イプシロン　1991. Vol. 33, 97－103

確率分布の収束とキュムラント

愛知教育大学数学教室　鈴 木 将 史

0．序

確率変数の列 $\{X_n; n=1,2,\cdots\}$ が $n\to\infty$ とする時どのような挙動を示すかという問題，すなわち確率変数の収束の問題は，確率論が創始されて以来つねにその中心的話題として議論，研究されてきた問題であり，すでにおびただしい量の収束定理が得られている。中でも独立試行において現れる**大数の法則**および**中心極限定理**は，その代表的な結果として広く知れ渡っており，数学以外の分野においても極めて有用な道具として応用されている。本稿では，通常行われる特性関数の方法およびそれに似てはいるが少し異なる方法でこれらの収束定理をとらえ，その観点から更なる発展を論じて行きたい。

1．確率変数の収束と特性関数

この節では準備として，確率変数列の収束について必要なことを整理しておきたい。一口に「収束」といってもいくつかの種類があり，定義もそれぞれ異なるのであるが，本稿で扱うのは次の２つである。なお，確率変数はすべて実数値とする。

定　義

① 確率変数列 $\{X_n; n=1,2,\cdots\}$ が確率変数Xに**確率収束**するとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$P(|X_n-X|>\varepsilon)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことである。ただし，P(　) とは事象の起こる確率を意味する。

② $\{X_n\}$ がXに**法則収束**するとは，X_nの分布がXの分布に収束すること，すなわち任意の有界連続関数 f に対して，

$$E[f(X_n)]\to E[f(X)] \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことである。ただし，E[　] とは平均（期待値）を意味する。

上記２種類の収束については，以下の命題が成り立つ。

命題１．１

確率変数列 $\{X_n\}$ が確率変数Xに確率収束しているならば，法則収束している。つまり確率収束の方が強い収束であると言える。

さらにここで，特性関数についても触れておこう。確率変数Xに対して

$$\phi(t)=E[\exp(itx)]$$

をXの**特性関数**と呼ぶ（iは虚数単位）が，確率変数列の法則収束について次のことが成り立つ。

命題1．2

X_nがXに法則収束することと，それぞれの特性関数が各点収束することとは同値である。

上の命題により，収束定理の証明においては，特性関数が重要な役割を演ずることになる。また，特性関数については，独立性に関して次の命題が成り立つ。

命題1．3

XとYが互いに独立な確率変数である時，X＋Yの特性関数は，X，Yそれぞれの特性関数の積となる。すなわち，

$$E[\exp(it(X+Y))]=E[\exp(itX)]\cdot E[\exp(itY)].$$

2．大数の法則

サイコロを6回振る場合に，1の目が絶対にちょうど1回だけ出ると言い張る人はいないであろう。6回とも1の目というのは明らかに異常としても，1回も出なかったり，あるいは2回出ても，少しも不思議ではない。3回出たとしても，そのサイコロの公平さを真面目に疑う人は少ないに違いない。ところが，これが6000回振る場合だとどうであろうか。1の目がちょうど1000回出ると主張する人はいないだろうが，1回も出なかったり，2000回も出たりした時に，「まあサイコロだからこんなこともあるか。」などと言う人がいるだろうか。このように，試行の回数が少ないときにはかなりバラついていても，試行を繰り返すにしたがってある事象の起こる割合は理論上の確率に近づいていくということを，我々は漠然とではあっても知っている。この感覚に数学的表現を与えるのが大数の法則である。

大数の法則について述べる前に，本稿で扱う確率変数列にある種の仮定を与えることにする。より一般的な場合ももちろん扱えるのだが，これが大数の法則および中心極限定理について考える上で最も代表的な場合であり，直接いろいろな量が計算できるという点でも便利なのである。

仮　定

① $\{X_n;\ n=1,2,\cdots\}$ は互いに独立で，同一の分布にしたがい，平均$E[X_n]=0$，分散$0<V(X_n)<\infty$。

② X_nはあらゆる次数のモーメント(moment)を持つ。すなわち

$$E[|X_n|^k]<\infty \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つ。なお，k次のモーメント$E[X_n^k]$（同分布なので，nによらない）をμ_kで表す。

平均が0なので，分散$V(X_n)=\mu_2$となる。

以上の仮定の下で，次の大数の法則が成り立つ。

定理2.1（大数の弱法則）

$$Y_n=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n\to 0\ (=E[X_1])\quad (n\to\infty)\ (\text{確率収束}).$$

言い替えれば，任意の$\varepsilon>0$に対して，

$$P(|(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n|>\varepsilon)\to 0\quad (n\to\infty).$$

ここでは述べないが，大数の法則には上記とは別に，概収束（確率1の収束）を主張する強法則がある。また，弱収束の方は，どの教科書にも載っているように，チェビシェフの不等式によって容易に証明される。

さて，大数の法則を特性関数の観点から見るとどうなるであろうか。X_nの特性関数はnによらないのでこれを$\phi(t)$で表すと，

$$\begin{aligned}\phi(t)&=E[\exp(it\,X_n)]\\&=E[1+it\,X_n+(it\,X_n)^2/2!+\cdots+(it\,X_n)^k/k!+\cdots]\\&=1+it\,\mu_1+(it)^2\mu_2/2!+\cdots+(it)^k\mu_k/k!+\cdots\end{aligned}$$

のように，モーメントで表現されることがわかる。命題1.3によれば，Y_nの特性関数は，

$$\begin{aligned}E[\exp(it\,Y_n)]&=E[\exp(it(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n)]\\&=E[\exp(it\,X_1/n)]\cdot E[\exp(it\,X_2/n)]\cdots\cdots E[\exp(it\,X_n/n)]\\&=\{E[\exp(it\,X_1/n)]\}^n\\&=\{\phi(t/n)\}^n\end{aligned}$$

となるが，一方，X_nの平均$\mu 1=0$であることから，

$$\begin{aligned}\phi(t/n)&=1+(it/n)^2\mu_2/2!+\cdots\\&=1+\frac{1}{n^2}\{(it)^2\mu_2/2+0(n^{-1})\}\end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}E[\exp(it\,Y_n)]&=\{1+0(n^{-2})\}^n\\&=1+0(n^{-1})\\&\to 1\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

恒等的に0である確率変数の特性関数が1であることから，Y_nは0に法則収束するといえる。収束としては確率収束よりは弱いのであるが，とにかくこのように，大数の法則を特性関数の立場からとらえ，証明することができる。

3．中心極限定理

前節で述べた大数の法則は，X_1からX_nまでの和をnで割ったもの(Y_n)が，nを大きくすると0に収束するという内容であったが，これはY_nの分散を計算することによっても確認できる。すなわち，

$$
\begin{aligned}
V(Y_n) &= V((X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n) \\
&= \{V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\}/n^2 \\
&= V(X_1)/n \\
&\to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

それではnでなく，$n^{1/2}$で割ったらどうであろうか。$Z_n=(X_1 + X_2+\cdots+X_n)/n^{1/2}$とおくと，

$$
\begin{aligned}
V(Z_n) &= V((X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n^{1/2}) \\
&= \{V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\}/(n^{1/2})^2 \\
&= V(X_1)
\end{aligned}
$$

となり，容易にわかるように$E[Z_n]=0$であるから，Z_nは平均，分散とももとのX_1と変わらないことになる。したがってZ_nが0に収束するとは期待できないし，また発散しそうにもない。それに答えるのが次の中心極限定理である。

定理3．1（中心極限定理）

本稿の仮定の下で，Z_nの分布は正規分布$N(0, V(X_1))$に収束する。すなわちZ_nは正規分布に法則収束する。

上のことは「$X_1 + X_2+\cdots+X_n$は正規分布$N(0, nV(X_1))$に近づく」と言い直してもよい。X_nの平均はnによらず0であるから，X_1，X_2，$\cdots X_n$はそれぞれ，各試行における平均からの誤差と言ってよい。つまり中心極限定理とは，試行が独立であれば，もとの分布が何であっても誤差の積み重ねは正規分布に近づくと言うことを主張する定理である。

このことを見るために，大数の法則の時と同様，特性関数を計算してみよう。なお，簡単のためこれから先では分散$V(X_1)=1$として話を進めることにする。Z_nの特性関数は，

$$
\begin{aligned}
E[\exp(it\, Z_n)] &= E[\exp(it\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n^{1/2})] \\
&= \{\phi(t/n^{1/2})\}^n.
\end{aligned}
$$

前節と同様にして，

$$
\begin{aligned}
\phi(t/n^{1/2}) &= 1+(it/n^{1/2})^2/2!+(it/n^{1/2})^3\mu_3/3!+\cdots \\
&= 1-t^2/2n+0(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
E[\exp(it\, Z_n)] = (1-t^2/2n+0(n^{-1}))^n
$$

$$\to \exp(-t^2/2) \quad (n\to\infty)$$

となり，$\exp(-t^2/2)$は平均０，分散1の正規分布の特性関数であるから，法則収束がわかる。中心極限定理は本稿よりもっと一般的な仮定の下でも成り立つが，その証明はだいたい上記に類したものである。

４．モーメントとキュムラント

以上で大数の法則と中心極限定理について，特に特性関数を使って述べたが，途中でも出てきたように，特性関数はもとの分布のモーメントで記述される関数である。この節では，分布から得られるキュムラント(cumulant)と呼ばれる別の量を使って，ふたつの定理を再考してみたい。

特性関数$\phi(t)$は，モーメントを使って

$$\phi(t)=\mu_0+(it)\mu_1/1!+(it)^2\mu_2/2!+\cdots+(it)^j\mu_j/j!+\cdots$$

（今の場合，$\mu_0=1$，$\mu_1=0$，$\mu_2=1$）と展開されるが，これとは別に

$$\rho(t)=\log\phi(t)$$

と定義すると，$\rho(0)=0$であるから$t=0$のまわりで

$$\rho(t)=\kappa_0+(it)\kappa_1/1!+(it)^2\kappa_2/2!+\cdots+(it)^j\kappa_j/j!+\cdots$$

と展開することができる。このとき現れる係数κ_jをX_1の分布のｊ次の**キュムラント**という。

関数$\phi(t)$，$\rho(t)$の第ｊ次導関数をそれぞれ$\phi^{(j)}(t)$，$\rho^{(j)}(t)$で表すと，

$$\phi^{(j)}(0)=i^j\mu_j,\quad \rho^{(j)}(0)=i^j\kappa_j$$

で，また$\phi(t)=\exp(\rho(t))$であることを利用すると，容易に

$$\mu_0=1,\quad \kappa_0=0,$$

$$\mu_1=\kappa_1,$$

$$\mu_2=\kappa_2+\kappa_1^2,$$

$$\mu_3=\kappa_3+3\kappa_1\kappa_2+\kappa_1^3,$$

$$\cdots\cdots$$

また逆に，

$$\kappa_1=\mu_1,$$

$$\kappa_2=\mu_2-\mu_1^2,$$

$$\kappa_3=\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3,$$

$$\cdots\cdots$$

と表されることがわかる。なお一般に，

$$\mu_j=\sum_p A_p\,\kappa_1^{p_1}\kappa_2^{p_2}\cdots\kappa_j^{p_j}$$

（ただしA_pは，ｊ個の異なるものを$p=(p_1, p_2, \cdots, p_j)$，$p_1, p_2, \cdots, p_j=j$にしたがって分割する分け方の数）と表される。

さて，X_1のモーメントについてわかっていることから，上の関係式を使うと，今の場合

$$\kappa_1=0,\quad \kappa_2=1$$

と計算されるから，

$$\rho(t)=-t^2/2+(it)^3\kappa_3/3!+(it)^4\kappa_4/4!+\cdots$$

となる。$Y_n=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$ の特性関数を $\phi_n(t)$，$\rho_n(t)=\log\phi_n(t)$ とおくと，

$$\phi_n(t)=\{\phi(t/n)\}_n$$

より，

$$\begin{aligned}\rho_n(t)&=n\,\rho(t/n)\\&=n\{-t^2/(2n^2)+(it/n)^3\kappa_3/3!+(it/n)^4\kappa_4/4!+\cdots\}\\&=-t^2/2n+(it)^3\kappa_3/(3!\,n^2)+(it)^4\kappa_4/(4!\,n^3)+\cdots\\&\to 0\quad(n\to\infty)\ .\end{aligned}$$

これは法則収束ではあるが，大数の法則を示している。一方，$Z_n=(X_1+X_2+\cdots X_n)/n^{1/2}$ の特性関数を $\psi_n(t)$，$\sigma_n(t)=\log\psi_n(t)$ とおくと，

$$\psi_n(t)=\{\phi(t/n^{1/2})\}^n$$

より，

$$\begin{aligned}\sigma_n(t)&=n\,\rho(t/n^{1/2})\\&=n\{-t^2/2n+(it/n^{1/2})^3\kappa_3/3!+(it/n^{1/2})^4\kappa_4/4!+\cdots\}\\&=-t^2/2+(it)^3\kappa_3/(3!\,n^{1/2})+(it)^4\kappa_4/(4!\,n)+\cdots\\&\to -t^2/2\quad(n\to\infty)\ .\end{aligned}$$

これは中心極限定理を示している．このように，キュムラントを用いた計算では，対数の効用により，収束の様子が非常に見通しよくなっているばかりでなく，収束の速さまでが表現されるのが特徴である。

5．精 密 化

前節でキュムラントを用いて中心極限定理を表現できることを見たが，そこでの関数 $\sigma_n(t)$ の形は，単に $-t^2/2$ に収束するということを言うだけで済ませるにはもったいないほどの，多くの情報を含んでいる。Z_n の特性関数は

$$\begin{aligned}\psi_n(t)&=\exp(\sigma_n(t))\\&=\exp\left[-\frac{1}{2}t^2+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\kappa_{j+2}}{(j+2)!}n^{-j/2}(it)^{j+2}\right]\end{aligned}$$

という形をしているが，$\exp(-t^2/2)$ の残りの部分を，

$$\exp\left[\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\kappa_{j+2}}{(j+2)!}n^{-j/2}(it)^{j+2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(it)\,n^{-k/2}$$

と展開することができる。ただし P_k は n によらない高々3k次の多項式で，係数はすべてキュムラントで表される。この表現によれば，Z_n の特性関数と，収束先である標準正規分布の特性関数との比が $n^{-1/2}$ のべき級数で表され，その収束の速さはキュムラントによって決まるということになる。また，特性関数からフーリエ変換を施せば確率密度関数や分布関数も得られるので，それ

らの形でも標準正規分布とのずれを正確に表すことができる。すなわち，Z_nの密度関数（が存在するとして）を$f_n(x)$，標準正規分布の密度関数を$g(x)=\exp(-x^2/2)/(2\pi)^{1/2}$で表すと，

$$f_n(x)=g(x)+\{Q_1(x)/n^{1/2}+Q_2(x)/n+Q_3(x)/n^{3/2}+\cdots\}g(x)$$

となる。ここで，$Q_k(x)$はキュムラントによって決まる係数を持つ多項式である。この展開をエッジワース展開というが，キュムラントによって中心極限定理を精密化した例である。

この方法は計算が容易で具体的であるので，ここにあげた以外にも様々な収束問題への応用が期待される。議論が細かくなるのでここで紹介することはできないが，互いに引力などの相互作用を持つ多数の粒子の運動にともなって現れる収束問題や，大変動の原理(large deviation principle)と呼ばれる収束問題への応用が考えられている。

参考文献

[1] 清水良一，『中心極限定理』シリーズ新しい応用の数学14，教育出版，1976.

[2] Donsker, M. D. and S. R. S. Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time Ⅲ, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 389-461.

[3] Kusuoka, S. and Y. Tamura, Gibbs measures for mean field potentials, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 31 (1984), 223-245.