Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "E. Fermi"

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2006/2007

Tesi di Laurea Specialistica

L'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni

Candidato

Enrico Peruzzo

Relatori

Chiarissimo Prof. Giuseppe Da Prato

Chiarissimo Prof. Franco Flandoli

Indice

Introduzione

È noto che nell'osservazione del moto incomprimibile di un fluido Newtoniano si riscontra, all'aumentare del numero di Reynolds, una transizione da un regime di moto laminare, in cui la velocità del fluido in un dato punto dello spazio è indipendente dal tempo o varia nel tempo in modo regolare, ad un regime di moto turbolento, in cui la velocità varia in modo del tutto irregolare. Precisamente, si è visto che in un fluido in moto turbolento misure di velocità effettuate varie volte nella stessa posizione e sotto condizioni di moto apparentemente identiche forniscono valori diversi, le cui variazioni sono irregolari e rendono imprevedibili le proprietà dettagliate del moto.

Per esempio, possiamo considerare il caso semplice del moto di un fluido intorno ad un cilindro. Per valori molto bassi del numero di Reynolds ($R \sim 10^{-2}$) il flusso che si stabilisce intorno al cilindro è stazionario, cioè la velocità in ogni punto è indipendente dal tempo, e la componente orizzontale della velocità è sempre rivolta verso destra (figura 1). Per valori

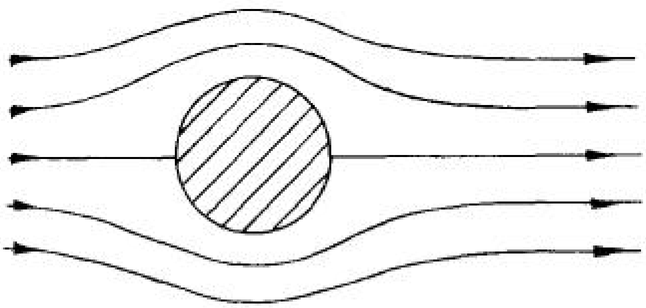

Figura 1: $R \sim 10^{-2}$

del numero di Reynolds compresi all'incirca fra 10 e 40 il moto è ancora stazionario, ma si osservano dietro al cilindro due vortici (figura 2) che si ingrandiscono all'aumentare di R. Quando $R > 40$ i vortici si staccano dalla parte posteriore del cilindro, alternativamente da un lato e dall'altro, e vengono trasportati dal flusso formando una scia (figura 3). A questo punto il moto non è più stazionario: l'invarianza per traslazioni temporali continue viene sostituita da un'invarianza per traslazioni temporali discrete, dato che il moto dei vortici è periodico. Questa situazione si osserva fino a valori del numero di Reynolds dell'ordine di 10^2.

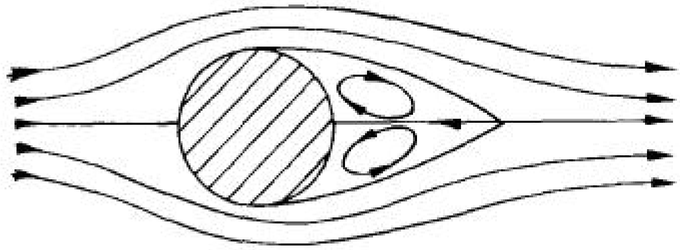

Figura 2: $R \sim 20$

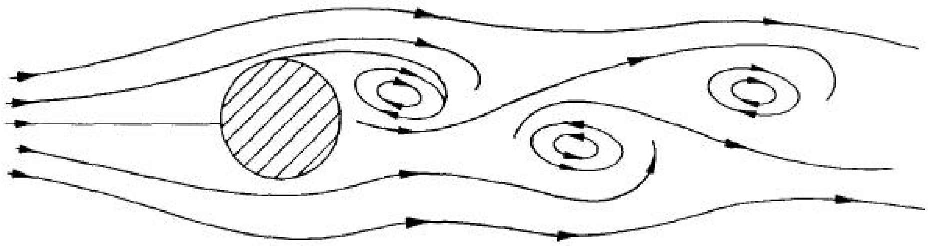

Figura 3: $R \sim 100$

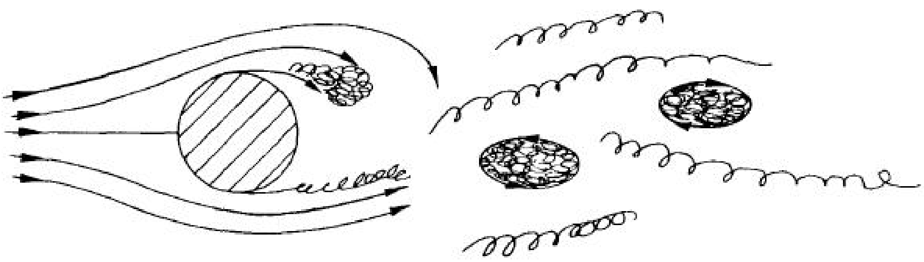

Figura 4: $R \sim 10^3$

Se il numero di Reynolds aumenta ancora, viene superato ad un certo punto un valore di soglia al di sopra del quale la dipendenza temporale del moto diventa irregolare. Tuttavia, finché R rimane compreso all'incirca fra 10^3 e 10^4, è ancora possibile osservare il moto alternato dei vortici sovrapposto al flusso turbolento (figura 4). Infine, quando il numero di Reynolds raggiunge e supera valori dell'ordine di $10^5 - 10^6$, è evidente che il moto del fluido nella scia dietro al cilindro è del tutto irregolare (figura 5).

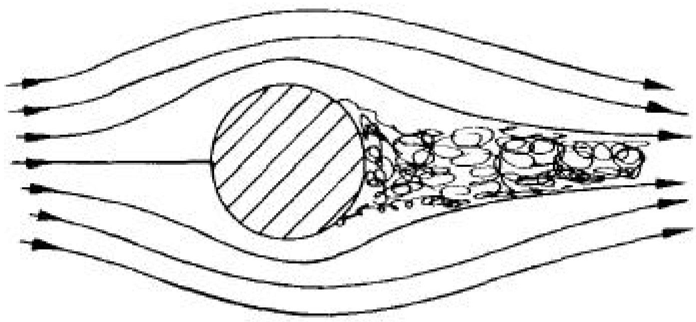

Figura 5: $R \sim 10^6$

Se poi si considera un certo numero di sistemi di questo tipo, tutti apparentemente nelle stesse condizioni di moto, e per ciascuno di essi si misura la velocità in un dato punto dello spazio ad un dato istante, si ottengono valori diversi: ciò è dovuto al fatto che, per valori del numero di Reynolds sufficientemente alti, l'equazione di Navier-Stokes manifesta un comportamento caotico, cioè piccole variazioni delle condizioni iniziali vengono amplificate in modo imprevedibile dalla soluzione. Nonostante questo, risulta che alcune proprietà statistiche del moto sono invece prevedibili: questo suggerisce di provare a fornire una descrizione probabilistica del fenomeno, con lo scopo di trovare eventualmente qualche legge di evoluzione per le quantità medie.

Il modo più semplice dal punto di vista matematico per ottenere una descrizione probabilistica del moto di un fluido consiste nell'aggiungere all'equazione di Navier-Stokes un termine forzante di tipo stocastico; la scelta più conveniente è quella di un rumore bianco temporale, dato che in questo modo si rende disponibile per lo studio del problema uno strumento noto, il calcolo di Itô. Per questo l'idea di utilizzare l'equazione di Navier-Stokes stocastica per studiare il fenomeno della turbolenza è emersa già a partire dagli anni '60 (si vedano ad esempio [14] e [17]) ed è stata successivamente sviluppata, anche in relazione alla teoria di Kolmogorov del 1941 (si veda [15]). Tale approccio è quindi dettato essenzialmente da ragioni di convenienza matematica: la scelta di aggiungere un termine di rumore all'equazione e di scegliere, fra i vari tipi di rumore, proprio un rumore bianco rappresenta la strada più rapida per ottenere dei risultati quantitativi da confrontare con i dati sperimentali. Seguendo strade diverse diventa più complicato raggiungere questo scopo.

In questo lavoro è stato quindi svolto uno studio delle proprietà di base dell'equazione di Navier-Stokes stocastica nel caso bidimensionale, per il quale la teoria matematica è maggiormente consolidata. Sempre nella ricer-

ca di un contesto matematicamente semplice in cui affrontare il problema, si è scelto anche di considerare campi di velocità periodici e a media nulla, dato che l'utilizzo di sviluppi in serie di Fourier si rivela spesso di grande aiuto.
Nel primo capitolo vengono introdotti gli spazi di funzioni coinvolti nella formulazione astratta del problema e vengono dimostrate alcune loro proprietà: gli spazi in questione sono essenzialmente spazi di Sobolev di funzioni periodiche a valori vettoriali e le proprietà considerate riguardano in particolare l'approssimazione con funzioni di classe C^∞. Tali proprietà sono utili per capire come agiscono sui campi di velocità e pressione i vari operatori differenziali presenti nell'equazione di Navier-Stokes. Vengono quindi definiti gli operatori A (che rappresenta il Laplaciano con condizioni al bordo periodiche) e b (che rappresenta il termine non lineare) e, dopo l'esposizione di alcune proprietà fondamentali del moto Browniano, il problema viene formulato come un'equazione differenziale stocastica ambientata in uno spazio di Hilbert.
Nel secondo capitolo vengono affrontati alcuni problemi più semplici, che differiscono dall'equazione di Navier-Stokes stocastica per l'assenza di uno o più termini; la soluzione di tali problemi mette in luce diversi aspetti utili per sviluppare il punto centrale del capitolo, cioè il teorema di esistenza ed unicità della soluzione.
Grazie all'esistenza ed unicità della soluzione, si può dimostrare che l'evoluzione temporale del campo di velocità è Markoviana: per questo nel terzo capitolo ci si concentra sul semigruppo di transizione associato al problema, che è appunto un semigruppo di Markov, e si dimostra l'esistenza di una misura invariante. L'esistenza della misura invariante rappresenta il primo passo per ottenere dei risultati quantitativi: in particolare, nell'appendice A si dimostra che vale l'uguaglianza

$$\int_{\mathcal{H}_0} \left[\frac{1}{t} \int_0^t \nu P_s \left(\| \cdot \|_1^2 \right) (x) ds \right] \mu(dx) = \nu \int_{\mathcal{H}_0} \|x\|_1^2 \mu(dx) \equiv \epsilon, \tag{1}$$

dove ν è la viscosità cinematica, P_s è il semigruppo di transizione per l'equazione di Navier-Stokes stocastica, x rappresenta il campo di velocità iniziale, μ è la misura invariante ed ϵ una costante positiva. Tale uguaglianza implica che l'energia media dissipata per unità di tempo tende ad un limite finito ϵ al tendere a zero della viscosità (addirittura, è indipendente dalla viscosità). Si vede quindi che, nel contesto matematico in cui abbiamo inserito il problema della turbolenza, un'identità come la 1, che rappresenta una delle ipotesi basilari della teoria di Kolmogorov del 1941, diventa un vero e proprio teorema.

C'è una notevole differenza tra il modello del moto periodico ed una qualsiasi situazione reale di moto di un fluido, rappresentata dal fatto che in questo secondo caso sono sempre presenti delle pareti solide: poiché in presenza di una parete solida è necessario imporre, per un fluido viscoso, la condizione al bordo di non scorrimento (la velocità deve annullarsi in corrispondenza della parete), lungo il bordo viene creata della vorticità. Tuttavia, nel caso dell'equazione di Navier-Stokes stocastica questa grande differenza scompare grazie alla presenza del termine di rumore. Consideriamo infatti il modello dell'equazione di Navier-Stokes stocastica per moti periodici:

$$\frac{dU(t)}{dt} + U(t) \cdot \nabla U(t) = \frac{1}{R}\nabla^2 U(t) - \nabla p(t) + \frac{dW}{dt}, \tag{2}$$

dove $U(t)$ e $p(t)$ rappresentano i campi di velocità e pressione adimensionali all'istante t, R è il numero di Reynolds e $\frac{dW}{dt}$ è un rumore bianco; se calcoliamo il rotore di entrambi i membri della 2 otteniamo l'equazione della dinamica della vorticità:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} + U(t) \cdot \nabla \omega(t) = \omega(t) \cdot \nabla U(t) + \frac{1}{R}\nabla^2 \omega(t) + \frac{d\widetilde{W}}{dt}, \tag{3}$$

dove $\omega(t) = \nabla \times U(t)$ rappresenta il campo di vorticità adimensionale all'istante t e $\frac{d\widetilde{W}}{dt}$ è un altro rumore bianco. Dall'equazione 3 è evidente che il rumore esterno rappresenta un termine di sorgente per la vorticità: esso, pertanto, assolve il duplice ruolo di permettere una descrizione probabilistica del moto e di simulare un meccanismo, quello della creazione di vorticità, presente nel problema reale ma non introdotto esplicitamente nel modello matematico. Tutto ciò suggerisce che non ci debbano essere differenze sostanziali fra i risultati dimostrabili per l'equazione di Navier-Stokes stocastica con condizioni al bordo periodiche e con condizioni al bordo di Dirichlet: in effetti, tutto ciò che viene dimostrato in questo lavoro vale anche per il problema su un dominio limitato con condizioni al bordo di Dirichlet (si veda [8]). In definitiva, sebbene il modello considerato in questo lavoro non sia realistico, ha il pregio di essere matematicamente trattabile ed è inoltre ragionevole aspettarsi che esso conduca a risultati simili a quelli che si otterrebbero con modelli più realistici. Queste sono le principali ragioni per cui si è scelto di studiare l'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni come primo approccio al problema della turbolenza.

Capitolo 1

Posizione del problema e sua ambientazione funzionale

1.1 Equazioni del moto di un fluido

Supponiamo che un mezzo fluido riempia una certa regione dello spazio. Per descriverne il moto adottiamo il punto di vista Euleriano e quindi caratterizziamo il fluido mediante le funzioni $\rho(t, \mathbf{x})$, $p(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $T(t, \mathbf{x})$, $s(t, \mathbf{x})$, che esprimono rispettivamente la densità, la pressione, la velocità, la temperatura e l'entropia per unità di massa della particella fluida che all'istante t sta passando per il punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Indichiamo con

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

il prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$, con $|\cdot|$ la corrispondente norma e con

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$$

l'operatore gradiente in $\mathbb{R}^d$. Nel caso in cui il moto abbia particolari proprietà di simmetria può essere che le componenti non nulle della velocità siano soltanto (u_1, u_2) e che tutte le grandezze dipendano soltanto da (x_1, x_2): in questo caso il moto è bidimensionale e si può assumere $d = 2$, negli altri casi si ha $d = 3$.

Le equazioni che determinano il comportamento del fluido sono quelle che si ricavano dai tre bilanci fondamentali della meccanica dei continui, cioè il bilancio della massa, quello della quantità di moto e quello dell'energia; esse vanno poi completate da alcune equazioni costitutive che caratterizzano il particolare fluido in esame, oltre che dalle opportune condizioni iniziali ed al bordo (si veda ad esempio [3], oppure [16]). Le equazioni di bilancio sono le seguenti (l'operatore $\frac{D}{Dt}$ indica la derivata materiale $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$):

- l'equazione di bilancio della massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0;$$

- l'equazione di bilancio della quantità di moto

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

dove f_i sono le componenti della risultante per unità di massa delle forze di volume agenti sul fluido e τ_{ij} è la parte simmetrica e a traccia nulla del tensore degli sforzi;

- l'equazione di bilancio dell'entropia

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{DE}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_p\frac{DT}{Dt} - \frac{\beta T}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \Phi + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{q},$$

dove c_p è il calore specifico a pressione costante, $\beta \equiv -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ è il coefficiente di espansione termica, Φ è la funzione di dissipazione (cioè l'energia interna per unità di massa dissipata nell'unità di tempo a causa delle tensioni viscose) e $\mathbf{q}$ è il vettore flusso di calore.

Le equazioni costitutive sono:

- l'equazione di stato del fluido

$$\rho = \rho(p, T);$$

- l'equazione per il tensore degli sforzi, valida nel caso di un fluido Newtoniano e Stokesiano[1]

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij},$$

dove μ è la viscosità;

- l'equazione per il flusso di calore (legge di Fourier)

$$\mathbf{q} = -k\nabla T,$$

dove k è la conducibilità termica.

[1]Un fluido si dice Newtoniano se il tensore degli sforzi dipende solo linearmente dal tensore "velocità di deformazione" $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, mentre si dice Stokesiano se la pressione termodinamica coincide con la pressione "meccanica", definita come $p_{mecc} \equiv -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\sigma_{ij})$ (σ_{ij} è il tensore degli sforzi).

La funzione di dissipazione Φ è data da

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{\rho}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2\rho}\tau_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \\
&= \frac{\mu}{2\rho}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right)\right]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui si abbia a che fare con un fluido incomprimibile omogeneo il sistema di equazioni si semplifica notevolmente. Infatti, la densità ρ è in questo caso costante ed uniforme e di conseguenza le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto si disaccoppiano dall'equazione di bilancio dell'entropia. Inoltre l'espressione per il tensore τ_{ij} si semplifica e, se supponiamo che la viscosità sia uniforme, otteniamo:

$$
\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \Longrightarrow \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \nabla^2 u_i.
$$

Pertanto, se siamo interessati solo alla distribuzione di pressione e velocità nel fluido, il sistema di equazioni da risolvere si riduce a:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

dove abbiamo introdotto la viscosità cinematica $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$; le equazioni costitutive sono $\rho = \mathit{cost}$ e l'equazione per il tensore τ_{ij}. In realtà l'equazione di bilancio della quantità di moto (che a questo punto non è altro che l'equazione di Navier-Stokes) si può ulteriormente semplificare nel caso in cui le forze di volume siano conservative e quindi la loro risultante per unità di massa $\mathbf{f}$ si possa esprimere come il gradiente di un potenziale indipendente dal tempo: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(\mathbf{x})\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. In tal caso, infatti, si può ridefinire la pressione in modo che essa renda conto anche dell'effetto delle forze di volume: basta porre

$$
P = p + \rho\varphi,
$$

poiché in questo modo si ottiene

$$
-\frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho}.
$$

Per comodità continuiamo ad indicare con p questa pressione "modificata" e riscriviamo il sistema 1.1 eliminando $\mathbf{f}$:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

È poi utile riscrivere le equazioni in forma adimensionale, per dissociare l'effetto di un reale cambiamento dei valori delle grandezze in gioco dall'effetto di un cambiamento delle unità di misura. Supponiamo allora che la specificazione delle condizioni iniziali ed al bordo coinvolga una lunghezza tipica L ed una velocità tipica U e definiamo delle nuove variabili adimensionali

$$\mathbf{u}' \equiv \frac{\mathbf{u}}{U}, \qquad \mathbf{x}' \equiv \frac{\mathbf{x}}{L}, \qquad t' \equiv \frac{tU}{L}, \qquad p' \equiv \frac{p}{\rho U^2}.$$

Con queste definizioni, le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto si riducono a

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{1}{R} \nabla'^2 \mathbf{u}', \\ \nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

dove con ∇' indichiamo il gradiente rispetto ad $\mathbf{x}'$ e con $R \equiv \frac{UL}{\nu}$ il numero di Reynolds. A questo punto le equazioni dipendono soltanto dal parametro adimensionale R: pertanto, se si modificano i valori di U, L e ν in modo da lasciare invariata la combinazione $\frac{UL}{\nu}$, rimane invariata anche la soluzione che si ottiene risolvendo le equazioni di bilancio in forma adimensionale e l'effetto è solo quello di un cambiamento delle unità di misura. D'ora in poi ometteremo per comodità gli apici, sottintendendo che consideriamo le grandezze come adimensionali e che facciamo riferimento alle equazioni del moto nella forma 1.3.

Una volta stabilita la forma delle equazioni del moto, bisogna associare ad esse un problema ai valori iniziali ed al bordo che sia ben posto. Nel seguito ci restringeremo a considerare il caso di dimensione $d = 2$, ed in questo caso è noto che il problema è ben posto (nel senso che la soluzione esiste ed è unica, si veda [19, § 3.2] oppure [18, capitolo 3, § 3]) quando vengano assegnate:

- delle condizioni al bordo sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ all'interno del quale si studia il problema:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) & \forall\, \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t > 0 \text{ se } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x}) & \forall\, t > 0 \text{ per } |\mathbf{x}| \to +\infty \text{ se } \Omega = \mathbb{R}^2; \end{cases} \tag{1.4}$$

- una condizione iniziale

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.5}$$

dove $\phi(t, \mathbf{x})$, $\psi(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ sono funzioni assegnate. Affinché la soluzione delle equazioni conservi il massimo grado di simmetria, sarebbe vantaggioso non avere alcun bordo e quindi studiare il problema in tutto $\mathbb{R}^2$. Tuttavia, l'illimitatezza del dominio conduce a delle complicazioni dal punto di vista matematico; si preferisce allora studiare il problema con delle condizioni al bordo periodiche:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x} + 2\pi \mathbf{e}_i) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,\ i = 1, 2 \tag{1.6}$$

dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

È conveniente a questo punto introdurre la media spaziale del campo di velocità

$$\mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \qquad \forall\, t \geq 0,\ \text{con } \mathcal{O} = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$$

e riscrivere il campo di velocità come somma della sua media e della fluttuazione rispetto alla media:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t) + \overline{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) \qquad \forall\, (t, \mathbf{x}) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2.$$

Per stabilire come evolva nel tempo $\mathbf{m}_{\mathbf{u}}$ integriamo su $\mathcal{O}$ entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale 1.3; se $\mathbf{u}$ è sufficientemente regolare, per esempio se $\mathbf{u} \in C^2(\mathcal{O})$ per ogni $t \in [0, +\infty)$, si può applicare la formula di Gauss-Green e quindi, indicando con $\boldsymbol{\nu}$ il versore normale a $\partial\mathcal{O}$ rivolto verso l'esterno di $\mathcal{O}$, si ottiene

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{u} \cdot \nabla u_j d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{O}} u_i u_j \nu_i dS - \int_{\mathcal{O}} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla^2 u_i d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{O}} \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u_i dS = 0,$$

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{O}} p \nu_i dS = 0$$

(si è usato il fatto che $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e che gli integrali su $\partial\mathcal{O}$ si annullano grazie alla periodicità delle condizioni al bordo). Inoltre, se $\mathbf{u} \in C^1([0, +\infty))$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} u_i d\mathbf{x},$$

per cui in definitiva si ottiene

$$\frac{d\mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t)}{dt} = 0 \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{1.7}$$

e di conseguenza

$$\mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{m}_{\mathbf{u}_0} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{1.8}$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale 1.3 si ottiene quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{m}_{\mathbf{u}_0} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}} = -\nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 \overline{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0. \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Una volta nota la quantità $\mathbf{m}_{\mathbf{u}_0}$, lo studio del problema 1.9 è molto simile a quello del problema 1.3 (le condizioni iniziali 1.5 ed al bordo 1.6 andranno poste sul campo di velocità $\overline{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$). Pertanto nel seguito ci limiteremo a considerare campi di velocità a media nulla ($\mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$) ed eventualmente alla fine cercheremo di capire quali differenze si abbiano nel caso in cui la media non sia nulla (si veda l'appendice B).

1.2 Spazi di funzioni legati all'equazione di Navier-Stokes

La strategia che adottiamo per affrontare il problema 1.3 consiste nel riscrivere i vari operatori differenziali che compaiono nell'equazione come operatori agenti su opportuni spazi di funzioni. Una volta riformulato il problema in questo modo, si ha il vantaggio di poter usare gli strumenti dell'analisi funzionale per studiarne la risolubilità. Introduciamo quindi, per prima cosa, gli spazi di funzioni che emergono dallo studio dell'equazione di Navier-Stokes (seguiamo un approccio simile a quello di [19]).

1.2.1 Spazi di funzioni a valori reali

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ ed indichiamo con $L^2(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili e a quadrato integrabile. Com'è noto, questo spazio, dotato del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall\, f, g \in L^2(\Omega),$$

è uno spazio di Hilbert. Più in generale, per $p \geq 1$ indichiamo con $L^p(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < +\infty.$$

La norma in $L^p(\Omega)$ è definita, $\forall\, p \geq 1$, come

$$|f|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right]^{1/p} \qquad \forall\, f \in L^p(\Omega)$$

e $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach rispetto a questa norma $\forall\, p \geq 1$.

Definizione 1.1 (Derivata debole) *Per ogni multi-indice*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d, \qquad |\alpha| \equiv \alpha_1 + \cdots + \alpha_d,$$

diciamo che la funzione localmente integrabile $v : \Omega \to \mathbb{R}$ è la α-esima derivata in senso debole della funzione localmente integrabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se si ha

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) D^\alpha \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

per ogni funzione test $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e a supporto compatto.

Indichiamo allora con $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, lo spazio di Sobolev delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integrabili tali che per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ la derivata

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

esiste in senso debole ed appartiene a $L^p(\Omega)$. È noto che $W^{m,p}(\Omega)$, dotato della norma

$$|f|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right]^{1/p} \qquad \forall\, f \in W^{m,p}(\Omega),$$

è uno spazio di Banach $\forall\, p \in [1, +\infty)$. Nel caso $p = +\infty$ lo spazio $W^{m,\infty}(\Omega)$ è ancora uno spazio di Banach, rispetto alla norma

$$|f|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha f(\mathbf{x})|.$$

Indichiamo poi con $H^m(\Omega)$ lo spazio $W^{m,2}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ (adottiamo la convenzione $D^0 f = f$, per cui in particolare si ha $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$). $H^m(\Omega)$, dotato del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle \quad \forall\, f, g \in H^m(\Omega),$$

è uno spazio di Hilbert per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Indichiamo poi con $L^2_\#$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ che sono localmente in L^2 (cioè sono in $L^2(\Omega)$ per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ la cui chiusura sia un compatto) e sono periodiche di periodo 2π rispetto a ciascuna coordinata:

$$f(\mathbf{x} + 2\pi \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, \dots, d,$$

dove $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^d$. Inoltre, se $\mathcal{O} = (0, 2\pi)^d$, $L^2_\#$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{O}} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall\, f, g \in L^2_\#.$$

Analogamente, per $p \geq 1$, indichiamo con $L^p_\#$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ che sono localmente in L^p e sono periodiche di periodo 2π rispetto a ciascuna coordinata. La norma in $L^p_\#$ è definita $\forall\, p \geq 1$ come

$$|f|_{L^p_\#} = \left[\int_{\mathcal{O}} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right]^{1/p} \qquad \forall\, f \in L^p_\#$$

e $L^p_\#$ è uno spazio di Banach rispetto a questa norma per ogni $p \geq 1$. Infine, per $m \in \mathbb{N}$ indichiamo con $H^m_\#$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ che sono localmente in H^m e tali che, per ogni multi-indice α, con $|\alpha| \leq m-1$, la derivata $D^\alpha f$ è periodica di periodo 2π rispetto a ciascuna coordinata; il prodotto scalare in $H^m_\#$ è definito per ogni $m \in \mathbb{N}$ come

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle \quad \forall\, f, g \in H^m_\#$$

e $H^m_\#$ è uno spazio di Hilbert rispetto a questo prodotto scalare per ogni $m \in \mathbb{N}$ (in particolare, $H^0_\# = L^2_\#$); indichiamo con $|\cdot|_m$ la corrispondente norma.

È utile dare una caratterizzazione degli spazi $H^m_\#$ in termini della serie di Fourier.

Proposizione 1.2 *Sia f una funzione di $L^2_\#$ e sia $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ la sua serie di Fourier, con $c^*_\mathbf{k} = c_{-\mathbf{k}}\ \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Allora*

$$f \in H^m_\# \Longleftrightarrow \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m} |c_\mathbf{k}|^2 < +\infty$$

ed inoltre le due norme su $H^m_\#$

$$|f|_m = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\mathcal{O} |D^\alpha f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right]^{1/2} \quad e \quad |f|'_m = \left[\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \left(1 + |\mathbf{k}|^{2m}\right) |c_\mathbf{k}|^2 \right]^{1/2}$$

sono equivalenti.

Per dimostrare questa proposizione avremo bisogno del seguente risultato relativo agli spazi di Sobolev (vedi [1, Teorema 3.16]).

Lemma 1.3 *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$, lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$ coincide con il completamento dello spazio delle funzioni di classe $C^m(\Omega)$ rispetto alla norma $|\cdot|_m$.*

Dimostrazione della proposizione 1.2. Indichiamo con $C^m_\#$ lo spazio delle funzioni di classe $C^m(\mathbb{R}^d)$ periodiche di periodo 2π rispetto a ciascuna coordinata insieme alle loro derivate di ordine minore o uguale ad m.

Step 1. Facciamo vedere prima di tutto che

$$f \in C^m_\# \Rightarrow \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m} |c_\mathbf{k}|^2 < +\infty. \tag{1.10}$$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Longrightarrow \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_j^m} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (ik_j)^m \, c_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_j^m} \right|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} k_j^{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2; \tag{1.11}$$

inoltre, siccome $f \in C_{\#}^m \subset H_{\#}^m$ e di conseguenza $|f|_m < +\infty$, si ha in particolare

$$\int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_j^m} \right|^2 d\mathbf{x} < +\infty \qquad \forall\, j = 1, \ldots, d$$

e quindi

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} k_j^{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2 < +\infty \qquad \forall\, j = 1, \ldots, d. \tag{1.12}$$

Osserviamo ora che

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(k_1^2 + \ldots + k_d^2\right)^m |c_{\mathbf{k}}|^2.$$

Utilizzando la formula

$$\left(k_1^2 + \ldots + k_d^2\right)^m = \sum_{r_1+\ldots+r_d=m} \frac{m!}{r_1! \ldots r_d!} k_1^{2r_1} \ldots k_d^{2r_d}$$

e la disuguaglianza di Young si può dimostrare che esiste una costante $C_1(m) > 0$ dipendente da m tale che

$$\left(k_1^2 + \ldots + k_d^2\right)^m \leq C_1(m) \left(k_1^{2m} + \ldots + k_d^{2m}\right) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2 \leq C_1(m) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(k_1^{2m} + \ldots + k_d^{2m}\right) |c_{\mathbf{k}}|^2, \tag{1.13}$$

da cui riprendendo l'equazione 1.12 e sommando su j da 1 a d si ottiene proprio la 1.10.

Step 2. Facciamo vedere ora che $\forall\, m \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_2(m) > 0$ tale che, se $f \in C_{\#}^m$, allora

$$|f|_m^2 \leq C_2(m) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2.$$

Consideriamo infatti un multi-indice α tale che $|\alpha| = j \leq m$; allora si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}} |D^\alpha f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} \right|^2 d\mathbf{x} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} k_1^{2\alpha_1} \ldots k_d^{2\alpha_d} |c_{\mathbf{k}}|^2 \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} k_1^{2\alpha_1} |c_{\mathbf{k}}|^{\frac{2\alpha_1}{j}} \ldots k_d^{2\alpha_1} |c_{\mathbf{k}}|^{\frac{2\alpha_d}{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(k_1^{2j} |c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{\alpha_1}{j}} \ldots \left(k_d^{2j} |c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{\alpha_d}{j}}
\end{aligned}$$

dato che $\frac{\alpha_1}{j}+\ldots+\frac{\alpha_d}{j}=1$. Pertanto, applicando la disuguaglianza di Hölder discreta a questa sommatoria, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} |D^\alpha f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} k_1^{2j}|c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{\alpha_1}{j}} \cdots \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} k_d^{2j}|c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{\alpha_d}{j}} \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2j}|c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{\alpha_1}{j}} \cdots \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2j}|c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{\alpha_d}{j}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2j}|c_{\mathbf{k}}|^2 \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m}|c_{\mathbf{k}}|^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Di conseguenza, se $C_2(m)$ è il numero di multi-indici α con $|\alpha| \leq m$, sommando su tutti questi multi-indici si ottiene proprio

$$|f|_m^2 \leq C_2(m) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m}|c_{\mathbf{k}}|^2 < +\infty.$$

Step 3. Grazie allo step precedente, se $f \in C^m_\#$, allora si ha anche

$$|f|_m^2 \leq C_2(m) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(1+|\mathbf{k}|^{2m}\right)|c_{\mathbf{k}}|^2 = C_2(m)|f|_m'^2;$$

pertanto, se riusciremo a far vedere che esiste una costante $C_3(m) > 0$ dipendente da m tale che $\forall\, m \in \mathbb{N}$ si abbia

$$|f|_m'^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(1+|\mathbf{k}|^{2m}\right)|c_{\mathbf{k}}|^2 \leq C_3(m)|f|_m^2 \qquad \forall\, f \in C^m_\#,$$

allora avremo dimostrato l'equivalenza delle due norme sul sottospazio $C^m_\#$. Grazie all'uguaglianza 1.11 ed alla disuguaglianza 1.13 dello step 1 si ha

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m}|c_{\mathbf{k}}|^2 \leq C_1(m)\sum_{j=1}^d \int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_j^m}\right|^2 d\mathbf{x},$$
$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{k}}|^2 = \int_{\mathcal{O}} |f(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$$

e quindi

$$\begin{aligned}|f|_m'^2 &\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(1+|\mathbf{k}|^{2m}\right)|c_{\mathbf{k}}|^2 \\ &\leq \int_{\mathcal{O}} |f(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} + C(m)\sum_{j=1}^d \int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_j^m}\right|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \max\{1, C_1(m)\}|f|_m^2 \equiv C_3(m)|f|_m^2,\end{aligned}$$

il che implica l'equivalenza delle due norme su $C^m_\#$.

Step 4. Supponiamo ora $f \in H^m_\#$; allora, grazie al lemma 1.3, esiste una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^m_\#$ tale che

$$|f - f_n|_m \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty.$$

Inoltre, siccome le due norme $|\cdot|_m$ e $|\cdot|'_m$ sono equivalenti su $C^m_\#$ grazie allo step precedente, il completamento di $C^m_\#$ rispetto alla norma $|\cdot|_m$ coincide con quello rispetto alla norma $|\cdot|'_m$. Di conseguenza si ha anche

$$|f - f_n|'_m \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty,$$

da cui segue subito la tesi. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per n sufficientemente grande si ha $\forall\, f \in H^m_\#$

$$|f|_m \geq |f_n|_m - |f - f_n|_m \geq |f_n|_m - \varepsilon \geq K_1\, |f_n|'_m - \varepsilon \geq K_1\, |f|'_m - 2\varepsilon,$$

$$|f|_m \leq |f - f_n|_m + |f_n|_m \leq \varepsilon + |f_n|_m \leq \varepsilon + K_2\, |f_n|'_m \leq 2\varepsilon + K_2\, |f|'_m\,,$$

dove K_1, K_2 sono opportune costanti positive; per l'arbitrarietà di ε si ha

$$K_1\, |f|'_m \leq |f|_m \leq K_2\, |f|'_m \quad \forall\, f \in H^m_\#,$$

il che conclude la dimostrazione. ∎

In definitiva possiamo dare una definizione equivalente degli spazi $H^m_\#$ nel seguente modo:

$$H^m_\# = \left\{ f \in L^2_\# : f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},\ c^*_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}},\ \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2 < +\infty \right\}.$$

Osserviamo poi che la definizione appena data ha senso, in realtà, non solo per $m \in \mathbb{N}$, ma più in generale per un qualsiasi esponente reale positivo. Quindi definiamo $\forall\, \sigma \geq 0$

$$H^\sigma_\# = \left\{ f \in L^2_\# : f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},\ c^*_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}},\ \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |c_{\mathbf{k}}|^2 < +\infty \right\}, \tag{1.14}$$

per cui in particolare si ha $H^0_\# = L^2_\#$. Questi spazi, dotati delle norme

$$|f|_\sigma \equiv \left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(1 + |\mathbf{k}|^{2\sigma}\right) |c_{\mathbf{k}}|^2 \right]^{1/2} \qquad \forall\, f \in H^\sigma_\#, \tag{1.15}$$

sono degli spazi di Hilbert. È utile introdurre anche i sottospazi delle funzioni a media nulla

$$\dot{H}^\sigma_\# = \left\{ f \in H^\sigma_\# : c_{\mathbf{0}} = 0 \right\}.$$

Proposizione 1.4 *Lo spazio $\dot{H}^\sigma_\#$ è un sottospazio chiuso di $H^\sigma_\#$ $\forall\,\sigma \geq 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima di tutto il caso $\sigma = 0$. Sia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $\dot{H}^0_\#$ convergente in $H^0_\#$ ad una funzione φ. Allora si avrà

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k},n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ n\in\mathbb{N},\ \text{con } c_{\mathbf{0},n} = 0\,\forall\,n\in\mathbb{N}$$

ed inoltre $\varphi \in H^0_\#$, quindi si può scrivere

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d;$$

di conseguenza si ha

$$|\varphi - \varphi_n|_0^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{k}} - c_{\mathbf{k},n}|^2 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Poiché $c_{\mathbf{0},n} = 0\,\forall\,n\in\mathbb{N}$, se fosse $c_{\mathbf{0}} \neq 0$ si avrebbe

$$|\varphi - \varphi_n|_0^2 \geq |c_{\mathbf{0}}|^2 \quad \forall\,n\in\mathbb{N},$$

il che è assurdo. Dobbiamo allora concludere che anche $\varphi \in \dot{H}^0_\#$. Nel caso $\sigma > 0$ basta osservare che $|\varphi-\varphi_n|_\sigma^2 \geq |\varphi-\varphi_n|_0^2\ \forall\,\sigma > 0$ e si ha la conclusione esattamente come nel caso $\sigma = 0$. $\Box$

Osserviamo che, negli spazi $\dot{H}^\sigma_\#$, la norma

$$|f|''_\sigma \equiv \left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2\sigma}|c_{\mathbf{k}}|^2\right]^{1/2} \qquad \forall\,f\in\dot{H}^\sigma_\# \tag{1.16}$$

è equivalente alla norma $|\cdot|_\sigma$ definita dalla 1.15. Infatti, se $f \in \dot{H}^\sigma_\#$, con $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ per ogni $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ e $c_{\mathbf{0}} = 0$, si ha ovviamente

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2\sigma}|c_{\mathbf{k}}|^2 < \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(1+|\mathbf{k}|^{2\sigma}\right)|c_{\mathbf{k}}|^2;$$

inoltre, poiché $c_{\mathbf{0}} = 0$, si ha anche

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \left(1+|\mathbf{k}|^{2\sigma}\right)|c_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d,|\mathbf{k}|\geq 1} \left(1+|\mathbf{k}|^{2\sigma}\right)|c_{\mathbf{k}}|^2 \leq 2\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2\sigma}|c_{\mathbf{k}}|^2$$

e questo implica l'equivalenza delle due norme:

$$|f|''_\sigma \leq |f|_\sigma \leq \sqrt{2}|f|''_\sigma \qquad \forall\,f\in\dot{H}^\sigma_\#,\ \sigma\geq 0. \tag{1.17}$$

Quando considereremo spazi $\dot{H}^\sigma_\#$, useremo per comodità la notazione $|\cdot|_\sigma$, al posto della $|\cdot|''_\sigma$, per indicare la norma definita dalla 1.16.

1.2.2 Spazi di funzioni a valori in $\mathbb{R}^2$

Poiché nello studio dell'equazione di Navier-Stokes abbiamo a che fare con campi di velocità, quindi con funzioni a valori in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, introduciamo per ogni $p \geq 1$ anche gli spazi

$$\mathbb{L}^p_\# \equiv L^p_\# \otimes \mathbb{R}^d.$$

Limitiamoci a studiare il caso $d = 2$, dato che in seguito ci concentreremo sull'equazione di Navier-Stokes in due dimensioni. La norma in $\mathbb{L}^p_\#$ è definita per ogni $p \geq 1$ come

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^p_\#} = \left[\int_{\mathcal{O}} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right]^{1/p} = \left[\int_{\mathcal{O}} \left(f_1^2(\mathbf{x}) + f_2^2(\mathbf{x})\right)^{p/2} d\mathbf{x}\right]^{1/p} \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{L}^p_\#$$

e $\mathbb{L}^p_\#$ è uno spazio di Banach rispetto a questa norma per ogni $p \geq 1$. Introduciamo poi, per ogni $\sigma \geq 0$, anche gli spazi

$$\mathbb{H}^\sigma_\# \equiv H^\sigma_\# \otimes \mathbb{R}^2.$$

Vediamo come si definiscono i prodotti scalari e le norme in questi spazi. Nel caso in cui $\sigma = m \in \mathbb{N}$ il prodotto scalare è

$$\begin{aligned}
\langle\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle\rangle_m &= \langle f_1, g_1 \rangle_m + \langle f_2, g_2 \rangle_m && (1.18)\\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \left[\langle D^\alpha f_1, D^\alpha g_1 \rangle + \langle D^\alpha f_2, D^\alpha g_2 \rangle\right] && (1.19)\\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{O}} \left[D^\alpha f_1(\mathbf{x}) D^\alpha g_1(\mathbf{x}) + D^\alpha f_2(\mathbf{x}) D^\alpha g_2(\mathbf{x})\right] d\mathbf{x} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{O}} D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot D^\alpha \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall\, \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{H}^m_\#; && (1.20)
\end{aligned}$$

$\mathbb{H}^m_\#$ è uno spazio di Hilbert rispetto a questo prodotto scalare per ogni $m \in \mathbb{N}$ (in particolare, $\mathbb{H}^0_\# = \mathbb{L}^2_\#$); indichiamo con $\|\cdot\|_m$ la corrispondente norma. È utile poi dare una caratterizzazione di questi spazi mediante la serie di Fourier. Un sistema ortonormale e completo di elementi di $\mathbb{H}^0_\#$ è dato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} e_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right\}_{\mathbf{h},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \equiv \{\mathbf{f}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{h},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$$

dove

$$e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Di conseguenza per ogni $m \in \mathbb{N}$ ogni funzione $\mathbf{f} \in \mathbb{H}^m_\#$, essendo in particolare un elemento di $\mathbb{H}^0_\#$, si può espandere in serie di Fourier come

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left[c_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + d_{\mathbf{k}} \mathbf{g}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\right] \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.21}$$

Inoltre, grazie al risultato della proposizione 1.2 si ha

$$\mathbb{H}^m_{\#} = \Bigg\{ \mathbf{f} \in \mathbb{H}^0_{\#} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left[c_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + d_{\mathbf{k}} \mathbf{g}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right],$$

$$c^*_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}},\, d^*_{\mathbf{k}} = d_{-\mathbf{k}},\, \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^{2m} \left(|c_{\mathbf{k}}|^2 + |d_{\mathbf{k}}|^2 \right) < +\infty \Bigg\}$$

e le due norme

$$\|\mathbf{f}\|_m = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathcal{O}} |D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right]^{1/2}$$

$$\|\mathbf{f}\|'_m = \left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + |\mathbf{k}|^{2m}\right) \left(|c_{\mathbf{k}}|^2 + |d_{\mathbf{k}}|^2 \right) \right]^{1/2}$$

sono equivalenti. Quest'ultimo risultato è dovuto al fatto che, grazie alla proposizione 1.2, esistono delle costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che $\forall\, \mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathbb{H}^m_{\#}$

$$C_1 |f_1|^2_m \leq |f_1|'^2_m \leq C_2 |f_1|^2_m$$
$$C_1 |f_2|^2_m \leq |f_2|'^2_m \leq C_2 |f_2|^2_m$$

e di conseguenza

$$C_1 \left[|f_1|^2_m + |f_2|^2_m \right] \leq |f_1|'^2_m + |f_2|'^2_m \leq C_2 \left[|f_1|^2_m + |f_2|^2_m \right] \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{H}^m_{\#},$$

cioè proprio

$$C_1 \|\mathbf{f}\|^2_m \leq \|\mathbf{f}\|'^2_m \leq C_2 \|\mathbf{f}\|^2_m \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{H}^m_{\#}.$$

Per quanto riguarda poi il caso generale in cui $\sigma \geq 0$, si ha

$$\mathbb{H}^\sigma_{\#} = \Bigg\{ \mathbf{f} \in \mathbb{H}^0_{\#} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left[c_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + d_{\mathbf{k}} \mathbf{g}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right], \tag{1.22}$$

$$c^*_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}},\, d^*_{\mathbf{k}} = d_{-\mathbf{k}},\, \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^{2\sigma} \left(|c_{\mathbf{k}}|^2 + |d_{\mathbf{k}}|^2 \right) < +\infty \Bigg\}$$

e la norma in questi spazi è

$$\|\mathbf{f}\|_\sigma = \left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + |\mathbf{k}|^{2\sigma}\right) \left(|c_{\mathbf{k}}|^2 + |d_{\mathbf{k}}|^2 \right) \right]^{1/2} \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{H}^\sigma_{\#}. \tag{1.23}$$

Con queste definizioni, gli spazi $\mathbb{H}^\sigma_{\#}$ sono spazi di Hilbert.

Come nel caso delle funzioni a valori reali, per ogni $\sigma \geq 0$ indichiamo con $\dot{\mathbb{H}}^\sigma_\#$ il sottospazio chiuso di $\mathbb{H}^\sigma_\#$ formato dalle funzioni a media nulla, cioè per le quali $c_\mathbf{0} = d_\mathbf{0} = 0$. Definiamo poi la norma

$$\|\mathbf{f}\|''_\sigma \equiv \left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^{2\sigma} \left(|c_\mathbf{k}|^2 + |d_\mathbf{k}|^2 \right) \right]^{1/2} \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \dot{\mathbb{H}}^\sigma_\#,\ \sigma \geq 0; \tag{1.24}$$

procedendo esattamente come nel caso delle funzioni a valori reali, si può dimostrare che per ogni $\sigma \geq 0$ questa norma è equivalente alla norma $\|\cdot\|_\sigma$ definita dalla 1.23. Quando considereremo spazi $\dot{\mathbb{H}}^\sigma_\#$, useremo per comodità la notazione $\|\cdot\|_\sigma$, al posto della $\|\cdot\|''_\sigma$, per indicare la norma definita dalla 1.24.

Osserviamo poi che i campi di velocità con cui abbiamo a che fare nell'equazione di Navier-Stokes sono solenoidali, quindi sarà utile considerare spazi di funzioni che abbiano questa proprietà. Introduciamo allora il sottospazio di $\mathbb{H}^0_\#$ definito come

$$\mathit{span}\left\{ \mathbf{v}_\mathbf{k} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

dove

$$\mathbf{v}_\mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} e_\mathbf{0}(\mathbf{x}) \\ e_\mathbf{0}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_\mathbf{k}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{|\mathbf{k}|} e_\mathbf{k}(\mathbf{x}) \\ \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} e_\mathbf{k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.25}$$

Osserviamo che questo sottospazio è chiuso ed è costituito da funzioni a divergenza nulla, infatti si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \frac{i}{|\mathbf{k}|} e_\mathbf{k}(-k_1 k_2 + k_1 k_2) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

In definitiva, gli spazi che avranno un ruolo rilevante nello studio dell'equazione di Navier-Stokes sono, per $\sigma \geq 0$, gli spazi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\sigma &\equiv \left\{ \mathbf{f} \in \dot{\mathbb{H}}^\sigma_\# : \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \dot{\mathbb{H}}^\sigma_\# \cap \mathit{span}\left\{ \mathbf{v}_\mathbf{k} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \right\} \end{aligned}$$

che, in base a quanto detto finora, sono sottospazi chiusi di $\mathbb{H}^\sigma_\#$. Poiché gli spazi $\mathcal{H}_\sigma$ sono costituiti da funzioni a media nulla, l'insieme $\{\mathbf{v}_\mathbf{k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}_\sigma$ per ogni $\sigma \geq 0$ e quindi si ha

$$\mathcal{H}_\sigma = \mathit{span}\left\{ \mathbf{v}_\mathbf{k} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2,\ |\mathbf{k}| \geq 1 \right\} \qquad \forall\, \sigma \geq 0. \tag{1.26}$$

Una qualsiasi funzione $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_0$ si può allora espandere in serie di Fourier rispetto a questa base:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} f_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.27}$$

dove

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{k}} &= \langle\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle\rangle_0 = -\frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \langle f_1, e_{\mathbf{k}} \rangle + \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \langle f_2, e_{\mathbf{k}} \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi|\mathbf{k}|} \int_{\mathcal{O}} [-k_2 f_1(\mathbf{x}) + k_1 f_2(\mathbf{x})] \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1;
\end{aligned}
$$

un'espansione analoga si può scrivere anche per funzioni di $\mathcal{H}_\sigma$, con $\sigma > 0$. Una funzione $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_\sigma$ si può naturalmente espandere in serie anche come nell'equazione 1.21, ed in tal caso si avrà $c_{\mathbf{k}} = -\frac{k_2}{|\mathbf{k}|} f_{\mathbf{k}}$ e $d_{\mathbf{k}} = \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} f_{\mathbf{k}}$. Pertanto la norma negli spazi $\mathcal{H}_\sigma$ si riduce a

$$
\|\mathbf{f}\|_\sigma^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}| \geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |f_{\mathbf{k}}|^2 \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathcal{H}_\sigma. \tag{1.28}
$$

Indichiamo il prodotto scalare e la norma in $\mathcal{H}_\sigma$ con lo stesso simbolo utilizzato per $\mathbb{H}^\sigma_\#$: questo non creerà confusione perché nello studio dell'equazione di Navier-Stokes considereremo sempre funzioni appartenenti a spazi $\mathcal{H}_\sigma$.

Osservazione 1.5 *Sebbene finora abbiamo considerato solo spazi $H^\sigma_\#$, $\mathbb{H}^\sigma_\#$ e $\mathcal{H}_\sigma$ con $\sigma \geq 0$, le definizioni 1.14, 1.22 e 1.26 hanno senso anche per $\sigma < 0$. In particolare sarà utile in seguito ricordare che, se si identificano gli spazi $H^0_\#$, $\mathbb{H}^0_\#$ e $\mathcal{H}_0$ con i rispettivi duali, allora $\forall\, \sigma > 0$ lo spazio $H^{-\sigma}_\#$ è il duale di $H^\sigma_\#$, lo spazio $\mathbb{H}^{-\sigma}_\#$ è il duale di $\mathbb{H}^\sigma_\#$ ed analogamente $\mathcal{H}_{-\sigma}$ è il duale di $\mathcal{H}_\sigma$.*

1.2.3 Alcune proprietà degli spazi H^σ e $\mathbb{H}^\sigma$

Enunciamo prima di tutto una proprietà di approssimazione per gli spazi di Sobolev, che si può dimostrare utilizzando i mollificatori (vedi l'osservazione 1.7 e [11, § 5.3]).

Teorema 1.6 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ e $f \in H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Allora esiste una famiglia $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ di funzioni tali che*

$$
f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)\ \forall\, \varepsilon > 0, \qquad f_\varepsilon \longrightarrow f \ \textit{per}\ \varepsilon \longrightarrow 0 \ \textit{localmente in}\ H^m(\Omega),
$$

cioè $f_\varepsilon \to f$ in $H^m(U)$ per ogni aperto $U \subset \Omega$ la cui chiusura è un compatto contenuto in Ω.

Osservazione 1.7 *Sia $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ a supporto contenuto in $[-1, 1]$, pari, non negativa, strettamente positiva in 0 e tale che $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(|\mathbf{x}|) d\mathbf{x} = 1$. Allora la famiglia di funzioni $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, con*

$$
\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\left|\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right|\right) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,
$$

si dice una famiglia di mollificatori e, data $f \in H^m(\Omega)$, una famiglia di funzioni che possiede le proprietà richieste nel teorema 1.6 è $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, dove

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \eta_\varepsilon * f(\mathbf{x}) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon,\ \varepsilon > 0. \tag{1.29}$$

Vediamo ora che, utilizzando lo stesso approccio, si possono dimostrare proprietà di approssimazione simili per gli spazi $H^\sigma_\#$, con $\sigma \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $C^\infty_\#$ lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ periodiche di periodo 2π rispetto a ciascuna coordinata insieme alle loro derivate di qualsiasi ordine. Indichiamo poi con $\dot{C}^\infty_\#$ il sottospazio di $C^\infty_\#$ costituito dalle funzioni a media nulla.

Corollario 1.8 *Sia $f \in H^m_\#$, con $m \in \mathbb{N}$; allora esiste una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_\#$ tale che*

$$|f - f_n|_m \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.30}$$

Dimostrazione. Definiamo la famiglia di funzioni $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ come

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \eta_\varepsilon * f(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ &= \int_{\overline{B(0,\varepsilon)}} \eta_\varepsilon(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ \varepsilon > 0; \end{aligned}$$

le funzioni f_ε sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ed hanno la stessa periodicità di f, quindi sono in $C^\infty_\#$. Per definizione di $H^m_\#$, si ha che $f \in H^m(\Omega)$ per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, quindi applicando il risultato dell'osservazione 1.7 ad f su un aperto limitato Ω tale che per ε sufficientemente piccolo si abbia $\mathcal{O} \subset \Omega_\varepsilon$, si ottiene

$$f_\varepsilon \longrightarrow f \text{ in } H^m(\mathcal{O}) \text{ per } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

cioè

$$|f - f_\varepsilon|_m \longrightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Quindi esiste una successione decrescente $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi tale che $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\mathcal{O} \subset \Omega_{\varepsilon_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre si ha

$$|f - f_{\varepsilon_n}|_m \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty,$$

cioè la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv \{f_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa la relazione 1.30. $\square$

Corollario 1.9 *Sia $f \in H^\sigma_\#$, con $\sigma \in \mathbb{R}$; allora esiste una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_\#$ tale che*

$$|f - f_n|_\sigma \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.31}$$

Dimostrazione. Sia $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ la serie di Fourier di f e sia $f_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) = \eta_{\varepsilon_n} * f(\mathbf{x}) \,\forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ la successione cui si fa riferimento nel corollario 1.8; osserviamo che, grazie al fatto che la serie di Fourier di f converge ad f in $H^\sigma_\#$, si ha

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) &= \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\mathbf{y} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \\
&\equiv \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k},\varepsilon_n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Definiamo poi

$$g(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^\sigma c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d;$$

poiché $f \in H^\sigma_\#$, si ha

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |c_{\mathbf{k}}|^2 < +\infty,$$

quindi

$$f \in H^\sigma_\# \Longrightarrow g \in H^0_\#.$$

Pertanto, se si definisce $g_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) \equiv \eta_{\varepsilon_n} * g(\mathbf{x}) \;\forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, dal corollario 1.8 si ricava che

$$g_{\varepsilon_n} \longrightarrow g \text{ in } H^0_\# \text{ per } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.32}$$

D'altra parte, sempre grazie al fatto che la serie di Fourier di f converge ad f in $H^\sigma_\#$ (e quindi la serie di Fourier di g converge a g in $H^0_\#$), risulta

$$\begin{aligned}
g_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) &= \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^\sigma c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\mathbf{y} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^\sigma c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^\sigma c_{\mathbf{k},\varepsilon_n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Questo implica che la relazione 1.32 si può riscrivere nella forma

$$|g - g_{\varepsilon_n}|_0^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |c_{\mathbf{k}} - c_{\mathbf{k},\varepsilon_n}|^2 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty$$

e quindi in definitiva

$$|f - f_{\varepsilon_n}|_\sigma^2 = |g - g_{\varepsilon_n}|_0^2 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty, \tag{1.33}$$

cioè la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv \{f_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa la relazione 1.31. $\square$

Osservazione 1.10 *Consideriamo il caso in cui $f \in \dot{H}^\sigma_\#$, con $\sigma \in \mathbb{R}$. In tal caso si ha*

$$f_{\varepsilon_n} = \eta_{\varepsilon_n} * f \in \dot{C}^\infty_\# \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha, grazie al teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} f_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{O}} \left[\int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\overline{B(0,\varepsilon_n)}} \eta_{\varepsilon_n}(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathcal{O}} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto possiamo concludere che ogni funzione di $\dot{H}^\sigma_\#$, con $\sigma \in \mathbb{R}$, si può approssimare, nella norma di $\dot{H}^\sigma_\#$, con una successione di funzioni contenuta in $\dot{C}^\infty_\#$.

Possiamo estendere ulteriormente i risultati ottenuti considerando funzioni a valori vettoriali. Adottiamo la notazione $\mathbb{C}^\infty_\# = C^\infty_\# \otimes \mathbb{R}^2$ ed indichiamo con $\dot{\mathbb{C}}^\infty_\#$ il sottospazio chiuso di $\mathbb{C}^\infty_\#$ costituito dalle funzioni a media nulla. Definiamo poi l'insieme

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \mathbf{u} \in \dot{\mathbb{C}}^\infty_\# : \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \,\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Corollario 1.11 *Sia $\mathbf{f} \in \mathbb{H}^\sigma_\#$, con $\sigma \in \mathbb{R}$; allora esiste una successione di funzioni $\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^\infty_\#$ tale che*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\|_\sigma \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.34}$$

Dimostrazione. $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathbb{H}^\sigma_\# \implies f_1, f_2 \in H^\sigma_\#$, quindi grazie al corollario 1.9 esistono due successioni di funzioni $\{f_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{f_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di classe $C^\infty_\#$ tali che

$$|f_1 - f_{1,n}|_\sigma \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty,$$

$$|f_1 - f_{2,n}|_\sigma \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Grazie alla definizione 1.23 della norma in $\mathbb{H}^\sigma_\#$, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce $\mathbf{f}_n = (f_{1,n}, f_{2,n})$, si ottiene

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\|_\sigma^2 = |f_1 - f_{1,n}|_\sigma^2 + |f_2 - f_{2,n}|_\sigma^2 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 1.12 *In particolare, se definiamo f_{1,ε_n} e f_{2,ε_n} come indicato nel corollario 1.8, la successione di funzioni definita da $\mathbf{f}_{\varepsilon_n} = (f_{1,\varepsilon_n}, f_{2,\varepsilon_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ soddisfa la 1.34.*
Inoltre, se supponiamo che $\mathbf{f}$ sia un elemento di $\dot{\mathbb{H}}^\sigma_\#$, ragionando come nell'osservazione 1.10 possiamo far vedere che la successione $\{\mathbf{f}_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in $\dot{\mathbb{C}}^\infty_\#$ e converge a $\mathbf{f}$ rispetto alla norma di $\dot{\mathbb{H}}^\sigma_\#$.
Se poi supponiamo anche che $\mathbf{f}$ abbia divergenza nulla, cioè che sia un elemento di $\mathcal{H}_\sigma$, allora $\mathbf{f}$ si può espandere in serie di Fourier come

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} f_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \left[-\frac{k_2}{|\mathbf{k}|} f_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} f_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right] \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2;\end{aligned}$$

perciò risulta

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \left[-\frac{k_2}{|\mathbf{k}|} f_{\mathbf{k},\varepsilon_n} \begin{pmatrix} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} f_{\mathbf{k},\varepsilon_n} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} f_{\mathbf{k},\varepsilon_n}\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\, n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

cioè anche $\mathbf{f}_{\varepsilon_n}$ è a divergenza nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo significa che la successione $\{\mathbf{f}_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in $\mathcal{C}$ e converge a $\mathbf{f}$ rispetto alla norma di $\mathcal{H}_\sigma$.
In definitiva possiamo concludere che ogni funzione in $\mathcal{H}_\sigma$ si può approssimare, nella norma di $\mathcal{H}_\sigma$, con una successione di funzioni contenuta nell'insieme $\mathcal{C}$.

Il seguente risultato sarà utile nella formulazione astratta dell'equazione di Navier-Stokes.

Proposizione 1.13 *Sia*

$$G = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbb{H}^0_\# : \exists q \in H^1_\# : \mathbf{f} = \nabla q \right\}$$

e sia

$$F = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{H}^1_\# : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}.$$

Allora $G \subset F^\perp$, dove $F^\perp$ è il complemento ortogonale di F in $\mathbb{H}^0_\#$.

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che $\langle\langle \mathbf{u}, \nabla q \rangle\rangle_0 = 0 \;\forall \mathbf{u} \in F,\, q \in H^1_\#$. Siano allora $\mathbf{u} \in F, q \in H^1_\#$; grazie al corollario 1.8 ed all'osservazione 1.12, esistono due successioni di funzioni $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_\#$ e $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^\infty_\# \cap F$ tali che

$$|q - q_n|_1 \longrightarrow 0, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_1 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.35}$$

Inoltre si ha

$$\langle\langle \mathbf{u}, \nabla q \rangle\rangle_0 = \lim_{n \to +\infty} \langle\langle \mathbf{u}_n, \nabla q_n \rangle\rangle_0 \,, \tag{1.36}$$

infatti

$$\begin{aligned}
|\langle\langle \mathbf{u}, \nabla q \rangle\rangle_0 - \langle\langle \mathbf{u}_n, \nabla q_n \rangle\rangle_0| &= \left| \int_{\mathcal{O}} u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} u_{n,i} \frac{\partial q_n}{\partial x_i} d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathcal{O}} (u_i - u_{n,i}) \frac{\partial q}{\partial x_i} d\mathbf{x} \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathcal{O}} u_{n,i} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial q_n}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \int_{\mathcal{O}} |u_i - u_{n,i}| \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right| d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}} |u_{n,i}| \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial q_n}{\partial x_i} \right| d\mathbf{x} \\
&\leq |u_i - u_{n,i}|_0 \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right|_0 + |u_{n,i}|_0 \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial q_n}{\partial x_i} \right|_0 .
\end{aligned}$$

Grazie alle relazioni 1.35 ed al fatto che $\left| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right|_0$ e $|u_{n,i}|_0$ sono limitate, si ottiene proprio la 1.36. Osserviamo infine che, grazie alla regolarità di $\mathbf{u}_n$ e q_n, possiamo applicare $\forall\, n \in \mathbb{N}$ la formula di Gauss-Green; sfruttando poi la periodicità delle condizioni al bordo ed il fatto che $\mathbf{u}_n \in F$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene (indichiamo con $\boldsymbol{\nu}$ il versore normale a $\partial\mathcal{O}$)

$$\begin{aligned}
\langle\langle \mathbf{u}_n, \nabla q_n \rangle\rangle_0 &= \int_{\mathcal{O}} u_{n,i} \frac{\partial q_n}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u_{n,i}}{\partial x_i} q_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{O}} u_{n,i} q_n \nu_i dS \\
&= -\int_{\mathcal{O}} q_n \nabla \cdot \mathbf{u}_n d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{O}} q_n \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\nu} dS = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per la 1.36, si ottiene proprio $\langle\langle \mathbf{u}, \nabla q \rangle\rangle_0 = 0$. □

È utile anche sapere se, nel caso in cui una funzione appartenga ad un certo spazio di Sobolev H^m, essa appartenga automaticamente ad altri spazi. Ricordiamo allora il teorema di immersione per gli spazi di Sobolev (si veda, ad esempio, [11, § 5.6]).

Teorema 1.14 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana e sia $f \in H^m(\Omega)$, con $m \in \mathbb{N}$.*

1.

$$m < \frac{d}{2} \Longrightarrow f \in L^q(\Omega), \text{ con } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{m}{d};$$

inoltre l'immersione di $H^m(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ è continua, cioè vale la stima $|f|_{L^q(\Omega)} \leq C|f|_m$, dove $C > 0$ è una costante dipendente solo da m, d e dall'aperto Ω;

2.
$$m > \frac{d}{2} \Longrightarrow f \in C(\Omega)$$

e l'immersione di $H^m(\Omega)$ in $C(\Omega)$ è continua.

Nel caso in cui si considerino funzioni periodiche, il teorema di immersione si può riformulare nel seguente modo.

Teorema 1.15 *Sia $f \in H^\sigma_\#$, con $\sigma \geq 0$.*

1.
$$\sigma < \frac{d}{2} \Longrightarrow f \in L^q_\#, \text{ con } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{d}$$

e l'immersione di $H^\sigma_\#$ in $L^q_\#$ è continua;

2.
$$\sigma > \frac{d}{2} \Longrightarrow f \in C_\#$$

e l'immersione di $H^\sigma_\#$ in $C_\#$ è continua.

In particolare, nel caso $d = 2$, si ottiene

$$H^\sigma_\# \subset \begin{cases} L_\#^{\frac{2}{1-\sigma}} \text{ se } 0 < \sigma < 1, \\ C_\# \text{ se } \sigma > 1, \end{cases} \tag{1.37}$$

con immersione continua. Anche nel caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^2$ valgono analoghi risultati di immersione.

Utilizzeremo in seguito anche la seguente stima di interpolazione per le norme $\|\cdot\|_\sigma$.

Proposizione 1.16 *Siano α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq \alpha < \beta < \gamma$. Allora per ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_\alpha \cap \mathcal{H}_\gamma$ si ha*

$$\|\mathbf{f}\|_\beta < \|\mathbf{f}\|_\alpha^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|\mathbf{f}\|_\gamma^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}. \tag{1.38}$$

Dimostrazione. Poiché $\beta \in (\alpha, \gamma)$, esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$\beta = (1 - \theta)\alpha + \theta\gamma.$$

Sia $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} f_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ la serie di Fourier di $\mathbf{f}$; allora, applicando la disuguaglianza di Hölder discreta[2], si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}\|_\beta^2 &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\beta}|f_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2((1-\theta)\alpha+\theta\gamma)}|f_{\mathbf{k}}|^2 \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2(1-\theta)\alpha}|f_{\mathbf{k}}|^{2(1-\theta)}|\mathbf{k}|^{2\theta\gamma}|f_{\mathbf{k}}|^{2\theta} \\
&\leq \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\alpha}|f_{\mathbf{k}}|^2\right)^{1-\theta}\left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\gamma}|f_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\theta} \\
&= \|\mathbf{f}\|_\alpha^{2(1-\theta)}\|\mathbf{f}\|_\gamma^{2\theta}.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Osserviamo ora che

$$\gamma-\beta=(1-\theta)(\gamma-\alpha),\ \beta-\alpha=\theta(\gamma-\alpha),$$

quindi sostituendo nella 1.39 si ottiene la tesi. $\square$

1.3 Formulazione astratta dell'equazione di Navier-Stokes deterministica

A questo punto possiamo riformulare il problema 1.3, con le condizioni iniziali 1.5 ed al bordo 1.6, come un'equazione differenziale ordinaria ambientata in uno spazio di Hilbert.

Precisamente, siano $\mathbf{u}(t)$ il campo di velocità e $p(t)$ il campo di pressione in un generico istante $t\geq 0$, cioè le applicazioni

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u}(t) & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{u}(t,\mathbf{x}), \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} p(t) & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & \mathbf{x} \longmapsto p(t,\mathbf{x}); \end{array}$$

supponiamo che $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{H}^2_\#\ \forall\, t\geq 0$ e $p(t)\in H^1_\#\ \forall\, t\geq 0$ e definiamo le applicazioni

$$\begin{array}{rcl} U & : & [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{H}^2_\# \\ & & t \longmapsto \mathbf{u}(t), \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} p & : & [0,+\infty) \longrightarrow H^1_\# \\ & & t \longmapsto p(t). \end{array}$$

Possiamo allora riscrivere il problema 1.3, con la condizione iniziale 1.5, nella forma

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} + U(t)\cdot\nabla U(t) = \frac{1}{R}\nabla^2 U(t) + \nabla p(t) \qquad \forall\, t\geq 0, \\ \\ \nabla\cdot U(t) = 0 \qquad \forall\, t\geq 0, \\ \\ U(0)=\mathbf{u}_0\in\mathbb{H}^2_\# \end{cases} \tag{1.40}$$

[2] $p,q>1 : \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \sum_i |a_i b_i| \leq \left(\sum_i |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_i |b_i|^q\right)^{1/q}$

ed interpretare ∇^2 e $U(t)\cdot\nabla$ come operatori agenti sullo spazio $\mathbb{H}^2_\#$. Possiamo fare un ulteriore passo avanti ed eliminare l'equazione $\nabla \cdot U(t) = 0$ dal sistema 1.40 proiettando entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes sul sottospazio chiuso di $\mathbb{H}^2_\#$ costituito dalle funzioni a divergenza nulla; inoltre, poiché ci siamo riproposti di considerare campi di velocità a media nulla, proiettiamo ulteriormente sul sottospazio chiuso di $\mathbb{H}^2_\#$ costituito dalle funzioni a media e divergenza nulle, cioè su $\mathcal{H}_2$. Sia allora $\mathcal{P}$ il proiettore su $\mathcal{H}_2$ e definiamo

$$X(t) \equiv \mathcal{P}U(t) \quad \forall\, t \geq 0, \qquad x_0 = \mathcal{P}\mathbf{u}_0.$$

Se poi F e G sono definiti come nella proposizione 1.13, si ha $\mathcal{H}_2 \subset F \Longrightarrow F^\perp \subset \mathcal{H}_2^\perp \Longrightarrow G \subset \mathcal{H}_2^\perp$; pertanto, quando si proietta su $\mathcal{H}_2$, il termine $\nabla p(t)$ scompare dall'equazione. Osserviamo poi che, grazie alla periodicità delle condizioni al bordo, si ha $\mathcal{P}\nabla^2 U(t) = \nabla^2 \mathcal{P}U(t) = \nabla^2 X(t)$.

In definitiva, abbiamo ricondotto lo studio del moto bidimensionale di un fluido incomprimibile con condizioni al bordo periodiche allo studio del seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} + \mathcal{P}X(t)\cdot\nabla X(t) = \frac{1}{R}\nabla^2 X(t) & \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_2, \end{cases} \tag{1.41}$$

che si può interpretare come un problema di Cauchy nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_2$. In particolare, il campo di velocità $X(t)$ sarà una funzione a valori in $\mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ & t \longmapsto X(t). \end{aligned}$$

1.4 Il termine di rumore

A questo punto vogliamo riscrivere il problema 1.41 in una forma che si adatti anche allo studio del fenomeno della turbolenza. Sperimentalmente si è visto che, sebbene non sia possibile effettuare previsioni dettagliate del comportamento di un fluido nel regime turbolento, le sue proprietà statistiche sono prevedibili. Per questo appare naturale cercare di dare una descrizione probabilistica del problema; il modo più semplice per farlo consiste nell'aggiungere all'equazione di Navier-Stokes un termine forzante di tipo stocastico. In particolare, è conveniente scegliere come termine forzante un rumore bianco temporale, perché in questo modo si può affrontare il problema ricorrendo all'aiuto del calcolo di Itô (vedi [5], oppure [13]).

Per introdurre il termine di rumore bianco nell'equazione di Navier-Stokes e comprenderne le proprietà è utile pensare per un attimo al caso del rumore bianco a valori reali. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, indichiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}$ e consideriamo un processo stocastico reale, cioè un'applicazione

$$\begin{aligned} F \quad : \quad & \Omega \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\omega, t) \longmapsto F(\omega, t), \end{aligned}$$

tale che $\forall\, t \in [0, +\infty)$ l'applicazione parziale

$$\begin{aligned} F(t) \quad : \quad & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \omega \longmapsto F(\omega, t) \end{aligned}$$

sia misurabile. In modo informale, potremmo dire che il processo stocastico $F = \{F(t)\}_{t \geq 0}$ è un rumore bianco temporale se si ha

$$\mathbb{E}[F(t)] = \int_{\Omega} F(\omega, t)\mathbb{P}(d\omega) = 0 \qquad \forall\, t \in [0, +\infty), \tag{1.42}$$

$$\mathbb{E}[F(t)F(s)] = \int_{\Omega} F(\omega, t)F(\omega, s)\mathbb{P}(d\omega) = \delta(t - s) \qquad \forall\, t, s \in [0, +\infty). \tag{1.43}$$

Pertanto è ragionevole aspettarsi che, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che per $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\omega \in \Omega$ sia possibile definire l'integrale $\int_a^b f(t)F(\omega, t)dt$, si abbia

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b f(t)F(t)dt\right)^2\right] = \int_a^b\int_a^b f(t)f(s)\mathbb{E}[F(t)F(s)]dtds = \int_a^b f^2(t)dt. \tag{1.44}$$

Per dare una definizione di rumore bianco più rigorosa dal punto di vista matematico bisogna passare attraverso la definizione del moto Browniano o processo di Wiener.

Definizione 1.17 *Diciamo che un processo stocastico reale $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è un processo di Wiener se*

1. *le traiettorie del processo, cioè le funzioni $W(\omega) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto W(\omega, t)$, sono continue in $[0, +\infty)$ $\mathbb{P}$-quasi certamente su Ω;*

2. *$W(0) = 0$ e, se $0 \leq s < t$, $W(t) - W(s)$ è una variabile aleatoria Gaussiana di media nulla e covarianza $t - s$;*

3. *se $0 < t_1 < \ldots < t_n$, le variabili aleatorie $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$,$\ldots$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ sono indipendenti.*

Allora, se X appartiene ad un opportuno insieme di processi stocastici (il cosiddetto insieme dei processi prevedibili a quadrato integrabile), è possibile dare una definizione dell'integrale di X rispetto ad un processo di Wiener W (integrale di Itô): per ogni $T > 0$ l'integrale

$$\int_0^T X(s)dW(s)$$

è una variabile aleatoria tale che per ogni $T > 0$ risulta

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)dW(s)\right] = 0, \tag{1.45}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right)\left(\int_0^T Y(s)dW(s)\right)\right] = \int_0^T \mathbb{E}[X(s)Y(s)]ds. \tag{1.46}$$

In particolare, per $X = Y$ si ha

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}[X^2(s)]ds \qquad \forall T > 0, \tag{1.47}$$

quindi se X è una funzione deterministica si ottiene proprio l'equazione 1.44. Sembrerebbe allora naturale definire il rumore bianco come la derivata rispetto al tempo di $W(t)$: in questo modo, con $F(t) = \frac{dW(t)}{dt}$, l'equazione 1.47 diventerebbe proprio la 1.44. In realtà si può dimostrare che le traiettorie del processo di Wiener sono quasi certamente non derivabili e di conseguenza una tale definizione non può avere senso. Pertanto, quando si aggiunge ad un'equazione differenziale deterministica un termine di rumore bianco, bisogna tener presente che solo l'equazione integrale ad essa associata continua ad avere senso; per evidenziare questo fatto, ad esempio nel caso di un'equazione del primo ordine della forma $\dot{X}(t) = a(X(t))$, è opportuno riscrivere l'equazione nella forma $dX(t) = a(X(t))dt + dW(t)$, contenente solo i differenziali e non le derivate.

Questi risultati si possono estendere poi al caso d-dimensionale, procedendo in maniera analoga al caso reale. Un processo di Wiener a valori in $\mathbb{R}^d$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si definisce semplicemente come un vettore di d processi di Wiener reali indipendenti

$$W(t) \equiv (W_1(t), \ldots, W_d(t)) \qquad \forall t \geq 0.$$

Allora, se X appartiene ad un opportuno insieme di processi stocastici a valori nello spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ degli operatori lineari da $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^n$, è possibile dare una definizione dell'integrale di Itô di X rispetto ad un processo di Wiener W a valori in $\mathbb{R}^d$: basta porre

$$\int_0^T X(s)dW(s) = \sum_{i=1}^n e_i \sum_{j=1}^d \int_0^T X_{ij}(s)dW_j(s) \qquad \forall T > 0, \tag{1.48}$$

dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. In questo caso $\int_0^T X(s)dW(s)$ sarà una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^n$ e godrà di due proprietà analoghe alle 1.45 ed 1.46: infatti per ogni $T > 0$ risulta

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)dW(s)\right] = 0, \tag{1.49}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right) \cdot \left(\int_0^T Y(s)dW(s)\right)\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(Y(s)X^t(s))\right] ds, \tag{1.50}$$

dove $X^t(s)$ indica la matrice trasposta di $X(s)$.

Infine, si possono estendere le definizioni di processo di Wiener ed integrale di Itô al caso di dimensione infinita (vedi [9]). Sia U uno spazio di Hilbert separabile, con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ e norma $|\cdot|_U$, e sia Q un operatore lineare limitato, simmetrico, definito positivo e di classe traccia[3] su U. Allora esistono un sistema ortonormale completo $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di vettori di U ed una successione $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di numeri reali positivi tali che

$$Qe_k = \lambda_k e_k \,\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k < +\infty.$$

Definizione 1.18 *Diciamo che un processo stocastico $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in U è un Q-processo di Wiener se*

1. *le traiettorie del processo, cioè le funzioni $W(\omega) : [0, +\infty) \to U$, $t \mapsto W(\omega, t)$, sono continue in $[0, +\infty)$ $\mathbb{P}$-quasi certamente su Ω;*

2. *$W(0) = 0$ e, se $0 \leq s < t$, $W(t) - W(s)$ è una variabile aleatoria Gaussiana a valori in U di media nulla ed operatore covarianza $(t - s)Q$;*

3. *se $0 < t_1 < \ldots < t_n$, le variabili aleatorie $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $\ldots$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ sono indipendenti.*

È possibile poi dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 1.19 *Sia $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$ un Q-processo di Wiener. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *W è un processo Gaussiano a valori in U e $\forall\, t, s \geq 0$ si ha*

   $$\mathbb{E}[W(t)] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\langle W(t), v \rangle_U \langle W(s), w \rangle_U\right] = \langle (tQ)v, w \rangle_U \;\forall\, v, w \in U,$$

   cioè $W(t)$ è una variabile aleatoria Gaussiana di media nulla ed operatore covarianza tQ per ogni $t \geq 0$;

[3] Diciamo che un operatore lineare limitato T su uno spazio di Hilbert U con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ è simmetrico se $\langle Tx, y \rangle_U = \langle x, Ty \rangle_U \;\forall\, x, y \in U$, definito positivo se $\langle Tx, x \rangle > 0 \;\forall\, x \in U$, di classe traccia se per un sistema ortonormale completo $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di vettori di U (e di conseguenza anche per tutti gli altri) si ha $\mathrm{Tr}\, Q \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \langle Qe_k, e_k \rangle_U < +\infty$.

2. per ogni $t \geq 0$ è possibile espandere W nella forma

$$W(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k, \tag{1.51}$$

dove

$$\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle W(t), e_k \rangle_U \, , \; k \in \mathbb{N},$$

sono processi di Wiener reali indipendenti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; inoltre la serie 1.51 converge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sia poi H un altro spazio di Hilbert separabile, con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ e norma $| \cdot |_H$; definiamo l'insieme $\mathcal{N}_W(0,T)$ dei processi stocastici X su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori nello spazio $\mathcal{L}(U, H)$ degli operatori lineari limitati da U a H che soddisfano la condizione

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Tr}[X(s)QX^*(s)]ds\right] < +\infty \qquad \forall T > 0, \tag{1.52}$$

dove con $X^*(t)$ indichiamo l'operatore aggiunto di $X(t)$. Allora per $X \in \mathcal{N}_W(0,T)$ è possibile dare una definizione dell'integrale di Itô[4] di X rispetto ad un processo di Wiener W a valori in U: per ogni $T > 0$

$$\int_0^T X(s)dW(s)$$

è una variabile aleatoria definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in H, che soddisfa due proprietà analoghe alle 1.45 e 1.46: per ogni $T > 0$ risulta

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)dW(s)\right] = 0, \tag{1.53}$$

$$\mathbb{E}\left[\left\langle \int_0^T X(s)dW(s), \int_0^T Y(s)dW(s) \right\rangle_H\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(Y(s)QX^*(s))\right] ds. \tag{1.54}$$

Inoltre si può dimostrare (vedi [9, § 4.3.2]) che l'integrale di Itô rispetto ad un processo di Wiener infinito dimensionale può essere ottenuto come un limite di integrali di Itô rispetto a processi di Wiener finito dimensionali. Precisamente, se definiamo

$$W_N(t) \equiv \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k \qquad \forall t \in [0,T], \; N \in \mathbb{N},$$

vale il seguente risultato.

[4] In realtà l'integrale stocastico si può definire per processi a valori in una classe più ampia di operatori lineari, anche non limitati, ma per i nostri scopi sarà sufficiente considerare processi a valori in $\mathcal{N}_W(0,T)$.

Teorema 1.20 *Sia $X(t) \in \mathcal{N}_W(0,T)$ con $T > 0$. Allora si ha*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X(s)dW(s) - \int_0^t X(s)dW_N(s)\right|_H^2\right] \longrightarrow 0 \text{ per } N \longrightarrow +\infty, \tag{1.55}$$

quindi esiste una sottosuccessione $\left\{\int_0^t X(s)dW_{N_k}(s)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ *che converge a* $\int_0^t X(s)dW(s)$ $\mathbb{P}$*-quasi certamente ed uniformemente su* $[0,T]$.

A questo punto siamo pronti ad introdurre il termine di rumore nel problema 1.41. Sia $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ e sia $W(t)$ un Q-processo di Wiener a valori in $\mathcal{H}_2$: allora il termine di rumore che introduciamo nel problema 1.41 è $B\dot{W}(t)$. Tuttavia, come abbiamo già osservato a proposito del processo di Wiener reale, non ha senso considerare $\dot{W}(t)$; pertanto, con l'introduzione del termine di rumore, soltanto l'equazione integrale associata al problema 1.41 continua ad avere senso. Per tenere presente questo fatto riscriviamo il problema 1.41 in una forma che contenga solo i differenziali e non le derivate:

$$\begin{cases} dX(t) + \mathcal{P}X(t)\cdot\nabla X(t)dt = \frac{1}{R}\nabla^2 X(t)dt + BdW(t) & \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_2. \end{cases} \tag{1.56}$$

Il problema da studiare è a questo punto un problema di Cauchy per un'equazione differenziale stocastica in $\mathcal{H}_2$ ed il campo di velocità $X(t)$ va interpretato come un processo stocastico a valori in $\mathcal{H}_2$, cioè come un'applicazione

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & \Omega \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ & (\omega, t) \longmapsto X(\omega, t). \end{aligned}$$

1.5 Gli operatori A e b

1.5.1 L'operatore di Stokes A

Vogliamo ora analizzare le proprietà degli operatori differenziali che compaiono nel problema 1.56: cominciamo chiedendoci quale sia il significato della relazione

$$\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.57}$$

con $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_2$, $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_0$, cioè quale sia il legame fra il campo di velocità ed il suo Laplaciano. Consideriamo prima di tutto il caso in cui

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C} = \left\{\mathbf{u} \in \dot{\mathbb{C}}^\infty_\# : \nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\,\forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\right\};$$

in tal caso possiamo rendere più esplicita la relazione 1.57 sostituendo alle funzioni $\mathbf{u}$ e $\mathbf{f}$ le rispettive serie di Fourier:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} u_\mathbf{k}\mathbf{v}_\mathbf{k}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} f_\mathbf{k}\mathbf{v}_\mathbf{k}(\mathbf{x}) \qquad \forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,$$

dove le funzioni $\mathbf{v_k}(\mathbf{x})$ sono definite dalla 1.25; allora si ha

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \left(-|\mathbf{k}|^2 u_\mathbf{k} \mathbf{v_k}(\mathbf{x})\right) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \iff -|\mathbf{k}|^2 u_\mathbf{k} = f_\mathbf{k}\, \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1. \tag{1.58}$$

Possiamo interpretare la relazione 1.58 come la definizione di un operatore lineare A che associa ad ogni funzione $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, con coefficienti di Fourier $u_\mathbf{k}$, il suo Laplaciano, cioè la funzione $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$ con coefficienti di Fourier $f_\mathbf{k} = -|\mathbf{k}|^2 u_\mathbf{k}$. In realtà la relazione 1.58 ha senso non solo per $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathcal{C}$, ma anche per $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_2, \mathbf{f} \in \mathcal{H}_0$ e quindi si può interpretare A come un operatore lineare da $\mathcal{H}_2$ in $\mathcal{H}_0$, che prende il nome di operatore di Stokes. A è allora limitato, infatti si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_2^2 &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^4 |u_\mathbf{k}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^4 \left| -\frac{f_\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \right|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |f_\mathbf{k}|^2 = \|\mathbf{f}\|_0^2, \end{aligned} \tag{1.59}$$

da cui

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_0)} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{H}_2,\,\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{u}\|_0}{\|\mathbf{u}\|_2} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{H}_2,\,\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}\|_0}{\|\mathbf{u}\|_2} = 1. \tag{1.60}$$

Dalla 1.58 segue anche che l'operatore A è definito negativo: infatti, l'insieme $\{\mathbf{v_k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}_2$ formata da autovettori di A ed i corrispondenti autovalori sono tutti strettamente negativi, dato che si ha $A\mathbf{v_k} = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{v_k}$ per ogni $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1$. Inoltre l'operatore A è autoaggiunto: infatti si ha

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{u}, A\mathbf{w} \rangle\rangle_2 &= \sum_{\mathbf{h},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{h}|,|\mathbf{k}|\geq 1} u_\mathbf{h} \left(-|\mathbf{k}|^2\right) w_\mathbf{k} \langle\langle \mathbf{v_h}, \mathbf{v_k} \rangle\rangle_2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \left(-|\mathbf{k}|^2\right) u_\mathbf{k} w_\mathbf{k} \\ &= \langle\langle A\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle\rangle_2 \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

Osserviamo poi che l'operatore A, pur essendo limitato come operatore da $\mathcal{H}_2$ in $\mathcal{H}_0$, è non limitato come operatore da $\mathcal{H}_0$ in $\mathcal{H}_0$: infatti si ha, sempre grazie all'equazione 1.59,

$$\|A\mathbf{u}\|_0 = \|\mathbf{f}\|_0 = \|\mathbf{u}\|_2 \Longrightarrow \frac{\|A\mathbf{u}\|_0}{\|\mathbf{u}\|_0} = \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_0}; \tag{1.61}$$

pertanto, se ad esempio si prende $\mathbf{u} = \mathbf{v_k}$, si trova

$$\frac{\|A\mathbf{v_k}\|_0}{\|\mathbf{v_k}\|_0} = |\mathbf{k}|^2,$$

da cui

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0)} \geq \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \frac{\|A\mathbf{v_k}\|_0}{\|\mathbf{v_k}\|_0} = +\infty. \tag{1.62}$$

Infine, osserviamo che la relazione 1.58 ha senso non solo per funzioni $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_2$ e $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_0$, ma anche per $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_\sigma$ e $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_{\sigma-2}$, con $\sigma \in \mathbb{R}$. Non sarà più vero, in generale, che $\mathbf{f}$ è il Laplaciano di $\mathbf{u}$ (quest'ultimo non è definito se $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_\sigma$ con $\sigma < 2$), però la relazione 1.58 continua ad avere senso come legame tra i coefficienti di Fourier di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{f}$. Allora, ragionando esattamente come prima, possiamo definire l'operatore di Stokes A come un operatore lineare da $\mathcal{H}_\sigma$ in $\mathcal{H}_{\sigma-2}$, che associa ad ogni $\mathbf{u}$ la corrispondente $\mathbf{f}$, e verificare che si tratta di un operatore definito negativo, autoaggiunto, limitato come operatore da $\mathcal{H}_\sigma$ in $\mathcal{H}_{\sigma-2}$ e non limitato come operatore da $\mathcal{H}_{\sigma-2}$ in $\mathcal{H}_{\sigma-2}$.

In particolare, nel problema 1.56 possiamo considerare campi di velocità in $\mathcal{H}_1$ anziché in $\mathcal{H}_2$ ed interpretare quindi $X(t)$ come un processo stocastico a valori in $\mathcal{H}_1$; di conseguenza, x_0 indicherà un generico elemento di $\mathcal{H}_1$ ed il termine $\nabla^2 X(t)$ andrà riscritto come $AX(t)$.

1.5.2 L'operatore b

È utile introdurre la forma trilineare su $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ definita da

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &\equiv \int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x})\,(D_i v_j(\mathbf{x}))\,w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

dove D_i indica la derivata parziale rispetto a x_i, $i = 1, 2$. Come vedremo nella proposizione 1.25, gli integrali presenti nella 1.63 sono ben definiti se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono elementi di $\mathcal{H}_1$. Osserviamo poi che, grazie all'osservazione 1.12, per $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ esistono delle successioni $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathbf{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tali che

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_1,\ \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_n\|_1,\ \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_n\|_1 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.63}$$

Allora vale la seguente proprietà.

Lemma 1.21 *Per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ *si ha*

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \lim_{n\to+\infty} b(\mathbf{u}_n,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_n) \tag{1.64}$$

Dimostrazione. $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ e per $i, j = 1, 2$ si ha

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x})\,(D_i v_j(\mathbf{x}))\,w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} u_{n,i}(\mathbf{x})\,(D_i v_{n,j}(\mathbf{x}))\,w_{n,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathcal{O}} |u_i(\mathbf{x})\,(D_i v_j(\mathbf{x}))\,w_j(\mathbf{x}) - u_{n,i}(\mathbf{x})\,(D_i v_{n,j}(\mathbf{x}))\,w_{n,j}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leq \\ &\leq I^{ij}_{n,1} + I^{ij}_{n,2} + I^{ij}_{n,3}, \end{aligned}$$

dove $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
I^{ij}_{n,1} &= \int_{\mathcal{O}} \left| u_i(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) - u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x},\\
I^{ij}_{n,2} &= \int_{\mathcal{O}} \left| u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) - u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x},\\
I^{ij}_{n,3} &= \int_{\mathcal{O}} \left| u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) - u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) w_{n,j}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Inoltre si ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
I^{ij}_{n,1} &= \int_{\mathcal{O}} \left| \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) \right| \left| u_i(\mathbf{x}) - u_{n,i}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x},\\
I^{ij}_{n,2} &= \int_{\mathcal{O}} \left| u_{n,i}(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{x}) \right| \left| \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) - \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) \right| d\mathbf{x},\\
I^{ij}_{n,3} &= \int_{\mathcal{O}} \left| u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) \right| \left| w_j(\mathbf{x}) - w_{n,j}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
I^{ij}_{n,1} &\le \left| \left(D_i v_j\right) w_j \right|_0 \left| u_i - u_{n,i} \right|_0 && \forall\, n \in \mathbb{N},\\
I^{ij}_{n,2} &\le \left| u_{n,i} w_j \right|_0 \left| \left(D_i v_j\right) - \left(D_i v_{n,j}\right) \right|_0 && \forall\, n \in \mathbb{N},\\
I^{ij}_{n,3} &\le \left| u_{n,i} \left(D_i v_{n,j}\right) \right|_0 \left| w_j - w_{n,j} \right|_0 && \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Grazie alla relazione 1.63 si ha in particolare

$$\left| u_i - u_{n,i} \right|_0, \left| \left(D_i v_j\right) - \left(D_i v_{n,j}\right) \right|_0, \left| w_j - w_{n,j} \right|_0 \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty,$$

mentre $\left| \left(D_i v_j\right) w_j \right|_0$, $\left| u_{n,i} w_j \right|_0$, $\left| u_{n,i} \left(D_i v_{n,j}\right) \right|_0$ sono tutti maggiorati da una costante, a partire da un certo valore di n. Di conseguenza si ottiene

$$\lim_{n \to +\infty} I^{ij}_{n,1} = \lim_{n \to +\infty} I^{ij}_{n,2} = \lim_{n \to +\infty} I^{ij}_{n,3} = 0,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
&\left| b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n) \right|\\
&= \left| \sum_{i,j=1}^{2} \left[\int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) w_{n,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \right|\\
&\le \sum_{i,j=1}^{2} \left| \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x})\right) w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) w_{n,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|\\
&\le \sum_{i,j=1}^{2} \left(I^{ij}_{n,1} + I^{ij}_{n,2} + I^{ij}_{n,3} \right) \longrightarrow +\infty \text{ per } n \longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

cioè si ha la 1.64. $\square$

Proposizione 1.22 *Per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ *si ha*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \tag{1.65}$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \tag{1.66}$$

Dimostrazione. Grazie al lemma precedente si ha

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lim_{n \to +\infty} b(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n); \tag{1.67}$$

inoltre, applicando la formula di Gauss-Green e sfruttando il fatto che i termini di bordo si annullano grazie alla periodicità delle condizioni al bordo, si ottiene

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n) &= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_{n,i}(\mathbf{x}) \left(D_i v_{n,j}(\mathbf{x})\right) w_{n,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \left(D_i u_{n,i}(\mathbf{x})\right) v_{n,j}(\mathbf{x}) w_{n,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \left(D_i w_{n,j}(\mathbf{x})\right) u_{n,i}(\mathbf{x}) v_{n,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathcal{O}} \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{x})\right) \left(\mathbf{w}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} - b(\mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n) \\
&= -b(\mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n).
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Di conseguenza, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione 1.68 si ottiene la 1.65. A questo punto, la 1.66 segue immediatamente dalla 1.65. □

Proposizione 1.23 *Per ogni* $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_2$ *vale la seguente identità:*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A\mathbf{u}) = 0. \tag{1.69}$$

Dimostrazione. Per $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_2$ si ha $A\mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u}$; quindi, applicando la formula di Gauss-Green come nella proposizione precedente, si trova che

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A\mathbf{u}) &= \sum_{i,j,k=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) \left(D_i u_j(\mathbf{x})\right) \left(D_k^2 u_j(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \left(D_k u_i(\mathbf{x})\right) \left(D_i u_j(\mathbf{x})\right) \left(D_k u_j(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} + \\
&\quad -\sum_{i,j,k=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) \left(D_{ik}^2 u_j(\mathbf{x})\right) \left(D_k u_j(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} \\
&\equiv I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Con un calcolo diretto si vede che $I_1 = 0$, grazie al fatto che $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$; inoltre per $j, k = 1, 2$, applicando ancora la formula di Gauss-Green, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) \left(D_{ik}^2 u_j(\mathbf{x}) \right) \left(D_k u_j(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) D_i \left[\frac{\left(D_k u_j(\mathbf{x}) \right)^2}{2} \right] d\mathbf{x} \\
&= -\sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \left(D_i u_i(\mathbf{x}) \right) \frac{\left(D_k u_j(\mathbf{x}) \right)^2}{2} d\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathcal{O}} \left(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \frac{\left(D_k u_j(\mathbf{x}) \right)^2}{2} d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

e di conseguenza anche $I_2 = 0$. $\square$

Osservazione 1.24 *La proprietà 1.69 è valida solo per il problema con condizioni al bordo periodiche, poiché in questo caso gli integrali sul bordo si annullano. In generale, tuttavia, essa non è vera (per esempio, nel caso del problema con condizioni al bordo di Dirichlet).*

Proposizione 1.25 *Per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ *si ha*

$$
|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 4 \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#}. \tag{1.70}
$$

Dimostrazione. $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ e per $i, j = 1, 2$ si ha, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}} \left| u_i(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x}) \right) w_j(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\
&\leq \left[\int_{\mathcal{O}} \left| D_i v_j(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{O}} \left| u_i(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_{\mathcal{O}} \left| D_i v_j(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{O}} \left| u_i(\mathbf{x}) \right|^4 d\mathbf{x} \right]^{1/4} \left[\int_{\mathcal{O}} \left| w_j(\mathbf{x}) \right|^4 d\mathbf{x} \right]^{1/4} \\
&= \left[\int_{\mathcal{O}} \left| D_i v_j(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\
&\leq \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#}.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, sommando su $i, j = 1, 2$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &= \left| \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} u_i(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x}) \right) w_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \left| u_i(\mathbf{x}) \left(D_i v_j(\mathbf{x}) \right) w_j(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\
&\leq 4 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#},
\end{aligned}
$$

cioè proprio la 1.70. $\square$

Osserviamo ora che $\mathcal{H}_1 \subset \mathbb{L}^4_\#$: infatti, per definizione di $\mathcal{H}_\sigma$ si ha $\mathcal{H}_\sigma \subset \mathcal{H}_{\sigma/2} \subset \mathbb{H}^{\sigma/2}_\# \ \forall \sigma \geq 0$ e per il teorema di immersione di Sobolev 1.15 si ha $\mathbb{H}^{1/2}_\# \subset \mathbb{L}^4_\#$. Pertanto, utilizzando la proposizione 1.25 è facile vedere che per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$ l'applicazione

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \cdot) : &\mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\mathbf{v} \longmapsto b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \tag{1.71}$$

è un funzionale lineare continuo; infatti si ha

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| = |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})| \leq 4\|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} \Longrightarrow$$

$$\|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \cdot)\|_{-1} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}_1, \mathbf{v} \neq 0} \frac{|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1} \leq 4\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} < +\infty \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1. \tag{1.72}$$

In realtà vediamo dalla 1.72 che il funzionale lineare $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \cdot)$ è ben definito e continuo su $\mathcal{H}_1$ non solo per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$, ma più in generale per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{L}^4_\#$. Ha senso allora considerare l'applicazione (non lineare)

$$\begin{aligned} b \ : \ &\mathbb{L}^4_\# \longrightarrow \mathcal{H}_{-1} \\ &\mathbf{u} \longmapsto b(\mathbf{u}) \equiv b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \cdot) \end{aligned} \tag{1.73}$$

Proposizione 1.26 *L'applicazione b è continua e per ogni coppia $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di elementi di $\mathbb{L}^4_\#$ vale la disuguaglianza*

$$\|b(\mathbf{u}) - b(\mathbf{v})\|_{-1} \leq 4\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \left[\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \right]. \tag{1.74}$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{L}^4_\#$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$. Allora, grazie alla 1.65, si ha

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u})(\mathbf{w}) - b(\mathbf{v})(\mathbf{w}) &= b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, -\mathbf{u}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, -\mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}); \end{aligned}$$

di conseguenza, grazie alla 1.70 si ottiene

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u})(\mathbf{w}) - b(\mathbf{v})(\mathbf{w})| &\leq |b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{u})| + |b(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| \\ &\leq 4\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\ &\quad +4\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}, \end{aligned}$$

da cui

$$\|b(\mathbf{u}) - b(\mathbf{v})\|_{-1} \leq 4\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \left[\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \right],$$

il che conclude la dimostrazione. □

A questo punto, sfruttando le definizioni degli operatori A e b, possiamo riscrivere il problema 1.56 in forma astratta:

$$\begin{cases} dX(t) + b\left(X(t)\right) dt = \frac{1}{R} AX(t)dt + BdW(t) \qquad \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_1. \end{cases} \tag{1.75}$$

Il campo di velocità $X(t)$ va interpretato come un processo stocastico a valori in $\mathcal{H}_1$, mentre i termini $b\left(X(t)\right)$ e $AX(t)$, grazie alle proprietà degli operatori A e b, sono elementi di $\mathcal{H}_{-1}$; possiamo considerare W come un Q-processo di Wiener a valori in $\mathcal{H}_0$, B come un elemento di $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_{-1})$ ed interpretare il problema 1.75 come un problema di Cauchy per un'equazione differenziale stocastica in $\mathcal{H}_{-1}$.

Capitolo 2

Il teorema di esistenza ed unicità della soluzione

In questo capitolo vogliamo arrivare ad enunciare e dimostrare un teorema di esistenza ed unicità per un certo tipo di soluzione del problema 1.75. Procediamo per gradi, affrontando prima di tutto un problema privo del termine non lineare e del termine di rumore: in questo modo ci riduciamo a studiare un problema di Cauchy lineare e deterministico in uno spazio di Banach, per la cui soluzione possiamo fare affidamento sulla teoria dei semigruppi di operatori lineari. Aggiungiamo poi un termine forzante di tipo deterministico e discutiamo alcuni risultati relativi alla soluzione del problema ottenuto in questo modo, che saranno utili nella dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità della soluzione. In un secondo momento aggiungiamo il termine di rumore e verifichiamo che la soluzione del problema di Cauchy perturbato in questo modo, cioè la convoluzione stocastica, è ben definita ed è un processo stocastico continuo in un certo senso che preciseremo. Solo a questo punto passiamo ad affrontare il problema completo 1.75, definiamo la soluzione "mild" e ne dimostriamo l'esistenza e l'unicità. Il numero di Reynolds R non influenza in alcun modo l'esistenza e l'unicità della soluzione, per cui in tutto questo capitolo possiamo, senza perdita di generalità, supporre $R = 1$.

2.1 Soluzione del problema lineare deterministico

Consideriamo per prima cosa il problema 1.75 privato del termine non lineare e del termine di rumore. Ci troviamo allora a studiare il seguente problema, che possiamo interpretare come un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria nello spazio $\mathcal{H}_{-1}$:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) \qquad \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

La teoria dei semigruppi di operatori lineari fornisce uno strumento efficace per la soluzione di problemi di questo tipo, nel caso generale in cui l'equazione differenziale sia ambientata in uno spazio di Banach E. Ripercorriamone quindi i risultati fondamentali (si veda ad esempio [4, capitolo 1, §2], oppure [10, capitoli 1-2]).

Sia E uno spazio di Banach, $|\cdot|$ la norma su E e $\mathcal{L}(E)$ l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati da E in E, con la norma

$$\|A\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{x\in E, |x|=1} |Ax| \qquad \forall\, A \in \mathcal{L}(E).$$

Indichiamo con $C([0,T];E)$, $T > 0$, lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $[0,T]$ in E, che è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{C([0,T];E)} \equiv \sup_{t\in[0,T]} |f(t)| \qquad \forall\, f \in C([0,T];E).$$

Indichiamo poi con $C^k([0,T];E)$, $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$, lo spazio vettoriale delle funzioni da $[0,T]$ in E derivabili k volte con continuità nell'intervallo $[0,T]$; esso è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{C^k([0,T];E)} \equiv \|f\|_{C([0,T];E)} + \sum_{j=1}^{k} \sup_{t\in[0,T]} |D^j f(t)| \qquad \forall\, f \in C^k([0,T];E).$$

Indichiamo con $L^p([0,T];E)$, $T > 0$, $p \geq 1$, lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni da $[0,T]$ in E tali che $|f(t)|^p$ è integrabile (secondo Böchner). $L^p([0,T];E)$ è allora uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^p([0,T];E)} \equiv \left[\int_0^T |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \qquad \forall\, f \in L^p([0,T];E)$$

nel caso in cui $p \in [1, +\infty)$. $L^\infty([0,T];E)$ è invece uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^\infty([0,T];E)} \equiv \operatorname{ess\,sup} \{|f(t)| : t \in [0,T]\} \qquad \forall\, f \in L^\infty([0,T];E).$$

Indichiamo infine con $W^{k,p}([0,T];E)$, per $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ lo spazio vettoriale delle funzioni da $[0,T]$ in E che sono derivabili k volte in senso debole e tali che le loro derivate di ordine minore o uguale a k appartengono allo spazio $L^p([0,T];E)$. $W^{k,p}([0,T];E)$ è allora uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{W^{k,p}([0,T];E)} \equiv \left[\sum_{i=1}^{k} \int_0^T |D^i f(t)|^p dt\right]^{1/p} \qquad \forall\, f \in W^{k,p}([0,T];E)$$

per $p \in [1, +\infty)$. $W^{k,\infty}([0,T];E)$ è invece uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{W^{k,\infty}([0,T];E)} \equiv \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ess\,sup} \left\{ |D^i f(t)| : t \in [0,T] \right\} \quad \forall\, f \in W^{k,\infty}([0,T];E).$$

Supponiamo che

$$A : D(A) \longrightarrow E$$

sia un operatore lineare, anche non limitato, definito su un sottospazio di E che indichiamo con $D(A)$ (il dominio di A). Vogliamo allora studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) & \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x \in E. \end{cases} \tag{2.2}$$

Supponiamo per il momento che $X : [0,T] \to E$ sia una soluzione del problema 2.2 e supponiamo anche che sia l'unica soluzione. Per esplicitare la dipendenza della soluzione dal punto iniziale introduciamo la famiglia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ di operatori definita da

$$\begin{aligned} S(t) \quad : \quad & E \longrightarrow E \\ & t \longmapsto S(t)x \equiv X(t) \end{aligned}$$

e cerchiamo prima di tutto di stabilire quali proprietà ci aspettiamo che essa soddisfi. Naturalmente ci aspettiamo che $S(t)$ sia un operatore lineare per ogni $t \geq 0$; in secondo luogo, poiché stiamo assumendo anche che il problema 2.2 abbia un'unica soluzione, si avrà

$$S(0)x = x \qquad \forall x \in E; \tag{2.3}$$

$$S(t+s)x = S(t)S(s)x = S(s)S(t)x = x \qquad \forall x \in E,\ t, s \geq 0; \tag{2.4}$$

infine, è naturale aspettarsi che valga la seguente proprietà:

$$\text{l'applicazione } t \longmapsto S(t)x \text{ è continua su } [0,T] \qquad \forall\, T > 0,\ x \in E. \tag{2.5}$$

Cerchiamo di precisare meglio queste idee e di determinare un criterio che permetta di capire se un problema del tipo 2.2 abbia una soluzione unica.

Definizione 2.1 *Una famiglia di operatori lineari limitati $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ definiti su uno spazio di Banach E si dice un semigruppo di operatori se valgono le proprietà 2.3, 2.4; si dice semigruppo fortemente continuo su E se vale anche la proprietà 2.5; si dice semigruppo fortemente continuo di contrazioni su E se vale in più anche la condizione*

$$\|S(t)\| \leq 1 \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.6}$$

Enunciamo ora alcune proprietà dei semigruppi di contrazioni su spazi di Banach. Prima di tutto definiamo il generatore infinitesimo di un semigruppo.

Definizione 2.2 *Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di operatori lineari sullo spazio di Banach E. Definiamo allora*

$$D(A) \equiv \left\{ x \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ esiste in } E \right\}, \tag{2.7}$$

$$Ax \equiv \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \qquad \forall\, x \in E. \tag{2.8}$$

L'operatore lineare $A : D(A) \to E$ si dice allora il generatore infinitesimo del semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $D(A)$ è il suo dominio.

Valgono allora i seguenti risultati.

Teorema 2.3 *Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo di contrazioni sullo spazio di Banach E, sia $A : D(A) \to E$ il suo generatore infinitesimo e $x \in D(A)$. Allora si ha*

1. *$S(t)x \in D(A)$ $\forall\, t \geq 0$ ed inoltre $AS(t)x = S(t)Ax$ $\forall\, t \geq 0$;*
2. *l'applicazione $t \mapsto S(t)x$ è derivabile $\forall\, t \geq 0$ ed inoltre*
$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x \qquad \forall\, t \geq 0;$$
3. *il dominio $D(A)$ di A è denso in E;*
4. *A è un operatore chiuso.*

È poi possibile dimostrare alcuni risultati anche riguardo all'operatore risolvente di A.

Definizione 2.4 *Sia A un'operatore lineare chiuso su uno spazio di Banach E e sia $D(A)$ il suo dominio. Si dice allora che un numero complesso λ appartiene all'insieme risolvente $\rho(A)$ di A se l'operatore $\lambda I - A$ (I indica l'identità su E) è invertibile con inverso limitato rispetto alla norma di E. In tal caso l'operatore $R_\lambda \equiv (\lambda I - A)^{-1}$ si dice l'operatore risolvente di A.*

Teorema 2.5 *Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo di contrazioni sullo spazio di Banach E e sia $A : D(A) \to E$ il suo generatore infinitesimo. Allora $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ ed inoltre si ha*

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \qquad \forall\, x \in E,\, \lambda > 0,$$

per cui in particolare $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ $\forall\, \lambda > 0$.

A questo punto possiamo riprendere le nostre idee iniziali riguardo al problema 2.2: abbiamo osservato che è ragionevole aspettarsi che una famiglia di operatori di "evoluzione temporale" per un problema di Cauchy del tipo 2.2 soddisfi le proprietà 2.3, 2.4, 2.5, cioè sia un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari su E. Il seguente teorema ci assicura che, nel caso in cui valga anche la condizione supplementare 2.6, gli operatori di un semigruppo fortemente continuo sono in effetti gli operatori di "evoluzione temporale" per un problema di Cauchy.

Teorema 2.6 *Sia* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigruppo fortemente continuo di contrazioni sullo spazio di Banach* E *e sia* $A : D(A) \to E$ *il suo generatore infinitesimo. Allora per ogni* $x \in D(A)$ *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) \qquad \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x \in D(A) \end{cases} \tag{2.9}$$

ha un'unica soluzione $X \in C^1([0, +\infty); E) \cap C([0, +\infty); D(A))$*, ed inoltre vale la relazione*

$$X(t) = S(t)x \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Dal teorema 2.3 segue l'esistenza di una soluzione, quella data da $X(t) = S(t)x\ \forall\, t \geq 0$, $x \in D(A)$. Sempre dal teorema 2.3 segue che $S(t)x \in D(A)\ \forall\, x \in D(A)$ e quindi, poiché per ipotesi il semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è fortemente continuo, si ha anche $X \in C([0, +\infty); D(A))$. Infine, si ha

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \qquad \forall\, t \geq 0,\ x \in D(A)$$

e l'applicazione $t \longmapsto S(t)Ax$ è continua su $[0, +\infty)$, ancora grazie all'ipotesi di continuità forte del semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$; pertanto $\frac{dX}{dt} \in C([0, +\infty); E)$, cioè $X \in C^1([0, +\infty); E)$.
Rimane quindi da dimostrare l'unicità della soluzione. Supponiamo allora che $Y \in C^1([0, +\infty); E) \cap C([0, +\infty); D(A))$ sia un'altra soluzione del problema e per ogni $T > 0$ definiamo

$$Z(t) \equiv S(T - t)Y(t) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

Allora per ogni $t \in [0, T]$ si ha

$$\frac{dZ}{dt} = -AS(T - t)Y(t) + S(T - t)\frac{dY}{dt} = S(T - t)\left[\frac{dY}{dt} - AY(t)\right] = 0.$$

Ne segue che $Z \in C^1([0, +\infty); E)$ e $Z(t) = Z(0)\ \forall\, t \in [0, T]$. D'altra parte, per definizione di Z si ha $Z(0) = S(T)Y(0) = S(T)x$, quindi $Z(t) = S(T)x$

$\forall\, t \in [0, T]$, in particolare $Y(T) = Z(T) = S(T)x$. Grazie all'arbitrarietà di $T > 0$ si vede che Y coincide proprio con X e quindi la soluzione è unica. $\square$

A questo punto non rimane altro che fissare un criterio che permetta di capire, una volta assegnato un problema del tipo 2.2, se l'operatore A sia il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni su E: se si verifica proprio questo caso ed in più si ha $x \in D(A)$, grazie al teorema precedente possiamo concludere che il problema 2.2 ammette un'unica soluzione, appartenente a $C^1([0, +\infty); E) \cap C([0, +\infty); D(A))$. Il criterio di cui abbiamo bisogno è fornito dal teorema di Hille-Yosida, che rappresenta una sorta di inversione dei teoremi 2.3 e 2.5.

Teorema 2.7 (di Hille-Yosida) *Sia A un operatore lineare chiuso sullo spazio di Banach E, avente dominio denso in E. Allora A è il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni se e solo se*

$$(0, +\infty) \subset \rho(A) \ \ e \ \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}\, \forall\, \lambda > 0. \tag{2.11}$$

Osserviamo che, nel caso in cui $A : E \to E$ sia un operatore limitato, il problema 2.2 ha, per ogni scelta del punto iniziale $x \in E$, un'unica soluzione, data da

$$e^{tA}x \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}. \tag{2.12}$$

Il teorema di Hille-Yosida permette di concludere che, anche nel caso in cui A non sia limitato come operatore da E in E (e quindi la serie 2.12 non converga in generale), ma sia comunque il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, il problema 2.2 ammette ancora un'unica soluzione, data da $S(t)x$. Questo suggerisce di interpretare l'operatore $S(t)$ come un "esponenziale" dell'operatore A, estendendo così la definizione di esponenziale al caso di operatori non necessariamente limitati:

$$e^{tA} \equiv S(t) : E \longrightarrow E.$$

Torniamo ora al nostro problema originario 2.1: esso è soltanto un caso particolare del problema 2.2, in cui $E = \mathcal{H}_{-1}$, $D(A) = \mathcal{H}_1$ e A è l'operatore di Stokes, definito dalla relazione 1.58. Quindi, per stabilire l'esistenza e l'unicità della soluzione, rimane solo da verificare se l'operatore di Stokes soddisfa le ipotesi del teorema di Hille-Yosida: la seguente proposizione mostra che la risposta è affermativa non solo nel caso in cui $E = \mathcal{H}_{-1}$ e $D(A) = \mathcal{H}_1$, ma più in generale quando $E = \mathcal{H}_\sigma$ e $D(A) = \mathcal{H}_{\sigma+2}$ con $\sigma \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2.8 *L'operatore di Stokes $A : D(A) = \mathcal{H}_{\sigma+2} \to \mathcal{H}_\sigma$, definito per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$ dalla relazione 1.58, è il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni sullo spazio $\mathcal{H}_\sigma$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per ottenere la tesi basta far vedere che l'operatore

$$A : \mathcal{H}_{\sigma+2} \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Hille-Yosida.

Step 1. È chiaro che il dominio di A è denso nello spazio $\mathcal{H}_\sigma$ $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$: infatti $\mathcal{H}_{\sigma+2}$ contiene lo spazio $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{u} \in \dot{\mathbb{C}}^\infty_\# : \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\, \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}$, che è denso in $\mathcal{H}_\sigma$.

Step 2. A, interpretato come operatore da $\mathcal{H}_{\sigma+2}$ in $\mathcal{H}_\sigma$, è limitato $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ (si veda la 1.60), quindi è anche chiuso.

Step 3. Facciamo vedere che $\lambda I - A : \mathcal{H}_{\sigma+2} \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ è invertibile $\forall\, \lambda > 0$ e $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{\sigma+2}$ e sia $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} u_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}$ la sua serie di Fourier: allora $\forall\, \lambda > 0$ si ha

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = (\lambda I - A) \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} u_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} (\lambda + |\mathbf{k}|^2) u_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}. \quad (2.13)$$

Pertanto, se $\widetilde{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \widetilde{u}_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}$ è un'altra funzione di $\mathcal{H}_{\sigma+2}$ tale che $(\lambda I - A)\widetilde{\mathbf{u}} = (\lambda I - A)\mathbf{u}$, si ha

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} (\lambda + |\mathbf{k}|^2) u_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} (\lambda + |\mathbf{k}|^2) \widetilde{u}_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}$$

e quindi, eguagliando i termini contenenti la stessa $\mathbf{v}_\mathbf{k}$, si ottiene $u_\mathbf{k} = \widetilde{u}_\mathbf{k}$ $\forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1$, cioè $\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}}$. Quindi $(\lambda I - A)$ è iniettivo $\forall\, \lambda > 0$.

Sia ora $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_\sigma$, con $\sigma \in \mathbb{R}$ e facciamo vedere che

$$\forall\, \lambda > 0\, \exists \mathbf{u} \in \mathcal{H}_{\sigma+2} : \mathbf{f} = (\lambda I - A)\mathbf{u}.$$

Se $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} f_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}$ è la serie di Fourier di $\mathbf{f}$, basterà porre

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} u_\mathbf{k} \mathbf{v}_\mathbf{k}, \qquad u_\mathbf{k} \equiv \frac{f_\mathbf{k}}{\lambda + |\mathbf{k}|^2}\, \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1. \quad (2.14)$$

Infatti, è chiaro dalla relazione 2.13 che $\mathbf{f} = (\lambda I - A)\mathbf{u}$, inoltre si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2_{\sigma+2} &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma+4} |u_\mathbf{k}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma+4} \frac{|f_\mathbf{k}|^2}{(\lambda + |\mathbf{k}|^2)^2} \\ &< \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |f_\mathbf{k}|^2 = \|\mathbf{f}\|^2_\sigma, \end{aligned} \quad (2.15)$$

il che implica che la funzione $\mathbf{u}$ definita dalla 2.14 è effettivamente un elemento di $\mathcal{H}_{\sigma+2}$. Pertanto concludiamo che $(\lambda I - A) : \mathcal{H}_{\sigma+2} \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ è anche suriettivo $\forall\, \lambda > 0$ e $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$, quindi è invertibile.

Step 4. Calcoliamo la norma di $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, come operatore da $\mathcal{H}_\sigma$ in $\mathcal{H}_\sigma$: sappiamo che $\mathbf{u} = R_\lambda \mathbf{f}$ è definita $\forall\, \mathbf{f} \in \mathcal{H}_\sigma$ dalla 2.14, quindi si ha

$$
\begin{aligned}
\|R_\lambda \mathbf{f}\|_\sigma^2 &= \|\mathbf{u}\|_\sigma^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |u_\mathbf{k}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma} \frac{|f_\mathbf{k}|^2}{(\lambda + |\mathbf{k}|^2)^2} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma} |f_\mathbf{k}|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \|\mathbf{f}\|_\sigma^2, \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

da cui si ottiene

$$
\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\, \lambda > 0.
$$

Abbiamo quindi dimostrato che $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)} \leq \frac{1}{\lambda}$ $\forall\, \lambda > 0$, cioè l'operatore A soddisfa le ipotesi del teorema di Hille-Yosida. $\square$

A questo punto possiamo concludere che per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$ il problema

$$
\begin{cases}
\frac{dX}{dt} = AX(t) & \forall\, t \geq 0, \\
\\
X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_{\sigma+2}
\end{cases}
\qquad (2.17)
$$

ha un'unica soluzione $X \in C^1([0, +\infty); \mathcal{H}_\sigma) \cap C([0, +\infty); \mathcal{H}_{\sigma+2})$, data da

$$
X(t) = e^{tA} x_0 \qquad \forall\, t \geq 0,\ x_0 \in \mathcal{H}_{\sigma+2}.
$$

In particolare il problema 2.1, che corrisponde al caso $\sigma = -1$, ha evidentemente un'unica soluzione $X \in C^1([0, +\infty); \mathcal{H}_{-1}) \cap C([0, +\infty); \mathcal{H}_1)$.

2.2 Il problema non omogeneo

Nella dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni saranno utili alcuni risultati relativi alla regolarità della soluzione di un problema più complicato rispetto a quello studiato nel paragrafo precedente, che si ottiene aggiungendo all'equazione differenziale $\frac{dX}{dt} = AX(t)$ un termine che la rende non omogenea:

$$
\begin{cases}
\frac{dX}{dt} = AX(t) + f(t) & \forall\, t \in [0, T], \\
\\
X(0) = x_0.
\end{cases}
\qquad (2.18)
$$

Stavolta ambientiamo il problema in uno spazio di Hilbert H, con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $|\cdot|$, per cui x_0 sarà un elemento di H e X ed f saranno funzioni definite su $[0, T]$ a valori in H; precisamente, supporremo che f appartenga allo spazio $L^2([0, T]; H)$. Come primo tentativo di ricerca della soluzione si può provare a procedere formalmente con il metodo della variazione delle costanti, proprio come si fa nel caso delle equazioni differenziali ordinarie non omogenee per funzioni reali. In questo modo si ottiene per $X(t)$ l'espressione

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.19}$$

Definiamo allora la soluzione "mild" del problema 2.18 come la funzione definita dall'equazione 2.19. Un primo risultato ([4, capitolo 1, §3.2]) afferma che la funzione X appartiene allo spazio $C([0,T];H)$. Tuttavia, potrebbe essere utile conoscere qualche ulteriore risultato di regolarità della soluzione: per esempio, potremmo essere interessati all'esistenza di una soluzione stretta, cioè di una funzione X appartenente allo spazio

$$W \equiv W^{1,2}([0,T];H) \cap L^2([0,T];D(A))$$

tale che si abbia

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + f(t) \text{ per quasi ogni } t \in [0,T], \\ \\ X(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{2.20}$$

Oppure potremmo essere interessati all'esistenza di una soluzione forte, cioè di una funzione $X \in L^2([0,T];H)$ tale che, per un'opportuna successione $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni contenuta in W, si abbia

$$\begin{aligned} &X_k \longrightarrow X,\ \frac{dX_k}{dt} - AX_k \longrightarrow f \text{ in } L^2([0,T];H), \\ &X_k(0) \longrightarrow x_0 \text{ in } H \text{ per } k \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Per dimostrare l'esistenza di soluzioni di questo tipo c'è bisogno di ipotesi più forti sull'operatore A; le ipotesi che servono sono legate ad alcune proprietà dei semigruppi fortemente continui di operatori lineari, che ora enunciamo in modo generale (seguiamo l'approccio di [4, capitolo 1, §2, 3]).

Definizione 2.9 *Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo di operatori sullo spazio di Banach E. Si definisce tipo di S il numero reale*

$$\omega_0(S) \equiv \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\|. \tag{2.22}$$

Teorema 2.10 *Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo di operatori sullo spazio di Banach E. Allora S è di tipo negativo ($\omega_0(S) < 0$) se e solo se esistono $K \geq 1$ e $\omega < 0$ tali che*

$$\|S(t)\| \leq Ke^{\omega t} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.23}$$

Definizione 2.11 *Sia* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigruppo fortemente continuo di operatori sullo spazio di Banach* E *e sia* $A : D(A) \to E$ *il suo generatore infinitesimo. Diciamo che* $S(t)$ *è un semigruppo analitico se* A *è un operatore settoriale, cioè se valgono le seguenti due condizioni:*

1. $\exists\, \theta_0 > \frac{\pi}{2},\, \omega \in \mathbb{R}$ *tali che* $\rho(A) \supset S_{\omega,\theta_0} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| < \theta_0\}$;

2. $\exists\, M > 0$ *tale che si ha*

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad \forall\, \lambda \in S_{\omega,\theta_0}, \tag{2.24}$$

   dove R_λ *indica l'operatore risolvente di* A.

L'importanza di questa definizione consiste principalmente nel fatto che la condizione che l'operatore A sia settoriale è sufficiente affinché si possa definire il semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ applicando la formula integrale di Cauchy su un'opportuna curva γ, con sostegno contenuto in $\rho(A)$:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda \qquad \forall\, t \geq 0.$$

A questo punto siamo pronti a formulare delle ipotesi sufficienti a garantire l'esistenza di una soluzione forte e di una soluzione stretta del problema 2.18 (vedremo che tali ipotesi sono proprio quelle della proposizione seguente).

Proposizione 2.12 *Sia* H *uno spazio di Hilbert e supponiamo che l'operatore* $A : D(A) \subset H \to H$ *possieda le seguenti proprietà:*

1. A *è un operatore autoaggiunto;*

2. A *è il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *di tipo negativo, cioè per un certo* $K \geq 1$ *e per un certo* $\omega < 0$ *si ha*
$$\|S(t)\| \leq K e^{\omega t} \qquad \forall\, t \geq 0;$$

3. $\langle Ax, x\rangle \leq \omega |x|^2 \;\forall\, x \in D(A)$.

Allora il semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *è anche analitico, cioè* A *è in realtà il generatore infinitesimo di un semigruppo analitico di tipo negativo.*

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che, grazie al punto 3 delle ipotesi, l'operatore $A - \omega I$ è autoaggiunto e definito negativo, perciò lo spettro dell'operatore A è contenuto nella semiretta $(-\infty, \omega]$; ciò significa che $\mathbb{C}\backslash(-\infty, \omega] \subset \rho(A)$, quindi

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, \omega],\, \forall\, y \in H\; \exists\, x \in D(A) :\; \lambda x - Ax = y.$$

Sia ora $\lambda = \omega + \rho e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi)$; moltiplichiamo scalarmente per $e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ entrambi i membri dell'identità

$$\left(\omega + \rho e^{i\theta}\right) x - Ax = \rho e^{i\theta} x - (A - \omega I)x = y$$

e prendiamone la parte reale; in questo modo otteniamo

$$\Re\left[\left\langle y, e^{-i\frac{\theta}{2}}x\right\rangle\right] = |x|^2 \rho \cos\frac{\theta}{2} - \langle (A - \omega I)x, x\rangle \cos\frac{\theta}{2} \geq |x|^2 \rho \cos\frac{\theta}{2},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato ancora il punto 3 delle ipotesi. In definitiva si ha

$$|x|^2 \rho \cos\frac{\theta}{2} \leq \Re\left[\left\langle y, e^{-i\frac{\theta}{2}}x\right\rangle\right] \leq |x||y|,$$

quindi otteniamo

$$|x| = |R_\lambda y| \leq \frac{|y|}{\rho \cos\frac{\theta}{2}} \Longrightarrow \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\rho\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{|\lambda - \omega| \cos\frac{\theta}{2}}.$$

A questo punto basta scegliere arbitrariamente $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e per ogni $\theta \in [0, \theta_0)$ si ha

$$\cos\frac{\theta}{2} > \cos\frac{\theta_0}{2} > 0 \Longrightarrow \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda - \omega| \cos\frac{\theta_0}{2}} \equiv \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad \forall\, \lambda \in S_{\omega,\theta_0};$$

poiché abbiamo già visto che $S_{\omega,\theta_0} \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, \omega] \subset \rho(A)$, questo basta per concludere che A è un operatore settoriale e quindi il semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è analitico. $\square$

Torniamo ora al problema iniziale 2.18; un primo risultato riguardante la soluzione forte è il seguente.

Proposizione 2.13 *Supponiamo che l'operatore A soddisfi le ipotesi della proposizione 2.12. Allora per ogni $T > 0$, per ogni $f \in L^2([0, T]; H)$ e per ogni $x_0 \in H$ il problema 2.18 ha un'unica soluzione forte, data proprio dalla formula 2.19:*

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

È poi possibile approssimare la soluzione forte con una successione di soluzioni di problemi più semplici: precisamente, definiamo le approssimazioni di Yosida dell'operatore A come

$$A_n \equiv nAR_n = n^2 R_n - nI \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{dX_n}{dt} = A_n X_n(t) + f(t) \qquad \forall\, t \in [0,T], \\ \\ X_n(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Grazie al fatto che l'operatore A_n è limitato per ogni $n \in \mathbb{N}$, il problema 2.25 ammette un'unica soluzione stretta espressa da una formula analoga alla 2.19:

$$X_n(t) = e^{tA_n} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

Si può dimostrare allora che la successione X_n converge a X, soluzione forte del problema 2.18, in $L^2([0,T];H)$ per $n \to +\infty$.

Per stabilire l'esistenza di una soluzione stretta, consideriamo prima di tutto il caso $X(0) = 0$; supponiamo che l'operatore A soddisfi le ipotesi della proposizione 2.12 e cerchiamo di utilizzare questo fatto per dimostrare che la soluzione mild del problema, che in questo caso si riduce a

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T], \tag{2.26}$$

appartiene allo spazio $W = W^{1,2}([0,T];H) \cap L^2([0,T];D(A))$.

A questo scopo è utile prima di tutto introdurre la trasformata di Fourier per funzioni a valori in H. Procedendo come nel caso delle funzioni a valori reali, si può definire prima la trasformata di Fourier per funzioni $C^\infty(\mathbb{R};H)$ a supporto compatto come

$$\hat{u}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} u(t) dt.$$

Se $\{e_i\}_{i \in I}$ è un sistema ortonormale completo in H, dall'identità di Parseval applicata alle funzioni scalari$\langle u(t), e_i \rangle$, $i \in I$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle \hat{u}(k), e_i \rangle|^2 dk = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\langle u(t), e_i \rangle|^2 dt \qquad \forall\, i \in I;$$

sommando su $i \in I$ si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 dk = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt,$$

cioè l'identità di Parseval si estende anche alle funzioni di $C^\infty(\mathbb{R};H)$. Ne segue che la trasformata di Fourier è un operatore lineare continuo rispetto alla norma di $L^2(\mathbb{R};H)$ e quindi, essendo definito su un sottoinsieme denso di $L^2(\mathbb{R};H)$, si può estendere a tutto $L^2(\mathbb{R};H)$, proprio come nel caso delle funzioni a valori reali.

Lemma 2.14 *Supponiamo che l'operatore A soddisfi le ipotesi della proposizione 2.12. Allora per ogni $T > 0$ e per ogni $f \in L^2([0,T];H)$ si ha*

$$\int_0^T |AX(t)|^2 dt \le (M+1)^2 \int_0^T |f(t)|^2 dt, \tag{2.27}$$

dove X è definita dalla 2.26 e M è la costante che compare nella relazione 2.24.

Dimostrazione. Prendiamo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione $\frac{dX}{dt} = AX(t) + f(t)$; per far vedere che il procedimento è lecito si può utilizzare il fatto che, grazie alla proposizione 2.13, $X(t)$ è soluzione forte del problema

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + f(t) & \forall\, t \in [0,T], \\ X(0) = 0, \end{cases}$$

quindi si può fare prima il calcolo per le soluzioni X_n del problema approssimante 2.25 e poi passare al limite. In questo modo si ottiene

$$\int_0^T e^{-ikt} \frac{dX}{dt} dt = \int_0^T e^{-ikt} AX(t) dt + \int_0^T e^{-ikt} f(t) dt \Longrightarrow$$

$$ik\hat{X}(k) = A\hat{X}(k) + \hat{f}(k) \Longrightarrow$$

$$\hat{X}(k) = (ikI - A)^{-1}\hat{f}(k) = R_{ik}\hat{f}(k).$$

Grazie al fatto che A è il generatore infinitesimo di un semigruppo analitico, esiste $M > 0$ tale che è verificata la condizione 2.24; stiamo supponendo anche che il semigruppo generato da A sia di tipo negativo, quindi per quanto visto nella proposizione 2.12 la condizione 2.24 è verificata per un $\omega < 0$. Di conseguenza $ik \in S_{\omega,\theta_0}$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$, quindi

$$\|R_{ik}\| \le \frac{M}{|ik - \omega|} = \frac{M}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \qquad \forall\, k \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$|\hat{X}(k)| = |R_{ik}\hat{f}(k)| \le \frac{M}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} |\hat{f}(k)| \qquad \forall\, k \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} |A\hat{X}(k)| &= |ik\hat{X}(k) - \hat{f}(k)| \le |ik\hat{X}(k)| + |\hat{f}(k)| \\ &\le \left(\frac{|k|M}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} + 1\right) |\hat{f}(k)| = \left(\frac{M}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{k^2}}} + 1\right) |\hat{f}(k)| \\ &\le (M+1)|\hat{f}(k)| \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Applicando l'identità di Parseval otteniamo allora

$$\int_0^T |AX(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |A\hat{X}(k)|^2 dk \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (M+1)^2 |\hat{f}(k)|^2 dk$$
$$= (M+1)^2 \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

da cui si ricava proprio la disuguaglianza 2.27. □

Osserviamo poi che, sempre grazie al fatto che A è il generatore infinitesimo di un semigruppo analitico di tipo negativo, $|Ax|$ è una norma sullo spazio $D(A)$ equivalente alla norma del grafico $|x| + |Ax|$. Infatti la condizione $\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda-\omega|}$ è soddisfatta $\forall\, \lambda \in S_{\omega,\theta_0}$ e, poiché $\omega < 0$, $0 \in S_{\omega,\theta_0}$: di conseguenza si ha

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{M}{|\omega|} \equiv C < +\infty \Longrightarrow \frac{|x|}{|Ax|} \leq C \;\forall\, x \in D(A),$$

da cui

$$|Ax| \leq |x| + |Ax| \leq (C+1)|Ax| \qquad \forall\, x \in D(A). \tag{2.28}$$

Pertanto, se consideriamo una funzione $u \in W$, si ha

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{W^{1,2}([0,T];H)} &= \|u\|^2_{L^2([0,T];H)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2([0,T];H)} \\
&= \int_0^T \left[|u(t)|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2\right] dt, \\
\|u\|^2_{L^2([0,T];D(A))} &= \int_0^T |u(t)|^2_{D(A)} dt = \int_0^T |Au(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned}
&\|u\|^2_{W^{1,2}([0,T];H)} + \|u\|^2_{L^2([0,T];D(A))} \\
&= \int_0^T \left[|u(t)|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2 + |Au(t)|^2\right] dt \\
&\leq \int_0^T \left[|u(t)| + |Au(t)|\right]^2 dt + \int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \\
&\leq (C+1)^2 \int_0^T |Au(t)|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \\
&= (C+1)^2 \|Au\|^2_{L^2([0,T];H)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2([0,T];H)} \\
&\leq (C+1)^2 \left[\|Au\|^2_{L^2([0,T];H)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2([0,T];H)}\right].
\end{aligned}$$

Ciò significa che possiamo definire una norma su Wcome

$$\|u\|_W^2 \equiv \left[\|Au\|^2_{L^2([0,T];H)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2([0,T];H)} \right] \qquad \forall\, u \in W.$$

Teorema 2.15 *Supponiamo che l'operatore A soddisfi le ipotesi della proposizione 2.12. Allora per ogni $T > 0$ e per ogni $f \in L^2([0,T];H)$ la funzione*

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

soluzione mild del problema 2.18 con punto iniziale $X(0) = 0$, appartiene allo spazio W, ed inoltre esiste una costante $\widetilde{M} > 0$ tale che

$$\|X\|_W \leq \widetilde{M} \|f\|_{L^2([0,T];H)}. \tag{2.29}$$

Dimostrazione. È sufficiente verificare che le norme $\|AX\|_{L^2([0,T];H)}$ e $\left\|\frac{dX}{dt}\right\|_{L^2([0,T];H)}$ sono entrambe finite; dal lemma 2.14 abbiamo la disuguaglianza

$$\|AX\|^2_{L^2([0,T];H)} \leq (M+1)^2 \|f\|^2_{L^2([0,T];H)},$$

mentre dall'identità $\frac{dX}{dt} = AX(t) + f(t)\ \forall\, t \in [0,T]$ ricaviamo che

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{dX}{dt} \right\|^2_{L^2([0,T];H)} &\leq \left[\|AX\|_{L^2([0,T];H)} + \|f\|_{L^2([0,T];H)} \right]^2 \\
&\leq 2 \left[\|AX\|^2_{L^2([0,T];H)} + \|f\|^2_{L^2([0,T];H)} \right] \\
&\leq 2 \left[(M+1)^2 + 1 \right] \|f\|^2_{L^2([0,T];H)}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, basta definire $\widetilde{M} \equiv \sqrt{3(M+1)^2 + 2}$ per ottenere la disuguaglianza 2.29. □

Un altro risultato utile è il seguente, per il quale è sufficiente supporre che A sia un operatore autoaggiunto.

Teorema 2.16 *Supponiamo che l'operatore A sia autoaggiunto e che sia il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni. Allora per ogni $T > 0$ e per ogni $f \in L^2([0,T];H)$ la funzione*

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

soluzione mild del problema 2.18 con punto iniziale $X(0) = 0$, appartiene allo spazio $C\left([0,T]; D\left((-A)^{1/2}\right)\right)$.

Dimostrazione. Verifichiamo che

$$\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|_{D\left((-A)^{1/2}\right)} < +\infty.$$

La norma nello spazio $D\left((-A)^{1/2}\right)$ è la norma del grafico, quindi in realtà dobbiamo verificare che

$$\sup_{t\in[0,T]} \left[|X(t)| + \left|(-A)^{1/2}X(t)\right|\right] < +\infty.$$

Poiché in precedenza abbiamo visto che $X \in C([0,T];H)$, è chiaro che

$$\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| < +\infty,$$

quindi rimane da far vedere che

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t (-A)^{1/2} e^{(t-s)A} f(s)ds\right| < +\infty.$$

Procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t (-A)^{1/2} e^{(t-s)A} f(s)ds\right| \\
&\leq \sup_{|x|=1} \left\langle x, \int_0^t (-A)^{1/2} e^{(t-s)A} f(s)ds\right\rangle \\
&= \sup_{|x|=1} \int_0^t \left\langle x, (-A)^{1/2} e^{(t-s)A} f(s)\right\rangle ds \\
&= \sup_{|x|=1} \int_0^t \left\langle (-A)^{1/2} e^{(t-s)A} x, f(s)\right\rangle ds \\
&\leq \sup_{|x|=1} \int_0^t \left|(-A)^{1/2} e^{(t-s)A} x\right| |f(s)|\, ds \\
&\leq \sup_{|x|=1} \|f\|_{L^2([0,t];H)} \left[\int_0^t \left|(-A)^{1/2} e^{(t-s)A} x\right|^2 ds\right]^{1/2};
\end{aligned}$$

Osserviamo poi che

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|(-A)^{1/2} e^{(t-s)A} x\right|^2 ds &= \int_0^t \left|(-A)^{1/2} e^{sA} x\right|^2 ds \\
&= \int_0^t \left\langle (-A)^{1/2} e^{sA} x, (-A)^{1/2} e^{sA} x\right\rangle ds \\
&= \int_0^t \left\langle -Ae^{sA}x, e^{sA}x\right\rangle ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\left|e^{sA}x\right|^2 ds \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left|e^{tA}x\right|^2 - |x|^2\right] \qquad \forall\, x \in H.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int_0^t \left|(-A)^{1/2}e^{(t-s)A}x\right|^2 ds \leq \frac{1}{2}|x|^2 \qquad \forall\, t \in [0,T] \Longrightarrow$$

$$\left|\int_0^t (-A)^{1/2}e^{(t-s)A}f(s)ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_{L^2([0,T];H)} \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

da cui segue la tesi. □

Infine riportiamo il risultato relativo al problema 2.18 con punto iniziale non nullo ([4, capitolo 1, §3.6.3]):

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + f(t) \qquad \forall\, t \in [0,T], \\ \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Teorema 2.17 *Supponiamo che l'operatore A soddisfi le ipotesi della proposizione 2.12. Allora per ogni $T > 0$, per ogni $f \in L^2([0,T];H)$ e per ogni $x_0 \in D\left((-A)^{1/2}\right)$ la soluzione mild del problema 2.30, cioè la funzione*

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

appartiene allo spazio W.

Grazie ai teoremi 2.15, 2.16 e 2.17 siamo ora in grado di ottenere i risultati di cui avremo bisogno nella dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione di Navier-Stokes stocastica.

Corollario 2.18 *Consideriamo il caso in cui $H = \mathcal{H}_\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $D(A) = \mathcal{H}_{\sigma+2}$ e A è l'operatore di Stokes. Allora, per ogni $T > 0$ e per ogni $f \in L^2([0,T];\mathcal{H}_\sigma)$, la soluzione mild del problema 2.18 con punto iniziale nullo, espressa dalla formula*

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

appartiene allo spazio

$$W^{1,2}([0,T];\mathcal{H}_\sigma) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2}) \cap C([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+1}).$$

Inoltre esiste una costante $C > 0$ tale che è soddisfatta la disuguaglianza

$$\|X\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2})} + \|X\|_{C([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+1})} \leq C\|f\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_\sigma)}. \tag{2.31}$$

Dimostrazione. Facciamo vedere che le ipotesi della proposizione 2.12 sono soddisfatte dall'operatore A di Stokes, definito dalla relazione 1.58, sullo spazio $\mathcal{H}_\sigma$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$. Il fatto che l'operatore A sia autoaggiunto è già stato verificato nel paragrafo 1.5.1; restano quindi da verificare le ipotesi 2 e 3 della proposizione 2.12. Per quanto riguarda l'ipotesi 2 osserviamo che, se $\mathbf{u}$ è un elemento di $\mathcal{H}_\sigma$ e $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,|\mathbf{k}|\geq 1} u_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ è la sua serie di Fourier, si ha

$$e^{tA}\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,|\mathbf{k}|\geq 1} e^{-t|\mathbf{k}|^2} u_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \Longrightarrow$$

$$\left\|e^{tA}\mathbf{u}\right\|_\sigma^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma} e^{-2t|\mathbf{k}|^2} |u_{\mathbf{k}}|^2 \leq e^{-t} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma}|u_{\mathbf{k}}|^2 = e^{-t}\|\mathbf{u}\|_\sigma^2$$

$$\Longrightarrow \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)} \leq e^{-t}$$

e quindi l'ipotesi 2 è verificata con $\omega = -1$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda l'ipotesi 3, si ha

$$A\mathbf{u} = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^2 u_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \Longrightarrow$$

$$\langle\langle A\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\rangle_\sigma = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^{2\sigma+2}|u_{\mathbf{k}}|^2 = -\|\mathbf{u}\|_{\sigma+1}^2 \leq -\|\mathbf{u}\|_\sigma^2,$$

il che significa che anche l'ipotesi 3 è soddisfatta con $\omega = -1$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$.

In base al teorema 2.15, il fatto che l'operatore di Stokes soddisfi le ipotesi della proposizione 2.12 è sufficiente per concludere che, per ogni $T > 0$ e per ogni $f \in L^2([0,T];\mathcal{H}_\sigma)$, la funzione

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

appartiene allo spazio

$$W^{1,2}([0,T];\mathcal{H}_\sigma) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2})$$

e soddisfa, per un'opportuna costante $C_1 > 0$, la disuguaglianza

$$\|X\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2})} \leq \|X\|_W \leq C_1\|f\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_\sigma)}. \tag{2.32}$$

In realtà, se l'operatore A soddisfa le ipotesi della proposizione 2.12, esso soddisfa anche le ipotesi del teorema 2.16 e quindi si può concludere che la funzione X appartiene anche allo spazio $C\left([0,T];D\left((-A)^{1/2}\right)\right)$. Nel nostro caso si ha $D\left((-A)^{1/2}\right) = \mathcal{H}_{\sigma+1}$, perciò risulta che

$$X \in C\left([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+1}\right);$$

inoltre X soddisfa, per un'opportuna costante $C_2 > 0$, la disuguaglianza

$$\|X\|_{C([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+1})} \leq C_2\|f\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_\sigma)}. \tag{2.33}$$

Dalle disuguaglianze 2.32 e 2.33 segue allora immediatamente la 2.31, con $C = C_1 + C_2$. $\square$

In particolare, per l'equazione di Navier-Stokes sarà interessante il caso $\sigma = -1$.

Corollario 2.19 *Consideriamo il caso in cui $H = \mathcal{H}_{-1}$, $D(A) = \mathcal{H}_1$ e A è l'operatore di Stokes. Allora, per ogni $T > 0$ e per ogni $f \in L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})$, la soluzione mild del problema 2.18 con punto iniziale nullo, espressa dalla formula*

$$X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

appartiene allo spazio

$$W^{1,2}([0,T];\mathcal{H}_{-1}) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \cap C([0,T];\mathcal{H}_0).$$

Inoltre esiste una costante $C > 0$ tale che è soddisfatta la disuguaglianza

$$\|X\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} + \|X\|_{C([0,T];\mathcal{H}_0)} \le C\|f\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}. \tag{2.34}$$

Dal teorema 2.17 si ottiene invece che la funzione

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

soluzione del problema 2.18 con punto iniziale $x_0 \in \mathcal{H}_{\sigma+1}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, appartiene allo spazio $W^{1,2}([0,T];\mathcal{H}_\sigma) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2})$; allora dal corollario 2.18 segue che anche $e^{\cdot A}x_0$ appartiene a $W^{1,2}([0,T];\mathcal{H}_\sigma) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2})$, in particolare appartiene a $L^2([0,T];\mathcal{H}_{\sigma+2})$. Nel caso in cui $\sigma = -1$ si avrà quindi

$$e^{\cdot A}x_0 \in L^2([0,T];\mathcal{H}_1). \tag{2.35}$$

Questo fatto, che sarà utile in seguito, si può in realtà dimostrare anche in modo più diretto, calcolando la norma di $e^{\cdot A}x_0$ sullo spazio $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ e facendo vedere che è finita.

Corollario 2.20 *Per ogni $T > 0$ e per ogni $x_0 \in \mathcal{H}_0$ la funzione $t \mapsto e^{tA}x_0$ appartiene allo spazio*

$$C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1).$$

Dimostrazione. La funzione $e^{\cdot A}x_0$ è continua da $[0,T]$ in $\mathcal{H}_0$ perché $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ è un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari sullo spazio $\mathcal{H}_\sigma$ per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$ (come segue dalla proposizione 2.8), in particolare sullo spazio $\mathcal{H}_0$. Inoltre osserviamo che, se x è un elemento di $\mathcal{H}_1$ e $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\ge 1} x_\mathbf{k}\mathbf{v}_\mathbf{k}$ è la sua serie di Fourier, si ha

$$\|x\|_1^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\ge 1} |\mathbf{k}|^2 |x_\mathbf{k}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\ge 1} ||\mathbf{k}|x_\mathbf{k}|^2 = \left\|(-A)^{1/2}\right\|_0^2;$$

pertanto il calcolo diretto mediante il quale si può vedere che $e^{\cdot A}x_0$ appartiene anche a $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ è il seguente:

$$\begin{aligned}
\|e^{\cdot A}x_0\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} &= \int_0^T \|e^{tA}x_0\|_1^2 dt = \int_0^T \|(-A)^{1/2}e^{tA}x_0\|_0^2 \\
&= \int_0^T \left\langle\!\left\langle (-A)^{1/2}e^{tA}x_0, (-A)^{1/2}e^{tA}x_0 \right\rangle\!\right\rangle_0 dt \\
&= \int_0^T \langle\langle -Ae^{tA}x_0, e^{tA}x_0 \rangle\rangle_0 \, dt \qquad (2.36)\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|e^{tA}x_0\|_0^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\|x_0\|_0^2 - \|e^{TA}x_0\|_0^2\right] \le \frac{1}{2}\|x_0\|_0^2 < +\infty. \ \square
\end{aligned}$$

2.3 La convoluzione stocastica

Come preannunciato, perturbiamo ora il problema 2.1 aggiungendo un termine di rumore: precisamente, se W è un Q-processo di Wiener definito in uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathcal{H}_0$ e $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, consideriamo il problema

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t) + BdW(t) & \forall\, t \ge 0, \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_0. \end{cases} \qquad (2.37)$$

Si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale stocastica ambientato nello spazio $\mathcal{H}_{-1}$ e $X(t)$ è un processo stocastico a valori in $\mathcal{H}_1$.

2.3.1 Definizione

Come abbiamo già fatto nei precedenti due paragrafi, riformuliamo il problema in un contesto più ampio (seguiamo l'approccio di [6, capitolo 2]). Siano U e H due spazi di Hilbert reali separabili arbitrari, $A : D(A) \subset H \to H$ e $B : U \to H$ due operatori lineari, W un Q-processo di Wiener definito in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in U; indichiamo con $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ i prodotti scalari sugli spazi U e H e con $|\cdot|_U$, $|\cdot|_H$ le corrispondenti norme. Consideriamo allora il problema

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t) + BdW(t) & \forall\, t \ge 0, \\ X(0) = x \in H. \end{cases} \qquad (2.38)$$

Possiamo procedere formalmente utilizzando il metodo della variazione delle costanti: in questo modo otteniamo

$$X(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}BdW(s) \equiv e^{tA}x + W_A(t) \qquad \forall\, t \ge 0. \qquad (2.39)$$

Questo significa che, per ogni scelta del punto iniziale $x \in H$, la soluzione del problema 2.38 è costituita da una parte deterministica e da una parte aleatoria: $e^{tA}x$ si può interpretare $\forall\, t \geq 0$ come una variabile aleatoria indipendente da ω e quindi $\{e^{tA}x\}_{t\geq 0}$ è un processo deterministico, mentre $\{W_A(t)\}_{t\geq 0}$ è il processo stocastico definito da

$$\begin{aligned} W_A \quad &: \quad \Omega \times [0, +\infty) \longrightarrow H \\ &\qquad (\omega, t) \longmapsto W_A(\omega, t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B dW(\omega, s) \end{aligned} \tag{2.40}$$

e rappresenta quindi la parte aleatoria della soluzione; tale processo prende il nome di convoluzione stocastica. Per ogni $t \geq 0$ indichiamo con $W_A(t)$ la variabile aleatoria $W_A(t) : \Omega \to H$, $\omega \mapsto W_A(\omega, t)$; indichiamo invece con $W_A(\omega)$, $\omega \in \Omega$, la traiettoria del processo corrispondente all'eventualità ω, cioè l'applicazione $W_A(\omega) : [0, +\infty) \to H$, $t \mapsto W_A(\omega, t)$.

Diciamo allora che il processo stocastico $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, con $X(t) = e^{tA}x + W_A(t)$, è una soluzione "mild" del problema 2.38 e cerchiamo prima di tutto di far vedere che tale processo è ben definito. È utile ricordare che, come abbiamo visto nella proposizione 1.19, un processo di Wiener a valori in U si può espandere in serie come

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) e_k \qquad \forall\, t \geq 0, \tag{2.41}$$

dove $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo di vettori di U e $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di processi di Wiener reali indipendenti in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (si tratta semplicemente dell'espansione in serie 1.51, in cui abbiamo inglobato λ_k nella definizione di β_k). Inoltre, in base alla proposizione 1.20, per ogni $t \geq 0$ si ha

$$W_A(t) = \lim_{N\to+\infty} \int_0^t e^{(t-s)A} B dW_N(s) \qquad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H), \tag{2.42}$$

dove

$$W_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(t) e_k \qquad \forall\, t \geq 0,\ N \in \mathbb{N};$$

quindi, per far vedere che il processo $W_A(t)$ è ben definito, è sufficiente far vedere che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s) \tag{2.43}$$

è convergente in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$ $\forall\, t \geq 0$. A questo scopo facciamo delle ipotesi supplementari riguardo agli operatori A e B.

Ipotesi 2.21 *1. $A : D(A) \to H$ è il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni sullo spazio H;*

2. $B \in \mathcal{L}(U, H)$;

3. l'operatore $Q_t : H \to H$*, definito dalla relazione*

$$Q_t x = \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} x ds \qquad \forall\, x \in H,\ t \geq 0, \tag{2.44}$$

è di classe traccia $\forall\, t > 0$.

Il termine generico della serie 2.43 è l'integrale di Itô di una funzione a valori in H: esso si può definire come

$$\int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s) = \sum_{h=1}^{+\infty} f_h \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_k, f_h \right\rangle_H d\beta_k(s) \qquad \forall\, t \geq 0, \tag{2.45}$$

dove $\{f_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo di vettori di H.

Lemma 2.22 *Supponiamo che valgano le ipotesi 2.21. Allora* $\forall\, t \geq 0$ *si ha*

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] = \int_0^t \left|e^{(t-s)A} B e_k\right|_H^2 ds. \tag{2.46}$$

Dimostrazione. Grazie alla relazione 2.45 ed al teorema della convergenza monotona si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{h=1}^{+\infty}\left|\int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_k, f_h \right\rangle_H d\beta_k(s)\right|^2\right] \\
&= \sum_{h=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_k, f_h \right\rangle_H d\beta_k(s)\right|^2\right];
\end{aligned}$$

utilizziamo ora la proprietà 1.46 dell'integrale di Itô, poi applichiamo ancora il teorema della convergenza monotona; in questo modo otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] &= \sum_{h=1}^{+\infty} \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\left\langle e^{(t-s)A} B e_k, f_h \right\rangle_H\right|^2\right] ds \\
&= \sum_{h=1}^{+\infty} \int_0^t \left|\left\langle e^{(t-s)A} B e_k, f_h \right\rangle_H\right|^2 ds \\
&= \int_0^t \sum_{h=1}^{+\infty} \left|\left\langle e^{(t-s)A} B e_k, f_h \right\rangle_H\right|^2 ds \\
&= \int_0^t \left|e^{(t-s)A} B e_k\right|_H^2 ds,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 2.23 *Supponiamo che valgano le ipotesi 2.21. Allora per ogni $t \geq 0$ la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)$$

converge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$ ad una variabile aleatoria gaussiana $W_A(t)$ avente media nulla ed operatore covarianza Q_t.

Dimostrazione. Siano $t \geq 0$ e $n, p \in \mathbb{N}$. Allora si ha la seguente catena di uguaglianze (il primo passaggio si ottiene tenendo conto del fatto che i processi β_k sono tutti a media nulla ed indipendenti fra loro, l'ultimo applicando il lemma 2.22):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_0^t \left|e^{(t-s)A} B e_k\right|_H^2 ds. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $t - s \equiv s'$ otteniamo

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)\right|_H^2\right] = \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_0^t \left|e^{s'A} B e_k\right|_H^2 ds'.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \left|e^{sA} B e_k\right|_H^2 ds &= \sum_{h,k=1}^{+\infty} \int_0^t \left|\left\langle e^{sA} B e_k, f_h \right\rangle_H\right|^2 ds \\
&= \sum_{h,k=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e^{sA} B e_k, f_h \right\rangle_H \left\langle f_h, e^{sA} B e_k \right\rangle_H ds \\
&= \sum_{h,k=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e_k, B^* e^{sA^*} f_h \right\rangle_U \left\langle B^* e^{sA^*} f_h, e_k \right\rangle_U ds \\
&= \sum_{h=1}^{+\infty} \int_0^t \left|B^* e^{sA^*} f_h\right|_U^2 ds \\
&= \sum_{h=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} f_h, f_h \right\rangle_H ds = \operatorname{Tr} Q_t < +\infty.
\end{aligned} \qquad (2.48)$$

Ciò significa che la successione delle somme parziali della serie 2.48 è di Cauchy, quindi la catena di uguaglianze 2.47 implica che la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s)$$

è di Cauchy in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$, che è completo; pertanto tale serie converge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$ ad una variabile aleatoria $W_A(t)$. Questa variabile aleatoria, essendo il limite in L^2 di una successione di variabili aleatorie gaussiane, è anch'essa gaussiana. Precisamente, la media di $W_A(t)$ è il limite debole in H delle medie delle somme parziali della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s);$$

poiché ciascuna di queste medie è nulla grazie alla proprietà 1.45 dell'integrale di Itô, si ha anche $\mathbb{E}[W_A(t)] = 0 \; \forall \, t \geq 0$.

Calcoliamo ora l'operatore covarianza $\widetilde{Q}_t$ di $W_A(t)$: se h, k sono due vettori di H, si ha

$$\begin{aligned} &\left\langle \widetilde{Q}_t h, k \right\rangle_H = \mathbb{E}\left[\langle W_A(t), h \rangle_H \langle W_A(t), k \rangle_H \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_i, h \right\rangle_H d\beta_i(s) \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_j, k \right\rangle_H d\beta_j(s) \right]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Osserviamo che la successione

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_i, h \right\rangle_H d\beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_j, h \right\rangle_H d\beta_j(s) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è il prodotto delle due successioni

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_i, h \right\rangle_H d\beta_i(s) \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$
$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_j, h \right\rangle_H d\beta_j(s) \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

che convergono in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$ per ogni $t \geq 0$ grazie al teorema 1.20, e di conseguenza convergono anche in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$; questo implica che l'intera successione converge in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$. Pertanto, riprendendo l'equazione 2.49, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widetilde{Q}_t h, k \right\rangle_H \\
&= \sum_{i,j=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_i, h \right\rangle_H d\beta_i(s) \int_0^t \left\langle e^{(t-s)A} B e_j, k \right\rangle_H d\beta_j(s)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \mathbb{E}\left[\left\langle e^{(t-s)A} B e_i, h \right\rangle_H \left\langle e^{(t-s)A} B e_i, k \right\rangle_H\right] ds \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e_i, B^* e^{s' A^*} h \right\rangle_U \left\langle e_i, B^* e^{s' A^*} k \right\rangle_U ds',
\end{aligned} \tag{2.50}$$

dove nella seconda uguaglianza è stata utilizzata la proprietà 1.46 dell'integrale di Itô. Osserviamo ora che la successione

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} k \right\rangle_U \right\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{2.51}$$

converge a $\left\langle B^* e^{sA^*} h, B^* e^{sA^*} k \right\rangle_U = \left\langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} h, k \right\rangle_H$ $\forall\, s \in [0, t]$, inoltre $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, s \in [0, t]$ si ha

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} k \right\rangle_U \right| \\
&= \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U e_i, B^* e^{sA^*} k \right\rangle_U \right| \\
&= \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} e^{sA} B \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U e_i, k \right\rangle_H \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{n} e^{sA} B \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U e_i \right|_H |k|_H \\
&\leq \| e^{sA} B \|_{\mathcal{L}(U,H)} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U e_i \right|_U |k|_H \\
&\leq \| e^{sA} B \|_{\mathcal{L}(U,H)} \left| B^* e^{sA^*} h \right|_U |k|_H \\
&\leq \| e^{sA} B \|_{\mathcal{L}(U,H)}^2 |h|_H |k|_H \leq \| B \|_{\mathcal{L}(U,H)}^2 |h|_H |k|_H;
\end{aligned}$$

questo significa che tutti gli elementi della successione 2.51 sono maggiorati, in modulo, da una medesima costante, quindi la successione converge anche in L^1. Di conseguenza si può passare al limite sotto il segno di integrale nell'espressione 2.50, ottenendo così

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{Q}_t h, k \right\rangle_H &= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} k \right\rangle_U ds \\
&= \int_0^t \sum_{i=1}^{+\infty} \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} h \right\rangle_U \left\langle e_i, B^* e^{sA^*} k \right\rangle_U ds \\
&= \int_0^t \left\langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} h, k \right\rangle_H ds = \langle Q_t h, k \rangle_H .
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che $\widetilde{Q}_t = Q_t$ per ogni $t \geq 0$. □

Vogliamo ora studiare $W_A(t)$ come una funzione di t: a questo scopo, introduciamo lo spazio dei processi continui in media quadratica ed adattati a W.

Definizione 2.24 *Sia $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ un processo stocastico a valori in H. Diciamo allora che X è continuo in media quadratica ed adattato su $[0,T]$ se valgono le seguenti condizioni:*

1. *X è adattato a W, cioè per ogni $t \in [0,T]$ la variabile aleatoria $X(t)$ è misurabile rispetto alla σ-algebra generata dal blocco di variabili aleatorie $\{W(s)\}_{s\in[0,t]}$;*

2. *per ogni $t \in [0,T]$ si ha*

$$\mathbb{E}\left[|X(t)|_H^2\right] < +\infty; \tag{2.52}$$

3. *per ogni $t \in [0,T]$ si ha*

$$\lim_{s\to t} \mathbb{E}[|X(s) - X(t)|_H^2] = 0. \tag{2.53}$$

Indichiamo lo spazio vettoriale dei processi stocastici continui in media quadratica ed adattati su $[0,T]$ con il simbolo $C_W([0,T];H)$; questo spazio, dotato della norma

$$\|X\|_{C_W([0,T];H)} = \left[\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(|X(t)|_H^2\right)\right]^{1/2} \qquad \forall\, X \in C_W([0,T];H), \tag{2.54}$$

è uno spazio di Banach.

Proposizione 2.25 *Supponiamo che valgano le ipotesi 2.21: allora si ha*

$$W_A \in C_W([0,T];H) \qquad \forall\, T > 0.$$

Dimostrazione. Il fatto che W_A sia un processo adattato discende dalla sua definizione tramite l'integrale di Itô. Il fatto che la norma in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ di $W_A(t)$ sia limitata $\forall\, t \in [0,T]$ segue dalla proposizione 2.23, infatti

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|W_A(t)|_H^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} |\left\langle W_A(t), e_k \right\rangle_H|^2\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[|\left\langle W_A(t), e_k \right\rangle_H|^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left\langle Q_t e_k, e_k \right\rangle_H = \operatorname{Tr} Q_t < +\infty \qquad \forall\, t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Rimane quindi da verificare la continuità in media quadratica. Siano allora $t, t_0 \in [0,T]$, con $t > t_0$; si ha

$$\begin{aligned}
W_A(t) - W_A(t_0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s) - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{t_0} e^{(t_0-s)A} B e_k d\beta_k(s) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{t_0} \left[e^{(t-s)A} - e^{(t_0-s)A}\right] B e_k d\beta_k(s) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B e_k d\beta_k(s) \equiv I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Poiché un processo di Wiener ha incrementi indipendenti, le due variabili aleatorie I_1 e I_2 sono indipendenti, per cui $\mathbb{E}\left[|I_1 + I_2|^2\right] = \mathbb{E}\left[|I_1|^2\right] + \mathbb{E}\left[|I_2|^2\right]$. Procedendo in modo analogo alla dimostrazione della proposizione 2.23 si trova allora

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|I_1 + I_2|^2\right] \\
&= \int_0^{t_0} \operatorname{Tr}\left[\left(e^{(t-s)A} - e^{(t_0-s)A}\right) BB^* \left(e^{(t-s)A^*} - e^{(t_0-s)A^*}\right)\right] ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \operatorname{Tr}\left[e^{sA} BB^* e^{sA^*}\right] ds.
\end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}\left[|W_A(t) - W_A(t_0)|^2\right] = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. □

2.3.2 Continuità della convoluzione stocastica nello spazio e nel tempo

Supponiamo ora che si abbia $H = U = \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$, dove $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato (poi applicheremo i risultati al nostro caso, in cui $\mathcal{O} =$

$(0,2\pi)\times(0,2\pi))$. Allora W_A è un processo stocastico a valori in $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} W_A \quad &: \quad \Omega\times[0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{L}^2(\mathcal{O}) \\ &\quad\ (\omega,t)\longmapsto W_A(\omega,t), \\ W_A(\omega,t) \quad &: \quad \mathcal{O}\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad\ \mathbf{x}\longmapsto W_A(\omega,t)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In questo caso possiamo interpretare W_A anche come un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^2$ avente come insieme degli indici l'insieme $[0,+\infty)\times\mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} W_A \quad &: \quad \Omega\times[0,+\infty)\times\mathcal{O}\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad\ (\omega,t,\mathbf{x})\longmapsto W_A(\omega,t,\mathbf{x})\equiv W_A(\omega,t)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Utilizziamo sempre la notazione $W_A(\omega)$ per indicare la traiettoria del processo corrispondente all'eventualità ω, cioè l'applicazione

$$\begin{aligned} W_A(\omega) \quad &: \quad [0,+\infty)\times\mathcal{O}\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad\ (t,\mathbf{x})\longmapsto W_A(\omega)(t,\mathbf{x})\equiv W_A(\omega,t,\mathbf{x}), \end{aligned}$$

mentre indichiamo con $W_A(t,\mathbf{x})$ la variabile aleatoria di indice $(t,\mathbf{x})$. Cerchiamo ora di far vedere che $W_A(\omega)$ è continua su $[0,+\infty)\times\mathcal{O}$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega\in\Omega$. A questo scopo facciamo alcune ipotesi supplementari.

Ipotesi 2.26 *1. Per ogni $p>1$ il semigruppo e^{tA} ha un'unica estensione ad un semigruppo fortemente continuo in $\mathbb{L}^p(\mathcal{O})$;*

2. in corrispondenza di ogni $\varepsilon\in[0,1]$, esiste $C_\varepsilon>0$ tale che

$$\|e^{tA}\mathbf{f}\|_{\mathbb{W}^{\varepsilon,p}(\mathcal{O})}\le C_\varepsilon t^{-\varepsilon/2}\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^p(\mathcal{O})} \qquad \forall\,\mathbf{f}\in\mathbb{L}^p(\mathcal{O}),\ t>0,\ p\ge 1; \tag{2.55}$$

3. A e BB^* sono diagonali rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, cioè esistono due successioni di numeri positivi $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che

$$A\mathbf{e}_k=-\alpha_k\mathbf{e}_k,\ BB^*\mathbf{e}_k=\gamma_k\mathbf{e}_k \qquad \forall\,k\in\mathbb{N};$$

4. $\mathbf{e}_k\in C(\overline{\mathcal{O}})$ $\forall\,k\in\mathbb{N}$ ed inoltre esiste $\kappa>0$ tale che

$$|\mathbf{e}_k(\mathbf{x})|\le\kappa \qquad \forall\,k\in\mathbb{N},\ \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{O};$$

5. esiste $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k\alpha_k^{2\alpha-1}<+\infty. \tag{2.56}$$

Lemma 2.27 *Supponiamo che valgano le ipotesi 2.26 e siano $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$ con $m > \frac{2}{\alpha}$; sia poi $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^{2m}([0,T] \times \mathcal{O})$ e definiamo*

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_0^t e^{(t-\sigma)A}(t-\sigma)^{\alpha-1}\mathbf{f}(\sigma)(\mathbf{x})d\sigma \qquad \forall\, t \in [0,T],\, \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

(indichiamo con $\mathbf{f}(\sigma)$ la funzione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\sigma,\mathbf{x})$ ed analogamente con $\mathbf{F}(t)$ la funzione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(t,\mathbf{x})$). Allora $\mathbf{F} \in \mathbb{C}([0,T] \times \mathcal{O})$ ed inoltre esiste una costante $C_{T,m} > 0$ tale che

$$\sup_{t\in[0,T],\,\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |\mathbf{F}(t,\mathbf{x})| \le C_{T,m}\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}. \tag{2.57}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = \alpha$, per cui $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Allora, grazie alla disuguaglianza 2.55, si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbb{W}^{\varepsilon,2m}(\mathcal{O})} &\le \int_0^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\|e^{(t-\sigma)A}\mathbf{f}(\sigma)\|_{\mathbb{W}^{\varepsilon,2m}(\mathcal{O})}d\sigma \\ &\le C_\varepsilon \int_0^t (t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-1}\|\mathbf{f}(\sigma)\|_{\mathbb{L}^{2m}(\mathcal{O})}d\sigma.\end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^{2m}([0,T] \times \mathcal{O})$ e $2m > \frac{4}{\alpha} > 1$, si può applicare la disuguaglianza di Hölder con $p = \frac{2m}{2m-1}$ e $q = 2m$: allora per ogni$t \in [0,T]$ si ha

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbb{W}^{\varepsilon,2m}(\mathcal{O})} \le \\ &\le C_\varepsilon \left(\int_0^t (t-\sigma)^{\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\frac{2m}{2m-1}}d\sigma\right)^{\frac{2m-1}{2m}} \left(\int_0^t \|\mathbf{f}(\sigma)\|^{2m}_{\mathbb{L}^{2m}(\mathcal{O})}d\sigma\right)^{\frac{1}{2m}} \\ &\le C_\varepsilon \left(\int_0^t (t-\sigma)^{\frac{m(\alpha-2)}{2m-1}}d\sigma\right)^{\frac{2m-1}{2m}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}\end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-\sigma)^{\frac{m(\alpha-2)}{2m-1}}d\sigma &= \int_0^t s^{\frac{m(\alpha-2)}{2m-1}}ds \\ &= \frac{1}{\frac{m(\alpha-2)}{2m-1}+1}t^{\frac{m(\alpha-2)}{2m-1}+1} \\ &= \frac{2m-1}{\alpha m-1}t^{\frac{\alpha m-1}{2m-1}},\end{aligned}$$

di conseguenza si trova

$$\|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbb{W}^{\varepsilon,2m}(\mathcal{O})} \le C_\varepsilon \left(\frac{2m-1}{\alpha m-1}\right)^{\frac{2m-1}{2m}} t^{\frac{\alpha m-1}{2m}}\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})} < +\infty,$$

per cui $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{W}^{\varepsilon,2m}(\mathcal{O})$ $\forall\, t \in [0,T]$. Poiché $\alpha > \frac{2}{m}$ per ipotesi ed abbiamo scelto $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, si ha $\varepsilon > \frac{1}{m}$; quindi, grazie al teorema di immersione per gli spazi di Sobolev, si ha $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{C}(\mathcal{O})\ \forall\, t \in [0,T]$ ed inoltre esiste una costante $\widetilde{C} > 0$ tale che $\forall\, t \in [0,T]$ si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbb{C}(\mathcal{O})} &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |\mathbf{F}(t,\mathbf{x})| \le \widetilde{C}\|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbb{W}^{\varepsilon,2m}(\mathcal{O})} \\ &\le \widetilde{C}C_\varepsilon \left(\frac{2m-1}{\alpha m-1}\right)^{\frac{2m-1}{2m}} t^{\frac{\alpha m-1}{2m}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})},\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}\|_{\mathbb{C}([0,T]\times\mathcal{O})} &= \sup_{t\in[0,T],\,\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |\mathbf{F}(t,\mathbf{x})| \\ &\le \widetilde{C}C_\varepsilon \left(\frac{2m-1}{\alpha m-1}\right)^{\frac{2m-1}{2m}} T^{\frac{\alpha m-1}{2m}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})} \\ &\equiv C_{T,m}\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})} < +\infty.\end{aligned}$$

Questo implica che $\mathbf{F} \in \mathbb{C}([0,T] \times \mathcal{O})$ e vale la disuguaglianza 2.57. □

Proposizione 2.28 *Supponiamo che valgano le ipotesi 2.21 e 2.26. Allora l'applicazione $W_A(\omega)$ è continua su $[0,T] \times \mathcal{O}$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. Inoltre, se $m \in \mathbb{N}$ e $m > \frac{2}{\alpha}$, esistono una variabile aleatoria $C_{T,m}$ $\mathbb{P}$-quasi certamente finita ed una costante $K_{T,m} > 0$ tali che*

$$\sup_{t\in[0,T],\,\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})| \le C_{T,m}(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \Omega, \tag{2.58}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T],\,\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |W_A(t,\mathbf{x})|\right] \le K_{T,m}, \tag{2.59}$$

Dimostrazione. Prima di tutto utilizziamo l'identità

$$\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{-\alpha}d\sigma = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \qquad 0 \le s \le \sigma \le t \tag{2.60}$$

per riscrivere la variabile aleatoria $W_A(t)$ nella forma

$$W_A(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^t e^{(t-\sigma)A}(t-\sigma)^{\alpha-1}Y(\sigma)d\sigma \qquad \forall\, t \ge 0, \tag{2.61}$$

dove

$$Y(\sigma) = \int_0^\sigma e^{(\sigma-s)A}(\sigma-s)^{-\alpha}BdW(s) \qquad \forall\, \sigma \ge 0. \tag{2.62}$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^t e^{(t-\sigma)A}(t-\sigma)^{\alpha-1}\left[\int_0^\sigma e^{(\sigma-s)A}(\sigma-s)^{-\alpha}BdW(s)\right]d\sigma \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^t \left[\int_s^t e^{(t-\sigma)A}e^{(\sigma-s)A}(t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{-\alpha}d\sigma\right]BdW(s) \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^t e^{(t-s)A}\left[\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{-\alpha}d\sigma\right]BdW(s) = W_A(t).\end{aligned}$$

Y è un processo stocastico a valori in $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ e quindi, come abbiamo fatto per W_A, possiamo interpretarlo come un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^2$ avente come insieme degli indici l'insieme $[0, +\infty) \times \mathcal{O}$. Consideriamo allora per ogni coppia $(\sigma, \mathbf{x}) \in [0, +\infty) \times \mathcal{O}$ la variabile aleatoria

$$\begin{aligned} Y(\sigma, \mathbf{x}) \;\; : \;\; & \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \omega \longmapsto Y(\sigma, \mathbf{x})(\omega) \equiv Y(\omega, \sigma, \mathbf{x}); \end{aligned}$$

si può scrivere questa variabile aleatoria nella forma

$$Y(\sigma, \mathbf{x})(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\gamma_k} \int_0^\sigma e^{-\alpha_k(\sigma - s)} (\sigma - s)^{-\alpha} \mathbf{e}_k(\mathbf{x}) d\beta_k(\omega, \sigma),$$

dove $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo di vettori di $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$. Poiché l'integrando è deterministico, $Y(\sigma, \mathbf{x})$ è una variabile aleatoria Gaussiana a media nulla; calcoliamo anche la sua covarianza $y(\sigma, \mathbf{x})$: applicando il teorema della convergenza monotona e la proprietà 1.46 dell'integrale di Itô si trova

$$\begin{aligned} y(\sigma, \mathbf{x}) &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\gamma_k} \int_0^\sigma e^{-\alpha_k(\sigma - s)} (\sigma - s)^{-\alpha} \mathbf{e}_k(\mathbf{x}) d\beta_k(s)\right|^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \mathbb{E}\left[\left|\int_0^\sigma e^{-\alpha_k(\sigma - s)} (\sigma - s)^{-\alpha} \mathbf{e}_k(\mathbf{x}) d\beta_k(s)\right|^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \int_0^\sigma \mathbb{E}\left[\left|e^{-\alpha_k(\sigma - s)} (\sigma - s)^{-\alpha} \mathbf{e}_k(\mathbf{x})\right|^2\right] ds \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \int_0^\sigma e^{-2\alpha_k(\sigma - s)} (\sigma - s)^{-2\alpha} \left|\mathbf{e}_k(\mathbf{x})\right|^2 ds \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \int_0^\sigma e^{-2\alpha_k s} s^{-2\alpha} \left|\mathbf{e}_k(\mathbf{x})\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Di conseguenza, tenendo conto anche delle ipotesi 2.26, si ha

$$\begin{aligned} y(\sigma, \mathbf{x}) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_k s} s^{-2\alpha} \left|\mathbf{e}_k(\mathbf{x})\right|^2 ds \\ &\leq \kappa^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_k s} \frac{(2\alpha_k s)^{(1-2\alpha)-1}}{(2\alpha_k)^{(1-2\alpha)-1}} ds \\ &\leq \kappa^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \frac{1}{(2\alpha_k)^{1-2\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^{(1-2\alpha)-1} d\tau \\ &= \kappa^2 2^{2\alpha-1} \Gamma(1 - 2\alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \alpha_k^{2\alpha-1} < +\infty, \end{aligned}$$

dove Γ indica la funzione gamma di Eulero. Dalla stima ottenuta per la covarianza di $Y(\sigma, \mathbf{x})$ e ricordando che $Y(\sigma, \mathbf{x})$ è una variabile aleatoria Gaussiana, possiamo concludere che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste una costante $K_m > 0$ tale che

$$\mathbb{E}\left[|Y(\sigma, \mathbf{x})|^{2m}\right] \leq K_m \qquad \forall\,(\sigma, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathcal{O};$$

da questo segue che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\|Y\|^{2m}_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |Y(\sigma, \mathbf{x})|^{2m} d\mathbf{x} d\sigma\right] \\ &= \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \mathbb{E}\left[|Y(\sigma, \mathbf{x})|^{2m}\right] d\mathbf{x} d\sigma \leq K_m T |\mathcal{O}|, \end{aligned} \tag{2.63}$$

dove $|\mathcal{O}|$ è la misura di Lebesgue di $\mathcal{O}$. Dall'equazione 2.63 vediamo che $\|Y\|^{2m}_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}$ è una variabile aleatoria integrabile per ogni $m \in \mathbb{N}$, quindi è anche $\mathbb{P}$-quasi certamente finita: questo significa che le traiettorie $Y(\omega)$ del processo $\{Y(\sigma, \mathbf{x})\}_{(\sigma,\mathbf{x})\in[0,T]\times\mathcal{O}}$ sono funzioni di $\mathbb{L}^{2m}([0, T] \times \mathcal{O})$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

A questo punto, avendo scritto $W_A(t)$ nella forma 2.61 ed avendo stabilito che Y è $\mathbb{P}$-quasi certamente in $\mathbb{L}^{2m}([0, T] \times \mathcal{O})$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ (quindi in particolare per $m > \frac{2}{\alpha}$), possiamo applicare il lemma 2.27 ad ω fissato. Concludiamo allora che $W_A(\omega) \in \mathbb{C}([0, T] \times \mathcal{O})$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ ed inoltre $\forall\, T > 0$, $m \in \mathbb{N}$ esiste una costante $\widetilde{C}_{T,m} > 0$ tale che per ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$\sup_{t\in[0,T],\,\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |W_A(\omega, t, \mathbf{x})| \leq \widetilde{C}_{T,m} \|Y(\omega)\|_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})} \equiv C_{T,m}(\omega), \tag{2.64}$$

con $C_{T,m}$ variabile aleatoria $\mathbb{P}$-quasi certamente finita grazie alle proprietà di Y. Con questo abbiamo dimostrato la disuguaglianza 2.58. Prendendo poi il valor medio di entrambi i membri della 2.64 si ottiene proprio la 2.59

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T],\,\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |W_A(t, \mathbf{x})|\right] &\leq C_{T,m} \mathbb{E}\left[\|Y\|_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}\right] \\ &\leq C_{T,m} \left\{\mathbb{E}\left[\|Y\|^{2m}_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}\right]\right\}^{1/2m} \\ &\leq C_{T,m} \left(K_m T |\mathcal{O}|\right)^{1/2m} \equiv K_{T,m}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

2.3.3 Soluzione del problema lineare

Torniamo ora al problema di partenza 2.37:

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t) + BdW(t) & \forall\, t \geq 0, \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_0; \end{cases} \tag{2.66}$$

si tratta semplicemente di un caso particolare del problema 2.38:

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t) + BdW(t) & \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x \in H, \end{cases} \tag{2.67}$$

in cui $U = H = \mathcal{H}_0$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ ed A è l'operatore di Stokes. Quindi, se riusciamo a dimostrare che le ipotesi 2.21 e 2.26 sono soddisfatte, possiamo definire la soluzione del problema 2.37, per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in \mathcal{H}_0$, come

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}BdW(s) \equiv e^{tA}x_0 + W_A(t) \qquad \forall\, t \geq 0; \tag{2.68}$$

le proposizioni 2.23 e 2.25 ci assicurano allora che il processo stocastico $X(t)$ è ben definito ed appartiene allo spazio $C_W([0,T];\mathcal{H}_{-1})$ per ogni $T > 0$.

Abbiamo allora bisogno di alcune ipotesi supplementari riguardo all'operatore B.

Ipotesi 2.29 *1. L'operatore BB^* è diagonale rispetto alla base degli autovettori di A, $\{\mathbf{v}_\mathbf{k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1}$, e $\gamma_\mathbf{k}$ sono i suoi autovalori rispetto a tale base;*

2. l'operatore BB^* è di classe traccia.

Con queste assunzioni riusciamo a far vedere che valgono le ipotesi 2.21 e 2.26. Infatti abbiamo già visto in precedenza che l'operatore A è il generatore infinitesimo di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni, mentre B è per definizione un operatore lineare limitato da $\mathcal{H}_0$ in se stesso. Pertanto, per far vedere che le ipotesi 2.21 sono soddisfatte nel caso del problema 2.37, basta far vedere che l'operatore lineare

$$Q_t = \int_0^t e^{sA}BB^*e^{sA^*}ds \tag{2.69}$$

sullo spazio $H = \mathcal{H}_0$ è di classe traccia per ogni $t > 0$; poiché A è autoaggiunto e BB^* è diagonalizzabile simultaneamente ad A, si ha

$$\begin{aligned} Q_t\mathbf{v}_\mathbf{k} &= \int_0^t e^{sA}BB^*e^{sA^*}\mathbf{v}_\mathbf{k}ds = \int_0^t BB^*e^{2sA}\mathbf{v}_\mathbf{k}ds \\ &= \int_0^t \gamma_\mathbf{k}e^{-2s|\mathbf{k}|^2}\mathbf{v}_\mathbf{k}ds = -\frac{1}{2|\mathbf{k}|^2}\gamma_\mathbf{k}\left(e^{-2t|\mathbf{k}|^2}-1\right)\mathbf{v}_\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2}\gamma_\mathbf{k}|\mathbf{k}|^{-2}\left(1-e^{-2t|\mathbf{k}|^2}\right)\mathbf{v}_\mathbf{k} \qquad \forall\, t > 0,\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \geq 1; \end{aligned}$$

di conseguenza si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr} Q_t &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \left\langle\!\left\langle \gamma_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^{-2} \left(1 - e^{-2t|\mathbf{k}|^2}\right) \mathbf{v}_{\mathbf{k}}, \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \right\rangle\!\right\rangle_0 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^{-2} \left(1 - e^{-2t|\mathbf{k}|^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^{-2} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} = \operatorname{Tr}(BB^*) < +\infty \qquad \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda le ipotesi 2.26, si può dimostrare che, se $\mathcal{O} = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, allora i punti 1,2 e 4 sono soddisfatti nel caso generale in cui A sia la realizzazione di un operatore ellittico (si veda ad esempio [2]). Il punto 3 delle ipotesi 2.26 coincide con il punto 1 delle ipotesi 2.29, mentre il punto 5 delle ipotesi 2.26 discende facilmente dall'assunzione che BB^* sia di classe traccia; infatti si ha

$$
\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \Longrightarrow \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^{2(2\alpha-1)} \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\, |\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} = \operatorname{Tr}(BB^*) < +\infty.
$$

Grazie alla proposizione 2.28 possiamo allora concludere che il processo stocastico W_A, visto come processo a valori in $\mathbb{R}^2$ avente come insieme degli indici l'insieme $[0, +\infty) \times \mathcal{O}$, ha anche traiettorie $\mathbb{P}$-quasi certamente continue su $[0, +\infty) \times \mathcal{O}$ e vale la disuguaglianza 2.58:

$$
\sup_{t\in[0,T],\, \mathbf{x}\in\mathcal{O}} |W_A(\omega, t, \mathbf{x})| \leq C_{T,m}(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \Omega,
$$

dove $C_{T,m}(\omega)$, definita nell'equazione 2.64, è una variabile aleatoria $\mathbb{P}$-quasi certamente finita. Di conseguenza è possibile dimostrare qualche ulteriore risultato di regolarità per le traiettorie del processo W_A.

Teorema 2.30 *Se $U = H = \mathcal{H}_0$, A è l'operatore di Stokes e B soddisfa le ipotesi 2.29, allora la funzione $t \mapsto W_A(\omega, t)$ appartiene allo spazio*

$$
C([0, T]; \mathcal{H}_0)
$$

per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza 2.58 segue che

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \|W_A(\omega,t)\|_0 &= \sup_{t\in[0,T]} \left[\int_{\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\sup_{(t,\mathbf{x})\in[0,T]\times\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})|^2 |\mathcal{O}|\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\left(\sup_{(t,\mathbf{x})\in[0,T]\times\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})|\right)^2 |\mathcal{O}|\right]^{1/2} \\
&= \left[C_{T,m}^2(\omega)|\mathcal{O}|\right]^{1/2} < +\infty \qquad \forall\,\omega\in\Omega,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

dove $C_{T,m}$ è la variabile aleatoria definita nella 2.64 e $|\mathcal{O}|$ è la misura di Lebesgue di $\mathcal{O}$. Poiché $C_{T,m}$ è $\mathbb{P}$-quasi certamente finita, dalla 2.70 segue che $W_A(\omega) \in C([0,T];\mathcal{H}_0)$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. $\square$

Teorema 2.31 *Se $U = H = \mathcal{H}_0$, A è l'operatore di Stokes e B soddisfa le ipotesi 2.29, allora la funzione $t \mapsto W_A(\omega,t)$ appartiene allo spazio*

$$L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$$

per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che

$$\|W_A(\omega,t)\|_1^2 = \left\|(-A)^{1/2}W_A(\omega,t)\right\|_0^2 \qquad \forall\,\omega\in\Omega,\ t\in[0,T],$$

quindi

$$\begin{aligned}
(-A)^{1/2}W_A(\omega,t) &= \int_0^t (-A)^{1/2}e^{(t-s)A}BdW(s) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \int_0^t |\mathbf{k}|e^{-(t-s)|\mathbf{k}|^2}\gamma_{\mathbf{k}}^{1/2} d\beta_{\mathbf{k}}(s)\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\left\|(-A)^{1/2}W_A(\omega,t)\right\|_0^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \left|\int_0^t |\mathbf{k}|e^{-(t-s)|\mathbf{k}|^2}\gamma_{\mathbf{k}}^{1/2} d\beta_{\mathbf{k}}(s)\right|^2 \qquad \forall\,\omega\in\Omega;$$

applicando il teorema della convergenza monotona e la proprietà 1.46 dell'integrale di Itô, si trova

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\|W_A(\omega)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|W_A(\omega,t)\|_1^2 dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|(-A)^{1/2} W_A(\omega,t)\right\|_0^2 dt\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}\left[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \left|\int_0^t |\mathbf{k}| e^{-(t-s)|\mathbf{k}|^2} \gamma_{\mathbf{k}}^{1/2} d\beta_{\mathbf{k}}(s)\right|^2\right] dt \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \int_0^T \left[\int_0^t |\mathbf{k}|^2 e^{-2(t-s)|\mathbf{k}|^2} \gamma_{\mathbf{k}} ds\right] dt \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^2 \gamma_{\mathbf{k}} \int_0^T \frac{1}{2|\mathbf{k}|^2}\left(1 - e^{-2t|\mathbf{k}|^2}\right) dt \\
&\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} \frac{T}{2} = \frac{T}{2}\mathrm{Tr}(BB^*) < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Si può concludere allora che la variabile aleatoria $\|W_A\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}$ è integrabile e quindi $\mathbb{P}$-quasi certamente finita, cioè $W_A(\omega)$ appartiene allo spazio $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. $\square$

2.4 Soluzione dell'equazione di Navier-Stokes stocastica

2.4.1 Esistenza locale

A questo punto siamo pronti per tornare a studiare il problema di Navier-Stokes completo:

$$\begin{cases} dX(t) + b\left(X(t)\right) dt = AX(t)dt + BdW(t) \qquad \forall\, t \geq 0, \\[1em] X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_0, \end{cases} \tag{2.72}$$

dove X è un processo stocastico a valori in $\mathcal{H}_1$, W è un Q-processo di Wiener a valori in $\mathcal{H}_0$ e $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ soddisfa le ipotesi 2.29. Diciamo che il processo stocastico X è una soluzione "mild" del problema 2.72 se esso soddisfa l'equazione

$$X(t) = e^{tA}x_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} b(X(s)) ds + W_A(t) \qquad \forall\, t \geq 0, \tag{2.73}$$

in cui $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ è il semigruppo fortemente continuo generato dall'operatore A e $W_A(t)$ è la convoluzione stocastica.

Osserviamo che, grazie alla proposizione 1.26, l'applicazione b a valori in $\mathcal{H}_{-1}$ è ben definita e continua non solo su $\mathcal{H}_1$, ma su tutto $\mathbb{L}^4_\#$, quindi ha senso cercare una soluzione mild del problema 2.72 che sia un processo stocastico a valori in $\mathbb{L}^4_\#$: precisamente, lo spazio

$$E \equiv L^4([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$$

è lo spazio che avrà maggior importanza nella ricerca della soluzione. Dimostriamo prima di tutto un risultato preliminare, che sarà utile nella dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità della soluzione.

Lemma 2.32 *Definiamo, per $T > 0$,*

$$\Gamma(f)(t) \equiv \int_0^t e^{(t-s)A} b(f(s))ds \qquad \forall\, f \in E,\, t \in [0,T]. \tag{2.74}$$

Allora $\Gamma(f) \in E$ per ogni $f \in E$ ed inoltre esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $f, g \in E$ si ha

$$\|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_E \leq M\left(\|f\|_E + \|g\|_E\right)\|f-g\|_E. \tag{2.75}$$

Dimostrazione. Step 1. Facciamo vedere che vale l'inclusione

$$L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset E.$$

Consideriamo una funzione $f \in L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ ed osserviamo che, grazie al teorema di immersione per gli spazi di Sobolev (teorema 1.15), si ha

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \leq C\|f(t)\|_{1/2} \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

dove C è una costante positiva. Ora, applicando la stima di interpolazione 1.38, con $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, si ottiene

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \leq C\|f(t)\|_0^{1/2}\|f(t)\|_1^{1/2} \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

Infine, elevando alla quarta potenza entrambi i membri di questa disuguaglianza ed integrando sull'intervallo $[0,T]$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\|f\|_E^4 &= \int_0^T \|f(t)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dt \\
&\leq C^4 \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \|f(t)\|_1^2 dt \\
&\leq C^4 \|f\|^2_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} \int_0^T \|f(t)\|_1^2 dt \\
&= C^4 \|f\|^2_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} \|f\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza si trova

$$\begin{aligned} \|f\|_E &\leq C\|f\|^{1/2}_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)}\|f\|^{1/2}_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \\ &\leq \frac{C}{2}\left[\|f\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} + \|f\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right], \end{aligned} \tag{2.76}$$

da cui segue che si ha

$$L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset E$$

con immersione continua.

Step 2. Se $f \in E$, allora $b(f) \in L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})$. Infatti, dalla relazione 1.72 segue che

$$\begin{aligned} \|b(f)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} &= \int_0^T \|b(f(t))\|^2_{-1} dt \\ &\leq 4\int_0^T \|f(t)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dt = 4\|f\|^4_E < +\infty. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Osserviamo poi che la funzione $\Gamma(f)(t)$, per come è stata definita, è la soluzione mild del problema non omogeneo

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + b(f(t)) & \forall\, t \in [0,T], \\ X(0) = 0. \end{cases} \tag{2.78}$$

Pertanto, in base ai risultati ottenuti nel paragrafo 2.2 (in particolare, in base al corollario 2.19), si ha certamente

$$\Gamma(f) \in L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset E$$

ed esistono due costanti positive C_1, C_2 tali che

$$\|\Gamma(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \leq C_1\|b(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}, \tag{2.79}$$

$$\|\Gamma(f)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} \leq C_2\|b(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}. \tag{2.80}$$

Utilizzando ora la disuguaglianza 2.76 dello Step 1, otteniamo

$$\|\Gamma(f)\|_E \leq L\|b(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} < +\infty, \tag{2.81}$$

con $L = \frac{C(C_1+C_2)}{2}$.

Step 3. Dobbiamo stimare $\|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_E$, per una generica coppia f, g di elementi di E. Poiché $\Gamma(f), \Gamma(g) \in E$ grazie allo Step 2, si può usare ancora la disuguaglianza 2.76; si ottiene così

$$\|\Gamma(f)-\Gamma(g)\|_E \leq K\left[\|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} + \|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right];$$

inoltre, poiché

$$\Gamma(f)(t) - \Gamma(g)(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \left[b(f(s)) - b(g(s)) \right] ds \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

con un ragionamento analogo a quello effettuato nello Step 2 si trova

$$\begin{aligned} \|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} &\leq C_1 \|b(f) - b(g)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}, \\ \|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} &\leq C_2 \|b(f) - b(g)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}. \end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$\|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_E \leq L \|b(f) - b(g)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \qquad \forall\, f, g \in E, \tag{2.82}$$

con $L = \frac{C(C_1+C_2)}{2}$. Osserviamo poi che, grazie alla disuguaglianza 1.74, si ha

$$\begin{aligned} &\|b(f) - b(g)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} = \int_0^T \|b(f(s)) - b(g(s))\|^2_{-1} ds \\ &\leq 16 \int_0^T \|f(s) - g(s)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} \left[\|f(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|g(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \right]^2 ds \\ &\leq 16 \left[\int_0^T \|f(s) - g(s)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} ds \right]^{1/2} \left[\int_0^T \left(\|f(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|g(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \right)^4 ds \right]^{1/2} \\ &\leq 16 \|f-g\|^2_E \left[8 \left(\|f\|^4_E + \|g\|^4_E \right) \right]^{1/2} \leq 32\sqrt{2} \|f-g\|^2_E \left[\|f\|^2_E + \|g\|^2_E \right] \\ &\leq 32\sqrt{2} \|f-g\|^2_E \left[\|f\|_E + \|g\|_E \right]^2 \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\|b(f) - b(g)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \leq 2^{11/4} \|f-g\|_E \left[\|f\|_E + \|g\|_E \right].$$

Sostituendo nella disuguaglianza 2.82 si ottiene proprio

$$\|\Gamma(f) - \Gamma(g)\|_E \leq M \left(\|f\|_E + \|g\|_E \right) \|f-g\|_E,$$

con $M = 2^{11/4} L$. $\square$

Indichiamo con $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$ lo spazio vettoriale di tutti i processi stocastici X definiti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, aventi valori in $\mathbb{L}^4_\#$, adattati a W e tali che

$$\|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)} \equiv \mathbb{E} \left[\int_0^T \|X(s)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} ds \right] < +\infty. \tag{2.83}$$

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione mild del problema 2.72 utilizzeremo il principio delle contrazioni locale, applicato allo spazio di Banach E ad ω fissato; poi cercheremo di far vedere che la soluzione trovata in questo modo appartiene in realtà allo spazio $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$ (teorema 2.36).

Teorema 2.33 (Principio delle contrazioni locale) *Sia E uno spazio metrico completo ed indichiamo con $d(\cdot,\cdot)$ la distanza su questo spazio; siano poi x_0 un punto di E e $f : E \to E$ un'applicazione tale che, per un certo $\alpha \in (0,1)$ ed un certo $r > 0$, si abbia*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \le \alpha d(x_1, x_2) \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B(x_0, r)}. \tag{2.84}$$

Allora l'equazione $x + f(x) = y$ ammette un'unica soluzione $x \in B(x_0, r)$ $\forall\, y \in B(x_0 - f(x_0), r(1-\alpha))$.

Teorema 2.34 *Se l'operatore B soddisfa le ipotesi 2.29, allora per ogni $x_0 \in \mathcal{H}_0$ esiste una variabile aleatoria $\widetilde{T}$ che assume $\mathbb{P}$-quasi certamente valori in $(0,T]$ e tale che per ogni $\omega \in \Omega$ esiste un'unica soluzione mild*

$$X(\omega,\cdot) \in L^4\left([0,\widetilde{T}(\omega)]; \mathbb{L}^4_{\#}\right)$$

del problema 2.72.

Dimostrazione. Step 1. Prima di tutto riscriviamo l'equazione 2.73, che definisce la soluzione mild del problema 2.72, nella forma

$$X(\omega,t) = e^{tA}x_0 - \Gamma(X(\omega,\cdot))(t) + W_A(\omega,t) \qquad \forall\, \omega \in \Omega,\ t \in [0,T]. \tag{2.85}$$

Poiché $x_0 \in \mathcal{H}_0$ per ipotesi, l'applicazione

$$\begin{aligned} e^{\cdot A}x_0 \ \ : \ \ [0,T] &\longrightarrow \mathcal{H}_0 \\ t &\longmapsto e^{tA}x_0 \end{aligned}$$

è continua su $[0,T]$ grazie alla proposizione 2.8; abbiamo già visto che essa appartiene anche allo spazio $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ (si veda il corollario 2.20), di conseguenza si ha

$$e^{\cdot A}x_0 \in C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1);$$

allora, per quanto visto nello Step 1 del lemma precedente, si può concludere che $e^{\cdot A}x_0 \in E$.

Per quanto riguarda W_A, se indichiamo con $W_A(\omega)$ l'applicazione $t \mapsto W_A(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, in base a quanto visto nel paragrafo 2.3.2 $W_A(\omega)$ soddisfa la disuguaglianza 2.58 per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$; di conseguenza per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$\begin{aligned} \|W_A(\omega)\|_E^4 &= \int_0^T \|W_A(\omega,t)\|^4_{\mathbb{L}^4_{\#}}\,dt = \int_0^T \left[\int_{\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})|^4 d\mathbf{x}\right] dt \\ &\le T|\mathcal{O}| \sup_{(t,\mathbf{x})\in[0,T]\times\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})|^4 \\ &\le T|\mathcal{O}| \left(\sup_{(t,\mathbf{x})\in[0,T]\times\mathcal{O}} |W_A(\omega,t,\mathbf{x})|\right)^4 \\ &\le T|\mathcal{O}| C^4_{T,m}(\omega) < +\infty, \end{aligned} \tag{2.86}$$

dove $|\mathcal{O}|$ indica la misura di Lebesgue di $\mathcal{O}$; ne segue che $W_A(\omega) \in E$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. Fissiamo allora un $\omega_0 \in \Omega$ per il quale $W_A(\omega_0)$ verifichi effettivamente la disuguaglianza 2.58 e sia quindi un elemento di E; se supponiamo $X(\omega_0) \in E$, allora anche $\Gamma(X(\omega_0)) \in E$ grazie al lemma precedente e quindi l'equazione

$$X(\omega_0, \cdot) = e^{\cdot A}x_0 - \Gamma(X(\omega_0, \cdot)) + W_A(\omega_0) \tag{2.87}$$

ha senso come uguaglianza fra elementi di E.

Step 2. Come preannunciato, vogliamo ora dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione 2.87 mediante un argomento di punto fisso nello spazio E. A questo scopo, definiamo

$$\varphi(t) \equiv W_A(\omega_0, t),\ u(t) \equiv X(\omega_0, t) - \varphi(t),\ \psi(t) \equiv e^{tA}x_0 \qquad \forall\, t \in [0, T];$$

dall'equazione 2.87 otteniamo allora

$$u = \psi - \Gamma(u + \varphi). \tag{2.88}$$

Riscriviamo il problema nella forma

$$u + F(u) = \psi - \Gamma(\varphi), \tag{2.89}$$

dove $F(u)(t) \equiv \Gamma(u + \varphi)(t) - \Gamma(\varphi)(t)\ \forall\, t \in [0, T]$, e cerchiamo di usare il principio delle contrazioni locale per dimostrare che esso ammette un'unica soluzione. Osserviamo prima di tutto che, grazie al lemma 2.32, si ha

$$\begin{aligned}
\|F(u_1) - F(u_2)\|_E &= \|\Gamma(u_1 + \varphi) - \Gamma(u_2 + \varphi)\|_E \\
&\leq M\,[\|u_1 + \varphi\|_E + \|u_2 + \varphi\|_E]\,\|u_1 - u_2\|_E \\
&\quad \forall\, u_1,\, u_2 \in E.
\end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
u_1, u_2 \in \overline{B\left(-\varphi, \frac{1}{4M}\right)} &\implies \|u_1 + \varphi\|_E,\, \|u_2 + \varphi\|_E \leq \frac{1}{4M} \\
&\implies \|F(u_1) - F(u_2)\|_E \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_E,
\end{aligned}$$

il che significa che F è proprio una contrazione locale su una palla centrata nel punto $-\varphi \in E$ ed avente raggio $\frac{1}{4M}$. Possiamo quindi applicare il principio delle contrazioni locale sullo spazio E; con le notazioni del teorema 2.33, abbiamo $x_0 = -\varphi$, $r = \frac{1}{4M}$, $f = F$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $y = \psi - \Gamma(\varphi)$; il problema 2.89 ammette allora un'unica soluzione appartenente alla palla $B\left(-\varphi, \frac{1}{4M}\right)$ nel caso in cui $\psi - \Gamma(\varphi) \in B\left(-\varphi - F(-\varphi), \frac{1}{8M}\right)$. Verifichiamo allora che quest'ultima condizione è soddisfatta: dalle equazioni 2.77 e 2.81 segue infatti che

$$\begin{aligned}
& \|\psi - \Gamma(\varphi) + \varphi + F(-\varphi)\|_E \\
= \; & \|\psi - \Gamma(\varphi) + \varphi + \Gamma(0) - \Gamma(\varphi)\|_E = \|\psi + \varphi - 2\Gamma(\varphi)\|_E \\
\leq \; & \|\psi\|_E + \|\varphi\|_E + 2\|\Gamma(\varphi)\|_E \leq \|\psi\|_E + \|\varphi\|_E + 4L\|\varphi\|_E^2 \\
= \; & \left[\int_0^T \|e^{sA}x_0\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, ds\right]^{1/4} + \left[\int_0^T \|W_A(\omega_0, s)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, ds\right]^{1/4} \\
& +4L \left[\int_0^T \|W_A(\omega_0, s)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, ds\right]^{1/2} .
\end{aligned}$$

A questo punto, per garantire che si abbia $\|\psi - \Gamma(\varphi) + \varphi + F(-\varphi)\|_E \leq \frac{1}{8M}$, è sufficiente scegliere un valore sufficientemente piccolo di T. Pertanto, in corrispondenza della scelta $\omega = \omega_0$, esiste $\widetilde{T}(\omega_0) > 0$ tale che il problema 2.89 ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0, \widetilde{T}(\omega_0)]$.

Step 3. Per tutti quei valori di ω tali che $W_A(\omega)$ soddisfa la disuguaglianza 2.58, e quindi $W_A(\omega) \in E$, possiamo ripetere il ragionamento dello step 2: otteniamo così una variabile aleatoria $\widetilde{T}$ tale che

$$\begin{cases} \widetilde{T}(\omega) \in (0, T] & \forall\, \omega \in \Omega \backslash N \\ \widetilde{T}(\omega) = 0 & \forall\, \omega \in N, \end{cases}$$

dove N è un insieme di probabilità nulla, e per ogni $\omega \in \Omega$ il problema

$$X(\omega, t) = e^{tA}x_0 - \Gamma(X(\omega, \cdot))(t) + W_A(\omega, t) \tag{2.90}$$

ammette un'unica soluzione nell'intervallo temporale $[0, \widetilde{T}(\omega)]$. $\square$

2.4.2 Stima a priori ed esistenza globale

Se ora riusciamo ad ottenere una stima a priori per la soluzione del problema 2.72 ad ω fissato, possiamo poi prolungare la soluzione dall'intervallo $[0, \widetilde{T}(\omega)]$ a tutto l'intervallo $[0, T]$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. Per eseguire la stima a priori abbiamo bisogno di lavorare con una soluzione stretta, quindi sottraiamo dalla soluzione la convoluzione stocastica e cerchiamo di utilizzare i risultati del paragrafo 2.2

Come nel paragrafo precedente, fissiamo $\omega_0 \in \Omega$ tale che $W_A(\omega_0)$ soddisfa la disuguaglianza 2.58 (e quindi $W_A(\omega_0) \in E$) e definiamo

$$\varphi(t) \equiv W_A(\omega_0, t), \; Z(t) \equiv X(\omega_0, t) - \varphi(t) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

Allora $Z(t)$ è soluzione mild del problema

$$\begin{cases} \frac{dZ(t)}{dt} + b\,(Z(t) + \varphi(t)) = AZ(t) & \forall\, t \in [0, \widetilde{T}(\omega_0)], \\ \\ Z(0) = x_0 \in \mathcal{H}_0. \end{cases} \tag{2.91}$$

In realtà, poiché l'operatore A soddisfa le ipotesi del teorema 2.17 con $H = \mathcal{H}_{-1}$, $D(A) = \mathcal{H}_1$ e $D\left((-A)^{1/2}\right) = \mathcal{H}_0$ e $b(Z+\varphi) \in L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})$, possiamo concludere che $Z(t)$ è una soluzione stretta del problema 2.91 e siamo quindi in grado di dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 2.35 *Supponiamo che $Z(t)$ sia una soluzione stretta del problema 2.91, con $\varphi \in E$. Allora per ogni $t \in [0,T]$ si ha*

$$\begin{aligned}
&\|Z(t)\|_0^2 + \int_0^t \exp\left[K_1 \int_s^t \|\varphi(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 dr\right] \|Z(s)\|_1^2 ds \leq \\
&\exp\left[K_1 \int_0^t \|\varphi(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 dr\right] \|x_0\|_0^2 \\
&+ K_2 \int_0^t \exp\left[K_1 \int_s^t \|\varphi(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 dr\right] \|\varphi(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 ds.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Dimostrazione. Utilizziamo il fatto che $Z(t)$ è soluzione stretta del problema 2.91, moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione

$$\frac{dZ(t)}{dt} + b\left(Z(t) + \varphi(t)\right) = AZ(t)$$

per $Z(t)$ ed integriamo su $\mathcal{O}$. Osserviamo che, se $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} z_{\mathbf{k}}(t)\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ è la serie di Fourier di $Z(t)$ per $t \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}} AZ(t)(\mathbf{x}) \cdot Z(t)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \langle\langle AZ(t), Z(t)\rangle\rangle_0 \\
&= -\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} |\mathbf{k}|^2 |z_{\mathbf{k}}(t)|^2 \\
&= -\|Z(t)\|_1^2 \qquad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Z(t)\|_0^2 &= -\|Z(t)\|_1^2 + b(Z(t)+\varphi(t), Z(t)+\varphi(t), Z(t)) \\
&= -\|Z(t)\|_1^2 + b(Z(t)+\varphi(t), \varphi(t), Z(t)) \\
&= -\|Z(t)\|_1^2 + b(Z(t), \varphi(t), Z(t)) \\
&\quad + b(\varphi(t), \varphi(t), Z(t)) \\
&= -\|Z(t)\|_1^2 - b(Z(t), Z(t), \varphi(t)) \\
&\quad - b(\varphi(t), Z(t), \varphi(t)) \qquad \forall\, t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{2.93}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo applicato la proposizione 1.22. Stimiamo ora i due termini dell'ultimo membro della catena di uguaglianze 2.93. Per quanto riguarda il primo, dalla disuguaglianza 1.72 si ottiene

$$|b(Z(t), Z(t), \varphi(t))| \leq 4\|Z(t)\|_1 \|Z(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \;\forall\, t \in [0,T];$$

grazie al teorema di immersione di Sobolev si ha $\|Z(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \leq K\|Z(t)\|_{1/2}$ per un'oppertuna costante $K > 0$, quindi

$$|b(Z(t), Z(t), \varphi(t))| \leq 4K\|Z(t)\|_1 \|Z(t)\|_{1/2} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \ \forall\, t \in [0, T];$$

inoltre dalla disuguaglianza di interpolazione 1.38, con $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ si ottiene

$$\|Z(t)\|_{1/2} \leq \|Z(t)\|_0^{1/2} \|Z(t)\|_1^{1/2} \qquad \forall\, t \in [0, T],$$

per cui

$$\begin{aligned} |b(Z(t), Z(t), \varphi(t))| &\leq 4K\|Z(t)\|_0^{1/2} \|Z(t)\|_1^{3/2} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\ &= \frac{1}{3^{3/4}} \|Z(t)\|_1^{3/2} \cdot 4 \cdot 3^{3/4} K \|Z(t)\|_0^{1/2} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\ &\quad \forall\, t \in [0, T]; \end{aligned}$$

infine, applicando la disuguaglianza di Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall\, a, b \geq 0,\ p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

con $p = \frac{4}{3}$ e $q = 4$ si ottiene

$$|b(Z(t), Z(t), \varphi(t))| \leq \frac{1}{4} \|Z(t)\|_1^2 + 12^3 K^4 \|Z(t)\|_0^2 \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \tag{2.94}$$

per ogni $t \in [0, T]$. Per quanto riguarda poi il secondo termine dell'ultimo membro della 2.93, si ha

$$\begin{aligned} |b(\varphi(t), Z(t), \varphi(t))| &\leq 4\|Z(t)\|_1 \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|Z(t)\|_1 4\sqrt{2} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \|Z(t)\|_1^2 + 16 \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \qquad \forall\, t \in [0, T], \end{aligned}$$

dove si è utilizzata ancora la disuguaglianza di Young con $p = q = 2$. Sostituendo queste stime nella catena di uguaglianze 2.93, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z(t)\|_0^2 + \|Z(t)\|_1^2 &= -b(Z(t), Z(t), \varphi(t)) \\ &\quad -b(\varphi(t), Z(t), \varphi(t)) \\ &\leq |b(Z(t), Z(t), \varphi(t))| \\ &\quad + |b(\varphi(t), Z(t), \varphi(t))| \\ &\leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_1^2 + 12^3 K^4 \|Z(t)\|_0^2 \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \\ &\quad +16 \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \qquad \forall\, t \in [0, T], \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\|Z(t)\|_0^2 + \|Z(t)\|_1^2 \le K_1\|Z(t)\|_0^2\|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 + K_2\|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

per due opportune costanti positive K_1 e K_2. Applichiamo ora la seguente forma del lemma di Gronwall: se $f, a, h : [0,T] \to \mathbb{R}$ sono tre funzioni continue tali che si abbia

$$f'(t) \le a(t) + h(t)f(t) \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

allora si ha

$$f(t) \le f(0)e^{\int_0^t h(s)ds} + \int_0^t a(s)e^{\int_s^t h(r)dr}ds \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.95}$$

Pertanto la disuguaglianza 2.92 si ottiene scegliendo $f(t) = \|Z(t)\|_0^2$, $a(t) = K_2\|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 - \|Z(t)\|_1^2$, $h(t) = K_1\|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4$. $\square$

La stima a priori 2.92 ci permette di concludere che la soluzione mild dell'equazione di Navier-Stokes stocastica trovata nel teorema 2.34 si può prolungare a tutto l'intervallo temporale $[0,T]$ per tutti quei valori di ω tali che le ipotesi della proposizione 2.35 sono soddisfatte. Poiché $\varphi(\omega) = W_A(\omega)$ soddisfa la disuguaglianza 2.58 (e quindi appartiene ad E) per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, possiamo estendere la soluzione a $[0,T]$ su un insieme di probabilità 1. Rimane a questo punto da dimostrare che, come preannunciato, la soluzione trovata in questo modo appartiene allo spazio $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$.

Teorema 2.36 *Se l'operatore B soddisfa le ipotesi 2.29, allora per ogni $x_0 \in \mathcal{H}_0$ esiste un unico processo stocastico*

$$X \in L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$$

soluzione mild del problema 2.72.

Dimostrazione. Osserviamo che la soluzione u del problema 2.89 appartiene alla palla $B\left(-\varphi(\omega), \frac{1}{4M}\right)$ (dove $B\left(-\varphi(\omega), \frac{1}{4M}\right)$ è la palla di centro $\varphi(\omega)$ e raggio $\frac{1}{4M}$ nello spazio E), quindi

$$X(\omega) = u(\omega) + \varphi(\omega) \in B\left(0, \frac{1}{4M}\right) \qquad \forall\, \omega \in \Omega\backslash N;$$

questo implica che la norma di $X(\omega)$ in E è limitata dalla costante $\frac{1}{4M}$ per ogni $\omega \in \Omega\backslash N$. Di conseguenza risulta

$$\begin{aligned}
\|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)} &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(s)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#}\, ds\right] \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^T \|X(\omega,s)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#}\, ds\right]\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_\Omega \|X(\omega)\|_E^4 \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega\backslash N} \|X(\omega)\|_E^4 \mathbb{P}(d\omega) \le \frac{1}{4M}
\end{aligned}$$

e si può quindi concludere che il processo X è davvero un elemento di $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$ per ogni $x_0 \in \mathcal{H}_0$. $\square$

Osservazione 2.37 *Con il teorema 2.34 e con la stima a priori 2.92 abbiamo fatto vedere che per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ la soluzione mild $X(\omega,\cdot)$ del problema 2.72 appartiene allo spazio $L^4([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$. In realtà i risultati ottenuti in precedenza implicano una regolarità maggiore per questa soluzione, ad ω fissato, sotto le stesse ipotesi sull'operatore B (cioè richiedendo sempre che siano soddisfatte le ipotesi 2.29). Infatti abbiamo visto che la funzione $t \mapsto e^{tA}x_0$ appartiene a $C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per ogni $x_0 \in \mathcal{H}_0$ (si vedano la proposizione 2.8 ed il corollario 2.20); inoltre, poiché per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione $t \mapsto \Gamma(X(\omega,\cdot))(t)$ è soluzione del problema non omogeneo*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + b(X(\omega,t)) \qquad \forall\, t \in [0,T], \\ \\ X(0) = 0, \end{cases} \tag{2.96}$$

dal corollario 2.19 segue che, per quei valori di ω per cui $X(\omega,\cdot)$ appartiene a $L^4([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$, si ha anche

$$\Gamma(X(\omega,\cdot)) \in C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1);$$

infine, se B soddisfa le ipotesi 2.29, dai teoremi 2.30 e 2.31 segue che la traiettoria $W_A(\omega)$ della convoluzione stocastica appartiene anch'essa a $C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. In definitiva possiamo concludere che

$$X(\omega,\cdot) \in C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$$

per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Capitolo 3

Esistenza della misura invariante

3.1 Semigruppi di Markov

Sia H uno spazio di Hilbert separabile, con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $|\cdot|$; indichiamo con $\mathcal{B}(H)$ la σ-algebra dei boreliani di H, con $M(H)$ l'insieme di tutte le misure di probabilità su H. $C_b(H)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni uniformemente continue e limitate definite in H a valori reali, che è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|\varphi\|_\infty \equiv \sup_{x \in H} |\varphi(x)|.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}(C_b(H))$ l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati sullo spazio $C_b(H)$. Anche lo spazio vettoriale $B_b(H)$, costituito da tutte le funzioni boreliane limitate definite in H a valori reali, è uno spazio di Banach rispetto alla stessa norma. Indichiamo poi con $C_b^+(H)$ il sottospazio di $C_b(H)$ costituito dalle funzioni a valori positivi e con $\mathbf{1}$ la funzione identicamente uguale ad 1 su tutto H.

Definizione 3.1 *Diciamo che un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(C_b(H))$ è un operatore integrale se esiste una famiglia $\{\nu_x\}_{x \in H}$ di elementi di $M(H)$ tale che*

$$T\varphi(x) = \int_H \varphi(y)\nu_x(dy) \qquad \forall\, \varphi \in C_b(H),\, x \in H; \tag{3.1}$$

diciamo che l'operatore T è positivo se $\varphi \in C_b^+(H) \Rightarrow T\varphi \in C_b^+(H)$.

Osserviamo che, se $T \in \mathcal{L}(C_b(H))$ è un operatore integrale, esso si può estendere in modo unico a tutto $B_b(H)$; infatti, se $A \in \mathcal{B}(H)$, direttamente dalla relazione 3.1 si ottiene

$$T\chi_A(x) = \int_H \chi_A(y)\nu_x(dy) = \nu_x(A) \qquad \forall\, x \in H, \tag{3.2}$$

dove χ_A indica la funzione indicatrice dell'insieme A; la definizione si estende poi alle funzioni semplici da H in $\mathbb{R}$ per linearità, alle funzioni boreliane positive mediante il teorema della convergenza monotona ed infine alle funzioni boreliane di segno arbitrario scomponendole in parte positiva e parte negativa.

Definizione 3.2 *Una famiglia $\{P_t\}_{t\geq 0}$ di elementi di $\mathcal{L}(C_b(H))$ si dice un semigruppo di Markov se possiede le seguenti proprietà:*

1. $P_0\varphi = \varphi \ \forall \varphi \in C_b(H)$, $P_{t+s} = P_t P_s \ \forall s, t \geq 0$, $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1} \ \forall t \geq 0$;
2. P_t *è un operatore positivo integrale per ogni* $t \geq 0$;
3. *l'applicazione*

$$[0, T] \times H \longrightarrow \mathbb{R}, \ (t, x) \longmapsto P_t\varphi(x)$$

è continua per ogni $T > 0$, $\varphi \in C_b(H)$.

Dalla definizione appena data segue che, se $\{P_t\}_{t\geq 0}$ è un semigruppo di Markov, allora esiste un'applicazione

$$[0, +\infty) \times H \longrightarrow M(H), \ (t, x) \longrightarrow \lambda_{t,x}$$

tale che $\lambda_{0,x} = \delta_x$ (δ_x indica la misura di Dirac centrata in x, cioè la misura tale che $\delta_x(A) = \chi_A(x)$ per ogni $A \in \mathcal{B}(H)$, $x \in H$) e

$$P_t\varphi(x) = \int_H \varphi(y)\lambda_{t,x}(dy) \qquad \forall \varphi \in C_b(H), \ x \in H, \ t \geq 0. \tag{3.3}$$

La famiglia di misure di probabilità $\{\lambda_{t,x}\}_{(t,x)\in[0,+\infty)\times H}$ prende il nome di nucleo di probabilità di Markov. Osserviamo poi che si ha

$$\begin{aligned} |P_t\varphi(x)| &= \left| \int_H \varphi(y)\lambda_{t,x}(dy) \right| \leq \int_H |\varphi(y)| \, \lambda_{t,x}(dy) \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_H \lambda_{t,x}(dy) = \|\varphi\|_\infty \qquad \forall \varphi \in C_b(H), \ x \in H, \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

cioè

$$\|P_t\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \qquad \forall \varphi \in C_b(H), \ t \geq 0.$$

Questo implica che un semigruppo di Markov è un semigruppo di contrazioni su $C_b(H)$; in generale, tuttavia, non è detto che un semigruppo di Markov sia fortemente continuo. Esaminiamo ora le principali proprietà dei semigruppi di Matkov (seguiamo l'approccio di [7]).

Proposizione 3.3 (Proprietà di Chapman-Kolmogorov) *Per ogni* $s, t \geq 0$, $x \in H$, $A \in \mathcal{B}(H)$ *si ha*

$$\lambda_{t+s,x}(A) = \int_H \lambda_{s,y}(A)\lambda_{t,x}(dy) \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la 3.5 basta usare il fatto che $P_t\chi_A(x) = \lambda_{t,x}(A)$ per ogni $s, t \geq 0$, $x \in H$, $A \in \mathcal{B}(H)$, come segue dalla 3.2. Allora si ha

$$\begin{aligned} \lambda_{t+s,x}(A) &= P_{t+s}\chi_A(x) = P_t P_s \chi_A(x) \\ &= \int_H P_s\chi_A(y)\lambda_{t,x}(dy) \\ &= \int_H \lambda_{s,y}(A)\lambda_{t,x}(dy) \qquad \forall\, s,t \geq 0,\, x \in H,\, A \in \mathcal{B}(H), \end{aligned}$$

e la conclusione segue. $\square$

Esempio 3.4 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} X'(t) = b(X(t)) & \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.6}$$

dove $X : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ *e* $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è una funzione Lipschitziana. È noto che questo problema ammette un'unica soluzione* $X(t, x) \in C^1([0, +\infty))$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *e, grazie all'unicità della soluzione, si ha*

$$X(t + s, x) = X(t, X(s, x)) \qquad \forall\, s, t \geq 0.$$

Possiamo associare a questo problema un semigruppo di operatori lineari limitati su $C_b(\mathbb{R}^n)$ *definito da*

$$P_t\varphi(x) \equiv \varphi(X(t, x)) \qquad \forall\, \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n),\, x \in \mathbb{R}^n,\, t \geq 0. \tag{3.7}$$

Allora per ogni $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *Si ha*

$$\begin{aligned} P_0\varphi(x) &= \varphi(X(0, x)) = \varphi(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n; \\ P_{t+s}\varphi(x) &= \varphi(X(t + s, x)) = \varphi(X(t, X(s, x))) \\ &= P_s\varphi(X(t, x)) = P_s P_t\varphi(x) \qquad \forall\, s, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^n; \\ P_t\mathbf{1}(x) &= \mathbf{1}(X(t, x)) = 1 \qquad \forall\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Inoltre la famiglia di misure $\{\lambda_{t,x}\}_{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n} = \left\{\delta_{X(t,x)}\right\}_{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n}$ *rappresenta un nucleo di probabilità di Markov per il semigruppo, mentre il fatto che la funzione*

$$[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, x) \longrightarrow P_t\varphi(x)$$

sia continua $\forall\, \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *è una conseguenza del lemma di Gronwall. Possiamo quindi concludere che le condizioni 1,2 e 3 della definizione 3.2 sono verificate, quindi il semigruppo definito dalla 3.7 è un semigruppo di Markov.*

Esempio 3.5 *Consideriamo l'equazione differenziale stocastica*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \qquad \forall\, t \in [0, T], \quad (3.8)$$

dove $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ *e* $W(t)$ *è un processo di Wiener a valori in* $\mathbb{R}^k$ *la cui filtrazione naturale è* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. *Introduciamo nello spazio* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ *degli operatori lineari da* $\mathbb{R}^k$ *a* $\mathbb{R}^n$ *la norma*

$$\|S\|_2 \equiv [\mathrm{Tr}(SS^*)]^{1/2} \qquad \forall\, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$$

e supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

1. b *e* σ *sono funzioni continue su* $[0, T] \times \mathbb{R}^n$*;*

2. *esiste una costante* $M > 0$ *tale che per ogni* $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_2^2 \leq M^2 |x - y|^2,$$

$$|b(t, x)|^2 + \|\sigma(t, x)\|_2^2 \leq M^2(1 + |x|^2).$$

Allora si può dimostrare (si veda, per esempio, [5, §7.2]) che esiste un unico processo stocastico $X(t, x)$*, continuo in media quadratica ed adattato a* W*, soluzione del problema 3.8. Anche in questo caso possiamo associare al problema un semigruppo di operatori lineari limitati su* $C_b(\mathbb{R}^n)$ *definito da*

$$P_t\varphi(x) \equiv \mathbb{E}\left[\varphi(X(t, x))\right] \qquad \forall\, \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \quad (3.9)$$

Se indichiamo con $\lambda_{t,x}$ *la legge della variabile aleatoria* $X(t, x)$*, per ogni* $t \geq 0$ *e per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$*, allora la famiglia di misure* $\{\lambda_{t,x}\}_{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n}$ *è un nucleo di probabilità di Markov per il semigruppo 3.9, quindi la condizione 2 della definizione 3.2 è soddisfatta. La condizione 3 è anch'essa soddisfatta (si veda [5, §7.3], anche in questo caso lo strumento principale della dimostrazione è il lemma di Gronwall), mentre la condizione 1, cioè la legge di semigruppo, è garantita dalla proposizione che segue. Pertanto si può concludere che anche la famiglia di operatori definita dalla 3.9 è un semigruppo di Markov.*

Proposizione 3.6 *Sia* $X(t, x)$ *la soluzione del problema 3.8 e* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *la famiglia di operatori definita dalla 3.9. Allora per ogni* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $s, t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t + s, x))|\mathcal{F}_t\right] = P_s\varphi(X(t, x)) \qquad \mathbb{P}\text{-}quasi\ certamente, \quad (3.10)$$

inoltre per ogni $s, t \geq 0$ *vale la legge di semigruppo* $P_{t+s} = P_tP_s$.

Dimostrazione. Step 1. Per dimostrare la 3.10 è sufficiente far vedere che per ogni variabile aleatoria Z $\mathcal{F}_t$-misurabile e limitata si ha

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,x))Z\right] = \mathbb{E}\left[P_s\varphi(X(t,x))Z\right]. \tag{3.11}$$

Grazie all'unicità della soluzione si ha

$$X(t+s,x) = X(t+s,t,X(t,x)),$$

dove $X(t+s,t,X(t,x))$ indica l'unica soluzione del problema nell'intervallo di tempo $[t,+\infty)$ con la condizione iniziale $X(t,t,X(t,x)) = X(t,x)$. Pertanto è sufficiente dimostrare che

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))Z\right] = \mathbb{E}\left[P_s\varphi(\eta)Z\right] \tag{3.12}$$

per ogni variabile aleatoria Z $\mathcal{F}_t$-misurabile e limitata e per ogni variabile aleatoria η a valori in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_t$-misurabile e di quadrato integrabile.

Step 2. Dimostriamo prima la 3.12 nel caso in cui η è una funzione semplice, cioè

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \chi_{A_i},$$

dove $\{A_i\}_{i=1}^k$ è una partizione di Ω formata da elementi di $\mathcal{F}_t$, χ_{A_i} è la funzione indicatrice di A_i e gli η_i sono elementi di $\mathbb{R}^n$. In questo caso si ha

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))Z\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_i))\chi_{A_i}Z\right];$$

la variabile aleatoria $X(t+s,t,\eta_i)$ dipende solo dagli incrementi del processo di Wiener fra i tempi t e $t+s$, quindi è indipendente da $\mathcal{F}_t$, mentre χ_{A_i} e Z sono entrambe $\mathcal{F}_t$-misurabili; di conseguenza si ha

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))Z\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_i))\right]\mathbb{E}\left[\chi_{A_i}Z\right].$$

Sempre grazie all'unicità della soluzione le variabili aleatorie $X(t+s,t,\eta_i)$ e $X(s,\eta_i)$ hanno la stessa legge, pertanto

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_i))\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X(s,\eta_i))\right] = P_s\varphi(\eta_i) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))Z\right] &= \sum_{i=1}^{k} P_s\varphi(\eta_i)\mathbb{E}\left[\chi_{A_i}Z\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[P_s\varphi(\eta_i)\chi_{A_i}Z\right] \\ &= \mathbb{E}\left[P_s\varphi(\eta)Z\right].\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto la 3.12, da cui segue la 3.10, nel caso particolare in cui η è una funzione semplice.

Step 3. Consideriamo il caso in cui η è una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_t$-misurabile e di quadrato integrabile. Allora esiste una successione $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie semplici convergente a η $\mathbb{P}$-quasi certamente ed in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Applicando le proprietà della speranza condizionale e la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left|\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_k))|\mathcal{F}_t\right]\right|\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left|\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta)) - \varphi(X(t+s,t,\eta_k))|\mathcal{F}_t\right]\right|\right\} \\
&\leq \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left|\varphi(X(t+s,t,\eta)) - \varphi(X(t+s,t,\eta_k))\right| |\mathcal{F}_t\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\varphi(X(t+s,t,\eta)) - \varphi(X(t+s,t,\eta_k))\right|\right] \\
&\leq \left\|\varphi(X(t+s,t,\eta)) - \varphi(X(t+s,t,\eta_k))\right\|_{L^2(\Omega)};
\end{aligned} \tag{3.13}$$

nell'integrale $\int_\Omega |\varphi(X(t+s,t,\eta)) - \varphi(X(t+s,t,\eta_k))|^2 d\mathbb{P}$ l'espressione integranda tende a zero puntualmente su Ω grazie alla continuità di φ, inoltre è dominata dalla costante $2\|\varphi\|_\infty$, che è ovviamente integrabile. Grazie al teorema della convergenza dominata si può allora concludere che

$$\|\varphi(X(t+s,t,\eta)) - \varphi(X(t+s,t,\eta_k))\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ per } k \longrightarrow +\infty,$$

quindi

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_k))|\mathcal{F}_t\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))|\mathcal{F}_t\right] \text{ in } L^1(\Omega) \text{ per } k \longrightarrow +\infty.$$

Di conseguenza esiste una sottosuccessione $\left\{\eta_{k_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_{k_j}))|\mathcal{F}_t\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta))|\mathcal{F}_t\right] \text{ per } j \longrightarrow +\infty$$

$\mathbb{P}$-quasi certamente su Ω. Osserviamo poi che per ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$\begin{aligned}
&|P_s(\eta(\omega)) - P_s(\eta_k(\omega))| = \left|\mathbb{E}\left[\varphi(X(s,\eta(\omega))) - \varphi(X(s,\eta_k(\omega)))\right]\right| \\
&= \left|\int_\Omega \left[\varphi(X(s,\omega',\eta(\omega))) - \varphi(X(s,\omega',\eta_k(\omega)))\right] \mathbb{P}(d\omega')\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|\varphi(X(s,\omega',\eta(\omega))) - \varphi(X(s,\omega',\eta_k(\omega)))\right| \mathbb{P}(d\omega');
\end{aligned} \tag{3.14}$$

l'espressione integranda converge a zero puntualmente su Ω per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, inoltre è dominata dalla costante $2\|\varphi\|_\infty$. Grazie al teorema della convergenza dominata si può allora concludere che

$$P_s(\eta_k(\omega)) \longrightarrow P_s(\eta(\omega)) \text{ per } k \longrightarrow +\infty$$

$\mathbb{P}$-quasi certamente su Ω. Poiché grazie allo step 2 si ha

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,t,\eta_{k_j}))|\mathcal{F}_t\right] = P_s\varphi(\eta_{k_j}) \qquad \forall\, j \in \mathbb{N},\ \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n),\ s,t \geq 0, \tag{3.15}$$

passando al limite per $j \to +\infty$ in entrambi i membri si ottiene proprio la 3.10.

Step 4. Dalla 3.10, prendendo i valori medi di entrambi i membri, si trova

$$\begin{aligned} P_{t+s}\varphi(x) &= \mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,x))\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi(X(t+s,x))|\mathcal{F}_t\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[P_s\varphi(X(t,x))\right] = P_tP_s\varphi(x) \qquad \forall\, \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n),\ s,t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

cioè vale la legge di semigruppo. $\square$

Dagli esempi 3.4 e 3.5 possiamo vedere che, nel caso in cui si studi un sistema fisico la cui evoluzione temporale è regolata da un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine, eventualmente con l'aggiunta di un termine di rumore, i semigruppi di Markov sono strumenti utili per studiare l'evoluzione temporale di quantità legate al sistema in esame. Si può dare anche un'interpretazione fisica del ruolo del nucleo di probabilità di Markov e della proprietà di Chapman-Kolmogorov 3.5: la misura di un insieme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ secondo $\lambda_{t,x}$ rappresenta la probabilità che X assuma un valore appartenente all'insieme A all'istante t sapendo che l'evoluzione del sistema comincia dal punto x. La proprietà di Chapman-Kolmogorov, invece, afferma che la probabilità che X assuma al tempo $t+s$ un valore appartenente all'insieme A è la somma su $y \in \mathbb{R}^n$ delle probabilità che X si trovi nel punto y all'istante t e poi passi da y all'insieme A in un tempo s. In questo modo si vede che la proprietà di Chapman-Kolmogorov esprime la Markovianità dell'evoluzione temporale del sistema nel senso usuale, cioè il fatto che tale evoluzione non dipende dalla "storia passata" del sistema, ma solo dal "presente".

Introduciamo ora il concetto di misura invariante per un semigruppo di Markov.

Definizione 3.7 *Sia $\{P_t\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di Markov; diciamo che una misura $\mu \in M(H)$ è una misura invariante per il semigruppo se si ha*

$$\int_H P_t\varphi(x)\mu(dx) = \int_H \varphi(x)\mu(dx) \qquad \forall\, \varphi \in C_b(H),\ t \geq 0.$$

Una prima conseguenza dell'esistenza di una misura invariante per un semigruppo di Markov è la seguente.

Teorema 3.8 *Sia $\{P_t\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di Markov e supponiamo che esista una misura invariante μ per esso: allora per ogni $t \geq 0$, $p \geq 1$ l'operatore P_t si può estendere in modo unico ad un operatore lineare limitato su $L^p(H,\mu)$, che indichiamo ancora con P_t. Inoltre si ha*

$$\|P_t\|_{\mathcal{L}(L^p(H,\mu))} \leq 1 \qquad \forall\, t \geq 0,$$

cioè il semigruppo esteso allo spazio $L^p(H,\mu)$ rimane un semigruppo di contrazioni.

L'esistenza di una misura invariante ha delle conseguenze anche sul comportamento asintotico del semigruppo.

Teorema 3.9 *Sia $\{P_t\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di Markov e sia μ una misura invariante per esso; definiamo poi*

$$M(T)\varphi(x) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T P_s\varphi(x)ds \qquad \forall\, \varphi \in L^2(H,\mu),\, x \in H,\, T > 0.$$

Allora per ogni $\varphi \in L^2(H,\mu)$ esiste il limite

$$\lim_{T\to+\infty} M(T)\varphi \equiv M_\infty\varphi \text{ in } L^2(H,\mu),$$

inoltre $M_\infty^2 = M_\infty$ e

$$\int_H M_\infty\varphi(x)\mu(dx) = \int_H \varphi(x)\mu(dx) \qquad \forall\, \varphi \in L^2(H,\mu).$$

Ciò significa che, se esiste una misura invariante per il semigruppo, allora esiste un operatore M_∞ che associa ad ogni grandezza φ, funzione dello stato del sistema in esame, la sua media temporale; può essere che tale media coicida con la media statistica sulle diverse condizioni iniziali possibili, effettuata tramite la misura invariante, e questo è proprio quello che si intende con il concetto di ergodicità.

Definizione 3.10 *Sia $\{P_t\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di Markov; diciamo che una misura invariante μ è ergodica se per ogni $\varphi \in L^2(H,\mu)$ si ha*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P_t\varphi dt = M_\infty\varphi = \int_H \varphi(x)\mu(dx) \text{ in } L^2(H,\mu); \tag{3.17}$$

diciamo che μ è fortemente mescolante se per μ-quasi ogni $x \in H$ si ha

$$\lim_{t\to+\infty} P_t\varphi(x) = \int_H \varphi(x)\mu(dx) \qquad \forall\, \varphi \in L^2(H,\mu). \tag{3.18}$$

Introduciamo ora alcuni criteri utili per stabilire l'esistenza, l'unicità e le eventuali proprietà di ergodicità e mescolamento forte di una misura invariante.

Definizione 3.11 *Un insieme $\Lambda \subset M(H)$ si dice teso se esiste una successione monotona crescente $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi compatti di H tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(K_n) = 1 \text{ uniformemente su } \Lambda,$$

cioè se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, K_\varepsilon \subset H \text{ compatto tale che } \mu(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon\, \forall\, \mu \in \Lambda.$$

Teorema 3.12 (di Krylov-Bogoliubov) *Sia* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *un semigruppo di Markov e definiamo la famiglia di misure*

$$\mu_{T,x} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \lambda_{t,x} dt;$$

se esiste $x_0 \in H$ *tale che la famiglia* $\{\mu_{T,x_0}\}_{T>0}$ *è tesa, allora esiste una misura invariante per il semigruppo.*

Definizione 3.13 *Diciamo che un semigruppo di Markov* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *è irriducibile se si ha*

$$P_t\chi_{B(z,\varepsilon)}(x) = \lambda_{t,x}(B(z,\varepsilon)) > 0 \qquad \forall\, t \geq 0,\, x, z \in H,\, \varepsilon > 0.$$

Diciamo invece che il semigruppo ha la proprietà di Feller forte se si ha

$$P_t\varphi \in C_b(H) \qquad \forall\, \varphi \in B_b(H),\, t > 0.$$

Teorema 3.14 *Sia* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *un semigruppo di Markov irriducibile e con la proprietà di Feller forte; allora esso possiede al più una misura invariante. Inoltre, se* μ *è la misura invariante per il semigruppo, allora* μ *è equivalente a ciascuna delle misure* $\lambda_{t,x}$ *ed è ergodica.*

3.2 Metodo di Galerkin

Lo scopo di questo capitolo è quello di dimostrare l'esistenza di una misura invariante per l'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni; un modo per farlo consiste nell'utilizzare il metodo di Galerkin, cioè nell'introdurre dei problemi approssimanti ambientati in spazi di Hilbert finito-dimensionali, per i quali, quindi, si può ricorrere alla teoria delle equazioni differenziali stocastiche in $\mathbb{R}^n$. Per una dimostrazione alternativa dell'esistenza di una misura invariante si veda l'appendice A.

Definiamo per ogni $m \in \mathbb{N}$ il proiettore sullo spazio vettoriale generato dalla famiglia di funzioni $\{\mathbf{v_k}\}_{1\leq|\mathbf{k}|\leq m}$:

$$\mathcal{P}_m \equiv \sum_{1\leq|\mathbf{k}|\leq m} \mathbf{v_k} \otimes \mathbf{v_k} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{H}_\sigma) = span\,\{\mathbf{v_k} : 1 \leq |\mathbf{k}| \leq m\} \equiv \mathcal{V}_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\, \sigma \in \mathbb{R}.$$

È utile osservare che si ha anche

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{L}^4_\#) = \mathcal{V}_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

$\mathcal{V}_m$ è un sottospazio finito-dimensionale di ciascuno degli spazi $\mathcal{H}_\sigma$, con $\sigma \in \mathbb{R}$, quindi è uno spazio di Hilbert rispetto alla restrizione di ciascuna delle norme $\|\cdot\|_\sigma$. Poiché in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, in particolare le restrizioni a $\mathcal{V}_m$ delle norme $\|\cdot\|_\sigma$ sono tutte equivalenti fra loro, e sono equivalenti anche alla restrizione a $\mathcal{V}_m$ della norma $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^4_\#}$; possiamo quindi decidere, in modo arbitrario, di munire $\mathcal{V}_m$ della norma

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}_m} \equiv \sum_{1\leq|\mathbf{k}|\leq m} |f_\mathbf{k}|^2 \qquad \forall\, \mathbf{f} \in \mathcal{V}_m,$$

che è la restrizione a $\mathcal{V}_m$ della norma $\|\cdot\|_0$; con questa scelta, $\mathcal{V}_m$ è isomorfo ed isometrico a $\mathbb{R}^m$.

Definiamo poi, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_m$, $t \in [0,T]$,

$$b_m(\mathbf{u}) \equiv \mathcal{P}_m b(\mathbf{u}),\ B_m \equiv \mathcal{P}_m B \mathcal{P}_m,\ W_m(t) \equiv \mathcal{P}_m W(t), \tag{3.19}$$

ed approssimiamo il problema 2.72 con il seguente problema:

$$\begin{cases} dX_m(t) + b_m(X_m(t))\,dt = AX_m(t)dt + B_m dW_m(t) & \forall\, t \in [0,T], \\ \\ X_m(0) = \mathcal{P}_m x \equiv x_m \in \mathcal{V}_m. \end{cases} \tag{3.20}$$

Osserviamo che si ha

$$AX_m(t) = \mathcal{P}_m AX_m(t) \qquad \forall\, t \in [0,T],\ m \in \mathbb{N},$$

quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ il problema 3.20 ha senso come problema di Cauchy per un'equazione differenziale stocastica ambientata in $\mathcal{V}_m$.

Teorema 3.15 *Se B soddisfa le ipotesi 2.29, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in \mathcal{V}_m$ e per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ il problema 3.20 ammette un'unica soluzione appartenente allo spazio $L^4([0,T];\mathcal{V}_m)$.*

Dimostrazione. Seguiamo uno schema simile a quello che ha condotto alla dimostrazione dell'esistenza ed unicità della soluzione del problema in dimensione infinita 2.72, cioè dimostriamo prima l'esistenza locale della soluzione e poi otteniamo l'esistenza globale tramite una stima a priori.

Step 1. Osserviamo prima di tutto che, grazie alla proprietà 1.74 dell'operatore b ed all'equivalenza delle norme su $\mathcal{V}_m$, per ogni coppia di elementi $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ di $\mathcal{V}_m$ si ha

$$\begin{aligned} \|b_m(\mathbf{u}) - b_m(\mathbf{w})\|_{\mathcal{V}_m} &\leq K_1\|b_m(\mathbf{u}) - b_m(\mathbf{w})\|_{-1} \leq K_1\|b(\mathbf{u}) - b_m(\mathbf{w})\|_{-1} \\ &\leq 4K_1\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\left[\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right] \\ &\leq 4K_1K_2\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}_m}\left[\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}_m} + \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}_m}\right], \end{aligned} \tag{3.21}$$

dove $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ sono due opportune costanti; da questa catena di disuguaglianze segue che l'applicazione $b_m : \mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_m$ è localmente

Lipschitziana per ogni $m \in \mathbb{N}$. Osserviamo poi che si ha

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}-\mathbf{w}) &= -\sum_{1\le|\mathbf{k}|\le m} |\mathbf{k}|^2(u_{\mathbf{k}}-w_{\mathbf{k}})\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \Longrightarrow \\ \|A(\mathbf{u}-\mathbf{w})\|^2_{\mathcal{V}_m} &= \sum_{1\le|\mathbf{k}|\le m} |\mathbf{k}|^4|u_{\mathbf{k}}-w_{\mathbf{k}}|^2 \le m^4\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2_{\mathcal{V}_m}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dalle stime 3.21 e 3.22 si ottiene allora

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{u}-A\mathbf{w}-b_m(\mathbf{u})+b_m(\mathbf{w})\|^2_{\mathcal{V}_m} &\le 2\|A\mathbf{u}-A\mathbf{w}\|^2_{\mathcal{V}_m} + 2\|b(\mathbf{u})-b(\mathbf{w})\|^2_{\mathcal{V}_m} \\ &\le \left[2m^4 + 32K_1^2K_2^2\left(\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}_m}+\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}_m}\right)^2\right]\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2_{\mathcal{V}_m}; \end{aligned}$$

ciò significa che l'operatore $A-b_m : \mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_m$ è localmente Lipschitziano per ogni $m \in \mathbb{N}$. Grazie ai risultati noti sulle equazioni differenziali stocastiche in dimensione finita, ciò è sufficiente a garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema 3.20 in un intervallo $[0, T_m(\omega)] \subset [0, T]$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $\omega \in \Omega$, con $T_m(\omega) \in (0, T]$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Step 2. Per poter concludere che la soluzione locale trovata nello Step 1 si può estendere a tutto l'intervallo $[0, T]$ abbiamo bisogno di una stima a priori. Per ottenere tale stima è utile osservare che, grazie alle proprietà 1.65 e 1.66 dell'operatore b, si ha

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}),\ b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1;$$

applicando il proiettore $\mathcal{P}_m$ ad entrambi i membri di queste uguaglianze si vede che esse continuano ad essere valide anche per l'operatore b_m:

$$b_m(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -b_m(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}),\ b_m(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathcal{V}_m \subset \mathcal{H}_1. \quad (3.23)$$

Fissiamo $\omega_0 \in \Omega$ tale che $W_A(\omega_0)$ soddisfi la disuguaglianza 2.58 (grazie alla proposizione 2.28 tale disuguaglianza è soddisfatta per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$): allora, poiché B soddisfa le ipotesi 2.29, dal teorema 2.31 segue che $W_A(\omega_0)$ appartiene allo spazio $C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$. Inoltre $W_A^m(\omega,t) = \mathcal{P}_m W_A(\omega,t)$ per ogni $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$, $m \in \mathbb{N}$, quindi si ha anche

$$W_A^m(\omega_0) \in C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset E$$

e per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|W_A^m(\omega_0)\|_E &\le K\left[\|W_A^m(\omega_0)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} + \|W_A^m(\omega_0)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right] \\ &\le K\left[\|W_A(\omega_0)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} + \|W_A(\omega_0)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

con $K > 0$ costante, cioè la successione $\{W_A^m(\omega_0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata in E. Definiamo

$$\varphi_m(t) \equiv W_A^m(\omega_0,t),\ Z_m(t) \equiv X_m(\omega_0,t) - \varphi_m(t) \qquad \forall\,m \in \mathbb{N},\ t \in [0,T].$$

Allora $Z_m(t)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{dZ_m(t)}{dt} + b_m\left(Z_m(t) + \varphi_m(t)\right) = AZ_m(t) & \forall\, t \in [0, T_m(\omega_0)], \\ \\ Z_m(0) = x_m \in \mathcal{V}_m. \end{cases} \tag{3.25}$$

Poiché in dimensione finita il concetto di soluzione mild coincide con il concetto di soluzione stretta e l'operatore b_m possiede le proprietà 3.23, possiamo effettuare gli stessi passaggi della proposizione 2.35 ed arrivare così alla dimostrazione di una stima a priori analoga a quella ottenuta per il problema in dimensione infinita, cioè la 2.92: per ogni $t \in [0, T]$ si ha allora

$$\begin{aligned} &\|Z_m(t)\|_0^2 + \int_0^t \exp\left[K_1 \int_s^t \|\varphi_m(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 dr\right] \|Z_m(s)\|_1^2 ds \leq \\ &\exp\left[K_1 \int_0^t \|\varphi_m(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 dr\right] \|x_m\|_0^2 \\ &+ K_2 \int_0^t \exp\left[K_1 \int_s^t \|\varphi_m(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 dr\right] \|\varphi_m(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 ds, \end{aligned} \tag{3.26}$$

dove K_1 e K_2 sono due costanti positive. Pertanto, poiché grazie alla 3.24 la successione $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata in E, si trova che anche la successione $\{Z_m(\omega_0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata in E, quindi anche $\{X_m(\omega_0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ lo è. Questo basta per concludere che per ogni $m \in \mathbb{N}$ la soluzione locale trovata nello Step 1 si può estendere a tutto l'intervallo $[0, T]$ ad un elemento di E o, ciò che è lo stesso, di $L^4([0, T]; \mathcal{V}_m)$. $\square$

È possibile associare al problema 3.20 anche un semigruppo di transizione, definito da

$$P_t^m \varphi(x_m) \equiv \mathbb{E}\left[\varphi\left(X_m(t, x_m)\right)\right] \qquad \forall\, \varphi \in C_b(\mathbb{R}^m),\ x_m \in \mathbb{R}^m,\ t \geq 0,\ m \in \mathbb{N},$$

dove $X_m(t, x_m)$ è la soluzione del problema 3.20 con punto iniziale x_m: la proprietà di semigruppo $P_{t+s}^m = P_t^m P_s^m$ segue infatti dalla proposizione 3.6. Inoltre si può far vedere che il semigruppo di transizione è un semigruppo di Markov.

Proposizione 3.16 *Il semigruppo $\{P_t^m\}_{t\geq 0}$ è un semigruppo di Markov per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Poiché la leggedi semigruppo è verificata, l'unica condizione non banale da verificare è a questo punto la continuità dell'applicazione $[0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto P_t^m \varphi(x)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ e $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$. Osserviamo che, se $s, t \in [0, T]$ e $x, y \in \mathbb{R}^m$, si ha

$$\begin{aligned} &|P_t^m \varphi(x) - P_s^m \varphi(y)| = |\mathbb{E}\left[\varphi(X_m(t, x)) - \varphi(X_m(s, y))\right]| \\ &\leq \mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(t, x)) - \varphi(X_m(s, y))|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(t, x)) - \varphi(X_m(s, x))|\right] + \mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(s, x)) - \varphi(X_m(s, y))|\right]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Sappiamo che $X_m(\omega, x)$ appartiene a $C([0,T];\mathcal{V}_m)$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, quindi

$$\lim_{s\to t} \|X_m(\omega,t,x) - X_m(\omega,s,x)\|_{\mathcal{V}_m} = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-quasi certamente;}$$

allora nell'espressione

$$\mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(t,x)) - \varphi(X_m(s,x))|\right] = \int_\Omega |\varphi(X_m(\omega,t,x)) - \varphi(X_m(\omega,s,x))| \mathbb{P}(d\omega)$$

l'integrando tende a zero puntualmente su Ω per $s \to t$ grazie alla continuità di φ ed è dominato dalla costante $2\|\varphi\|_\infty$, che è ovviamente integrabile. Pertanto grazie al teorema della convergenza dominata si ha

$$\lim_{s\to t} \mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(t,x)) - \varphi(X_m(s,x))|\right] = 0. \tag{3.28}$$

Osserviamo poi che per ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$\begin{aligned} \|X_m(\omega,s,x) - X_m(\omega,s,y)\|_{\mathcal{V}_m} &= \left\|e^{sA}x - e^{sA}y\right\|_{\mathcal{V}_m} + \\ &+ \|\Gamma_m(X_m(\omega,\cdot,x))(s) - \Gamma_m(X_m(\omega,\cdot,y))(s)\|_{\mathcal{V}_m}, \end{aligned}$$

inoltre

$$\begin{aligned} &\|\Gamma_m(X_m(\omega,\cdot,x))(s) - \Gamma_m(X_m(\omega,\cdot,y))(s)\|_{\mathcal{V}_m} \\ &= \left\| \int_0^s e^{(s-u)A}\left[b_m(X_m(\omega,u,x)) - b_m(X_m(\omega,u,y))\right] du \right\|_{\mathcal{V}_m} \\ &\le e^{sm^2} \int_0^s \|b_m(X_m(\omega,u,x)) - b_m(X_m(\omega,u,y))\|_{\mathcal{V}_m} du \\ &\le 4K_1K_2e^{Tm^2} \int_0^s \|X_m(\omega,u,x) - X_m(\omega,u,y)\|_{\mathcal{V}_m} [\|X_m(\omega,u,x)\|_{\mathcal{V}_m} + \\ &\quad + \|X_m(\omega,u,y)\|_{\mathcal{V}_m}]\, du \\ &\le 4\sqrt{2}K_1K_2e^{Tm^2} \|X_m(\omega,x) - X_m(\omega,y)\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}_m)} \left[\|X_m(\omega,x)\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}_m)} \right. \\ &\quad \left. + \|X_m(\omega,y)\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}_m)}\right]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

La successione $\{X_m(\omega)\}$ è limitata in E o equivalentemente in $L^4([0,T];\mathcal{V}_m)$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, quindi è limitata anche in $L^2([0,T];\mathcal{V}_m)$ per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$; allora per un'opportuna costante positiva K si ha

$$\begin{aligned} \|\Gamma_m(X_m(\omega,\cdot,x))(s) - \Gamma_m(X_m(\omega,\cdot,y))(s)\|^2_{\mathcal{V}_m} &\le \\ \le K\|X_m(\omega,x) - X_m(\omega,y)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{V}_m)} \end{aligned}$$

per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$. Poiché e^{sA} è un operatore lineare limitato su $\mathbb{R}^m$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $|x - y| < \delta$ si ha

$$\left\|e^{sA}x - e^{sA}y\right\|_{\mathcal{V}_m} < \sqrt{\varepsilon},$$

di conseguenza si trova

$$\begin{aligned}
&\|X_m(\omega,s,x)-X_m(\omega,s,y)\|^2_{\mathcal{V}_m}\le\\
&\le\left[\sqrt{\varepsilon}+K\|X_m(\omega,x)-X_m(\omega,y)\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}_m)}\right]^2\\
&\le 2\varepsilon+2K^2\|X_m(\omega,x)-X_m(\omega,y)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{V}_m)}\\
&=2\varepsilon+2K^2\int_0^T\|X_m(\omega,t,x)-X_m(\omega,t,y)\|^2_{\mathcal{V}_m}dt.
\end{aligned}$$

Dal lemma di Gronwall segue allora che

$$\|X_m(\omega,s,x)-X_m(\omega,s,y)\|^2_{\mathcal{V}_m}\le 2\varepsilon e^{2K^2},$$

perciò per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega\in\Omega$ si ha

$$\lim_{x\to y}\|X_m(\omega,s,x)-X_m(\omega,s,y)\|_{\mathcal{V}_m}=0.$$

Se ora consideriamo l'integrale

$$\mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(s,x))-\varphi(X_m(s,y))|\right]=\int_\Omega|\varphi(X_m(\omega,s,x))-\varphi(X_m(\omega,s,y))|\mathbb{P}(d\omega),$$

l'espressione integranda tende a zero puntualmente su Ω per $x\to y$ ed è dominata dalla costante $2\|\varphi\|_\infty$, che è integrabile. Di conseguenza il teorema della convergenza dominata permette di concludere che

$$\lim_{x\to y}\mathbb{E}\left[|\varphi(X_m(s,x))-\varphi(X_m(s,y))|\right]=0. \tag{3.30}$$

Sostituendo la 3.28 e la 3.30 nella 3.27 si ottiene proprio

$$\lim_{(s,y)\to(t,x)}|P^m_t\varphi(x)-P^m_s\varphi(y)|=0,$$

da cui si può concludere che $\{P^m_t\}_{t\ge0}$ è un semigruppo di Markov. □

Si può dimostrare anche che per ogni $m\in\mathbb{N}$ il semigruppo P^m_t ammette almeno una misura invariante. A questo scopo è utile premettere il seguente lemma, in cui dimostriamo un'uguaglianza che si vedrà poi essere legata al bilancio energetico del fluido (si veda l'osservazione 3.22); per rendere più immediata l'interpretazione fisica dell'uguaglianza reintroduciamo anche la viscosità ν (supponiamo fissate le scale di lunghezza e di velocità del problema, per cui la viscosità assume il ruolo che inizialmente avevamo assegnato al numero di Reynolds).

Lemma 3.17 *Per ogni $m\in\mathbb{N}$ e per ogni scelta di $x_m\in\mathcal{V}_m$, se X_m è la soluzione del problema 3.20 si ha*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\|X_m(t)\|^2_0\right]+2\nu\mathbb{E}\left[\int_0^t\|X_m(s)\|^2_1\,ds\right]\\
&=\|x_m\|^2_0+t\mathrm{Tr}\,(B_mB^*_m)\qquad\forall\, t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{3.31}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi applichiamo la formula di Itô alla soluzione del problema 3.20; poiché

$$
\begin{aligned}
X_m(t) = x_m &+ \int_0^t \left[\nu A X_m(s) - b_m(X_m(s))\right] ds \\
&+ \int_0^t B_m dW_m(s) \qquad \forall\, t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

per ogni funzione $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, uniformemente continua sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^m$ insieme alle sue derivate $D\varphi(x)$ e $D^2\varphi(x)$, si ha

$$
\begin{aligned}
&\varphi(X_m(t)) = \varphi(x_m) \\
&+ \int_0^t \langle \nu A X_m(s) - b_m(X_m(s)), D\varphi(X_m(s))\rangle_{\mathcal{V}_m} ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}\left[D^2\varphi(X_m(s)) B_m B_m^*\right] ds \\
&+ \int_0^t \langle D\varphi(X_m(s)), B_m dW_m(s)\rangle_{\mathcal{V}_m} \qquad \forall\, t \in [0,T].
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

In particolare, scegliendo $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$, si ottiene $D\varphi(x) = 2x$, $D^2\varphi(x) = 2I$ (con I matrice identità su $\mathbb{R}^m$) e quindi, applicando le proprietà 3.23 dell'operatore b_m, si trova

$$
\begin{aligned}
&\|X_m(t)\|^2_{\mathcal{V}_m} = \|X_m(t)\|_0^2 \\
&= \|x_m\|^2_{\mathcal{V}_m} + \int_0^t \langle \nu A X_m(s) - b_m(X_m(s)), 2X_m(s)\rangle_{\mathcal{V}_m} ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}\left(2 B_m B_m^*\right) ds + \int_0^t \langle 2X_m(s), B_m dW_m(s)\rangle_{\mathcal{V}_m} \\
&= \|x_m\|_0^2 + 2\int_0^t \langle \nu A X_m(s), X_m(s)\rangle_{\mathcal{V}_m} ds + t\,\mathrm{Tr}\left(B_m B_m^*\right) \\
&+ 2\int_0^t \langle X_m(s), B_m dW_m(s)\rangle_{\mathcal{V}_m} \qquad \forall\, t \in [0,T];
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

osserviamo poi che, se $\mathbf{u}$ è un elemento di $\mathcal{V}_m$, si ha

$$
\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{\mathcal{V}_m} = -\sum_{1 \le |\mathbf{k}| \le m} |\mathbf{k}|^2 |u_{\mathbf{k}}|^2 = -\|\mathbf{u}\|_1^2
$$

e di conseguenza per ogni $t \in [0,T]$ si ha

$$
\begin{aligned}
&\|X_m(t)\|_0^2 + 2\nu \int_0^t \|X_m(s)\|_1^2 ds \\
&= \|x_m\|_0^2 + t\,\mathrm{Tr}\left(B_m B_m^*\right) + 2\int_0^t \langle X_m(s), B_m dW_m(s)\rangle_{\mathcal{V}_m}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Prendendo i valori medi di entrambi i membri della 3.34 e ricordando che il valor medio di un integrale di Itô è nullo (equazione 1.53) si ottiene proprio la 3.31. □

Teorema 3.18 *Se B soddisfa le ipotesi 2.29, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste una misura invariante per il semigruppo di Markov $\{P_t^m\}_{t\geq 0}$ associato al problema 3.20.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'esistenza della misura invariante applichiamo il teorema di Krylov-Bogoliubov 3.12: fissiamo quindi un numero naturale m, indichiamo con λ_{t,x_m} la legge della variabile aleatoria $X_m(t)$, soluzione del problema 3.20 con punto iniziale $x_m \in \mathcal{V}_m$, e definiamo la famiglia di misure $\{\mu_{T,x_m}\}_{T>0}$, dove

$$\mu_{T,x_m} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \lambda_{t,x_m} dt \qquad \forall\, T > 0,\ x_m \in \mathcal{V}_m.$$

Si tratta di dimostrare che esiste $x_m \in \mathcal{V}_m$ tale che questa famiglia di misure è tesa. Consideriamo allora l'insieme

$$B_R \equiv \{y \in \mathcal{V}_m : \|y\|_{\mathcal{V}_m} \leq R\},$$

che è un sottoinsieme compatto di $\mathcal{V}_m$ per ogni $R > 0$; grazie all'uguaglianza 3.31, dimostrata nel lemma precedente, si ha

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_m(s)\|_1^2\, ds\right] \leq \frac{1}{2t\nu}\|x_m\|_0^2 + \frac{1}{2\nu}\mathrm{Tr}\,(B_m B_m^*) \quad \forall\, t \in [0,T],\ x_m \in \mathcal{V}_m;$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned}
\mu_{T,x_m}(B_R^c) &= \frac{1}{T}\int_0^T \lambda_{t,x_m}(B_R^c) dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[\chi_{B_R^c}(X_m(t))\right] dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\int_{\{X_m(t)\in B_R^c\}} d\mathbb{P}\right] dt \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^T \left[\int_{\{X_m(t)\in B_R^c\}} \frac{\|X_m(t)\|_1^2}{R^2} d\mathbb{P}\right] dt \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^T \left[\int_\Omega \frac{\|X_m(t)\|_1^2}{R^2} d\mathbb{P}\right] dt \\
&= \frac{1}{TR^2}\int_0^T \mathbb{E}\left[\|X_m(t)\|_1^2\right] dt \\
&\leq \frac{1}{2\nu R^2}\left[\|x_m\|_0^2 + \mathrm{Tr}\,(B_m B_m^*)\right] = \frac{cost}{R^2} \qquad \forall\, T > 1.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un $R > 0$ tale che $\mu_{T,x_m}(B_R) \geq 1 - \varepsilon\ \forall\, T > 1$, $x_m \in \mathcal{V}_m$, cioè la famiglia di misure $\{\mu_{T,x_m}\}_{T>1}$ è tesa, addirittura per ogni $x_m \in \mathcal{V}_m$; la conclusione segue allora dal teorema di Krylov-Bogoliubov. □

3.3 Esistenza della misura invariante

A questo punto siamo pronti a dimostrare l'esistenza di una misura invariante per il semigruppo di transizione associato all'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni, definito da

$$P_t\varphi(x) \equiv \mathbb{E}\left[\varphi(X(t,x))\right] \qquad \forall\, \varphi \in C_b(\mathcal{H}_0),\, x \in \mathcal{H}_0,\, t \geq 0, \tag{3.36}$$

dove $X(t,x)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} dX(t) + b\left(X(t)\right)dt = AX(t)dt + BdW(t) & \forall\, t \geq 0, \\ \\ X(0) = x \in \mathcal{H}_0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Il fatto che il semigruppo $\{P_t\}_{t\geq 0}$, definito dalla 3.36, sia un semigruppo di Markov si può vedere procedendo come nel caso finito-dimensionale (proposizione 3.16).

Lemma 3.19 *Sia X la soluzione mild del problema 3.37. Se B soddisfa le ipotesi 2.29, allora per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni $x \in \mathcal{H}_0$ la soluzione X_m del problema 3.20 con punto iniziale $x_m = \mathcal{P}_m x$ converge a X in E.*

Dimostrazione. Step 1. Si ha

$$X_m(\omega,t) = e^{tA}x_m - \Gamma_m(X_m(\omega,\cdot))(t) + W_A^m(\omega,t) \qquad \forall\, \omega \in \Omega,\, t \geq 0,\, m \in \mathbb{M},$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_m(X_m(\omega,\cdot))(t) &\equiv \int_0^t e^{(t-s)A} b_m(X_m(\omega,s))ds, \\ W_A^m(\omega,t) &\equiv \int_0^t e^{(t-s)A} B_m dW_m(\omega,s) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X(\omega) - X_m(\omega)\|_E \leq{}& \left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|_E + \|\Gamma(X(\omega)) - \Gamma_m(X_m(\omega))\|_E \\ &+ \|W_A(\omega) - W_A^m(\omega)\|_E \qquad \forall\, \omega \in \Omega,\, m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Calcoliamo ciascuno dei tre termini della 3.38 ad ω fissato, precisamente per un valore di ω tale che valga la disuguaglianza 2.58 (che è verificata per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$); come abbiamo visto nei teoremi 2.30, 2.31 e 3.15, insieme alle ipotesi 2.29 sull'operatore B questa condizione è sufficiente a garantire che $W_A(\omega)$ appartenga a $C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ e che la successione $\{X_m(\omega)\}_{m\in\mathbb{N}}$ sia limitata in E.

Step 2. Poiché $L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ è incluso in E con immersione continua (si veda la 2.76), esiste una costante $K > 0$ tale che

$$\begin{aligned} \left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|_E \leq{}& K\left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} \\ &+ K\left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}. \end{aligned}$$

Poiché $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ è un semigruppo di contrazioni, si ha

$$\begin{aligned}\left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} &\leq \sup_{t\in[0,T]} \left\|e^{tA}x - e^{tA}x_m\right\|_0 \\ &\leq \|x - x_m\|_0 \longrightarrow 0 \text{ per } m \longrightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} = \int_0^T \|e^{tA}x - e^{tA}x_m\|_1^2 dt;$$

in quest'espressione l'integrando tende a zero puntualmente per $m \to +\infty$, dato che $e^{tA}x_m = \mathcal{P}_m e^{tA}x$, ed è dominato dalla funzione $e^{tA}x$, che appartiene a $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ (corollario 2.20); quindi per il teorema della convergenza dominata si ha

$$\left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \longrightarrow 0 \text{ per } m \longrightarrow +\infty$$

e di conseguenza anche

$$\left\|e^{\cdot A}x - e^{\cdot A}x_m\right\|_E \longrightarrow 0 \text{ per } m \longrightarrow +\infty. \tag{3.39}$$

Step 3. Per quanto riguarda il termine della 3.38 contenente la convoluzione stocastica, grazie al teorema di immersione di Sobolev ed alla disuguaglianza di interpolazione 1.38 esiste una costante $K > 0$ tale che per ogni $t \geq 0$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}&\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \leq K\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|_{1/2} \\ &\leq K\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|_0^{1/2}\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|_1^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

L'ultimo membro della 3.40 tende a 0 per $m \to +\infty$ perché $W_A^m(\omega,t)$ è la proiezione di $W_A(\omega,t)$, quindi nell'espressione

$$\|W_A(\omega) - W_A^m(\omega)\|_E^4 = \int_0^T \|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dt$$

l'integrando tende a 0 per $m \to +\infty$ per ogni $t \in [0,T]$. Grazie al teorema della convergenza dominata, per concludere che tutto l'integrale tende a 0, e quindi $W_A^m(\omega) \to W_A(\omega)$ in E per $m \to +\infty$, è sufficiente maggiorare l'integrando con una funzione integrabile:

$$\begin{aligned}&\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} \leq \\ &\leq K\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|_0^2\|W_A(\omega,t) - W_A^m(\omega,t)\|_1^2 \\ &\leq K\|W_A(\omega,t)\|_0^2\|W_A(\omega,t)\|_1^2 \qquad \forall\, t \geq 0,\, m \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Poiché abbiamo scelto ω in modo da garantire che $W_A(\omega)$ appartenga a $C([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$, si ha

$$\int_0^T \|W_A(\omega,t)\|_0^2 \|W_A(\omega,t)\|_1^2 dt \leq \|W_A(\omega)\|^2_{C([0,T];\mathcal{H}_0)} \|W_A(\omega)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}$$
$$\Longrightarrow \int_0^T \|W_A(\omega,t)\|_0^2 \|W_A(\omega,t)\|_1^2 dt < +\infty.$$

In definitiva, il teorema della convergenza dominata permette di concludere che per ogni $\omega \in V_1$, dove V_1 è un sottoinsieme di Ω avente probabilità 1, si ha

$$W_A^m(\omega) \to W_A(\omega) \text{ in } E \text{ per } m \to +\infty.$$

Step 4. Per quanto riguarda il secondo addendo della 3.38, si ha

$$\begin{aligned} \|\Gamma(X(\omega)) - \Gamma_m(X_m(\omega))\|_E \leq & \|\Gamma(X(\omega)) - \Gamma_m(X(\omega))\|_E \\ & + \|\Gamma_m(X(\omega)) - \Gamma_m(X_m(\omega))\|_E . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Stimiamo il primo termine della 3.42: grazie alla disuguaglianza 2.82, esistono due costanti $K > 0$ e $L > 0$ tali che

$$\begin{aligned} \|\Gamma(X(\omega)) - \Gamma_m(X(\omega))\|_E^2 &\leq K^2 L^2 \|b(X(\omega)) - b_m(X(\omega))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \\ &= K^2 L^2 \int_0^T \|b(X(\omega,t)) - \mathcal{P}_m b(X(\omega,t))\|_{-1}^2 \, dt; \end{aligned}$$

l'espressione integranda tende a zero puntualmente per $m \to +\infty$, inoltre è dominata dalla funzione $\|b(X(\omega,t))\|_{-1}^2$; poiché $X(\omega) \in E$ per ogni $\omega \in V_2$, dove V_2 è un sottoinsieme di Ω avente probabilità 1, tale funzione è integrabile per ogni $\omega \in V_2$ (si veda la 2.77). Pertanto il teorema della convergenza dominata permette di concludere che

$$\|\Gamma(X(\omega)) - \Gamma_m(X(\omega))\|_E \longrightarrow 0 \text{ per } m \longrightarrow +\infty \qquad \forall\, \omega \in V_2.$$

Passiamo ora al secondo termine della 3.42: sempre grazie alla disuguaglianza 2.82, si ha

$$\begin{aligned} \|\Gamma_m(X(\omega)) - \Gamma_m(X_m(\omega))\|_E^2 &\leq K^2 L^2 \|b_m(X(\omega)) - b_m(X_m(\omega))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \\ &\leq K^2 L^2 \|b(X(\omega)) - b(X_m(\omega))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \\ &= K^2 L^2 \int_0^T \|b(X(\omega,t)) - b(X_m(\omega,t))\|_{-1}^2 \, dt; \end{aligned}$$

grazie alla proprietà 1.74 dell'operatore b ed alla disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_m(X(\omega)) - \Gamma_m(X_m(\omega))\|_E^2 \\
&\leq 16K^2L^2 \int_0^T \|X(\omega,t) - X_m(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^2 \left[\|X(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|X_m(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right]^2 dt \\
&\leq 32K^2L^2 \int_0^T \|X(\omega,t) - X_m(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^2 \left[\|X(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^2 + \|X_m(\omega,t)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^2\right] dt \\
&\leq 32K^2L^2 \|X(\omega) - X_m(\omega)\|_E^2 \left[2\|X(\omega)\|_E^4 + 2\|X_m(\omega)\|_E^4\right]^{1/2} \\
&\leq 32\sqrt{2}K^2L^2 \|X(\omega) - X_m(\omega)\|_E^2 \left[\|X(\omega)\|_E^2 + \|X_m(\omega)\|_E^2\right].
\end{aligned}$$

Su un insieme $V_3 \subset \Omega$ avente probabilità 1 si ha $X(\omega) \in E$ e la successione $\{X_m(\omega)\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata in E, quindi per ogni $\omega \in V_3$ possiamo trovare $T_1(\omega) \in (0,T]$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si abbia

$$32\sqrt{2}K^2L^2 \left[\|X(\omega)\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)}^2 + \|X_m(\omega)\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)}^2\right] \leq \frac{1}{2}.$$

Si conclude allora che per ogni $\omega \in V_2 \cap V_3$, cioè per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, e per ogni $\varepsilon > 0$ da un certo valore di m in poi risulta

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma(X(\omega)) - \Gamma_m(X_m(\omega))\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)}^2 \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{2}\|X(\omega) - X_m(\omega)\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)}^2.
\end{aligned}$$

Step 5. Mettendo insieme i risultati degli step precedenti, possiamo concludere che esiste un insieme $\Omega_0 = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \subset \Omega$ avente probabilità 1 tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, da un certo valore di m in poi si ha:

$$\begin{aligned}
\|X(\omega) - X_m(\omega)\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)}^2 &\leq \varepsilon + \frac{1}{2}\|X(\omega) - X_m(\omega)\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)}^2 \\
&\Longrightarrow \|X(\omega) - X_m(\omega)\|_{L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)} \leq \sqrt{2\varepsilon},
\end{aligned}$$

cioè $X_m(\omega)$ converge a $X(\omega)$ in $L^4([0,T_1(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)$ per ogni $\omega \in \Omega_0$.

Step 6. Per ogni $\omega \in \Omega_0$ si può ripetere il ragionamento prendendo come istante iniziale l'istante $T_1(\omega)$: in questo modo si troverà un tempo $T_2(\omega) \in (T_1(\omega),T]$ tale che $X_m(\omega)$ converge a $X(\omega)$ in $L^4([T_1(\omega),T_2(\omega)];\mathbb{L}^4_\#)$. Procedendo in questo modo, per ogni $\omega \in \Omega_0$ in un numero finito di passi si arriva a dimostrare che $X_m(\omega)$ converge a $X(\omega)$ in E. □

A questo punto possiamo cercare di ottenere anche per il problema infinito-dimensionale una stima analoga a quella dimostrata nel lemma 3.17; anche in questo caso per svolgere il calcolo reintroduciamo la viscosità ν del fluido.

Lemma 3.20 (Disuguaglianza dell'energia) *Sia X la soluzione mild del problema 3.37. Se B soddisfa le ipotesi 2.29, allora per ogni $x \in \mathcal{H}_0$ vale la disuguaglianza*

$$\nu \mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2 \, ds\right] \le \frac{1}{2}\|x\|_0^2 + \frac{t}{2}\mathrm{Tr}\,[BB^*] \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.43}$$

Dimostrazione. Verifichiamo che la successione $\{X_m(\omega)\}_{m\in\mathbb{N}}$ delle soluzioni dei problemi 3.20 con punti iniziali $x_m = \mathcal{P}_m x \in \mathcal{V}_m$ è $\mathbb{P}$-quasi certamente limitata nello spazio $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$. Poiché B soddisfa le ipotesi 2.29, dal teorema 2.31 segue che $W_A(\omega) \in L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per ogni ω appartenente ad un insieme $\Omega_1 \subset \Omega$ avente probabilità 1; inoltre $W_A^m(\omega,t) = \mathcal{P}_m W_A(\omega,t)$, quindi per ogni $\omega \in \Omega_1$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha anche $W_A^m(\omega) \in L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ e vale la disuguaglianza

$$\|W_A^m(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \le \|W_A(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \qquad \forall\, \omega \in \Omega_1,\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Dalla stima a priori 3.26 si ha allora

$$\begin{aligned}\int_0^t \|Z_m(s)\|_1^2 ds &\le \exp\left[K_1\int_0^t \|\varphi_m(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, dr\right]\|x_m\|_0^2 \\ &\quad + K_2\int_0^t \exp\left[K_1\int_s^t \|\varphi_m(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, dr\right]\|\varphi_m(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, ds \\ &\le \exp\left[K_1\int_0^t \|\varphi(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, dr\right]\|x\|_0^2 \\ &\quad + K_2\int_0^t \exp\left[K_1\int_s^t \|\varphi(r)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, dr\right]\|\varphi(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#}^4 \, ds < +\infty,\end{aligned} \tag{3.45}$$

dove $\varphi_m(t) = W_A^m(\omega,t)$, $\varphi(t) = W_A(\omega,t)$ e $Z_m(t) = X_m(\omega,t) - \varphi_m(t)$ per ogni $\omega \in \Omega_1$, $t \in [0,T]$, $m \in \mathbb{N}$. Combinando insieme la 3.44 e la 3.45 si ottiene

$$\|X_m(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \le \|Z_m(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} + \|W_A^m(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} < cost$$

per ogni $\omega \in \Omega_1$, $m \in \mathbb{N}$, cioè la successione $\{X_m(\omega)\}_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata nello spazio $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per ogni $\omega \in \Omega_1$.

Di conseguenza si può estrarre dalla successione delle $X_m(\omega)$ una sottosuccessione $\{X_{m_k}(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente in $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per ogni $\omega \in \Omega_1$; poiché per il lemma precedente questa sottosuccessione converge a $X(\omega)$ in E per ogni $\omega \in \Omega_0$, essa non può che convergere debolmente a $X(\omega)$ in $L^2([0,T];\mathcal{H}_1)$ per ogni $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, cioè su un insieme di probabilità 1.

Ricordiamo ora che, se x è un elemento di uno spazio normato X e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di X debolmente convergente a x, allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in X e si ha

$$\|x\|_X \le \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_X.$$

Nel nostro caso, quindi, per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$\|X(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|X_{m_k}(\omega)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)};$$

integrando entrambi i membri su Ω ed applicando il lemma di Fatou si ottiene

$$\begin{aligned}\nu\mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(\omega,t)\|_1^2 dt\right] &\leq \nu\mathbb{E}\left[\liminf_{k\to+\infty}\int_0^T \|X_{m_k}(\omega,t)\|_1^2 dt\right] \\ &\leq \liminf_{k\to+\infty} \nu\mathbb{E}\left[\int_0^T \|X_{m_k}(\omega,t)\|_1^2 dt\right];\end{aligned}$$

quindi, grazie all'uguaglianza 3.31, si ha

$$\nu\mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(\omega,t)\|_1^2 dt\right] \leq \liminf_{k\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\|x_0^{m_k}\|_0^2 + \frac{t}{2}\mathrm{Tr}\left(B_{m_k}B_{m_k}^*\right)\right];$$

poichè si ha

$$\mathrm{Tr}\left(B_{m_k}B_{m_k}^*\right) = \sum_{1\leq|\mathbf{k}|\leq m_k} \gamma_{\mathbf{k}} \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2,\,|\mathbf{k}|\geq 1} \gamma_{\mathbf{k}} = \mathrm{Tr}(BB^*),$$

possiamo concludere che

$$\nu\mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(t,x)\|_1^2 dt\right] \leq \frac{1}{2}\|x\|_0^2 + \frac{t}{2}\mathrm{Tr}[BB^*],$$

cioè vale la 3.43. □

Teorema 3.21 *Se B soddisfa le ipotesi 2.29, allora esiste una misura invariante per il semigruppo di Markov $\{P_t\}_{t\geq 0}$ associato al problema 3.37.*

Dimostrazione. Possiamo seguire lo schema della dimostrazione dell'esistenza della misura invariante per i semigruppi approssimanti P_t^m. Indichiamo quindi con $\lambda_{t,x}$ la legge della variabile aleatoria $X(t)$, soluzione del problema 3.37 con punto iniziale $x \in \mathcal{H}_0$, ed introduciamo la famiglia di misure $\{\mu_{T,x}\}_{T>0}$, dove

$$\mu_{T,x} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \lambda_{t,x} dt \qquad \forall\, T > 0,\; x \in \mathcal{H}_0.$$

Stavolta consideriamo l'insieme

$$B_R \equiv \{y \in \mathcal{H}_1 : \|y\|_1 \leq R\};$$

anche in questo caso B_R è un sottoinsieme compatto di $\mathcal{H}_0$, grazie alla compattezza dell'immersione di $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_0$. Pertanto, utilizzando la disuguaglianza dell'energia 3.43 e svolgendo gli stessi passaggi già visti nel teorema 3.18, si arriva a dimostrare che

$$\mu_{T,x}(B_R^c) \leq \frac{1}{2\nu R^2}\left[\|x\|_0^2 + \mathrm{Tr}(BB^*)\right] = \frac{cost}{R^2} \qquad \forall\, T > 1;$$

questo implica che la famiglia di misure $\{\mu_{T,x}\}_{T>1}$ è tesa addirittura per ogni $x \in \mathcal{H}_0$, quindi per il teorema di Krylov-Bogoliubov esiste una misura invariante per il semigruppo P_t. $\square$

Osservazione 3.22 *Il risultato dimostrato nel lemma 3.20 è sufficiente per ottenere l'esistenza di una misura invariante per l'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni, ma in realtà si può ottenere qualcosa di più: precisamente, quando si passa al limite per $m \to +\infty$ nell'uguaglianza 3.31, non solo si trova la disuguaglianza 3.43, ma la stessa uguaglianza continua ad essere verificata anche per la soluzione $X(t)$ del problema in dimensione infinita, cioè si ha*

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\|X(t)\|_0^2\right] + \nu\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2\, ds\right] = \frac{1}{2}\|x\|_0^2 + \frac{t}{2}\mathrm{Tr}\,(BB^*)\,. \tag{3.46}$$

Una dimostrazione di questo fatto è esposta nell'appedice A. L'uguaglianza 3.46 prende il nome di uguaglianza dell'energia, infatti ai vari termini in essa presenti si può dare la seguente interpretazione fisica:

1. *i termini $\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\|X(t)\|_0^2\right]$ e $\frac{1}{2}\|x\|_0^2$ rappresentano l'energia cinetica media del sistema rispettivamente all'istante generico $t \in [0, T]$ ed all'istante iniziale;*

2. *il termine $\nu\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2\, ds\right]$ rappresenta l'energia media dissipata nell'intervallo temporale $[0, t] \subset [0, T]$ a causa della viscosità del fluido;*

3. *il termine $\frac{t}{2}\mathrm{Tr}(BB^*)$ rappresenta l'energia immessa nel sistema dal rumore esterno nell'intervallo $[0, t]$.*

Se poi si integrano entrambi i membri dell'uguaglianza dell'energia 3.46 rispetto alla misura invariante μ si ottiene

$$\int_{\mathcal{H}_0}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \nu P_s\left(\|\cdot\|_1^2\right)(x)ds\right]\mu(dx) = \frac{\mathrm{Tr}(BB^*)}{2} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}_0}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \nu P_s\left(\|\cdot\|_1^2\right)(x)ds\right]\mu(dx) &= \nu\frac{1}{t}\int_0^t\left[\int_{\mathcal{H}_0} P_s\left(\|\cdot\|_1^2\right)(x)\mu(dx)\right]ds \\ &= \nu\frac{1}{t}\int_0^t\int_{\mathcal{H}_0}\|x\|_1^2\mu(dx)ds \\ &= \nu\int_{\mathcal{H}_0}\|x\|_1^2\mu(dx) \\ &= \frac{\mathrm{Tr}(BB^*)}{2} \equiv \epsilon,\end{aligned} \tag{3.47}$$

il che significa che la media su tutte le possibili condizioni iniziali dell'energia media dissipata per unità di tempo è indipendente da ν, in particolare tende *ad un limite finito* ϵ *per* $\nu \to 0$*. I risultati appena esposti rappresentano un primo esempio di informazioni quantitative sul moto dei fluidi che si possono ottenere a partire dall'equazione di Navier-Stokes stocastica, in particolare sfruttando la nozione di misura invariante.*

Appendice A

Uguaglianza dell'energia

Nei paragrafi 3.2 e 3.3 abbiamo dimostrato l'esistenza di una misura invariante per l'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni utilizzando il metodo di Galerkin. Tale metodo è spesso di grande aiuto nello studio dell'equazione di Navier-Stokes e per questo è stato utile introdurlo, tuttavia per completezza osserviamo che, come per il teorema di esistenza ed unicità della soluzione, così anche per l'esistenza di una misura invariante non è indispensabile ricorrere ad esso. Esiste infatti una strada alternativa per dimostrare il lemma 3.20, da cui l'esistenza di una misura invariante segue, come abbiamo visto, grazie al teorema di Krylov-Bogoliubov: con questo metodo, in particolare, si riesce a far vedere che la soluzione $X(t)$ dell'equazione di Navier-Stokes stocastica soddisfa non solo la disuguaglianza dell'energia 3.43, ma anche l'uguaglianza dell'energia 3.46.

Teorema A.1 (Uguaglianza dell'energia) *Per ogni $x \in \mathcal{H}_0$ e per ogni $t \in [0, T]$ la soluzione mild $X(t)$ dell'equazione di Navier-Stokes stocastica in due dimensioni con punto iniziale x soddisfa l'uguaglianza*

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\|X(t)\|_0^2\right] + \nu\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2\, ds\right] = \frac{1}{2}\|x\|_0^2 + \frac{t}{2}\mathrm{Tr}(BB^*). \tag{A.1}$$

Dimostrazione. Step 1. L'espressione di $X(t)$ è

$$X(t) = e^{\nu tA}x - \int_0^t e^{\nu(t-s)A}b(X(s))ds + \int_0^t e^{\nu(t-s)A}BdW(s); \tag{A.2}$$

definiamo $X_n(t) \equiv \mathcal{P}_n X(t)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $\mathcal{P}_n$ è il proiettore sullo spazio $\mathcal{V}_n$ generato dall'insieme $\{\mathbf{v_k}\}_{1\le|\mathbf{k}|\le n}$, ed applichiamo $\mathcal{P}_n$ ad entrambi i membri dell'equazione A.2. In questo modo per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$X_n(t) = e^{\nu tA}x_n - \int_0^t e^{\nu(t-s)A}b_n(X(s))ds + \int_0^t e^{\nu(t-s)A}B_n dW_n(s), \tag{A.3}$$

dove

$$
\begin{array}{ll}
x_n \equiv \mathcal{P}_n x & \forall\, x \in \mathcal{H}_0,\ n \in \mathbb{N}, \\
b_n(\mathbf{u}) \equiv \mathcal{P}_n b(\mathbf{u}) & \forall\, \mathbf{u} \in \mathbb{L}^4_{\#},\ n \in \mathbb{N}, \\
B_n \equiv \mathcal{P}_n B \mathcal{P}_n & \forall\, n \in \mathbb{N}, \\
W_n(\omega, t) \equiv \mathcal{P}_n W(\omega, t) & \forall\, \omega \in \Omega,\ t \in [0,T],\ n \in \mathbb{N},
\end{array}
$$

ed inoltre si è utilizzato il fatto che

$$
\mathcal{P}_n A x = A x,\ \mathcal{P}_n e^{\nu t A} x = e^{\nu t A} x \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}_\sigma,\ \sigma \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.
$$

Pertanto $X_n(t)$ è soluzione per ogni $n \in \mathbb{N}$ del problema

$$
\begin{cases}
dX_n(t) + b_n\left(X(t)\right) dt = \nu A X_n(t) dt + B_n dW_n(t) & \forall\, t \geq 0, \\
\\
X_n(0) = x_n \in \mathcal{V}_n.
\end{cases}
\tag{A.4}
$$

Step 2. Anche stavolta ci siamo ricondotti a studiare un problema in dimensione finita, che differisce dal corrispondente problema di Galerkin perché l'argomento dell'operatore b_n è $X(t)$ e non $X_n(t)$. In ogni caso $b_n(X(t))$ è una funzione definita in $[0,T]$ ed a valori in $\mathcal{V}_n$, quindi possiamo senz'altro applicare la formula di Itô e procedere in modo del tutto simile alla dimostrazione del lemma 3.17. Per ogni funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uniformemente continua sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ insieme alle sue derivate $D\varphi(x)$ e $D^2\varphi(x)$, si ha

$$
\begin{aligned}
\varphi(X_n(t)) = &\varphi(x_n) + \int_0^t \langle \nu A X_n(s) - b_n(X(s)), D\varphi(X_n(s)) \rangle_{\mathcal{V}_n} ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}\left[D^2\varphi(X_n(s)) B_n B_n^*\right] ds \\
&+ \int_0^t \langle D\varphi(X_n(s)), B_n dW_n(s) \rangle_{\mathcal{V}_n} \qquad \forall\, t \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

In particolare, scegliendo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$, si ottiene $D\varphi(x) = 2x$, $D^2\varphi(x) = 2I$ (con I matrice identità su $\mathbb{R}^n$) e quindi

$$
\begin{aligned}
&\|X_n(t)\|^2_{\mathcal{V}_n} = \|X_n(t)\|_0^2 \\
&= \|x_n\|_0^2 + 2 \int_0^t \langle \nu A X_n(s) - b_n(X(s)), X_n(s) \rangle_{\mathcal{V}_n} ds \\
&\quad + t \mathrm{Tr}\, B_n B_n^* + 2 \int_0^t \langle X_n(s), B_n dW_n(s) \rangle_{\mathcal{V}_n} \qquad \forall\, t \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

Osserviamo poi che, se $\mathbf{u}$ è un elemento di $\mathcal{V}_n$, si ha

$$
\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{V}_n} = - \sum_{1 \leq |\mathbf{k}| \leq n} |\mathbf{k}|^2 |u_{\mathbf{k}}|^2 = -\|\mathbf{u}\|_1^2 \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{V}_n
$$

e di conseguenza per ogni $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \|X_n(t)\|_0^2 + 2\nu \int_0^t \|X_n(s)\|_1^2\, ds = \|x_n\|_0^2 - 2\int_0^t \langle b_n(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n}\, ds \\ + t\mathrm{Tr}\, B_n B_n^* + 2\int_0^t \langle X_n(s), B_n dW_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Prendendo i valori medi di entrambi i membri della A.7 e ricordando che il valor medio di un integrale di Itô è nullo (equazione 1.53) si ottiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\|X_n(t)\|_0^2\right] + 2\nu\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_n(s)\|_1^2\, ds\right] \\ &= \|x_n\|_0^2 - 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \langle b_n(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n}\, ds\right] \\ &\quad + t\mathrm{Tr}\, B_n B_n^* \qquad \forall\, t \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Step 3. Cerchiamo ora di capire come si comportano i vari termini della A.8 al limite per $n \to +\infty$. $X_n(t)$ e x_n, essendo le proiezioni di $X(t)$ e x su $\mathcal{V}_n$, convergono rispettivamente a $X(t)$ e x in $\mathcal{H}_0$ per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $\omega \in \Omega$. Inoltre la variabile aleatoria $\|X_n(t)\|_0^2$ è dominata per ogni $t \in [0,T]$ da $\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_0^2$; facciamo vedere che tale variabile aleatoria è integrabile su Ω (per ora sappiamo solo che è $\mathbb{P}$-quasi certamente finita, si veda l'osservazione 2.37). Innanzi tutto osserviamo che per ogni $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$ si ha

$$\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_0^2 \le 2 \sup_{t\in[0,T]} \|e^{tA}x\|_0^2 + 2 \sup_{t\in[0,T]} \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_0^2 + 2 \sup_{t\in[0,T]} \|W_A(t)\|_0^2, \tag{A.9}$$

quindi per far vedere che $\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_0^2$ è integrabile su Ω basterà far vedere che è integrabile su Ω ciascuno dei tre addendi a secondo membro nella A.9.

A questo scopo ricordiamo che la funzione $t \mapsto e^{tA}x$ appartiene allo spazio $C([0,T];\mathcal{H}_0)$, quindi $\|e^{tA}x\|_0$ è certamente maggiorata da una costante indipendente da t e da ω.

Per quanto riguarda la convoluzione stocastica, riprendendo la disuguaglianza 2.70 e ricordando la definizione di $C_{T,m}(\omega)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|W_A(t)\|_0^2\right] &\le \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \|W_A(t)\|_0\right)^2\right] \le \mathbb{E}\left[C_{T,m}^2(\omega)|\mathcal{O}|\right] \\ &= \mathbb{E}\left[C_{T,m}^2 \|Y(\omega)\|_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}^2 |\mathcal{O}|\right] \\ &\le C_{T,m}^2 |\mathcal{O}| \mathbb{E}\left[\|Y(\omega)\|_{L^{2m}([0,T]\times\mathcal{O})}^{2m}\right] \\ &\le cost < +\infty. \end{aligned}$$

Infine osserviamo che, grazie alle disuguaglianze 2.77 e 2.80, per un'opportuna costante $C_2 > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_0^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_0\right)^2\right] \\
&\leq C_2^2 \mathbb{E}\left[\|b(X(\cdot))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\right] \\
&\leq 4C_2^2 \mathbb{E}\left[\|(X(\cdot))\|_E^4\right] \\
&= 4C_2^2 \|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)};
\end{aligned}$$

poiché sappiamo dal teorema 2.36 che il processo X appartiene allo spazio $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$, concludiamo che

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_0^2\right] < +\infty,$$

quindi la variabile aleatoria $\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_0^2$ è integrabile e dal teorema della convergenza dominata segue che per ogni $t \in [0,T]$ si ha

$$\mathbb{E}\left[\|X_n(t)\|_0^2\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[\|X(t)\|_0^2\right] \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Step 4. Per quanto riguarda l'integrale

$$2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_n(s)\|_1^2\, ds\right],$$

osserviamo che la funzione integranda converge a $X(s)$ per ogni $s \in [0,t]$ e per ogni $\omega \in \Omega$, sempre per il fatto che $X_n(s)$ è la proiezione di $X(s)$. Essa è inoltre dominata dalla funzione $\|X(s)\|_1^2$; se riusciamo a far vedere che questa funzione è integrabile su $[0,T] \times \Omega$, per il teorema della convergenza dominata possiamo concludere che

$$2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_n(s)\|_1^2\, ds\right] \longrightarrow 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2\, ds\right] \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Anche qui utilizziamo il fatto che per ogni $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$ si ha

$$\|X(t)\|_1^2 \leq 2\|e^{tA}x\|_1^2 + 2\|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_1^2 + 2\|W_A(t)\|_1^2, \tag{A.10}$$

quindi per dimostrare che $\|X(t)\|_1^2$ è integrabile su $[0,T]\times\Omega$ è sufficiente far vedere che ciascuno dei tre termini a secondo membro nella A.10 è integrabile su $[0,T] \times \Omega$. Osserviamo che, grazie all'equazione 2.36 si ha

$$\int_0^T \|e^{tA}x\|_1^2 dt \leq \frac{1}{2}\|x\|_0^2 \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}_0; \tag{A.11}$$

dall'equazione 2.71 si ottiene invece

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|W_A(t)\|_1^2 dt\right] \leq \frac{T}{2}\mathrm{Tr}(BB^*); \tag{A.12}$$

infine, in base alle equazioni 2.77 e 2.79, per un'opportuna costante $C_1 > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(X(\cdot))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} &\leq C_1^2 \|b(X(\cdot))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \\
&\leq 4C_1^2 \|X(\cdot)\|_E^4 \Longrightarrow \\
\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_1^2 dt\right] &\leq 4C_1^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(t)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dt\right] \\
&= 4C_1^2 \|X(\cdot)\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)};
\end{aligned} \tag{A.13}$$

poichè, come abbiamo visto nel teorema 2.36, il processo X appartiene allo spazio $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$, otteniamo $\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_1^2 dt\right] < +\infty$. Mettendo insieme le A.11, A.12, A.13 si ottiene allora

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(t)\|_1^2 dt\right] < +\infty,$$

il che permette di concludere che, come preannunciato, si ha

$$2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_n(s)\|_1^2 \, ds\right] \longrightarrow 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2 \, ds\right] \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Step 5. Facciamo vedere che

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \langle b_n(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n} \, ds\right] \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Prima di tutto verifichiamo che l'espressione integranda converge a zero puntualmente su $\Omega \times [0,t]$; a questo scopo osserviamo che, grazie al fatto che il proiettore $\mathcal{P}_n$ è autoaggiunto, si ha

$$\begin{aligned}
\langle b_n(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n} &= \langle \mathcal{P}_n b(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n} \\
&= \langle b(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n} \\
&\quad \forall\, s \in [0,T],\ \omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{N};
\end{aligned}$$

inoltre $X_n(s)$ converge per ogni $s \in [0,T]$ e per ogni $\omega \in \Omega$ a $X(s)$ in $\mathcal{H}_0$, quindi converge anche debolmente in $\mathcal{H}_0$ e questo implica che, grazie alla proprietà 1.66 dell'operatore b, si ha

$$\langle b(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n} \longrightarrow \langle\langle b(X(s)), X(s)\rangle\rangle_0 = 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty$$

puntualmente su $\Omega \times [0,T]$. Cerchiamo ora di maggiorare la funzione

$$\left|\langle b(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n}\right|$$

con una funzione integrabile su $\Omega \times [0,T]$:

$$\begin{aligned} \left|\langle b(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n}\right| &= |\langle\langle b(X(s)), X_n(s)\rangle\rangle_0| \\ &\leq \|b(X(s))\|_{-1}\|X_n(s)\|_1 \\ &\leq \|b(X(s))\|_{-1}\|X(s)\|_1 \\ &\forall\, \omega \in \Omega,\ s \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

applicando due volte la disuguaglianza di Hölder e poi la 2.77 si ottiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T \|b(X(s))\|_{-1}\|X(s)\|_1 ds\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\|b(X(\cdot))\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\|X(\cdot)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right] \\ &\leq \left\{\mathbb{E}\left[\|b(X(\cdot))\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\right]\right\}^{1/2}\left\{\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right]\right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{4\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^4_E\right]\right\}^{1/2}\left\{\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right]\right\}^{1/2} \\ &= 2\|X\|^2_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_{\#})}\left\{\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right]\right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Nello step precedente abbiamo visto che

$$\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right] < +\infty,$$

mentre dal teorema 2.36 sappiamo che $X \in L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_{\#})$, pertanto possiamo concludere che $\mathbb{E}\left[\int_0^T \|b(X(s))\|_{-1}\|X(s)\|_1 ds\right] < +\infty$, quindi la successione $\left|\langle b(X(s,x)), X_n(s,x_n)\rangle_{\mathcal{V}_n}\right|$ è dominata da una funzione integrabile su $[0,T] \times \Omega$. Dal teorema della convergenza dominata segue allora, come preannunciato, che

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \langle b_n(X(s)), X_n(s)\rangle_{\mathcal{V}_n}\, ds\right] \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

Step 6. Poiché naturalmente $\operatorname{Tr} B_n B_n^* \to \operatorname{Tr} BB^*$ per $n \to +\infty$, concludiamo che passando al limite per $n \to +\infty$ nella A.8 per ogni $t \in [0,T]$ si trova:

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\|X(t)\|_0^2\right] + \nu\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|_1^2\, ds\right] = \frac{1}{2}\|x\|_0^2 + \frac{t}{2}\operatorname{Tr}(BB^*), \tag{A.14}$$

cioè si ottiene proprio la A.1. □

Appendice B

Campi di velocità a media non nulla

Nel paragrafo 1.1 abbiamo visto che, se si scrive il campo di velocità come la somma della sua media spaziale e della fluttuazione rispetto alla media, le equazioni del moto di un fluido incomprimibile si riducono alla forma 1.9

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{B.1}$$

dove $\mathbf{m}$ rappresenta la media del campo di velocità ed $\mathbf{u}$ la fluttuazione. Finora abbiamo sempre considerato campi di velocità a media nulla ed abbiamo quindi studiato le equazioni B.1 senza il termine $\mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{u}$, ma i risultati che abbiamo ottenuto si possono estendere anche al caso $\mathbf{m} \neq 0$.

Poiché la media spaziale del campo di velocità è indipendente dal tempo (equazione 1.7), $\mathbf{m}$ si può interpretare come un elemento fissato di $\mathcal{H}_1$ e quindi la formulazione astratta del problema può essere effettuata come nel caso $\mathbf{m} = 0$ a patto di ridefinire l'operatore b. Precisamente, l'operatore b verrà sostituito dall'operatore

$$\begin{aligned} \widetilde{b} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv b(\mathbf{u} + \mathbf{m}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned} \tag{B.2}$$

che è ancora lineare rispetto alla seconda ed alla terza variabile, ma non lo è più rispetto alla prima. Esso soddisfa due proprietà analoghe alle 1.65 e 1.66: infatti per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ si ha

$$\begin{aligned} \widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u} + \mathbf{m}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u} + \mathbf{m}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ \Longrightarrow \widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \ \widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Continua poi a valere una disuguaglianza analoga alla 1.72: infatti, grazie alla proprietà 1.70 dell'operatore b, per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1$ si ha

$$\left| \widetilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \right| = |b(\mathbf{u} + \mathbf{m}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 4 \|\mathbf{u} + \mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{u},\cdot)\right\|_{-1} &= \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{H}_1,\,\mathbf{v}\neq 0} \frac{\left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})\right|}{\|\mathbf{v}\|_1} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{H}_1,\,\mathbf{v}\neq 0} \frac{\left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u})\right|}{\|\mathbf{v}\|_1} \\
&= 4\|\mathbf{u}+\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#} < +\infty.
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

Ciò significa che $\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{u},\cdot)$ è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{H}_1$ per ogni $\mathbf{u}\in\mathbb{L}^4_\#$, quindi si può considerare l'applicazione non lineare

$$
\begin{aligned}
\widetilde{b} : \mathbb{L}^4_\# &\longrightarrow \mathcal{H}_{-1} \\
\mathbf{u} &\longmapsto \widetilde{b}(\mathbf{u}) \equiv \widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{u},\cdot)
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

e verificare che essa soddisfa una proprietà simile alla 1.74, come vediamo dalla seguente proposizione.

Proposizione B.1 *L'applicazione $\widetilde{b}$ definita dalla B.2 è continua e per ogni coppia $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ di elementi di $\mathbb{L}^4_\#$ vale la disuguaglianza*

$$
\left\|\widetilde{b}(\mathbf{u})-\widetilde{b}(\mathbf{v})\right\|_{-1} \leq 4\left[\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#}+\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}+\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right]\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}. \tag{B.6}
$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due elementi di $\mathbb{L}^4_\#$ e sia $\mathbf{w}\in\mathcal{H}_1$. Allora, grazie alla B.3, si ha

$$
\begin{aligned}
&\left|\widetilde{b}(\mathbf{u})(\mathbf{w})-\widetilde{b}(\mathbf{v})(\mathbf{w})\right| = \left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{w})-\widetilde{b}(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{w})\right| = \left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{u})-\widetilde{b}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v})\right| \\
&= \left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{u})-\widetilde{b}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v})-\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})+\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})\right| \\
&\leq \left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{u})-\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})\right| + \left|\widetilde{b}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v})-\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})\right| \\
&= \left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{v})\right| + |b(\mathbf{v}+\mathbf{m},\mathbf{w},\mathbf{v})-b(\mathbf{u}+\mathbf{m},\mathbf{w},\mathbf{v})| \\
&= \left|\widetilde{b}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{v})\right| + |b(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})| \\
&\leq 4\|\mathbf{u}+\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\|\mathbf{w}\|_1\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#} + 4\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\|\mathbf{w}\|_1\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}
\end{aligned}
$$

e di conseguenza per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{L}^4_\#$ si ha

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{b}(\mathbf{u})-\widetilde{b}(\mathbf{v})\right\|_{-1} &\leq 4\left[\|\mathbf{u}+\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}+\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right]\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\
&\leq 4\left[\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4_\#}+\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#}+\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right]\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^4_\#},
\end{aligned}
$$

cioè vale la B.6. □

Dalla proprietà B.6 segue che anche $\widetilde{b}$, come b, è localmente Lipschitziana come applicazione da $\mathbb{L}^4_\#$ in $\mathcal{H}_{-1}$; ora facciamo vedere che essa continua a soddisfare anche una disuguaglianza analoga alla 2.77 e quindi si riesce a dimostrare un risultato simile al lemma 2.32. Questo fa sì che si possa ripetere l'argomento di punto fisso che porta alla dimostrazione dell'esistenza ed unicità della soluzione.

Lemma B.2 *Definiamo, per $T > 0$,*

$$\widetilde{\Gamma}(f)(t) \equiv \int_0^t e^{(t-s)A}\widetilde{b}(f(s))ds \qquad \forall\, f \in E,\, t \in [0,T]. \tag{B.7}$$

Allora $\widetilde{\Gamma}(f) \in E$ per ogni $f \in E$ ed inoltre esistono due costanti M_1, $M_2 > 0$ tale che per ogni $f, g \in E$ si ha

$$\left\|\widetilde{\Gamma}(f) - \widetilde{\Gamma}(g)\right\|_E \le M_1 \left(\|f\|_E + \|g\|_E + M_2\right) \|f - g\|_E. \tag{B.8}$$

Dimostrazione. Procediamo secondo le schema della dimostrazione del lemma 2.32. Nello Step 1 abbiamo dimostrato l'inclusione

$$L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset E, \tag{B.9}$$

che è un risultato generale. Per quanto riguarda lo Step 2, facciamo vedere che anche in questo caso vale l'implicazione $f \in E \Rightarrow \widetilde{b}(f) \in L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})$; infatti si ha

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{b}(f)\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} &= \int_0^T \left\|\widetilde{b}(f(t))\right\|^2_{-1} dt \\
&\le 4\int_0^T \|f(t) + \mathbf{m}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} \|f(t)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} dt \\
&\le 4\int_0^T \left[\|f(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right]^2 \|f(t)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} dt \\
&\le 8\int_0^T \|f(t)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dt + 8\int_0^T \|\mathbf{m}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} \|f(t)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} dt \\
&\le 8\|f\|^4_E + 8\|\mathbf{m}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#}\sqrt{T}\|f\|^2_E \\
&\equiv C_1\|f\|^4_E + C_2\|f\|^2_E < +\infty.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Poiché $\widetilde{b}(f)$ appartiene a $L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})$ e la funzione $\widetilde{\Gamma}(f)(t)$ è la soluzione mild del problema non omogeneo

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + \widetilde{b}(f(t)) \qquad \forall\, t \in [0,T], \\ \\ X(0) = 0, \end{cases} \tag{B.11}$$

per il corollario 2.19 si ha

$$\Gamma(f) \in L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T];\mathcal{H}_1) \subset E$$

e quindi possiamo concludere che $f \in E \Rightarrow \widetilde{\Gamma}(f) \in E$. Inoltre esistono due costanti positive C_3, C_4 tali che

$$\|\Gamma(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)} \le C_3\|b(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}, \tag{B.12}$$

$$\|\Gamma(f)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H}_0)} \le C_4 \|b(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}; \tag{B.13}$$

grazie all'inclusione B.9 si ha poi

$$\|\Gamma(f)\|_E \le L\|b(f)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} < +\infty, \tag{B.14}$$

dove K e L sono due opportune costanti positive.
Cerchiamo ora di dimostrare la disuguaglianza B.8; osserviamo che, grazie alla proprietà B.6 dell'operatore $\widetilde{b}$, si ha

$$\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{b}(f) - \widetilde{b}(g)\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} = \int_0^T \left\|\widetilde{b}(f(s)) - \widetilde{b}(g(s))\right\|^2_{-1} ds \\
&\le 16 \int_0^T \|f(s) - g(s)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} \left(\|f(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|g(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right)^2 ds \\
&\le 16\|f-g\|^2_E \left[\int_0^T \left(\|f(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|g(s)\|_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right)^4 ds\right]^{1/2} \\
&\le 16\|f-g\|^2_E \left[64\left(\|f\|^4_E + \|g\|^4_E + T\|\mathbf{m}\|^4_{\mathbb{L}^4_\#}\right)\right]^{1/2} \\
&\le 128\|f-g\|^2_E \left(\|f\|^2_E + \|g\|^2_E + T^{1/2}\|\mathbf{m}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#}\right) \\
&\le 128\|f-g\|^2_E \left(\|f\|_E + \|g\|_E + T^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right)^2 \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\left\|\widetilde{b}(f) - \widetilde{b}(g)\right\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \le 8\sqrt{2}\|f-g\|_E \left(\|f\|_E + \|g\|_E + T^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\right).$$

Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\Gamma}(f) - \widetilde{\Gamma}(g)\right\|_E &\le L\left\|\widetilde{b}(f) - \widetilde{b}(g)\right\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})} \\
&\le M_1\|f-g\|_E \left(\|f\|_E + \|g\|_E + M_2\right),
\end{aligned}$$

con $M_1 = 8\sqrt{2}L$ e $M_2 = T^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}$. $\square$

A questo punto, per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema

$$\begin{cases} dX(t) + \widetilde{b}\,(X(t))\,dt = AX(t)dt + BdW(t) & \forall\, t \ge 0, \\ X(0) = x_0 \in \mathcal{H}_0, \end{cases} \tag{B.15}$$

possiamo procedere come nel caso $\mathbf{m} = 0$, con qualche lieve modifica. Studiamo sempre il problema ad ω fissato, precisamente per un valore ω_0 di ω per il quale sia verificata la disuguaglianza 2.58 (e quindi si abbia $W_A(\omega_0) \in E$) e cerchiamo di applicare il principio delle contrazioni locale. Mentre nel caso $\mathbf{m} = 0$ l'applicazione Γ era automaticamente una contrazione su un'opportuna palla nello spazio E, ora questo non è più vero, a causa del fatto che l'applicazione $\widetilde{\Gamma}$ soddisfa la disuguaglianza B.8 e non la 2.75. Tuttavia esisterà un valore $\widetilde{T}_1$ di T tale che si abbia $M_2 = \widetilde{T}_1^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#} < \frac{1}{6M_1}$; di conseguenza vale la disuguaglianza

$$\left\|\widetilde{\Gamma}(f) - \widetilde{\Gamma}(g)\right\|_{L^4([0,\widetilde{T}_1];\mathbb{L}^4_\#)} \leq$$
$$\leq \|f-g\|_{L^4([0,\widetilde{T}_1];\mathbb{L}^4_\#)} \left(M_1 \|f\|_{L^4([0,\widetilde{T}_1];\mathbb{L}^4_\#)} + M_1 \|g\|_{L^4([0,\widetilde{T}_1];\mathbb{L}^4_\#)} + \frac{1}{6}\right),$$

il che implica che $\widetilde{\Gamma}$ è una contrazione locale sulla palla di centro 0 e raggio $\frac{1}{6M_1}$ nello spazio $L^4([0,\widetilde{T}_1];\mathbb{L}^4_\#)$. Come nel caso $\mathbf{m} = 0$, per garantire che siano soddisfatte tutte le ipotesi del principio delle contrazioni locale è necessario restringersi ad un opportuno intervallo $[0, \widetilde{T}_2(\omega_0)] \subset [0,T]$ e quindi in definitiva si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione nell'intervallo $[0, \widetilde{T}(\omega_0)]$, con $\widetilde{T}(\omega_0) = \min\left\{\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2(\omega_0)\right\}$.

Per quanto riguarda la stima a priori 2.92, nel calcolo di $\frac{d}{dt}\|Z(t)\|_0^2$ ora c'è un addendo in più e quindi bisogna fare qualche piccola modifica alle stime. Precisamente, il termine in più è $b(\mathbf{m}, Z(t), \varphi(t))$, con le stesse notazioni della proposizione 2.35; questo termine si può maggiorare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{m}, Z(t), \varphi(t))| &\leq 4\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\|Z(t)\|_1\|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\|Z(t)\|_1 4\sqrt{3}\|\mathbf{m}\|_{\mathbb{L}^4_\#}\|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^4_\#} \\ &\leq \frac{1}{6}\|Z(t)\|_1^2 + 24\|\mathbf{m}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#}\|\varphi(t)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#}. \end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene la seguente stima a priori:

$$\begin{aligned} &\|Z(t)\|_0^2 + \int_0^t \exp\left[K_1 \int_s^t \|\varphi(r)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dr\right] \|Z(s)\|_1^2 ds \leq \\ &\exp\left[K_1 \int_0^t \|\varphi(r)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dr\right]\|x_0\|_0^2 \\ &+ K_2 \int_0^t \exp\left[K_1 \int_s^t \|\varphi(r)\|^4_{\mathbb{L}^4_\#} dr\right] \|\varphi(s)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#}\left(\|\varphi(s)\|^2_{\mathbb{L}^4_\#} + \|\mathbf{m}\|^2_{\mathbb{L}^4_\#}\right) ds, \end{aligned} \tag{B.16}$$

con K_1 e K_2 costanti positive. Tale stima è leggermente diversa da quella ottenuta nel caso $\mathbf{m} = 0$, ma è comunque sufficiente a garantire che la soluzione locale si possa prolungare a tutto l'intervallo $[0,T]$; in modo del tutto analogo al caso $\mathbf{m} = 0$ si trova anche che la soluzione appartiene allo spazio $L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)$.

Possiamo introdurre anche in questo caso i problemi approssimanti di Galerkin

$$\begin{cases} dX_m(t) + \widetilde{b}_m\left(X_m(t)\right) dt = AX_m(t)dt + B_m dW_m(t) & \forall\, t \in [0,T], \\ \\ X_m(0) = \mathcal{P}_m x \equiv x_m \in \mathcal{V}_m, \end{cases} \tag{B.17}$$

dove per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_m$, $t \in [0,T]$ si ha

$$\widetilde{b}_m(\mathbf{u}) \equiv \mathcal{P}_m \widetilde{b}(\mathbf{u}),\ B_m \equiv \mathcal{P}_m B \mathcal{P}_m,\ W_m(t) \equiv \mathcal{P}_m W(t).$$

Ricalcando il procedimento utilizzato per il problema infinito-dimensionale, si arriva a dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema B.17 per qualsiasi $m \in \mathbb{N}$, sotto le stesse ipotesi su B. Applicando la formula di Itô si riesce ancora a dimostrare l'uguaglianza dell'energia, da cui segue l'esistenza di una misura invariante per ciascuno dei problemi B.17. Precisamente, seguendo i passaggi del lemma 3.17, emerge che l'unica proprietà dell'operatore b_m necessaria per dimostrare l'uguaglianza dell'energia è

$$\langle b_m(X_m(t)), X_m(t)\rangle_{\mathcal{V}_m} = 0, \tag{B.18}$$

che continua ad essere verificata per l'operatore $\widetilde{b}$, dato che si ha

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{b}_m(X_m(t)), X_m(t)\right\rangle_{\mathcal{V}_m} &= \left\langle \mathcal{P}_m \widetilde{b}(X_m(t)), X_m(t)\right\rangle_{\mathcal{V}_m} \\ &= \langle \mathcal{P}_m b(X_m(t)+\mathbf{m}, X_m(t), \cdot), X_m(t)\rangle_{\mathcal{V}_m} \\ &= \langle b(X_m(t)+\mathbf{m}, X_m(t), \cdot), X_m(t)\rangle_{\mathcal{V}_m} = 0.\end{aligned}$$

È ancora vero che la successione $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ delle soluzioni dei problemi di Galerkin converge in E alla soluzione X del problema in dimensione infinita, come si può vedere eseguendo calcoli analoghi a quelli del lemma 3.19, e quindi si riesce di nuovo a dimostrare la disuguaglianza dell'energia. Di conseguenza esiste una misura invariante anche per il problema B.15.

Infine, anche i risultati visti nell'appendice A continuano ad essere validi, pertanto anche la soluzione del problema B.11 soddisfa l'uguaglianza dell'energia. Infatti le proprietà degli operatori b e Γ che abbiamo utilizzato nel teorema A.1, oltre alla B.18, sono

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_0^2\right] \leq cost \cdot \|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)}, \tag{B.19}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Gamma(X(\cdot))(t)\|_1^2 dt\right] \leq cost \cdot \|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)}, \tag{B.20}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|b(X(s))\|_{-1}\|X(s)\|_1 ds\right] < +\infty. \tag{B.21}$$

Per quanto riguarda la B.19, osserviamo che, con le notazioni del lemma

B.2, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\widetilde{\Gamma}(X(\cdot))(t)\right\|_0^2\right] &\le \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\|\widetilde{\Gamma}(X(\cdot))(t)\right\|_0\right)^2\right] \\
&\le C_4^2\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{b}(X(\cdot))\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\right] \\
&\le C_4^2\mathbb{E}\left[C_1\|X(\cdot)\|_E^4 + C_2\|X(\cdot)\|_E^2\right] \\
&\le C_1C_4^2\|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)} + C_2C_4^2\|X\|^2_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)}
\end{aligned}
$$

e quindi vale una proprietà simile anche per l'operatore $\widetilde{\Gamma}$. Per quanto riguarda la B.20, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|\widetilde{\Gamma}(X(\cdot))(t)\right\|_1^2 dt\right] &= \mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\Gamma}(X(\cdot))\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right] \\
&\le C_3^2\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{b}(X(\cdot))\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\right] \\
&\le C_3^2\mathbb{E}\left[C_1\|X(\cdot)\|_E^4 + C_2\|X(\cdot)\|_E^2\right] \\
&\le C_1C_3^2\|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)} + C_2C_3^2\|X\|^2_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)},
\end{aligned}
$$

quindi anche in questo caso l'operatore $\widetilde{\Gamma}$ soddisfa una proprietà simile. Per quanto riguarda infine la B.21, infine, si ha

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|\widetilde{b}(X(s))\right\|_{-1}\|X(s)\|_1 ds\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{b}(X(\cdot))\right\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\|X(\cdot)\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right] \\
&\le \left\{\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{b}(X(\cdot))\right\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_{-1})}\right]\right\}^{1/2}\left\{\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right]\right\}^{1/2} \\
&\le \left\{\mathbb{E}\left[C_1\|X(\cdot)\|_E^4 + C_2\|X(\cdot)\|_E^2\right]\right\}^{1/2}\left\{\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right]\right\}^{1/2} \\
&\le \left\{C_1\|X\|^4_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)} + C_2\|X\|^2_{L^4_W([0,T];\mathbb{L}^4_\#)}\right\}^{1/2}\left\{\mathbb{E}\left[\|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{H}_1)}\right]\right\}^{1/2} \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, 1965.

[3] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

[4] A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour e S. K. Mitter, *Representation and control of infinite dimensional systems*, Vol. 1, Birkhäuser, 1992.

[5] G. Da Prato, *Introduction to stochastic analysis*, Appunti SNS Pisa, 2005.

[6] G. Da Prato, *Kolmogorov equations for stochastic PDEs*, Birkhäuser, 2004.

[7] G. Da Prato, *An introduction to Markov semigroups*, in *Functional analytic methods for evolution equations*, Springer-Verlag, 2004.

[8] G. Da Prato e J. Zabczyk, *Ergodicity for infinite dimensional systems*, London Mathematical Society Lecture Notes, **229**, Cambridge University Press, 1996.

[9] G. Da Prato e J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, 1992.

[10] K. J. Engel e R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate texts in Mathematics, **194**, Springer-Verlag, 2000.

[11] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[12] U. Frisch, *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1996.

[13] N. Ikeda e S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Holland, 1981.

[14] R. Kraichnan, *Inertial ranges in two dimensional turbulence*, Physics of Fluids, **10(7)**, 1417-1423, 1967.

[15] A. Kupiainen, *Statistical theories of turbulence*, in *Advances in Mathematical Sciences and Appications*, Gakkotosho, 2003.

[16] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, 1987.

[17] E. A. Novikov, *Functionals and the random-force method in turbulence theory*, Soviet Physics JETP, **20**, 1290-1294, 1965.

[18] R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1984.

[19] R. Temam, *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, Society for industrial and applied mathematics, 1995.