経営政策に対する決定理論的アプローチの試み

藤枝省人

目次

はしがき

企業の経営政策にとっての最も重要な課題には、決定理論に関する次の規範的な命題が包摂されていると考えることができるであろう。すなわち、この規範的な命題とは、〝充分なる情報をもった合理的に行動する政策担当者が重要な決定問題に直面し、かつ、その問題の内容を適切に理解しているとき、その合理的政策担当者が採択するプロセスを明らかにすること〟である。

最近、これらの決定問題に関する分析方法が企業経営、システムズ・エンジニアリング、あるいは、国民経済計画の諸分野において、急速に発展してきたことは周知のことである。そして、その顕著なあらわれであるところのゲーム理論、OR、経営科学、システム分析等々の新しい実践的な分析方法にとって、正に基本的に共通した課題は、〝ある与えられた環境のもとにおいて、ある特定の目的を達成するための最適行動プロセスを科学的に分析すること〟におかれていると思われる。これらの最適行動問題の分析には、重要な論点として、(1)目的の設定、(2)可能な行動プロセス、(3)不確実要因、の検討が含まれなければならないが、なかでも、政策問題の基盤となる経済的制約条件と、政策目的の体系化を図る政策モデルの定式化が最も重要な課題と言わなければならないであろう。そして、この政策モデルの特徴は、経済的制約条件と政策目的に含まれる諸係数の不確実性、可変性が決定的に重要な役割を担うものとして登場する点にある。

かくして、最適行動プロセスを決定する政策問題は、(1)確率的プロセスが基本的な役割を担う政策モデルを構成する側面と、(2)政策モデルの規範的なエッセンス (optimization)、これを達成する統計的分析、あるいは、決定理論の解析的側面とを同時に包含することになるであろう。事実、この二つの側面は相互に関連しているのであって、政策目的の最大化プロセスの理解にとっては、モデルの構造とそのメカニズムの充分なる把握が必須であり、また、適切なモデルの構成のためには

如何なるアプローチが可能であるか、を充分に理解することも欠かすことができないものと思われる。したがって、決定問題の最適化プロセスの分析にとっては、決定理論と確率論、ないし、統計理論の統一的理解にもとづく、全体的な分析方法の適用が不可避的に重要であると言わなければならないであろう。

本稿は経営政策に対する一つの決定理論的アプローチを試みようとするものである。このアプローチは、企業を如何なる行動基準にもとづいて把握するかによって異なるのみならず、また、企業をとりまく経済的、技術的諸条件によっても異なるものとなるのは明らかである。

これら多くの企業分析のなかで典型的なものは、企業の需給構造を制約条件とし、企業の取得する利潤、あるいは、支出する費用を政策目的とした決定理論的アプローチであろう。なかでも、E・H・ボーマン〔2〕、C・C・ホルト、F・モディリアーニ、J・F・ムス、H・A・サイモン〔6〕〔7〕〔8〕、C・ヴァン・ド・パン、P・ボスジュ〔10〕〔11〕、H・タイル〔16〕〔17〕〔18〕〔19〕〔20〕の研究は、政策目的を二次形式の費用関数に定式化し、企業の生産、出荷、在庫の関連を制約条件とした費用最小化問題を分析することによって、企業の経営政策問題に対する決定理論の実践的適用を意図したものと言えるであろう。

本稿はこれら諸研究の成果を取り入れると同時に、企業の政策目的として、利潤最大化行動をエクスプリシットに考察の対象とし、企業の最適行動プロセスを動学的に解明することを究極の課題としている。したがって、本稿全体を通じて一貫した特徴は、線型制約条件のもとに政策目的を二次関数に特定化することにおかれている。

まず、第一章で静学的決定理論の論理構造を説明する。そこでは、政策モデルの構造係数が所与である場合と、構造係数が不確実な確率変動をする場合とに分けて考察される。

第二章は第一章で展開された理論構造をもとにした企業のある特定年度の利潤最大化行動を分析する。

以上第一、二章では静学的アプローチが試みられているのに対し、第三章では、政策問題にとって本来不可避的な要素である計画期間、すなわち、時間的要素を含んだ動学的政策問題に対する決定理論の論理構造を説明する。動学的決定問題にとっては、政策モデルの構造係数が全計画期間に亘って確実に把握される場合と、確率変動する場合とでは理論的展開に著しい相違の生ずることが明らかにされる。

第四章では動学的決定理論にもとづいて、市場における製品の需要量が確率変動をするとき、企業の経営政策に対する最適行動プロセスが検討される。

〔I〕 静学的決定理論と経営政策

一、二次形式の選好関数と線型制約条件による静学的決定理論の概要

(1) 確実性のもとにおける決定理論

経営政策の諸問題を決定理論的に考察するには、次に示す諸変数を明確に定義しておかなければならない。

まず、決定問題に直面し、何らかの意思決定をする政策担当者にとって「直接」に操作しうる m 個の変数（政策変数）系列を x_1、x_2、……、x_m とし、また、政策担当者にとっては独自に直接操作することは不可能であっても、制約条件を通じて「間接」に規定される n 個の変数（非制御変数）系列を y_1、y_2、……、y_n とする。

そして、政策担当者が最大、あるいは、最小にすべき選好関数——政策変数および非制御変数によって、一般的な二次形式としてあらわされた目的関数——が与えられていると仮定する。すなわち、

〔仮定一・一〕

政策変数の列ベクトル $X=[x_h]$、非制御変数の列ベクトル $Y=[y_i]$ はすべて実数であり、政策担当者の選好関数をWとすれば、

$$W(X,\ Y)=a'X+b'Y+\frac{1}{2}(X'AX+Y'BY+X'CY+Y'CX) \quad \cdots\cdots (1.1)$$

であらわされる。

但し、$a=[a_h]$, $b=[b_i]$, $A=[A_{hk}]$, $B=[B_{ij}]$, $C=[C_{hi}]$ はそれぞれ一定の係数から構成される列ベクトル、または、行列をあらわす。AおよびBは、それぞれ対称行列である。また、$h,\ k=1,\cdots\cdots,m$　$i,\ j=1,\cdots\cdots,n$

次に、政策変数Xと非制御変数Yに関する制約条件を次の如く規定する。

〔仮定一・二〕

ベクトルX、Yの間には次の線型関係が存在する。

$$Y=RX+S \quad \cdots\cdots (1.2)$$

但し、$R=[r_{ih}]$ は一定の係数をエレメントにした行列、$S=[S_i]$ は一定の係数から構成される列ベクトルである。

$h=1,\cdots\cdots,m$　$i=1,\cdots\cdots,n$

〔仮定一・二〕におけるRは〔仮定一・一〕の選好関数の制約条件をあらわす構造係数行列 (elements of multiplicative structure) であり、Sはその附加特性 (elements of additive structure) をあらわしている。

以上の〔仮定一・一〕、〔仮定一・二〕を設けることによって、いまや、合理的な政策担当者の決定問題に対する意思決定

プロセスは、(1.2) 式の制約のもとで、(1.1) 式を最大（あるいは最小）にする命題を解くことにおかれることになる。

以下、この命題を分析してみよう。

まず、(1.1) 式に (1.2) 式を代入すれば、

$$W(X,\ Y)=W(X,\ RX+S)=k_0+k'X+\frac{1}{2}X'KX \quad \cdots\cdots (1.3)$$

但し、$k_0=b'S+\frac{1}{2}S'BS$

$$\left.\begin{aligned} k&=a+R'b+(C+R'B)S=[I\ \ R']\begin{pmatrix} a & C \\ b & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ S \end{pmatrix} \\ K&=A+R'BR+CR+R'C'=[I\ \ R']\begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ R \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.4)$$

Kは対称行列である。さらに、Kを非特異 (non-singular) と仮定すれば、(1.3) 式の右辺は次のようになる。

$$k_0+k'X+\frac{1}{2}X'KX=k_0-\frac{1}{2}k'K^{-1}k+\frac{1}{2}(X+K^{-1}k)'K(X+K^{-1}k) \quad \cdots\cdots (1.5)$$

(1.5) 式をXに関して微分して零とおくことによって、

$$X^0=-K^{-1}k \quad \cdots\cdots (1.6)$$

が得られる。このベクトルX^0が前述した命題に対する政策変数Xの最適解 (optimal solution) となるための充分条件は、(1.5) 式において行列Kが負値定符号 (negative definite) ――あるいは正値定符号 (positive definite)――でなければならないことである。(注1) 以上の分析から次の定理が生まれてくる。

〔定理一・一〕

〔仮定一・一〕、〔仮定一・二〕が満足されているとき、選好関数（1.1）式が制約条件（1.2）式のもとに最大値をもつための必要、かつ、充分条件は、Kおよびkが（1.4）式で定義されたとき、政策変数Xが（1.6）式を満足する値X^0を実現することである。但し、Kは非特異で、かつ、負値定符号の対称行列である。

さて、（1.4）式と（1.6）式から政策変数Xの最適解をすべての係数の関数としてあらわせば次のようになる。

$$X^0=f(a, b, A, B, C, R, S) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

但し、fは関数記号

この（1.7）式を最適反応関数（optimal reaction function）と呼ぶことにしよう。(注2)

次に、選好関数（1.1）式および制約条件（1.2）式の構造変化、すなわち、構造係数a、b、A、B、C、R、Sが僅か変化したとき、最適反応関数（1.7）式において最適解X^0がどのような変化をもたらすかを検討してみよう。

まず、最適解X^0の変化$\varDelta X^0$をテーラー展開によって、

$$\varDelta X^0=dX^0+\frac{1}{2!}d^2X^0+\frac{1}{3!}d^3X^0+ \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

としよう。そして、右辺の第2項以下は第1項に較べて微小でかつ無視しうる場合を考察することにすれば、（1.6）式の全微分は、

$$\varDelta X^0 \fallingdotseq dX^0=-K^{-1}(dk-dK\cdot K^{-1}k) \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

となる。(注3) 但し、

$$dK=d(A+R'BR+CR+R'C')=dA+d(R'BR)+d(CR)+d(R'C')$$

$$dk=d[a+R'b+(C+R'B)S]=da+d(R'b)+d(CS)+d(R'BS)$$

（1.9）式は次のようにも解釈することができる。すなわち、最適解X^0の変化$\varDelta X^0$は、構造係数を真の値$\hat{a}$、$\hat{b}$、$\hat{A}$、$\hat{B}$、$\hat{C}$、$\hat{R}$、$\hat{S}$の代りに、それらの推定値a、b、A、B、C、R、Sによってあらわしたとき、（1.2）式の制約条件のもとにおいて選好関数（1.1）式を最大にする政策変数の最適解Xがもたらす誤差$X-X^0$を意味することになる。

そして、最適解X^0から何らかの変化$\varDelta X^0$に対応して選好関数（1.1）式の最大値からの乖離は、次のようにして求められる。

まず、最適解X^0に対応する選好関数（1.1）式の最大値は、（1.5）、（1.6）の両式から、

$$W^0=k^0-\frac{1}{2}k'K^{-1}k=k^0-\frac{1}{2}X^{0\prime}KX^0$$

である。

Xに対応する選好関数の値は、

$$W_X=k^0+k'X+\frac{1}{2}X'KX$$

となる。したがって、

$$W^0-W_X=-\frac{1}{2}\left(X^{0\prime}KX^0+2k'X+X'KX\right)$$

Kは対称行列であるから、（1.6）式から

$$W^0-W_X=-\frac{1}{2}(X-X^0)'K(X-X^0) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

となる。さらに、Kは負値定符号であるから、（1.10）式は正の値をあらわしている。

（1.10）式に（1.9）式を代入すれば、

$$W^{o}-W_{X}=-\frac{1}{2}(dk-dK\cdot K^{-1}k)'K^{-1}(dk-dK\cdot K^{-1}k)\quad\cdots\cdots(1.11)$$

が得られるであろう。(注4)

かくして、(1.11) 式は構造係数 k および K に何らかの微小な誤差を生じたとき、選好関数 (1.1) 式の最大値に生ずる誤差をあらわすことになる。

(2) 不確実性のもとにおける決定理論

前節においては、すべての構造係数 a、b、A、B、C、R、S が所与であるか、あるいは、それらに誤差が生ずるときにおける決定問題を検討したが、本節では、構造係数は与件として与えられているのではなく、確率的に変動する場合を考察してみよう。

次の仮定を設ける。

〔仮定一・三〕

〔仮定一・一〕、〔仮定一・二〕が満足されているとしよう。さらに、すべての構造係数が確率変数であるとすれば、政策担当者は、(1.2) 式の制約条件のもとで選好関数 (1.1) 式の数学的期待値 EW(X, Y) を最大にするように行動する。

但し、E は数学的期待値をあらわす。

〔仮定一・四〕

構造係数ベクトル a、b、S および構造係数行列 A、B、C、R は相互に独立な確率変数であり、各係数のエレメントは一定の分散、共分散をもつ同時確率分布をする。また、各係数のエレメントの平均、分散、共分散は政策変数 X とは独立である。

さて、〔仮定一・四〕が与えられたとき、〔仮定一・三〕にしたがって選好関数の数学的期待値を最大にするためには、(1.3) 式に含まれる各係数を確率変数に変換して、その数学的期待値を考えてみればよい。すなわち、

$$EW(X,\ Y)=EW(X,\ RX+S)=Ek_{0}+(Ek)'X+\frac{1}{2}X'(EK)X\quad\cdots\cdots(1.12)$$

但し、

$$\left.\begin{aligned}Ek_{0}&=E(b'S)+\frac{1}{2}E(S'BS)\\ Ek&=Ea+E(R'b)+E[(C+R'B)S]\\ EK&=EA+E(R'BR)+E(CR)+E(R'C')\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1.13)$$

次に、すべての確率変数 a、b、A、B、C、R、S が、それぞれ期待値 Ea、Eb、EA、EB、EC、ER、ES に等しいとき、(1.12) 式を W*(X, Y) とすれば、

$$W^{*}(X,\ Y)=W^{*}(X,\ RX+S)=Ek_{0}^{*}+(Ek^{*})'X+\frac{1}{2}X'(EK^{*})X\quad\cdots\cdots(1.14)$$

となる。但し、

$$Ek_{0}^{*}=Eb'\cdot ES+\frac{1}{2}ES'\cdot EB\cdot ES$$

$$Ek^{*}=Ea+ER'\cdot Eb+(EC+ER'\cdot EB)ES$$

$$EK^{*}=EA+ER'\cdot EB\cdot ER+EC\cdot ER+ER'\cdot EC'$$

(1.14) 式は〔仮定一・四〕と (1.13) 式を用いることによって、次のように変形できる。

$$W^{*}(X,\ Y)=(Ek_{0}-g_{0})+(Ek)'X+\frac{1}{2}X'(EK-G)X\quad\cdots\cdots(1.15)$$

但し、$g_{0}=\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j}[E(b_{ij}S_{i}S_{j})-Eb_{ij}ES_{i}ES_{j}]=\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j}Eb_{ij}\mathrm{Cov}(S_{i},\ S_{j})$

G は $m\times m$ 行列であって、h 行 k 列目のエレメントは、

$g_{hk}=\sum_i\sum_j E(r_{ih}b_{ij}r_{jk})-Er_{ih}Eb_{ij}Er_{jk}=\sum_i\sum_j Eb_{ij}\mathrm{Cov}(r_{ih},\ r_{jk})$ である。

EW(X, Y) の最大値をもたらす政策変数の最適解をX_1とすれば、〔仮定一・四〕によりk_0は政策変数とは独立であるから、

$$X_1=-(EK)^{-1}Ek \quad \cdots\cdots(1.16)$$

となる。但し、EKは非特異、かつ、負値定符号の対称行列である。

同様にして、Ek_0-g_0 は政策変数とは独立であるから、(1.15) 式から $W^*(X, Y)$ の最大値をもたらす政策変数の最適解をX_2とすれば、

$$X_2=-(EK-G)^{-1}Ek \quad \cdots\cdots(1.17)$$

となる。但し、EK−G は非特異、かつ、負値定符号の行列である。

したがって、これら二つのベクトルの差異は、

$$\Delta X=X_2-X_1=-[(EK-G)^{-1}-(EK)^{-1}]Ek \quad \cdots\cdots(1.18)$$

となる。

以下分析の便宜のためにKを (1.4) 式にしたがって次のように変換しておこう。すなわち、

$$K=P'QP \qquad 但し、P=\begin{bmatrix}I\\R\end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix}A & C\\C' & B\end{bmatrix}$$

したがって、

$$(EK)^{-1}=[E(P'QP)]^{-1}$$

$$(EK-G)^{-1}=[(EP)'EQ\cdot EP]^{-1}$$

さらに、$\Delta P=P-EP$, $\Delta Q=Q-EQ$ とすれば、

$$E(P'QP)=(EP)'EQ\cdot EP+(EP)'E(\Delta Q\cdot\Delta P)+E[(\Delta P)'EQ\cdot\Delta P]$$
$$+E[(\Delta P)'\Delta Q]EP+E[(\Delta P)'\Delta Q\cdot\Delta P] \quad \cdots\cdots(1.19)$$

となる。また、Rは〔仮定一・四〕からB、Cとは独立な確率変数であるから、

$$\therefore (EP)'E(\Delta Q\cdot\Delta P)=0, \quad E[(\Delta P)'\Delta Q]EP=0$$

となろう。$E[(\Delta P)'\Delta Q\cdot\Delta P]$ はその他の項と較べて高次の微小変化であるから、無視しうるものと仮定すれば、(1.19) 式は、

$$E(P'QP)\fallingdotseq(EP)'EQ\cdot EP+E[(\Delta P)'EQ\cdot\Delta P]$$

となるであろう。したがって、

$$[E(P'QP)]^{-1}\fallingdotseq[(EP)'EQ\cdot EP]^{-1}-[(EP)'EQ\cdot EP]^{-1}E[(\Delta P)'EQ\cdot\Delta P]$$
$$[(EP)'EQ\cdot EP]^{-1} \quad \cdots\cdots(1.20)$$

(1.17) (1.18) の両式と (1.20) 式から、

$$\Delta X\fallingdotseq-[(EP)'EQ\cdot EP]^{-1}E[(\Delta P)'EQ\cdot EP][(EP)'EQ\cdot EP]^{-1}Ek$$
$$=[(EP)'EQ\cdot EP]^{-1}E[(\Delta P)'EQ\cdot\Delta P]X_2 \quad \cdots\cdots(1.21)$$ (注5)

(1.21) 式は次のことを意味している。すなわち、(1.3) 式の構造係数a、b、A、B、C、R、Sが確率変動をするとき、各係数がそれぞれ期待値に等しい——確実性当量(注6) (certainty equivalence)——と仮定した場合に、(1.14) 式の最大値をもたらす政策変数の最適解X_2と、選好関数 (1.3) 式の期待値、すなわち、(1.12) 式の最大値をもたらす政策変数の最適解X_1との間には、(1.21) 式であらわされる相違が生ずる結果となる。かくして、次の定理が導かれる。

〔定理一・二〕

〔仮定一・四〕が与えられているとき、〔仮定一・三〕にしたがって選好関数の期待値 (1.12) 式を最大にする政策変数の

最適解(1.16)式と、各係数を期待値(確実性当量)によって置き換えた(1.14)式を最大にする政策変数の最適解(1.17)式との間には(1.21)式の乖離が生ずる。但し、EK および EK−G はそれぞれ非特異かつ、負値定符号の対称行列である。

二、経営政策に対する静学的決定理論の適用

前章で明らかにされた決定理論を企業の経営政策に適用するためには、まず、企業行動における選好（目的）関数を設定しなければならない。本稿では、企業は究極的な目標として利潤最大化原理にもとづいて行動しているものと仮定する。したがって、企業行動における選好関数は利潤最大化行動をエクスプリシットに反映する関数を考慮することが必要である。そこで、まず、ある営業年度における総利潤をあらわす選好関数を検討してみよう。

当該営業年度における利潤最大化行動は、

売上高－（直接費総額＋間接費総額＋管理費その他費用）＝総利潤

を最大にすることを意味するであろう。以下、総利潤をあらわす選好関数の構成要素について説明を加えることにする。

総利潤を構成する要素は次に示すものであろう。

①売上高、②経常賃金総額（経常労務費）、③直接原材料総額、④労働者の新規雇用および解雇に要する費用、⑤超過労働手当、⑥製品在庫に関する費用、⑦原材料在庫に関する費用、⑧製造間接費および一般管理費・販売費

① 企業は単一の製品を生産するものと仮定する。製品の売上価格をP、売上数量をDであらわせば、

製品の売上高＝D・P　である。

② 雇用労働者数をl、労働者一人当り平均賃金をwとすれば、

経常賃金総額＝$l \cdot w$　となる。

③ 製品一単位に占める直接原材料の割合をv、生産数量をZであらわす。また、直接原材料の単位費用は、購入数量mの一次減少関数と仮定すれば、

当該年度の直接原材料総額＝$\alpha(m-\beta)vZ$　となる。

但し、$\alpha<0$ および β は定数である。

④ 新規雇用労働者および労働者の解雇に関する費用は、雇用労働者の増加、あるいは、減少人員の二次関数と仮定する。すなわち、前期末の雇用労働者数をl_0、当該期末のそれをlとすれば、$l>l_0$ の場合には新規に労働者を雇用することを意味し、面接、銓衡、技術訓練等に費用がかかると考えられよう。また、$l<l_0$ の場合には雇用労働者の解雇が生ずることになり、退職手当の支給のみならず、生産態勢の再組織等も必要となるであろう。そこで、この両者の場合に生ずる費用は次式で示されるものとしよう。

労働者の新規雇用および解雇にともなう費用＝$c_1(l-l_0-c_{10})^2$

但し、c_1、c_{10}は定数である。

したがって、$c_{10}\neq 0$ である限り、新規雇用と解雇にともなう費用は対称的ではない。

⑤ 超過労働手当は主に労働者の生産能力に依存している。もし、当該年度における労働者一人当りの生産能力をc_3とすれば、$Z-c_3l>0$ の場合には超過労働が必要となり、そのための超過労働手当を支給しなくてはならない。また、$Z-c_3l<0$ の場合には怠惰な時間（idle-time）が生じ、無駄な費用を支出していることになる。以上のことを考慮して、

超過労働手当＝$c_2(Z-c_3l)^2+c_4Z-c_5l+c_{11}lZ$（注7）

但し、c_2、c_3、c_4、c_5、c_{11}はすべて定数である。

⑥　製品の最適在庫量はその売上数量の一次関数と仮定する。もし、製品の実際の在庫数量が少ないと受注数量は増加することになり、これを賄うために新規に設備能力を増加させなければならないであろう。また逆に、製品の在庫数量が多ければ、それだけ高い在庫費用がかかることになるであろう。これらの関係は二次関数で近似されるものと仮定する。

製品在庫に関する費用$=C_6[y-(C_7+C_8D)]^2$（注8）

但し、C_6、C_7、C_8はすべて定数であり、yは現実の製品在庫数量をあらわす。

⑦　原材料の在庫数量に関する費用は⑥と同様にして二次関数で近似されるものと仮定する。

原材料在庫数量に関する費用$=C_6^*[y^*-(C_7^*+C_8^*vZ)]^2$

但し、C_6^*、C_7^*、C_8^*はすべて常数であり、y^*は現実の原材料在庫数量をあらわす。

以上①～⑦に検討した各要素以外に、費用として考慮しなければならない資本設備の減価償却費等の間接費や一般的な管理費が存在する。しかしながら、これらの間接費は当該営業年度においては固定した費用と見做すことが可能であれば、企業利潤額に及ぼす効果は一定となるため、利潤最大化プロセスの問題からは⑧の要素を除外することが許されるであろう。

したがって、①～⑦から企業の選好関数（利潤関数）を次の如く定義しよう。

$$\begin{aligned}D\cdot P-\{&wl+\alpha(m-\beta)vZ+C_1(l-l_0-C_{10})^2+C_2(Z-C_3l)^2\\&+C_4Z-C_5l+C_{11}lZ+C_6[y-(C_7+C_8D)]^2\\&+C_6^*[y^*-(C_7^*+C_8^*vZ)]^2\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

さらに、y、y^*に関する制約条件は次の通りである。y、y^*の前期末の在庫数量をそれぞれy_0、y_0^*とすれば、(1.2) 式は

$$\left.\begin{aligned}y&=Z+y_0-D\\y^*&=m+y_0^*-vZ\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

さて、(2.1) 式および (2.2) 式をそれぞれ (1.1) 式、(1.2) 式の形に変換してみよう。

(2.1)、(2.2) 両式の変数および係数は (1.1)、(1.2) 両式のそれらと次のように対応している。

政策変数　$X=\begin{bmatrix}l\\Z\\m\end{bmatrix}$　　非制御変数　$Y=\begin{bmatrix}y\\y^*\end{bmatrix}$

$$a=\begin{bmatrix}2C_1(l_0+C_{10})-w+C_5\\P-C_4-2C_6C_8(C_7+C_8y_0)-v(2C_6^*C_7^*C_8^*-\alpha\beta)\\0\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}2C_6(1+C_8)(C_7+C_8y_0)-P\\2C_6^*C_7^*\end{bmatrix}$$

$$A=2\begin{bmatrix}-(C_1+C_2C_3^2) & C_2C_3-\frac{1}{2}C_{11} & 0\\C_2C_3-\frac{1}{2}C_{11} & -(C_2+C_6^*C_8^{*2}v+C_6C_8^2) & -\frac{1}{2}\alpha v\\0 & -\frac{1}{2}\alpha v & 0\end{bmatrix}$$

$$B=2\begin{bmatrix}-C_6(1+2C_8+2C_8^2) & 0\\0 & -C_6^*\end{bmatrix}$$

$$C=2\begin{bmatrix}0 & 0\\C_6C_8(1+C_8) & C_6^*C_8^*v\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -v & 1\end{pmatrix}\qquad S=\begin{pmatrix}y_0-D\\ y_0^*\end{pmatrix}$$

以上の係数ベクトルおよび係数行列を用いてK^{-1}、kを導出してみよう。(1.4) 式にしたがって、

$$K^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-(C_1+C_2C_8^2) & C_2C_3-\frac{1}{2}C_{11} & 0\\ C_2C_3-\frac{1}{2}C_{11} & -C_2-C_6C_8^2-C_6^*v(C_8^{*2}+2C_8^*v+v) & -\frac{1}{2}\alpha v+C_6^*v(C_8^*+1)\\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha v+C_6^*v(C_8^*+1) & -C_6^*\end{bmatrix}^{-1}$$

$$k=\begin{bmatrix}2C_1(l_0+C_{10})-w+C_5\\ 2C_6[(D-y_0)(1+C_8^2)+C_7+C_8D]+2C_6^*v(C_7^*-y_0^*)(C_8^*+1)+\beta\alpha v-C_4\\ 2C_6^*(C_7^*-y_0^*)\end{bmatrix}$$

かくして、(1.6) 式から政策変数の最適解X_0を求めることができる。

さらに、もし、売上数量以外のすべての構造係数は不変であり、かつ、売上数量に関する予測値が実現値との間に誤差ΔDを生ずるとき、利潤関数の最大値からの乖離は (1.11) 式によって次のようになる。

$$W^0-W_X=-\frac{1}{2}(\Delta S)'(C+R'B)'K^{-1}(C+R'B)\Delta S$$

但し、$\Delta S=\begin{pmatrix}\Delta D\\ 0\end{pmatrix}$　$C+R'B=2\begin{bmatrix}0 & 0\\ -C_6(1+C_8+C_8^2) & vC_6^*(C_8^*+1)\\ 0 & -C_6^*\end{bmatrix}$

次に、構造係数が確率変動をする場合を考察しよう。

企業にとって製品の需要量は事前に明らかにされていないとすれば、製品に対する需要量は企業にとって確率変数となるであろう。

さらに、利潤関数に含まれるすべての係数が統計的に推定されたものであるとき、これらの係数を確率変数として考えることができるであろう。かかるとき、企業の政策担当者は〔仮定一・三〕〔仮定一・四〕を満足する行動をとるとすれば、これらの確率変数を各係数の期待値（確実性当量）に置き換えることによって求められた最適解X_2と〔仮定一・三〕にしたがう行動の最適解X_1との間には前述した如く、(1.21) 式に示された差異を生ずることになる。

もし、vが一定であるとすれば (1.21) 式のΔPは零となり、したがって、X_1とX_2との間には何らの差異も存在しないことになるであろう。

〔II〕 動学的決定理論と経営政策

三、二次形式の選好関数と線型制約条件による動学的決定理論の概要

(1) 確実性のもとにおける決定理論

動学的決定理論に含まれる選好関数および線型制約条件の政策変数と非制御変数は、計画期間Tの各期のエレメント（小ベクトル）からなるベクトルとして次のように定義される。

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix} \quad X_t=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} \quad Y_t=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

但し，$t=1, 2, \cdots\cdots\cdots, T$

したがって，**X**はmT個，**Y**はnT個のエレメントからなるベクトルである。

選好関数は（1.1）式と同様に，**X**，**Y**に関する二次関数として，

$$W(X, Y)=aX+b'Y+\frac{1}{2}(X'AX+Y'BY+X'CY+Y'C'X)\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

を考察の対象としよう。

但し，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，A，B，**C**はそれぞれ**X**，**Y**に対応して，

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_T \end{pmatrix} \quad a_t=\begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_m(t) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_T \end{pmatrix} \quad b_t=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{T1} & \cdots & A_{TT} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{T1} & \cdots & B_{TT} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{T1} & \cdots & C_{TT} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

但し，$A_{tt'}$はX_t，$X_{t'}$に関する$m\times m$行列，すなわち，（3.2）式における$A_{tt'}$の二次形式は$(X_t)'A_{tt'}X_{t'}$である。そして，**A**はmT$\times m$T対称行列である。

$B_{tt'}$はY_t，$Y_{t'}$に関する$n\times n$行列，すなわち，（3.2）式における$B_{tt'}$の二次形式は$(Y_t)'B_{tt'}Y_{t'}$である。そして，**B**はnT$\times n$T対称行列である。

$C_{tt'}$はX_t，$Y_{t'}$に関する$m\times n$行列，すなわち，（3.2）式における$C_{tt'}$の二次形式は$(X_t)'C_{tt'}Y_{t'}$である。そして，**C**はmT$\times n$T行列である。

また，$\boldsymbol{a}$はmT個，$\boldsymbol{b}$はnT個のエレメントからなるベクトルであることは言うまでもない。

〔仮定三・一〕

（3.1）**式で定義される政策変数ベクトル　X＝〔$X_t(t)$〕，　非制御変数ベクトル　Y＝〔$Y_t(t)$〕がすべて実数から構成されるとき，政策担当者の選好関数は（3.2）式であらわされる。**

但し，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，A，B，Cは（3.3）式で定義されるベクトル，ないしは，行列である。

次に，線型制約条件は（1.2）式と同様，

$$\mathbf{Y=RX+S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

であらわされるものとしよう。

但し，$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_T \end{pmatrix} \quad S_t=\begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{pmatrix}$

したがって、**S**はnT個のエレメントからなるベクトルである。

また、**R**は$nT \times mT$行列である。$n \times m$小行列$R_{tt'}$に関して次の仮定を設けることにしよう。すなわち、非制御変数Y_tはt'期$>t$期の政策変数$X_{t'}$には依存しないものとする。つまり、

$$Y_1 = R_{11}X_1 + S_1$$

$$Y_2 = R_{21}X_1 + R_{22}X_2 + S_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_T = R_{T1}X_1 + R_{T2} + \cdots\cdots + S_T$$

したがって、**R**は次の小行列から構成される。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ R_{T1} & \cdots & \cdots & \cdots & R_{TT} \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(注9)}\ (3.5)$$

すなわち、

〔仮定三・二〕

ベクトルX、Yの間には（3.3）式の線型関係が存在する。但し、Rは（3.5）式を満足し、Sは（3.4）式によって与えられる列ベクトルである。

以上の諸仮定のもとにおいて、政策変数の最適解X^0を求めるプロセスは、第一章で展開されたプロセスから容易に理解されるであろう。かくして、次の定理が導かれる。

〔定理三・一〕

〔仮定三・一〕、〔仮定三・二〕が満足されているとき、選好関数（3.2）式が制約条件（3.3）式のもとに最大値をもつための必要、かつ、充分条件は、

$$k = a + R'b + (C + R'B)S$$

$$K = A + R'BR + CR + R'C'$$

で定義されたとき、政策変数が、

$$X^0 = -K^{-1}k$$

を実現することである。

但し、Kは非特異、かつ、負値定符号の対称行列である。

さて、〔定理三・一〕から政策変数の最適解がX^0であるにもかかわらず、（X^0以外の）**X**を決定したことによって生ずる選好関数（3.2）式の最大値からの乖離（損失）を考察してみよう。

$$W^0 = W(X^0,\ RX^0 + S)$$

$$W_X = W(X,\ RX + S)$$

とすれば、第一章と全く同様の論理によって、

$$W^0-W\mathbf{x}=-\frac{1}{2}(X-X^0)'K(X-X^0)>0 \quad\cdots\cdots\cdots(3.6)$$

となる。

まず、第一期に何らかの原因により、最適解X^0の第一期の値X_1^0と異なるX_1^*を決定することによって生ずる誤差を考えよう。第一期の政策変数をX_1とすれば、$X_1=X_1^*$なる条件のもとにおいて、選好関数 $W(X,\ Y)$ の最大化を考えなければならない。すなわち、

$$W(X,\ Y|X_1^*)=k_0+K'X+\frac{1}{2}X'KX-\mu(X_1-X_1^*) \quad\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

の最大化を考えることである。但し、μはm個のエレメントからなるラグランジュ未定乗数の列ベクトルである。

(3.7) 式を微分して零とおけば、

$$k+KX^1-\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}=0 \quad\cdots\cdots\cdots(3.8)$$

但し、X^1は (3.8) 式を満足する値である。さらに、0は $m(T-1)$ 個、0は mT 個のそれぞれのエレメントからなる零ベクトルである。

(3.8) 式から、

$$X^1=-K^{-1}k+K^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}=X^0+K^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}=X^0+\begin{pmatrix}K^{11}\\\vdots\\K^{T1}\end{pmatrix}\mu \quad\cdots\cdots\cdots(3.9)$$

但し、$K^{tt'}$は $m\times m$ 行列である。さらに、

$$K^{-1}=\begin{pmatrix}K^{11}&\cdots&K^{1T}\\\vdots&\ddots&\vdots\\K^{T1}&\cdots&K^{TT}\end{pmatrix}$$

したがって、X^1は第一期のX_1がある特定のX_1^*をとるとき、選好関数 (3.2) 式を全計画期間に亘って最大にする政策変数の最適解を示している。(3.9) 式の第一期の最適解X_1^1はX_1^*であるから、$X_1^1=X_1^*=X_1^0+K^{11}\mu$。したがって、$\mu=(K^{11})^{-1}(X_1^*-X_1^0)$。この μを(3.9)式に代入することによって、政策変数の最適解X^1を求めることができる。すなわち、

$$X^1=X^0+\begin{pmatrix}K^{11}\\\vdots\\K^{T1}\end{pmatrix}(K^{11})^{-1}(X_1^*-X_1^0) \quad\cdots\cdots\cdots(3.10)$$

また、第一期の政策変数を（X_1^0以外の）X_1^*に決めることによって、全計画期間に亘って生ずる誤差は (3.6)、(3.10) 両式から、

$$W^0-W\mathbf{x}=-\frac{1}{2}(X_1^*-X_1^0)'(K^{11})^{-1}[K^{11},\ K^{12},\ \cdots\cdots,\ K^{1T}]\,K\begin{pmatrix}K^{11}\\\vdots\\K^{T1}\end{pmatrix}(K^{11})^{-1}(X_1^*-X_1^0)$$

$$=-\frac{1}{2}(X_1^*-X_1^0)'(K^{11})^{-1}(X_1^*-X_1^0) \quad\cdots\cdots\cdots(3.11)$$

となる。さらに、第一期の政策変数X_1^*がX_1^0と一致しない原因が、真のa、b、A、B、C、R、Sについて充分なる情報を欠いていたことにあるならば、(1.9) 式と同様の論理によって、

$$X_1^*-X_1^0=-[K^1,\ K^{12},\ \cdots\cdots,\ K^{1T}](dk+dK\cdot X^0)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.12)$$ [注10]

が得られる。但し、

$$dK=dA+d(R'BR)+d(CR)+d(R'C')$$

$$dk=da+d(R'b)+d(CS)+d(R'BR)$$

したがって、(3.11) 式と (3.12) 式から、

$$W^0-W_X=-\frac{1}{2}(dk+dK\cdot X^0)'F(dk+dK\cdot X^0)$$

が導出されるであろう。

但し、$F=\begin{pmatrix}K^{11}\\ \vdots\\ K^{T1}\end{pmatrix}(K^{11})^{-1}(K^{11},\ K^{12},\ \cdots\cdots,\ K^{1T})$

(2) 不確実性のもとにおける決定理論

動学的体系の確率論的決定問題の最も著しい特徴は次の諸点におかれている。すなわち、t期における政策変数の最適解X^tを決定するには、期初において利用可能なすべての「情報」を充分に考慮することである。ここに「情報」とは、過去に実現したX、Yおよびa、b、A、B、C、R、Sについての過去における情報と、全計画期間の将来時点におけるこれらすべての係数についての不確実性を考慮することを意味している。つまり、t期の初めにおいて全計画期間に亘る政策変数の最適解X^tを決定するに際して考慮すべき「情報」とは、t期>t'期の全期間における実現値X_1^*、X_2^*……、$X_{t'}^*$、Y_1^*、Y_2^*……、$Y_{t'}^*$およびa、b、A、B、C、R、Sに関する過去の情報と、将来全計画期間に亘るこれらの係数の不確実性を、過去の情報をもとにして確率的に考慮することである。[注11]

次の仮定を設けることにしよう。

〔仮定三・三〕

(3.2)、(3.3) の両式におけるa、b、A、B、C、R、Sの各係数がそれぞれ確率変数であるとき、政策担当者は (3.3) 式の制約条件のもとに、選好関数 (3.2) 式の期待値 EW(X, Y) を最大にするように行動する。

さらに、各係数の確率分布について次の仮定を設ける。

〔仮定三・四〕[注12]

〔仮定三・一〕、〔仮定三・二〕は次の諸点を除いて満足される。構造係数a、b、A、B、C、R、Sの各係数は相互に独立で、それぞれ全計画期間に亘って同時確率分布をし、

(i) a_t、b_t、A_t、B_t、C_t、R_t、S_tのそれぞれの同時確率分布は$X_{t'}$からは独立である。

但し、$t\geqq t'$ $t,\ t'=1,\ \cdots\cdots,\ T$

(ii) a、b、A、B、C、R、Sのそれぞれの同時確率分布は$X_{t'}$に依存しない特定の期待値、分散、共分散を構成する。

〔仮定三・三〕〔仮定三・四〕が与えられているとき、選好関数 (3.2) 式の数学的期待値を最大にするt期に決定すべき政策変数の最適解を求めてみよう。

t期における政策変数の最適解X_t^tはt期<t'期の$X_{t'}$に関する情報、つまり、実現値$X_{t'}^*$を制約条件にして求めることがで

きる。

X_t^*のベクトルを、$\bar{X}_{t-1}=\begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_{t-1}^* \end{pmatrix}$、

X_tのベクトルを、$\tilde{X}_{t-1}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix}$ としよう。

したがって、$\tilde{X}_{t-1}=\bar{X}_{t-1}$ のもとに t 期において、選好関数（3.2）式の期待値を最大にする政策変数の最適解 $\hat{X}_t^t$ は次のようにして求められる。

$$E_tW(X,\ RX+S)=E_tk_0+(E_tk)'X+\frac{1}{2}X'(E_tK)X-\mu_{t-1}'(\tilde{X}_{t-1}-\bar{X}_{t-1}) \quad \cdots(3.13)$$

但し、E_tは t 期の初めに与えられた「情報」を考慮した期待値をあらわす。また、μ_{t-1}は $m(t-1)$ 個のエレメントからなるラグランジュ未定乗数である。

（3.13）式を $\mathbf{X}$ に関して微分して零とおけば、$\mathbf{X}$ の最適解は、

$$\hat{X}^t=(E_tK)^{-1}[\mu_{t-1}-E_tk] \quad \cdots\cdots(3.14)$$

かつ、$\tilde{X}_{t-1}=\bar{X}_{t-1} \quad \cdots\cdots(3.15)$

（3.14）式から、

$$\hat{X}_t^t=E_tK^{(t,t-1)}\mu_{t-1}-E_tK^{(t,T)}E_tk \quad \cdots\cdots(3.16)$$

但し、$K^{(t,t')}=[K^{t1},\ K^{t2},\ \cdots\cdots,\ K^{tt'}]$

さらに、（3.15），（3.16）の両式から、

$$\mu_{t-1}=[E_tK_{(t-1)}]^{-1}E_tK_{(t-1,T)}E_tk+[E_tK_{(t-1)}]^{-1}\bar{X}_{t-1} \quad \cdots\cdots(3.17)$$

となる。但し、

$$K_{(t,t')}=\begin{pmatrix} K^{11} & \cdots & K^{1t'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{t1} & \cdots & K^{tt'} \end{pmatrix}$$

かつ、$t=t'$ のとき、$K_{(t,t')}=K_{(t)}$ と定義する。

（3.17）式を（3.16）式に代入すれば、

$$\hat{X}_t^t=E_tM_tE_tk+E_tK^{(t,t-1)}[E_tK_{(t-1)}]^{-1}\bar{X}_{t-1} \quad \cdots\cdots(3.19)$$

が導出される。

但し、$E_tM_t=E_tK^{(t,t-1)}[E_tK_{(t-1)}]^{-1}E_tK_{(t-1,T)}-E_tK^{(t,T)}$

四、経営政策に対する動学的決定理論の適用

この章では、第二章で考察した企業の利潤関数の全計画期間Tに亘る最大化の問題を検討してみよう。

製品市場における需要量をあらわす$\mathbf{D}$を確率変数とし、その他のすべての係数は定数と仮定しよう。したがって、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$は定数エレメントからなる列ベクトル、$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{R}$は定数エレメントからなる行列である。さらに、以上の仮定から、$\mathbf{K}$も定数エレメントからなる行列となる。$\boldsymbol{k}$は確率変数をエレメントとする列ベクトルである。

かくして、(3.19) 式は、

$$\hat{X}^t_t = M_tE_tk + K^{(t,t-1)}[K_{(t-1)}]^{-1}\bar{X}_{t-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

となるであろう。但し、

$$M_t = K^{(t,t-1)}[K_{(t-1)}]^{-1}K_{(t-1,T)} - K^{(t,T)}$$

(4.1) 式の最後の項を $t-1$ 期とそれ以前の期間に分解すれば、

$$[K_{(t-1)}]^{-1}\bar{X}_{t-1} = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,t-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{t-1,1} & \cdots & K_{t-1,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*_1 \\ \vdots \\ X^*_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,t-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{t-1,1} & \cdots & K_{t-1,t-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*_1 \\ \vdots \\ X^*_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{1,t-1} \\ \vdots \\ K_{t-1,t-1} \end{pmatrix} X^*_{t-1} \quad \cdots\cdots\cdots (4.2)$$

もし、$t-1$ 期に決定された X^*_{t-1} が $t-1$ 期の初めの「情報」をもとにして求めた最適解 $\hat{X}^{t-1}_{t-1}$ と等しいとすれば、

$$X^*_{t-1} = \hat{X}^{t-1}_{t-1} = M_{t-1}E_{t-1}k + K^{(t-1,t-2)}[K_{(t-2)}]^{-1}\bar{X}_{t-2} \quad \cdots\cdots\cdots (4.3)$$

となる。さらに、(4.3) 式を (4.2) 式に代入し、その結果を (4.1) 式に代入すれば、

$$X^t_t = M_tE_tk + K^{(t,t-1)} \begin{pmatrix} K_{1,t-1} \\ \vdots \\ K_{t-1,t-1} \end{pmatrix} M_{t-1}E_{t-1}k$$

$$+K^{(t,t-1)}\left\{ \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,t-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{t-1,1} & \cdots & K_{t-1,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{1,t-1} \\ \vdots \\ K_{t-1,t-1} \end{pmatrix} K^{(t-1,t-2)}[K_{(t-2)}]^{-1} \right\} \bar{X}_{t-2} \cdots (4.4)$$

が得られるであろう。(4.4) 式の { } 内は次のように変形できる。

$$[K_{(t-1)}]^{-1} \begin{pmatrix} I \\ K^{(t-1,t-2)}[K_{(t-2)}]^{-1} \end{pmatrix} = [K_{(t-1)}]^{-1} \begin{pmatrix} K_{(t-2)} \\ K^{(t-1,t-2)} \end{pmatrix} [K_{(t-2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} [K_{(t-2)}]^{-1}$$

ここで、

$$L_t = \begin{pmatrix} K^{11} & \cdots & K^{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{t1} & \cdots & K^{tt} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば、

$$\begin{pmatrix} K_{1,t-1} \\ \vdots \\ K_{t-1,t-1} \end{pmatrix} = L_{t-1}$$

となる。

かくして、(4.4) 式は、

$$\hat{X}^t_t=M_tE_tk+K^{(t,t-1)}L_{t-1}M_{t-1}E_{t-1}k+K^{(t,t-2)}[K_{(t-2)}]^{-1}\overline{X}_{t-2} \quad\cdots\cdots(4.5)$$

となる。(4.5) 式の右辺第3項のうち、$[K_{(t-2)}]^{-1}\overline{X}_{t-2}$ は (4.2) 式と同様の展開をすることにより、(4.5) 式は、

$$\hat{X}^t_t=M_tE_tk+K^{(t,t-1)}L_{t-1}M_{t-1}E_{t-1}k+K^{(t,t-2)}L_{t-2}M_{t-2}E_{t-2}k+K^{(t,t-3)}[K_{(t-3)}]^{-1}\overline{X}_{t-3}$$

となる。$K^{(t,t-3)}[K_{(t-3)}]^{-1}\overline{X}_{t-3}$ に同様の操作を繰り返すことによって最終的に、

$$\hat{X}^t_t=M_tE_tk+\sum_{t'=1}^{t-1}K^{(tt')}L_{t'}M_{t'}E_{t'}k \quad\cdots\cdots(4.6)$$

但し、$1\leqq t\leqq T$

が導き出されるであろう。

もし、t 期の初めに得られた需要量に関する情報が過去に確実に予測されているならば、政策担当者の決定すべき政策変数の最適解は (4.6) 式から、

$$\check{X}^t_t=M_tE_tk+\sum_{t'=1}^{t-1}K^{(tt')}L_{t'}M_{t'}E_{t}k$$

となるであろう。したがって、

$$\hat{X}^t_t=\check{X}^t_t+\sum_{t'=1}^{t-1}K^{(tt')}L_{t'}M_{t'}(E_{t'}k-E_tk) \quad\cdots\cdots(4.7)$$

が得られる。

また、t^* 期 ($t^*<t$) の初めにおける需要量に関する情報をもとにして、決定されるべき政策変数の t^* 期の最適解は、

$$\hat{X}^{t^*}_{t^*}=M_{t^*}E_{t^*}k+\sum_{t'=1}^{t^*-1}K^{(t^*t')}L_{t'}M_{t'}k \quad\cdots\cdots(4.8)$$

である。もし t 期の初めに得られる需要量に関する情報が t' 期の初めに確実に予測されていたとすれば、t' 期の最適解は、

$$\hat{X}^t_{t^*}=M_{t^*}E_tk+\sum_{t'=1}^{t^*-1}K^{(t^*t')}L_{t'}M_{t'}E_{t'}k \quad\cdots\cdots(4.9)$$

となるであろう。かくして、(4.8) (4.9) の両式から、

$$\hat{X}^{t^*}_{t^*}-\hat{X}^t_{t^*}=M_{t^*}(E_{t^*}k-E_tk) \quad\cdots\cdots(4.10)$$

が得られる。そして、(4.7) (4.10) の両式から、

$$\hat{X}^t_t=\check{X}^t_t+\sum_{t'=1}^{t-1}K^{(tt')}L_{t'}(\hat{X}^{t'}_{t'}-\hat{X}^t_{t'}) \quad\cdots\cdots(4.11)$$ (注13)

を導き出すことができる。

(4.11) 式から次のことが判明する。すなわち、t 期以前において決定された政策変数が製品の需要量を確実に予測することにもとづいてもたらされたときに、t 期における政策変数の最適解 $(\check{X}^t_t)$ と、t 期以前に決定された政策変数が需要量に関する予測の誤りを伴うときの、t 期における政策変数の最適解 $(\hat{X}^t_t)$ との間には、$\sum_{t'=1}^{t-1}K^{(tt')}L_{t'}(\hat{X}^{t'}_{t'}-\hat{X}^t_{t'})$ の乖離が生ずることになる。

k および K^{-1} は、第二章で示された a、b、A、B、C、R、Sをそれぞれ次のように変換することによって〔定理三・一〕から求めることができる。

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_T\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_T\end{pmatrix}$$

但し、$a_i=a \quad b_i=b \quad (i=1\cdots\cdots,T)$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & A_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_T \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & B_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_T \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & C_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_T \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_T \end{pmatrix}$$

但し、$A_i=A \quad B_i=B \quad C_i=C \quad R_i=R \ (i=1, \cdots\cdots, T)$

$$S=\begin{pmatrix} y_0-D_1 \\ y_0^* \\ y_0-(D_1+D_2) \\ y_0^* \\ \vdots \\ y_0-(D_1+\cdots\cdots+D_T) \\ y_0^* \end{pmatrix}$$

〔Ⅲ〕結　語

企業の経営政策に決定理論を適用するにあたって中心的な課題は、如何なる政策目標を樹立するか、また、如何なる要因がこの目標の達成にとってドミナントなものであるかを明確に規定することに始まる。そして、政策目標を企業をとりまく経済的諸条件とともに具体的に定式化することによって、われわれは決定理論のより適切な援用方法を選択することができるのである。

一般的に、選好関数には種々なる形態が考えられるが、企業の経営政策に対する決定理論のより実践的適用を図るためには、具体的に定式化されたモデルが実践的意義をもたなければならないことは言うまでもない。この意味において、線型計画法による企業分析は最も簡単な企業の行動モデルを構成することによって、有用な分析手段を提供しようとする。しかしながら、企業の政策目標を種々なる要因の一次関数に定式化することは、その有効性の範囲を限定するものとならざるを得ないであろう。かくして、二次関数による選好関数の定式化は、決定理論的アプローチの有効性をより広い範囲に拡大する

ことになると思われる。

H・タイル、C・ヴァン・ド・パンによって展開されている動学的決定理論の確率論的アプローチは、後者を理論的に発展させ、全計画期間に亘って政策モデルの構造係数に関する不確実性を体系的に考察することに、その特徴がある。

本稿において展開された企業分析の決定理論的アプローチは、後者の理論に依拠している。すなわち、線型制約条件のもとに、企業の利潤最大化行動を二次関数として定式化するとともに、政策モデルのもつ不確実要因に対する確率論的アプローチの一つの試みを提供することである。

経営政策に対する決定理論の実践的重要性は、本来静学的アプローチよりも動学的アプローチにあると考えねばならない。つまり、決定理論がより実践的分析方法となるためには、将来時点における構造係数に関する不確実性を如何にして合理的に処理するか、にかかっているのである。

この意味において、動学的決定理論の経営政策に対する適用を主題とする本稿も、政策モデルの不確実要因を、過去に得た情報をもとにしてより体系的に考察することが肝要となるのである。これは、われわれにとって今後に残された課題と云わなければならない。

（注1） n個のラグランジュ未定乗数からなる列ベクトルをλとすれば、$W(X, RX+S)$ を最大にする命題は $W(X, Y, \lambda)=W(X, Y)-\lambda'(Y-RX-S)$ を最大にする命題と同一である。後者の命題の最適解X^0、Y^0が存在するための必要、かつ充分条件は、$(m+2n)\times(m+2n)$ 行列である $\begin{bmatrix} A & C & R' \\ C' & R & -I \\ R & -I & 0 \end{bmatrix}$ が非特異で、かつ、$[R \ \ -I]$ の縁付き行列 $\begin{bmatrix} A & C \\ C' & B \end{bmatrix}$ の右下から $n+1, m+2, \ldots\ldots, n+m$ の順序によって構成される首座小行列式が交互に $(-1)^{n+1}, (-1)^{n+2}, \ldots\ldots, (-1)^{n+m}$ の符号をもつことである。この条件は、Kの負値定符号と対応する。

この条件の証明に関しては、〔3〕、〔4〕、〔5〕、〔13〕三五七頁―三七九頁、〔19〕六九頁に詳しく展開されている。

（注2） 〔17〕、〔18〕四二九頁、〔19〕四三頁参照。

（注3） $dX^0=-K^{-1}(dk-dK\cdot K^{-1}k)$ のカッコ内は次のように展開できる。すなわち、

$$dk-dK\cdot K^{-1}k=(C+R'B)[(dR)X^0+dS]+(dR)'\lambda^0+da+(dA)X^0+(dC)Y^0+R'[db+(dC)'X^0+(dB)Y^0]$$

但し、X^0、Y^0、λ^0は $W(X, Y, \lambda)=W(X, Y)-\lambda'(Y-RX-S)$ を最大にするX、Y、λの解である。〔1〕、〔11〕、〔19〕五一頁参照。

（注4） （注3）を考慮すれば、W^0-W_X は次のように展開できる。すなわち、

$$W^0-W_X=da+(dA)X^0+(dC)Y^0+R'[db+(dC)'X^0+(dB)Y^0]$$

〔19〕六六頁参照。

（注5） 〔19〕七二頁以下参照。

（注6） 〔12〕、〔18〕四一四頁、〔19〕五四頁参照。

（注7）（注8） 〔2〕、〔7〕、〔8〕、〔9〕、〔10〕、〔11〕、〔15〕、〔16〕一〇一頁以下参照。

（注9） 〔16〕、〔17〕五〇九頁、〔18〕、〔19〕一二一頁参照。

（注10） （注3）および〔17〕五一四頁、〔19〕一五三頁参照。

（注11）（注12） 将来の全計画期間に亘る不確実性に対して、H・タイルはベイジアン理論によるアプローチを示唆している。〔16〕、〔17〕五〇六頁、〔19〕一三〇頁参照。

（注13） C・ヴァン・ド・パンは (4.11) 式をフィード・バック形式と呼んでいる。t'期 $(t'<t)$ のフィード・バック係数行列は、

$$K^{(tt')}L_{t'}=[K^{t1}, \ldots\ldots, K^{tt'}]\begin{bmatrix} K^{11} & \cdots & K^{1t'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{t'1} & \cdots & K^{t't'} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。〔10〕、〔19〕一四八頁参照。

主要参照文献

〔1〕 Bodewig, E., *Matrix Calculus.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1959.

〔2〕 Bowman, E. H., "Consistency and Optimality in Managerial Decision Making." *Management Science*, Vol. 9 (1963).
〔3〕 Burger, E., "On Extrema with Side Condition." *Econometrica*, Vol. 23 (1955).
〔4〕 Debreu, G., "Definite and Semidefinite Quadratic Forms." *Econometrica*, Vol. 20 (1952).
〔5〕 Hicks, J. R., *Value and Capital*. London, Oxford University Press, 1946.（安井琢磨・熊谷尚夫邦訳「価値と資本」数学附録）
〔6〕 Holt, C. C., "Linear Decision Rules for Economic Stabilization and Growth." *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 76 (1962).
〔7〕 Holt, C. C., F. Modigliani and J. F. Muth, "Derivation of a Linear Decision Rule for Production and Employment." *Management Science*, Vol. 2 (1956).
〔8〕 Holt, C. C., F. Modigliani and H. A. Simon, "A Linear Decision Rule for Production and Employment Scheduling." *Management Science*, Vol. 2 (1955).
〔9〕 Iglehart, D. L. and S. Karlin, "Optimal Policy for Dynamic Inventory Process with Nonstationary Stocnastic Demands." Chapter 8 of *Studies in Applied Probability and Management Science*, edited by K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf. Stanford University Press, 1962.
〔10〕 van de Panne, C., "Optimal Strategy Decisions for Dynamic Linear Decision Rules in Feedback Form." *Econometrica*, Vol. 33 (1965).
〔11〕 van de Panne, C. and P. Bosje, "Sensitivity Analysis of Cost Coefficient Estimates: The Case of Linear Decision Rules for Employment and Production." *Management Science*, Vol. 9 (1962).
〔12〕 Reiter, S., "Surrogates for Uncertain Decision Problems: Minimal Information for Decision Making." *Econometrica*, Vol, 25 (1957).
〔13〕 Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Harvard University Press, 1953.
〔14〕 Schlaifer, R., *Probability and Statistics for Business Decisions*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto and Lodon, 1959.
〔15〕 Simon, H. A., "Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function." *Econometrica*, Vol. 24 (1956).
〔16〕 Theil, H., "A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Planning." *Econometrica*, Vol. 25 (1957).
〔17〕 Theil, H., *Economic Forecasts and Policy*. Second Edition. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1961.
〔18〕 Theil, H. and T. Kloek, "The Operational Implications of Imperfect models." Chapter 8 of *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, edited by K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes, Stanford University Press, 1960.
〔19〕 Theil, H., *Optimal Decision Rules for Government and Industry*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1964.
〔20〕 Theil, H., "Linear Decision Rules for Macrodynamic Policy Problems." Chapter 2 of *Quantitative Planning of Economic Policy*, edited by B. G. Hickman. The Brookings Institution, Washington, D. C., 1965.