

UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

ANNO ACCADEMICO 2008/2009

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

**Omologia di Khovanov**

CANDIDATO

**Claudio Tamburrino**

RELATORE

**Dott. Bruno Martelli**

CONTRORELATORE

**Prof. Paolo Lisca**

# Indice

<b>1</b>	<b>Nodi e invarianti</b>	<b>1</b>
1.1	Bracket di Kauffman . . . . .	3
1.2	Polinomio di Jones . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Omologia di Khovanov</b>	<b>8</b>
2.1	Prime definizioni . . . . .	8
2.2	Invarianza (approccio geometrico) . . . . .	16
2.2.1	Le relazioni $S$ , $T$ , $4Tu$ . . . . .	19
2.2.2	Eliminazione ricciolo a sinistra . . . . .	22
2.2.3	Sovrapposizione di archi . . . . .	23
2.2.4	Eliminazione ricciolo a destra . . . . .	25
2.2.5	Attraversamento di un incrocio . . . . .	25
2.3	Invarianza (approccio algebrico) . . . . .	28
2.3.1	Eliminazione ricciolo a destra . . . . .	32
2.3.2	Eliminazione ricciolo a sinistra . . . . .	35
2.3.3	Sovrapposizione di archi . . . . .	37
2.3.4	Attraversamento di un incrocio . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Il grado quantico</b>	<b>47</b>
3.1	Definizioni e proprietà . . . . .	47
3.2	Da Khovanov a Jones . . . . .	51
3.3	Cambio di orientazione e immagine specchiata . . . . .	53
3.4	Finezza dell'omologia di nodi alternanti . . . . .	55

# Introduzione

Questa tesi si propone di discutere nel modo più semplice possibile la costruzione dell'*omologia di Khovanov*, un particolare tipo di omologia associata ad un nodo o un link. Un nodo è una curva chiusa liscia in  $\mathbb{R}^3$ . Un link è una unione di nodi che non si intersecano.

Il problema principale dei nodi consiste nel capire quale link si può trasformare in quale link (senza ovviamente tagliare le corde!). Vogliamo capire se due link sono o meno equivalenti a meno di isotopia. Conviene spesso usare, invece del link in  $S^3$ , una sua generica proiezione ad un diagramma su  $\mathbb{R}^2$ . Alexander ha mostrato (teorema 1.0.4) che due diagrammi sono equivalenti se e solo se sono collegati da una successione di mosse, dette di Reidemeister, mostrate in figura 1.1.

Per capire se due link sono equivalenti può essere utile trovare degli invarianti, ossia assegnare ad ogni link un oggetto, in modo che a link equivalenti corrisponda lo stesso oggetto. Un esempio semplice ma efficace è il numero di componenti di un link; se due link hanno diverso numero di componenti, chiaramente non possono essere trasformati l'uno nell'altro. Ad esempio, link  $\bigcirc$  e  $\bigotimes$  non possono essere trasformati l'uno nell'altro. Esistono numerosi esempi di invarianti, con costruzioni più o meno esotiche, con oggetti che siano numeri, polinomi, gruppi, moduli e via dicendo. Tra i più interessanti, vi è il polinomio di Jones (definizione 1.2.1), un polinomio nelle variabili formali  $q$  e  $q^{-1}$ .

Un esempio di invariante un po' più complesso è l'insieme dei gruppi di omologia di Khovanov  $H^{s,t}$  (definizione 3.1.6), indicizzati da due parametri,  $s$  (altezza, o grado omologico) e  $t$  (grado quantico).

Si può dimostrare che l'omologia di Khovanov è un'invariante strettamente più forte del polinomio di Jones. In particolare, vale l'identità 3.2.1: la caratteristica di Eulero dell'omologia di Khovanov è il polinomio di Jones. Sebbene l'omologia di Khovanov aiuti a risolvere il problema della classificazione dei nodi, questa non è un invariante completo, quindi non risolve totalmente il problema. Esistono infatti nodi con polinomio di Jones uguale ma con omologia di Khovanov diversa; i nodi  $10_{136}$  and  $11_{92}^n$  in [DBN-H]

hanno entrambi lo stesso numero di incroci positivi e negativi e lo stesso polinomio di Jones, ma la loro omologia di Khovanov è diversa.

Grazie all'omologia di Khovanov, è possibile dimostrare risultati sui nodi come la congettura di Milnor in modo puramente combinatorio, seguendo la via indicata da Rasmussen (2004), ed evitando le dimostrazioni via teorie di gauge di Kronheimer e Mrowka (1993). Al momento, i calcoli al computer sull'omologia di Khovanov hanno suggerito numerose congetture, molte delle quali sono ancora senza dimostrazione.

# Capitolo 1

## Nodi e invarianti

In questo capitolo definiamo alcuni strumenti utili a distinguere un nodo dall'altro.

Un nodo si ottiene prendendo un segmento in  $\mathbb{R}^3$ , attorcigliandolo in vari modi, e collegando tra loro le estremità. Più formalmente, abbiamo la seguente definizione.

*Definizione 1.0.1.* Un *nodo* è una 1-varietà differenziabile connessa in  $\mathbb{R}^3$ .

In particolare un nodo è compatto, quindi possiamo pensarlo sia in  $\mathbb{R}^3$  sia in  $S^3$ .

Anche se la nostra attenzione sarà dedicata ai nodi, molte delle nostre costruzioni si estendono anche ad oggetti più generici dei nodi, come i tangle e i link.

*Definizione 1.0.2.* Un *link* è una 1-varietà differenziabile in  $S^3$ . Un *tangle* è una 1-varietà differenziabile compatta in  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , eventualmente con bordo (contenuto in  $\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$ ).

In sostanza, un tangle è un insieme di curve, un link è un insieme di curve chiuse, un nodo è una curva chiusa.

Due link sono equivalenti se è possibile trasformare un link nell'altro con mosse "naturali", cioè muovendo il link nello spazio ma senza tagliare e incollare le curve. Più formalmente, possiamo definire l'equivalenza di link.

*Definizione 1.0.3.* Due link sono equivalenti se esiste una isotopia ambiente differenziabile che li collega.

Per visualizzare un nodo, spesso ricorreremo ad un diagramma del nodo, cioè una proiezione del nodo su un piano. Richiederemo che si tratti di una proiezione generica, cioè tale che in ogni incrocio coinvolge solo due archi. Inoltre considereremo dei diagrammi con una struttura aggiuntiva: ad ogni incrocio aggiungiamo l'informazione quale arco passa sotto e quale arco

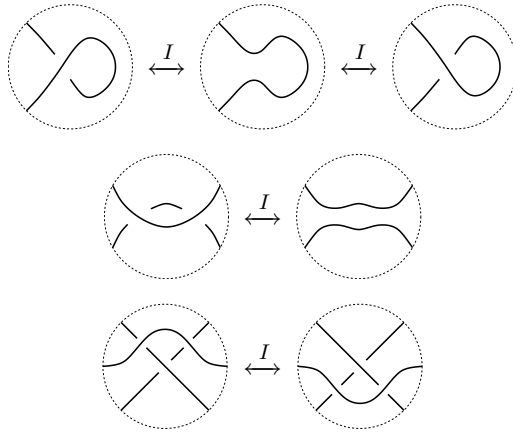



Figura 1.1: (Mosse di Reidemeiser).

passa sopra. Un diagramma di questo tipo è quello che basta per riuscire a ricostruire il nodo di partenza.

Un grafico del tipo  rappresenta un diagramma in cui la parte all'interno del cerchio tratteggiato è come in figura, mentre la parte all'esterno è arbitrariamente fissata.

Abbiamo bisogno di una definizione più maneggevole di equivalenza di diagrammi di nodi. In effetti, risulta che due nodi equivalenti sono collegati da una successione di mosse di Reidemeiser. Una mossa di Reidemeiser consiste nel modificare un diagramma usando una delle mosse in Figura 1.1. Le mosse sono sostanzialmente la mossa di aggiunta o rimozione di un ricciolo, la sovrapposizione di due archi, l'attraversamento di un incrocio con un arco.



Tali mosse da intendersi in senso locale, ossia si possono applicare a qualsiasi diagramma di link o tangle fatto localmente come uno dei diagrammi in figura.

**Teorema 1.0.4** (Alexander, 1920). *Diagrammi diversi dello stesso link sono collegati da una successione di mosse di Reidemeiser (Figura 1.1) e da isotopie planari. Due link sono equivalenti se e solo se due qualsiasi loro diagrammi sono collegati da una successione di mosse di Reidemeiser e da isotopie planari.*

A questo punto vogliamo trovare dei metodi per capire quali nodi sono equivalenti. Ad esempio, contare il numero di componenti. Il nodo  $\bigcirc$  e il nodo  $\bigcirc\bigcirc$  non sono equivalenti poiché hanno diverso numero di componenti, ed il numero di componenti è un ovvio invariante d'isotopia.

Tuttavia si tratta di un invariante non molto potente: i nodi  $\bigcirc\bigcirc$  e  $\bigotimes$  hanno entrambi due componenti ma non sono equivalenti. Possiamo definire



un invariante aggiuntivo, il linking number, che misura quanto due nodi sono avvolti tra loro. Abbiamo bisogno di link orientati, quindi di diagrammi di link orientati. Le informazioni sull'orientazione saranno incluse nel diagramma con delle frecce, dove si richiede che ogni incrocio abbia orientazioni degli archi che escono da tale incrocio disposte in modo consistente.

Per un incrocio  $p$  del tipo  definiamo il suo segno  $\epsilon(p) = +1$ , per un incrocio  $p$  del tipo  definiamo il suo segno  $\epsilon(p) = -1$ .



Dato un diagramma di link orientato  $T$  costituito da due componenti  $\alpha$  e  $\beta$ , definisco  $\alpha \sqcap \beta$  come l'insieme degli incroci tra la componente  $\alpha$  e la componente  $\beta$ . In particolare,  $\alpha \sqcap \beta$  non include le autointersezioni di  $\alpha$  o di  $\beta$ .

*Definizione 1.0.5.* Il linking number di  $\alpha$  e  $\beta$  è





$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \sqcap \beta} \epsilon(p).$$

Ad esempio, il diagramma  ha linking number  $\frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ , il diagramma  ha linking number  $\frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$ .

Dalle mosse di Reidemeister è immediato verificare che il linking number è un invariante del nodo; l'aggiunta di un ricciolo non influisce sul linking number, la sovrapposizione di due archi aggiunge e toglie 1 alla somma dei segni, l'attraversamento di un incrocio non modifica il segno degli incroci nel diagramma.

Quanto detto basta a dimostrare che  e  non sono link equivalenti.

## 1.1 Bracket di Kauffman

Definiamo ora un polinomio bracket  $[K]$  associato ad un diagramma  $K$  non orientato. con  $[K] \in \mathbb{Z}[A, B, d]$ . Le variabili  $A, B, d$  sono tre variabili formali che commutano tra loro. Dato un incrocio , è in generale possibile sostituirlo con  (in tal caso si parla di 0-risoluzione di ) , oppure con  (1-risoluzione). Il polinomio bracket  $K$  deve soddisfare le seguenti regole:

$$\begin{aligned} [\text{crossing}] &= A[\text{0-resolution}] + B[\text{1-resolution}], \\ [\text{circle with crossing}] &= d[K], \\ [\text{circle}] &= d. \end{aligned}$$

La prima di queste tre equazioni è una “relazione di skein”. Una relazione di skein è in generale una relazione che coinvolge i tre diagrammi  $\textcircled{\ominus}$ ,  $\textcircled{\otimes}$ ,  $\textcircled{\circ}$ . Come per le mosse di Reidemeister, con i diagrammi  $\textcircled{\ominus}$ ,  $\textcircled{\otimes}$ ,  $\textcircled{\circ}$ , si intendono porzioni di un diagramma più grande, identico al di fuori del cerchio tratteggiato. La parte esterna può essere scelta arbitrariamente, e per ogni scelta ottengo una regola. Ad esempio scegliendo il diagramma  $\textcircled{\otimes}$  posso ottenere la regola

$$[\textcircled{\otimes}] = A[\textcircled{\ominus}] + B[\textcircled{\circ}].$$

Con queste formule abbiamo definito la parentesi  $[K]$  in modo ricorsivo per ogni  $K$ . Resta da vedere che, in questo modo,  $[K]$  è ben definito. Per fare ciò, usiamo una definizione alternativa di  $[K]$ , del tipo state-sum. Uno stato  $s$  è dato dal diagramma  $K$  più un numero, 0 o 1, associato ad ogni incrocio di  $K$ . Se  $K$  ha  $n$  incroci, gli stati di  $K$  sono quindi  $2^n$ .

Dato uno stato  $s$ , chiamiamo  $|s|$  il numero di componenti nella risoluzione di  $K$  associata a tale stato, chiamiamo  $i(s)$  il numero di incroci risolti nel modo 0, chiamiamo  $j(s)$  il numero di incroci risolti nel modo 1.

**Lemma 1.1.1.**

$$[K] = \sum_s A^{i(s)} B^{j(s)} d^{|s|}.$$

*Dimostrazione.* La formula segue direttamente dalle regole che definiscono  $[K]$ . In particolare, tale formula può essere usata come definizione di  $[K]$ .  $\square$

Il polinomio  $[K]$  appena definito non è un invariante di nodi. Tuttavia, scelti opportunamente  $A$ ,  $B$ ,  $d$ , possiamo trasformarlo in invariante di nodi.

**Lemma 1.1.2.**

$$[\textcircled{\ominus}] = AB[\textcircled{\otimes}] + (ABd + A^2 + B^2)\textcircled{\circ}.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} [\textcircled{\ominus}] &= A[\textcircled{\otimes}] + B[\textcircled{\circ}] \\ &= A^2[\textcircled{\otimes}] + AB[\textcircled{\otimes}] + AB[\textcircled{\circ}] + B^2[\textcircled{\circ}] \\ &= (A^2 + B^2 + ABd)[\textcircled{\circ}] + AB[\textcircled{\otimes}]. \end{aligned} \quad \square$$

Quindi per ottenere l’invarianza per sovrapposizione di archi è sufficiente porre  $AB = 1$  e  $d = -A^2 - B^2$ . L’invarianza per attraversamento di un incrocio, nota l’invarianza per sovrapposizione di archi, è più facile.



**Lemma 1.1.3.** *Se vale  $[\textcircled{\otimes}] = [\textcircled{\ominus}]$ , allora  $[\cdot]$  è invariante anche per la mossa attraversamento di un incrocio.*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} [\textcircled{\otimes}] &= A[\textcircled{\otimes}] + B[\textcircled{\otimes}] \\ &= A[\textcircled{\otimes}] + B[\textcircled{\otimes}] \\ &= [\textcircled{\otimes}]. \end{aligned} \quad \square$$

*Definizione 1.1.4.* La parentesi  $\langle K \rangle$  per link non orientati, detta *parentesi di Kauffman*, è data da  $\langle K \rangle = [K]$  con  $B = A^{-1}$  e  $d = -A^2 - A^{-2}$ . In tal modo, la parentesi di Kauffman è invariante per la seconda e la terza mossa di Reidemeister. Le regole che definiscono  $\langle \cdot \rangle$  sono quindi

$$\begin{aligned} \langle \textcircled{\otimes} \rangle &= A \langle \textcircled{\otimes} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\ominus} \rangle, \\ \langle \textcircled{\circ} K \rangle &= (-A^2 - A^{-2}) \langle K \rangle, \\ \langle \textcircled{\circ} \rangle &= -A^2 - A^{-2}. \end{aligned}$$

*Osservazione 1.1.5.* Tale definizione non è quella usata originariamente da Kauffman nell'articolo [LHK-N], ma è una definizione riscaltata in modo adeguato ai nostri scopi. Tale osservazione è valida anche per il polinomio di Jones.

Per la prima mossa di Reidemeister (eliminazione di un ricciolo), abbiamo il seguente lemma.

**Lemma 1.1.6.**

$$\begin{aligned} \langle \textcircled{\otimes} \rangle &= -A^3 \langle \textcircled{\otimes} \rangle, \\ \langle \textcircled{\otimes} \rangle &= -A^{-3} \langle \textcircled{\otimes} \rangle. \end{aligned}$$

Definiamo l'avvolgimento  $w(K)$  di un link orientato  $K$  come la somma di tutti i segni degli incroci

$$\begin{aligned} n_+ &= \#\{p \text{ incrocio} \mid \epsilon(p) = 1\} \\ n_- &= \#\{p \text{ incrocio} \mid \epsilon(p) = -1\} \\ w(K) &= \sum_{p \text{ incrocio}} \epsilon(p) = n_+ - n_-. \end{aligned}$$

Come per il linking number, la mossa di Reidemeister sovrapposizione di archi contribuisce all'avvolgimento con un termine  $+1$  e un termine  $-1$ , quindi non

modifica l'avvolgimento. Analogamente, i due termini della mossa attraversamento di un incrocio contribuiscono con gli stessi termini all'avvolgimento, quindi anche questa mossa non modifica l'avvolgimento.

Per quanto riguarda la prima mossa di Reidemeiser, osservando il lemma 1.1.6, il primo link  $\langle \otimes \rangle$  ha un incrocio positivo, il secondo link  $\langle \circlearrowleft \rangle$  ha un incrocio negativo. Non è difficile immaginare una normalizzazione  $f_K$  di  $\langle \cdot \rangle$  che sia invariante per la prima mossa di Reidemeiser.

*Definizione 1.1.7.* La parentesi di Kauffman normalizzata  $f_K$  per link orientati è

$$f_K = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle.$$

Sia  $w(K)$  sia  $\langle K \rangle$  sono invarianti per la seconda e terza mossa di Reidemeiser. Ne consegue che  $f_K$  è invariante per tutte le mosse di Reidemeiser. Abbiamo così dimostrato il seguente lemma.

**Lemma 1.1.8.** *La parentesi di Kauffman normalizzata  $f_K$  è un invariante di link.*  $\square$

*Osservazione 1.1.9.* Khovanov utilizza una versione differente di parentesi di Kauffman, definita per link non orientati da

$$\begin{aligned} \langle \otimes \rangle &= \langle \circlearrowleft \rangle - q \langle \circlearrowright \rangle \\ \langle \bigcirc \rangle &= q - q^{-1}. \end{aligned}$$

Questa versione non è invariante per prima e seconda mossa di Reidemeiser. Con semplici conti, si verifica che, con questa definizione, vale

$$\begin{aligned} \langle \text{positive crossing} \rangle &= -q^2 \langle \text{negative crossing} \rangle & \langle \text{positive crossing} \rangle &= q^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle \\ \langle \text{negative crossing} \rangle &= -q \langle \text{positive crossing} \rangle & \langle \text{positive crossing} \rangle &= \langle \text{positive crossing} \rangle. \end{aligned}$$

Normalizzando questa parentesi di Kauffman tramite

$$f_K = (-1)^{n_-(K)} q^{n_+(K) - 2n_-(K)} \langle K \rangle$$

si ottiene lo stesso invariante  $f_K$  definito da Kauffman per link orientati, tramite l'uguaglianza  $q = -A^{-2}$ .

L'oggetto  $f_K$  che abbiamo definito è in stretta relazione con il polinomio di Jones.

## 1.2 Polinomio di Jones

*Definizione 1.2.1.* Il polinomio di Jones  $V(\cdot)$  è un polinomio per link orientati, definito tramite le relazioni

- $t^{-1}V(\textcircled{\times}) - t^{+1}V(\textcircled{\times}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\textcircled{\cup})$ ,
- $V(\textcircled{\circ}) = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ .

Vale il seguente semplice lemma.

**Lemma 1.2.2.** *Posto  $A = t^{-\frac{1}{4}}$ , abbiamo  $f_K(A) = V_K(t)$ .*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \langle \textcircled{\times} \rangle &= A^{+1} \langle \textcircled{\cup} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\cap} \rangle, \\ \langle \textcircled{\times} \rangle &= A^{-1} \langle \textcircled{\cup} \rangle + A^{+1} \langle \textcircled{\cap} \rangle, \\ A^{+1} \langle \textcircled{\times} \rangle - A^{-1} \langle \textcircled{\times} \rangle &= (A^{+2} - A^{-2}) \langle \textcircled{\cup} \rangle, \\ A^{+1}(-A^{+3}) \langle \textcircled{\times} \rangle (-A^{+3})^{-w(\textcircled{\times})} + \\ -A^{-1}(-A^{-3}) \langle \textcircled{\times} \rangle (-A^{+3})^{-w(\textcircled{\times})} &= (A^{+2} - A^{-2}) \langle \textcircled{\cup} \rangle (A^{-3})^{-w(\textcircled{\cup})}, \\ -A^{+4}f(\textcircled{\times}) + A^{-4}f(\textcircled{\times}) &= (A^{+2} - A^{-2})f(\textcircled{\cup}). \end{aligned}$$

Sostituiamo  $A = t^{-\frac{1}{4}}$ .

$$t^{-1}f(\textcircled{\times}) + t^{+1}f(\textcircled{\times}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})f(\textcircled{\cup}) \quad \square.$$

# Capitolo 2

## Omologia di Khovanov

### 2.1 Prime definizioni

L'omologia di Khovanov, come il polinomio di Jones, è definita a partire dalle risoluzioni. Sia  $A$  un insieme finito di punti su  $S^1$ , sia  $D$  un diagramma di tangle (contenuto in  $D^2$ ), a bordo  $A$ , con  $n$  incroci ordinati (eventualmente etichettati dall'insieme  $I$ ).

Si ricorda che, dato un incrocio  $\otimes$ , è possibile sostituirlo con  $\circlearrowleft$  (in tal caso si parla di 0-risoluzione di  $\otimes$ ), oppure con  $\circlearrowright$  (1-risoluzione). La risoluzione di un incrocio in un tangle sostituisce un diagramma di tangle con un altro diagramma di tangle con un incrocio in meno. In questo modo è possibile risolvere tutti gli incroci e ottenere un diagramma di tangle senza incroci (un insieme di circonferenze e archi).

Una risoluzione totale (o stato) può essere individuata da un vettore  $(x_1, \dots, x_n)$  dove  $x_i$  è il tipo di risoluzione dell' $i$ -esimo incrocio (quindi è  $x_i$  è 0 o 1). Equivalentemente, una risoluzione totale può essere individuata da un insieme  $J \subseteq I$  costituito dagli incroci risolti nel modo 1. La risoluzione di un incrocio è un processo locale, quindi non è importante l'ordine con cui risolvo ciascun incrocio.

Le risoluzioni totali non hanno incroci, sono quindi insiemi di circonferenze e di archi in  $D^2$  a bordo  $A$ . Definisco la categoria  $\text{Cob}^3(A)$  come la categoria avente come oggetti gli insiemi di circonferenze e di archi in  $D^2$  a bordo  $A$ , a meno di isotopia. I morfismi sono i cobordismi tra due risoluzioni, a meno di isotopia. In particolare, tali cobordismi sono in  $D^2 \times [0, 1]$ , con bordo in  $A \times [0, 1]$ . Oggetti e morfismi sono considerati sempre a meno di isotopia che preservi  $A$ . I morfismi si compongono nel modo ovvio, cioè mettendoli uno sopra l'altro, come in Figura 2.1.

A questo punto, dato un diagramma  $D$ , possiamo immaginare le risoluzio-

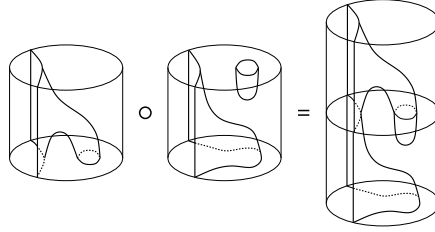


Figura 2.1: Composizione di cobordismi; per convenzione, disegniamo i cobordismi sempre dall'alto verso il basso.

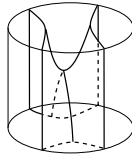


Figura 2.2: Classico cobordismo sella.

ni come disposte sui vertici di  $M_D$ , un cubo  $n$ -dimensionale. Ciascun vertice del cubo sarà denotato con  $(M_D)_{x_1, \dots, x_n}$ , dove  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate del vertice e ciascun  $x_i$  è 0 o 1. Sia  $(M_D)_{(x_1, \dots, x_n)}$  il diagramma del tangle della risoluzione di  $D$  corrispondente a  $(x_1, \dots, x_n)$ , indicato con  $D(*x_1 \dots x_n)$ ;  $(M_D)_{(x_1, \dots, x_n)}$  è quindi un oggetto di  $\text{Cob}^3(A)$ .

Un lato del cubo sarà un segmento ad estremi  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$  e  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , che indico con  $d_{x_1, \dots, x_{i-1}, *, x_{i+1}, \dots, x_n}$ .

Definisco  $d_{(x_1, \dots, x_{i-1}, *, x_{i+1}, \dots, x_n)}$  il cobordismo dalla risoluzione  $M_{x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n}$  alla risoluzione  $M_{x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n}$  unione di due pezzi; vicino all'incrocio ho il classico cobordismo sella della figura 2.2 che manda la 0-risoluzione nella 1-risoluzione, lontano dall'incrocio ho il cobordismo identità.

Il cubo delle risoluzioni  $(M, d)$  così ottenuto è un insieme di oggetti e frecce, in  $\text{Cob}^3(A)$ .

**Lemma 2.1.1.** *Il cubo delle risoluzioni è commutativo.*

*Dimostrazione.* Basta mostrare che ciascuna faccia del cubo è commutativa. Questo segue semplicemente dal fatto che due selle ad altezze differenti possono essere spostate a selle con altezze uguali tramite una isotopia.  $\square$

Abbiamo bisogno di fare operazioni con i cubi, e la sola composizione di cobordismi non è sufficiente. Creiamo allora un'altra operazione, che ci consenta di sommare tra loro due cobordismi. Data una categoria, per ogni coppia di oggetti  $(A, B)$ , posso sempre estendere l'insieme dei morfismi dal primo al secondo  $\text{Mor}(A, B)$  in modo  $\mathbb{Z}$ -lineare, ad esempio rimpiazzando l'insieme

dei morfismi  $Mor(A, B)$  con l'insieme di tutte le combinazioni lineari formali a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  di morfismi in  $Mor(A, B)$ .

*Definizione 2.1.2.* Una categoria è *pre-additiva* se ciascun insieme  $Mor(A, B)$  è un gruppo abeliano (additivo) e le composizioni di morfismi sono bilineari.

La categoria  $Cob^3(A)$ , estesa nel modo appena descritto, diventa una categoria pre-additiva. Posso effettuare somme e differenze di cobordismi.

*Definizione 2.1.3.* Se  $(M, d)$  è un cubo, si definisce  $(M', d')$  come il cubo con vertici uguali ai vertici di  $M$ , e morfismi  $d'_{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n} = (-1)^{\sum_{k < i} x_k} d_{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n}$  se  $x_i = \star$ .

**Lemma 2.1.4.** *Se  $M$  è un cubo commutativo,  $M'$  è un cubo anticommutativo.*

L'obbiettivo è confrontare tra loro cubi di tangle diversi. Per fare ciò, è opportuno utilizzare una versione semplificata del cubo, in cui tutti gli oggetti ad altezza uguale vengono raggruppati insieme. Un modo naturale di effettuare questa operazione è tramite la categoria delle matrici.

*Definizione 2.1.5.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva. La categoria delle matrici di  $\mathcal{C}$ , chiamata  $Mat(\mathcal{C})$ , è costruita in questo modo.

- Oggetti: le somme dirette formali  $\bigoplus_{i=1}^n A_i$  di oggetti  $A_i$  in  $\mathcal{C}$ , di lunghezza qualsiasi, finita (eventualmente anche zero).
- Morfismi: le matrici  $(F_{i,j}) = F : \bigoplus_{i=1}^n A_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m B_j$  di morfismi  $F_{i,j} : A_i \rightarrow B_j$ .
- Composizioni di morfismi: la composizione standard di matrici, prodotto righe per colonne.

Se  $\mathcal{C}$  è una categoria pre-additiva,  $Mat(\mathcal{C})$  contiene anche l'oggetto somma formale vuota (somma diretta formale di zero oggetti), che chiameremo  $0$ . Inoltre  $Mat(\mathcal{C})$  è essa stessa pre-additiva con la somma standard di matrici, elemento per elemento. Le frecce in  $Mat(\mathcal{C})$  che partono o che arrivano in  $0$  devono essere un morfismo  $0$  (matrice con zero morfismi). Sarà chiaro dal contesto quando intendiamo l'oggetto  $0$  e quando un morfismo  $0$ .

A questo punto, è chiaro il modo di raggruppare gli oggetti nei vertici di un cubo.

*Definizione 2.1.6.* Definiamo l'*altezza* (o *grado omologico*) di un vertice  $M_{x_1, \dots, x_n}$  nel cubo  $(M, d)$  come  $\sum x_i$ . Definiamo  $\overline{C}$  come il raggruppamento dei vertici

per altezza. Consideriamo cioè gli oggetti  $\bigoplus_{\sum x_i=k} M_{x_1, \dots, x_n} \in \text{Mat}(\mathcal{C})$  e consideriamoli come il  $k$ -esimo oggetto  $(\overline{C}(M))^k$  di una riga di oggetti e frecce in  $\text{Mat}(\mathcal{C})$ ,

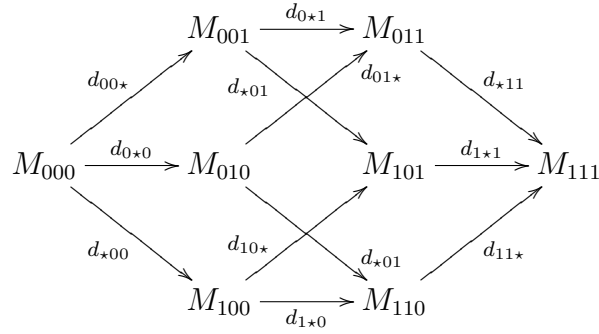
$$(\overline{C}(M))^k := \bigoplus_{\sum x_i=k} M_{x_1, \dots, x_n}.$$

La mappa da  $(\overline{C}(M))^k$  a  $(\overline{C}(M))^{k+1}$  è data dalla matrice di tutte le mappe  $d_{x_1, \dots, x_n}$  da  $M_{x_1, \dots, x_n}$  con  $\sum x_i = k$  a  $M_{y_1, \dots, y_n}$  con  $\sum y_i = k + 1$ . Nel caso in cui il morfismo non sia definito (ad esempio, da  $M_{010}$  a  $M_{101}$ ), consideriamo il morfismo 0 (sempre ben definito in una categoria pre-additiva).

Quindi, data  $\mathcal{C}$  categoria pre-additiva,  $\overline{C}$  trasforma un cubo  $M$  di oggetti e frecce in  $\mathcal{C}$  in una riga  $\overline{C}(M)$  di oggetti e frecce in  $\text{Mat}(\mathcal{C})$ , decisamente più maneggevole.

*Definizione 2.1.7.* Lo *shift dell'altezza*, o shift del grado omologico, è una operazione a cui faremo spesso riferimento. Tale operazione è indicata con  $[k]$ . Ad esempio, se  $\overline{C}$  è una riga di oggetti e frecce,  $(\overline{C})^k = (\overline{C}[t])^{k+t}$ . Nelle espressioni lo shift del grado omologico avrà sempre la precedenza su somme dirette e prodotti tensore.

*Esempio 2.1.8.* Al cubo



con oggetti e frecce in  $\text{Cob}^3(A)$  in corrisponde la riga

$$(M_{000}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_{00*} \\ d_{0*0} \\ d_{*00} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} M_{001} \\ M_{010} \\ M_{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_{0*1} & d_{01*} & 0 \\ d_{*01} & 0 & d_{10*} \\ 0 & d_{*10} & d_{1*0} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} M_{011} \\ M_{101} \\ M_{110} \end{pmatrix} \xrightarrow{(d_{*11} \quad d_{1*1} \quad d_{11*})} (M_{111})$$

con oggetti e frecce in  $\text{Mat}(\text{Cob}^3(A))$ , dove  $C(M)^0 = (M_{000})$  e  $C(M)^3 = (M_{111})$ .

Effettuiamo questa operazione sui diagrammi di tangle  $D$ , in modo da associare ad un tangle  $D$  una riga  $\overline{C}(M_D)$  con oggetti e frecce in  $\text{Mat}(\text{Cob}^3(A))$ .

Vogliamo ora considerare le righe di oggetti e frecce come oggetti in una categoria.

*Definizione 2.1.9.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva. La categoria dei complessi di catene di  $\mathcal{C}$ , chiamata  $\text{Kom}(\mathcal{C})$ , è costruita in questo modo.

- Oggetti: i complessi di catene, ossia le catene  $(A, d) = (A_i, d_i) := A_0 \xrightarrow{d_0} A_1 \xrightarrow{d_1} \dots \rightarrow A_n$  di oggetti  $A_i$  in  $\mathcal{C}$ , di lunghezza qualsiasi, finita (eventualmente anche zero), con  $d_{i+1} \circ d_i = 0$ .
- Morfismi: i morfismi di catene  $F = (F_i) : (A, d) \rightarrow (B, d')$ , con  $F_i : A_i \rightarrow B_i$ , che facciano commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} (A, d) : & & \dots & \xrightarrow{d_{-1}} & A_0 & \xrightarrow{d_0} & A_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots \\ & & & & \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 & & \\ (B, d') : & & \dots & \xrightarrow{d'_{-1}} & B_0 & \xrightarrow{d'_0} & B_1 & \xrightarrow{d'_1} & \dots \end{array}$$

- Composizioni di morfismi: la composizione standard elemento per elemento.

L'oggetto  $A_i \in \mathcal{C}$  si dice avere *grado omologico*  $i$ .

Data  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva, la categoria  $\text{Kom}(\mathcal{C})$  è automaticamente pre-additiva. Le catene possono essere allungate a piacere aggiungendo oggetti 0 e mappe 0 in cima e in fondo alle catene. In tal modo, è sempre possibile definire una mappa tra due oggetti di  $\text{Kom}(\mathcal{C})$ , anche se sono definiti in gradi omologici diversi.

Ricordiamo che in un diagramma di tangle orientato gli incroci possono essere classificati in incroci positivi, del tipo  $\otimes$ , e negativi, del tipo  $\otimes$ . Chiamiamo  $n_+$  il numero di incroci positivi e  $n_-$  il numero di incroci negativi.

*Definizione 2.1.10.* Sia  $D$  un diagramma di tangle orientato con  $n = n_+ + n_-$  incroci, sia  $M_D$  il suo cubo delle risoluzioni. Invece di considerare  $\overline{\mathcal{C}}(M'_D)$ , i cui gradi omologici vanno da 0 a  $n = n_+ + n_-$ , consideriamo  $\overline{\mathcal{C}}(M'_D)[n_-]$ , i cui gradi omologici vanno da  $-n_-$  a  $n_+$ . Definiamo la parentesi di Khovanov per link o tangle orientati come

$$\llbracket D \rrbracket = \overline{\mathcal{C}}(M'_D)[n_-].$$

Considerando che  $\overline{\mathcal{C}}(M'_D)$  è indipendente dall'orientazione di  $D$ , in questo caso l'orientazione è utile solo alla determinazione dello shift omologico  $[n_-]$ . Alla luce dei lemmi 2.1.1 e 2.1.4,  $M'_D$  è un cubo anticommutativo. La riga di oggetti e frecce  $\overline{\mathcal{C}}(M')$  associata ad un cubo anticommutativo  $M'$  è sempre un complesso di catene. Da questo segue che  $\llbracket D \rrbracket$  è un complesso di catene.



Un po' più difficile è invece mostrare che  $\llbracket D \rrbracket$  non dipende a meno di isomorfismi di complessi di catene dal cubo scelto, ossia non dipende dall'ordine dei vertici. Si tratta di una verifica che non faremo in cui l'unico elemento su cui porre l'attenzione riguarda i segni delle mappe.

Spesso ci sarà utile definire un "appiattimento" di un morfismo di complessi. Tale costruzione è il cono di un morfismo.

*Definizione 2.1.11.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva. Siano  $(A, d)$  e  $(B, d')$  due complessi di catene in  $\text{Kom}(\mathcal{C})$ , sia  $F$  un morfismo di catene da  $A$  a  $B$ . Il *cono* di  $F$ , indicato con  $\Gamma(F)$ , è un complesso di catene costruito nel seguente modo. Il cono  $\Gamma(F)$  del morfismo  $F$  è il complesso di catene  $(C, \delta)$ , con  $C^i = A^{i+1} \oplus B^i$  e  $\delta = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ F & d' \end{pmatrix}$ , con gli indici opportuni.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (A, d) : & \cdots & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{d_1} & A_2 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \oplus & & \oplus & & & \\
 (B, d') : & \cdots & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{d_0} & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 (C, \delta) : & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{\delta_0} & C_1 & \longrightarrow & \cdots & & 
 \end{array}$$

Dalla commutatività di  $F$  e  $d$  segue facilmente che  $\delta^2 = 0$ ,

$$\delta^2 = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ F & d' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ -Fd + d'F & d'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Osservazione 2.1.12.* Ci sarà utile più avanti utilizzare le categorie abeliane. Tuttavia non abbiamo bisogno della definizione nella sua interezza; ci basta sapere che si tratta di una categoria in cui sono definiti i nuclei  $\ker$  e le immagini  $\text{im}$  di mappe. Ad esempio, nel nostro caso gli  $R$ -moduli con  $R$  anello commutativo con identità sono una categoria abeliana. La categoria  $\text{Cob}^3(A)$  non è però una categoria abeliana.

**Lemma 2.1.13.** *Sia  $\mathcal{C}$  categoria abeliana. Allora il cono della mappa identità di un qualsiasi complesso di catene in  $\mathcal{C}$  è aciclico (la successione è esatta).*

*Dimostrazione.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{-d_1} & A_2 & \xrightarrow{-d_2} & A_3 \\
 \oplus & \searrow Id & \oplus & \searrow Id & \oplus \\
 A_0 & \xrightarrow{d_0} & A_1 & \xrightarrow{d_1} & A_2 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 C_0 & \xrightarrow{\delta_0} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\delta_0\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -d_1 & 0 \\ Id & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1(y) \\ y \end{pmatrix}. \\
\ker(\delta_1) &= \ker\left(\begin{pmatrix} -d_2 & 0 \\ Id & d_1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \mid -d_2(z) = 0, z + d_1(y) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -d_1(y) \\ y \end{pmatrix} \mid -d_2(-d_1(y)) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -d_1(y) \\ y \end{pmatrix} \right\} \subseteq \text{im}(\delta_0). \quad \square
\end{aligned}$$

Spesso vorremo dimostrare l'equivalenza di catene  $\llbracket T_1 \rrbracket$  e  $\llbracket T_2 \rrbracket$  nel caso in cui  $T_1$  e  $T_2$  siano due diagrammi di tangle equivalenti con numero di incroci diverso (come ad esempio nelle prime due mosse di Reidemeiser). Chiaramente in tal caso  $\llbracket T_1 \rrbracket$  e  $\llbracket T_2 \rrbracket$  non possono essere isomorfi in  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}^3))$ , avendo lunghezza diversa. Definiamo quindi un'equivalenza in  $\text{Kom}(\mathcal{C})$ .

*Definizione 2.1.14.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva. Siano  $(A, d)$  e  $(B, d')$  due complessi di catene in  $\text{Kom}(\mathcal{C})$ , siano  $F$  e  $G$  due morfismi di catene da  $A$  a  $B$ .  $F$  e  $G$  si dicono *omotopi* ( $F \sim G$ ) se esiste una omotopia  $h = (h_i)$ , con  $h_i : A_i \rightarrow B_{i-1}$ , che faccia commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
(A, d) : & \cdots & \xrightarrow{d_{-1}} & A_0 & \xrightarrow{d_0} & A_1 & \xrightarrow{d_1} & A_2 & \xrightarrow{d_2} & \cdots \\
& & & \downarrow G_0 & \Downarrow F_0 & \swarrow h_1 & \downarrow G_1 & \Downarrow F_1 & \swarrow h_2 & \downarrow G_2 & \Downarrow F_2 \\
(B, d') : & \cdots & \xrightarrow{d'_{-1}} & B_0 & \xrightarrow{d'_0} & B_1 & \xrightarrow{d'_1} & B_2 & \xrightarrow{d'_2} & \cdots
\end{array}$$

Cioè deve valere  $F - G = hd + d'h$ , con gli indici opportuni.

*Definizione 2.1.15.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva. Due complessi di catene  $(A, d)$  e  $(B, d')$  in  $\text{Kom}(\mathcal{C})$  sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due mappe  $F : A \rightarrow B$ ,  $G : B \rightarrow A$ , con  $G \circ F \sim Id_A$  e  $F \circ G \sim Id_B$ . In tal caso,  $F$  e  $G$  si dicono *equivalenze omotopiche*. Usiamo il simbolo  $\cong$  per indicare l'equivalenza omotopica.

È facile mostrare che la relazione di equivalenza omotopica in  $\text{Kom}(\mathcal{C})$  è in effetti una relazione di equivalenza. Definisco la categoria  $\text{Kom}/_h(\mathcal{C})$  come la categoria delle classi di equivalenza omotopica di catene in  $\text{Kom}(\mathcal{C})$ .

Non abbiamo ancora un metodo diretto per capire se due complessi sono omotopi. Per fare ciò, sarebbe utile calcolare l'omologia del complesso, ma non è possibile definire il nucleo o l'immagine di un cobordismo. Applichiamo allora alla categoria  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}^3(A)))$  un funtore  $\mathcal{F}$  nella categoria  $\mathbb{Z}\text{-Mod}$

degli  $\mathbb{Z}$ -moduli (un funtore da  $\text{Cob}^3(\emptyset)$  agli  $\mathbb{Z}$ -moduli è per definizione una *Topological Quantum Field Theory*, o TQFT).

*Definizione 2.1.16.* Introduciamo ora il funtore  $\mathcal{F}$ . Sia  $\mathcal{V}$  uno  $\mathbb{Z}$ -modulo, liberamente generato da  $v_+$  e  $v_-$ .  $\mathcal{F}$  manda la circonferenza in  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{F}(\bigcirc) = \mathcal{V}$ ).  $\mathcal{F}$  manda gli oggetti unioni disgiunte di diagrammi in oggetti prodotti tensore di moduli ( $\mathcal{F}(D_1 \sqcup D_2) = \mathcal{F}(D_1) \otimes \mathcal{F}(D_2)$ ). Quindi ad esempio  $\mathcal{F}$  manda l'unione di  $n$  circonferenze in  $\mathcal{V}^{\otimes n}$ .

Per i morfismi, osserviamo che i cobordismi  $\varnothing, \otimes, \cup, \circ\circ$  mostrati qui sotto generano l'insieme di tutti i cobordismi.

$$\begin{aligned} \varnothing &= \text{[diagramma]} : \emptyset \rightarrow \bigcirc, & \otimes &= \text{[diagramma]} : \bigcirc \rightarrow \emptyset, \\ \cup &= \text{[diagramma]} : \bigcirc \rightarrow \bigcirc\bigcirc, & \circ\circ &= \text{[diagramma]} : \bigcirc\bigcirc \rightarrow \bigcirc. \end{aligned}$$

I morfismi cobordismi  $\varnothing, \otimes, \cup, \circ\circ$  vengono mandati da  $\mathcal{F}$  rispettivamente nei morfismi omomorfismi di moduli  $\iota, \epsilon, \Delta, m$ .

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathcal{V} & \epsilon : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto v_+ & v_+ &\mapsto 0 \\ & & v_- &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} & m : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ v_+ &\mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ & v_- \otimes v_- &\mapsto 0 \\ v_- &\mapsto v_- \otimes v_- & v_- \otimes v_+ &\mapsto v_- \\ & & v_+ \otimes v_- &\mapsto v_- \\ & & v_+ \otimes v_+ &\mapsto v_+ \end{aligned}$$

Come per gli oggetti,  $\mathcal{F}$  manda i morfismi unioni disgiunte (di cobordismi) in morfismi prodotti tensore (di omomorfismi di moduli).

Il funtore  $\mathcal{F}$  è definito solo su  $\text{Cob}^3(\emptyset)$ . Al momento non è noto se il funtore possa essere definito in maniera efficace anche su  $\text{Cob}^3(A)$ . Khovanov ([MK-A]) propone una definizione nel caso  $A = \{a, b\}$ , Bar-Natan ([DBN-K], sez. 10.3) propone un'estensione a tangle generici ma che dimentica molte informazioni (come la 2-torsione).

In questo modo abbiamo definito completamente  $\mathcal{F}$  su  $\text{Cob}^3(\emptyset)$ . La definizione si estende senza problemi a  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}^3(A)))$ . Il funtore  $\mathcal{F}$  così

creato è ben definito. È sufficiente mostrare che  $\mathcal{F}(ab) = \mathcal{F}(a)\mathcal{F}(b)$  per ogni  $(a, b)$  coppia di morfismi valida in  $\{E \sqcup F | E \in \{\varnothing, \otimes, \circlearrowleft, \circlearrowright\}, F = Id^{\sqcup k}, k \in \mathbb{N}\}^2$ ; si tratta di un numero finito di verifiche algebriche semplici. In particolare, tali verifiche sono generate dalle proprietà di algebra di  $\mathcal{V}$ . In particolare è sufficiente usare l'unità  $\iota$ , la co-unità  $\epsilon$ , la commutatività di  $m$ , la co-commutatività di  $\Delta$ , l'identità aggiuntiva  $\Delta \circ m = (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)$  (si veda ad esempio [ESL-A]).

## 2.2 Invarianza (approccio geometrico)

In questa sezione dimostreremo che a diagrammi di tangle equivalenti corrispondono complessi di catene  $\mathcal{F}[\cdot]$  omotopicamente equivalenti, seguendo l'approccio di [DBN-K]. In realtà dimostreremo qualcosa di leggermente migliore, ossia dimostreremo che anche i complessi di catene  $[\cdot]$  sono omotopicamente equivalenti.

Sebbene sia possibile arrivare al risultato di invarianza seguendo con una procedura standard, useremo delle scorciatoie per semplificare le dimostrazioni.

*Definizione 2.2.1.* Siano  $(A, d)$  e  $(B, \delta)$  due complessi di catene in una categoria pre-additiva. Allora  $G$  è *retrato di deformazione forte* e  $F$  è *inclusione in retratto di deformazione forte* se vale:

- Le mappe  $F : B \rightarrow A$  e  $G : A \rightarrow B$  sono mappe di complessi di catene;
- esiste un'omotopia  $h : A \rightarrow A[1]$ , con  $FG - Id_A = dh + hd$ ;
- $GF = Id_B$ ;
- $hF = 0$ .

In particolare,  $F$  e  $G$  sono equivalenze omotopiche.

**Lemma 2.2.2.** *Valgono le uguaglianze di complessi di catene*

- $\left[ \left[ \begin{array}{c} \otimes \\ \diagdown \end{array} \right] \right] = \Gamma\left(\left[ \left[ \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \end{array} \right] \right]\right)$ ,
- $\left[ \left[ \begin{array}{c} \otimes \\ \diagdown \end{array} \right] \right] = \Gamma\left(\left[ \left[ \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \end{array} \right] \right]\right)[-1]$ .

*Si ricorda che con  $\Gamma$  si intende il cono di un morfismo di complessi di catene, definito in 2.1.11.*

*Dimostrazione.* La prima uguaglianza è evidente dal diagramma

$$\begin{array}{l}
 \left[ \left[ \text{circle with two arcs} \right] \right] = 0 \xrightarrow{0} \text{circle with two arcs} \xrightarrow{0} 0 \\
 \left[ \left[ \text{circle with two arcs} \right] \right] = 0 \xrightarrow{0} \text{circle with two arcs} \xrightarrow{0} 0 \\
 \left[ \left[ \text{circle with two arcs and diagonal} \right] \right] = 0 \xrightarrow{0} \text{circle with two arcs} - \text{circle with two arcs} \xrightarrow{0} 0
 \end{array}$$

The diagram shows three equations. The first equation shows a double bracketed circle with two arcs equal to a sequence of maps: 0 to a circle with two arcs to 0. The second equation shows a double bracketed circle with two arcs equal to a sequence of maps: 0 to a circle with two arcs to 0. The third equation shows a double bracketed circle with two arcs and a diagonal line equal to a sequence of maps: 0 to a circle with two arcs, minus a circle with two arcs, to 0. Dotted lines and arrows connect the circles in the first two equations to the circles in the third equation, with a central circle containing a plus sign.

La seconda uguaglianza è analoga. □

**Lemma 2.2.3.** *Il cono di una mappa di complessi è invariante d'omotopia a meno di comporre la mappa di complessi a destra o a sinistra con inclusioni in retratti di deformazione forti. In altre parole, dato il diagramma*

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \xrightleftharpoons[F_1]{G_1} C \\
 & \downarrow \Psi & \\
 D & \xrightleftharpoons[F_2]{G_2} & B
 \end{array}$$

con  $F_1$  e  $F_2$  inclusioni in retratti di deformazione forti, abbiamo  $\Gamma(F_2\Psi) = \Gamma(\Psi) = \Gamma(\Psi F_1)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $h_1 : A \rightarrow A$  l'omotopia tale che  $F_1 G_1 - \text{Id}_A =$

$dh_1 + h_1d$  e  $h_1F_1 = 0$ . Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\Psi F_1) : & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} C^{r+1} \\ B^r \end{pmatrix} & \xrightarrow{d = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ \Psi F_1 & d \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} C^{r+2} \\ B^{r+1} \end{pmatrix} \\ \uparrow \tilde{G}_1^r = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ \Psi h_1 & \text{Id} \end{pmatrix} & & \uparrow \tilde{G}_1^{r+1} \\ \begin{pmatrix} A^{r+1} \\ B^r \end{pmatrix} & \xrightarrow{d = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ \Psi & d \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} A^{r+2} \\ B^{r+1} \end{pmatrix} \\ \downarrow \tilde{G}_1^r & & \downarrow \tilde{G}_1^{r+1} \\ \begin{pmatrix} A^{r+1} \\ B^r \end{pmatrix} & \xrightarrow{d = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ \Psi & d \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} A^{r+2} \\ B^{r+1} \end{pmatrix} \\ \uparrow \tilde{G}_2^r = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ h_2 \Psi & G_2 \end{pmatrix} & & \uparrow \tilde{G}_2^{r+1} \\ \begin{pmatrix} A^{r+1} \\ D^r \end{pmatrix} & \xrightarrow{d = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ F_2 \Psi & d \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} A^{r+2} \\ D^{r+1} \end{pmatrix} \end{array} \\ \Gamma(\Psi) : & & \\ \Gamma(F_2 \Psi) : & & \end{array}
\end{array}$$

Per la prima parte, bisogna verificare le seguenti identità:

- Le mappe  $\tilde{F}_1 : \Gamma(\Psi) \rightarrow \Gamma(\Psi F_1)$  e  $\tilde{G}_1 : \Gamma(\Psi F_1) \rightarrow \Gamma(\Psi)$  sono mappe di complessi di catene;
- Vale  $\tilde{G}_1 \tilde{F}_1 = \text{Id}_{\Gamma(\Psi F_1)}$ ;
- La mappa  $h_1 : \Gamma(\Psi) \rightarrow \Gamma(\Psi)$  è omotopia tra  $\tilde{F}_1 \tilde{G}_1$  e  $\text{Id}_{\Gamma(\Psi)}$ .

Per la seconda parte, bisogna verificare le seguenti identità:

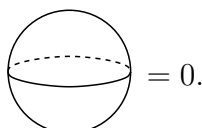
- Le mappe  $\tilde{F}_2 : \Gamma(\Psi) \rightarrow \Gamma(F_2 \Psi)$  e  $\tilde{G}_2 : \Gamma(F_2 \Psi) \rightarrow \Gamma(\Psi)$  sono mappe di complessi di catene;
- Vale  $\tilde{F}_2 \tilde{G}_2 = \text{Id}_{\Gamma(F_2 \Psi)}$ ;
- La mappa  $h_2 : \Gamma(\Psi) \rightarrow \Gamma(\Psi)$  è omotopia tra  $\tilde{G}_2 \tilde{F}_2$  e  $\text{Id}_{\Gamma(\Psi)}$ .

Tutte queste affermazioni sono verificabili con un semplice calcolo.  $\square$

### 2.2.1 Le relazioni $S$ , $T$ , $4Tu$

Consideriamo la categoria  $\text{Cob}^3(A)$  e definiamo alcune relazioni tra i morfismi (i cobordismi).

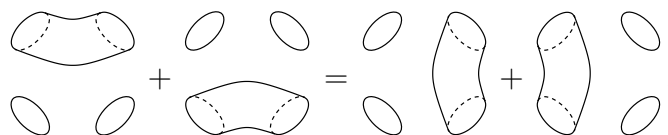
La relazione  $S$  afferma che ogniqualvolta un cobordismo contenga una sfera, allora è il cobordismo 0. Siamo in una categoria pre-additiva, quindi in ogni insieme  $\text{Mor}(T_1, T_2)$  è sempre definito il cobordismo 0.



La relazione  $T$  afferma che ogniqualvolta un cobordismo contenga un toro, allora equivale allo stesso cobordismo privato del toro e moltiplicato per 2.



La relazione  $4Tu$  afferma un'uguaglianza un po' più complicata. Consideriamo un cobordismo, prendiamo un 3-disco che interseca il cobordismo in quattro dischi. Scegliamo due dischi su quattro e rimpiazziamoli con un tubo  $S^1 \times [0, 1]$  all'interno del 3-disco. Allora vale una uguaglianza tra quattro di questi rimpiazzamenti.



Chiamiamo l'insieme di queste relazioni  $l = \{S, T, 4Tu\}$  e definiamo  $\text{Cob}_{/l}^3(A)$  come la categoria con gli stessi oggetti di  $\text{Cob}^3(A)$  e con morfismi dati dalle classi di equivalenza dei morfismi di  $\text{Cob}^3(A)$  modulo le relazioni  $l$ . Queste tre relazioni  $S$ ,  $T$  e  $4Tu$  (Sfera, Toro e 4Tubi) sono tutte relazioni locali tra cobordismi. Il fatto di essere locali fa sì che la composizione di cobordismi resta ben definita in  $\text{Cob}_{/l}^3(A)$ .

**Lemma 2.2.4.** *Abbiamo il diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cob}^3(\emptyset) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbb{Z}\text{-Mod} \\ \downarrow \mu & \nearrow & \\ \text{Cob}_{/l}^3(\emptyset) & & \end{array}$$

*Il funtore  $\mathcal{F}$  "passa al quoziente" rispetto alle relazioni  $l$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che  $\mathcal{F}$  preserva le relazioni  $S$ ,  $T$ ,  $\mathcal{A}Tu$ .

- Relazione  $S$ .

$$\begin{aligned} \text{Sphere} &= \text{Cylinder with cup} \sqcup \text{Cylinder with bowl} \\ &= \text{Cross} \otimes \text{Cross} = 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo mostrare  $\epsilon \iota = 0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , che è ovvio.

- Relazione  $T$ .

$$\begin{aligned} \text{Oval with line} &= \text{Cylinder with cup} \sqcup \text{Cylinder with bowl} \sqcup \text{Cylinder with cup and bowl} \sqcup \text{Cylinder with cup and bowl} \\ &= \text{Cross} \otimes \text{Circle} \otimes \text{Circle} \otimes \text{Cross} = 2. \end{aligned}$$

Dobbiamo mostrare  $\epsilon m \Delta \iota = 2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\iota} v_+ \\ &\xrightarrow{\Delta} v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ &\xrightarrow{m} v_- + v_- \\ &\xrightarrow{\epsilon} 2. \end{aligned}$$

- Relazione  $\mathcal{A}Tu$ . Possiamo restringerci al caso in cui i dischi della relazione  $\mathcal{A}Tu$  siano tutti nel diagramma di tangle di partenza o di arrivo di un cobordismo. La relazione può essere scritta in cinque modi, a seconda di quanti dei quattro cerchi coinvolti si trovano nel diagramma di tangle di partenza e quanti nel diagramma di tangle di arrivo. Analizziamo il modo  $(2 + 2)$  (2 dischi in partenza e 2 dischi in arrivo).

$$\begin{aligned} \text{Two circles} &= \left( \text{Cylinder with cup} \sqcup \text{Cylinder with bowl} \right) \sqcup \text{Cylinder with cup and bowl} \\ \text{Two circles} &= \left( \text{Cylinder with cup} \sqcup \text{Cylinder with bowl} \right) \sqcup \text{Cylinder} \\ \text{Two circles} &= \text{Cylinder with cup and bowl} \sqcup \left( \text{Cylinder with cup} \sqcup \text{Cylinder with bowl} \right) \\ \text{Two circles} &= \text{Cylinder} \sqcup \left( \text{Cylinder with cup} \sqcup \text{Cylinder with bowl} \right). \end{aligned}$$



Dopo alcuni conti, si ottiene

$$\begin{array}{ll}
\iota \otimes \iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} & \epsilon \epsilon: \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{Z} \\
1 \mapsto v_+ \otimes v_+ & v_+ \otimes v_+ \mapsto 0 \\
\iota \epsilon: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} & v_+ \otimes v_- \mapsto 0 \\
v_+ \mapsto 0 & v_- \otimes v_+ \mapsto 0 \\
v_- \mapsto v_+ & v_- \otimes v_- \mapsto 1.
\end{array}$$

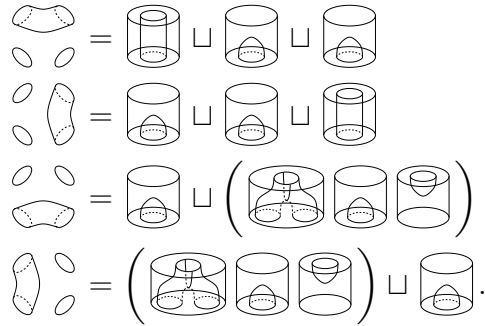
Da queste, si ottiene facilmente

$$\begin{array}{ll}
(\iota \otimes \iota) \epsilon m: \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} & (\iota \epsilon) \otimes \text{Id}_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \\
v_+ \otimes v_+ \mapsto 0 & v_+ \otimes v_+ \mapsto 0 \\
v_+ \otimes v_- \mapsto v_+ \otimes v_+ & v_+ \otimes v_- \mapsto 0 \\
v_- \otimes v_+ \mapsto v_+ \otimes v_+ & v_- \otimes v_+ \mapsto v_+ \otimes v_+ \\
v_- \otimes v_- \mapsto 0 & v_- \otimes v_- \mapsto v_+ \otimes v_- \\
\Delta \iota(\epsilon \otimes \epsilon): \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} & \text{Id}_{\mathcal{V}} \otimes (\iota \epsilon): \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \\
v_+ \otimes v_+ \mapsto 0 & v_+ \otimes v_+ \mapsto 0 \\
v_+ \otimes v_- \mapsto 0 & v_+ \otimes v_- \mapsto v_+ \otimes v_+ \\
v_- \otimes v_+ \mapsto 0 & v_- \otimes v_+ \mapsto 0 \\
v_- \otimes v_- \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ & v_- \otimes v_- \mapsto v_- \otimes v_+.
\end{array}$$

Da queste formule segue immediatamente

$$(\iota \otimes \iota) \epsilon m + \Delta \iota(\epsilon \otimes \epsilon) = (\iota \epsilon) \otimes \text{Id}_{\mathcal{V}} + \text{Id}_{\mathcal{V}} \otimes (\iota \epsilon).$$

Analizziamo ora il modo  $(1 + 3)$ .



La dimostrazione di

$$\text{Id}_{\mathcal{V}} \otimes \iota \otimes \iota + \iota \otimes (\Delta \iota \epsilon) = \iota \otimes \iota \otimes \text{Id}_{\mathcal{V}} + (\Delta \iota \epsilon) \otimes \iota$$

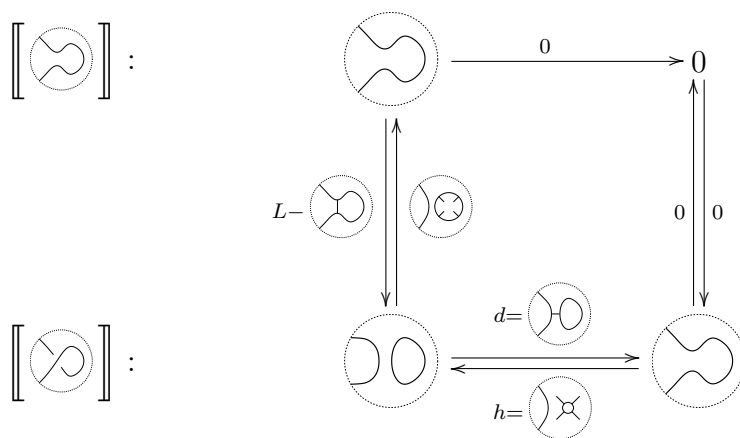
può essere fatta agevolmente in modo analogo al caso  $(2 + 2)$ . Gli altri tre modi di scrivere la relazione  $\mathcal{A}Tu$  sono analoghi.

□

A questo punto, per mostrare l'invarianza omotopica di  $\mathcal{F}[\cdot]$  è sufficiente mostrare l'invarianza omotopica di  $[\cdot]$  in  $\text{Cob}_\mu^3(A)$ .

### 2.2.2 Eliminazione ricciolo a sinistra

Cerchiamo due mappe di complessi  $F$  e  $G$  che siano equivalenze omotopiche tra  $[[\text{figure}]]$  e  $[[\text{figure}]]$ . Consideriamo il diagramma



con le mappe

$$\begin{aligned}
 L &= \left( \text{figure} \right) \left( \text{figure} \right) \left( \text{figure} \right) : \text{figure} \longrightarrow \text{figure} \\
 F &= L - \left( \text{figure} \right) : \text{figure} \longrightarrow \text{figure} \\
 G &= \left( \text{figure} \right) : \text{figure} \longrightarrow \text{figure} \\
 d &= \left( \text{figure} \right) : \text{figure} \longrightarrow \text{figure} \\
 h &= \left( \text{figure} \right) : \text{figure} \longrightarrow \text{figure} .
 \end{aligned}$$

Verifichiamo che  $F$  e  $G$  sono morfismi di catene. L'unica verifica non banale è  $dF = 0$ . Si tratta di una semplice verifica geometrica. Il risultato  $dF = 0$

segue anche dal fatto che i due addendi di  $dF$  sono due cobordismi connessi con uguale bordo e uguale caratteristica, quindi devono essere uguali. Nello stesso modo si vede che  $dh = hd$ , cioè  $h$  è omotopia.

Uno dei due addendi di  $GF$  contiene un toro. Usando la relazione  $T$  si vede che questo addendo è uguale al doppio dell'altro addendo, da cui risulta chiaro che  $GF = \text{Id}$ .

L'ultimo passo è mostrare che  $FG \sim \text{Id}$ , ossia che  $FG - \text{Id} = d_{-1}h + hd = hd$ . Usando in modo adeguato la relazione  $\not\!T_u$ , si ottiene esattamente la relazione con i due cobordismi in  $FG$ , con l'identità, con  $hd$ .

Inoltre risulta ovviamente  $hF = 0$ , quindi  $F$  è inclusione in retratto di deformazione forte (non useremo questo fatto).

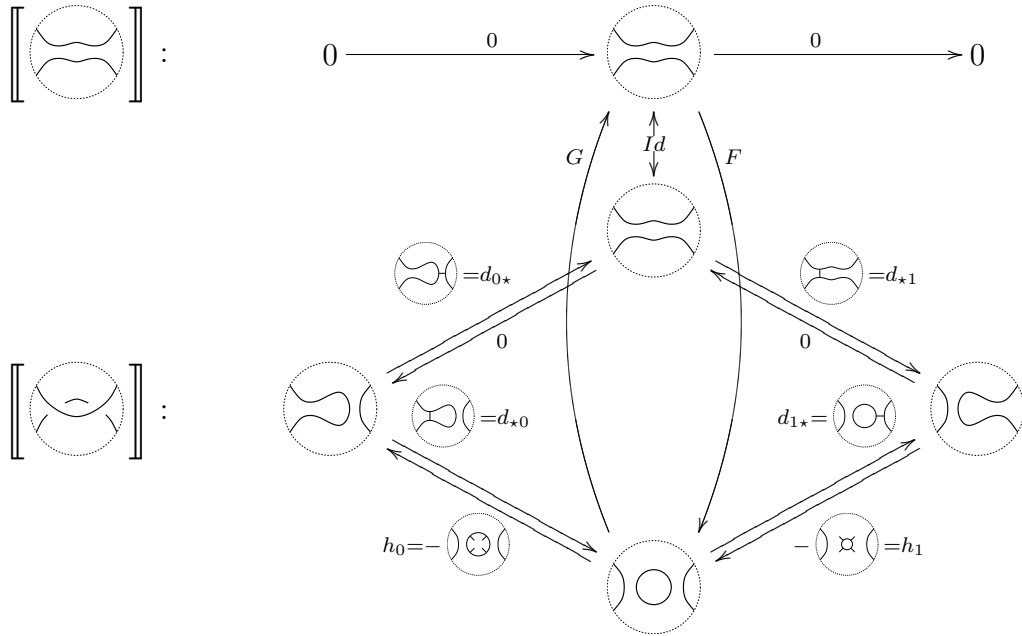
Abbiamo ottenuto con poca fatica  $\llbracket \textcircled{\infty} \rrbracket \cong \llbracket \textcircled{\infty} \rrbracket$  in  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_n^3(\{a, b\})))$ .

*Osservazione 2.2.5.* È interessante osservare quali mappe  $F$ ,  $G$ ,  $d$ ,  $h$  avrebbero portato comunque alla tesi. La mappa  $d$  è fissata per definizione, la mappa  $h$  è la più semplice mappa che verifichi  $hd = dh$ . Se scambiamo  $F$  e  $G$ , tutte le proprietà viste prima restano verificate eccetto  $dF = 0$ . La mappa  $F$  non può essere 0 (deve valere  $GF \sim \text{Id}$ ); per verificare  $dF = 0$ , deve essere composta da due cobordismi “quasi uguali”. Una buona scelta è il cobordismo  $h$  meno il cobordismo inverso di  $d$ . Per far in modo che i due cobordismi abbiano la stessa caratteristica, attacchiamo un manico al primo cobordismo (unione disgiunta di due pezzi, una tenda e un tappo). Possiamo attaccare il manico ad uno dei due pezzi di  $h$ . Nella dimostrazione appena vista, ripresa da [DBN-K], il manico era stato attaccato al tappo. Attaccando invece il manico alla tenda, la dimostrazione sarebbe comunque rimasta valida; tale approccio è stato seguito (in modo algebrico) da da [MK-A].

### 2.2.3 Sovrapposizione di archi

L'obbiettivo è mostrare che  $\llbracket \textcircled{\infty} \rrbracket$  e  $\llbracket \textcircled{\infty} \rrbracket$  sono omotopicamente equivalenti. Le tecniche usate per questa dimostrazione sono del tutto analoghe al caso del ricciolo.

Consideriamo il diagramma



dove le mappe che non hanno trovato posto nel disegno sono

$$F = \left( \begin{array}{c} \text{[two circles with a cross]} \\ \text{[two circles with a cross]} \end{array} \right) : \text{[torus]} \rightarrow \text{[two circles]}$$

$$G = \left( \begin{array}{c} \text{[two circles]} \\ \text{[two circles with a cross]} \end{array} \right) : \text{[two circles]} \rightarrow \text{[torus]}$$

Le verifiche da effettuare sono:

- la mappa  $F$  è mappa di catene, cioè  $dF = 0$ .
- la mappa  $G$  è mappa di catene, cioè  $Gd = 0$ .
- $GF = Id$  e  $FG \sim Id$ , tramite l'omotopia  $h$ .

Inoltre, si può anche verificare che  $hF = 0$ , cioè  $F$  è inclusione in retratto di deformazione forte. Useremo questo fatto più avanti. Non esplicitiamo queste verifiche in quanto si tratta di semplici applicazioni delle relazioni  $S$ ,  $T$ ,  $\mathcal{A}u$ .

Abbiamo ottenuto  $\llbracket \text{[two circles with a cross]} \rrbracket \cong \llbracket \text{[torus]} \rrbracket$  in  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_{/l}^3))$ .

## 2.2.4 Eliminazione ricciolo a destra

Usando la mossa eliminazione ricciolo a sinistra, abbiamo

$$\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right] = \left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right].$$

Usando la mossa sovrapposizione di archi, abbiamo

$$\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right] = \left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right].$$

Da queste, segue  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right] = \left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  in  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_l^3))$ .

## 2.2.5 Attraversamento di un incrocio

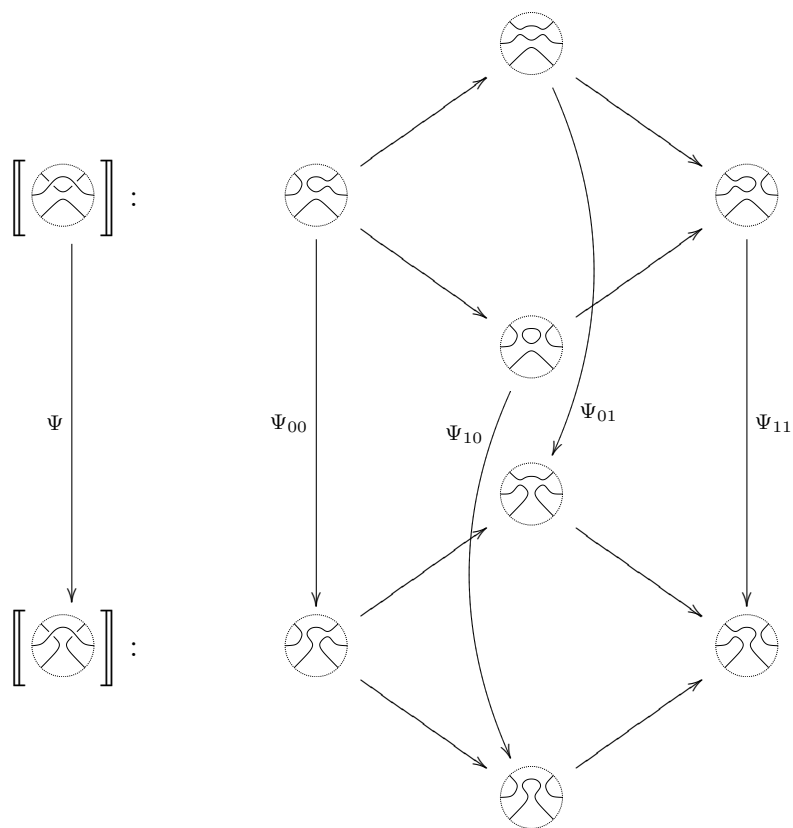
Vogliamo dimostrare che  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  e  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  sono omotopicamente equivalenti. Potremmo cercare direttamente un'equivalenza omotopica tra i complessi  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  e  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$ , tuttavia seguiremo invece un'altra strada, più agevole.

L'idea è di usare l'invarianza per sovrapposizione di archi, in modo analogo a quanto fatto per il lemma 1.1.3, leggermente più complicato.

Supponiamo che l'incrocio centrale in  $\text{diagramma}$  sia negativo, cioè del tipo  $\text{diagramma}$ . Il lemma 2.2.2 afferma che  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right] = \Gamma(\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right])$ . Tuttavia il lemma resta valido anche in un senso locale rispetto all'incrocio centrale di  $\text{diagramma}$ , da cui ne otteniamo che  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right] = \Gamma(\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right])$ , dove  $\Psi = \left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  è il classico cobordismo sella da  $\text{diagramma}$  a  $\text{diagramma}$ .

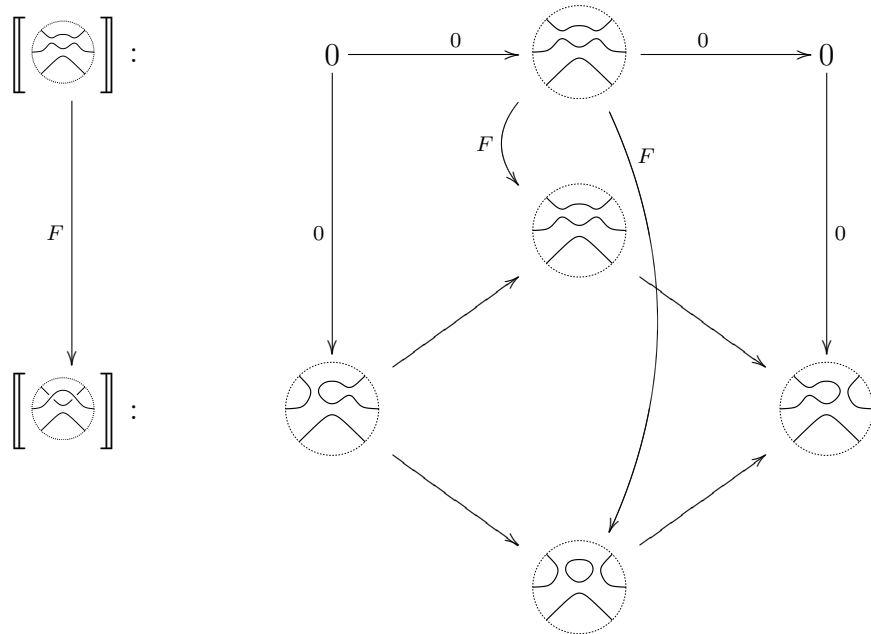
Scrivendo per esteso i complessi di partenza  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  e di arrivo  $\left[ \left[ \text{diagramma} \right] \right]$  di

$[[\text{diagram}]]$ , otteniamo

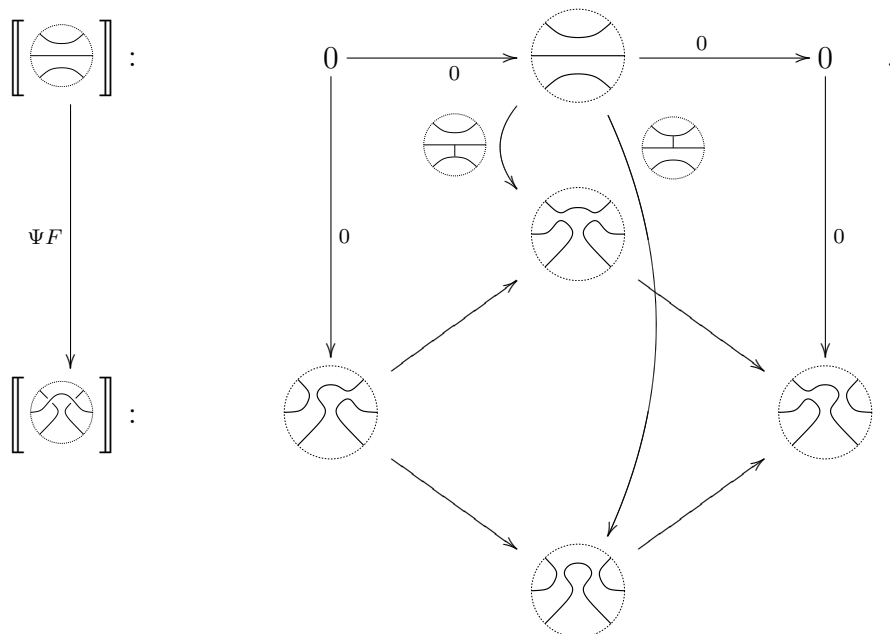


Come per il lemma 2.2.2, così anche la dimostrazione di invarianza per sovrapposizione di archi si può intendere in senso locale, ottenendo ad esempio

che la mappa  $F$  vista prima

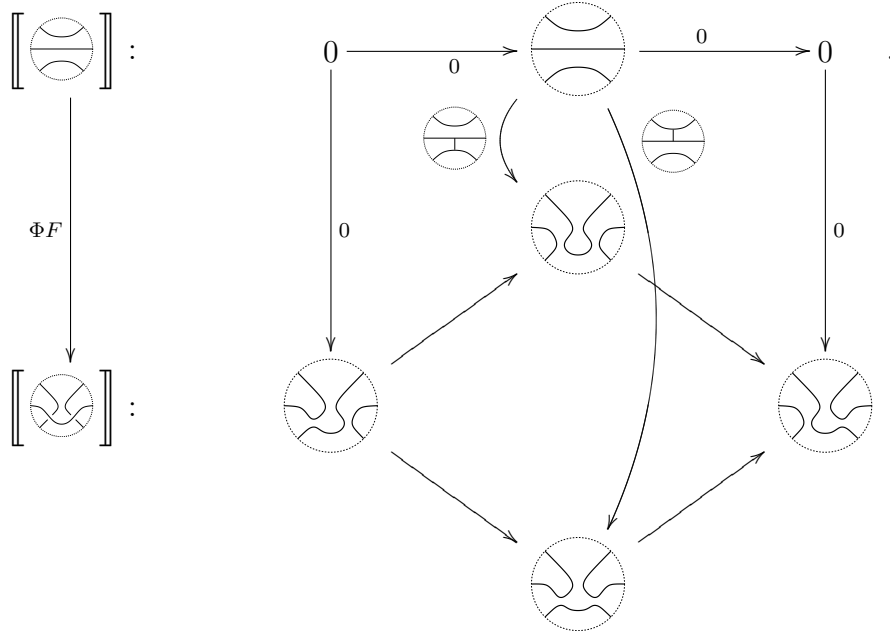


è ancora una inclusione in retratto di deformazione forte. Posso ora comporre le mappe  $\Psi$  e  $F$ , ottenendo la mappa



Analogamente, posso prendere in considerazione l'incrocio centrale di  $\otimes$

e osservare che  $[[\otimes]] = \Gamma([[ \otimes ]])$ , dove  $\Phi = [[ \otimes ]]$ . Posso ora comporre le mappe  $\Phi$  e  $F$ , ottenendo la mappa



Abbiamo visto che  $[[\otimes]] = \Gamma([[ \otimes ]]) = \Gamma(\Psi)$  e  $[[\otimes]] = \Gamma([[ \otimes ]]) = \Gamma(\Phi)$ . Ricordando che  $F$  è inclusione in retratto di deformazione forte, dal lemma 2.2.3, abbiamo che  $\Gamma(\Psi) = \Gamma(\Psi F)$  e  $\Gamma(\Phi) = \Gamma(\Phi F)$ . È facile vedere, osservando gli ultimi due diagrammi, che le mappe di complessi  $\Psi F$  e  $\Phi F$  sono isotope. Da questo segue che i coni delle due mappe associate sono omotopicamente equivalenti, cioè  $[[\otimes]] = [[\otimes]]$  in  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_{/l}^3))$ .

## 2.3 Invarianza (approccio algebrico)

In questa sezione verrà data una dimostrazione dell'invarianza di  $[[T]]$ , seguendo fondamentalmente l'approccio dell'articolo originale di Khovanov [MK-A]. Sia  $\mathcal{C}$  una categoria. Abbiamo già visto cos'è un cubo e un cubo commutativo in  $\mathcal{C}$ .

*Definizione 2.3.1.* Un *morfismo di cubi* dal cubo  $(A, d)$  al cubo  $(B, d')$  è un insieme di morfismi  $\phi$  dai vertici di  $A$  ai vertici di  $B$ , che commuti con i



morfismi  $d$  e  $d'$ .

$$\begin{array}{ccccc}
& & A_{01} & \xrightarrow{\psi_{01}} & B_{01} \\
& \nearrow & \downarrow \psi_{00} & \nearrow & \downarrow \\
A_{00} & \xrightarrow{\quad} & B_{00} & & \\
\downarrow & & \downarrow \psi_{11} & & \downarrow \\
& \nearrow & A_{11} & \xrightarrow{\psi_{11}} & B_{11} \\
& \nearrow & \downarrow \psi_{10} & \nearrow & \\
A_{10} & \xrightarrow{\quad} & B_{10} & & 
\end{array}$$

Nel caso  $\phi$  sia un morfismo tra cubi commutativi  $A$  e  $B$ , è possibile definire un nuovo cubo  $(A, B, \phi)$  ed esso risulta chiaramente commutativo.

Viceversa, è chiaro che, partendo da un cubo commutativo  $A$  (di dimensione  $n$ ), è sempre possibile scegliere un indice  $i$  in  $[1, n]$ , prendere due facce (di dimensione  $n - 1$ )  $A(*0)$  (vertici con  $x_i = 0$ ) e  $A(*1)$  (vertici con  $x_i = 1$ ), e considerare il morfismo di cubi commutativi  $\psi$  che manda  $A(*0)$  in  $A(*1)$  dato dall'insieme dei morfismi  $\psi_{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n} = d_{x_1, \dots, x_{i-1}, *, x_{i+1}, \dots, x_n}$ . Nel caso invece  $A$  sia un cubo anticommutativo, tale ragionamento non si può applicare (il morfismo  $\psi$  risulta essere anticommutativo, contro la definizione di morfismo di cubi). L'indice  $i$  scelto di volta in volta sarà chiaro dal contesto.

*Definizione 2.3.2.* Un *isomorfismo di cubi* è un morfismo di cubi  $\psi$  in cui ogni  $\psi_{x_1, \dots, x_n}$  è un isomorfismo tra due vertici.

**Lemma 2.3.3.** *Sia  $A$  un cubo  $n$ -dimensionale in una categoria pre-additiva, anticommutativo. Supponiamo che tutte le mappe  $d_{\dots, *}, d_{x_1, \dots, x_{n-1}, *}$  siano isomorfismi. Allora il complesso  $\overline{C}(A)$  associato al cubo  $A$  è isomorfo al cono dell'identità  $\Gamma(Id_{A(*1)[-1]})$ .*

*Dimostrazione.* Innanzitutto,  $A(*0)$  e  $A(*1)$  sono due sottocubi anticommutativi di  $A$ . Possiamo scrivere  $\overline{C}^k(A) = \overline{C}^k(A(*0)) \oplus \overline{C}^{k-1}(A(*1))[-1]$ , e  $d_{\dots, *}$  è isomorfismo tra il primo e il secondo. La mappa di catena è

$$d_k = \begin{pmatrix} d_{\dots, *, \dots, 0} & \\ & d_{\dots, *, \dots, 1} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo  $\Gamma(Id_{A(*1)[-1]}) = \overline{C}^k(A(*1)) \oplus \overline{C}^{k-1}(A(*1))[-1]$  per definizione.

Consideriamo il morfismo da  $\overline{C}^k(A) = \overline{C}^k(A(*0)) \oplus \overline{C}^{k-1}(A(*1))[-1]$  a  $\overline{C}^k(A(*1)) \oplus \overline{C}^{k-1}(A(*1))[-1]$  dato dalla matrice

$$\xi_k = \begin{pmatrix} d_{\dots, *} & \\ & Id_{\overline{C}^{k-1}(A(*1))[-1]} \end{pmatrix}.$$

La mappa di catena in  $\Gamma(Id_{A(*1)[-1]})$  è per definizione

$$\delta_k = \begin{pmatrix} -d_{\dots, *, \dots, 1} & \\ Id_{\overline{C}^{k-1}(A(*1))[-1]} & d_{\dots, *, \dots, 1} \end{pmatrix}.$$

È ovvio che  $\xi_k$  è un isomorfismo elemento per elemento da  $\overline{C}(A)$  a  $\Gamma(Id_{A(\star 1)[-1]})$ . Bisogna mostrare però che  $\xi$  è isomorfismo di catene, cioè commuta con  $d$  e  $\delta$ . Dopo alcuni conti,

$$\begin{aligned}\xi_{k+1}d_k &= \begin{pmatrix} d_{\dots,\star}d_{\dots,\star,\dots,0} & \\ & d_{\dots,\star} & d_{\dots,\star,\dots,1} \end{pmatrix} \\ \delta_k\xi_k &= \begin{pmatrix} -d_{\dots,\star,\dots,1}d_{\dots,\star} & \\ & d_{\dots,\star} & d_{\dots,\star,\dots,1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ci siamo quindi ricondotti a dimostrare che  $d_{\dots,\star}d_{\dots,\star,\dots,0} + d_{\dots,\star,\dots,1}d_{\dots,\star} = 0$ . Ma questo è ovvio dal fatto che  $A$  è anticommutativo.  $\square$

Nel contesto degli  $R$ -moduli, è possibile definire l'operazione di cambio di segno di una mappa come un prodotto tensoriale per la mappa  $-Id : R \rightarrow R$ . Definisco il cubo  $S = (S, d)$  come  $S_{x_1, \dots, x_n} = R$  e  $d_{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n} = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} x_j} Id_R$  se  $x_i = \star$ . Il cubo  $S$  così definito è il cubo anticommutativo standard di Khovanov [MK-A]. Il modo standard per ottenere da un cubo di  $R$ -moduli commutativo  $M$  un cubo anticommutativo è tensorizzare  $M$  per  $S$ ; è facile vedere che  $M' = M \otimes S$  è un cubo di  $R$ -moduli anticommutativo. Inoltre, tale definizione per moduli è un caso particolare della definizione 2.1.3 vista prima per categorie preadditive.

Un morfismo  $\psi$  di cubi commutativi  $A$  e  $B$  induce nel modo ovvio un morfismo  $\overline{C}(\psi) : \overline{C}(A) \rightarrow \overline{C}(B)$ , inoltre se  $\psi$  è isomorfismo di cubi allora  $\overline{C}$  è isomorfismo di complessi di catene.

**Lemma 2.3.4.** *Sia  $A$  un cubo  $n$ -dimensionale in una categoria abeliana, commutativo. Supponiamo che tutte le mappe  $d_{\dots,\star}$  siano isomorfismi. Allora il complesso  $\overline{C}(A')$  associato al cubo  $A'$  è aciclico.*

*Dimostrazione.* Segue dal lemma precedente 2.3.3, e dal lemma 2.1.13.  $\square$

I seguenti lemmi invece sono ovvi.

**Lemma 2.3.5.** *Siano  $V$  e  $W$  due cubi anticommutativi. Allora vale l'uguaglianza di complessi di catene*

$$\overline{C}(V \oplus W) = \overline{C}(V) \oplus \overline{C}(W).$$

**Lemma 2.3.6.** *Siano  $V$  e  $W$  due cubi commutativi. Allora vale l'uguaglianza di complessi di catene*

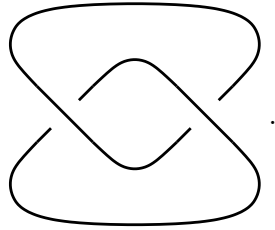
$$\overline{C}((V \oplus W)') = \overline{C}(V') \oplus \overline{C}(W').$$

Sia  $D$  un diagramma di nodo. Il cubo dei moduli  $(V_D, d_D)$  è costruito nel modo visto prima  $V_D = \mathcal{F}M_D$ , cioè

$$(V_D)_{x_1, \dots, x_n} = \mathcal{F}D(x_1, \dots, x_n),$$

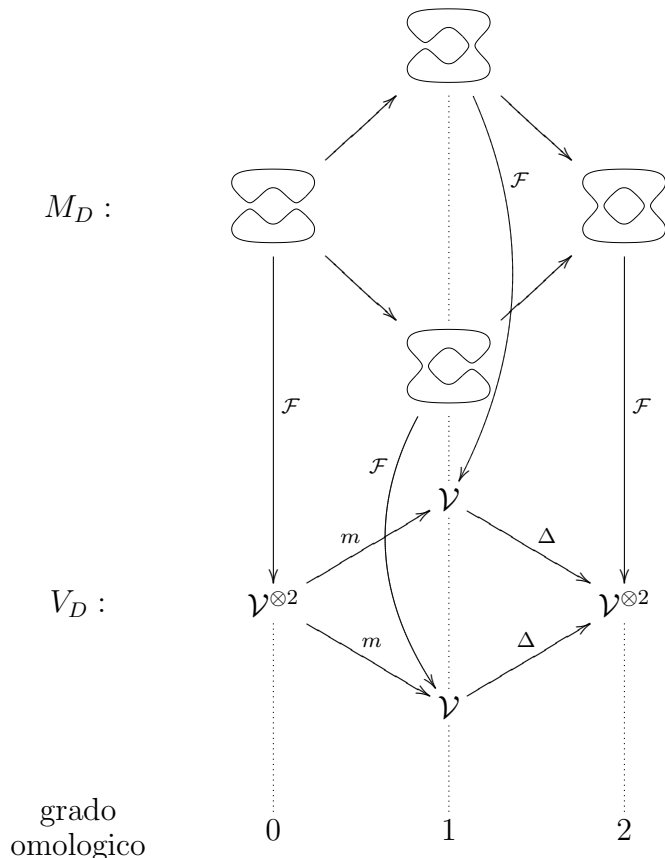
dove  $D(x_1, \dots, x_n)$  è la risoluzione di  $D$  corrispondente a  $(x_1, \dots, x_n)$ . Come abbiamo visto, se  $D(x_1, \dots, x_n)$  è unione di  $k$  circonferenze disgiunte, allora  $\mathcal{F}D(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{V}^{\otimes k}$ . I morfismi  $d_D$  sono esattamente quelli visti nella sezione 2.1.16  $(\iota, \epsilon, \Delta, m)$ , prodotto tensore con l'identità un certo numero di volte.

*Esempio 2.3.7.* Consideriamo un diagramma di nodo



In alto si può vedere il cubo delle risoluzioni, in basso il cubo di moduli

associati al diagramma.



Al diagramma  $D$  abbiamo associato il cubo commutativo di moduli  $V_D$ . Possiamo costruire il cubo anticommutativo  $V'_D$ , prenderne il complesso di catene  $\overline{C}(V'_D)$  e riscalarne i gradi omologici via  $[n_-(D)]$ ; otteniamo il complesso di catene  $\overline{C}(V'_D)[n_-(D)]$ , che per la funtorialità di  $\mathcal{F}$  è proprio  $\mathcal{F}[[D]]$  definito in 2.1.10.

Mostriamo che, se  $D$  e  $E$  sono diagrammi di nodi equivalenti, allora i due complessi  $\mathcal{F}[[D]]$  e  $\mathcal{F}[[E]]$  associati sono omotopicamente equivalenti. Per far ciò, alla luce del teorema 1.0.4, è sufficiente considerare il caso in cui  $D$  e  $E$  sono collegati da una mossa di Reidemeister (Figura 1.1).

### 2.3.1 Eliminazione ricciolo a destra

Consideriamo un diagramma di nodo  $F = \textcircled{\times}$  con  $n$  incroci, e ordiniamo gli incroci in modo che l'incrocio nel cerchio tratteggiato sia l'ultimo. Sia  $E$  il diagramma della 0-risoluzione  $\textcircled{\circ}$  dell'ultimo incrocio e  $D$  il diagramma della 1-risoluzione  $\textcircled{\smile}$ .

$$D = \text{diagram of a circle with two internal arcs connecting the top and bottom boundaries}, \quad E = \text{diagram of a circle with two separate internal loops}, \quad F = \text{diagram of a circle with a single internal figure-eight loop}.$$

Consideriamo i cobordismi standard  $\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}$  e  $\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}$ . A questi cobordismi corrispondono le mappe di cubi di moduli  $\mathcal{F}(\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}) = \Delta : V_D \rightarrow V_E$  e  $\mathcal{F}(\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}) = m : V_E \rightarrow V_D$ .

$$\begin{aligned} \text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point} : \text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point} &\longrightarrow \text{diagram of a circle with two separate internal loops}, & \Delta : V_D &\rightarrow V_E \\ \text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point} : \text{diagram of a circle with two separate internal loops} &\longrightarrow \text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}, & m : V_E &\rightarrow V_D. \end{aligned}$$

Il cobordismo  $\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}$  è il cobordismo standard che appare nel cubo di cobordismi  $M_F$ ; allo stesso modo l'omomorfismo di moduli  $m$  è l'omomorfismo standard di moduli in  $V_F$ .

Ci sarà inoltre utile definire un altro cobordismo,  $\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}$ , al quale corrisponde la mappa di cubi di moduli  $\mathcal{F}(\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}) = \iota : V_D \rightarrow V_E$ .

$$\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point} : \text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point} \longrightarrow \text{diagram of a circle with two separate internal loops}, \quad \iota : V_D \rightarrow V_E.$$

Dalla definizione del funtore  $\mathcal{F}$ , è chiaro che le mappe  $\Delta, m, \iota$  qui definite agiscono solo sui moduli associati ad archi visibili in  $\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}$  e  $\text{diagram of a circle with two arcs meeting at a central point}$  (più precisamente, agiscono come  $\Delta, m, \iota$  sui moduli associati ad archi visibili, e agiscono come l'identità sugli altri moduli).

Una semplice verifica algebrica mostra che la mappa  $m\iota$  è l'identità  $Id_{V_D}$ . Tale verifica è ovvia anche al livello geometrico, direttamente dalla definizione di  $\mathcal{F}$ 2.1.16. Definisco la mappa  $\zeta$  come  $\zeta = \Delta - \iota m \Delta : V_D \rightarrow V_E$ . La composizione  $m\zeta$  è la mappa zero.

**Lemma 2.3.8.** *Il cubo  $V_E$  si scompone in una somma diretta*

$$V_E \cong \iota(V_D) \oplus \zeta(V_D).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che il diagramma  $F$  sia composto da una cir-

conferenza e un incrocio. In tal caso, si ottiene

$$\begin{aligned}
V_D &= \mathcal{V}, \\
V_E &= \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}, \\
\iota(V_D) &= v_+ \otimes \mathcal{V}, \\
\zeta(v_+) &= (\Delta - \iota m \Delta)(v_+) = v_- \otimes v_+ - v_+ \otimes v_-, \\
\zeta(v_-) &= (\Delta - \iota m \Delta)(v_-) = v_- \otimes v_-.
\end{aligned}$$

$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$  si scompone come somma diretta dello  $\mathbb{Z}$ -modulo  $v_+ \otimes \mathcal{V}$  e lo  $\mathbb{Z}$ -modulo generato dai due vettori  $v_- \otimes v_+ - v_+ \otimes v_-$  e  $v_- \otimes v_-$ .

Supponiamo che il diagramma  $F$  sia composto da  $k$  circonferenze e un incrocio. In tal caso la decomposizione trovata resta valida, tensorizzando tutte le equazioni trovate per  $\mathcal{V}^{k-1}$ .

Supponiamo che il diagramma  $F$  sia composto da  $k$  circonferenze e più di un incrocio. In tal caso, la decomposizione resta valida vertice a vertice, quindi è valida per il cubo intero.  $\square$

Supponiamo  $F$  abbia  $n$  incroci. Il cubo  $n$ -dimensionale  $V_F$  contiene i due sottocubi  $V_D$  e  $V_E$  di dimensione  $n - 1$  come facce. In particolare, vale  $V_F(*0) \cong V_E$  e  $V_F(*1) \cong V_D$ .

Consideriamo la mappa  $\xi : V_F(*0) \rightarrow V_F(*1)$  data da  $\xi = m$ , ossia la mappa standard nel cubo di moduli. Tale mappa può esser vista sia come mappa standard nel cubo dei moduli dalla faccia  $V_F(*0)$  alla faccia  $V_F(*1)$ , sia come mappa di cubi di moduli da  $V_E$  a  $V_D$ .

Grazie al lemma 2.3.8, sappiamo che  $V_E \cong \iota(V_D) \oplus \zeta(V_D)$ . Applicando la mappa  $m$  ad entrambi i termini, si ottiene  $m(V_E) \cong m\iota(V_D) \oplus m\zeta(V_D)$  e, ricordando che  $m\iota = Id$  e  $m\zeta = 0$ , si ottiene  $V_D \cong V_D \oplus 0$ . Quindi lo splitting di  $V_E \cong V_F(*0)$  dell'equazione 2.3.1 si può estendere tramite  $m$  ad uno splitting di  $V_F$  dato dall'equazione 2.3.2, con

$$V_F(*0) \cong V_E \cong \iota(V_D) \oplus \zeta(V_D) \tag{2.3.1}$$

$$V_F(*1) \cong V_D \cong V_D \oplus 0$$

$$V_F = V_{F,1} \oplus V_{F,2} \tag{2.3.2}$$

$$V_{F,1}(*0) \cong \zeta(V_D)$$

$$V_{F,1}(*1) \cong 0$$

$$V_{F,2}(*0) \cong \iota(V_D)$$

$$V_{F,2}(*1) \cong V_F(*1).$$

A questo punto, tensorizziamo l'espressione  $V_F = V_{F,1} \oplus V_{F,2}$  per il cubo anticommutativo standard  $S$  e prendiamo il complesso di catene associato, ottenendo  $\overline{C}(V'_F) = \overline{C}(V'_{F,1}) \oplus \overline{C}(V'_{F,2})$ .

Ricordando che la mappa di cubo da una faccia  $V_F(*0)$  all'altra  $V_F(*1)$  è  $m$ , otteniamo che il complesso  $\overline{C}(V'_{F,2})$  è isomorfo al cono della mappa identità del complesso  $\overline{C}(V'_D)[-1]$ , quindi è aciclico.

**Lemma 2.3.9.** *Vale l'isomorfismo di complessi  $\overline{C}(V'_{F,1}) \cong \overline{C}(V'_D)$ .*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di  $V_{F,1}$  segue che  $\overline{C}(V'_{F,1}) \cong \overline{C}(V_{F,1}(*0)') \cong \overline{C}(\zeta(V_D)')$ . Da una lettura attenta della dimostrazione del lemma 2.3.8 segue che  $\overline{C}(\zeta(V_D)') \cong \overline{C}(V'_D)$ , da cui segue la tesi.  $\square$

Raccogliendo insieme tutti i risultati trovati fin ora, abbiamo

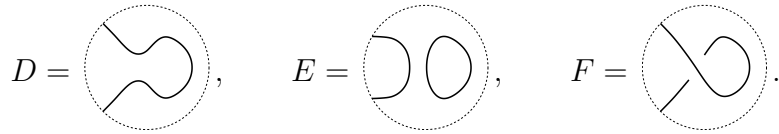
$$\begin{aligned} \overline{C}(V'_F) &\cong \overline{C}(V'_{F,1}) \oplus \overline{C}(V'_{F,2}) \\ &\cong \overline{C}(V'_D) \oplus \overline{C}(V'_{F,2}) \\ &\cong \overline{C}(V'_D) \oplus (\text{aciclico}). \end{aligned}$$

Osserviamo che, qualsiasi sia l'orientazione di  $F$ , l'incrocio che compare nel ricciolo a destra è sempre positivo, quindi  $n_-(D) = n_-(F) = n_-(E)$ . Grazie a ciò, ricordando la definizione 2.1.10, abbiamo  $\mathcal{F}[\text{⊗}] \cong \mathcal{F}[\text{⊗}]$ .

### 2.3.2 Eliminazione ricciolo a sinistra

Potremmo usare la stessa tecnica usata nel caso dell'invarianza geometrica; tuttavia useremo comunque una tecnica algebrica diretta, che non fa uso dell'invarianza per sovrapposizione di archi.

Consideriamo il diagramma di nodo  $F = \text{⊗}$  con  $n$  incroci, e ordiniamo gli incroci in modo che l'incrocio nel cerchio tratteggiato sia l'ultimo. Sia  $E$  il diagramma della 1-risoluzione  $\text{⊗}$  dell'ultimo incrocio e  $D$  il diagramma della 0-risoluzione  $\text{⊗}$ .



Consideriamo i cobordismi standard  $\text{⊗}$ ,  $\text{⊗}$ ,  $\text{⊗}$ . A questi cobordismi corrispondono le mappe di cubi di moduli  $\mathcal{F}(\text{⊗}) = \Delta : V_D \rightarrow V_E$ ,  $\mathcal{F}(\text{⊗}) = m : V_E \rightarrow V_D$ ,  $\mathcal{F}(\text{⊗}) = \iota : V_D \rightarrow V_E$ . Sono le stesse mappe viste prima.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} & : & \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array}, & \begin{array}{l} \Delta : V_D \rightarrow V_E, \\ m : V_E \rightarrow V_D, \\ \iota : V_D \rightarrow V_E. \end{array}
\end{array}$$

Ci sarà inoltre utile definire un altro cobordismo,  $\textcircled{\otimes}$ , al quale corrisponde la mappa di cubi di moduli  $\mathcal{F}(\textcircled{\otimes}) = \epsilon : V_E \rightarrow V_D$ .

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \end{array} & : & \begin{array}{c} \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \end{array}, & \epsilon : V_D \rightarrow V_E.
\end{array}$$

**Lemma 2.3.10.** *Il cubo  $V_E$  si scompone in una somma diretta*

$$V_E \cong \iota(V_D) \oplus \Delta(V_D).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che il diagramma  $F$  sia composto da una circonferenza e un incrocio. In tal caso, si ottiene

$$\begin{aligned}
V_D &= \mathcal{V}, \\
V_E &= \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}, \\
\iota(V_D) &= \mathcal{V} \otimes v_+.
\end{aligned}$$

Inoltre vale il fatto generale

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} = (\mathcal{V} \otimes v_+) \oplus \Delta(\mathcal{V}).$$

Da cui segue la tesi. Se il diagramma  $F$  non è composto da una circonferenza e un incrocio, si procede come nel lemma 2.3.8.  $\square$

Una semplice verifica algebrica mostra che la mappa  $\epsilon\Delta$  è l'identità  $Id_{V_D}$ . Tale verifica è ovvia anche al livello geometrico. Definisco la mappa  $\kappa$  come  $\kappa = m - m\Delta\epsilon : V_E \rightarrow V_D$ . La composizione  $\kappa\Delta$  è la mappa zero, la composizione  $\kappa\iota$  è l'identità.



Grazie al lemma 2.3.10 otteniamo uno splitting di  $V_E \cong V_F(*1)$ . Tale splitting si estende grazie alla mappa  $\kappa$  ad uno splitting di  $V_F$ .

$$\begin{aligned} V_F &= V_{F,1} \oplus V_{F,2} \\ V_{F,1}(*0) &\cong 0 \\ V_{F,1}(*1) &\cong \iota(V_D) \\ V_{F,2}(*0) &\cong V_D \cong V_F(*0) \\ V_{F,2}(*1) &\cong \Delta(V_D). \end{aligned}$$

A questo punto, tensorizziamo l'espressione  $V_F = V_{F,1} \oplus V_{F,2}$  per il cubo anticommutativo standard  $S$  e prendiamo il complesso di catene associato, ottenendo  $\overline{C}(V'_F) = \overline{C}(V'_{F,1}) \oplus \overline{C}(V'_{F,2})$ .

Ricordando che tra le facce del cubo  $V_{F,2}(*0)$  e  $V_{F,2}(*1)$  abbiamo l'isomorfismo  $\Delta$ , otteniamo che il complesso  $\overline{C}(V'_{F,2})$  è isomorfo al cono della mappa identità del complesso  $\overline{C}(V'_D)[-1]$ , quindi è aciclico.

**Lemma 2.3.11.** *Vale l'isomorfismo di complessi  $\overline{C}(V'_{F,1}) \cong \overline{C}(V'_D)[-1]$ .*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di  $V_{F,1}$  segue che  $\overline{C}(V'_{F,1}) \cong \overline{C}(V_{F,1}(*1)')[-1]$ . Grazie al lemma 2.3.10 e usando la mappa isomorfismo  $\iota$ , segue che  $\overline{C}(V_{F,1}(*1)')[-1] \cong \overline{C}(V'_D)[-1]$ .  $\square$

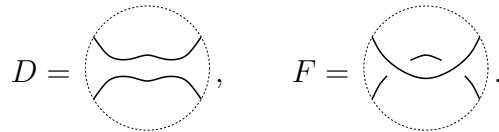
Raccogliendo insieme tutti i risultati trovati fin ora, abbiamo


$$\begin{aligned} \overline{C}(V'_F) &\cong \overline{C}(V'_{F,1}) \oplus \overline{C}(V'_{F,2}) \\ &\cong \overline{C}(V'_D)[-1] \oplus \overline{C}(V'_{F,2}) \\ &\cong \overline{C}(V'_D)[-1] \oplus (\text{aciclico}) \end{aligned}$$

Osserviamo che, qualsiasi sia l'orientazione di  $F$ , l'incrocio che compare nel ricciolo a destra è sempre negativo, quindi  $n_-(D) = n_-(F) + 1 = n_-(E)$ . Grazie a ciò, ricordando la definizione 2.1.10, abbiamo  $\mathcal{F} \left[ \left[ \textcircled{\times} \right] \right] \cong \mathcal{F} \left[ \left[ \textcircled{\times} \right] \right]$ .

### 2.3.3 Sovrapposizione di archi

Consideriamo il nodo  $F = \textcircled{\times}$ . Ordiniamo gli incroci di  $F$  in modo che gli ultimi due siano gli incroci visibili in  $\textcircled{\times}$  e in modo che l'ultimo sia l'incrocio in alto. Vogliamo mostrare che il complesso associato a  $\textcircled{\times}$  è omotopicamente equivalente al complesso associato a  $F(*01) = D = \textcircled{\times}$ .



Consideriamo le quattro possibili risoluzioni dei due incroci visibili in .

$$\begin{aligned}
 F(*00) &= \text{diagram with two strands crossing once}, & F(*01) &= \text{diagram with two strands crossing twice}, \\
 F(*10) &= \text{diagram with two strands and a central circle}, & F(*11) &= \text{diagram with two strands crossing once and a central circle}.
 \end{aligned}$$

Tali oggetti sono 4 sottocubi del cubo  $M_F$ , cioè il cubo  $M_F$  si può indicare con

$$\begin{array}{ccc}
 \text{diagram } F(*00) & \xrightarrow{d_{\dots 0\star}} & \text{diagram } F(*01) \\
 \downarrow d_{\dots \star 0} & & \downarrow d_{\dots \star 1} \\
 \text{diagram } F(*10) & \xrightarrow{d_{\dots 1\star}} & \text{diagram } F(*11)
 \end{array}$$

Applicando il funtore  $\mathcal{F}$ , otteniamo il cubo di moduli  $V_F$ , che si può indicare con

$$\begin{array}{ccc}
 V_{F(*00)} & \xrightarrow{d_{\dots 0\star}} & V_{F(*01)} \\
 \downarrow d_{\dots \star 0} & & \downarrow d_{\dots \star 1} \\
 V_{F(*10)} & \xrightarrow{d_{\dots 1\star}} & V_{F(*11)}
 \end{array}$$

Dove, con un abuso di notazione, indicheremo con  $d$  i cobordismi e gli omomorfismi, di cubi e di complessi di catene. Sarà chiaro dal contesto quale dei quattro casi si intende di volta in volta.

Possiamo decomporre la riga riguardante i cobordismi  $\overline{\mathcal{C}}(M_F)$  come

$$\overline{\mathcal{C}}(M_F) = \overline{\mathcal{C}}(M_{F(*00)}) \oplus \overline{\mathcal{C}}(M_{F(*01)})[-1] \oplus \overline{\mathcal{C}}(M_{F(*10)})[-1] \oplus \overline{\mathcal{C}}(M_{F(*11)})[-2].$$

Lo stesso ragionamento vale per la riga riguardante i moduli  $\overline{\mathcal{C}}(V_F)$  come

$$\overline{\mathcal{C}}(V_F) = \overline{\mathcal{C}}(V_{F(*00)}) \oplus \overline{\mathcal{C}}(V_{F(*01)})[-1] \oplus \overline{\mathcal{C}}(V_{F(*10)})[-1] \oplus \overline{\mathcal{C}}(V_{F(*11)})[-2].$$

Queste due decomposizioni si comportano nel modo atteso rispetto alle mappe interne a ciascuno dei quattro cubi  $d_{\dots 00}, d_{\dots 01}, d_{\dots 10}, d_{\dots 11}$ .

Se vogliamo decomporre il complesso di moduli  $\overline{\mathcal{C}}(V'_F)$ , la decomposizione

$$\overline{\mathcal{C}}(V'_F) = \overline{\mathcal{C}}(V'_{F(*00)}) \oplus \overline{\mathcal{C}}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus \overline{\mathcal{C}}(V'_{F(*10)})[-1] \oplus \overline{\mathcal{C}}(V'_{F(*11)})[-2]$$

non rispetta più le mappe interne a ciascuno dei quattro complessi. Ciò è una semplice conseguenza del fatto che alcune mappe (ad esempio, quelle interne a  $V_{F(*01)}$ ) cambiano segno in modo coerente al cambio di segno nel passaggio  $V_F \rightarrow V'_F$ , altre mappe (ad esempio, quelle interne a  $V_{F(*00)}$ ) cambiano segno in modo opposto.

Tuttavia, sappiamo come vengono effettuati i cambi di segno, quindi siamo in grado di calcolare come si scompone la mappa del complesso di catene  $\overline{C}(V'_F)$ .

$$d_{\dots}x = \begin{cases} d_{\dots 00}x + [-1]d_{\dots *0}x + [-1]d_{\dots 0*}x & \text{if } x \in \overline{C}(V'_{F(*00)}) \\ -d_{\dots 01}x - [-1]d_{\dots *1}x & \text{if } x \in \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \\ -d_{\dots 10}x + [-1]d_{\dots 1*}x & \text{if } x \in \overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] \\ d_{\dots 11}x & \text{if } x \in \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Definiamo ora tutte le mappe che andremo ad usare. Le classiche mappe di bordo

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, & d_{\dots 0*} : \overline{C}(V'_{F(*00)}) \rightarrow \overline{C}(V'_{F(*01)}), \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, & d_{\dots *0} : \overline{C}(V'_{F(*00)}) \rightarrow \overline{C}(V'_{F(*10)}), \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, & d_{\dots 1*} : \overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] \rightarrow \overline{C}(V'_{F(*11)})[-1], \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, & d_{\dots *1} : \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \rightarrow \overline{C}(V'_{F(*11)})[-1], \end{array}$$

più due mappe speciali

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, & \alpha : \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \rightarrow \overline{C}(V'_{F(*10)})[-1], \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, & \beta : \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2] \rightarrow \overline{C}(V'_{F(*10)})[-1]. \end{array}$$

Consideriamo ora tre sottomoduli  $X_1, X_2, X_3$  di  $\overline{C}(F)$  dati da

$$\begin{aligned} X_1 &= \{z + \alpha(z) \mid z \in \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1]\}, \\ X_2 &= \{z + dw \mid z, w \in \overline{C}(V'_{F(*00)})\}, \\ X_3 &= \{z + \beta(w) \mid z, w \in \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]\}. \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.12.**  $dX_1 \subseteq X_1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $z \in \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1]$ . Ricordiamo le semplici uguaglianze (dimostrabili sia a livello geometrico sia a livello algebrico)  $d_{\dots 1\star}\alpha = d_{\dots 1}$  e  $\alpha d_{\dots 01} = d_{\dots 10}\alpha$ . Usando questi risultati e la formula 2.3.3, calcoliamo  $d(Id + \alpha)(z)$ .

$$\begin{aligned} d(Id + \alpha) &= d + d\alpha \\ &= -d_{\dots 01} - [-1]d_{\dots \star 1} - d_{\dots 10}\alpha + [-1]d_{\dots 1\star}\alpha \\ &= -(d_{\dots 01} + d_{\dots 10}\alpha) + [-1](-d_{\dots \star 1} + d_{\dots 1\star}\alpha) \\ &= -(d_{\dots 01} + d_{\dots 10}\alpha) \\ &= -(d_{\dots 01} + \alpha d_{\dots 01}) \\ &= -(Id + \alpha)d_{\dots 01} \end{aligned}$$

Ricordando che  $d_{\dots 01}$  è la mappa di bordo interna di  $\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1]$ , si ottiene la tesi.  $\square$

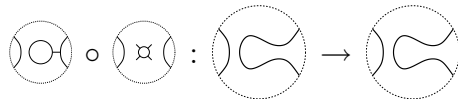
**Lemma 2.3.13.**  $dX_2 \subseteq X_2$ .

*Dimostrazione.* Siano  $z, w \in \overline{C}(V'_{F(*00)})$ ,  $d(z + dw) = dz + d^2w = dz$  da cui la tesi.  $\square$

**Lemma 2.3.14.**  $dX_3 \subseteq X_3$ .

*Dimostrazione.* Siano  $z, w \in \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]$ .

Consideriamo i morfismi  $\textcircled{\boxtimes}$  e  $\textcircled{\ominus}$ . È facile vedere che la composizione



è il cobordismo identità. Per la funtorialità di  $\mathcal{F}$ , abbiamo  $Id_{\mathcal{F}(\textcircled{\ominus})} = \mathcal{F}(Id_{\textcircled{\ominus}}) = \mathcal{F}(\textcircled{\ominus} \circ \textcircled{\boxtimes}) = \mathcal{F}(\textcircled{\ominus})\mathcal{F}(\textcircled{\boxtimes}) = d_{\dots 1\star}\beta$ . La mappa  $[-1]d_{\dots 1\star}\beta$  è quindi l'identità. Da questa identità e dalle formule 2.3.3, abbiamo

$$\begin{aligned} dz &\in \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2], \\ d\beta z &= -d_{\dots 10}\beta z + [-1]d_{\dots 1\star}\beta z \\ &= -d_{\dots 10}\beta z + z \\ &= \beta d_{\dots 11}z + z. \end{aligned}$$

Il termine  $\beta d_{\dots 11}z + z$  è in  $X_3$ , da cui la tesi.  $\square$

**Lemma 2.3.15.**  $\overline{C}(V'_F) = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$  è somma diretta di complessi di catene (cioè, rispetta le mappe di bordo).

*Dimostrazione.* Sappiamo già che la decomposizione rispetta le mappe di bordo, grazie ai lemmi 2.3.12, 2.3.13, 2.3.14. Inoltre segue dalle definizioni che  $\overline{C}(V'_F) \supseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ . Vogliamo dimostrare che  $\overline{C}(V'_F) \subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ . Procediamo in un modo simile all'eliminazione gaussiana.

Un elemento in  $X_1$  è della forma  $z + \alpha z$ , con  $z \in \overline{C}(V'_{F(*01)})$ . Abbiamo già visto  $\alpha = \beta d_{\dots *1}$ , da cui  $\alpha z = \beta d_{\dots *1} z$ , ma  $z \in \overline{C}(V'_{F(*01)})$  implica  $\beta d_{\dots *1} z \in \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]$  e  $\beta d_{\dots *1} z \in X_3$  per definizione di  $X_3$ . Quindi il secondo addendo di ogni elemento di  $X_1$  è già dentro  $X_3$ . In altre parole

$$\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus X_2 \oplus X_3 \subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3.$$

Un elemento in  $X_2$  è della forma  $z + dw$  con  $z, w \in \overline{C}(V'_{F(00)})$ , dove in questo caso dalle formule 2.3.3 si ha  $dw = d_{\dots 00}w + [-1]d_{\dots *0}w + [-1]d_{\dots 0*}w$ . Il termine  $[-1]d_{\dots 0*}w$  è già in  $\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1]$ , e  $d_{*00}w$  è in  $\overline{C}(V'_{F(*00)})$ , come  $z$ .

Chiamiamo quindi  $Y_2$  il sottogruppo di  $\overline{C}(V'_F)$  dato da



$$Y_2 = \{z + [-1]d_{\dots *0}w \mid z, w \in \overline{C}(V'_{F(*00)})\}.$$

Per quanto appena detto, abbiamo l'inclusione

$$\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus Y_2 \oplus X_3 \subseteq \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus X_2 \oplus X_3.$$

Osserviamo che  $X_3 \supseteq \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]$  e  $Y_2 \supseteq \overline{C}(V'_{F(*00)})$ . Chiamiamo

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{[-1]d_{\dots *0}w \mid w \in \overline{C}(V'_{F(*00)})\} \subseteq Y_2, \\ Y_3 &= \{\beta w \mid w \in \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]\} \subseteq X_3. \end{aligned}$$

Consideriamo ora che  $\overline{C}(V'_{F(*10)})[-1]$ . Con la stessa tecnica usata per dimostrare il lemma 2.3.8, basta mostrare l'uguaglianza nel caso in cui  $F$  sia un diagramma con zero incroci e zero circonferenze non visibili in  $F$ . Ci sono due possibili diagrammi,  e . Dal fatto generale visto nel lemma 2.3.10, in entrambi questi diagrammi vale  $\overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] = Z_2 \oplus Y_3$ .

Abbiamo quindi mostrato che

$$\begin{aligned}
\overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] &\subseteq Z_2 \oplus Y_3 \\
Z_2 \oplus Y_3 &\subseteq Y_2 \oplus X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] &\subseteq Y_2 \oplus X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*00)}) &\subseteq Y_2 \\
\overline{C}(V'_{F(*11)})[-2] &\subseteq X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus Y_2 \oplus X_3 &\subseteq \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus X_2 \oplus X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus X_2 \oplus X_3 &\subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme le inclusioni, otteniamo

$$\begin{aligned}
\overline{C}(V'_{F(*00)})[-0] &\subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] &\subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] &\subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \\
\overline{C}(V'_{F(*11)})[-2] &\subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3
\end{aligned}$$

cioè, ricordando la scomposizione in quattro di  $\overline{C}(V'_F)$  come

$$\overline{C}(V'_F) = \overline{C}(V'_{F(*00)}) \oplus \overline{C}(V'_{F(*01)})[-1] \oplus \overline{C}(V'_{F(*10)})[-1] \oplus \overline{C}(V'_{F(*11)})[-2],$$

otteniamo  $\overline{C}(V'_F) \subseteq X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ , cioè la tesi.  $\square$

**Lemma 2.3.16.** *I complessi di catene  $X_2$  e  $X_3$  sono aciclici.*

*Dimostrazione.* Il complesso  $X_2$  è isomorfo al cono della mappa identità su  $\overline{C}(V'_{F(*00)})[-1]$ . Il complesso  $X_3$  è isomorfo al cono della mappa identità su  $\overline{C}(V'_{F(*11)})[-2]$ . Quindi sono aciclici.  $\square$

**Lemma 2.3.17.** *Il complesso di catene  $X_1$  è isomorfo al complesso  $\overline{C}(V'_D)$ .*

*Dimostrazione.* I diagrammi  $D$  e  $F(*01)$  sono ovviamente isomorfi, quindi lo sono anche  $\overline{C}(V'_D)$  e  $\overline{C}(V'_{F(*01)})$ . Un isomorfismo  $\gamma : \overline{C}^i(V'_{F(*01)}) \rightarrow X_1^i$  è dato ad esempio da  $\gamma(z) = (-1)^i(z + \alpha z)$ .  $\square$

**Lemma 2.3.18.** *I complessi  $\overline{C}(V'_D)[-1]$  e  $\overline{C}(V'_F)$  sono quasiisomorfi.*

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, qualsiasi sia l'orientazione di  $F$ , abbiamo  $n_-(F) = n_-(D) + 1$  e  $n_+(F) = n_+(D) + 1$ . Inoltre, dai lemmi 2.3.15, 2.3.16, 2.3.17, segue direttamente la tesi.  $\square$

Abbiamo ottenuto  $\mathcal{F} \left[ \left[ \textcircled{\otimes} \right] \right] \cong \mathcal{F} \left[ \left[ \textcircled{\otimes} \right] \right]$ .

### 2.3.4 Attraversamento di un incrocio

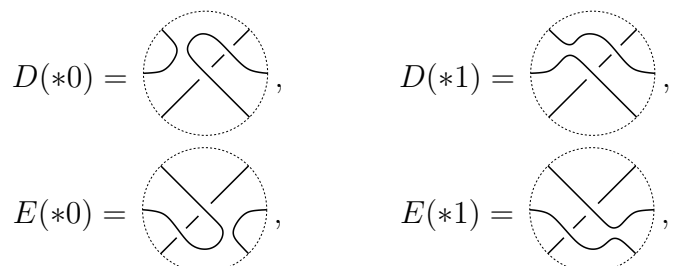
Consideriamo i due diagrammi  $D$  ed  $E$ ,



L'obiettivo è trovare un quasiisomorfismo tra  $\overline{C}(V'_D)$  e  $\overline{C}(V'_E)$ . Ordiniamo gli incroci di  $D$  in modo che gli incroci visibili in  $D$  da destra a sinistra siano l'ultimo, il terzultimo, il penultimo. Ordiniamo gli incroci di  $E$  in modo che gli incroci visibili in  $D$  da destra a sinistra siano il terzultimo, il penultimo, l'ultimo.

Potremmo portare avanti la dimostrazione analizzando le otto risoluzioni parziali di  $D$  e le otto risoluzioni parziali di  $E$ . Questa via, sebbene praticabile, nel nostro caso non è la più semplice. Come per il polinomio di Jones, sfruttando l'invarianza per la mossa sovrapposizione di archi, possiamo usare meno risoluzioni.

Innanzitutto, consideriamo le quattro risoluzioni dell'ultimo vertice,



I diagrammi  $D(*0)$  e  $E(*0)$  sono equivalenti tramite mossa sovrapposizione di archi, quindi hanno catene  $\overline{C}(V'_{D(*1)})$  e  $\overline{C}(V'_{E(*1)})$  quasiisomorfe. I diagrammi  $D(*1)$  e  $E(*1)$  sono isotopi, quindi hanno catene  $\overline{C}(V'_{D(*1)})$  e  $\overline{C}(V'_{E(*1)})$  uguali.

Decomponiamo ora  $D(*0)$  in quattro diagrammi, esplicitando i cobordi-

smi  $d$  del cubo  $M_D$ .

Facciamo la stessa cosa per  $E(*0)$ , esplicitando i cobordismi  $\delta$  del cubo  $M_E$ .

Come visto nel capitolo precedente, abbiamo la decomposizione di  $\overline{C}(V'_D)$

$$\begin{aligned} \overline{C}(V'_D) &= \overline{C}(V'_{D(*0)}) \oplus \overline{C}(V'_{D(*1)})[-1] \\ &= \left( \bigoplus_{u,v \in \{0,1\}} \overline{C}(V'_{D(*uv0)})[-u-v] \right) \oplus \overline{C}(V'_{D(*1)})[-1], \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

e la stessa decomposizione vale per  $E$ ,

$$\begin{aligned} \overline{C}(V'_E) &= \overline{C}(V'_{E(*0)}) \oplus \overline{C}(V'_{E(*1)})[-1] \\ &= \left( \bigoplus_{u,v \in \{0,1\}} \overline{C}(V'_{E(*uv0)})[-u-v] \right) \oplus \overline{C}(V'_{E(*1)})[-1]. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$



Come prima, tali decomposizioni sono solo decomposizioni di moduli, e non di complessi di catene.

Consideriamo il cobordismo  $\textcircled{D} : D(*110) \rightarrow D(*010)$  e il cobordismo  $\textcircled{E} : E(*110) \rightarrow E(*100)$ , che inducono rispettivamente mappe di complessi  $p$  e  $\pi$ .

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{D} : \textcircled{D} \rightarrow \textcircled{D}, & p : \overline{C}(V'_{D(*110)})[-2] \rightarrow \overline{C}(V'_{D(*010)})[-1], \\ \textcircled{E} : \textcircled{E} \rightarrow \textcircled{E}, & \pi : \overline{C}(V'_{E(*110)})[-2] \rightarrow \overline{C}(V'_{E(*100)})[-1]. \end{array}$$

Consideriamo inoltre le due mappe

$$\begin{aligned} t = pd_{\dots 1*0} : \overline{C}(V'_{D(*100)})[-1] &\rightarrow \overline{C}(V'_{D(*010)})[-1] \\ \tau = \pi\delta_{\dots *10} : \overline{C}(V'_{E(*010)})[-1] &\rightarrow \overline{C}(V'_{E(*100)})[-1]. \end{aligned}$$

Chiamiamo  $X_1, X_2, X_3$  i tre sottomoduli di  $\overline{C}(V_D)$  dati da

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x + tx + y \mid x \in \overline{C}(V'_{D(*100)})[-1], y \in \overline{C}(V'_{D(*1)})[-1]\} \\ X_2 &= \{x + dy \mid x, y \in \overline{C}(V'_{D(*000)})\} \\ X_3 &= \{px + dpy \mid x, y \in \overline{C}(V'_{D(*110)})[-2]\}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Chiamiamo  $Y_1, Y_2, Y_3$  i tre sottomoduli di  $\overline{C}(V_E)$  dati da

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{x + \tau x + y \mid x \in \overline{C}(V'_{E(*010)})[-1], y \in \overline{C}(V'_{E(*1)})[-1]\} \\ Y_2 &= \{x + \delta y \mid x, y \in \overline{C}(V'_{E(*000)})\} \\ Y_3 &= \{\pi x + \delta\pi y \mid x, y \in \overline{C}(V'_{E(*110)})[-2]\}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

**Lemma 2.3.19.**

$$\begin{aligned} dX_1 &\subseteq X_1, & \delta Y_1 &\subseteq Y_1, \\ dX_2 &\subseteq X_2, & \delta Y_2 &\subseteq Y_2, \\ dX_3 &\subseteq X_3, & \delta Y_3 &\subseteq Y_3. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Analoga alla dimostrazione dei lemmi 2.3.12, 2.3.13, 2.3.14.  $\square$

**Lemma 2.3.20.**

$$\begin{aligned} \overline{C}(V'_D) &= X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \\ \overline{C}(V'_E) &= Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \end{aligned}$$

sono somme dirette di complessi di catene.

*Dimostrazione.* Sappiamo già che le mappe di bordo sono rispettate. Il resto della dimostrazione è analoga alla dimostrazione del lemma 2.3.15.  $\square$

**Lemma 2.3.21.** *I complessi di catene  $X_2$  e  $X_3$  e i complessi di catene  $Y_2$  e  $Y_3$  sono aciclici.*

*Dimostrazione.* Analoga alla dimostrazione del lemma 2.3.16.  $\square$

**Lemma 2.3.22.** *I complessi di catene  $X_1$  e  $Y_1$  sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* Abbiamo le equivalenze di diagrammi

$$\begin{aligned} D(*100) &= \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} = E(*010), \\ D(*1) &= \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} = D(*1). \end{aligned}$$

Queste inducono gli isomorfismi di complessi

$$\begin{aligned} \overline{C}(V'_{D(*100)}) &= \overline{C}(V'_{E(*010)}), \\ \overline{C}(V'_{D(*1)}) &= \overline{C}(V'_{D(*1)}). \end{aligned}$$

Questi isomorfismi ci consentono di identificare la coppia le variabili  $x, z$  in 2.3.6 con le variabili  $x, z$  in 2.3.7. Un isomorfismo tra  $X_1$  e  $Y_1$  è dato ad esempio da  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  con  $x + tx + z \mapsto x + \tau x + z$ .  $\square$

**Lemma 2.3.23.** *I complessi  $\overline{C}(V'_D)$  e  $\overline{C}(V'_E)$  sono quasiisomorfi.*

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, qualsiasi sia l'orientazione di  $D$ , abbiamo  $n_-(D) = n_-(E)$  e  $n_+(D) = n_+(E)$ . Inoltre, dai lemmi 2.3.20, 2.3.21, 2.3.22, segue direttamente la tesi.  $\square$

Abbiamo ottenuto  $\mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} \right] \cong \mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} \right]$ .

# Capitolo 3

## Il grado quantico

### 3.1 Definizioni e proprietà

Abbiamo visto come  $[[\cdot]]$  sia un complesso di catene ben definito non solo sui diagrammi di tangle ma anche sui tangle in generale. È possibile considerare una struttura aggiuntiva su  $[[\cdot]]$ , detta un grado quantico.

*Definizione 3.1.1.* Un gruppo abeliano graduato  $A$  è un gruppo abeliano scomposto in somma diretta di gruppi abeliani indicizzati da un intero

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i.$$

Gli elementi di  $A_i$  si dicono elementi di grado  $i$ .

Osserviamo che non tutti gli elementi in un gruppo abeliano graduato hanno un grado. Ad esempio, la somma di elementi con gradi diversi ha grado non definito, lo 0 ha grado non definito.

*Definizione 3.1.2.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria pre-additiva. Allora  $\mathcal{C}$  si dice *categoria graduata* se valgono le seguenti proprietà.

- Per ogni coppia di oggetti  $A, B$  in  $\mathcal{C}$  l'insieme dei morfismi  $\text{Mor}(A, B)$  è un gruppo abeliano graduato (tale grado verrà chiamato grado quantico); la composizione rispetta i gradi quantici e le mappe identità hanno grado quantico 0.
- C'è una azione di  $\mathbb{Z}$  sugli oggetti di  $\mathcal{C}$ , chiamata “shift del grado quantico”; l'azione di  $m \in \mathbb{Z}$  è indicata con  $\{m\}$ . L'azione, se considerata in una categoria non graduata, preserva i morfismi  $\text{Mor}(A, B) \cong \text{Mor}(A\{m\}, B\{n\})$  ma sposta in modo appropriato i gradi delle mappe  $\deg(f : A\{m\} \rightarrow B\{n\}) = \deg(f : A \rightarrow B) - (m - n)$ .

*Osservazione 3.1.3.* Abbiamo già visto (definizione 2.1.7) lo shift omologico, dove lo shift [1] diminuisce il grado omologico di ciascun oggetto di 1. In modo analogo, l'azione qui definita fa in modo che {1} diminuisca il grado quantico di 1. La definizione appena esposta è ripresa dall'articolo di Bar-Natan [DBN-K] con una lieve modifica: negli articoli di Bar-Natan e di Paul Turner [PT-F], {1} aumenta il grado quantico di 1. Abbiamo preferito la nostra definizione in quanto è più coerente con lo shift omologico e in quanto è più largamente utilizzata (ad esempio in [MK-A] e [ESL-A]).

Se  $\mathcal{C}$  è categoria graduata, non è difficile vedere che anche  $\text{Mat } \mathcal{C}$  e  $\text{Kom } \mathcal{C}$  sono categorie graduate.

Sia  $A$  un insieme di  $2n$  punti su  $S^1$ , sia  $d$  un cobordismo morfismo in  $\text{Cob}^3(A)$ . Definisco il *grado quantico* di  $d$  come  $\text{deg}(d) = \chi(d) - n$ , cioè come la caratteristica di Eulero di  $d$  meno metà del numero di punti di bordo del diagramma di risoluzione di tangle di partenza. Un diagramma di tangle, essendo un grafo 4-valente, deve avere un numero pari di punti di bordo, quindi il grado  $\text{deg}(d)$  qui definito è un intero.

**Lemma 3.1.4.** *Il grado quantico appena definito è additivo rispetto alla composizione verticale e orizzontale di cobordismi. Il Grado delle selle  $\textcircled{\otimes}$  è  $-1$ , il grado di tazze e coperchi  $\textcircled{\cup}$   $\textcircled{\cap}$  è  $+1$ . Tutti i cobordismi si scrivono come composizione verticale o orizzontale di  $\textcircled{\otimes}$ ,  $\textcircled{\cup}$ ,  $\textcircled{\cap}$ .*

**Lemma 3.1.5.** *Le relazioni  $S$ ,  $T$ ,  $\mathcal{4}Tu$  preservano il grado quantico.*

*Dimostrazione.* La relazione  $S$  coinvolge il cobordismo 0, il cui grado non è definito. La relazione  $T$  riguarda la composizione orizzontale con un toro. Usando la scomposizione vista in 2.2.4, abbiamo

$$\begin{aligned} \text{deg} \left( \textcircled{\cup} \right) &= \text{deg} \left( \textcircled{\cup} \textcircled{\otimes} \textcircled{\cap} \textcircled{\cup} \right) \\ &= \text{deg} \left( \textcircled{\cup} \textcircled{\otimes} \textcircled{\cap} \textcircled{\cup} \right) \\ &= +1 - 1 - 1 + 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

quindi i due termini della relazione  $T$  hanno lo stesso grado. La relazione  $\mathcal{4}Tu$  preserva il grado quantico grazie alle ovvie simmetrie.  $\square$

Grazie ai lemmi precedenti 3.1.4 e 3.1.5, i morfismi della categoria  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_{/l}^3))$  sono graduati tramite il grado quantico. Per ottenere una categoria graduata, abbiamo bisogno di un'azione shift quantico sugli oggetti. Tuttavia non c'è un modo efficiente di definire il grado quantico di oggetti nella categoria  $\text{Cob}^3$ , nè tantomeno di definire uno shift quantico sugli oggetti. Ovviamo a

questo problema in un modo simile a quanto fatto per ottenere la preadditività di  $\text{Cob}^3$ . Estendiamo la categoria  $\text{Cob}^3$  aggiungendo per ogni oggetto  $A$  e intero  $m$  degli oggetti formali  $A\{m\}$  isomorfi ad  $A$ , e definiamo lo shift quantico e le nuove frecce nel modo ovvio.

Anche se in modo un po' forzato, siamo arrivati ad ottenere che  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_{\hbar}^3))$  può essere considerata una categoria graduata.

L'oggetto  $\llbracket D \rrbracket$  è un complesso di catene in  $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_{\hbar}^3(A)))$ , dato da una riga di frecce e di oggetti  $\llbracket D \rrbracket^r$  con  $r \in \mathbb{Z}$  in  $\text{Mat}(\text{Cob}_{\hbar}^3(A))$ .

$$\llbracket D \rrbracket = (\dots \rightarrow \llbracket D \rrbracket^0 \rightarrow \llbracket D \rrbracket^1 \rightarrow \llbracket D \rrbracket^2 \rightarrow \dots).$$

*Definizione 3.1.6.* Sia  $D$  un diagramma di tangle orientato con  $n_+$  incroci positivi e  $n_-$  incroci negativi. Definisco la parentesi quantica di Khovanov per link o tangle orientati come il complesso  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$ , dove

$$\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}^r = \llbracket D \rrbracket^r \{-r - n_+ + n_-\}.$$

Se considerati come oggetti in una categoria non graduata (se trascuriamo i gradi), i due complessi  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  e  $\llbracket D \rrbracket$  sono uguali.

*Osservazione 3.1.7.* La parentesi quantica di Khovanov  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  è stata qui definita nella maniera usata da Bar-Natan ([DBN-K]). Abbiamo il complesso intermedio non quantico  $\llbracket D \rrbracket = \overline{C}(M'_D)[n_-]$  (parentesi di Khovanov, definizione 2.1.10). Da questo, inseriamo un grado quantico via  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}^r = \llbracket D \rrbracket^r \{-r - n_+ + n_-\}$ .

Khovanov definisce la parentesi quantica di Khovanov  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  in un altro modo, ossia definendo il complesso quantico intermedio  $(\widetilde{C}(D))^r = (\overline{C}(M'_D))^r \{-r\}$  e normalizzando ottenendo la parentesi quantica di Khovanov  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}} = \widetilde{C}(D)[n_-] \{2n_- - n_+\}$ .

Queste due definizioni di  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  sono ovviamente equivalenti.

La definizione di Bar-Natan ha il vantaggio di usare un complesso intermedio  $\llbracket D \rrbracket$  non quantico e dimostrarne l'invarianza per tangle orientati.

La definizione di Khovanov ha il vantaggio di usare un complesso quantico intermedio  $\widetilde{C}(D)$  per tangle  $D$  non orientati, quindi di assomigliare molto alla parentesi di Kauffman  $\langle D \rangle$  (definizione 1.1.4), anche questa indipendente dall'orientazione, a metà strada tra il link  $D$  e la parentesi di kauffman normalizzata  $f_K$  per link orientati (definizione 1.1.7).

**Teorema 3.1.8.** *Sia  $T$  un diagramma di tangle. Le mappe di bordo di  $\llbracket T \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  hanno grado quantico zero. Se  $D$  è un diagramma di tangle equivalente a  $T$ , allora esiste un'equivalenza omotopica tra  $\llbracket T \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  e  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  di grado 0.*

*Dimostrazione.* Le mappe di bordo in  $\llbracket T \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  sono tutte del tipo  $\bigoplus$ , quindi hanno tutte grado  $-1$ . Lo shift di  $\{-r\}$  introdotto su  $\llbracket T \rrbracket_{\mathfrak{q}}^r$  fa sì che tutte le mappe di bordo in  $\llbracket T \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  abbiano grado  $0$ . Inoltre non è difficile vedere che tutte le equivalenze omotopiche tra due complessi  $T$  e  $D$  discusse nella sezione 2.3 hanno grado quantico  $0$  come mappe  $\llbracket T \rrbracket_{\mathfrak{q}} \rightarrow \llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$ .  $\square$

Sarebbe utile definire una struttura di categoria graduata anche per la categoria  $\mathbb{Z}\text{-mod}$ , in modo da poter usare i gradi quantici anche nei moduli e nei conti espliciti dell'omologia. Bisogna dunque cercare di definire un grado quantico per le mappe di moduli. Ciò è possibile ma, in realtà, le cose vanno molto meglio di così. È infatti possibile definire un grado quantico per gli oggetti e i morfismi della categoria  $\mathbb{Z}\text{-mod}$ , da cui seguono facilmente tutti gli assiomi di categoria graduata.

Il grado quantico è definito non sugli oggetti ma sull'insieme di generatori standard degli oggetti  $V^{\otimes k}$ .

*Definizione 3.1.9.* Il grado quantico di  $v_+$  è  $+1$ , il grado quantico di  $v_-$  è  $-1$ .

*Osservazione 3.1.10.* I complessi di cobordismi usati sono sempre complessi in cui le mappe di bordo uniscono due circonferenze  $\bigcirc\text{---}\bigcirc$  o dividono in due una circonferenza  $\bigcirc\text{---}\bigcirc$ , unione disgiunta alcune volte il cobordismo identità  $S^1 \times [0, 1]$ . Queste due mappe di bordo in  $\overline{\mathcal{C}}(M_D)$ , con grado quantico  $-1$ , vengono mandate da  $\mathcal{F}$  in mappe di bordo  $m$  e  $\Delta$ , con grado quantico  $-1$  (è una ovvia verifica dalla definizione 2.1.16). Quindi il funtore  $\mathcal{F}$  preserva i gradi quantici.

È inoltre molto interessante osservare come tutti i moduli usati nella dimostrazione dell'invarianza (approccio algebrico) possano essere shiftati opportunamente (ogni modulo di altezza  $h$  viene shiftato di  $\{h\}$ ); dati  $T_1$  e  $T_2$  diagrammi associati alle mosse di Reidemeister, si ottengono delle equivalenze omotopiche  $\mathcal{F} \llbracket T_1 \rrbracket \cong \mathcal{F} \llbracket T_2 \rrbracket$  con mappe di equivalenza omotopica grado quantico zero; in altre parole, si ottiene  $\mathcal{F} \llbracket T_1 \rrbracket_{\mathfrak{q}} \cong \mathcal{F} \llbracket T_2 \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  equivalenza in una categoria graduata.

Da questo si ottiene che le due dimostrazioni (algebrica e geometrica) dell'invarianza di  $\mathcal{F} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  si possono portare avanti in modi indipendenti. Per non appesantire le notazioni chiameremo  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  la parentesi di Khovanov geometrica e  $\mathcal{F} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  la parentesi di Khovanov algebrica.

*Definizione 3.1.11.* Il grado quantico di un  $R$ -modulo libero graduato  $M$  è

$$\text{qdim}(M) = \sum_i q^i \dim_R(M^i).$$

**Lemma 3.1.12.** *Valgono le seguenti uguaglianze:*

- $\mathfrak{qdim}(A \oplus B) = \mathfrak{qdim}(A) + \mathfrak{qdim}(B)$ ,
- $\mathfrak{qdim}(A \otimes B) = \mathfrak{qdim}(A)\mathfrak{qdim}(B)$ ,
- $\mathfrak{qdim}(A\{m\}) = q^{-m}\mathfrak{qdim}(A)$ . □

### 3.2 Da Khovanov a Jones

La parentesi di Khovanov  $\mathcal{F}[\![\cdot]\!]_q$  è un invariante algebrico che generalizza il polinomio di Jones. Vale in particolare

$$\chi(\mathcal{F}[\![T]\!]_q) = V(T) \tag{3.2.1}$$

dove  $T$  è un diagramma di link e  $V(T)$  è una versione del polinomio di Jones associato a  $T$ . Il polinomio di Jones è normalizzato in modo che su una circonferenza valga  $q + q^{-1}$ , quindi non è il polinomio di Jones standard; è il polinomio che abbiamo definito in 1.2.1.

Tale formula si può dimostrare in diversi modi. Fondamentalmente, esiste un approccio algebrico diretto (seguito da Khovanov), un approccio geometrico (seguito da Bar-Natan), un approccio di tipo somma su stati (seguito da Oleg Viro).

Nella nostra dimostrazione verrà seguito l'approccio di Khovanov.

La caratteristica di Eulero  $\chi$  di un complesso di catene  $C$  è definita come

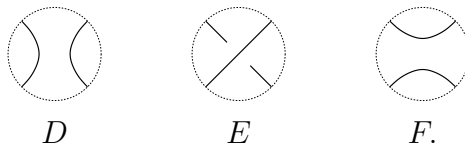
$$\chi(C) = \sum_i (-1)^i \dim(C^i).$$

Quando avremo a che fare con un complesso di catene con un grado quantico, useremo la formula più generale

$$\chi(C) = \sum_i (-1)^i \mathfrak{qdim}(C^i).$$

Ci sono vari modi di dimostrare la formula 3.2.1. Il modo più semplice è quello fornito dallo stesso Khovanov, che esponiamo di seguito.

Consideriamo i diagrammi  $D$ ,  $E$ ,  $F$  in figura.



Usiamo la definizione del complesso intermedio  $\tilde{C}$  di Khovanov, visto nell'osservazione 3.1.7. Ricordiamo che le relazioni che coinvolgono  $\tilde{C}$  sono

$$\begin{aligned}(\tilde{C}(D))^r &= (\overline{C}(M'_D))^r \{-r\} \\ \llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}} &= \tilde{C}(D)[n_-] \{2n_- - n_+\}.\end{aligned}$$

Come visto più volte, il complesso  $\tilde{C}(E)[1]$  è isomorfo al cono della mappa  $\tilde{C}(F) \rightarrow \tilde{C}(D)\{-1\}$ .

Usando le relazioni 3.1.12 se ne deduce

$$\begin{aligned}\chi \mathcal{F} \tilde{C}(E) &= -\chi(\mathcal{F} \tilde{C}(E)[1]) \\ &= \chi \mathcal{F} \tilde{C}(F) - \chi(\mathcal{F} \tilde{C}(D)\{-1\}) \\ &= \chi \mathcal{F} \tilde{C}(F) - q \chi \mathcal{F} \tilde{C}(D).\end{aligned}$$

Dal punto di vista della parentesi di Kauffman, usando la definizione di Khovanov vista in 1.1.9. Abbiamo visto nell'osservazione 1.1.9 che tale definizione è equivalente alla definizione standard di parentesi di Kauffman, che a sua volta (lemma 1.2.2) è equivalente al polinomio di Jones.

Abbiamo

$$\langle E \rangle = \langle F \rangle - q \langle D \rangle.$$

Quindi  $\langle \cdot \rangle$  e  $\chi \mathcal{F} \tilde{C}(\cdot)$  seguono le stesse regole di risoluzione.

Inoltre, una diretta applicazione di 3.1.12 mostra che, se  $T$  è unione disgiunta di  $k$  curve semplici chiuse nel piano, allora

$$\chi \mathcal{F} \tilde{C}(T) = \chi(\mathcal{V}^{\otimes k}) = (q + q^{-1})^k,$$

analogamente al caso di  $\langle T \rangle$ .

Consideriamo ora  $D$  un diagramma orientato. Usando la normalizzazione per arrivare a  $\llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\chi \mathcal{F} \llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}} &= \chi(\mathcal{F} \tilde{C}(D)[n_-(D)] \{2n_+(D) - n_-(D)\}) \\ &= (-1)^{n_-(D)} q^{n_+(D) - 2n_-(D)} \chi \mathcal{F} \tilde{C}(D).\end{aligned}$$

Analogamente, per la parentesi di Kauffman normalizzata, avevamo da 3.1.7 l'uguaglianza

$$f_D = (-1)^{n_-(D)} q^{n_+(D) - 2n_-(D)} \langle D \rangle.$$

Osserviamo che  $f_K$  e  $\chi \mathcal{F} \llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  seguono la stessa normalizzazione, le stesse regole di risoluzione e hanno gli stessi punti di partenza. Questo è sufficiente a dimostrare l'equazione 3.2.1.

*Osservazione 3.2.1.* Sarebbe interessante dimostrare la formula 3.2.1 senza fare uso delle parentesi algebriche. Ciò è in effetti possibile, usando una versione "aggiornata" della caratteristica di eulero tramite tracce su categorie preaddittive e moduli di skein ([DBN-K], sezione 10).



### 3.3 Cambio di orientazione e immagine specchiata

Vogliamo capire come cambia la parentesi di Khovanov se cambio l'orientazione del link. È chiaro che invertendo l'orientazione di tutto il link la parentesi di Khovanov non cambia (gli incroci positivi restano positivi e viceversa). Se invece invertiamo l'orientazione ad una delle due componenti di un link, cambiano i segni degli incroci tra una componente e l'altra.

Sia  $D$  un diagramma di link, sia  $D_1 \sqcup D_2$  una scomposizione del diagramma di link in due componenti. Sia  $l = lk(D_1, D_2)$  il linking number delle due componenti, come definito in 1.0.5. Sia  $D'$  il diagramma di  $D$  con l'orientazione di  $D_2$  invertita. Valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} n_+(D') &= n_+(D) - 2l \\ n_-(D') &= n_-(D) + 2l \end{aligned}$$

Dalla definizione di  $[[\cdot]]$  abbiamo

$$\begin{aligned} [[D]] &= \overline{C}(M_D)[n_-(D)], \\ [[D']] &= \overline{C}(M_{D'})[n_-(D')]. \end{aligned}$$

Inoltre abbiamo che  $M_D$  non dipende dalle orientazioni, quindi  $\overline{C}(M_D) = \overline{C}(M_{D'})$ . Da questo, se ne deduce

$$[[D]]^r = [[D']]^{r-2l}.$$

Dalla definizione di  $[[\cdot]]_q$  abbiamo

$$\begin{aligned} [[D]]_q^r &= [[D]]^r \{-r - n_+(D) + n_-(D)\}, \\ [[D']]_q^r &= [[D']]^r \{-r - n_+(D') + n_-(D')\}. \end{aligned}$$

Da cui si ottiene facilmente

$$[[D']]_q^r = [[D]]_q^{r+2l} \{6l\}.$$

Un'altra costruzione interessante è l'immagine mirror di un nodo. A livello di diagramma, il mirror di un diagramma di nodo  $D$  è un nodo in cui tutti gli incroci di tipo  $\otimes$  sono rimpiazzati da un incrocio di tipo  $\otimes$  e viene indicato con il diagramma  $D^!$ .

Per definire il lemma che lega la parentesi di Khovanov di un nodo alla parentesi di Khovanov della sua immagine mirror, abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari.

*Definizione 3.3.1.* Sia  $A$  un gruppo abeliano graduato  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ . Definiamo il gruppo abeliano graduato duale di  $A$  come  $A^*$ . La componente di grado  $j$  di  $A^*$  è  $(A^*)_j = \text{hom}(A_{-j}, \mathbb{Z})$ .

*Definizione 3.3.2.* Sia  $(B, d)$  un cubo di oggetti e frecce in una categoria (in cui sia definito il duale di oggetti). Il cubo duale di  $(B, d)$  è il cubo  $(B^*, d^*)$  ottenuto dualizzando tutti i vertici di  $B$  e invertendo tutte le frecce  $d$ .

Più precisamente, definisco  $\neg 1 = 0$ ,  $\neg 0 = 1$ ,  $\neg \star = \star$ . Definisco  $\neg(x_1, \dots, x_n) = (\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ . I vertici di  $B^*$  sono dati da  $(B^*)_{(x_1, \dots, x_n)} = (B_{\neg(x_1, \dots, x_n)})^*$  e le mappe sono date da  $(d^*)_{(x_1, \dots, x_n)} = (d_{\neg(x_1, \dots, x_n)})^*$ .

**Lemma 3.3.3.** *Il cubo commutativo  $V_D$  è isomorfo al cubo commutativo  $(V_D)^*$ .*

*Dimostrazione.* Introduciamo una base duale di  $\mathcal{V}^*$ , data da  $v_+^*$  e  $v_-^*$ , definiti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} v_+^*(v_+) &= 0 & v_+^*(v_-) &= 1 \\ v_-^*(v_+) &= 1 & v_-^*(v_-) &= 0. \end{aligned}$$

Definisco le mappe  $m^*$  e  $\Delta^*$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} m^* : \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* &\rightarrow \mathcal{V}^* & \Delta : \mathcal{V}^* &\rightarrow \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \\ v_-^* \otimes v_-^* &\mapsto 0 & v_- &\mapsto v_-^* \otimes v_-^* \\ v_-^* \otimes v_+^* &\mapsto v_-^* & v_+ &\mapsto v_+^* \otimes v_-^* + v_-^* \otimes v_+^* \\ v_+^* \otimes v_-^* &\mapsto v_+^* & & \\ v_+^* \otimes v_+^* &\mapsto v_+^* & & \end{aligned}$$

Non è difficile mostrare che  $m^*$  e  $\Delta^*$  così definite sono le mappe duali rispettivamente di  $m$  e  $\Delta$ . Definiamo l'isomorfismo  $\mu$  come

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}^* \\ v_+ &\mapsto v_+^* \\ v_- &\mapsto v_-^*. \end{aligned}$$

Le risoluzioni  $D(x_1, \dots, x_n)$  e  $D^!(\neg(x_1, \dots, x_n))$  sono chiaramente la stessa risoluzione. Tramite l'isomorfismo  $\mu$  possiamo identificare  $\mathcal{V}^{\otimes k}$  con  $(\mathcal{V}^*)^{\otimes k}$ , inoltre l'isomorfismo  $\mu$  manda le mappe  $m$  e  $\Delta$  rispettivamente in  $m^*$  e  $\Delta^*$ . Questo è sufficiente a concludere.  $\square$

*Definizione 3.3.4.* Sia  $C$  un complesso di catene. Definisco il complesso di catene duale  $C^*$  come il complesso che ha come oggetti  $(C^*)^i = (C^{-i})^*$  e come mappe  $(d^*)^i = (d^{-i-1})^*$ .

**Lemma 3.3.5.** *C'è un isomorfismo*

$$\mathcal{F} \llbracket D \rrbracket_{\mathfrak{q}} = (\mathcal{F} \llbracket D^! \rrbracket_{\mathfrak{q}})^*.$$

*Dimostrazione.* Dall'ultimo lemma 3.3.3 e dalla definizione di  $\llbracket \cdot \rrbracket$  non è difficile mostrare che  $\mathcal{F} \llbracket D \rrbracket = (\mathcal{F} \llbracket D^! \rrbracket)^*$ . Inoltre, con molta attenzione ai gradi quantici e ricordando che il duale di un gruppo graduato come definito in 3.3.1 inverte i gradi quantici, si può dimostrare che vale l'uguaglianza anche dei gradi quantici.  $\square$

### 3.4 Finezza dell'omologia di nodi alternanti

*Definizione 3.4.1.* L'omologia di Khovanov  $H^{i,j}(K)$  è l'omologia del complesso  $\mathcal{F} \llbracket K \rrbracket_{\mathfrak{q}}$  dove  $K$  è un link orientato; con  $i$  indichiamo il grado omologico e con  $j$  indichiamo il grado quantico.

*Definizione 3.4.2.* L'omologia di Khovanov  $H^{i,j}$  si dice *sottile* se esiste un intero  $t$  tale che l'omologia è disposta su due righe, date da

$$j = 2i - t \pm 1.$$

Obbiettivo di questa sezione è mostrare che l'omologia di Khovanov algebrica per nodi alternanti è sottile, dove  $t = \sigma(K)$  è un numero che definiremo più avanti.

Ogni diagramma di link in questa sezione sarà considerato su  $S^2$ . Inoltre useremo una definizione semplificata di  $\mathcal{V}$ , che sarà il modulo libero generato da  $v_-$  e  $v_+$  su  $\mathbb{Q}$  anzichè su  $\mathbb{Z}$ .

È opportuno introdurre alcuni strumenti molto utili per nodi alternanti come una colorazione.

*Definizione 3.4.3.* Un diagramma di link è detto *nonsplit* se, visto come grafo 4-valente (dimenticando le informazioni su quale arco passa sotto e quale arco passa sotto), è connesso. Altrimenti è detto *split*.

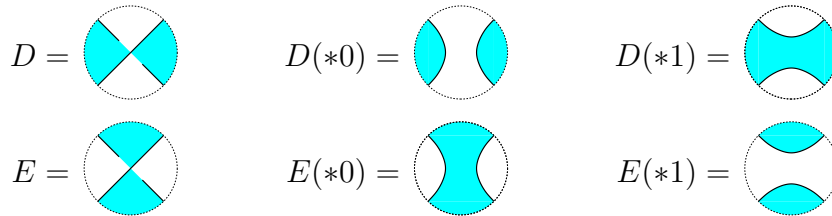
*Definizione 3.4.4.* Una colorazione di un diagramma di link è una colorazione con due colori (bianco e nero) a scacchiera del diagramma, cioè ogni lato divide una regione bianca da una regione nera. Ogni incrocio è colorato nel modo  $A$  o  $B$  secondo questa convenzione:



In caso di due incroci consecutivi alternanti, i modi di colorare ciascuno dei due incroci devono coincidere, come è evidente dal seguente esempio:



Quindi in una colorazione di diagramma di link alternante nonsplit, deve essere presente solo la colorazione  $A$  o solo la colorazione  $B$ . Inoltre, è chiaro che una colorazione di un diagramma di link induce una colorazione di una qualsiasi risoluzione.



*Definizione 3.4.5.* La *colorazione standard* di un diagramma di link non-split alternante è data dalla colorazione in cui è presente solo la colorazione  $A$ . Quando non indicato, la *colorazione* è la colorazione standard. Un link alternante *colorato* è un link alternante con la colorazione (standard).

Chiamiamo *risoluzione totale 0* di un diagramma  $D$  la risoluzione in cui ogni incrocio è risolto nel modo 0, e indichiamola con  $D(\bar{0})$ . Analogamente, la risoluzione  $D(\bar{1})$  è la risoluzione in cui ogni incrocio è risolto nel modo 1. È importante osservare che nella risoluzione totale 0 di un link alternante colorato tutte le tracce degli incroci si trovano dentro in regioni bianche (come è chiaro dal diagramma colorato di  $D(*0)$  sopra).

*Definizione 3.4.6.* Un diagramma di link è *nonridotto* se esiste una curva chiusa che interseca il diagramma solo una volta in un incrocio (o, equivalentemente, una risoluzione di un incrocio genera un diagramma di link split). Altrimenti è detto *ridotto*.

È chiaro che un diagramma nonridotto può essere semplificato tramite mosse di Reidemeister. È sufficiente capovolgere una delle due aree del link separate da una curva chiusa data dalla definizione di *nonridotto*. Il link ottenuto ha gli stessi incroci di prima, meno l'incrocio sulla curva chiusa; inoltre se il link era alternante, lo è anche dopo.

**Lemma 3.4.7.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit ridotto colorato. Allora valgono i seguenti fatti.*

- *Le componenti di  $D(\bar{0})$  bordano dischi neri.*

- Ad ogni disco nero in  $D(\bar{0})$  corrisponde una regione nera di  $D$ .
- Ogni coppia di dischi neri in  $D(\bar{0})$  è connessa da tracce di incroci di  $D$  e dischi neri di  $D(\bar{0})$ .
- Nessuna traccia di incrocio di  $D$  connette un disco nero in  $D(\bar{0})$  a se stesso.

*Dimostrazione.* Ogni incrocio separa regioni nere adiacenti (mentre unisce regioni bianche adiacenti). Quindi tutte le regioni nere si separano in  $D(\bar{0})$  (mentre molte regioni bianche si uniscono). Questo dimostra il secondo punto. Ricordiamo che nella risoluzione totale  $0$  non ci sono tracce di incroci in regioni nere. Quindi abbiamo i seguenti fatti.

- Se abbiamo una regione nera che non è un disco, allora possiamo trovare un arco dentro tale regione nera che separa due componenti di  $D(\bar{0})$ , cioè  $D$  è split. Questo dimostra il primo punto.
- Se abbiamo una coppia di dischi neri che non può essere collegata da dischi e tracce di incroci, allora  $D$  è split. Questo dimostra il terzo punto.
- Se abbiamo una traccia di incrocio che collega un disco nero a se stesso, allora la 1-risoluzione di tale incrocio genera un diagramma split, cioè  $D$  è nonridotto. Questo dimostra il quarto punto.

□

*Definizione 3.4.8.* Sia  $D$  un diagramma di link. Definisco  $n(D)$  il numero di incroci di  $D$ , definisco  $o(D) = |\bar{0}|$  il numero di componenti della risoluzione  $D(\bar{0})$ . Definisco  $o^1(D) = o(D^1)$ .

Sia  $D$  come nel lemma 3.4.7. Le risoluzioni  $D^1(\bar{0})$  e  $D(\bar{1})$  sono uguali; grazie a questo (e al lemma 3.4.7), è facile osservare che  $o(D)$  è il numero di regioni nere in  $D$ ,  $o^1(D)$  è il numero di regioni bianche in  $D$ . I diagrammi di link sono su  $S^2$  che ha caratteristica 2, quindi il numero totale di regioni (bianche e nere) è uguale al numero di vertici, più due. Abbiamo ottenuto

$$o(D) + o^1(D) = n(D) + 2.$$

L'obiettivo è dimostrare la finezza dell'omologia per induzione sul numero di incroci di un diagramma di link. Quanto detto finora è sufficiente a dimostrare la tesi del capitolo nel caso zero, ma non è sufficiente a portare avanti l'induzione. Abbiamo bisogno di un lemma aggiuntivo.

**Lemma 3.4.9.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit ridotto colorato, con  $n(D) > 0$ . Allora una delle seguenti proposizioni è vera.*

(A): *C'è almeno una coppia di dischi neri in  $D(\bar{0})$  connessa da esattamente un incrocio.*

(B): *C'è almeno una coppia di dischi neri in  $D^l(\bar{0})$  connessa da esattamente un incrocio.*

(C):  *$D$  è somma connessa di un nodo  $D'$  e del link di Hopf  $\bigotimes$ , con  $D'$  un link alternante nonsplit colorato, come nel disegno*



*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che vale  $o(D) + o^l(D) = n(D) + 2$ . Quindi deve valere una delle seguenti affermazioni.

(A'):  $o(D) > \frac{1}{2}n(D) + 1$ .

(B'):  $o^l(D) > \frac{1}{2}n(D) + 1$ .

(C'):  $o(D) = o^l(D) = \frac{1}{2}n(D) + 1$ .

Mostriamo (A')  $\Rightarrow$  (A). Ci sono  $o(D)$  dischi neri, connessi tra loro da almeno  $o(D) - 1$  incroci distinti. Supponiamo che tutte le coppie tra loro connesse siano connesse da almeno due incroci distinti; in tal caso abbiamo almeno  $2(o(D) - 1)$  incroci distinti. Tuttavia la proposizione (A') afferma che il numero di incroci  $n(D) < 2(o(D) - 1)$ . Quindi c'è almeno una coppia connessa da un incrocio.

Mostriamo (B')  $\Rightarrow$  (B). Tale verifica è analoga alla precedente (con  $D^l$  in luogo di  $D$ ).

Mostriamo (C') e non (A) e non (B)  $\Rightarrow$  (C). La proposizione (A) è falsa, quindi ci sono esattamente  $o(D) - 1$  coppie di dischi neri, collegate da esattamente due incroci. Associamo al diagramma  $D(\bar{0})$  un grafo. I vertici sono gli  $o(D)$  dischi neri, i lati sono le  $o(D) - 1$  coppie di incroci che collegano due dischi neri. Considerando il numero di vertici e lati, il grafo deve essere un albero. Dato un lato che collega due vertici  $a$  e  $b$ , mettiamo una freccia dalla parte di  $a$  se i due incroci tra  $a$  e  $b$  sono adiacenti sul bordo del disco  $a$ .

*Esempio 3.4.10.* Consideriamo il diagramma colorato in figura Figura 3.1. In

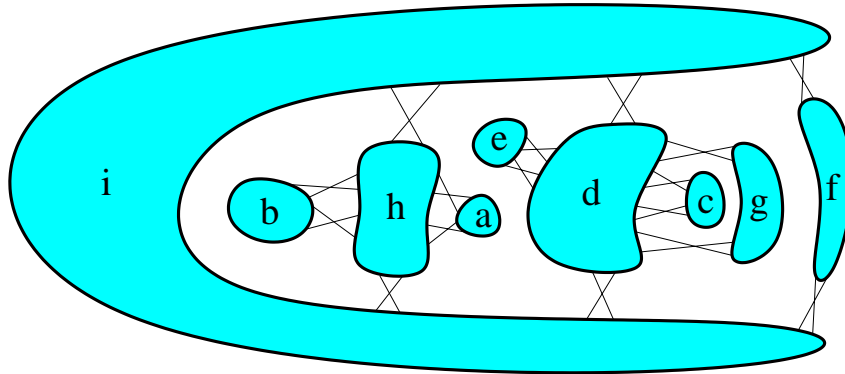
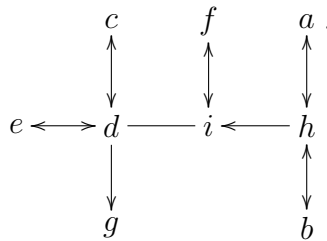




Figura 3.1: Esempio diagramma di link per la dimostrazione 3.4.10

questo caso, abbiamo il grafo associato



Definisco un vertice del grafo come pendente se è collegato ad un solo altro vertice, definisco un lato del grafo come pendente se come estremo ha un vertice pendente. Se  $a$  è un vertice pendente, il lato uscente da  $a$  deve chiaramente avere una freccia verso  $a$ . Se  $d$  non è vertice pendente, sapendo che le coppie di incroci relative a due dischi collegati a  $d$  non possono alternarsi, devono esserci almeno due lati con frecce verso  $d$ .

Se  $o(D) = 2$ , abbiamo solo due vertici collegati da un lato, con freccia in entrambe le direzioni. Se  $o(D) > 2$ , sia  $p$  il numero di vertici pendenti. Non ci possono essere lati che collegano vertici pendenti. Per ogni vertice  $a$  pendente, abbiamo una freccia verso  $a$ . Per ogni vertice  $d$  non pendente, per quanto detto prima, abbiamo almeno 2 frecce verso  $d$ . Quindi otteniamo in totale almeno  $p + 2(o(D) - p) = o(D) - p$  frecce. Il numero di lati è  $o(D) - 1$ , quindi il numero di lati non pendenti è  $o(D) - p - 1$ . Quindi almeno un lato pendente deve avere freccia in entrambe le direzioni.

Il diagramma di  $D$  deve essere quindi del tipo , originato da un link del tipo . Questo implica (C). □

Per semplificare le notazioni, usiamo il complesso intermedio di Khovanov  $(\tilde{C}(D))^r = (\overline{C}(M'_D))^r \{-r\}$  visto nell'osservazione 3.1.7 e chiamiamo  $\tilde{H}^{i,j}(D)$  l'omologia di  $\mathcal{F}\tilde{C}(D)$ .

**Lemma 3.4.11.** *Il supporto di  $\tilde{H}(D)$  è incluso nel supporto di  $\tilde{H}(D(*0))$  e  $\tilde{H}(D*1)[-1]-1$ .  $\square$*

Diamo solo un'idea della dimostrazione del lemma. Possiamo partire dalla nota decomposizione  $\tilde{H}(D) = \tilde{H}(D(*0)) \oplus \tilde{H}(D(*1))[-1]\{-1\}$  usata nelle dimostrazioni di invarianza algebrica e mostrare che tale splitting è indotto da una sequenza esatta. Per i dettagli, si veda [ESL-A].

**Lemma 3.4.12.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit ridotto. Allora  $\tilde{H}^{i,j}(D)$  ha supporto nel rettangolo  $0 \leq i \leq c(D)$  e  $-o(D) \leq j \leq 2n(D) - o(D) + 2$ .*

*Inoltre nei due angoli opposti del rettangolo l'omologia è  $\mathbb{Q}$ , cioè  $\tilde{H}^{0,-o(D)}(D) = \mathbb{Q}$  e  $\tilde{H}^{n(D),2n(D)-o(D)+2}(D) = \mathbb{Q}$ .*

*Dimostrazione.* I complessi di catene  $\tilde{C}^{i,j}$  sono per definizione zero fuori da  $0 \leq i \leq c(D)$ , quindi lo stesso vale per gli  $\tilde{H}^{i,j}$ . Se  $i = 0$ , abbiamo che i complessi di catene  $\tilde{C}^{i,j}(D)$  sono per definizione zero fuori da  $-o(D) \leq j$ . Cambiando una risoluzione di un incrocio, il numero di componenti della risoluzione aumenta o diminuisce di uno. Ricordando lo shift dei gradi quantici, se  $i = 1$ , abbiamo che i complessi di catene  $\tilde{C}^{i,j}(D)$  sono per definizione zero fuori da  $-o(D) \leq j$  o  $-o(D) + 2 \leq j$ ; in ogni caso, abbiamo  $-o(D) \leq j$ . Tale ragionamento si applica anche ai gradi omologici successivi, mostrando che, per ogni  $i$ , abbiamo  $-o(D) \leq j$ .

Lo stesso ragionamento possiamo applicarlo al contrario (o usando  $D^\dagger$  in luogo di  $D$ ), partendo dal caso  $i = n$ , in cui i complessi di catene  $\tilde{C}^{i,j}(D)$  sono per definizione zero fuori da  $j \leq o^\dagger(D) + n(D)$ .

Dalle definizioni, se  $(i, j) = (0, -o(D))$  allora  $\tilde{C}^{i,j}(D) = \mathbb{Q}$ .

Dal lemma 3.4.7 abbiamo che una qualsiasi risoluzione di un incrocio in  $D(\bar{0})$  ha una componente in meno rispetto alla risoluzione  $D(\bar{0})$ . Questo implica che, se  $i = 1$ , allora  $\tilde{C}^{i,j}(D)$  ha supporto in  $-o(D) + 2 \leq j$ . Possiamo applicare l'induzione vista prima e ottenere che, se  $i \geq 1$ , allora  $\tilde{C}^{i,j}(D)$  ha supporto in  $-o(D) + 2 \leq j$ .

Riassumendo, abbiamo ottenuto

$$\tilde{C}^{i,j}(D) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{if } i = 0, j = -o(D) \\ 0 & \text{if } i \geq 0, j = -o(D). \end{cases}$$



Lo stesso ragionamento possiamo applicarlo al contrario (o usando  $D^!$  in luogo di  $D$ ), ottenendo

$$\tilde{C}^{i,j}(D) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{if } i = n(D), j = n(D) + o^!(D) \\ 0 & \text{if } i \geq n(D), j = n(D) + o^!(D). \end{cases}$$

□

Abbiamo quindi il seguente lemma.

**Lemma 3.4.13.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit ridotto che verifica le ipotesi della proposizione (A) del lemma 3.4.9. Siano  $D(*0)$  e  $D(*1)$  i diagrammi delle due risoluzioni dell'incrocio dato dalla proposizione (A).*

*Allora  $\tilde{H}^{i,j}(D(*0))$  ha supporto in  $0 \leq i \leq n(D(*0))$  e  $-o(D(*0)) \leq j \leq 2n(D * 0) - o(D(*0)) + 2$ ; nei due angoli, l'omologia è  $\mathbb{Q}$ . Inoltre, lo stesso vale per  $D(*1)$ .*

*Dimostrazione.* Considerando il diagramma  $D$ , ogni risoluzione di altezza 1 ha una componente in meno rispetto alla risoluzione di altezza 0. Tale proprietà, grazie al lemma 3.4.7, è chiaramente valida anche per il digramma di link  $D(*0)$ . Il diagramma  $D$  verifica le ipotesi della proposizione (A) del lemma 3.4.9; ciò assicura che tale proprietà è valida anche per il diagramma  $D(*1)$ . □

**Lemma 3.4.14.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit ridotto che verifica le ipotesi della proposizione (A) del lemma 3.4.9. Siano  $D(*0)$  e  $D(*1)$  i diagrammi delle due risoluzioni dell'incrocio dato dalla proposizione (A).*

*Allora  $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono diagrammi alternanti nonsplit.*

*Dimostrazione.* È chiaro che  $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono diagrammi alternanti e che  $D(*1)$  è nonsplit.

Supponiamo che  $D(*0)$  è split. Il diagramma  $D$  non è split, quindi l'incrocio rimosso era l'unico incroico che collegava le due componenti di  $D(*0)$ . Ciò implica che  $D$  è nonridotto, contro l'ipotesi. Questo dimostra che  $D(*0)$  è nonsplit. □

*Definizione 3.4.15.* Sia  $D$  un diagramma di link orientato; coloriamo le regioni di  $D$  a scacchiera. Chiamiamo le regioni bianche  $B_0, B_1, \dots, B_n$ . Supponiamo che ogni incrocio colleghi due regioni bianche distinte.

Associamo ad ogni incrocio  $a$  un numero d'incidenza  $\eta(a)$  in questo modo.



Date  $B$  e  $C$  due regioni, chiamiamo  $B \sqcap C$  l'insieme dei vertici collegati a entrambe le regioni. Definiamo la matrice simmetrica  $g_{ij}$  di dimensione  $(n+1) \times (n+1)$  come

$$g_{ij} = \begin{cases} - \sum_{a \in B_i \cap B_j} \eta(a) & \text{if } i \neq j \\ - \sum_{k \neq i} g_{ik} & \text{if } i = j. \end{cases}$$

La *matrice di Goeritz*  $G(D)$  associata a  $D$  è la matrice  $n \times n$  ottenuta eliminando la prima riga e la prima colonna di  $g_{ij}$ ,

$$G(D) = (g_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}.$$

*Definizione 3.4.16.* Definiamo la segnatura  $\sigma(D)$  di un diagramma di link  $D$  come

$$\sigma(D) = \text{sign}G(D) - \mu(D),$$

dove  $\mu(D)$  è la somma di tutti i numeri di incidenza sugli incroci di tipo II, secondo questa convenzione:



**Lemma 3.4.17.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit orientato ridotto. Allora vale*

$$\sigma(D) = o(D) - n_-(D) - 1.$$

*Dimostrazione.* Coloriamo  $D$  nel modo opposto alla colorazione standard. In questo modo, abbiamo che tutti i numeri di incidenza  $\eta$  sono 1, tutti gli incroci negativi sono di tipo II, tutti gli incroci positivi sono di tipo I.

Quindi abbiamo  $g_{ij} \leq 0$  per  $i \neq j$  e  $g_{ij} \geq 0$  per  $i = j$ ; inoltre abbiamo  $\mu(D) = n_-(D)$ .

Usando i fatti precedenti, un semplice conto mostra che la matrice  $G(D)$  è definita positiva. Vale inoltre

$$\sigma(L) = \text{sign}G(D) - \mu(D) = \text{rk}G(D) - n_-(D) = o(D) - 1 - n_-(D). \quad \square$$

Prendiamo in considerazione l'omologia di Khovanov  $\tilde{H}^{i,j}(D)$  e supponiamo fissato un intero  $s(D)$ . Chiamiamo diagonale superiore la riga  $j = 2i - s(D) - 1$ , chiamiamo diagonale inferiore la riga  $j = 2i - s(D) + 1$ . Chiamiamo cima la posizione  $(i, j)$  sulla diagonale superiore con il minimo  $i$  per cui  $\tilde{H}^{i,j}(D) \neq 0$ , chiamiamo fondo la posizione  $(i, j)$  sulla diagonale inferiore con il massimo  $i$  per cui  $\tilde{H}^{i,j}(D) \neq 0$ .

**Teorema 3.4.18.** *Sia  $D$  un diagramma di link alternante nonsplit. Allora l'omologia di Khovanov  $\tilde{H}^{i,j}(D)$  ha supporto in due righe  $j = 2i - s \pm 1$  per un dato  $s$ .*

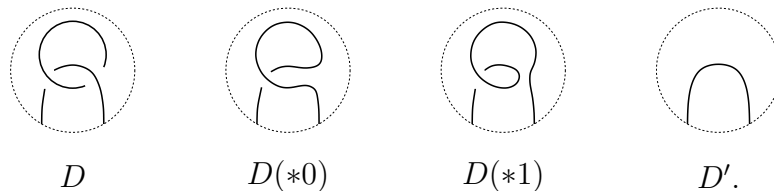
*Dimostrazione.* Procediamo per induzione. Nel caso di diagramma di link con zero incroci ed una componente, la tesi è vera.

Prendiamo un diagramma di link  $D$  alternante nonsplit con  $n$  incroci e supponiamo il teorema vero per i diagrammi con meno di  $n$  incroci. Se  $D$  non è ridotto, allora  $D$  è equivalente ad un link  $D'$  con meno di  $n$  incroci che verifica il teorema; le omologie  $\tilde{D}$  e  $\tilde{D}'$  sono uguali a meno di un opportuno shift quantico e omologico, quindi il teorema è vero anche per  $D'$ . Quindi d'ora in avanti possiamo supporre che  $D$  sia ridotto.

Grazie a 3.3.5, dimostrare il teorema per  $D$  equivale a dimostrarlo per  $D'$ . Quindi, nel caso il diagramma  $D$  abbia la proprietà (B) del lemma 3.4.9, possiamo ricondurci al caso in cui abbia la proprietà (A).

Supponiamo che il diagramma  $D$  abbia la proprietà (A) del lemma 3.4.9. I due diagrammi  $D(*0)$  e  $D(*1)$  hanno entrambi  $n - 1$  incroci, quindi verificano il teorema. In particolare,  $\tilde{H}(D(*0))$  ha supporto in due righe con cima in  $(0, -o(D(*0)))$ ;  $\tilde{H}(D(*1))$  ha supporto in due righe con cima in  $(0, -o(D(*1)))$ . Dall'identità  $o(D) = o(D(*0)) = o(D(*1)) + 1$  otteniamo che le diagonali superiori e inferiori di  $\tilde{H}(D(*0))$  e di  $\tilde{H}(D(*1))[-1]-1$  aderiscono. Grazie al lemma 3.4.11 e al lemma 3.4.12, l'omologia  $\tilde{H}(D)$  ha supporto in due righe, con cima in  $(0, -o(D))$  e fondo in  $(n, 2n - o(D) + 2)$ .

Supponiamo che il diagramma  $D$  abbia la proprietà (C) del lemma 3.4.9. I diagrammi che useremo sono i seguenti.



Data l'orientazione di  $D$ , è ben definita anche l'orientazione di  $D(*0)$ ,  $D(*1)$ ,  $D'$ . Dalle dimostrazioni algebriche di invarianza di riccioli, sappiamo quali

shift quantici e omologici intercorrono tra  $H(D(*0))$  e  $H(D')$ , e tra  $H(D(*1))$  e  $H(D')$ . Ricordiamo che dalle definizioni abbiamo  $H(T) = \tilde{H}[n_-(T)]\{2n_-(D) - n_+(D)\}$ . Osserviamo che l'incrocio visibile nel diagramma  $D(*0)$  è positivo, mentre l'incrocio nel diagramma  $D(*1)$  è negativo. Grazie a ciò, abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{H}(D(*0)) &= \tilde{H}(D')[0]\{1\} \\ \tilde{H}(D(*1))[-1]\{-1\} &= \tilde{H}(D')[-2]\{-3\}.\end{aligned}$$

I diagrammi  $D(*0)$  e  $D(*1)$  hanno  $n - 1$  incroci, quindi verificano il teorema. In particolare,  $\tilde{H}(D(*0))$  ha supporto in due righe, con cima in  $(0, -o(D') - 1)$ ;  $\tilde{H}(D(*1))[-1]\{-1\}$  ha supporto in due righe, con cima in  $(2, -o(D') + 3)$ . Le diagonali superiori e inferiori aderiscono.

Come visto prima, grazie al lemma 3.4.11 e al lemma 3.4.12, l'omologia  $\tilde{H}(D)$  ha supporto in due righe, con cima in  $(0, -o(D))$  e fondo in  $(n, 2n - o(D) + 2)$ .  $\square$

Abbiamo ottenuto che  $H(D) = \tilde{H}(D)[x(D)]\{2n_-(D) - n_+(D)\}$  ha supporto in due diagonali e ha cima in  $(-n_-(D), -2n_-(D) + n_+(D) - o(D))$ . Da questo, otteniamo che il numero  $s(L)$  nella definizione di diagonale superiore e inferiore è  $s(L) = o(D) - n_+(D) - 1$ . Grazie al lemma 3.4.17, otteniamo  $s(L) = \sigma(L)$ . Alla luce della definizione 3.4.2, abbiamo così dimostrato che l'omologia di Khovanov di nodi alternanti nonsplit è *sottile*.

# Bibliografia

- [DBN-F] **Dror Bar-Natan**, *Fast Khovanov Homology computations*, arXiv:math/0606318v1
- [DBN-H] **Dror Bar-Natan**, *Khovanov Homology for Knots and Links with up to 11 Crossings*, <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers/KHTables/>
- [DBN-K] **Dror Bar-Natan**, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*, *Geom. Topol.* 9(2005) 1443-1499, arXiv:math/0410495v2
- [DBN-O] **Dror Bar-Natan**, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, *Algebraic and Geometric Topology* 2 (2002) 337-370, arXiv:math/0201043v3
- [ESL-A] **Eun Soo Lee**, *An endomorphism of the Khovanov invariant*, To appear in *Adv. Math.*, arXiv:math/0210213v3
- [ESL-T] **Eun Soo Lee**, *The support of the Khovanov's invariants for alternating knots*, arXiv:math/0201105v1
- [JR-K] **Jacob Rasmussen**, *Khovanov Homology and the slice genus*, arXiv:math/0402131v1
- [LHK-N] **Louis H. Kauffman**, *New invariants in the Theory of Knots*, <http://www.math.uic.edu/~kauffman/Bracket.pdf>
- [MM-A] **Marco Mackaay, Paul Turner, Pedro Vaz**, *A remark on Rasmussen's invariant of knots*, arXiv:math/0509692v1
- [MA-N] **Marta Asaeda, Mikhail Khovanov**, *Notes on Link Homology*, arXiv:0804.1279v1
- [MK-A] **Mikhail Khovanov**, *A categorification of the Jones polynomial*, *Duke Math. J.* 101 (2000), no. 3, 359-426, arXiv:math/9908171v2

- [OV-R] **Oleg Viro**, *Remarks on definition of Khovanov Homology*,  
arXiv:math/0202199v1
- [PT-F] **Paul Turner**, *Five Lectures on Khovanov Homology*,  
arXiv:math/0606464v1
- [SV-K] **Shea Vick**, *Khovanov homology and the slice genus*,  
<http://www.math.columbia.edu/~shea/notes/>