

Università di Pisa
Facoltà di Scienze
Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche e
Astrofisiche
Anno Accademico 2003/2004

Tesi di Laurea
19 luglio 2004

**Vortici non abeliani e gruppi
duali in teorie di gauge $\mathcal{N} = 2$
 $SO(N)$ e $USp(2N)$**

Candidato
Luca Ferretti

Relatore
Prof. Kenichi Konishi

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Monopoli non abeliani a' la GNOW	8
2	Vortici e monopoli in teorie $\mathcal{N} = 2$	13
2.1	Settore bosonico delle teorie $\mathcal{N} = 2$	13
2.2	Analisi generale: il caso $SO(6) \rightarrow SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$	15
2.2.1	Moduli space, vuoti e simmetrie di color-flavour	17
2.2.2	Monopoli	18
2.2.3	Vortici	18
2.2.4	Flux matching	23
2.2.5	Modi nulli dei vortici	28
2.2.6	Quantizzazione dei modi nulli	30
2.3	$SO(2N) \rightarrow U(N)$	32
2.4	$SO(2N + 1) \rightarrow U(N)$	37
2.5	$SO(2N + 2) \rightarrow SO(2N) \times U(1)$	41
2.5.1	Moduli space, vuoti e simmetrie di color-flavour	41
2.5.2	Monopoli	46
2.5.3	Vortici	46
2.5.4	Flux matching	48
2.5.5	Modi nulli dei vortici	49
2.6	$SO(2N + 3) \rightarrow SO(2N + 1) \times U(1)$	50
2.7	$USp(2N)$	54
3	Conclusioni	57
	Bibliografia	58

Capitolo 1

Introduzione

Uno dei problemi teorici più interessanti e più affrontati nel corso degli ultimi trent'anni è la dinamica di bassa energia delle teorie di gauge. Il fenomeno del confinamento della carica di colore, pur essendo sperimentalmente chiaro, non ha ancora trovato un approccio teorico pienamente soddisfacente, principalmente per via della sua natura prettamente nonperturbativa e della complessità della struttura delle teorie di gauge in 4 dimensioni.

Da molto tempo si ritiene che uno dei meccanismi possibili per il confinamento dei quark sia una sorta di superconduttività duale. In una visione duale della teoria si ha una rottura spontanea del gruppo di gauge, i quark corrispondono a monopoli magnetici e questi ultimi vengono confinati da vortici magnetici analogamente a quanto accade per i superconduttori con l'effetto Meissner.

In questo contesto si evidenzia l'importanza delle dualità presenti in teorie di gauge, e principalmente della dualità elettrica-magnetica: è infatti nella teoria duale che il confinamento può essere spiegato in maniera semplice ricorrendo all'analogia con un fenomeno ben noto come la superconduttività. Nella teoria duale i quark compaiono come monopoli magnetici, mentre i gradi di libertà elettrici sono i monopoli magnetici non singolari della teoria originale: questo fornisce una buona motivazione allo studio di oggetti magnetici non singolari in teorie di gauge.

Negli ultimi dieci anni si sono avute evidenze della possibilità concreta di questo tipo di fenomeni, grazie in particolare alle proprietà delle teorie di gauge supersimmetriche. Le proprietà di olomorfia, i teoremi di non-rinormalizzazione e i constraint imposti dalla supersimmetria consentono di ottenere importanti informazioni di natura nonperturbativa sulla dinamica della teoria di bassa energia.

Molti lavori in teorie supersimmetriche hanno discusso l'esistenza di dualità e la corrispondenza tra gradi di libertà elettrici e magnetici[20][7] mostran-

do in alcuni casi un ruolo importante del flavour, come accade con la dualità di Seiberg[20].

In particolare le teorie con supersimmetria estesa $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 4$ si sono rivelate molto interessanti da questo punto di vista, sia perché è possibile ottenere soluzioni esatte di queste teorie a bassa energia (grazie ai lavori di Seiberg e Witten[21][22]) e studiare quindi le dinamiche di confinamento, sia perché in queste teorie le dualità (esatte o nell'infrarosso) sono fondamentali per risolvere la dinamica di queste teorie, sia infine perché accade spesso che appaiano monopoli magnetici massless come gradi di libertà nell'infrarosso e sia quindi possibile studiare la dinamica del loro confinamento.

In altri lavori[2][9][8] sono stati studiati i vuoti di teorie $\mathcal{N} = 2$ con rottura soffice a $\mathcal{N} = 1$ dando massa al campo scalare in aggiunta; questi lavori hanno evidenziato come differenti tipi di confinamento si realizzano nei vuoti di teorie $\mathcal{N} = 2$, con particolare interesse per i cosiddetti r -vuoti, dove una parte del gruppo di gauge rimane anche a bassa energia.

Di recente è stato proposto che i fenomeni di confinamento in teorie di gauge non abeliane siano legati a una superconduttività non abeliana, le cui proprietà possono essere molto differenti da quelle della superconduttività abeliana che viene abitualmente analizzata quando si considerano fenomeni di abelianizzazione dinamica a' la t'Hooft. Se infatti il gruppo di gauge non si rompe completamente a bassa energia e il gruppo di gauge residuo è non abeliano, è naturale aspettarsi che siano monopoli e vortici non abeliani a giocare un ruolo importante in questo contesto. Questo ha motivato alcuni recenti progressi nello studio dei vortici non abeliani[16][17][5] che hanno messo in relazione le cariche dei vortici con alcuni gruppi duali, tra cui il gruppo duale magnetico evidenziato da Goddard, Nuyts, Olive e Weinberg[11][12][26] che agisce sulle cariche dei monopoli corrispondenti.

Nel lavoro più recente[5] e in maniera leggermente differente in un altro[14] è stato portato avanti lo studio dei vortici non abeliani nell'Higgs branch di teorie $\mathcal{N} = 2$ in presenza di flavour di materia, rotte a $\mathcal{N} = 1$ da una piccola massa μ del campo scalare in aggiunta. Nel caso di masse m uguali per tutti i flavour, sono state prese in considerazione rotture

$$SU(N + 1) \xrightarrow{m} SU(N) \times U(1)/\mathbb{Z}_N \xrightarrow{\sqrt{\mu m}} \mathbf{1}$$

con la scelta di particolari vuoti in cui a una completa rottura del gruppo di gauge si accompagnasse una particolare forma del vuoto (detta color-flavor locking) che corrispondesse a un gruppo di simmetria globale residuo che lascia invariante il vuoto. Le trasformazioni di questo gruppo sono rotazioni nello spazio dei colori e nello spazio dei flavour, che separatamente non lasciano invariante il vuoto, ma accoppiate costituiscono un sottogruppo $G''_{C+F} \subset G'_C \times G'_F$ che rappresenta una simmetria non rotta della teoria.

Per quanto riguarda il settore solitonico, nella teoria fondamentale i gruppi di omotopia per la rottura completa del gruppo di gauge sono $\pi_2(SU(N+1)) = \pi_1(SU(N+1)) = 0$, per cui a bassa energia non troviamo ne' monopoli ne' vortici topologicamente stabili; tuttavia a energie dell'ordine di m è possibile costruire monopoli di Goddard-Nuyts-Olive-Weinberg[4] e a scale più basse dell'ordine di $\sqrt{\mu m}$ esistono soluzioni corrispondenti a vortici. Il fatto che nessuna di queste configurazioni sia presente nella teoria fondamentale implica che i monopoli siano sorgenti per i vortici e questi a loro volta terminino su monopoli, formando configurazioni topologicamente banali. Questo rende possibile la ricerca di una corrispondenza tra vortici e monopoli.

Studiando la teoria con un numero opportuno di flavour, è possibile lavorare in regime semiclassico e costruire sia i monopoli di GNOW che le configurazioni di vortici minimali, e quindi studiare la relazione tra questi e i monopoli.

La costruzione esplicita dei vortici in regime semiclassico ha mostrato la corrispondenza tra i vortici e i monopoli, per cui le configurazioni che si presentano nella teoria sono quelle per le quali ogni vortice ha ai due estremi un monopolo e un antimonopolo[3]. Inoltre esiste una successione continua di vortici degeneri in tensione che corrispondono alle possibili orientazioni nel gruppo di gauge del flusso portato dal vortice. Le trasformazioni che interpolano tra i vortici corrispondono alle trasformazioni di color-flavour che lasciano invariante il vuoto. I modi nulli dei vortici sono parametrizzati da $\mathbb{C}P^{N-1}$.

Il fatto che monopoli e vortici si trasformino come multipletti di questo gruppo di simmetria non abeliano e che il flusso dei vortici possa essere ruotato in ogni direzione all'interno del gruppo di gauge evidenzia la natura realmente non abeliana di queste strutture.

L'altro aspetto interessante del lavoro è che l'effetto di queste trasformazioni sui monopoli è equivalente a quello delle trasformazioni di gauge che agiscono sui monopoli di GNOW, pur essendo trasformazioni globali non banali che agiscono anche sul flavour, e trasforma il multipletto di monopoli allo stesso modo delle trasformazioni del gruppo duale $\widetilde{SU}(N)$. Si ritiene pertanto che possa esistere un legame tra queste trasformazioni e le trasformazioni duali.

Lo scopo di questa tesi è di approfondire lo studio di queste teorie generalizzando i risultati ottenuti finora ad altri gruppi di gauge. In particolare si costruiscono i vortici non abeliani per alcuni pattern di rottura di teorie di gauge $SO(N)$ e $USp(2N)$, si ricavano i modi nulli e si confrontano i risultati con i monopoli e i gruppi duali attesi per queste teorie.

I casi il cui studio è particolarmente interessante per comprendere la natura dei gruppi duali sono $SO(2N) \rightarrow U(r) \times U(1)^{N-r}$ e $SO(2N+1) \rightarrow U(r) \times U(1)^{N-r}$, in cui si trovano rappresentazioni di rango 2 del gruppo duale, e i casi $SO(2N+3) \rightarrow SO(2N+1) \times U(1)$ e $USp(2N+2) \rightarrow USp(2N) \times U(1)$, per i quali il gruppo duale è molto diverso dal gruppo originale.

La tesi inizia con lo studio del caso più semplice non banale, e cioè la teoria con pattern di rottura $SO(6) \rightarrow U(3)$, che serve da illustrazione per le tecniche usate. Si passa poi ai casi più generali di $SO(2N) \rightarrow U(N)$ e di $SO(2N+1) \rightarrow U(N)$, tutti studiati con le tecniche già sviluppate: in particolare la materia viene considerata solo nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge. Questo non è possibile per i casi $SO(2N+2) \rightarrow SO(2N) \times U(1)$ e $SO(2N+3) \rightarrow SO(2N+1) \times U(1)$, poichè i campi di materia nella fondamentale non riescono a rompere del tutto il gruppo di gauge. Per studiare questi due casi sperimentiamo quindi due nuove possibilità: modificare la rappresentazione dei campi di materia o modificare il superpotenziale. Entrambe le soluzioni sono applicabili a entrambi i casi; scegliamo di studiare il caso di teoria $SO(2N+2) \rightarrow SO(2N) \times U(1)$ con la materia in rappresentazione aggiunta e il caso di $SO(2N+3) \rightarrow SO(2N+1) \times U(1)$ con un termine di rottura a $\mathcal{N} = 1$, quadratico negli squark, aggiunto al superpotenziale. Infine si accenna ad alcuni pattern di rottura di $USp(2N)$ e ai risultati che si possono ottenere con le modifiche considerate sopra.

1.1 Monopoli non abeliani a' la GNOW

I monopoli studiati da Goddard, Nuyts, Olive e Weinberg si presentano in teorie con una rottura della simmetria di gauge del tipo

$$G \longrightarrow H \tag{1.1}$$

dove H è un sottogruppo non abeliano, causata da $\langle \phi \rangle \neq 0$. Le soluzioni di monopolo sono stabili solo nel caso che il winding dei campi all'infinito sia topologicamente non banale: questo winding è descritto dal gruppo di omotopia $\pi_2(G/H) \neq 0$.

Il valore di aspettazione del campo di Higgs può essere scritto nella forma

$$\langle \phi \rangle = \vec{h} \cdot \vec{H} \tag{1.2}$$

dove \vec{h} è un vettore di dimensione pari al rango di G e \vec{H} è il vettore dei generatori della sottoalgebra di Cartan. Il sottogruppo non rotto H è dato dalle radici ortogonali ad \vec{h} , definendo il prodotto scalare nello spazio delle radici come

$$g_{ij} = \sum_{\text{radici}} \alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \tag{1.3}$$

I monopoli fondamentali sono embedding dei classici monopoli di t' Hooft-Polyakov nei sottogruppi $SU(2)$ rotti a $U(1)$ dal vev di ϕ , i cui generatori associati alla radice $\vec{\alpha}$ sono

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \\ S_2 &= -\frac{i}{\sqrt{2\alpha^2}}(E_\alpha - E_{-\alpha}) \\ S_3 &= \frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2} \cdot \vec{H} \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove possiamo definire la radice duale $\vec{\alpha}^* = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}$. La soluzione per questo embedding è

$$A_i(\vec{r}) = \varepsilon_{aij} S^a \frac{r_j}{r^2} A(r) \quad , \quad A(\infty) = 1 \quad (1.5)$$

$$\phi(\vec{r}) = S^a \frac{r_a}{r^2} \phi(r) + (\vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\alpha}^*) \cdot \vec{H} \quad , \quad \phi(\infty) = \vec{h} \cdot \vec{\alpha} \quad (1.6)$$

Per quanto riguarda alcune notazioni abituali, le matrici dei generatori di $SO(N)$ sono normalizzate a 1 mentre quelle di $USp(2N)$ sono normalizzate a $1/2$. Spesso con H_i viene indicato l' i -esimo generatore sulla diagonale della forma

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & i & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

e a volte si indica $H' = \sqrt{2}H$, mentre con S_3 e \hat{S}_3 vengono indicati gli elementi della sottoalgebra di Cartan di un sottogruppo $SO(4)$ embedded:

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & i & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & -i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & i & \dots & 0 \\ \dots & i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & -i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & i & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & -i & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & -i & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & i & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & -i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & -i & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & -i & \cdots & 0 \\ \cdots & i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & -i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & -i & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & i & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

G	H	Gruppo Duale	Irrep	$U(1)$
$SU(N+1)$	$SU(N) \times U(1)/\mathbb{Z}_N$	$SU(N) \times U(1)$	\underline{N}	$1/N$
$SU(N)$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}/\mathbb{Z}_r$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}$	\underline{r}	$1/r$
$USp(2N+2)$	$USp(2N) \times U(1)$	$SO(2N+1) \times U(1)$	$\underline{2N+1}$	1
$USp(2N+2)$	$SU(r) \times U(1)^{N-r}/\mathbb{Z}_r$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}$	\underline{r}	$1/r$
$SO(2N+3)$	$SO(2N+1) \times U(1)$	$USp(2N) \times U(1)$	$\underline{2N}$	1
$SO(2N+2)$	$SO(2N) \times U(1)$	$SO(2N) \times U(1)$	$\underline{2N}$	1
$USp(2N)$	$SU(N) \times U(1)/\mathbb{Z}_N$	$SU(N) \times U(1)$	\underline{N}	$1/N$
$SO(2N)$	$SU(N) \times U(1)/\mathbb{Z}_N$	$SU(N) \times U(1)$	$\underline{N(N-1)/2}$	$2/N$
* $SO(2N)$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}/\mathbb{Z}_r$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}$	\underline{r}	$1/r$
$SO(2N+1)$	$SU(N) \times U(1)/\mathbb{Z}_N$	$SU(N) \times U(1)$	$\underline{N(N+1)/2}$	$2/N$
* $SO(2N+1)$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}/\mathbb{Z}_r$	$SU(r) \times U(1)^{N-r+1}$	\underline{r}	$1/r$
$SU(N+M)$	$SU(N) \times SU(M) \times U(1)/\mathbb{Z}_k$	$SU(N) \times SU(M) \times U(1)$	$(\underline{N}, \underline{M})$	$1/k$
$SO(2N+2M)$	$SO(2N) \times U(M)$	$SO(2N) \times U(M)$	$(\underline{2N}, \underline{M})$	$1/M$
$SO(2N+2M+1)$	$SO(2N+1) \times U(M)$	$USp(2N) \times U(M)$	$(\underline{2N}, \underline{M})$	$1/M$
$USp(2N+2M)$	$USp(2N) \times U(M)$	$SO(2N+1) \times U(M)$	$(\underline{2N+1}, \underline{M})$	$1/M$

Tabella 1.1: Questa tabella, tratta da [4], illustra i monopoli di GNOW stabili e di massa minima che si trovano in conseguenza di una rottura $G \rightarrow H$. La carica magnetica $U(1)$ è data in termini della minima carica magnetica secondo Dirac $1/2e_0$. Notare la differenza interessante per $SO(N)$ tra i casi con rottura a $r = N$ e i casi in cui si ha una rottura con fattore non abeliano non massimale, cioè con $r < N$: in questi ultimi ci sono monopoli sia nella rappresentazione fondamentale che in rappresentazioni di rango 2. In tabella sono elencati solo quelli nella fondamentale; quali siano di massa minore è una questione dinamica e non nota dal punto di vista quantistico.

Capitolo 2

Vortici e monopoli in teorie $\mathcal{N} = 2$

In questo capitolo ci concentriamo su teorie $\mathcal{N} = 2$ con rottura soffice della supersimmetria. Presentiamo qui la costruzione esplicita dei vortici non abeliani per alcuni pattern di rottura dei gruppi di gauge $SO(N)$ e $USp(2N)$, identifichiamo la corrispondenza tra vortici e monopoli e analizziamo la struttura dei modi nulli dei vortici. Analizziamo innanzitutto in dettaglio il caso semplice di rottura $SO(6) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ e passiamo poi a casi più generali e complessi.

2.1 Settore bosonico delle teorie $\mathcal{N} = 2$

Tutte le teorie prese in considerazione contengono un multipletto vettoriale $\mathcal{N} = 2$ nella rappresentazione aggiunta $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ del gruppo di gauge. Questo multipletto è costituito dal potenziale di gauge A_μ , da un campo scalare ϕ , e da due fermioni di Weyl λ, λ' che costituiscono un doppietto di $SU(2)_R$. Inoltre sono presenti nelle teorie N_f multipletti di materia $\mathcal{N} = 2$ in una rappresentazione $(t^a)_{bc}$ del gruppo di gauge (e nella rappresentazione coniugata $(\bar{t}^a)_{bc}$). Ognuno di questi multipletti è costituito da due campi scalari q e \tilde{q} , che costituiscono un doppietto di $SU(2)_R$, e da due fermioni di Weyl $\psi, \tilde{\psi}$.

Per la costruzione di vortici e monopoli ci interessa solamente il settore bosonico della teoria. Possiamo scrivere i supercampi in termini delle loro

componenti bosoniche come

$$\begin{aligned}\Phi^a &= \phi^a + \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi^a - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\phi^a + \theta^2 F^a \\ V^a &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu^a + \theta^2\bar{\theta}^2 D^a \\ Q^{kA} &= q^{kA} + \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu q^{kA} - \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\theta}^2\Box q^{kA} + \theta^2 f^{kA} \\ \tilde{Q}_{kA} &= \tilde{q}_{kA} + \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\tilde{q}_{kA} - \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\theta}^2\Box\tilde{q}_{kA} + \theta^2\tilde{f}_{kA}\end{aligned}$$

dove a è un indice che si trasforma secondo la rappresentazione aggiunta T^a , k è un indice che si trasforma secondo la rappresentazione t^a per Q e secondo la rappresentazione coniugata \bar{t}^a per \tilde{Q} , mentre A è un indice di flavour. In termini di questi campi possiamo scrivere l'azione $\mathcal{N} = 2$ come

$$\begin{aligned}S &= Im\left(\frac{\tau}{8\pi}\int d^8z Tr(W^\alpha W_\alpha)\right) + c\int d^8z \bar{\Phi}e^V\Phi + \\ &+ \int d^8z \bar{Q}_A e^V Q^A + \int d^8z \tilde{Q}_A e^V \bar{\tilde{Q}}^A + \\ &+ \left(c'\int d^6z \tilde{Q}_A \Phi Q^A + c.c.\right) + \left(\int d^6z m_B^A \tilde{Q}_A Q^B + c.c.\right) + \\ &+ \left(\int d^6z \mu Tr(\Phi^2) + c.c.\right)\end{aligned}$$

manifestamente supersimmetrica e dove la condizione $\mathcal{N} = 2$ si impone con la simmetria $SU(2)_R$ sugli spinori: dal momento che nelle nostre analisi $\vartheta = 0$,

$$c = \frac{1}{g^2} \quad c' = \sqrt{2}$$

Possiamo ora estrarre la Lagrangiana per i campi bosonici e le loro interazioni

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{bos} &= -\frac{1}{4g^2}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2g^2}D^a D^a + \\ &+ \frac{1}{g^2}\mathcal{D}_\mu\bar{\phi}^a\mathcal{D}^\mu\phi^a + \frac{1}{g^2}\bar{F}^a F^a + \frac{1}{g^2}\bar{\phi}T^a\phi D^a + \\ &+ \mathcal{D}_\mu\bar{q}_{kA}\mathcal{D}^\mu q^{kA} + \bar{f}_{kA}f^{kA} + \bar{q}_A t^a q^A D^a + \\ &+ \mathcal{D}_\mu\tilde{q}_{kA}\mathcal{D}^\mu\tilde{q}^{kA} + \tilde{f}_{kA}\tilde{f}^{kA} - \tilde{q}_A t^a \tilde{q}^A D^a + \\ &+ m_B^A(\tilde{f}_{kA}q^{kB} + \tilde{q}_{kA}f^{kB}) + m_A^{B\dagger}(\tilde{f}^{kA}\bar{q}_{kB} + \tilde{q}^{kA}\bar{f}_{kB}) + \\ &+ \sqrt{2}(\tilde{q}_A t^a f^A \phi^a + \tilde{f}_A t^a q^A \phi^a + \tilde{q}_A t^a q^A F^a) + \\ &+ \sqrt{2}(\bar{f}_A t^a \tilde{q}^A \bar{\phi}^a + \bar{q}_A t^a \tilde{f}^A \bar{\phi}^a + \bar{q}_A t^a \tilde{q}^A \bar{F}^a) + \\ &+ \mu(\phi^a F^a + \bar{\phi}^a \bar{F}^a)\end{aligned}$$

ed eliminare i campi ausiliari F e D attraverso le equazioni del moto

$$\begin{aligned}
 D^a &= -g^2 \left(\frac{1}{g^2} \bar{\phi} T^a \phi + \bar{q}_A t^a q^A - \tilde{q}_A t^a \tilde{q}^A \right) \\
 F^a &= -g^2 \left(\sqrt{2} \bar{q}_A t^a \tilde{q}^A + \mu \bar{\phi}^a \right) \\
 f^A &= -\left(\sqrt{2} \bar{\phi}^a t^a \tilde{q}^A + m_B^{A\dagger} \tilde{q}^B \right) \\
 \tilde{f}^A &= -\left(\sqrt{2} \phi^a t^a q^A + m_B^A q^B \right)
 \end{aligned}$$

ottenendo così il potenziale bosonico

$$\begin{aligned}
 V_{bos} &= \frac{g^2}{2} \left| \frac{1}{g^2} \bar{\phi} T^a \phi + \bar{q}_A t^a q^A - \tilde{q}_A t^a \tilde{q}^A \right|^2 + \\
 &+ g^2 \left| \sqrt{2} \bar{q}_A t^a \tilde{q}^A + \mu \bar{\phi}^a \right|^2 + \\
 &+ \left| \sqrt{2} \bar{\phi}^a t^a \tilde{q}^A + m_B^{A\dagger} \tilde{q}^B \right|^2 + \\
 &+ \left| \sqrt{2} \phi^a t^a q^A + m_B^A q^B \right|^2
 \end{aligned}$$

In generale consideriamo la matrice di massa diagonalizzabile e con autovalori reali, cioè tale che $m_B^A = m_A \delta_B^A$. Le equazioni del vuoto[2][9][8] che si ottengono ponendo $V = 0$ sono le seguenti:

$$\bar{\phi} T^a \phi = 0 \quad (2.1)$$

$$\bar{q}_A t^a q^A - \tilde{q}_A t^a \tilde{q}^A = 0 \quad (2.2)$$

$$\sqrt{2} \bar{q}_A t^a \tilde{q}^A + \mu \bar{\phi}^a = 0 \quad (2.3)$$

$$\sqrt{2} \bar{\phi}^a t^a \tilde{q}^A + m_A \tilde{q}^A = 0 \quad (2.4)$$

$$\sqrt{2} \phi^a t^a q^A + m_A q^A = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Analisi generale: il caso $SO(6) \rightarrow SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$

Consideriamo la teoria $\mathcal{N} = 2$ con gruppo di gauge $SO(6)$ e con N_f campi di materia nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge, rotta in maniera soffice a $\mathcal{N}=1$ dalla massa μ del campo scalare in aggiunta. Siamo interessati alla situazione in cui le masse m_A sono uguali per tutti i flavour

$$m_A = m \quad (2.6)$$

e inoltre $m \gg \mu$: in questo caso la simmetria di flavour è $U(N_f)$, ed inoltre esistono vuoti nel settore di Higgs che presentano una rottura della simmetria

di gauge del tipo

$$SO(6) \xrightarrow{\phi} SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3 \xrightarrow{q, \tilde{q}} \mathbf{1}$$

Alla scala di rottura data dal vev di ϕ esistono nella teoria monopoli magnetici che rappresentano elementi non banali di

$$\pi_2 \left(\frac{SO(6)}{SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3} \right) = \mathbb{Z}$$

mentre alla scala di rottura data dai vev di q, \tilde{q} troviamo configurazioni di vortici non abeliani classificati dagli elementi non banali di

$$\pi_1(SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}$$

Notiamo tuttavia che $\pi_1(SO(6)) = \mathbb{Z}_2$ e che esistono di conseguenza configurazioni singolari classificate da questo winding number non banale, come monopoli di Dirac e vortici corrispondenti. Le configurazioni a cui siamo interessati sono non singolari e pertanto sono classificate, siano esse vortici o monopoli, solamente dall'insieme degli interi pari.

Per queste configurazioni non singolari, possiamo notare la corrispondenza topologica tra la classificazione dei vortici e quella dei monopoli. Questo emerge con naturalezza quando si considera che un vortice di lunghezza finita ha come sorgenti monopoli classificati dallo stesso numero di winding. Si può notare che nella teoria fondamentale sia i monopoli che i vortici sono topologicamente banali, poichè corrispondono a $\pi_2(SO(6)) = 0$ e al kernel di $\pi_1(SO(6)) = \mathbb{Z}_2$, e pertanto non esistono come configurazioni topologicamente stabili, ma solo approssimativamente stabili ad opportune scale di energia. Tuttavia è semplice immaginare come esistano configurazioni in cui un vortice ha ai propri estremi una coppia monopolo-antimonopolo; tali configurazioni, pur non essendo stabili topologicamente e non minimizzando l'energia come soluzioni statiche, possono essere considerate come soluzioni in rotazione, stabili e di energia finita[3].

L'analisi delle configurazioni di vortice viene svolta a livello semiclassico, ed è quindi valida per grandi valori delle masse degli squark ($m_A \gg \Lambda$) e per N_f tali che la teoria di bassa energia sia infrared free o conforme. Questo impone nel nostro caso $N_f \geq 6$; per questo numero di flavour sia la teoria di alta energia che quella di bassa energia sono non asintoticamente libere. Alcuni di questi flavour non entreranno in gioco nelle soluzioni dei vortici, ma sono importanti nel garantire che a bassa energia la teoria non sia asintoticamente libera; questo garantisce che non vi siano fenomeni di rottura spontanea della simmetria di gauge in regime di interazione forte e che le soluzioni semiclassiche che costruiremo persistano anche nella teoria quantistica.

2.2.1 Moduli space, vuoti e simmetrie di color-flavour

La rottura che stiamo cercando è data da un valore di aspettazione di ϕ nel vuoto della forma[8]

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iv & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iv & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iv & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iv & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iv & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

che rompe $SO(6)$ a $SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$. Consideriamo i sottogruppi $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ che si ottengono considerando solo le righe e colonne $2i, 2i+1, 2j, 2j+1, i < j$, e denominiamo $S_x^{ij}, S_y^{ij}, S_z^{ij}$ e $\hat{S}_x^{ij}, \hat{S}_y^{ij}, \hat{S}_z^{ij}$ i generatori dei due sottogruppi $SU(2)$; si ha che $\phi = v(S_z^{12} + S_z^{13} + S_z^{23})$. Con un'opportuna scelta di gauge le equazioni (2.4), (2.5) implicano $v = \frac{m}{\sqrt{2}}$ mentre i vev di q e \tilde{q} assumono la seguente forma:

$$q = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ id_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & id_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & id_3 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -i\tilde{d}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{d}_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -i\tilde{d}_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{d}_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -i\tilde{d}_3 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

dove ogni colonna corrisponde a un flavour mentre le righe corrispondono alle componenti di colore. Delle equazioni restanti, la (2.2) implica che $|d_A|^2 = |\tilde{d}_A|^2$ per $A = 1 \dots 3$ mentre la (2.3) implica che $\tilde{d}_1 d_1 = \tilde{d}_2 d_2 = \tilde{d}_3 d_3$ e $2\sum_A \tilde{d}_A d_A = 3\mu m$. Possiamo scegliere con una trasformazione di gauge d_1, d_2 e d_3 reali e positivi, da cui

$$d_1 = d_2 = d_3 = \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = \tilde{d}_3 = \sqrt{\frac{\mu m}{2}} \quad (2.9)$$

e di conseguenza la forma dei vev è

$$q = \sqrt{\frac{\mu m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & i & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad \tilde{q} = \sqrt{\frac{\mu m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -i & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

e il gruppo di gauge presenta il pattern di rottura

$$SO(6) \xrightarrow{m} SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\sqrt{\mu m}} \mathbf{1}$$

I vev di q e \tilde{q} in questo vuoto rompono completamente il gruppo di gauge, ma conservano una certa simmetria. Possiamo infatti operare una trasformazione $T \in U(3)_F$ di flavour che agisce sui primi tre flavour e contemporaneamente una trasformazione di gauge \bar{T} appartenente all' $U(3)_C$ non rotto dal vev di ϕ : queste trasformazioni lasciano invariato il vev (2.7) e agiscono sulla matrice del vev di q come $q'_{kA} = \bar{T}_{kj} q_{jB} T_{BA}^T = q_{kA}$, e analogamente per \tilde{q} ; entrambi i vev si comportano, dal punto di vista di questo $U(3)$ di colore e sapore, come se fossero una matrice proporzionale all'identità. Questa caratteristica del vev di q viene chiamata *color-flavour locking*, e ad essa è associata una simmetria globale di color-flavour $U(3)_{C+F} \subset U(3)_C \times U(N_f)_F$ che presenta interessanti proprietà: lascia invariante il vuoto, agisce come una trasformazione di gauge globale sui campi di gauge ma trasforma in maniera diversa e non banale i campi di materia.

2.2.2 Monopoli

Vediamo brevemente quali sono i monopoli indipendenti generati dalla rottura a $U(3)[4]$. Abbiamo a disposizione tre sottogruppi $SU(2)$ rotti e possiamo quindi costruire 3 monopoli minimali indipendenti a' la GNOW, degeneri in massa:

$$\phi_{12} = 2v(\vec{S}^{12} \cdot \hat{r})\phi(r) \quad \phi_{23} = 2v(\vec{S}^{23} \cdot \hat{r})\phi(r) \quad \phi_{13} = 2v(\vec{S}^{13} \cdot \hat{r})\phi(r) \quad (2.11)$$

dove il profilo $\phi(r)$ può essere ricavato dalle equazioni di Bogomolny per i monopoli. Questi monopoli si trasformano secondo una rappresentazione di dimensione 3 del gruppo di gauge duale $\widetilde{U(3)}$, che corrisponde alla rappresentazione fondamentale o antifondamentale; è quest'ultima che viene effettivamente realizzata.

2.2.3 Vortici

La teoria di bassa energia a scale comprese tra $\sqrt{\mu m}$ e m ha come gruppo di gauge $SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$ e ammette soluzioni non singolari corrispondenti a cicli non banali del gruppo di omotopia $\pi_1(SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3)$. I gradi di libertà bosonici presenti nella teoria di bassa energia a queste scale sono le componenti di A_μ corrispondenti al gruppo di gauge non rotto e le componenti di q e \tilde{q} che soddisfano le equazioni (2.4), (2.5) e che corrispondono

a

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a & \ddots & \ddots \\ \ddots & -ia & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \tilde{a} & \ddots & \ddots \\ \ddots & i\tilde{a} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Indichiamo queste componenti con q^{kA} , \tilde{q}_{kA} dove A è l'indice di flavour e k l'indice della fondamentale del gruppo $U(3)$ non rotto. La Lagrangiana di bassa energia per questi campi è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g_1^2} F^{15\mu\nu} F_{\mu\nu}^{15} - \frac{1}{4g_3^2} F^{b\mu\nu} F_{\mu\nu}^b + \\ & + \mathcal{D}_\mu \tilde{q}_{kA} \mathcal{D}^\mu q^{kA} + \mathcal{D}_\mu \tilde{q}_{kA} \mathcal{D}^\mu \tilde{q}^{\bar{k}A} + \\ & - \frac{g_1^2}{12} |\bar{q}_A q^A - \tilde{q}_A \tilde{q}^{\bar{A}}|^2 - \frac{g_3^2}{2} |\bar{q}_A t^b q^A - \tilde{q}_A t^b \tilde{q}^{\bar{A}}|^2 + \\ & - \frac{g_1^2}{3} |\tilde{q}_A q^A - \sqrt{3} \mu \langle \phi^{15} \rangle|^2 - 2g_3^2 |\tilde{q}_A t^b q^A|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove la derivata covariante per q corrisponde a

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{6}} A_\mu^{15} - i A_\mu^b t^b$$

e dove le costanti di accoppiamento g_1 e g_3 riferite ai due sottogruppi $U(1)$ e $SU(3)$ sono in generale diverse a causa della differente rinormalizzazione dalla scala m di rottura alla scala Λ della teoria.

É importante notare che nel vuoto scelto la Lagrangiana di bassa energia (2.12) ha ancora una simmetria $\mathcal{N} = 2$ se teniamo solo il primo ordine in μ , trascurando gli ordini successivi[13][25]; infatti il termine $\mu Tr(\Phi^2)$ presente nel superpotenziale iniziale contiene un termine lineare nelle fluttuazioni del campo $\phi^{15} - \langle \phi^{15} \rangle$, che si comporta come un termine di Fayet-Iliopoulos e non rompe $\mathcal{N} = 2$; le correzioni di ordine superiore invece rompono $\mathcal{N} = 2$ a $\mathcal{N} = 1$ causando una separazione dei multipletti[25], ma non le consideriamo.

Per individuare le soluzioni BPS corrispondenti ai vortici possiamo porre a zero i flavour che non assumono un vev e considerare l'ansatz

$$q^{ka} = \tilde{q}^{\bar{k}a} \quad (2.13)$$

ridefinendo i campi come $q \rightarrow \frac{q}{\sqrt{2}}$ per avere un termine cinetico della forma usuale. La Lagrangiana con questo ansatz si scrive

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g_1^2} F^{15\mu\nu} F_{\mu\nu}^{15} - \frac{1}{4g_3^2} F^{b\mu\nu} F_{\mu\nu}^b + \mathcal{D}_\mu \bar{q}_{kA} \mathcal{D}^\mu q^{kA} + \\ & - \frac{g_1^2}{12} |\bar{q}_A q^A - 6\mu m|^2 - \frac{g_3^2}{2} |\bar{q}_A t^b q^A|^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

da cui considerando solo le componenti e le derivate spaziali si ricava il potenziale hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{4g_1^2} (F_{ij}^{15})^2 + \frac{1}{4g_3^2} (F_{ij}^b)^2 + \bar{\mathcal{D}}_i \bar{q}_{kA} \mathcal{D}_i q^{kA} + \\ & + \frac{g_1^2}{12} |\bar{q}_A q^A - \xi|^2 + \frac{g_3^2}{2} |\bar{q}_A t^b q^A|^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove $\xi = 6\mu m$. Possiamo scrivere la tensione di stringa nella forma di Bogomolny

$$\begin{aligned} T = & \int d^2x \left\{ \left[\frac{1}{2g_3} F_{ij}^b \pm \frac{g_3}{2} \varepsilon_{ij} \bar{q}_A t^b q^A \right]^2 + \right. \\ & + \left[\frac{1}{2g_1} F_{ij}^{15} \mp \frac{g_1}{2\sqrt{6}} \varepsilon_{ij} (\bar{q}_A q^A - \xi) \right]^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} |\mathcal{D}_i q^A \pm i\varepsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^A|^2 \mp \frac{1}{2\sqrt{6}} F^{15} \xi \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove $F^{15} = \varepsilon_{ij} F_{ij}^{15}$. Si nota che la stabilità topologica dei vortici BPS è dovuta solamente al fattore $U(1)$ del gruppo. Possiamo scrivere le equazioni di Bogomolny per i vortici

$$\frac{1}{2g_3} F_{ij}^b + \delta \frac{g_3}{2} \varepsilon_{ij} \bar{q}_A t^b q^A = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{2g_1} F_{ij}^{15} - \delta \frac{g_1}{2\sqrt{6}} \varepsilon_{ij} (\bar{q}_A q^A - \xi) = 0 \quad (2.18)$$

$$\mathcal{D}_i q^A + \delta i \varepsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^A = 0 \quad (2.19)$$

dove $\delta = \pm 1$ è il parametro che fissa il segno del flusso. Queste equazioni sono uguali a quelle che si ottengono nel caso di rottura $SU(4) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ a meno delle ridefinizioni $A^{15} \rightarrow -A^{15}$, $\xi \rightarrow 3\xi$, $g_1 \rightarrow \sqrt[4]{6}g_1$. È possibile ottenere soluzioni particolari di queste equazioni prendendo come ansatz che la forma di tre di questi vortici sia analoga alla forma dei vortici $U(1)$ che si otterrebbero rompendo il gruppo originale $SO(6)$ a $U(1) \times U(1) \times U(1)$

anzichè a $U(3)$. In particolare consideriamo solamente le componenti di A_μ^a a valori nella sottoalgebra di Cartan non rotta dal vev di ϕ , cioè A_μ^3, A_μ^8 e A_μ^{15} , e fissiamo per i vortici la forma:

$$q = \begin{pmatrix} e^{in_1\vartheta}\varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ ie^{in_1\vartheta}\varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{in_2\vartheta}\varphi_2(r) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & ie^{in_2\vartheta}\varphi_2(r) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{in_3\vartheta}\varphi_3(r) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & ie^{in_3\vartheta}\varphi_3(r) & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

con le condizioni all'infinito

$$\varphi_1(\infty) = \varphi_2(\infty) = \varphi_3(\infty) = \sqrt{\mu m} \quad (2.21)$$

L'andamento all'infinito dei campi di gauge è

$$A_i^a \sim h_a(r)\varepsilon_{ij}r_j/r^2 \quad (2.22)$$

Per vedere le condizioni all'infinito su g_a imponiamo che la derivata covariante dei campi di squark si annulli all'infinito, ottenendo

$$\begin{aligned} h_3(\infty) &= -(n_1 - n_2) \\ h_8(\infty) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(n_1 + n_2 - 2n_3) \\ h_{15}(\infty) &= \sqrt{\frac{2}{3}}(n_1 + n_2 + n_3) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Possiamo quindi scrivere i campi di gauge come

$$\begin{aligned} A_i^3 &= -\varepsilon_{ij}\frac{r_j}{r^2}((n_1 - n_2) - \delta f_1(r)) \\ A_i^8 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_{ij}\frac{r_j}{r^2}((n_1 + n_2 - 2n_3) - \delta f_2(r)) \\ A_i^{15} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_{ij}\frac{r_j}{r^2}((n_1 + n_2 + n_3) - \delta f_3(r)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove f_a sono funzioni che si annullano all'infinito, mentre per $r = 0$ si annulla l'intera quantità tra parentesi per avere campi non singolari nell'origine.

Possiamo ora calcolare la tensione di stringa, che risulta determinata unicamente dal flusso del campo A^{15} e vale

$$T = \left| \int d^2x \frac{1}{2\sqrt{6}} F^{15}\xi \right| = \frac{2\pi\xi}{3} |n_1 + n_2 + n_3| \quad (2.25)$$

Il parametro δ , che denota il segno del flusso, risulta allora dato da

$$\delta = \text{sign}(n_1 + n_2 + n_3) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{|n_1 + n_2 + n_3|} \quad (2.26)$$

Inoltre possiamo ricavare il profilo del vortice a partire dalle equazioni differenziali di 1° ordine che si ottengono per le funzioni f , φ a partire dalle equazioni di Bogomolny, che diventano

$$-\frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} + \frac{g_3^2}{2} (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) = 0 \quad (2.27)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} + \frac{g_3^2}{2} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 - 2|\varphi_3|^2) = 0 \quad (2.28)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{df_3}{dr} + \frac{g_1^2}{2} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 - \xi) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dr} - \left(\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{6}f_2 + \frac{1}{3}f_3 \right) \frac{\varphi_1}{r} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dr} - \left(-\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{6}f_2 + \frac{1}{3}f_3 \right) \frac{\varphi_2}{r} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dr} - \left(-\frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3 \right) \frac{\varphi_3}{r} = 0 \quad (2.32)$$

È poi possibile integrare numericamente queste equazioni con le condizioni al contorno assegnate, considerando anche che i campi degli squark devono essere ovunque regolari.

Possiamo trovare alcune simmetrie nelle equazioni: infatti la soluzione per la stringa $(1, 0, 1)$ si ottiene dalla soluzione per la stringa $(1, 1, 0)$ con le sostituzioni $\phi_2 \longleftrightarrow \phi_3$, $-\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{6}f_2 \longleftrightarrow -\frac{1}{3}f_2$, e via dicendo.

Le condizioni sulle f nell'origine che derivano dalla forma (2.24) per i campi di gauge sono

$$\begin{aligned} f_1(0) &= (n_1 - n_2)\delta \\ f_2(0) &= (n_1 + n_2 - 2n_3)\delta \\ f_3(0) &= (n_1 + n_2 + n_3)\delta \end{aligned} \quad (2.33)$$

e da queste condizioni, unitamente alle equazioni (2.30), (2.31) e (2.32), si ricava[17] l'andamento dei profili φ in prossimità dell'origine:

$$\varphi_1 \sim r^{n_1\delta} \quad \varphi_2 \sim r^{n_2\delta} \quad \varphi_3 \sim r^{n_3\delta} \quad (2.34)$$

e di conseguenza abbiamo soluzioni BPS non singolari nell'origine solo per n_1 , n_2 e n_3 dello stesso segno.

Notare che, anche scegliendo (n_1, n_2, n_3) positivi, non tutti i valori di n_1 , n_2 e n_3 corrispondono a configurazioni interessanti: infatti le configurazioni per cui la somma $n_1 + n_2 + n_3$ è dispari corrispondono a vortici che portano un winding number \mathbb{Z}_2 non banale nella teoria originale $SO(6)$ e che di conseguenza terminano sui monopoli di Dirac singolari presenti nella teoria fondamentale e a cui non siamo interessati. I vortici con winding number non banale e tensione minore tra i restanti presenti nella teoria sono quelli con $n_1 + n_2 + n_3 = 2$.

Risulta conveniente a questo punto fissare la carica magnetica del vortice facendola corrispondere a quella del monopolo su cui termina; questa convenzione può essere implementata poichè sia i vortici con winding pari che i monopoli sono classificati dal medesimo gruppo di omotopia. Dalla condizione di quantizzazione di Dirac, visto che le cariche elettriche corrispondono agli squark nella rappresentazione fondamentale di $SO(6)$, si trova che i vortici dovrebbero essere classificati dal reticolo delle radici di $SO(6)$. L'insieme dei vettori che costituiscono il reticolo è uguale all'insieme dei numeri di winding (n_1, n_2, n_3) a meno di un fattore costante di lunghezza.

I vortici “minimali” corrisponderebbero quindi agli avvolgimenti $\vec{n} = (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ o $\vec{n} = (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$. Di questi, tuttavia, solo i primi tre corrispondono ai monopoli presenti alla scala m nella teoria. Non è chiaro, senza esaminare la dinamica delle interazioni vortice-vortice, se il secondo tripletto di vortici corrisponda a stati legati o se semplicemente si tratti di vortici che non hanno come sorgente nessuno dei monopoli minimali ma configurazioni di multimonopolo. Consideriamo comunque d'ora in avanti solo i vortici che confinano i monopoli minimali.

2.2.4 Flux matching

Come abbiamo notato in precedenza, esiste una forte corrispondenza tra vortici e monopoli in questa teoria: nessuna delle due strutture è topologicamente stabile a tutte le scale, pertanto a bassa energia ci aspettiamo che esistano configurazioni di multimonopolo in cui i vari monopoli sono congiunti da vortici. Nel caso più semplice queste configurazioni assumono l'aspetto di una coppia monopolo-antimonopolo unita da uno o più vortici come in figura 2.1.

Per sapere quale sia esattamente il numero di vortici che terminano sullo stesso monopolo, e per mostrare in maniera più stringente la corrispondenza tra vortici e monopoli non solo a livello topologico, è possibile confrontare il flusso del campo magnetico attraverso una sfera S^2 che circonda il monopolo e una sezione \mathbb{R}^2 perpendicolare all'asse del vortice. In questo modo possiamo confrontare i due oggetti. Ci sono due tipi di flusso che possono essere

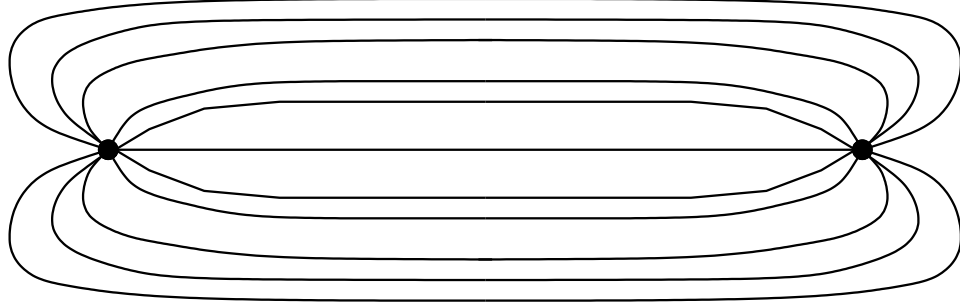


Figura 2.1: Configurazione di monopolo-vortice-antimonopolo.

calcolati: il flusso abeliano lungo il gruppo $U(1)$ non rotto, che può essere espresso come

$$F_1 = \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\text{Tr}(\phi\vec{B})}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} \quad (2.35)$$

ed è una quantità invariante sotto trasformazioni di gauge, e il flusso non abeliano globale, che corrisponde a

$$F = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \quad (2.36)$$

Questo ovviamente non è gauge-invariante e pertanto va calcolato in una gauge comune per vortici e monopoli.

Cominciamo dal calcolo del flusso lungo $U(1)$ generato dal monopolo. Nel limite in cui $m \gg \mu$ il campo del monopolo su cui terminano i vortici è molto simile al campo di un monopolo isolato per distanze dell'ordine di $1/\sqrt{\mu m}$, per cui possiamo usare la soluzione[4] di quest'ultimo per ottenere il flusso. Calcoliamo il flusso attraverso una sfera di raggio r tale che $\frac{1}{m} \ll r \ll \frac{1}{\sqrt{\mu m}}$, come si vede in figura 2.3. Consideriamo il monopolo che corrisponde al vortice $(1, 1, 0)$. A grande distanza la forma asintotica per i campi A_μ e ϕ vale

$$A_i = \varepsilon_{aij} S^a \frac{r_j}{r^2} \quad \phi = 2v S^a \frac{r_a}{r} + \sqrt{2}v H_3 \quad (2.37)$$

dove S^a sono i generatori del sottogruppo $SU(2)$ rotto. Da questo si ricava il campo magnetico

$$B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j + i[A_j, A_k]) = -\frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^4} r_i \quad (2.38)$$

e di conseguenza il flusso abeliano

$$F_1 = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \frac{\text{Tr}(\phi\vec{B})}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \frac{-2v \frac{\vec{r}}{r^3}}{\sqrt{6v^2}} = -4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.39)$$

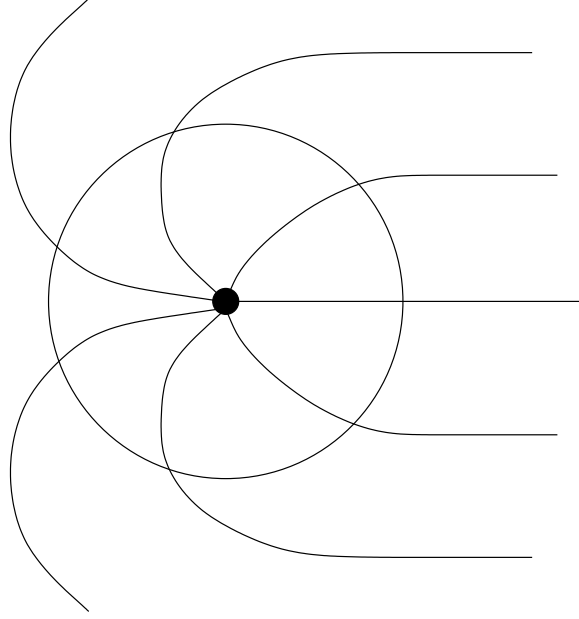


Figura 2.2: Flusso del campo attraverso una sfera S^2 attorno al monopolo.

Calcoliamo ora il flusso del vortice lungo $U(1)$. Consideriamo il flusso del vortice attraverso un piano lontano dal monopolo, come in figura 2.3, in modo da poter usare la soluzione trovata precedentemente. Il campo ϕ è uguale al suo vev, mentre il campo di gauge ha le componenti $A = A^3 T^3 + A^8 T^8 + A^{15} T^{15}$ che tuttavia nella traccia scompaiono con l'eccezione di A^{15} . Sostituendo la soluzione (2.24) otteniamo

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot \frac{\text{Tr}(\phi \vec{B})}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} = \frac{\text{Tr}(\phi T^{15})}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}^{15}) = \quad (2.40) \\ &= \frac{\sqrt{6}v}{\sqrt{6v^2}} \int_{C_\infty} d\vec{l} \cdot \vec{A}^{15} = -4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

che come si può vedere combacia con il flusso magnetico del monopolo. Questo mostra che in questa teoria ogni monopolo è sorgente di un solo vortice e che le configurazioni presenti nella teoria sono del tipo monopolo-vortice-antimonopolo.

Possiamo mostrare l'uguaglianza dell'intero flusso non abeliano se fissiamo un'unica gauge per le soluzioni di vortice e di monopolo. Fissiamo la gauge ponendo ϕ costante e uguale al suo vev. Il campo magnetico del

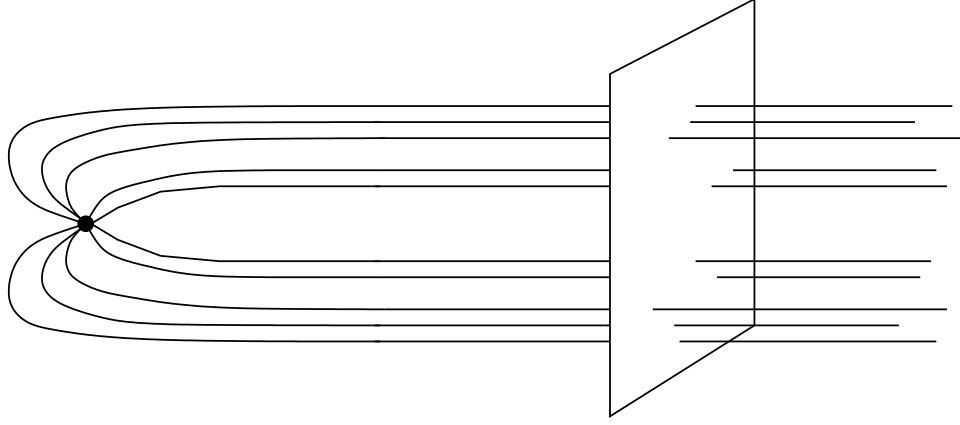


Figura 2.3: Flusso del campo attraverso un piano perpendicolare all'asse del vortice.

monopolo diventa in questa gauge

$$B_i = -S^3 \frac{r_i}{r^3} \quad (2.41)$$

e il flusso

$$F = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = -4\pi S^3 \quad (2.42)$$

La soluzione del vortice invece è già nella gauge corretta e il flusso si riduce a

$$\begin{aligned} F &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_{C_\infty} d\vec{l} \cdot \vec{A} \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} T^8 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} T^{15} \right) = -4\pi S^3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

da cui vediamo che anche l'intero flusso non abeliano coincide, confermando la corrispondenza tra monopoli e vortici. Il calcolo si può ripetere per gli altri due vortici in analogia a quanto fatto per questo, e porta allo stesso risultato: il flusso di ognuno dei tre vortici minimali corrisponde al flusso di uno dei tre monopoli minimali di GNOW.

Si può fare un'ultima osservazione sulla condizione di quantizzazione di Dirac in questo caso[3][4]. La minima carica elettrica della teoria rispetto ad A^{15} si può leggere dalla derivata covariante

$$e_0 = \frac{g_1}{\sqrt{6}} \quad (2.44)$$

mentre la carica magnetica g_m dei monopoli si ottiene definendo

$$F = 4\pi g_m \implies g_m = \frac{1}{g_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.45)$$

da cui si ricava che queste cariche soddisfano alla condizione

$$g_m e_0 = \frac{1}{3} \quad (2.46)$$

Ci aspetteremmo invece la condizione usuale $g_0 e_0 = 1/2$, che in questo caso si leggerebbe $g_m e_0 = 1$ visto che i monopoli non sono quelli con minima carica della teoria e presumibilmente i monopoli di Dirac singolari hanno carica $g_0 = g_m/2$. Qual è l'origine di questa discrepanza?

Il fattore $1/3$ deriva dalla struttura topologica del gruppo; infatti, il loop minimale di un gruppo contenente un fattore $U(1)$ è in genere rappresentato da un singolo avvolgimento attorno all' $U(1)$ per la nota formula

$$\pi_1(G \times U(1)) = \pi_1(G) \times \pi_1(U(1)) \quad (2.47)$$

ma in questo caso, non essendo di fronte a un prodotto diretto di questo genere, esistono avvolgimenti minimali più piccoli. Questo è dovuto al fatto che $SU(3)$ e $U(1)$ hanno in comune i punti corrispondenti alle trasformazioni $e^{2\pi i n/3}$ che appartengono al centro \mathbb{Z}_3 di $SU(3)$. Di conseguenza, posso considerare un loop che percorre l' $U(1)$ dall'identità fino a $e^{-2\pi i/3}$ e contemporaneamente si muove attraverso $SU(3)$ dall'identità fino a $e^{2\pi i/3}$: il punto di arrivo nel gruppo è equivalente all'identità e quindi questo percorso è chiuso. Il percorso avvolge solo una parte di $U(1)$ e tuttavia non è continuamente deformabile all'identità, e rappresenta chiaramente un loop minimale per il gruppo considerato. Per avere un avvolgimento completo attorno all' $U(1)$ servono esattamente 3 di questi loop, per cui la minima carica magnetica è $1/3$ di quella attesa per l' $U(1)$. Si può facilmente intuire che la composizione di questi loop è additiva, nel senso che ogni loop in $SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$ può essere visto come una successione di n loop minimali, con n additivo, e pertanto il gruppo di omotopia è

$$\pi_1(SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z} \quad (2.48)$$

e i monopoli sono ugualmente classificati da una carica magnetica multipla della carica fondamentale che, tuttavia, è più piccola di un fattore 3 di quella usuale secondo la condizione di quantizzazione di Dirac.

2.2.5 Modi nulli dei vortici

I vortici minimali della teoria di bassa energia hanno la stessa tensione e gli stessi profili, per cui si può pensare che agendo su di essi con le trasformazioni $U(3)_{C+F}$ si ottenga una successione continua di vortici minimali con la stessa energia. Questa successione di vortici interpola tra le tre soluzioni ottenute precedentemente; è possibile passare direttamente dall'una all'altra agendo con una trasformazione equivalente a una rotazione di Weyl come ad esempio

$$R_{C+F} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ 0 & -\mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

che appartiene al gruppo di color-flavour e manda il vortice con winding $(1, 1, 0)$ in $(1, 0, 1)$, implementando così la trasformazione vista precedentemente sulle funzioni di profilo che si ottenevano risolvendo le equazioni di Bogomolny. I tre vortici minimali, se visti nel piano (A^3, A^8) , appaiono come il triangolo equilatero tipico dell'antifondamentale di $SU(3)$, e in effetti si trasformano allo stesso modo dei monopoli; tuttavia la trasformazione sui vortici coinvolge anche il gruppo di flavour oltre che le trasformazioni di gauge. Notare che sui monopoli le trasformazioni $U(3)_{C+F}$ sembrano apparentemente trasformazioni di gauge, anche se in realtà sono trasformazioni globali non banali; il loro effetto sui vortici è quello di ruotare il flusso del vortice fino a rivolgerlo in una qualunque direzione in $SU(3)$.

I modi nulli dei vortici sono dati dall'insieme delle configurazioni inequivalenti dei vortici e perciò non dal gruppo $SU(3)$, ma dallo spazio quoziente $SU(3)/H$ dove H è il sottogruppo di $SU(3)$ che lascia invariata la configurazione del vortice. Se consideriamo una delle configurazioni dei vortici, ad esempio la $(1, 1, 0)$, è facile rendersi conto che esistono trasformazioni che lasciano invariata questa soluzione, ad esempio le rotazioni nella sottoalgebra di Cartan generate da t^3 e t^8 . Il gruppo di tutte le trasformazioni che non agiscono su una configurazione del genere è $SU(2) \times U(1)$ generato nel caso dell'esempio precedente da t^1, t^2, t^3 e t^8 . Di conseguenza i modi nulli equivalgono a trasformazioni di

$$\frac{SU(3)}{SU(2) \times U(1)} \sim \mathbb{C}P^2 \quad (2.50)$$

Le configurazioni dei vortici sono quindi parametrizzate da $8-4 = 4$ parametri indipendenti che corrispondono alla dimensione di $\mathbb{C}P^2$.

Il fatto che queste trasformazioni lascino invariante il vuoto, pur essendo nella fase di Higgs della teoria dove la simmetria di gauge è completamente

rotta, ci garantisce che si tratta di trasformazioni non banali e che non hanno nulla a che vedere con le usuali trasformazioni di gauge.

Come già detto, i vortici sotto queste trasformazioni parametrizzano le direzioni in $SU(3)$. Si può vedere esplicitamente questo passando in una gauge tale che q nella soluzione non dipenda dall'angolo ϑ . In questa gauge unitaria q assume la forma

$$q = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ i\varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \varphi_2(r) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & i\varphi_2(r) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \varphi_3(r) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & i\varphi_3(r) & 0 & \cdots \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

mentre il campo di gauge diviene

$$\begin{aligned} A_i^3 &= \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_1(r) \\ A_i^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_2(r) \\ A_i^{15} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_3(r) \end{aligned} \quad (2.52)$$

dove f_1 è identicamente nulla per la soluzione $(1, 1, 0)$. Da questo si può ottenere una forma per A_μ esplicitamente dipendente dal versore n^a all'interno del gruppo di gauge, e che si trasforma come $n'^a = U n^a U^\dagger$ spaziando nell'intero $SU(3)$ sotto trasformazioni di color-flavour:

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f(r) n_a T^a \quad (2.53)$$

dove $n_a T^a = T^8$ per la soluzione $(1, 1, 0)$. Applicando alla soluzione una trasformazione di color-flavour si ottiene

$$q = U \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ i\varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \varphi_2(r) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & i\varphi_2(r) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \varphi_3(r) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & i\varphi_3(r) & 0 & \cdots \end{pmatrix} U^\dagger \quad (2.54)$$

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f(r) U T^8 U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f(r) n'_a T^a \quad (2.55)$$

che è una soluzione delle equazioni di Bogomolny non abeliane e mostra chiaramente l'orientazione del flusso in una direzione qualunque del gruppo di gauge. Abbiamo così costruito esplicitamente la successione di modi nulli dei vortici, e il vettore n_a è quello che fornisce la parametrizzazione naturale di $\mathbb{C}P^2$.

In realtà questi modi nulli non sono normalizzabili. In effetti nella teoria un vortice è un oggetto esteso, che ha estensione infinita lungo l'asse di simmetria e pertanto ha energia infinita, anche se la tensione (come energia per unità di lunghezza) è finita. Tuttavia grazie a quest'ultima osservazione possiamo considerare non un vortice infinitamente esteso, per il quale ovviamente non possiamo normalizzare i modi nulli, ma un vortice di lunghezza finita e che termina su monopoli. Questa configurazione ha energia finita e i suoi modi nulli sono normalizzabili, a patto di trasformare anche i monopoli in analogia a quanto accade con i vortici.

L'importanza di queste trasformazioni duali di colore e sapore sta proprio nel fatto che sia i monopoli che i vortici si trasformano secondo opportune rappresentazioni di questo gruppo non abeliano, e pertanto è evidente la natura di multipletti non abeliani che caratterizza le configurazioni degeneri in massa sia dei vortici che soprattutto dei monopoli. È interessante notare inoltre che il sottogruppo $SU(2) \times U(1)$ che lascia invariate le soluzioni dei vortici agisce in maniera non banale sui monopoli, e possiamo quindi completare $\mathbb{C}P^2$ all'intero gruppo $U(3)$ quando studiamo l'azione dei modi nulli sui monopoli.

Si può notare inoltre che quelli trattati non sono tutti i modi nulli dei vortici in questione. In effetti se siamo in presenza di un grosso numero di flavour ($N_f \geq 4$, che appare naturale perchè la teoria sia infrared free) esiste un gruppo di simmetria di flavour residua anche nel vuoto da noi scelto. Questo gruppo è $U(N_f - 3) \subset U(N_f)$ e agisce sui flavour che non prendono vev e che non abbiamo fin qui considerato, perchè non entravano nella costruzione dei vortici. Partendo da questa ed altre simmetrie si possono trovare altri modi nulli, che non sono purtroppo particolarmente interessanti per i nostri scopi a causa del modo in cui agiscono sul vuoto e sui monopoli.

2.2.6 Quantizzazione dei modi nulli

Come abbiamo visto i modi nulli descrivono l'orientazione del vortice all'interno del gruppo di gauge. Per studiare meglio lo spazio dei modi nulli dei vortici cerchiamo la teoria effettiva di bassa energia dei modi nulli sul world-sheet della stringa. A questo scopo possiamo assumere che le coordinate di orientazione nel gruppo di gauge n^a siano funzioni lentamente variabili delle

coordinate del worldsheet x_μ . L'analisi è analoga a quella che viene portata avanti in [5].

I vettori n^a , che parametrizzano le coordinate di orientazione, rappresentano ora campi in una teoria (1+1) dimensionale sul worldsheet. Si tratta di un modello sigma che non possiede un termine di potenziale, poichè le coordinate parametrizzano i modi nulli dei vortici. Per ricavare il termine cinetico, consideriamo i campi nella gauge unitaria vista nella sezione precedente e consideriamo la trasformazione U che caratterizzava le soluzioni come dipendente lentamente dalle coordinate $U(x_\mu)$. Occorre ora fissare una forma anche per le componenti di A_μ che in genere non abbiamo considerato finora. L'ansatz più semplice è

$$A_\mu = -i\partial_\mu U U^\dagger a(r) \quad (2.56)$$

dove la nuova funzione di profilo $a(r)$ tende a zero all'infinito. Il tensore del campo di gauge non abeliano diventa

$$F_{ni} = \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_n n^a T^a \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f(r)(1 - a(r)) + i\partial_n U U^\dagger \frac{r_i}{r} \frac{df}{dr} \quad (2.57)$$

Sostituendo dentro l'azione, si ha come risultato un modello sigma $\mathbb{C}P^2$ in (1+1) dimensioni sul worldsheet:

$$S_\sigma^{(1+1)} = \beta \int d^2x \frac{1}{2} (\partial n^a)^2 \quad (2.58)$$

con β che rappresenta l'azione da minimizzare per $a(r)$.

I vuoti della teoria $\mathbb{C}P^2$ in (1+1) sono tre e non presenta rottura spontanea della simmetria, indicando così che $U(3)_{C+F}$ non è rotta spontaneamente.

2.3 $SO(2N) \rightarrow U(N)$

Questo caso è la generalizzazione della rottura $SO(6) \rightarrow SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$ vista precedentemente, e la maggior parte dei risultati possono essere riformulati qui senza problemi. Il tipo di rottura è

$$SO(2N) \xrightarrow{m} SU(N) \times U(1)/\mathbb{Z}_N \xrightarrow{\sqrt{\mu m}} \mathbf{1} \quad (2.59)$$

e il vev di ϕ assume la forma

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iv & 0 & 0 & \cdots \\ -iv & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & iv & \cdots \\ 0 & 0 & -iv & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Anche in questo caso ci interessano solo le configurazioni (vortici e monopoli) non singolari e la condizione è sempre quella di numero di winding pari.

Bisogna prestare attenzione al fatto che l'analisi è semiclassica e pertanto deve essere svolta in modelli dove l'interazione non diventi forte a bassa energia; il ruolo dei flavour che non prendono vev è proprio quello di avere una funzione β positiva. Questo impone $N_f \geq 2N$, in modo che la teoria sia infrared free a tutte le scale.

La struttura del moduli space è analoga a quella del caso precedente, e anche in questo caso possiamo trovare i vuoti con color-flavour locking

$$q = \sqrt{\frac{\mu m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ i & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & i & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \tilde{q} = \sqrt{\frac{\mu m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -i & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -i & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

e il gruppo di color-flavour in generale è $U(N)_{C+F}$, costruito come già visto in precedenza.

I monopoli possono essere costruiti da ogni sottogruppo $SO(4)$ rotto dal vev di ϕ ; di conseguenza otteniamo un multipletto di $\frac{N(N-1)}{2}$ monopoli indipendenti che si trasformano nella rappresentazione di rango 2 antisimmetrica del gruppo $\widetilde{U(N)}$.

La teoria di bassa energia in cui esistono i vortici è descritta dalla Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4g_1^2} F^{0\mu\nu} F_{\mu\nu}^0 - \frac{1}{4g_N^2} F^{b\mu\nu} F_{\mu\nu}^b + \\
& + \mathcal{D}_\mu \bar{q}_{kA} \mathcal{D}^\mu q^{kA} + \mathcal{D}_\mu \tilde{q}_{kA} \mathcal{D}^\mu \bar{q}^{\bar{k}A} + \\
& - \frac{g_1^2}{4N} |\bar{q}_A q^A - \tilde{q}_A \bar{q}^A|^2 - \frac{g_N^2}{2} |\bar{q}_A t^b q^A - \tilde{q}_A t^b \bar{q}^A|^2 + \\
& - \frac{g_1^2}{N} |\tilde{q}_A q^A - \sqrt{N} \mu \langle \phi^0 \rangle|^2 - 2g_N^2 |\tilde{q}_A t^b q^A|^2
\end{aligned} \tag{2.62}$$

dove la derivata covariante per q corrisponde a

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{2N}} A_\mu^0 - i A_\mu^b t^b$$

Anche in questo caso si tratta di una teoria $\mathcal{N} = 2$ poichè il termine proporzionale a μ si comporta come un termine di Fayet-Iliopoulos.

Possiamo ripetere gli ansatz del caso precedente e trovare la forma di Bogomolny

$$\begin{aligned}
T = & \int d^2x \left\{ \left[\frac{1}{2g_N} F_{ij}^b \pm \frac{g_N}{2} \varepsilon_{ij} \bar{q}_A t^b q^A \right]^2 + \right. \\
& + \left[\frac{1}{2g_1} F_{ij}^0 \mp \frac{g_1}{2\sqrt{2N}} \varepsilon_{ij} (\bar{q}_A q^A - \xi) \right]^2 + \\
& \left. + \frac{1}{2} |\mathcal{D}_i q^A \pm i \varepsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^A|^2 \mp \frac{1}{2\sqrt{2N}} F^0 \xi \right\}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

dove $\xi = 2N\mu m$, e poi ricavare le equazioni di Bogomolny

$$\frac{1}{2g_N} F_{ij}^b + \delta \frac{g_N}{2} \varepsilon_{ij} \bar{q}_A t^b q^A = 0 \tag{2.64}$$

$$\frac{1}{2g_1} F_{ij}^0 - \delta \frac{g_1}{2\sqrt{2N}} \varepsilon_{ij} (\bar{q}_A q^A - \xi) = 0 \tag{2.65}$$

$$\mathcal{D}_i q^A + \delta i \varepsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^A = 0 \tag{2.66}$$

Notiamo che anche nel caso generico è l' $U(1)$ a dare stabilità al vortice. Per trovare le soluzioni possiamo seguire gli ansatz del caso precedente e

considerare soluzioni della forma

$$q = \begin{pmatrix} e^{in_1\vartheta}\varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ ie^{in_1\vartheta}\varphi_1(r) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{in_2\vartheta}\varphi_2(r) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & ie^{in_2\vartheta}\varphi_2(r) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e^{in_3\vartheta}\varphi_3(r) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & ie^{in_3\vartheta}\varphi_3(r) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

con condizioni all'infinito simili a quelle del caso precedente, mentre i campi di gauge assumono la forma

$$\begin{aligned} A_i^1 &= -\varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} ((n_1 - n_2) - \delta f_1(r)) \\ A_i^2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} ((n_1 + n_2 - 2n_3) - \delta f_2(r)) \\ &\dots \\ &\dots \\ A_i^{N-1} &= -\sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} ((n_1 + n_2 + n_3 + \cdots - (N-1)n_N) - \delta f_{N-1}(r)) \\ A_i^0 &= \sqrt{\frac{2}{N}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} ((n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_N) - \delta f_0(r)) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dal campo A^0 possiamo ricavare la tensione di stringa, e vediamo che anche in questo caso è proporzionale alla somma dei winding:

$$T = \left| \int d^2x \frac{1}{2\sqrt{2N}} F^0 \xi \right| = \frac{2\pi\xi}{N} |n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_N| \quad (2.69)$$

Anche in questo caso ci troviamo di fronte a una successione di vortici con la stessa tensione; seguendo il filo dei ragionamenti del caso precedente, validi anche in questo, prendiamo come vortici minimali quelli con numeri di winding della forma $(\dots, 0, 1, 0 \dots, 0, 1, 0 \dots)$ e troviamo un multipletto di $\frac{N(N-1)}{2}$ vortici degeneri in tensione, ciascuno in corrispondenza di un monopolio, e l'azione del gruppo $U(N)_{C+F}$ produce una successione di vortici intermedi che interpolano tra queste configurazioni. Ogni vortice corrisponde a un monopolio e la condizione di quantizzazione di Dirac viene modificata nel caso generale come

$$g_m e_0 = \frac{1}{N} \quad (2.70)$$

visto che ora il centro del gruppo è \mathbb{Z}_N .

I modi nulli dei vortici sono la generalizzazione di quelli già visti per il caso precedente: $U(N)_{C+F}$ ruota i vortici interpolando tra le configurazioni della forma $(\dots, 0, 1, 0 \dots 0, 1, 0 \dots)$. Anche in questo caso possiamo scrivere esplicitamente per i campi di gauge una forma che dipende dal versore n^a nel gruppo di gauge, passando in una gauge in cui i campi degli squark non dipendano da ϑ . Se prendiamo la soluzione $(1, 1, 0 \dots)$ e andiamo a vedere l'aspetto dei campi di gauge, troviamo

$$\begin{aligned}
A_i^1 &= \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_1(r) \\
A_i^2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_2(r) \\
&\dots \\
&\dots \\
A_i^{N-1} &= \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_{N-1}(r) \\
A_i^0 &= -\sqrt{\frac{2}{N}} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f_0(r)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

dove viste le condizioni al bordo possiamo considerare

$$f_1 = 0 \quad , \quad f_i = f_j \quad (i, j = 1 \dots N-1) \tag{2.72}$$

e trasformando con trasformazioni di color-flavour la soluzione $(1, 1, 0 \dots)$ possiamo quindi scrivere la soluzione nel caso generale come

$$A_i = \sum_{k=2}^{N-1} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f(r) n_{(k)}^a T^a \tag{2.73}$$

dove per $(1, 1, 0 \dots)$ si ha $n_{(k)}^a = \delta_{ak} \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}}$.

Quello che risulta evidente è che non abbiamo più un solo vettore n^a a parametrizzare il vortice, ma $N-2$ vettori indipendenti $n_{(k)}^a$ che quindi descrivono un iperpiano $(N-2)$ -dimensionale nello spazio dei generatori. Le possibili configurazioni di iperpiani $(N-2)$ -dimensionali in questo spazio sono descritte dallo spazio di una Grassmanniana complessa. Si può vedere lo stesso risultato in questo modo: la soluzione per il singolo vortice $(1, 1, 0 \dots)$ possiede alcune invarianze incluse in $U(N)_{C+F}$ che corrispondono a $U(N-2) \times U(2)$: le trasformazioni di $U(N-2)$ agiscono sugli squark che rimangono costanti, e le trasformazioni di $U(2)$ scambiano tra loro i due flavour che contribuiscono al vortice. Di conseguenza l'insieme dei vortici

non parametrizza $\mathbb{C}P^{N-1}$ come nel caso familiare di $SU(N+1) \rightarrow U(N)$, ma risulta essere

$$\frac{U(N)}{U(2) \times U(N-2)} \sim G(2, N; \mathbb{C}) \quad (2.74)$$

e quindi la teoria effettiva dei modi nulli sul worldsheet è un modello sigma su una Grassmanniana complessa. Notare che per $N = 3$ la Grassmanniana si riduce a $G(2, 3; \mathbb{C}) \sim \frac{U(3)}{U(2) \times U(1)} \sim G(1, 3; \mathbb{C}) \sim \mathbb{C}P^2$, consistente con il risultato del caso precedente.

2.4 $SO(2N + 1) \rightarrow U(N)$

Questo caso è simile al precedente, infatti la rottura è analoga, aggiungendo una riga e una colonna di zeri:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iv & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -iv & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iv & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iv & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iv & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -iv & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

La teoria per $N_f \geq 2N$ è non asintoticamente libera a tutte le scale. Il moduli space e i vuoti sono analoghi al caso precedente, aggiungendo una riga e una colonna nulle:

$$q = \sqrt{\frac{\mu m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

e analogamente per \tilde{q} . È immediato vedere che il gruppo di simmetria di color-flavour che lascia invariato il vuoto è lo stesso $U(N)_{C+F}$ individuato nel caso precedente.

La teoria contiene tutti i monopoli già osservati per il caso $SO(2N)$. Esaminando i monopoli di questa teoria, tuttavia, si trova che oltre agli $\frac{N(N-1)}{2}$ monopoli del caso precedente, la teoria contiene un altro gruppo di monopoli con la stessa massa, che corrispondono agli embedding di $SO(3)$ in $SO(2N + 1)$ della forma

$$\vec{S} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & iv_3 & -iv_2 \\ \cdots & -iv_3 & 0 & iv_1 \\ \cdots & iv_2 & -iv_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Con questi embedding si possono costruire altri N monopoli indipendenti dai precedenti. Tutti insieme questi monopoli formano una rappresentazione di

dimensione $\frac{N(N+1)}{2}$ del gruppo duale $\widetilde{U(N)}$, che dovrebbe corrispondere alla rappresentazione simmetrica di rango 2 del gruppo; è possibile verificarlo in teorie dove la dualità di Montonen-Olive è esatta ed è nota la corrispondenza tra monopoli e bosoni di gauge massivi, come nella teoria $\mathcal{N} = 4$ con lo stesso gruppo di gauge.

Notiamo tuttavia che i monopoli non sembrano trovarsi nella rappresentazione simmetrica del gruppo di color-flavour $U(N)_{C+F}$, ma in una rappresentazione riducibile data dalla somma diretta degli $\frac{N(N-1)}{2}$ monopoli trovati precedentemente, che si trasformano nell'antisimmetrica, e dei nuovi N monopoli che si trasformano nell'antifondamentale. La degenerazione in massa dei monopoli, evidente nella formulazione della simmetria duale di Goddard-Nuyts-Olive, non è invece chiara secondo la simmetria duale di color-flavour: questo implica probabilmente che le trasformazioni duali magnetiche non corrispondono alle trasformazioni di color-flavour e che, se esiste una relazione tra il gruppo duale magnetico e il gruppo duale di color-flavour, questa non è immediatamente individuabile.

I vortici regolari sono gli stessi già costruiti e studiati nel caso precedente di rottura $SO(2N) \rightarrow U(N)$ e le considerazioni sono le stesse. Tuttavia in questo caso la teoria alla scala m non possiede solamente i monopoli corrispondenti ai vortici $(\dots 0, 1, 0 \dots 0, 1, 0 \dots)$, presenti anche nel caso precedente, ma anche altri N monopoli che, per le ragioni topologiche già citate, devono corrispondere alle sorgenti di alcuni vortici. Ricordando il legame tra i numeri di avvolgimento e le cariche dei monopoli, viene naturale pensare ai vortici $(\dots 0, 2, 0 \dots)$, il cui ruolo nelle teorie $SO(2N)$ non era ben chiaro.

La verifica più semplice della corrispondenza tra questi vortici e i monopoli con embedding non minimale è quella fornita dal flux matching. Il flusso del monopolio corrispondente al vortice $(2, 0 \dots)$ lungo la direzione dell' $U(1)$ non rotto si ricava dalla forma asintotica per i campi A_μ e ϕ

$$A_i = \varepsilon_{aij} S^a \frac{r_j}{r^2} \quad \phi = v S^a \frac{r_a}{r} + \sqrt{2}v(H_2 + H_3 + \dots) \quad (2.78)$$

dove S^a sono i generatori del sottogruppo $SO(3)$ che corrisponde all'embedding del monopolio. Da questo si ricava il campo magnetico

$$B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j + i[A_j, A_k]) = -\frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^4} r_i \quad (2.79)$$

e di conseguenza il flusso abeliano

$$F_1 = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \frac{Tr(\phi \vec{B})}{\sqrt{Tr(\phi \phi)}} = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \frac{-2v \frac{\vec{r}}{r^3}}{\sqrt{2N}v^2} = -4\pi \sqrt{\frac{2}{N}} \quad (2.80)$$

Il flusso del vortice è molto simile al caso già visto

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot \frac{Tr(\phi\vec{B})}{\sqrt{Tr(\phi\phi)}} = \frac{Tr(\phi T^0)}{\sqrt{Tr(\phi\phi)}} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}^0) = \quad (2.81) \\ &= \int_{C_\infty} d\vec{l} \cdot \vec{A}^0 = -4\pi\sqrt{\frac{2}{N}} \end{aligned}$$

e come si può vedere i flussi combaciano. Questo tuttavia non è molto indicativo poichè anche i monopoli e i vortici di tipo $(\dots 0, 1, 0 \dots 0, 1, 0 \dots)$ hanno gli stessi flussi.

Per vedere se effettivamente ci sia la corrispondenza che cerchiamo, calcoliamo l'intero flusso non abeliano del monopolio. Il campo magnetico, nella gauge in cui ϕ assume un valore costante e uguale al suo vev, è dato dall'equazione (2.41) e il flusso è quindi dato da

$$F = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = -4\pi S^3 = -4\pi\sqrt{2}H_1 \quad (2.82)$$

mentre quello del vortice è

$$\begin{aligned} F &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_{C_\infty} d\vec{l} \cdot \vec{A} = \quad (2.83) \\ &= 2\pi(2T^1 + 2\frac{1}{\sqrt{3}}T^2 + \dots + 2\sqrt{\frac{2}{k(k+1)}}T^k + \dots - 2\sqrt{\frac{2}{N}}T^0) = -4\pi\sqrt{2}H_1 \end{aligned}$$

che come si può vedere combacia. Questo rappresenta una conferma della relazione tra vortici e monopoli e mostra che l'assegnazione dei vortici ai monopoli corrispondenti è corretta.

Passiamo ai modi nulli dei vortici. Le trasformazioni di color-flavour formano un gruppo $U(N)_{C+F}$ sotto il quale i vortici sembrano trasformarsi sotto due rappresentazioni¹ distinte, allo stesso modo dei monopoli su cui terminano. I vortici con winding $(\dots 0, 1, 0 \dots 0, 1, 0 \dots)$ probabilmente si trasformano secondo la rappresentazione antisimmetrica di rango 2 del gruppo come si è già visto nel caso precedente, mentre i vortici con winding $(\dots 0, 2, 0 \dots)$ terminano su monopoli che sembrano trasformarsi secondo l'antifondamentale e anch'essi si trasformano sotto la stessa rappresentazione. Possiamo scrivere anche per questi vortici un'espressione esplicita in termini del versore n^a nel campo di gauge. Per il vortice $(2, 0 \dots)$ campi sono della forma (2.71)

¹qui e altrove il termine "rappresentazione" è inteso in senso non rigoroso, non si tratta cioè di trasformazioni lineari ma di generiche trasformazioni indotte dal gruppo nello spazio delle configurazioni dei vortici e dei monopoli.

e le condizioni al bordo sono tali che la soluzione abbia $f_1 = f_2 = \dots = f_{N-1}$, e di conseguenza esiste solo una funzione di profilo indipendente. Il campo può allora essere scritto come

$$A_i = \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} f(r) n_{(k)}^a T^a \quad (2.84)$$

dove $n_{(k)}^a = \delta_{ak} \sqrt{\frac{2}{a(a+1)}}$ per la soluzione $(2, 0 \dots)$. Dunque lo spazio dei modi nulli è dato da $\mathbb{C}P^{N-1} = G(1, N; \mathbb{C})$, come ci si poteva aspettare osservando che le invarianze della soluzione formano un gruppo $U(1) \times U(N-1)$ e quindi lo spazio delle configurazioni dei vortici è

$$\frac{U(N)}{U(N-1) \times U(1)} \sim G(1, N; \mathbb{C}) = \mathbb{C}P^{N-1} \quad (2.85)$$

Questo implica che i modi nulli per i due tipi di vortici sono separati, cioè che lo spazio delle configurazioni indipendenti dei vortici è disconnesso, e che così come accade tra i monopoli non è possibile interpolare con queste trasformazioni i vortici che si trasformano secondo diverse rappresentazioni. I modelli sigma vanno studiati separatamente per i due tipi di vortici. É possibile che esistano altre trasformazioni non ancora individuate che legano i due insiemi sconnessi di configurazioni, permettendo di porre tutti i vortici (e i monopoli corrispondenti) in un unico multipletto, così come accade con il gruppo duale di GNO.

2.5 $SO(2N + 2) \rightarrow SO(2N) \times U(1)$

Questa rottura deriva da un valore d'aspettazione nel vuoto del campo ϕ della forma

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iv & 0 & \cdots & 0 \\ -iv & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

e sembra possibile ripetere l'analisi del caso precedente anche a questa rottura. Tuttavia non è possibile rompere ulteriormente il gruppo di bassa energia $SO(2N)$ residuo se i campi di materia si trasformano nella fondamentale: infatti le equazioni del vuoto (2.4), (2.5)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\phi^{aA}q^A + m_A q^A &= 0 \\ \sqrt{2}\bar{\phi}^{aA}\bar{q}^A + m_A \bar{q}^A &= 0 \end{aligned}$$

impongono che le componenti degli squark cariche sotto questo gruppo abbiano valore di aspettazione nullo nel vuoto, e di conseguenza non si può avere la completa rottura del gruppo di gauge necessaria per trovare i vortici.

Si può tuttavia modificare la teoria considerando rappresentazioni diverse dalla fondamentale associate ai campi di materia. Ad esempio, possiamo considerare la teoria definita dalla Lagrangiana usuale dove però la rappresentazione dei campi di materia t^a è l'aggiunta di $SO(2N + 2)$, e i campi di materia sono N_f multipletti $\mathcal{N} = 2$. La teoria ha una β -function positiva per $N_f > 1$ ed è quindi infrared free, mentre per $N_f = 1$ è una teoria $\mathcal{N} = 2^*$ conforme. Studiamo questa teoria nelle prossime sezioni.

2.5.1 Moduli space, vuoti e simmetrie di color-flavour

Le equazioni del vuoto assumono la forma

$$[\phi, \phi^\dagger] = 0 \quad (2.87)$$

$$\sum_A [q_A, \bar{q}_A] = \sum_A [\bar{\tilde{q}}_A, \tilde{q}_A] \quad (2.88)$$

$$\sum_A \sqrt{2} [q_A, \tilde{q}_A] + \mu\phi = 0 \quad (2.89)$$

$$\sqrt{2} [\phi, q_A] + m q_A = 0 \quad (2.90)$$

$$-\sqrt{2} [\phi, \tilde{q}_A] + m \tilde{q}_A = 0 \quad (2.91)$$

dove μ è la massa del campo ϕ e m è la massa comune degli squark.

Le equazioni (2.90), (2.91) si possono riscrivere come

$$\left[\frac{\sqrt{2}\phi}{m}, q_A \right] = -q_A \quad (2.92)$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}\phi}{m}, \tilde{q}_A \right] = \tilde{q}_A \quad (2.93)$$

Queste equazioni implicano che q_A e \tilde{q}_A agiscono come operatori di salita e discesa per $\frac{\sqrt{2}\phi}{m}$. La normalizzazione per la forma (2.86) di ϕ impone allora che $\frac{\sqrt{2}v}{m} = \pm 1$, e con una scelta di gauge opportuna possiamo considerare v positivo e uguale a $v = \frac{m}{\sqrt{2}}$; in questa gauge i q_A sono proporzionali a operatori di discesa e i \tilde{q}_A a operatori di salita per il vev di ϕ . In particolare, scegliendo la base di Cartan di $SO(2N+2)$ con $H'_1, H'_2 \dots H'_{N+1}$ generatori della sottoalgebra di Cartan

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

si vede che H'_i e H'_j con $i < j$ identificano un sottogruppo $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ di $SO(2N)$ per il quale $H'_i = S_z^{ij} + \hat{S}_z^{ij}$ e $H'_j = S_z^{ij} - \hat{S}_z^{ij}$; possiamo scegliere ora come generatori del complemento alla sottoalgebra di Cartan gli operatori di salita e discesa S_+^{ij}, \hat{S}_+^{ij} e S_-^{ij}, \hat{S}_-^{ij} le cui relazioni di commutazione sono quelle caratteristiche della base di Cartan. Considerando che $\frac{\sqrt{2}\phi}{m} = H'_1$, i generatori che non commutano con H'_1 sono S_+^{1j}, \hat{S}_+^{1j} tra gli operatori di salita e S_-^{1j}, \hat{S}_-^{1j} tra gli operatori di discesa, e possiamo quindi scrivere q_A e \tilde{q}_A come

$$q_A = \sum_j c_j^A S_-^{1j} + \sum_j d_j^A \hat{S}_-^{1j} \quad (2.94)$$

$$\tilde{q}_A = \sum_j \tilde{c}_j^A S_+^{1j} + \sum_j \tilde{d}_j^A \hat{S}_+^{1j} \quad (2.95)$$

Le condizioni sui coefficienti c_j^A e d_j^A sono date dalle equazioni (2.88), (2.89):

$$\sum_A \sum_j c_j^A \tilde{c}_j^A = \sum_A \sum_j d_j^A \tilde{d}_j^A = \frac{\mu m}{4} \quad (2.96)$$

$$\sum_A c_i^A \tilde{c}_j^A + \sum_A d_j^A \tilde{d}_i^A = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.97)$$

$$\sum_A c_i^A \tilde{d}_j^A = \sum_A d_i^A \tilde{c}_j^A = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.98)$$

$$\sum_A |c_j^A|^2 = \sum_A |\tilde{c}_j^A|^2 \quad (2.99)$$

$$\sum_A |d_j^A|^2 = \sum_A |\tilde{d}_j^A|^2 \quad (2.100)$$

$$\sum_A c_i^A \tilde{c}_j^A + \sum_A d_j^A \tilde{d}_i^A = \sum_A \tilde{c}_i^A \tilde{c}_j^A + \sum_A \tilde{d}_j^A \tilde{d}_i^A \quad (i \neq j) \quad (2.101)$$

$$\sum_A c_i^A \tilde{d}_j^A = \sum_A \tilde{c}_i^A \tilde{d}_j^A \quad (i \neq j) \quad (2.102)$$

$$\sum_A d_i^A \tilde{c}_j^A = \sum_A \tilde{d}_i^A \tilde{c}_j^A \quad (i \neq j) \quad (2.103)$$

Queste condizioni identificano il moduli space della teoria una volta fissata la rottura data dal vev di ϕ .

Per trovare i vuoti interessanti, consideriamo prima il caso di N_f masse generiche $m_1, m_2 \dots m_{N_f}$ per gli squark, prendendo in seguito il limite in cui tutte le masse risultano uguali, e cerchiamo una rottura massimale a $U(1)^{N+1}$. In questo caso il vev di ϕ ha la forma generica

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iv_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -iv_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & iv_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -iv_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iv_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iv_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene che $v_i \pm v_j = \frac{m_A}{\sqrt{2}}$ se c_A^{ij} o $d_A^{ij} \neq 0$. Per riottenere la rottura a $SO(2N) \times U(1)$ occorre che nel limite di masse uguali $v_2, \dots v_{N+1} \rightarrow 0$, e dunque ritroviamo le forme (2.94), (2.95) per i vev. Nel caso più semplice si ha che $v_1 + v_j = \frac{m_A}{\sqrt{2}}$ con $q_A = c_A^{1j} S_-^{1j}$ e $\tilde{q}_A = \tilde{c}_A^{1j} S_+^{1j}$, o che $v_1 - v_j = \frac{m_A}{\sqrt{2}}$ con $q_A = d_A^{1j} \hat{S}_-^{1j}$ e $\tilde{q}_A = \tilde{d}_A^{1j} \hat{S}_+^{1j}$. Nel caso particolare che $v_j = 0$ si può anche avere $v_1 = \frac{m_A}{\sqrt{2}}$ con $q_A = c_A^{1j} S_-^{1j} + d_A^{1j} \hat{S}_-^{1j}$ e $\tilde{q}_A = \tilde{c}_A^{1j} S_+^{1j} + \tilde{d}_A^{1j} \hat{S}_+^{1j}$.

Si può notare che per avere una completa rottura di $SO(2N + 2)$ in questo modo occorrono almeno $N_f = N$ flavour: gli autovalori del vev di ϕ sono legati alle masse da

$$v_1 = \frac{m_1}{\sqrt{2}} \quad v_k = \frac{m_k - m_1}{\sqrt{2}}, k \neq 1 \quad (2.104)$$

e i corrispondenti vev degli squark sono della forma

$$q_1 = c_1^{12} S_-^{12} + d_1^{12} \hat{S}_-^{12} \quad (2.105)$$

$$q_k = c_k^{1(k+1)} S_-^{1(k+1)} \quad (2.106)$$

Tuttavia questa rottura, pur essendo minimale e con masse generiche, non appare abbastanza simmetrica.

Cerchiamo una rottura di $SO(2N + 2)$ a $U(1)^{N+1}$ con elevata simmetria: per questo occorre che ci siano almeno $N_f = 2N$ flavour. Possiamo prendere come insieme di vev minimali

$$q_A = c_A S_-^A \quad (2.107)$$

$$\hat{q}_A = d_A \hat{S}_-^A \quad (2.108)$$

$$\tilde{q}_A = \tilde{c}_A S_-^A \quad (2.109)$$

$$\tilde{\hat{q}}_A = \tilde{d}_A \hat{S}_-^A \quad (2.110)$$

dove $A = 1 \dots N$ e dove abbiamo ridefinito $S^{1(A+1)}$ come S^A . Le masse m_A e \hat{m}_A sono vincolate da $m_A = \sqrt{2}(v_1 + v_{A+1})$ e $\hat{m}_A = \sqrt{2}(v_1 - v_{A+1})$ e di conseguenza

$$m_A + \hat{m}_A = 2\sqrt{2}v_1 \quad \forall A \quad (2.111)$$

Una rottura di questo genere è quindi possibile solo in presenza di masse non completamente generiche. Il vev di ϕ è dato da v_1 che soddisfa la condizione (2.111) e da $v_{A+1} = \frac{m_A - \hat{m}_A}{2\sqrt{2}}$; di conseguenza ϕ ha genericamente $N + 1$ autovalori distinti in modulo, per cui si ha una rottura a $U(1)^{N+1}$.

Consideriamo ora il caso di masse uguali $m_1 = \dots = m_N = \hat{m}_1 = \dots = \hat{m}_N = m$ e cerchiamo vuoti con elevata simmetria. La scelta naturale è $c_A = d_A = \tilde{c}_A = \tilde{d}_A = c$, che soddisfa le equazioni (2.88) e (2.89) se $c = \sqrt{\frac{um}{4N}}$. Per capire meglio come il gruppo di gauge non rotto agisce su questi vev, prendiamo come base gli operatori di salita e discesa $L_+^{(i)}, L_-^{(i)}$ dei sottogruppi $SO(3)$ rotti completamente dal vev, che corrispondono a considerare l'(i+2)-

esima riga e colonna

$$L_+^{(i)} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & i & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -1 & -i & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad L_-^{(i)} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & i & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & -i & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

e che costituiscono multipletti della fondamentale di $SO(2N)$ con cariche $U(1)$ opposte per gli operatori di salita e discesa. Possiamo riscrivere i vev di q e \tilde{q} in questa base usando le relazioni

$$S_-^A + \hat{S}_-^A = L_-^{(2A-1)} \quad , \quad S_-^A - \hat{S}_-^A = -iL_-^{(2A)}$$

ottenendo le matrici² $2N \times 2N$

$$q = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ -i & i & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & -i & i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{2}} U \quad \tilde{q} = \frac{c}{\sqrt{2}} \bar{U} \quad (2.112)$$

dove U è una matrice unitaria. Il gruppo di gauge agisce sulle righe come su una rappresentazione fondamentale, mentre il gruppo di flavour agisce sulle colonne.

Si può notare che il vev rimane invariato agendo con una generica trasformazione di gauge globale R di $SO(2N)_C$ e contemporaneamente con una trasformazione di flavour $U^T R \bar{U}$ appartenente a $U(2N)_F$. In questo modo si ottiene una simmetria $SO(2N)_{C+F}$ sotto la quale il vuoto è invariante. È possibile cambiare la base del flavour in modo da esplicitare il fatto che questo vev è color-flavour locked; è sufficiente ruotare q con una trasformazione \bar{U} di flavour per ottenere un vev multiplo dell'identità, che corrisponde alla scelta

$$q_A = \frac{c}{\sqrt{2}} L_-^{(2A-1)} \quad (2.113)$$

$$\hat{q}_A = \frac{c}{\sqrt{2}} L_-^{(2A)} \quad (2.114)$$

$$\tilde{q}_A = \frac{c}{\sqrt{2}} L_+^{(2A-1)} \quad (2.115)$$

$$\tilde{\hat{q}}_A = \frac{c}{\sqrt{2}} L_+^{(2A)} \quad (2.116)$$

²ogni colonna corrisponde a un flavour, e le righe agli indici di colore.

2.5.2 Monopoli

Sfruttando gli N sottogruppi $SO(4)$ rotti dal vev di ϕ si possono costruire $2N$ monopoli, uno con S e uno con \hat{S} per ciascun sottogruppo, che costituiscono un multipletto fondamentale del gruppo duale $SO(2N)$.

2.5.3 Vortici

L'ansatz naturale per i vortici è

$$q = \tilde{q} \quad (2.117)$$

e l'ansatz per la forma dei vortici è simile a quelli già visti in precedenza e corrisponde a rotazioni di gauge con avvolgimenti n_1, n_2, n_3, \dots attorno alla sottoalgebra di Cartan della parte non abeliana del gruppo di gauge che a queste scale non è rotto:

$$q = \begin{pmatrix} e^{in_1\vartheta}\varphi_1(r) & e^{-in_1\vartheta}\hat{\varphi}_1(r) & 0 & 0 & \dots \\ -ie^{in_1\vartheta}\varphi_1(r) & ie^{-in_1\vartheta}\hat{\varphi}_1(r) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{in_2\vartheta}\phi_2(r) & e^{-in_2\vartheta}\hat{\phi}_2(r) & \dots \\ 0 & 0 & -ie^{in_2\vartheta}\phi_2(r) & ie^{-in_2\vartheta}\hat{\phi}_2(r) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

Possiamo scrivere la Lagrangiana di bassa energia tenendo conto dell'ansatz (2.117) e ridefinendo $q \rightarrow \frac{q}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g_1^2} F^{0\mu\nu} F_{\mu\nu}^0 - \frac{1}{4g_{2N}^2} F^{b\mu\nu} F_{\mu\nu}^b + \\ & + \mathcal{D}_\mu \bar{q}_{kA} \mathcal{D}^\mu q^{kA} + \\ & - \frac{g_1^2}{4} |\tilde{q}_A q^A - 2\mu m|^2 - \frac{g_{2N}^2}{2} |\tilde{q}_A t^b q^A|^2 \end{aligned} \quad (2.119)$$

dove con q_A si intendono sia q che \hat{q} . Ci aspettiamo che l'argomento per cui al primo ordine in μ si trovi un termine di Fayet-Iliopoulos che non rompe la supersimmetria $\mathcal{N} = 2$ funzioni anche in questa teoria; in tal caso sembra evidente la possibilità di scrivere la tensione in forma di Bogomolny

$$\begin{aligned} T = & \int d^2x \left\{ \left[\frac{1}{2g_{2N}} F_{ij}^b \pm \frac{g_{2N}}{2} \varepsilon_{ij} \bar{q}_A t^b q^A \right]^2 + \right. \\ & + \left[\frac{1}{2g_1} F_{ij}^0 \mp \frac{g_1}{2\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} (\bar{q}_A q^A - \xi) \right]^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} |\mathcal{D}_i q^A \pm i\varepsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^A|^2 \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} F^0 \xi \right\} \end{aligned} \quad (2.120)$$

dove $\xi = 2\mu m$. Anche in questo caso solo il termine $U(1)$ appare nella carica centrale e stabilizza il vortice. Possiamo ora scrivere le equazioni di Bogomolny per questi vortici

$$\frac{1}{2g_{2N}}F_{ij}^b + \delta\frac{g_{2N}}{2}\varepsilon_{ij}\bar{q}_A t^b q^A = 0 \quad (2.121)$$

$$\frac{1}{2g_1}F_{ij}^0 - \delta\frac{g_1}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}(\bar{q}_A q^A - \xi) = 0 \quad (2.122)$$

$$\mathcal{D}_i q^A + \delta i \varepsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^A = 0 \quad (2.123)$$

Anche in questo caso, visto che $\pi_1(SO(2N+2)) = \mathbb{Z}_2$, abbiamo vortici che finiscono su monopoli singolari quando la somma dei numeri di winding è dispari, e pertanto i vortici non singolari BPS di minima tensione sono classificati dai numeri di winding pari.

Tuttavia esistono delle complicazioni: per qualunque scelta di n_1 diversa da zero, ad esempio, una delle funzioni di profilo φ_1 o $\hat{\varphi}_1$ è singolare nell'origine, dato che si ha $\varphi_1 \sim r^{n_1\delta}$ e $\hat{\varphi}_1 \sim r^{-n_1\delta}$ analogamente a quanto avviene per (2.34). Ne consegue che qualunque vortice basato sull'ansatz (2.118) è singolare, poichè almeno uno degli n_i deve essere non nullo e una delle funzioni di profilo associate sarà singolare. Di conseguenza l'ansatz (2.118) non è una buona scelta per la costruzione di vortici regolari BPS.

La ragione di queste singolarità è che gli avvolgimenti scelti coinvolgono solo la parte non abeliana del gruppo $SO(2N) \times U(1)$, e quindi non sono in realtà stabili. La soluzione è aggiungere agli avvolgimenti dell'ansatz (2.118) un certo numero n_0 di winding attorno a $U(1)$ che diano stabilità al vortice. In questo senso l'ansatz si può modificare con

$$q = \begin{pmatrix} e^{i(n_0+n_1)\vartheta}\varphi_1(r) & e^{i(n_0-n_1)\vartheta}\hat{\varphi}_1(r) & 0 & 0 & \dots \\ -ie^{i(n_0+n_1)\vartheta}\varphi_1(r) & ie^{i(n_0-n_1)\vartheta}\hat{\varphi}_1(r) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{i(n_0+n_2)\vartheta}\varphi_2(r) & e^{i(n_0-n_2)\vartheta}\hat{\varphi}_2(r) & \dots \\ 0 & 0 & -ie^{i(n_0+n_2)\vartheta}\varphi_2(r) & ie^{i(n_0-n_2)\vartheta}\hat{\varphi}_2(r) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

Si vede che se $|n_0| \geq |n_i|$ per $i = 1, \dots, N$ tutte le funzioni di profilo possono essere regolari; l'altra condizione che devono soddisfare è rappresentata dal segno del flusso δ , che deve essere scelto uguale al segno di n_0 affinché le soluzioni siano non singolari.

I vortici, considerando questo nuovo ansatz, sono classificati da $\vec{n} = (n_0, n_1, n_2, \dots)$ e per essere banali rispetto a \mathbb{Z}_2 devono avere la somma $(n_0 + n_1 + n_2 + \dots)$ pari. La tensione dei vortici è data dalla formula

$$T = \left| \int d^2x \frac{1}{2\sqrt{2}} F^0 \xi \right| = 2\pi\xi |n_0| \quad (2.125)$$

e quindi apparentemente esiste una famiglia infinita di vortici minimali con $n_0 = 1$ e la somma $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots)$ dispari; tuttavia chiaramente solo alcuni di questi vortici avranno come sorgenti i monopoli minimali. Questi vortici sembrano corrispondere ai numeri di avvolgimento $(1, \pm 1, 0, 0, \dots)$, $(1, 0, \pm 1, 0, \dots)$, $(1, 0, 0, \pm 1, \dots)$ e così via; sono infatti gli unici vortici non singolari, data la condizione $|n_0| \geq |n_i|$.

L'ansatz per gli squark impone anche la forma dei campi di gauge all'infinito, che è data dall'equazione (2.22):

$$A_i^a = -\sqrt{2}\varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} (n_a - f_a(r)) \quad (2.126)$$

$$A_i^0 = \sqrt{2}\varepsilon_{ij} \frac{r_j}{r^2} (n_0 - f_0(r)) \quad (2.127)$$

con le condizioni al contorno usuali $f_i(\infty) = 0$, $f_i(0) = n_i$.

2.5.4 Flux matching

Per verificare la corrispondenza tra vortici e monopoli controlliamo la corrispondenza dei flussi del vortice e del monopolo classificati da $(1, 1, 0, \dots)$. A grande distanza la forma asintotica per i campi A_μ e ϕ vale

$$A_i = \varepsilon_{aij} S^a \frac{r_j}{r^2} \quad \phi = v S^a \frac{r_a}{r} + v \hat{S}_3 \quad (2.128)$$

e il flusso abeliano vale

$$F_1 = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \frac{\text{Tr}(\phi \vec{B})}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -2\pi\sqrt{2} \quad (2.129)$$

Per il vortice invece abbiamo il flusso

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot \frac{\text{Tr}(\phi \vec{B})}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} = \frac{\text{Tr}(\phi H_0)}{\sqrt{\text{Tr}(\phi\phi)}} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}^0) = \\ &= \int_{C_\infty} d\vec{l} \cdot \vec{A}^0 = -2\pi\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.130)$$

per cui anche in questa teoria ogni monopolo è sorgente di un solo vortice.

Calcoliamo anche il flusso non abeliano del monopolo nella gauge in cui vale l'equazione (2.41)

$$F = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = -4\pi S^3 \quad (2.131)$$

e quello del vortice nella stessa gauge

$$\begin{aligned} F &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_{C_\infty} d\vec{l} \cdot \vec{A} = \\ &= 2\pi(-\sqrt{2}H_0 + \sqrt{2}H_1) = -4\pi S^3 \end{aligned} \quad (2.132)$$

per cui anche in questo caso esiste una corrispondenza ben verificata.

2.5.5 Modi nulli dei vortici

Le trasformazioni di color-flavour $SO(2N)_{C+F}$ interpolano tra loro sia i vortici che i monopoli minimali. Le soluzioni dei vortici BPS in questa teoria hanno solamente due funzioni di profilo indipendenti oltre a f_0 : il vortice $(1, 1, 0 \dots)$, ad esempio, ha solamente f_1 e $f_2 = f_3 = \dots = f_N$. La soluzione del vortice ammette quindi come gruppo di invarianza $O(2) \times O(2N - 2)$. Le configurazioni indipendenti sono quindi classificate dal quoziente

$$\frac{O(N)}{O(2) \times O(2N - 2)} \sim G(2, 2N; \mathbb{R}) \quad (2.133)$$

e quindi ci attendiamo che la teoria di bassa energia per i modi nulli sul worldsheet sia un modello sigma su una Grassmanniana reale.

2.6 $SO(2N + 3) \rightarrow SO(2N + 1) \times U(1)$

Anche in questo caso non è possibile rompere completamente il gruppo di gauge se la teoria presenta i campi di materia nella fondamentale. Invece di ricorrere a campi di materia in aggiunta, che in questo caso darebbero risultati molto simili al caso precedente, cerchiamo di vedere se è possibile cambiare il tipo di rottura di supersimmetria $\mathcal{N} = 2$, ch equivale a trovare termini rinormalizzabili, invarianti di gauge e supersimmetrici da aggiungere al superpotenziale della Lagrangiana, che contiene già tutti i termini di questo tipo compatibili con la simmetria $\mathcal{N} = 2$. Per un gruppo di gauge generico è impossibile trovare termini del genere, poichè i termini a due supercampi invarianti di gauge devono avere o un campo nella fondamentale, e uno nell'antifondamentale, o entrambi nell'aggiunta, mentre i termini a tre campi devono necessariamente avere un campo nella fondamentale, uno nell'antifondamentale e uno nell'aggiunta, e queste richieste assieme all'olomorfia limitano i termini a quelli già presenti.

Tuttavia nel caso particolare di $SO(N)$ è possibile sfruttare il fatto che la rappresentazione fondamentale è autoconiugata e rompere la simmetria di gauge se si modifica il superpotenziale con un termine di rottura a $\mathcal{N} = 1$, quadratico nei campi di materia:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{M_A}{2}(Q_A Q_A + \tilde{Q}_A \tilde{Q}_A) + c.c. \quad (2.134)$$

Fissiamo $m_2 = \dots = m_{N_f} = m = M_2 = \dots = M_{N_f}$ mentre $M_1 = 0$, e studiamo la teoria con questa modifica.

Il vev di ϕ per la rottura che ci interessa è

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iv & & & \\ -iv & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

Le equazioni del vuoto modificate sono

$$[\phi, \phi^\dagger] = 0 \quad (2.136)$$

$$\bar{q}_A t^a q_A = \tilde{q}_A t^a \tilde{\bar{q}}_A \quad (2.137)$$

$$\sqrt{2}\tilde{q}_A t^a q_A + \mu\phi^a = 0 \quad (2.138)$$

$$\sqrt{2}\phi t^a q_A + m q_A + m\tilde{q}_A = 0 \quad (2.139)$$

$$-\sqrt{2}\phi t^a \tilde{q}_A + m\tilde{q}_A + m q_A = 0 \quad (2.140)$$

e di conseguenza possiamo avere una rottura $SO(2N + 3) \rightarrow SO(2N + 1) \times U(1)$ dove il settore bosonico $U(1)$ e il settore bosonico $SO(2N + 1)$ sono indipendenti a bassa energia. Il settore $U(1)$ contiene due gradi di libertà massless p e \tilde{p} dati da

$$q = \frac{p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ i & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \tilde{q} = \frac{\tilde{p}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ i & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e inoltre determina la relazione tra il vev di ϕ e le masse $v = \frac{m_1}{\sqrt{2}}$. Il settore $SO(2N + 1)$ contiene diversi gradi di libertà massless a bassa energia: infatti le ultime due equazioni implicano $q_A = -\tilde{q}_A$ come condizione per campi massless. La terza equazione è automaticamente verificata, mentre la seconda è equivalente a imporre $\bar{q}_A t^a q_A = 0$, cioè $\Im(\bar{q}_{Ai} q_{Aj}) = 0$. Di conseguenza il moduli space è costituito dai q tali che $\Im(\bar{q}_{Ai} q_{Aj}) = 0$ ed è molto ampio considerando che i gradi di libertà sono $2(N_f - 1)(2N + 1)$, dove $N_f = 2N + 2$ per il caso che interessa a noi, mentre le condizioni sono al più $N(2N + 1)$.

Prendiamo in considerazione i vuoti invarianti sotto una simmetria di color-flavour $SO(2N + 1)_{C+F}$: la forma del vev degli squark che li realizza è

$$q = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \cdots \\ -id & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & v & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & v & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.141)$$

dove tuttavia la scala di rottura d è dell'ordine di $\sqrt{\mu m}$, mentre la scala di rottura di $SO(2N + 1)$ v non è determinata dalle costanti della teoria: qualunque v rientra nel moduli space. Per la nostra analisi scegliamo $v \ll m$ in modo che a scale intermedie $SO(2N + 1)$ non sia rotto.

Come si può vedere chiaramente, la Lagrangiana di bassa energia si separa in due parti non comunicanti: il settore $U(1)$, in cui si può costruire un vortice BPS abeliano usuale, e il settore $SO(2N + 1)$, in cui si possono costruire vortici \mathbb{Z}_2 in assenza peraltro di un potenziale. L'ansatz per i vortici è

$$q = \begin{pmatrix} \varphi_0(r) e^{in_0 \vartheta} & 0 & 0 & \cdots \\ -i\varphi_0(r) e^{in_0 \vartheta} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cos(n_1 \vartheta) \varphi_1(r) & \sin(n_1 \vartheta) \varphi_1(r) & \cdots \\ 0 & -\sin(n_1 \vartheta) \varphi_1(r) & \cos(n_1 \vartheta) \varphi_1(r) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

mentre per i campi di gauge si ha $A_g^a = p_a(r)$. Le equazioni del moto per le funzioni di profilo del vortice nel caso $n_1 = 1$, $n_i = 0$ per $i \neq 1$ sono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} - \frac{p}{r^2} + k \left(\frac{1}{r} - p \right) f^2 &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left(\frac{1}{r} - p \right)^2 f &= 0 \end{aligned} \quad (2.143)$$

dove f è la funzione di profilo di ϕ e $k = 24v^2 g_{2N+1}^2$. Queste equazioni corrispondono a quelle di un vortice \mathbb{Z}_2 in assenza di potenziale [16]. In questo caso i vortici sono classificati dai winding number $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ relativi rispettivamente a $U(1)$ e a $SO(2N+1)$. I vortici stabili minimali corrispondenti ai monopoli hanno numeri di winding $(1, \pm 1)$, ma non è chiaro se siano singolari o no.

È possibile che alcuni di questi vortici abbiano i giusti numeri quantici per terminare su qualcuno dei monopoli della teoria; tuttavia si nota dal tipo di vuoto e dalla mancanza di stati BPS che la rottura a $\mathcal{N} = 2$ distorce profondamente le proprietà della teoria, a differenza della massa del campo scalare in aggiunta che rappresenta una rottura che alza leggermente il potenziale nello spazio dei moduli senza alterare sensibilmente i vuoti e le proprietà di teorie $\mathcal{N} = 2$. D'altra parte, per ottenere i vuoti con color-flavour locking, il parametro di rottura a $\mathcal{N} = 1$ è posto uguale alla massa degli squark, per cui nel limite di supersimmetria $\mathcal{N} = 2$ non rotta la teoria contiene campi massless nel settore di materia che possono causare problemi nell'interpretare il limite.

La teoria, nonostante questi problemi, presenta anche aspetti interessanti, in particolare se si confronta questa teoria con quella che si ottiene modificando il superpotenziale della teoria con gruppo di gauge $SO(2N+2) \rightarrow SO(2N) \times U(1)$ con il termine (2.134). La base di monopoli minimali indipendenti che si può costruire è infatti identica nelle due teorie, mentre il gruppo duale secondo il quale si trasformano è differente: in questo caso è $\widetilde{USp(2N)}$, mentre nel caso $SO(2N+2) \rightarrow SO(2N) \times U(1)$ abbiamo visto che si tratta di $\widetilde{SO(2N)}$. Se c'è una relazione tra i gruppi di trasformazioni di color-flavour e i gruppi duali, si dovrebbero osservare nelle due teorie differenze riguardanti l'azione dei gruppi di color-flavour sui monopoli.

Esaminando i due casi più semplici, $SO(6) \rightarrow SO(4) \times U(1)$ e $SO(7) \rightarrow SO(5) \times U(1)$, notiamo che nel secondo caso è possibile scambiare tra loro con trasformazioni di color-flavour due monopoli qualunque tra i quattro minimali indipendenti senza modificare gli altri due, mentre nel primo caso non è possibile. Infatti i $2N$ monopoli presenti sono per metà costruiti usando i generatori $S_a^{(i)}$ dell' i -esimo sottogruppo indipendente $SO(4)$ rotto e per metà

usando $\hat{S}_a^{(i)}$; scambiare il monopolio in $S^{(2)}$ con quello in $\hat{S}^{(2)}$ è possibile nel secondo caso attraverso la trasformazione

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

che lascia invariate le altre soluzioni, mentre nel primo caso è possibile solo con la trasformazione

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

che scambia anche gli altri due monopoli. Questo accade in generale e potrebbe essere legato alle differenze tra $\widetilde{SO}(2N)$ e $\widetilde{USp}(2N)$, anche se allo stato attuale della nostra conoscenza è poco più che un indizio.

che corrisponde a un pattern di rottura

$$USp(2N + 2) \longrightarrow USp(2N) \times U(1) \quad (2.149)$$

Questo caso è interessante poichè il gruppo duale è $SO(\widetilde{2N + 1})$, ben diverso da $USp(2N)$. Anche in questo caso non è tuttavia possibile rompere completamente il gruppo di gauge in teorie con squark nella fondamentale, e bisogna modificare le rappresentazioni o il superpotenziale come nel caso $SO(M + 2) \rightarrow SO(M) \times U(1)$. In entrambi i casi si trova un gruppo $USp(2N)_{C+F}$, ed entrambi presentano problemi, poichè dei $2N + 1$ monopoli minimali che si possono costruire con questa rottura ne esiste uno che rimane invariato sotto trasformazioni di $USp(2N)_{C+F}$: di conseguenza si ripresentano i problemi di interpretazione di questo gruppo di color-flavour, legati al fatto che lo spazio delle configurazioni dei monopoli e vortici minimali è disconnesso e già incontrati per il caso $SO(2N + 1) \rightarrow U(N)$.

Capitolo 3

Conclusioni

In questa tesi abbiamo iniziato ad approfondire lo studio delle configurazioni di minima tensione dei vortici non abeliani in teorie con gruppi di gauge diversi da $SU(N)$. In particolare la nostra attenzione è stata concentrata sul ruolo del gruppo duale di colore e sapore¹ e sul suo legame con i modi nulli dei vortici e dei monopoli. Abbiamo osservato che in tutte le teorie esaminate le configurazioni realmente presenti sono costituite da un monopolio e un antimonopolo legati da un vortice, e che quindi esiste una relazione stretta tra le configurazioni minimali di monopolio e le configurazioni minimali di vortice. Notiamo anche che è necessario trasformare contemporaneamente vortici e monopoli sotto il gruppo duale per trovare i modi nulli del sistema, e che quindi il gruppo duale individuato nella teoria di bassa energia agisce anche in maniera non banale sui monopoli.

Abbiamo costruito per vari pattern di rottura i vuoti che presentano questa simmetria di color-flavour, abbiamo costruito alcune configurazioni dei vortici minimali e abbiamo mostrato esplicitamente la corrispondenza con i monopoli minimali esistenti nelle teorie. Abbiamo visto che il gruppo di color-flavour applicato alle soluzioni dei vortici genera una successione continua di configurazioni che interpolano tra quelle iniziali e abbiamo ricavato lo spazio delle configurazioni nei vari casi.

Le conclusioni per alcuni casi sono incoraggianti: le trasformazioni di color-flavour interpolano tra tutti i vortici e i monopoli minimali della teoria, orientando il flusso dei vortici in qualunque direzione all'interno del gruppo di gauge. Il fatto che questa simmetria di color-flavour non sia rotta spontaneamente e interpoli tra i vari vortici implica una degenerazione esatta anche quantisticamente in tensione; questa è una condizione sufficiente per l'esistenza di giunzioni di stringa, che sono state studiate di recente[15][23]

¹Notare che storicamente gruppi di simmetria di questo genere sono stati studiati all'interno di alcuni modelli negli anni '70 da Bardakci e Halpern[6].

proprio nella teoria con gruppo di gauge $SU(N)$ e che rappresentano una linea di ricerca promettente che ha già avuto buoni risultati con la spiegazione di corrispondenze tra modelli sigma $\mathcal{N} = 2$ bidimensionali e teorie di Seiberg-Witten e con l'individuazione di anomalie nella carica centrale di monopoli in queste teorie. La base di questi lavori è l'identificazione dei solitoni nei modelli sigma corrispondenti ai modi nulli di orientazione dei vortici con i monopoli confinati in regime altamente quantistico all'interno dei vortici.

L'aspetto meno incoraggiante è la difficoltà di costruire in altri casi un gruppo che interpoli tra tutte le configurazioni minimali di vortici e monopoli. Se lo spazio delle configurazioni rimane disconnesso, probabilmente il gruppo duale di color-flavour non corrisponde esattamente al gruppo duale secondo Goddard-Nuyts-Olive e rimangono da trovare le trasformazioni che interpolano tra le parti sconnesse.

Bibliografia

- [1] A. A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, 5:1174–1182, 1957.
- [2] P. C. Argyres, M. R. Plesser, and N. Seiberg. The moduli space of N=2 SUSY QCD and duality in N=1 SUSY QCD. *Nucl. Phys.*, B471:159–194, 1996.
- [3] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, and K. Konishi. Nonabelian monopoles and the vortices that confine them. *Nucl. Phys.*, B686:119–134, 2004.
- [4] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi, and H. Murayama. Nonabelian monopoles. 2004.
- [5] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi, and A. Yung. Nonabelian superconductors: Vortices and confinement in N = 2 SQCD. *Nucl. Phys.*, B673:187–216, 2003.
- [6] K. Bardakci and M. B. Halpern. Spontaneous breakdown and hadronic symmetries. *Phys. Rev.*, D6:696–701, 1972.
- [7] S. Bolognesi and K. Konishi. Non-abelian magnetic monopoles and dynamics of confinement. *Nucl. Phys.*, B645:337–348, 2002.
- [8] G. Carlino, K. Konishi, S. P. Kumar, and H. Murayama. Vacuum structure and flavor symmetry breaking in supersymmetric SO(N) gauge theories. *Nucl. Phys.*, B608:51–102, 2001.
- [9] G. Carlino, K. Konishi, and H. Murayama. Dynamical symmetry breaking in supersymmetric SU(N) and USp(2N) gauge theories. *Nucl. Phys.*, B590:37–122, 2000.
- [10] P. A. M. Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A133:60–72, 1931.

- [11] P. Goddard, J. Nuyts, and D. I. Olive. Gauge theories and magnetic charge. *Nucl. Phys.*, B125:1, 1977.
- [12] P. Goddard and D. I. Olive. New developments in the theory of magnetic monopoles. *Rept. Prog. Phys.*, 41:1357, 1978.
- [13] A. Hanany, M. J. Strassler, and A. Zaffaroni. Confinement and strings in MQCD. *Nucl. Phys.*, B513:87–118, 1998.
- [14] A. Hanany and D. Tong. Vortices, instantons and branes. *JHEP*, 07:037, 2003.
- [15] A. Hanany and D. Tong. Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics. *JHEP*, 04:066, 2004.
- [16] K. Konishi and L. Spanu. Non-abelian vortex and confinement. *Int. J. Mod. Phys.*, A18:249–270, 2003.
- [17] A. Marshakov and A. Yung. Non-abelian confinement via abelian flux tubes in softly broken $N = 2$ SUSY QCD. *Nucl. Phys.*, B647:3–48, 2002.
- [18] H. B. Nielsen and P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nucl. Phys.*, B61:45–61, 1973.
- [19] A. M. Polyakov. Particle spectrum in quantum field theory. *JETP Lett.*, 20:194–195, 1974.
- [20] N. Seiberg. Electric - magnetic duality in supersymmetric nonabelian gauge theories. *Nucl. Phys.*, B435:129–146, 1995.
- [21] N. Seiberg and E. Witten. Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric yang-mills theory. *Nucl. Phys.*, B426:19–52, 1994.
- [22] N. Seiberg and E. Witten. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD. *Nucl. Phys.*, B431:484–550, 1994.
- [23] M. Shifman and A. Yung. Non-abelian string junctions as confined monopoles. 2004.
- [24] G. 't Hooft. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys.*, B79:276–284, 1974.
- [25] A. I. Vainshtein and A. Yung. Type I superconductivity upon monopole condensation in Seiberg-Witten theory. *Nucl. Phys.*, B614:3–25, 2001.

- [26] E. J. Weinberg. Fundamental monopoles and multi - monopole solutions for arbitrary simple gauge groups. *Nucl. Phys.*, B167:500, 1980.

Ringraziamenti

Dopo cinque anni a Pisa mi sento di dire che devo la mia residua salute mentale e il ricordo delle cose belle che ho vissuto a molte persone, ed è soprattutto per loro che mi dispiace lasciare questa città. Ho condiviso con loro questi anni, le ore di studio, le innumerevoli cene al Numero 11 o allo Spaventapasseri o a Montemagno, le feste e le nottate di gioco, gli scherzi, le discussioni, i libri, le canzoni, le partite a calcio, le notti insonni a ripassare, i gelati e i dolci, i concerti, le camminate, le vacanze, le decisioni, le incertezze e i problemi. Ringrazio per questo *Alice*, Mikk, Jerry, Davide, Beppe, Marzello, Anna, Simone, Daniele, Sara, Claudio, Margherita, Francesco & Francesco, il Crescio, Niccolò, Luca, Giacomo, Gabriele, Caterina, Gipo, Max, e qualcun altro che sto sicuramente dimenticando!

Tra i miei professori ringrazio in particolare Ken, per quello che mi ha insegnato e per l'infinita pazienza che ha dimostrato. Ringrazio Enore Guadagnini e Riccardo Barbieri per l'interesse che hanno suscitato in me nei confronti della fisica teorica, e Leone Fronzoni per aver risvegliato l'interesse verso altri campi. Ringrazio infine Pietro Menotti, Adriano Di Giacomo e Ettore Vicari per gli insegnamenti e per la disponibilità.

Durante questi anni ho ricevuto un costante appoggio da Bologna, dove ho lasciato amici e parenti che hanno sempre creduto in me e mi hanno dato forza per andare avanti. Ringrazio in particolare per questo Davide, Matteo, Francesca e Valentina. Ringrazio i miei genitori e i miei nonni, che mi hanno sempre aiutato con il loro sostegno e con le tagliatelle. Ringrazio infine mia sorella Monica, che mi è sempre stata vicina e mi ha appoggiato durante questi anni.