{H} :

$$-\Gamma \frac{(z_{\text{ELA}})^{2m+1}}{L^{m+1}} \left(\tilde{H}^{m+2} |\tilde{H}'|^{m-1} \tilde{H}' \right)' = a_m (\tilde{H} - 1), \quad \text{dans } (-1, 1), \quad (6.9)$$

$$\tilde{H} > 0, \quad \text{dans } (-1, 1), \quad (6.10)$$

$$\tilde{H}(-1) = \tilde{H}(1) = 0. \quad (6.11)$$

On transforme ensuite l'équation (6.9) sous forme d'un p -Laplacien en changeant la variable \tilde{H} en la nouvelle variable :

$$\eta := \tilde{H}^{\frac{2m+2}{m}}. \quad (6.12)$$

Ce changement de variable est motivé par le calcul suivant [94, 22, 3] :

$$\tilde{H}^{m+2} |\tilde{H}'|^{m-1} \tilde{H}' = \left(\frac{2(m+1)}{m} \right)^{-m} |\eta'|^{m-1} \eta'.$$

Les équations (6.9), (6.10) et (6.11) sont respectivement reformulées en fonction de η . On cherche une fonction $\eta : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$-(|\eta'|^{m-1} \eta')' = \alpha (\eta^{\frac{m}{2(m+1)}} - 1), \quad \text{dans } (-1, 1), \quad (6.13)$$

$$\eta > 0, \quad \text{dans } (-1, 1), \quad (6.14)$$

$$\eta(-1) = \eta(1) = 0, \quad (6.15)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\Gamma} \frac{L^{m+1}}{(z_{\text{ELA}})^{2m+1}} \left(\frac{2(m+1)}{m} \right)^m a_m, \quad (6.16)$$

est un coefficient adimensionnel positif.

L'existence d'une fonction η satisfaisant (6.13) - (6.15) est prouvé dans la suite. Puisque les changements de variables $x \mapsto \tilde{x}$, $H \mapsto \tilde{H}$ et $\tilde{H} \mapsto \eta$ sont bijectifs, on en déduira l'existence d'une solution stationnaire au problème original (6.5) - (6.8).

L'existence d'une solution positive du problème :

$$-(|\eta'|^{p-2} \eta')' = g(\eta),$$

dans $(-1, 1)$, avec les conditions de bords $\eta(-1) = \eta(1) = 0$, $p > 2$, où g est un terme source non linéaire qui change de signe, a été étudié par de nombreux auteurs, voir [25, 5, 71] pour donner quelques exemples. Cependant, dans notre cas, la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$g(\eta) = \alpha (\eta^{\frac{m}{2(m+1)}} - 1). \quad (6.17)$$

ne satisfait aucune hypothèse de résultats existants (dans la limite de nos connaissances), principalement car la fonction g est négative au voisinage de 0.

Le théorème 6.2.2 est le principal résultat du chapitre. Il établit l'existence d'une solution paire et radialement décroissante du problème (6.13) - (6.15) en utilisant le calcul des variations. Le théorème 6.2.2 requiert plusieurs étapes pour être prouvé : la première étape (section 6.2.2) consiste à prouver l'existence d'un minimum d'un problème de minimisation associé. Dans la deuxième étape (section 6.2.3), on montre que le minimum peut être choisi pair, radialement décroissant et positif sur $(-1, 1)$, pour autant que α soit assez grand. Dans la troisième étape (section 6.2.4), on montre que le minimum satisfait le problème (6.13) - (6.15).

6.2.2 Existence d'un minimiseur

Du point de vue du calcul des variations, être solution de (6.13) revient à être le point stationnaire d'une fonctionnelle bien choisie. Par conséquent, on se focalise sur les extrema de cette fonctionnelle qui sont nécessairement des points stationnaires. Dans le but d'analyser le problème (6.13) - (6.15), on définit l'espace de Banach suivant :

$$W_0^{1,p}(-1, 1) := \{\eta \in W^{1,p}(-1, 1); \quad \eta(-1) = \eta(1) = 0\},$$

où $p := m + 1$. Remarquons que $p > 2$ puisque $m > 1$. Par conséquent, on a l'injection suivante : $W_0^{1,p}(-1, 1) \subset C^0([-1, 1])$, voir par exemple [12]. On note K le sous ensemble convexe fermé de $W_0^{1,p}(-1, 1)$, défini par :

$$K = \{\eta \in W_0^{1,p}(-1, 1); \quad \eta \geq 0\}.$$

On introduit la fonctionnelle J , définie sur K :

$$J(\eta) = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{p} |\eta'|^p - \frac{\alpha}{q} \eta^q + \alpha \eta \right) dx, \quad (6.18)$$

où $q := \frac{m}{2(m+1)} + 1 \in (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$. La fonctionnelle J est Gâteaux différentiable. Un calcul formel montre que, pour η dans K et $\varphi \in W_0^{1,p}(-1, 1)$ tel que $\varphi(x) \geq 0$ si $\eta(x) = 0$ donnés :

$$\langle DJ(\eta), \varphi \rangle = \int_{-1}^{+1} (|\eta'|^{p-2} \eta' \varphi' - \alpha \eta^{q-1} \varphi + \alpha \varphi) dx. \quad (6.19)$$

Remarque 6.2.1. *La formulation faible du problème (6.13)-(6.15) est la suivante : trouver $\eta \in K$ qui vérifie $\langle DJ(\eta), \varphi \rangle = 0$ pour toutes fonctions tests $\varphi \in W_0^{1,p}(-1, 1)$.*

Dans le lemme 6.2.1, on montre que la fonctionnelle J est coercive (au sens de la relation (6.20)) ce qui permet de montrer, dans le théorème 6.2.1, l'existence d'un minimiseur $\bar{\eta} \in K$ de J .

LEMME 6.2.1. *Il existe deux constantes positives D_1 et D_2 telles que :*

$$J(\eta) \geq D_1 \|\eta\|_{W^{1,p}}^p - D_2, \quad \forall \eta \in K. \quad (6.20)$$

Preuve

Par définition de J , on a :

$$J(\eta) = \frac{1}{p} \|\eta'\|_{L^p}^p - \frac{\alpha}{q} \|\eta\|_{L^q}^q + \alpha \|\eta\|_{L^1}.$$

L'inégalité de Hölder conduit à :

$$\|\eta\|_{L^q}^q = \int_{-1}^{+1} |\eta|^q \leq \left(\int_{-1}^{+1} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_{-1}^{+1} |\eta|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} = 2^{\frac{p-q}{p}} \|\eta\|_{L^p}^q.$$

Par conséquent, il existe $C_1 > 0$ tel que :

$$J(\eta) \geq \frac{1}{p} \|\eta'\|_{L^p}^p - C_1 \|\eta\|_{L^p}^q + \alpha \|\eta\|_{L^1} \geq \frac{1}{p} \|\eta'\|_{L^p}^p - C_1 \|\eta\|_{W^{1,p}}^q + \alpha \|\eta\|_{L^1}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on peut trouver $C_2 > 0$ tel que :

$$J(\eta) \geq C_2 \|\eta\|_{W^{1,p}}^p - C_1 \|\eta\|_{W^{1,p}}^q + \alpha \|\eta\|_{L^1}.$$

Puisque $p > q > 1$, la dernière inégalité implique (6.20). \square

THÉORÈME 6.2.1. *Il existe au moins un $\bar{\eta} \in K$ tel que :*

$$J(\bar{\eta}) = \inf\{J(\eta); \quad \eta \in K\}. \quad (6.21)$$

Preuve

D'un coté, $J(0) = 0$, et d'un autre coté, par le lemme 6.2.1, la fonctionnelle est bornée inférieurement, donc on peut définir :

$$\bar{m} := \inf\{J(\eta); \quad \eta \in K\}. \quad (6.22)$$

Soit $\{\eta_\nu\} \subset K$, une suite minimisante pour (6.22). On a :

$$J(\eta_\nu) \longrightarrow \bar{m}.$$

Il existe un entier N tel que pour tout $\nu > N$, on a :

$$\bar{m} + 1 \geq J(\eta_\nu).$$

En utilisant le lemme 6.2.1, on conclut que $\|\eta_\nu\|_{W^{1,p}}$ est borné. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite de $\{\eta_\nu\}$, toujours notée $\{\eta_\nu\}$, et trouver $\bar{\eta} \in W^{1,p}(-1, 1)$ de sorte que :

$$\eta_\nu \rightharpoonup \bar{\eta} \quad \text{dans } W^{1,p}(-1, 1), \quad \text{faiblement.}$$

Puisque K est fortement fermé et convexe, alors K est faiblement fermé, voir [12] p. 38. Par conséquent, $\bar{\eta} \in K$. Puisque $p > 1$, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{p}|\xi|^p$ est convexe. Le corollaire 3.24 p. 97 de [29] établit que J est faiblement semi continue inférieurement. Par conséquent,

$$\bar{m} = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(\eta_\nu) \geq J(\bar{\eta}) \geq \bar{m}.$$

\square

Remarque 6.2.2. *Puisque l'application $\eta \mapsto \frac{1}{p}|\xi|^p - \frac{\alpha}{q}\eta^q + \alpha\eta$ n'est pas convexe, on ne peut pas conclure que $\bar{\eta}$ est unique en utilisant les arguments de [29].*

6.2.3 Propriétés du minimiseur

Les trois lemmes suivants donnent des propriétés du minimiseur du théorème 6.2.1. Le lemme 6.2.2 montre que tout minimiseur de J peut être choisi pair et radialement décroissant, voir [14]. Le lemme 6.2.3 montre que tout minimiseur rend négatif la fonctionnelle J dès que α est assez grand. Le lemme 6.2.4 établit la positivité de tout minimiseur radialement décroissant. On commence par donner une définition de la symétrisation de Schwarz, tirée de [65] et utile dans la preuve du lemme 6.2.2.

DÉFINITION 6.2.1. Soit ζ une fonction bornée définie sur \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R}_+ . On définit le réarrangement décroissant sur \mathbb{R}_+ de la fonction ζ par :

$$\zeta^\#(s) = \begin{cases} \sup\{\zeta(x), & x \in \mathbb{R}\}, & \text{si } s = 0, \\ \inf\{t; \text{mes}\{x, \zeta(x) > t\} < s\}, & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Par la suite, on définit le réarrangement pair radialement décroissant (ou la symétrisation de Schwarz) sur \mathbb{R} de la fonction ζ par :

$$\zeta^*(s) = \zeta^\#(2|s|), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (6.24)$$

On donne ensuite deux propriétés de la symétrisation de Schwarz, tirées de [70] (respectivement p. 73 et p. 175).

PROPRIÉTÉ 6.2.1. Soit ζ une fonction bornée définie sur \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R}_+ et ζ^* sa symétrisation de Schwarz. Si $\zeta \in L^{\bar{r}}(\mathbb{R})$, alors pour tout $r \in [1, \bar{r}]$:

$$\zeta^* \in L^r(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (\zeta^*)^r = \int_{\mathbb{R}} \zeta^r. \quad (6.25)$$

De plus, si $\zeta \in W^{1, \bar{r}}(\mathbb{R})$, alors :

$$\zeta^* \in W^{1, \bar{r}}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |(\zeta^*)'|^{\bar{r}} \leq \int_{\mathbb{R}} |\zeta'|^{\bar{r}}. \quad (6.26)$$

Le lemme suivant est une conséquence de la définition 6.2.1 et de la propriété 6.2.1.

LEMME 6.2.2. Il existe une fonction paire et radialement décroissante dans l'ensemble K , notée η^* , telle que $J(\eta^*) = \inf\{J(\eta); \eta \in K\}$.

Preuve

Soit $\bar{\eta}$ un minimiseur de J dans K (le théorème 6.2.1 assure son existence). Considérons le réarrangement pair radialement décroissant (ou la symétrisation de Schwarz) η^* de $\bar{\eta}$, voir la définition 6.2.1. De la définition 6.2.1, on en déduit que la fonction η^* est positive et à support dans $(-1, 1)$. De la propriété 6.2.1 (équations (6.25) et (6.26)) et de la définition de J , via (6.18), on en déduit que $\eta^* \in K$ et

$$J(\eta^*) \leq J(\bar{\eta}),$$

ce qui prouve le lemme. □

LEMME 6.2.3. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $\alpha > \alpha_0$, alors $J(\eta^*) < 0$, où η^* est défini par le lemme 6.2.2.

Preuve

Considérons la fonction paire ($\in K$) :

$$\eta(x) := \alpha^{\frac{1}{m}}(1 - |x|).$$

Puisque $p = m + 1 > 2$ et $q = \frac{m}{2(m+1)} + 1 \in (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$. On a :

$$\begin{aligned} J(\eta) &= \int_{-1}^1 \frac{\alpha^{\frac{p}{m}}}{p} dx - \int_{-1}^1 \frac{\alpha^{1+\frac{q}{m}}}{q} (1 - |x|)^q dx + \int_{-1}^1 \alpha^{1+\frac{1}{m}} (1 - |x|) dx \\ &= \alpha^{1+\frac{1}{m}} \left(C_1 - C_2 \alpha^{\frac{1}{2(m+1)}} \right) \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives. Clairement, $J(\eta^*) \leq J(\eta) < 0$ dès que α est assez grand. □

LEMME 6.2.4. Soit $\eta^* \in K$ la fonction paire, radialement décroissante, définie par le lemme 6.2.2. Supposons que $\alpha > \alpha_0$, où α_0 est défini dans le lemme 6.2.3. Alors $\eta^* > 0$ sur $(-1, 1)$.

Preuve

Il est facile de voir que $\eta^*(0) > 0$. En effet, si $\eta^*(0) = 0$, alors η^* serait égal à zéro partout puisque η^* est continue, positive, décroissante sur $(0, 1)$ et $\eta^*(1) = 0$. Par conséquent, $J(\eta^*) = 0$ ce qui contredit le lemme 6.2.3. On définit :

$$\gamma := \sup\{x \in (0, 1) ; \eta^*(x) > 0\} \in (0, 1].$$

On veut montrer que $\gamma = 1$. Supposons que $\gamma < 1$, et définissons :

$$\zeta(x) := \gamma^{\frac{1-p}{p}} \eta^*(\gamma x) \in K.$$

Dans la suite, on montre que $J(\zeta) < J(\eta^*)$ lequel est une contradiction avec $J(\eta^*) = \inf\{J(\eta) ; \eta \in K\}$. On a :

$$\begin{aligned} J(\zeta) &= \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{p} |\zeta'(x)|^p - \frac{\alpha}{q} \zeta^q(x) + \alpha \zeta(x) \right) dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma^{1-p}}{p} \gamma^p |(\eta^*)'(\gamma x)|^p dx - \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha}{q} \gamma^{q \frac{1-p}{p}} (\eta^*)^q(\gamma x) dx + \int_{-1}^{+1} \alpha \gamma^{\frac{1-p}{p}} \eta^*(\gamma x) dx. \end{aligned}$$

En posant $t = \gamma x$, on obtient :

$$J(\zeta) = \frac{1}{p} \int_{-\gamma}^{\gamma} |(\eta^*)'(t)|^p dt - \frac{\alpha}{q} \gamma^{q \frac{1-p}{p} - 1} \int_{-\gamma}^{\gamma} (\eta^*)^q(t) dt + \alpha \gamma^{\frac{1-p}{p} - 1} \int_{-\gamma}^{\gamma} \eta^*(t) dt. \quad (6.27)$$

Les bornes d'intégrations $\pm\gamma$ dans (6.27), peuvent être remplacées par ± 1 puisque $\eta^* = 0$ en dehors de $(-\gamma, \gamma)$:

$$J(\zeta) = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 |(\eta^*)'(t)|^p dt - \frac{\alpha}{q} \gamma^{q \frac{1-p}{p} - 1} \int_{-1}^1 (\eta^*)^q(t) dt + \alpha \gamma^{\frac{1-p}{p} - 1} \int_{-1}^1 \eta^*(t) dt.$$

D'un côté, $\gamma^{q \frac{1-p}{p} - 1} > \gamma^{\frac{1-p}{p} - 1}$ et d'un autre côté, $-\frac{\alpha}{q} \int_{-1}^1 (\eta^*)^q(t) dt$ est négatif. Par conséquent,

$$J(\zeta) < \frac{1}{p} \int_{-1}^1 |(\eta^*)'(t)|^p dt + \gamma^{\frac{1-p}{p} - 1} \left(-\frac{\alpha}{q} \int_{-1}^1 (\eta^*)^q(t) dt + \alpha \int_{-1}^1 \eta^*(t) dt \right).$$

D'un côté $\gamma^{\frac{1-p}{p} - 1} > 1$ et d'un autre côté,

$$-\frac{\alpha}{q} \int_{-1}^1 (\eta^*)^q(t) dt + \alpha \int_{-1}^1 \eta^*(t) dt = J(\eta^*) - \int_{-1}^1 \frac{1}{p} |(\eta^*)'(x)|^p < 0,$$

car $J(\eta^*) < 0$ (lemme 6.2.3). Par conséquent, on a :

$$J(\zeta) < \frac{1}{p} \int_{-1}^1 |(\eta^*)'(t)|^p dt - \frac{\alpha}{q} \int_{-1}^1 (\eta^*)^q(t) dt + \alpha \int_{-1}^1 \eta^*(t) dt = J(\eta^*).$$

□

6.2.4 Existence d'une solution

Dans cette section, on montre que η^* , défini par le lemme 6.2.2, est une solution de (6.13) - (6.15) si α est assez grand.

THÉORÈME 6.2.2. *Soit $\eta^* \in K$, la fonction paire radialement décroissante, définie par le lemme 6.2.2. Supposons que $\alpha > \alpha_0$, où α_0 est défini dans le lemme 6.2.3. Alors η^* satisfait (6.13) - (6.15) et $\eta^* \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$.*

Preuve

Puisque η^* minimise J dans K , alors :

$$J((1 - \epsilon)\eta^* + \epsilon\xi) = J(\eta^* + \epsilon(\xi - \eta^*)) \geq J(\eta^*),$$

pour tout $\epsilon \in (0, 1)$ et $\xi \in K$. Il suit que :

$$\langle DJ(\eta^*), \xi - \eta^* \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(\eta^* + \epsilon(\xi - \eta^*)) - J(\eta^*)}{\epsilon} \geq 0,$$

lequel se réécrit :

$$\int_{-1}^{+1} (|(\eta^*)'|^{p-2}(\eta^*)'(\xi - \eta^*)' - \alpha(\eta^*)^{q-1}(\xi - \eta^*) + \alpha(\xi - \eta^*)) dx \geq 0. \quad (6.28)$$

Fixons une fonction $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(-1, 1)$. Puisque la fonction η^* est continue sur $[-1, 1]$ et que $\eta^* > 0$ sur $(-1, 1)$ (lemme 6.2.3), alors $\xi := \eta^* + \tau\zeta \in K$ si $|\tau|$ est suffisamment petit. Donc (6.28) implique :

$$\tau \int_{-1}^1 (|(\eta^*)'|^{p-2}(\eta^*)'\zeta' - \alpha(\eta^*)^{q-1}\zeta + \alpha\zeta) dx \geq 0.$$

Cette inégalité est valide pour tout τ suffisamment petit (positif et négatif). Par conséquent :

$$\int_{-1}^1 (|(\eta^*)'|^{p-2}(\eta^*)'\zeta' - \alpha(\eta^*)^{q-1}\zeta + \alpha\zeta) dx = 0, \quad (6.29)$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(-1, 1)$. Par définition de la dérivée faible, il suit que :

$$|(\eta^*)'|^{p-2}(\eta^*)' \in W^{1,1}(-1, 1), \quad (6.30)$$

et

$$(|(\eta^*)'|^{p-2}(\eta^*)')' = -\alpha(\eta^*)^{q-1} + \alpha, \quad (6.31)$$

presque partout sur $(-1, 1)$. Notons que (6.31) a lieu partout sur $[-1, 1]$ car $\eta^* \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$. De plus, puisque $W^{1,1}(-1, 1) \subset \mathcal{C}^0([-1, 1])$, on déduit de (6.30) que $(\eta^*)' \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ et $\eta^* \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$. \square

Remarque 6.2.3. *Par le théorème 6.2.2, il existe une fonction $H = z_{\text{ELA}}(\eta^*)^{\frac{m}{2(m+1)}}$ continue, paire, radialement décroissante et satisfaisant le problème stationnaire associé au problème évolutif (6.5) - (6.8). Du point de vue de la glaciologie, toutes ces propriétés rendent la solution physiquement admissible puisque la géométrie du lit rocheux est parfaitement plate.*

6.3 Méthode numérique

Afin de valider l'existence d'une solution stationnaire (voir le théorème 6.2.2 et la remarque 6.2.3), on propose un schéma numérique qui permette de trouver une solution numérique du problème évolutif (6.5) - (6.8). On réécrit l'équation (6.3) sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial H}{\partial x} \right) = b, \quad (6.32)$$

avec

$$D := H^{m+2} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{m-1}. \quad (6.33)$$

L'équation (6.32) est une équation de diffusion non linéaire où D joue le rôle de la diffusion. La nature de l'équation (6.32) et la simplicité de la géométrie considérée nous incitent à utiliser un schéma aux différences finies sur un maillage uniforme. Ce problème a été largement étudié et plusieurs schémas ont été proposés dans [58, 15, 102] lorsque b est une fonction de x . Les algorithmes existants peuvent être caractérisés de deux façons différentes. La première caractéristique concerne la stratégie pour approcher la diffusion D [58, 102] alors que la deuxième concerne le caractère implicite ou explicite du schéma [15]. Dans ce qui suit, nous optons pour une approximation de D aux points médians de la discrétisation, basée sur la moyenne de H et sur la dérivée de la surface $\frac{\partial H}{\partial x}$, voir les équations (6.35) et (6.36). Ce choix correspond au type I décrit dans [58]. Le principal avantage de ce schéma est la conservation de la masse alors que le principal inconvénient est sa faible stabilité [58]. Dans le but d'améliorer la stabilité, on opte pour un schéma semi-implicite en temps, voir l'équation (6.34).

Dans ce qui suit, on modifie la méthode 3 de [15] pour prendre en compte la paramétrisation du bilan de masse. Un algorithme à pas fractionnaire nous permet de découpler la résolution des équations (6.5) (6.6). Tout d'abord, un schéma semi-implicite, voir [15], est mis en œuvre pour discrétiser (6.32) sans terme de droite (**Étape de diffusion**), voir l'équation (6.34). Ensuite, le terme de droite est pris en compte sans terme de diffusion (**Étape d'accumulation et d'ablation**), voir l'équation (6.37). Finalement, la contrainte $H \geq 0$ est imposée en gardant la partie positive de la solution (**Étape de projection**), voir l'équation (6.38).

On discrétise uniformément le segment d'espace $[-L, L]$ par les points suivants :

$$x_j = -L + j\Delta x, \quad j = 0, \dots, N \quad \text{où} \quad \Delta x = \frac{2L}{N}.$$

De la même façon, on discrétise uniformément le segment de temps $[0, T]$ par les points suivants :

$$t_l = l\Delta t, \quad l = 0, \dots, M \quad \text{où} \quad \Delta t = \frac{T}{M}.$$

On note $H_{j,l}$ une approximation de $H(x_j, t_l)$. En supposant la fonction H_0 connue, l'algorithme suivant permet de calculer $H_{j,l}$ pour $j = 0, \dots, N$ et $l = 0, \dots, M$.

Algorithme 6.3.1.

* *Initialisation :*

$$H_{j,0} = H_0(x_j), \quad \forall j = 0, \dots, N.$$

* *Supposons $H_{j,l}$ connu pour $j = 0, \dots, N$ et l fixé.*

- (*Étape de diffusion*)

On obtient $H_{j,l+\frac{1}{3}}$ pour $j = 0, \dots, N$ en résolvant :

$$\frac{H_{j,l+\frac{1}{3}} - H_{j,l}}{\Delta t} = \frac{\Gamma}{\Delta x} \left(D_{j+\frac{1}{2},l} \left(\frac{H_{j+1,l+\frac{1}{3}} - H_{j,l+\frac{1}{3}}}{\Delta x} \right) - D_{j-\frac{1}{2},l} \left(\frac{H_{j,l+\frac{1}{3}} - H_{j-1,l+\frac{1}{3}}}{\Delta x} \right) \right), \quad (6.34)$$

avec $H_{0,l+\frac{1}{3}} = H_{N,l+\frac{1}{3}} = 0$, où $D_{j+\frac{1}{2},l}$ et $D_{j-\frac{1}{2},l}$ sont définis par :

$$D_{j+\frac{1}{2},l} = \left| \frac{H_{j+1,l} - H_{j,l}}{\Delta x} \right|^{m-1} \left(\frac{H_{j+1,l} + H_{j,l}}{2} \right)^{m+2}, \quad (6.35)$$

et

$$D_{j-\frac{1}{2},l} = \left| \frac{H_{j,l} - H_{j-1,l}}{\Delta x} \right|^{m-1} \left(\frac{H_{j,l} + H_{j-1,l}}{2} \right)^{m+2}, \quad (6.36)$$

pour $j = 1, \dots, N - 1$.

- (*Étape d'accumulation et d'ablation*)

On obtient $H_{j,l+\frac{2}{3}}$ pour $j = 0, \dots, N$ en résolvant :

$$\frac{H_{j,l+\frac{2}{3}} - H_{j,l+\frac{1}{3}}}{\Delta t} = a_m (H_{j,l+\frac{2}{3}} - z_{\text{ELA}}), \quad (6.37)$$

avec $H_{0,l+\frac{2}{3}} = H_{N,l+\frac{2}{3}} = 0$.

- (*Étape de projection*)

On obtient $H_{j,l+1}$ pour $j = 0, \dots, N$ ainsi :

$$H_{j,l+1} = \max(H_{j,l+\frac{2}{3}}, 0). \quad (6.38)$$

L'algorithme 6.3.1 est implémenté avec MATLAB. Il s'agit d'une légère modification des sources données dans [15]. Sous une condition de stabilité, le schéma précédent converge à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace, voir [15]. Remarquons que l'ordre de convergence en temps peut être amélioré à 2 en utilisant un schéma de type Crank-Nicolson qui s'obtient en combinant un schéma explicite et un schéma implicite, voir [15].

6.4 Résultats numériques

Dans cette section, on applique l'algorithme 6.3.1 pour trouver une solution numérique stationnaire au problème évolutif (6.5) - (6.8), pour lequel l'existence a été prouvée au théorème 6.2.2. Une forme est considérée dans un état d'équilibre (ou stationnaire) quand la diffusion, l'ablation et l'accumulation se compensent. Les paramètres physiques de la glace sont les suivants : $m = 3$ et $A = 3.17 \times 10^{-24} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Les paramètres du bilan de masse (6.4) sont $a_m = 3 \cdot 10^{-4} \text{ a}^{-1}$ et $z_{\text{ELA}} = 1000 \text{ m}$. On réalise une expérience similaire à celle déjà faite dans la section 4.4.3 en définissant trois formes initiales différentes :

a) $H_0(x) = 2z_{\text{ELA}} \cos(L\frac{\pi}{2}x),$

b) $H_0(x) = 6z_{\text{ELA}} \cos(L\frac{\pi}{2}x),$

c) $H_0(x) = z_{\text{ELA}} \cos(L\frac{\pi}{2}x) + z_{\text{ELA}}(\cos(6L\pi x))^2.$

où $L = 1000$ km. Les paramètres numériques sont les suivants : $\Delta t = 1$ a et $\Delta x = L/50$ m.

Pour chaque forme initiale (a, b ou c), la même forme stationnaire est atteinte, voir la figure 6.2. De plus, cette solution est paire, radialement décroissante et strictement positive sur $(-L, L)$. En initialisant la simulation avec les conditions a), b) et c), on vérifie l'unicité et la stabilité de la solution numérique. Notons que la solution se stabilise plus rapidement avec la condition b) qu'avec la condition a). En effet, la condition a) est relativement éloignée de la solution stationnaire en terme de volume. Notons que l'étape de diffusion a un effet régularisant sur la solution initiée par c). Plusieurs formes non symétriques sont initialisées et conduisent à la même forme stationnaire symétrique. Notons que la forme stationnaire s'étend systématiquement sur tout le domaine $(-L, L)$, ce qui est cohérent avec le lemme 6.2.4. Cette caractéristique est due à la dépendance en z du bilan de masse, lequel induit un "feed-back" positif de la solution dans le terme source de l'équation (6.5). Par conséquent, la solution dépend de L . La régularité $H \in \mathcal{C}^1(-1, 1)$ est une caractéristique importante du théorème 6.2.2. La figure 6.3 affiche la dérivée numérique de la solution obtenue avec deux niveaux de raffinement ($N = 100$ et $N = 400$). Clairement, en raffinant le maillage, la dérivée converge vers une fonction continue avec une asymptote verticale au point zéro.

L'évolution en temps de la fonctionnelle :

$$J\left(\left(H(t_l, \cdot)/z_{\text{ELA}}\right)^{\frac{2m+2}{m}}\right), \tag{6.39}$$

est représentée à la figure 6.2 (d) pour chacune des trois expériences (a, b et c). On observe, dans les trois cas, que la fonctionnelle décroît avec le temps jusqu'à atteindre une valeur négative, ce qui est cohérent avec le lemme 6.2.3. Remarquons que les fonctions H_0 , ont été choisies assez élevées devant la ligne d'équilibre z_{ELA} . Dans le cas contraire, l'étape de diffusion pourrait conduire une solution transitoire sous la ligne d'équilibre. Dans ce cas, la solution stationnaire serait égale à zéro partout à cause de l'étape d'ablation. Cette constatation a une seconde interprétation. En effet, la fonction nulle peut minimiser localement la fonctionnelle J . Si la condition initiale est trop proche de zéro, alors la solution numérique transitoire (qui minimise J avec le temps), peut converger vers 0 qui est minimum local et échouer à trouver le minimum global.

Le choix particulier de L , z_{ELA} , a_m , m et A fixe la valeur de α , voir l'équation (6.16). Puisque la forme stationnaire est positive, alors $\alpha > \alpha_0$, où α est donné par le lemme 6.2.3. On peut également vérifier l'existence du seuil α_0 . En effet, en réduisant L de 1000 km à 100 km, on réduit également α . Dans cette configuration, la forme stationnaire numérique est nulle sur $[-L, L]$ et 0 est le minimum de J , ce qui est cohérent avec le lemme 6.2.3. Deux paramètres peuvent être choisis de sorte que l'inégalité $\alpha > \alpha_0$ soit vérifiée. Si z_{ELA} est donné, alors le paramètre L doit être choisi assez grand tandis que si L est donné, la ligne d'équilibre z_{ELA} doit être choisie assez basse. Finalement, ces expériences numériques valident d'une part l'existence de la solution, voir le théorème 6.2.2 et la remarque 6.2.3, et suggèrent d'autre part l'unicité d'une solution stationnaire stable, paire, positive, continument dérivable et radialement décroissante.

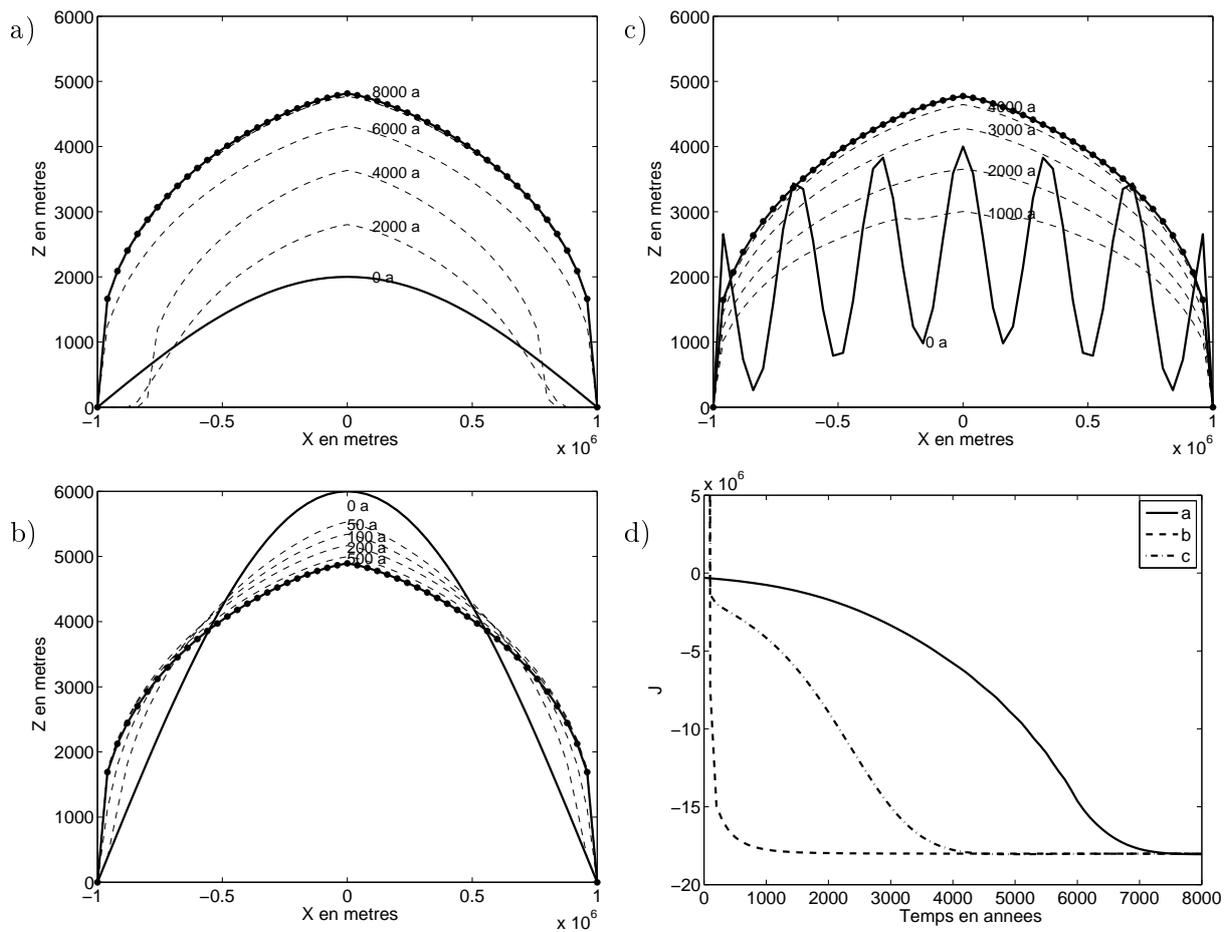


FIG. 6.2. *a,b,c) : Chaque expérience correspond à différentes hauteurs de glace initiales H_0 . L'évolution en temps de la hauteur de glace est dessinée : en ligne continue pour la forme initiale ; en ligne pointillée pour les formes intermédiaires ; en ligne continue couverte de points noirs pour la forme stationnaire. L'évolution de la fonctionnelle J définie par (6.39) est reportée à la figure d) pour chaque expérience.*

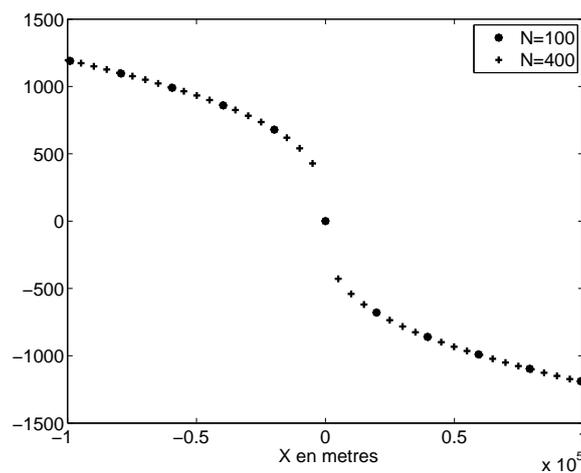


FIG. 6.3. *Dérivée de la fonction hauteur H avec deux niveaux de raffinement ($N = 100$ et $N = 400$).*

6.5 Conclusions et perspectives

Nous avons prouvé l'existence d'une solution stationnaire des équations du "Shallow Ice Approximation" sur un socle plat et fini lorsque le bilan de masse croît linéairement avec l'altitude. Un changement de variable a permis de réécrire l'équation sous la forme d'un p -Laplacien. En utilisant des arguments d'analyse convexe et la symétrisation de Schwartz, on a montré l'existence d'une solution physiquement acceptable (paire, positive et radialement décroissante). Un schéma aux différences finies est utilisé pour calculer des solutions numériques transitoires et capturer une solution stationnaire. Des expériences numériques ont permis de valider le théorème en mettant en évidence une solution numérique. Par ailleurs, ces expériences suggèrent d'une part que la solution trouvée est stable, et d'autre part qu'elle est unique. Du point de vue du modèle, de nombreuses améliorations sont envisageables. Par exemple, le modèle pourrait inclure une paramétrisation plus générale du bilan de masse que la paramétrisation (6.4) où b serait une fonction de H . Le modèle pourrait également être augmenté d'une loi de glissement basal du type (1.18). Enfin, la base pourrait plus généralement être décrite par une fonction régulière $B(x)$, non nécessairement nulle.

Conclusion

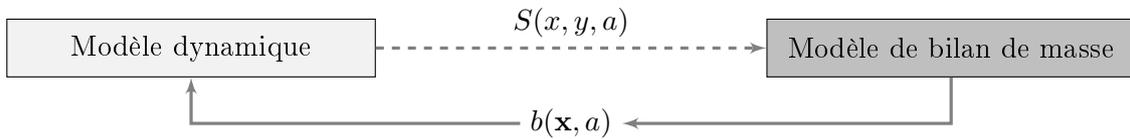
Une modélisation physique et numérique du mouvement d'un glacier en trois dimensions a été réalisée. Grâce à l'emploi d'une méthode eulérienne (via une fonction "Volume Of Fluid") pour décrire la présence de glace, on a construit un algorithme efficace qui peut traiter les changements de topologies et les géométries peu régulières que peuvent prendre les glaciers sur une topographie de montagne. La nature très différente des problèmes de transport et de Stokes rend numériquement avantageux un découplage des deux problèmes sur deux maillages. D'une part, la résolution du champ de vitesse se fait par une méthode d'éléments finis qui se prête bien aux géométries accidentées. D'autre part, la méthode des caractéristiques, agrémentée de l'algorithme SLIC, conduit à un schéma numérique de transport robuste qui conserve exactement la masse. La méthode numérique a été mise à l'épreuve pour la simulation de plusieurs glaciers suisses. Le couplage du modèle dynamique et d'un modèle de bilan de masse complexe a permis une reconstitution minutieuse des glaciers du Rhône et d'Aletsch au 20^{ème} siècle. Des scénarios climatiques basés sur plusieurs tendances ont été considérés et ont permis de calculer la position des glaciers du Rhône et d'Aletsch au 21^{ème} siècle. Ces résultats prédisent qu'un retrait massif de ces glaciers (jusqu'à disparition) doit être attendu en 2100 si les tendances climatiques considérées se confirment.

Une analyse mathématique du problème de Stokes stationnaire et non linéaire relatif au modèle d'écoulement de la glace a été réalisée. On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité d'une solution, d'abord du problème réduit continu, par des arguments d'analyses convexes, puis du problème mixte grâce à une condition inf sup adéquate. Grâce à une technique de quasi-norme, une estimation d'erreur *a priori* pour la vitesse et la pression a pu être établie. On a également prouvé la convergence des algorithmes de linéarisation mises en œuvre pour résoudre la non-linéarité du problème. Chaque résultat de convergence a été validé par l'expérience numérique.

Dans une échelle de temps et d'espace différente, deux autres problèmes ont été traités dans cette thèse. Tout d'abord, l'utilisation d'un modèle d'endommagement et son inclusion au modèle numérique a permis de simuler la rupture de blocs de glace se produisant lors du vêlage d'un glacier. L'utilisation de la fonction VOF s'est avérée une nouvelle fois avantageuse pour décrire les géométries complexes. Par la suite, l'existence de formes stationnaires de calottes polaires a pu être prouvée avec un modèle et une géométrie simplifiés. Par ailleurs, des expériences numériques ont confirmé le résultat théorique et donné des propriétés qualitatives et quantitatives de la solution.

Annexe : Un modèle complexe pour le calcul du bilan de masse

Dans la première partie de cette annexe, on décrit en détail le modèle de bilan de masse [56] utilisé pour la simulation du glacier du Rhône et du glacier d'Aletsch au chapitre 4. A partir des surfaces glaciaires $S(x, y, a)$, ce modèle permet le calcul des distributions du bilan de masse $b(\mathbf{x}, a)$.



Au chapitre 4, deux types de simulations sont réalisés : les simulations passées sur la période $[Y_p, Y_a]$ et les simulations futures sur la période $[Y_a, Y_f]$, où Y_p , Y_a et Y_f sont respectivement des dates passées, actuelles et futures. Le modèle du bilan de masse nécessite des données de températures moyennes et de précipitations journalières. Sur la période passée $[Y_p, Y_a]$, nous disposons de ces données grâce à une station météorologique géographiquement proche du glacier. Sur la période future $[Y_a, Y_f]$, ces données capitales sont inconnues. Nous décrivons dans la deuxième partie comment construire ces données en s'appuyant sur des tendances climatiques.

Fonction bilan de masse

On suppose que l'on dispose de séries de températures journalières moyennes $T_{ws}(a, j)$ et de précipitations $P_{ws}(a, j)$ d'une station météorologique proche du glacier (la variable a réfère à l'année alors que la variable j réfère au jour de l'année). Le bilan de masse annuel b est obtenu en comptabilisant les précipitations neigeuses et la fonte chaque jour de l'année et en tout point de la surface. Nous désignons par $\tilde{b}(\mathbf{x}, a, j)$ le bilan de masse journalier au point \mathbf{x} , le j -ème jour de l'année a . Nous définissons le bilan de masse de l'année a , en intégrant temporellement \tilde{b} entre le 1er octobre de l'année $a - 1$ et le 30 septembre de l'année a :

$$b(\mathbf{x}, a) := \sum_{j=275}^{365} \tilde{b}(\mathbf{x}, a - 1, j) + \sum_{j=1}^{274} \tilde{b}(\mathbf{x}, a, j). \quad (1)$$

Notons que b et \tilde{b} sont des fonctions de $(x, y, S(x, y, a), a)$, où $S(x, y, a)$ est l'altitude de la surface au point (x, y) et l'année a .

La fonction \tilde{b} est définie comme étant la différence entre les précipitations neigeuses P_s et la fonte M [52, 55] :

$$\tilde{b}(\mathbf{x}, a, j) = P_s(\mathbf{x}, a, j) - M(\mathbf{x}, a, j). \quad (2)$$

La fonction P_s dépend de la température : lorsque la température excède le seuil T_{thr}^s , les précipitations sont considérées comme liquides et cela n'agit pas sur l'accumulation ($P_s = 0$). Lorsque la température est sous le seuil T_{thr}^i , les précipitations sont considérées comme solides. Entre T_{thr}^i et T_{thr}^s , la fonction P_s est prolongée continument et linéairement en fonction de la température. Cela nous donne la formule :

$$P_s(\mathbf{x}, a, j) := \begin{cases} P(\mathbf{x}, a, j) & \text{si } T(z, a, j) < T_{thr}^i, \\ \left(\frac{T_{thr}^s - T(z, a, j)}{T_{thr}^s - T_{thr}^i} \right) P(\mathbf{x}, a) & \text{si } T_{thr}^s \geq T(z, a, j) \geq T_{thr}^i, \\ 0 & \text{si } T_{thr}^s < T(z, a, j), \end{cases} \quad (3)$$

où $T(z, a, j)$ est la température de l'air, calculée par la formule [52, 55] :

$$T(z, a, j) := T_{ws}(a, j) - G_T(z - z_{ws}), \quad (4)$$

où $z = S(x, y, a)$, z_{ws} est l'altitude de la station météorologique et G_T est le gradient de température. La fonction précipitation $P(\mathbf{x}, a, j)$ est donnée par :

$$P(\mathbf{x}, a, j) := P_{ws}(a, j) (1 + G_P(z - z_{ws})) c_{prec} D(\mathbf{x}), \quad (5)$$

où G_P est le gradient de précipitation, c_{prec} est un coefficient qui prend en compte les erreurs de mesure et $D(\mathbf{x})$ est une fonction définie en chaque point de la surface du glacier et à valeurs dans $[0, 2]$, qui prend en compte la redistribution des précipitations neigeuses due au vent et à la pente. Ainsi, lorsque $D(\mathbf{x})$ est égal à 0, l'érosion est totale, alors que si $D(\mathbf{x})$ est égal à 2, la redéposition de neige est maximale. La fonction fonte M est donnée par :

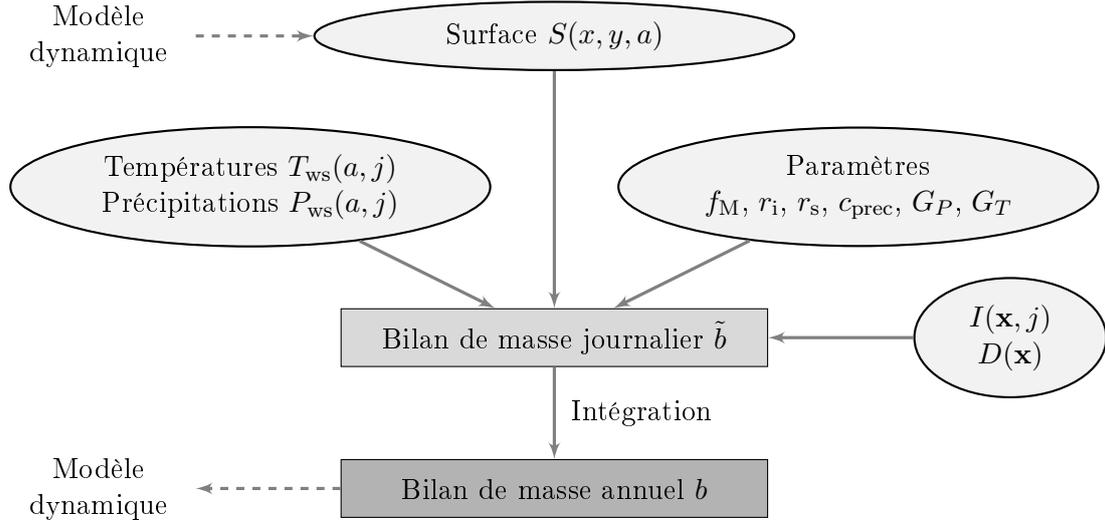
$$M(\mathbf{x}, a, j) := \begin{cases} [f_M + r_{is}(\mathbf{x}, j) I(\mathbf{x}, j)] T(z, a, j) & \text{si } T(z, a, j) > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6)$$

où f_M est un coefficient positif, $I(\mathbf{x}, j)$ est le rayonnement solaire [52] qui prend en compte le temps d'exposition de chaque point du glacier au soleil chaque jour j de l'année. Le calcul de I fait intervenir la position du soleil dans le ciel ainsi que la topographie autour du glacier qui peut induire des zones ombragées. La fonction $r_{is}(\mathbf{x}, j)$ ne prend que deux valeurs r_i et r_s avec $r_i > r_s$. Plus précisément, $r_{is}(\mathbf{x}, j) = r_i$ si la surface du glacier au point \mathbf{x} est couverte de glace le jour j et $r_{is}(\mathbf{x}, j) = r_s$ si la surface du glacier au point \mathbf{x} est couverte de neige le jour j . En effet, le rayonnement solaire est de moindre effet sur de la neige que sur de la glace. Pour savoir si la surface est recouverte de neige ou de glace, on établit un critère simple basé sur le bilan de neige cumulé au cours de l'année.

Les paramètres f_M , r_i , r_s , c_{prec} , G_P et G_T intervenant dans (3), (4), (5) et (6) sont calibrés selon plusieurs types de données [56] :

- i) Les changements de volume glaciaire.
- ii) Des bilans de masse mesurés sur le terrain par des pieux.
- iii) Le débit mesuré d'eau de fonte à la langue du glacier.

La calibration de ces paramètres se fait nécessairement dans le passé car des mesures sont requises.



Construction des séries journalières de températures et de précipitations sur une période future

L'objet de cette section est la construction de séries journalières de températures $T_{ws}(a, j)$ et de précipitations $P_{ws}(a, j)$ sur la période future $[Y_a, Y_f]$. Le procédé décrit dans la suite consiste en une superposition de tendances climatiques saisonales et de fluctuations journalières prises aléatoirement dans la période passée. On commence par définir 4 saisons s_1, s_2, s_3 et s_4 qui correspondent approximativement à l'hiver, au printemps, à l'été et à l'automne et qui sont respectivement les ensembles de jours suivants :

$$s_1 := \{335, \dots, 365, 1, \dots, 59\}, \quad s_2 := \{60, \dots, 151\}, \quad s_3 := \{152, \dots, 243\}, \quad s_4 := \{244, \dots, 334\}.$$

Notons que s_1 englobe les mois de Décembre-Janvier-Février, s_2 englobe les mois de Mars-Avril-Mai, s_3 englobe les mois de Juin-Juillet-Aout, et s_4 englobe les mois Septembre-October-Novembre. Par commodité, nous avons négligé les 29 février des années bissextiles. Le procédé requiert deux données :

- i) Les variations moyennes des températures $W_{s_i}^t(a_k)$ et des précipitations $W_{s_i}^p(a_k)$ attendues à la saison i pour certaines années a_k par rapport à l'année Y_{ref} [40].
- ii) Les séries journalières des températures $T_{ws}(a, j)$ et des précipitations $P_{ws}(a, j)$ sur la période passée $[Y_p, Y_a]$.

Nous appelons, respectivement, $\bar{T}_{s_i}(a)$ et $\bar{P}_{s_i}(a)$ les températures et les précipitations moyennes à la saison i de l'année a . Sur la période $[Y_p, Y_{\text{ref}}]$, $\bar{T}_{s_i}(a)$ et $\bar{P}_{s_i}(a)$ sont calculés en intégrant T_{ws} et P_{ws} sur une période de 31 ans centrée l'année a et à la saison i , voir [56] :

$$\bar{T}_{s_i}(a) := \frac{1}{31 \#s_i} \sum_{\tilde{a}=a-15}^{a+15} \sum_{j \in s_i} T_{ws}(\tilde{a}, j), \quad (7)$$

$$\bar{P}_{s_i}(a) := \frac{1}{31 \#s_i} \sum_{\tilde{a}=a-15}^{a+15} \sum_{j \in s_i} P_{ws}(\tilde{a}, j), \quad (8)$$

où $\#s_i$ désigne le nombre de jours de la saison s_i . Par ailleurs, on connaît les variations moyennes de températures $W_{s_i}^t(a_k)$ et de précipitations $W_{s_i}^p(a_k)$ attendues à la saison i pour certaines années a_k par rapport à l'année Y_{ref} . Une interpolation linéaire permet de compléter $W_{s_i}^t(a)$ et $W_{s_i}^p(a)$ chaque année a entre Y_{ref} et Y_f , pour chaque saison i . Cela nous permet de compléter \bar{T}_{s_i} et \bar{P}_{s_i} entre Y_{ref} et Y_f par les formules :

$$\bar{T}_{s_i}(a) := \bar{T}_{s_i}(Y_{\text{ref}}) + W_{s_i}^t(a) \quad \text{où} \quad a \in [Y_{\text{ref}}, Y_f], \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (9)$$

et

$$\bar{P}_{s_i}(a) := \bar{P}_{s_i}(Y_{\text{ref}}) + W_{s_i}^p(a) \quad \text{où} \quad a \in [Y_{\text{ref}}, Y_f], \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (10)$$

La figure 6 (a et b) donne une illustration de \bar{T}_{s_i} et \bar{P}_{s_i} . En guise d'exemple, nous utilisons, au chapitre 4, les tendances publiées dans [40]. Plus précisément, nous disposons de $W_{s_i}^t(a_k)$ et $W_{s_i}^p(a_k)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $a_k = 2030, 2050, 2070$, voir les tableaux 4 et 5, avec $Y_{\text{ref}} = 1990$.

$W_{s_i}^t(a)$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	Moyenne
$a_1 = 2030$	1. (0.4,1.8)	0.9 (0.4,1.8)	1.4 (0.6,2.6)	1.1 (0.5,1.8)	1.1
$a_2 = 2050$	1.8 (0.9,3.4)	1.8 (0.8,3.3)	2.7 (1.4,4.7)	2.1 (1.1,3.5)	2.1
$a_3 = 2070$	2.6 (1.2,4.7)	2.5 (1.1,4.8)	3.8 (1.9,7.0)	3.0 (1.7,5.2)	3.0
$a_4 = 2090$	3.4 (1.5,6.0)	3.2 (1.4,6.3)	4.9 (2.4,9.3)	3.9 (2.3,6.9)	3.8

FIG. 4. Prédiction de variation des températures saisonales par rapport à l'année $Y_{\text{ref}} = 1990$ sur le versant nord des Alpes. Les tendances des années 2030, 2050 et 2070 ont été publiées dans [40]. Les tendances de l'année 2090 ont été extrapolées linéairement. Pour chaque valeur, l'intervalle de confiance est donné entre parenthèses.

$W_{s_i}^p(a)$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	Moyenne
$a_1 = 2030$	1.04 (0.99,1.11)	1.00 (0.94,1.05)	0.91 (0.82,0.97)	0.97 (0.92,1.00)	0.98
$a_2 = 2050$	1.08 (0.99,1.21)	0.99 (0.89,1.10)	0.83 (0.69,0.93)	0.94 (0.86,0.99)	0.96
$a_3 = 2070$	1.11 (0.99,1.30)	0.99 (0.85,1.13)	0.77 (0.59,0.91)	0.91 (0.80,0.99)	0.94
$a_4 = 2090$	1.14 (0.99,1.39)	0.99 (0.81,1.16)	0.71 (0.49,0.89)	0.88 (0.74,0.99)	0.93

FIG. 5. Prédiction de variation des précipitations saisonales par rapport à l'année 1990 sur le versant nord des Alpes. Les tendances des années 2030, 2050 et 2070 ont été publiées dans [40]. Les tendances de l'année 2090 ont été extrapolées linéairement. Pour chaque valeur, l'intervalle de confiance est donné entre parenthèses.

Pour chaque année a de la période $[1900, 2000] \subset [Y_p, Y_a]$, nous définissons les fluctuations de température V_t et de précipitations V_p par :

$$V_t(a, j) := T_{ws}(a, j) - \bar{T}_{s_i}(a) \quad \text{où} \quad j \in s_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$V_p(a, j) := P_{ws}(a, j) / \bar{P}_{s_i}(a) \quad \text{où} \quad j \in s_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Une illustration de V_t et V_p est donnée à la figure 6 (c et d). Il nous reste maintenant à définir $T_{ws}(a, j)$ sur la période $[Y_a, Y_f]$. Pour chaque année a de la période $[Y_a, Y_f]$, on choisit aléatoirement une année \bar{a} entre 1900 et 2000. On construit alors $T_{ws}(a, j)$ en superposant la moyenne $\bar{T}_{s_i}(a)$ aux fluctuations $V_t(\bar{a}, \cdot)$, pour chaque jour j :

$$T_{ws}(a, j) := \bar{T}_{s_i}(a) + V_t(\bar{a}, j) \quad \text{si} \quad j \in s_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

On construit $P_{ws}(a, j)$, pour chaque jour j de la façon suivante :

$$P_{ws}(a, j) := \bar{P}_{s_i}(a) V_p(\bar{a}, j) \quad \text{si} \quad j \in s_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

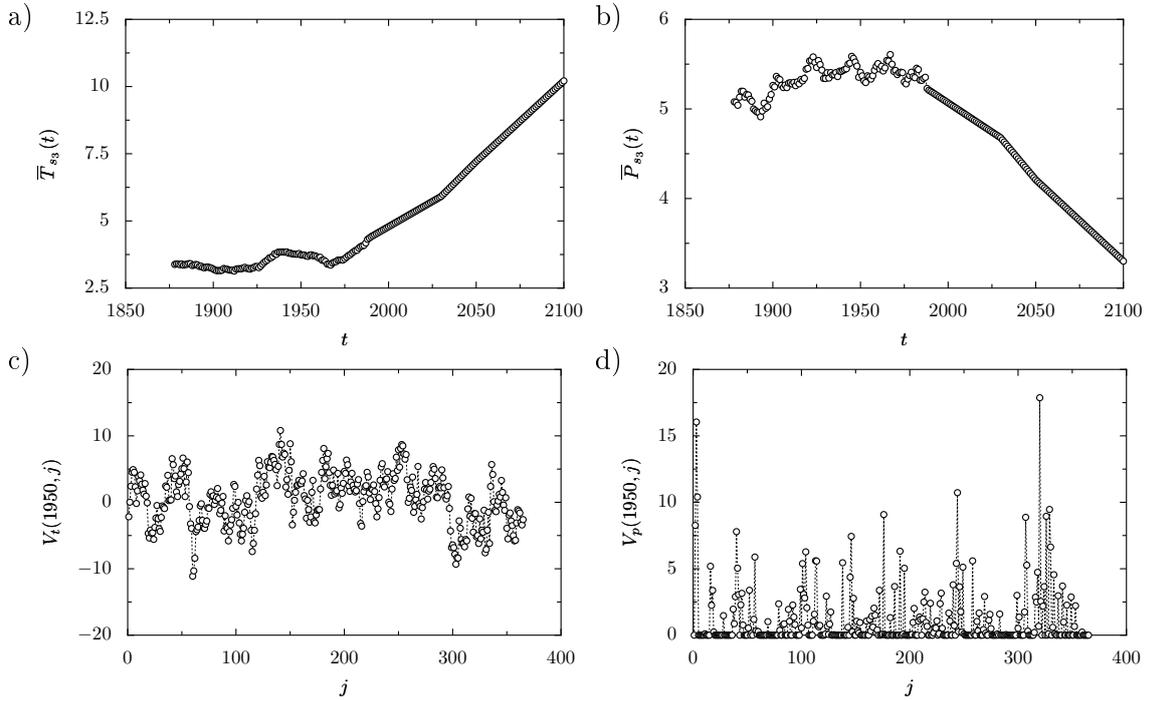


FIG. 6. a) et b) Fonctions \bar{T}_{s_3} et \bar{P}_{s_3} qui correspondent, respectivement, aux températures et aux précipitations journalières moyennes de la saison 3 (été). c) et d) Fonctions $V_t(1950, j)$ et $V_p(1950, j)$ qui correspondent, respectivement, aux fluctuations journalières de température et des précipitations au cours de l'année 1950.

Nous avons décrit la construction des bilans de masse selon des tendances climatiques. Les simulations S1, S2 et S3 des sections 4.2.3 et 4.3 correspondent aux tendances des tableaux 4 et 5. Plus précisément, pour S2, on considère les chiffres moyens (en gras). Pour S1, on considère les valeurs extrêmes minimales pour la température et maximales pour les précipitations. Pour S3, on considère les valeurs extrêmes maximales pour la température et minimales pour les précipitations.

Bibliographie

- [1] O. Albrecht, P. Jansson, and H. Blatter. Modelling glacier response to measured mass balance forcing. *Ann. Glaciol.*, 31 :91–96, 2000.
- [2] C. Amrouche and V. Girault. Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. *Czechoslovak Math. J.*, 44(119)(1) :109–140, 1994.
- [3] S. N. Antontsev and H. B. De Oliveira. Qualitative properties of the ice-thickness in a 3d model. *WSEAS Trans. Math.*, 7(3) :78–86, 2008.
- [4] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21(4) :337–344 (1985), 1984.
- [5] M. Badiale and E. Nabana. A note on radially of solutions of p -Laplacian equation. *Appl. Anal.*, 52(1-4) :35–43, 1994.
- [6] J. Baranger and K. Najib. Analyse numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de carreau. *Numer. Math.*, 58(1) :35–49, 1990.
- [7] J. W. Barrett and W. B. Liu. Quasi-norm error bounds for the finite element approximation of a non-Newtonian flow. *Numer. Math.*, 68(4) :437–456, 1994.
- [8] D. I. Benn, C. R. Warren, and R. H. Mottram. Calving processes and the dynamics of calving glaciers. *Earth-Science Reviews*, 82(3-4) :143 – 179, 2007.
- [9] H. Blatter. Velocity and stress fields in grounded glaciers : a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *J. Glaciol.*, 41(138) :333–344, 1995.
- [10] H. Blatter. Physical and mathematical basis of glaciers dynamics. *Course notes*, 2003.
- [11] A. Bonito, M. Picasso, and M. Laso. Numerical simulation of 3D viscoelastic flows with free surfaces. *J. Comput. Phys.*, 215(2) :691–716, 2006.
- [12] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle (Théorie et Applications)*. Dunod, 1999.
- [13] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations. In *Efficient solutions of elliptic systems (Kiel, 1984)*, volume 10 of *Notes Numer. Fluid Mech.*, pages 11–19. Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [14] F. Brock. Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptic problems. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 110(2) :157–204, 2000.
- [15] E. Bueller. Numerical Approximation of two-dimensional thermomechanical model for ice flow. Technical report, UAF DMS, 2002.
- [16] E. Bueller. Construction of steady state solutions for isothermal shallow ice sheets. Technical Report 03-02, UAF DMS, December 2003.
- [17] E. Bueller, J. Brown, and C. Lingle. Exact solutions to the thermomechanically coupled shallow-ice approximation : effective tools for verification. *J. Glaciol.*, 53(182) :499–516, 2007.

- [18] E. Bueler, C. S. Lingle, J. Kallen-Brown, D. N. Covey, and L. N. Bowman. Exact solutions and verification of numerical models for isothermal ice sheets. *J. Glaciol.*, 51(173) :291–306, 2005.
- [19] A. Caboussat. *Analysis and Numerical Simulation of Free Surface Flows*. PhD thesis, EPF Lausanne, 2003.
- [20] A. Caboussat, G. Jovet, M. Picasso, and J. Rappaz. On the numerical simulation of free surface flow : Modeling water and ice. *Book chapter submitted to CRC volume 'Computational Fluid Dynamics'*.
- [21] A. Caboussat, M. Picasso, and J. Rappaz. Numerical simulation of free surface incompressible liquid flows surrounded by compressible gas. *J. Comput. Phys.*, 203(2) :626–649, 2005.
- [22] N. Calvo, J. I. Díaz, J. Durany, E. Schiavi, and C. Vázquez. On a doubly nonlinear parabolic obstacle problem modelling ice sheet dynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(2) :683–707 (electronic), 2002.
- [23] A. Chorin. Flame advection and propagation algorithms. *Journal of Computational Physics*, 35(1) :1 – 11, 1980.
- [24] S. Chow, F. Carey, and L. Anderson. Finite element approximations of a glaciology problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(5) :741–756, 2004.
- [25] J. Chunhua, Y. Jingxue, and W. Zejia. Positive radial solutions of p -Laplacian equation with sign changing nonlinear sources. *Math. Methods Appl. Sci.*, 30(1) :1–14, 2007.
- [26] G.C. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et l'optimisation*. Dunod, 1998.
- [27] J. G. Cogley, W. P. Adams, M. A. Ecclestone, F. Jung-Rothenhäusler, and C. S. L. Ommanney. Mass balance of Axel Heiberg Island glaciers 1960-1991 : A reassessment and discussion. Technical Report 6., National Hydrology Research Institute, Saskatoon, Canada, 1995.
- [28] J. Colinge and J. Rappaz. A strongly nonlinear problem arising in glaciology. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(2) :395–406, 1999.
- [29] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations, 2nd edition*. Springer, 2008.
- [30] A. Deponti, V. Pennati, L. de Biase, V. Maggi, and F. Berta. A new fully three-dimensional numerical model for ice dynamics. *J. Glaciol.*, 52(178) :365–376, 2006.
- [31] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [32] A. Ern and J.L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*. Springer, 2004.
- [33] D. Farinotti, M. Huss, A. Bauder, and M. Funk. An estimate of the glacier ice volume in the swiss alps. *Global and Planetary Change*, 68(3) :225 – 231, 2009.
- [34] D. Farinotti, M. Huss, A. Bauder, M. Funk, and M. Truffer. A method to estimate ice volume and ice thickness distribution of alpine glaciers. *J. Glaciol.*, 55(191) :422–430, 2009.
- [35] A. C. Fowler. A sliding law for glaciers of constant viscosity in the presence of subglacial cavitation. *Proc. R. Soc. Lond.*, A407 :147–170, 1986.
- [36] A. C. Fowler. Modelling ice dynamics. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 63 :29–65, 1992.
- [37] A. C. Fowler and E. Schiavi. A theory of ice-sheet surges. *Journal of Glaciology*, 44 :104–118, 1998.
- [38] L. P. Franca and S. L. Frey. Stabilized finite element methods. II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99(2-3) :209–233, 1992.

- [39] B. Francou and C. Vincent. *Les glaciers à l'épreuve du climat*. IRD édition, 2007.
- [40] C. Frei. Die Klimazukunft der Schweiz. In *Klimaänderung und die Schweiz 2050 – Erwartete Auswirkungen auf Umwelt, Gesellschaft und Wirtschaft*, pages 12–16. Beratendes Organ für Fragen der Klimaänderung (OcCC), 2007. <http://www.occc.ch>.
- [41] P. J. Frey and P. L. George. *Mesh generation*. ISTE, London, second edition, 2008. Application to finite elements.
- [42] O. Gagliardini, D. Cohen, P. Raback, and T. Zwinger. Finite-element modeling of subglacial cavities and related friction law. *J. Geophys. Res.*, 112, 2007.
- [43] O. Gagliardini and T. Zwinger. The ISMIP-HOM benchmark experiments performed using the Finite-Element code Elmer. *The Cryosphere Discuss*, 2 :75–109, 2008.
- [44] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, 1986.
- [45] The Swiss Glaciers, 1880–2002/03. Technical Report 1-124, Yearbooks of the Cryospheric Commission of the Swiss Academy of Sciences (SCNAT), 1881–2008. published since 1964 by Laboratory of Hydraulics, Hydrology and Glaciology (VAW) of ETH Zürich.
- [46] J.W. Glen. The flow law of ice. *IUGG/IAHS Symposium of Chamonix IAHS Publication*, 47 :171–183, 1958.
- [47] R. Glowinski. *Handbook of Numerical Analysis : Numerical Methods for Fluids (Part 3)*, volume 9. Elsevier Science Ltd, 2003.
- [48] R. Glowinski and J. Rappaz. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid flow model in glaciology. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(1) :175–186, 2003.
- [49] R. Greve and H. Blatter. *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers*. Springer Verlag, 2009.
- [50] G.H. Gudmundsson. A three-dimensional numerical model of the confluence area of untearraargletscher, Bernese Alps, Switzerland. *J. Glaciol.*, 45(150) :219–230, 1999.
- [51] F. Hecht. *Freefem++*, 2010.
- [52] R. Hock. A distributed temperature-index ice- and snowmelt model including potential direct solar radiation. *J. Glaciol.*, 45(149) :101–111, 1999.
- [53] A. Hubbard, H. Blatter, P. Nienow, D. Mair, and B. Hubbard. Comparison of a three dimensional model for glacier flow with field data from Haut Glacier d’Arolla, Switzerland. *J. Glaciol.*, 44(147) :368–378, 1998.
- [54] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition : a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59(1) :85–99, 1986.
- [55] M. Huss, A. Bauder, M. Funk, and R. Hock. Determination of the seasonal mass balance of four alpine glaciers since 1865. *Journal of Geophysical Research*, 113 :F01015, 2008.
- [56] M. Huss, D. Farinotti, A. Bauder, and M. Funk. Modelling runoff from highly glacierized alpine drainage basins in a changing climate. *Hydrological Processes*, 22(19) :3888–3902, 2008.
- [57] K. Hutter. *Theoretical Glaciology*. Reidel, 1983.
- [58] P. Huybrechts, T. Payne, and the EISMINT Intercomparison Group. The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models. *Ann. Glaciol.*, 23 :1–12, 1997.

- [59] T. Imbaumgarten. Kartierung und gis-basierte darstellung der geomorphologie im gebiet val bever/val saluver (gr) sowie modellierung spaet und postglazialer gletscherstaende in der val muragl (gr). Master's thesis, University of Zurich, 2005.
- [60] S. Ivy-Ochs, H. Kerschner, and C. Schlüchter. Cosmogenic nuclides and the dating of Lateglacial and Early Holocene glacier variations : The Alpine perspective. *Quat. Intern.*, 164-165 :53–63, 2007.
- [61] M. Jirásek. Damage and its localization. *Fragment of Lecture Notes. Doctoral Course on "Heterogeneity and Damage. EPF Lausanne.*, 2003.
- [62] M. Jirásek and P. Grassl. Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8) :1921 – 1943, 2008.
- [63] G. Juvet, M. Huss, H. Blatter, M. Picasso, and J. Rappaz. Numerical simulation of rhonegletscher from 1874 to 2100. *J. Comp. Phys.*, 228 :6426–6439, 2009.
- [64] G. Juvet, M. Picasso, J. Rappaz, and H. Blatter. A new algorithm to simulate the dynamics of a glacier : theory and applications. *J. Glaciol.*, 54(188) :801–811, 2008.
- [65] S. Kesavan. *Symmetrization and Applications*. World Scientific Publishing Company, 2006.
- [66] P. Kirner. *Modélisation mathématique et simulation numérique des phénomènes dynamiques et thermiques apparaissant dans un glacier*. PhD thesis, EPF Lausanne, 2007.
- [67] M. Kuhn. Climate and Glaciers. *IAHS*, 131 :3–20, 1981.
- [68] E. Le Meur, O. Gagliardini, T. Zwinger, and J. Ruokolainen. Glacier Flow modelling : a comparison of the Shallow Ice Approximation and the full-Stokes solution. *Comptes Rendues Phys.*, 5(7) :709–722, 2004.
- [69] Z. Lei and Z. Tian-xiao. Stabilized finite element methods of a quasi-newtonian flow obeying power law (chinese). *Chinese J. Numer. Math. Appl.*, 20 :44–58, 1998.
- [70] E.H. Lieb and M. Loss. *Analysis, Graduate Studies in Mathematics, volume 14*. American Mathematical Society, 1997.
- [71] H. Lü, D. O'Regan, and R. Agarwal. Positive solutions for singular p -Laplacian equations with sign changing nonlinearities using inequality theory. *Appl. Math. Comput.*, 165(3) :587–597, 2005.
- [72] M. P. Lüthi. Transient response of idealized glaciers to climate variations. *J. Glaciol.*, 55(193) :918–930, 2009.
- [73] M. Maisch. Zur Gletscher- und Klimageschichte des Alpinen Spätglazials. *Geographica Helvetica*, 42 :63–71, 1982.
- [74] V. Maronnier. *Simulation numérique d'écoulements de fluides incompressibles avec surface libre*. PhD thesis, EPF Lausanne, 2000.
- [75] V. Maronnier, M. Picasso, and J. Rappaz. Numerical simulation of free surface flows. *J. Comput. Phys.*, 155(2) :439–455, 1999.
- [76] V. Maronnier, M. Picasso, and J. Rappaz. Numerical simulation of three-dimensional free surface flows. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 42(7) :697–716, 2003.
- [77] P. L. Mercanton. Vermessungen am Rhonegletscher, 1874–1915. *Neue Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, 52, 1916.
- [78] D. Nishimura. Changes in surface flow speed over the past 100 years (Rhonegletscher, SwissAlps). *Master thesis. Graduate School of Environmental Science, Hokkaido University*, 2008.

- [79] S. Osher and R.P. Fedkiw. Level set methods : an overview and some recent results. *J. Comput. Phys.*, 169(2) :463–502, 2001.
- [80] W. S. B. Paterson. *The Physics of Glaciers*. Pergamon, New York, third edition, 1994.
- [81] F. Pattyn. A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model : Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *J. Geophys. Res.*, 106(B8), 2003.
- [82] M. Picasso. FELIB : A finite element library in C++. Technical report, EPF Lausanne, 1998.
- [83] M. Picasso and J. Rappaz. Stability of time-splitting schemes for the Stokes problem with stabilized finite elements. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 17(6) :632–656, 2001.
- [84] M. Picasso, J. Rappaz, A. Reist, M. Funk, and H. Blatter. Numerical simulation of the motion of a two-dimensional glacier. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 60(5) :995–1009, 2004.
- [85] O. Pironneau. *Finite Element Methods for Fluids*. John Wiley and Sons Ltd, 1989.
- [86] W. Pompe. Korn’s first inequality with variable coefficients and its generalization. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 44(1) :57–70, 2003.
- [87] A. Pralong. *On the instability of hanging glaciers*. PhD thesis, ETH Zurich, 2005.
- [88] A. Pralong and M. Funk. A level-set method for modeling the evolution of glacier geometry. *J. Glaciology*, 50(171) :485–491, 2004.
- [89] A. Pralong and M. Funk. Dynamic damage model of crevasse opening and application to glacier calving. *Journal of Geophysical Research*, 110, 2005.
- [90] A. Pralong, M. Funk, and M. Lüthi. A Description Of Crevasse Formation Using Continuum Damage Mechanics. *Ann. Glaciol.*, 37(1) :77–82, 2003.
- [91] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
- [92] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1999.
- [93] J. Rappaz and A. Reist. Mathematical and numerical analysis of a three-dimensional fluid flow model in glaciology. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(1) :37–52, 2005.
- [94] P. A. Raviart. Sur la résolution de certaines equations paraboliques non linéaires. *J. Functional Anal.*, 5 :299–328, 1970.
- [95] A. Reist. *Mathematical Analysis and Numerical Simulation of the Motion of a Glacier*. PhD thesis, EPF Lausanne, 2005.
- [96] C. Rothenbühler. Erfassung und Darstellung der Geomorphologie im Gebiet Bernina (GR) mit Hilfe von GIS. Master’s thesis, University of Zurich, 2000.
- [97] F. Rémy and L. Testut. Mais comment s’écoule donc un glacier? aperçu historique. *Comptes Rendus Geosciences*, 338(5) :368 – 385, 2006.
- [98] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 31(7) :567–603, 1999.
- [99] C. Schoof. The effect of cavitation on glacier sliding. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 461 :609–627, March 2005.
- [100] C. Schoof. Coulomb friction and other sliding laws in a higher order glacier flow model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2009.

- [101] A. P. Stroeven. The robustness of one-dimensional, time-dependent, ice-flow models : a case study from Storglaciären, Northern Sweden. *Geogr. Ann.*, 78A(2-3) :133–146, 1996.
- [102] C. J. Van der Veen. *Fundamentals Glacier Dynamics*. Balkeema, 1999.
- [103] A. Vieli, M. Funk, and H. Blatter. Tidewater glaciers : frontal flow acceleration and basal sliding. *Annals of Glaciology*, 31 :217–221(5), January 2000.
- [104] N. J. Walkington and J. S. Howell. Inf-sup conditions for twofold saddle point problems. *Submitted to Numerische Mathematik*, 2009.
- [105] J. Weertman. On the sliding of glaciers . *J. Glaciol.*, 1957.
- [106] A. Zryd. *Les glaciers en mouvement*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2008.

Curriculum Vitae

Né le 13 juillet 1983 à Lons-Le-Saunier (Jura, France), je commence mes études au lycée Jean-Michel de Lons-Le-Saunier où j'obtiens un Baccalauréat scientifique en 2000. De 2000 à 2006, j'entreprends des études de mathématiques à l'université de Franche-Comté (Besançon). En 2005, je réussis le concours de l'agrégation de Mathématiques et j'obtiens un Master Recherche l'année suivante. Depuis octobre 2006, je suis assistant-doctorant au sein de la chaire d'analyse et simulation numériques du Professeur Rappaz. Dans le cadre de ma thèse, supervisée par le Docteur Picasso et le Professeur Rappaz, je mène des recherches concernant la simulation numérique du mouvement des glaciers en collaboration avec les Professeurs Blatter et Funk de l'ETH Zurich.