高校生における「無理数」の概念

大山正信・米沢光洋

Concept of irrational number ——in Senior High School students

Masanobu Ōyama and Mitsuhiro Yonezawa

無理数とうい概念は高校ではどうとりあつかわれているのか。そして，高校生はそれをどのように認識しているのであろうか。一般に高校生は，大学の受験という目標があるがために，このような概念の把握の前に，計算や，いわゆる問題解法の技能の養成だけに走ってしまう傾向があり，また，それを余儀なくされている。そういった技能よりもむしろ大切な概念の把握がこれからの高校における数学教育のなかにとり入れられるべきであって，大学入試問題もそれを助けるべく改善される必要があるのではないだろうか。

無理数はその発見の歴史的過程をみても，有理数の理解なくしてはとらえられらい。そのような意味から，有理数と対比させながら，高校生における無理数を検討していくことにする。以下がその小論であるが，これは鹿児島県立の某普通高校の生徒124人（1年47人，2年23人，3年54人）を対象に調査した結果によるものである。

1 "無理数を説明しなさい"と問われたときどう答えるか。

本論にはいる前に，高校生が無理数をどのように習ってきているか教科書をその媒介としてあげてみることにする。鹿児島県内の大半の中学校で使っている学校図書株式会社出版の中学3年の教科書では，その13ページにおいて次のように教えている。

『これまでに学んだ数のうち，整数（0を含む），分数（小数）を有理数といい，$\sqrt{2}$や$\sqrt{5}$のように整数や分数（小数）できっちり表わされさない数，すなわち有理数でない数を無理数という。

$$\text{数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整　数（正・負，0）}\\ \text{分　数（正・負）……小数（正・負）}\end{cases}\\ \text{無理数}——\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{5},\cdots\cdots,\ \pi\ \text{など}\end{cases}$$

』

また，この調査の対象とした某普通高校で使用している清水書院出版の数学Iでは，§4，無理式の27ページにおいて

『いままでに学んできた数のうち整数と分数とは分母，分子がともに整数である分数の形にかき表わすことのできる数である。このような数を有理数といい，これに対してこのような形にかき表わせない数を無理数という。(注意）無理数は小数で表わせば，循環しない無限小数になる。

たとえば，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots$，$\sqrt{3}=1.73205080\cdots\cdots$，$\pi=3.14159265\cdots\cdots$ 』

さらに数研出版（これは無理数の概念をいくらか大きくとり入れている）の数学Ｉによれば，その42ページの⑧無理数において

『$\sqrt{2}$は開平の計算をどこまで続けても開ききれない。したがって，$\sqrt{2}$の正確な値は無限に続く小数であらわされるものと考えられる。このような小数を無限小数という。

無限に続かない小数すなわち有限小数は，たとえば

$$2.3165=\frac{23165}{10000}=\frac{4633}{2000}$$

のように分母，分子が整数である分数の形にかくことができる。

また，無限小数のうち

$0.345345345\cdots$（略して，$0.\dot{3}4\dot{5}$と書く）

$0.716161616\cdots$（略して，$0.7\dot{1}\dot{6}$と書く）

などのように，いく桁かの数字が繰り返して無限に続く小数（これを循環小数といい，くわしくは数学IIで学ぶ）は，有限小数と同様に分母，分子が整数である分数の形に書くことができる。たとえば，

$$0.\dot{3}4\dot{5}=\frac{345}{999}=\frac{115}{333} \qquad 0.7\dot{1}\dot{6}=\frac{716-7}{990}=\frac{709}{990}$$

（右辺の分数を小数で表わして確めてみよ。）

逆に，分母，分子が整数である分数を小数の形で表わすと，有限小数かまたは循環小数になる。

分数，$\frac{m}{n}$（m, n は正の整数）を小数の形に表わすため，割り算 $m\div n$ を行なうと，各段階の割り算は割る数が n の割り算であるから，各回の余りは 0 か，1から $n-1$ までの整数である。余りに 0 がでてくるときは，そこで割りきれて$\frac{m}{n}$は有限小数となる。余りに 0 がでてこないときは，多くとも n 回までには 1 から $n-1$ までの同じ余りがでてきて，それから後の割り算は前と同様の繰り返しとなる。したがって，この場合，$\frac{m}{n}$は循環する無限小数となる。

すでに学んだように，分母，分子が整数である分数の形に書き表わされる数を有理数という。たとえば整数の $5=\frac{5}{1}$，$0=\frac{0}{1}$，$-3=\frac{-3}{1}$，分数の$\frac{2}{3}$，$-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5}$ などはすべて有理数である。

また，有限小数や無限小数で表わされる数を一般に実数といい，実数のうち有理数でないものを無理数という。』

というふうに，有理数および無理数を有限小数や無限小数との関連で教えている。これなら，ある程度なら概念の把握が可能となる。また，2年になって極限の概念を習いだすと，すべての有限小数は無限小数で表わされるということに気づくことによって，有理数とは循環する無限小数であらわされる数，無理数とは循環しない無限小数であらわされる数であるという区別をもみいだすことができるだろう。

さらに，この某普通高校の使用する清水書院出版の数学IIの59ページには，循環小数を教える

分野で次のように有理数，無理数をひきだしている。

『……以上のようなことから，有理数を小数でかけば有限小数かまたは循環小数になり，逆に，循環小数で書かれる数はすべて有理数になることがわかる。（中略）無理数を小数になおせば，もちろん無限小数になる。たとえば

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots \qquad \pi=3.1415926\cdots$$

これらもそれぞれ次のような無限級数である。

$$1+0.4+0.01+0.004+0.0002+\cdots$$

$$3+0.1+0.04+0.001+0.0005+\cdots$$

しかし，無理数をあらわす無限小数は決して循環しない。また逆に，循環しない無限小数であれば，それは１つの実数であるがその実数は有理数ではなく無理数である。』

教科書からこのように無理数に関する事柄をひきだしてみると，中学校あるいは高校の１・２年を通して高校生は無理数の概念をいくらか学んでいるはずである。だが，機械的な計算や問題解答に慣れっこになってしまっている彼らにそれが正しく認識されているかということになると，以下で指摘するように疑問を感ぜざるをえないのである。

表１は ⑴,有理数，無理数を説明しなさい。⑵,次のうちから無理数を選び○をしなさい。

$$\sqrt{4},\ \sqrt{8},\ 2.1\dot{5},\ 3.285,\ \pi=3.1415926535\cdots,\ 0.202002000\cdots$$

という２つの問いの関連のもとで無理数について，学年別におおよそのところで分類したものである。

この表１から，３年生においてさえも無理数を正しく説明できる生徒は少ないということを知ることができる。しかも，$\frac{q}{p}$(p, q は整数）の形に書きあらわせない数と説明した５人のうちの２人は，これに p, q は素でなければならないという条件をつけ加えている。これは，後で問題にするところの“$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明”で，$\sqrt{2}$が無理数でないとすれば有理数であるから，$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$(p, q はたがいに素）とおくことが「できる」とするところからきているようである。彼らは有理数$\frac{q}{p}$は必ずしも p, q がたがいに素という条件を必要としないということを認識していない。

整数や分数以外のすべての実数としている生徒は，$\frac{\sqrt{2}}{3}$や$\frac{\sqrt{3}}{2}$などの分数をどうとらえるかというところで疑問が生ずる。彼らは大体のところ無理数を理解しているようにみえるのだが，説明不足という感が強い。

値が確定していない数と答える生徒の中には，$\frac{5}{3}$などの循環小数も無理数であるなどとわざわざつけ加えている者もあり，またそうでなくてもこれらの生徒は13人中の７人までが循環小数$2.1\dot{5}$を無理数としている。

$\sqrt{\ }$ のついたものとか $\sqrt{\ }$ をはずせない数としている生徒が１年生に多いのに対して，値が確定していない数とか割り切れない数としているのは３年生に多い。これは過去の学習内容にもとづ

（表１）　対象：１年47人，２年23人，３年54人

無理数の説明	学年	人数	百分率 %	左のように説明した人のうちで，下のそれぞれを無理数とした者 $\sqrt{4}$	$\sqrt{8}$	$2.1\dot{5}$	3.285	$\pi=3.1415\cdots$	$0.202002000\cdots$
$\frac{q}{p}$ (p, q は整数) の形に書きあらわせない数	1年	1人	2.1		1人			1人	1人
	2年	2	8.7		2	2		2	1
	3年	2	3.7		2	1		2	2
整数や分数以外のすべての実数	3年	4	7.4		4	1		4	2
値が確定していない数	1年	2	4.3		2	1		2	2
	3年	11	20.3	1	11	6		9	8
$\sqrt{\ }$ のついたもの	1年	7	14.8	3	7		1	4	1
	2年	2	8.7	1	2	1		2	1
	3年	3	5.5		3	1		1	1
割り切れない数	1年	6	12.8		6	2		6	5
	2年	5	21.7		4	3		4	3
	3年	9	16.7		9	7		8	8
$\sqrt{\ }$ をはずせない数	1年	5	10.6		5	3	1	5	5
	2年	1	4.3		1				
無限小数	2年	1	4.3		1	1		1	1
	3年	3	5.6	1	3	3		3	3
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π など	1年	3	6.4		3	1		3	2
	2年	1	4.3		1	1		1	1
実数の範囲で，分数ならば割り切れない，小数ならば限界がない，根号のつくものなら開ききれないものをいう。整数はもちろんはいらない。	3年	1	1.9		1	1		1	1
小数になおせば無限小数で，規則的な変化をしない数	3年	1	1.9		1			1	
その他	1年	3	6.4	1	3			3	3
	2年	5	21.7		5	3		5	3
	3年	5	9.3		5	3		5	3
解答なし	1年	20	42.6	3	20	6	3	13	9
	2年	6	26.2	1	6	4		4	4
	3年	15	27.7	1	13	9		11	9
1, 2, 3年を通じての合計				12人	121人	60人	5人	99人	79人
学年別の百分率 ( )内は学年別の人数	1年			14.8 (7)	100 (47)	27.7 (13)	10.6 (5)	78.7 (37)	59.6 (28)
	2年			8.7 (2)	95.7 (22)	65.2 (15)	0 (0)	82.6 (19)	60.9 (14)
	3年			5.6 (3)	96.3 (52)	59.3 (32)	0 (0)	79.6 (43)	68.5 (37)

く経験からくるのだろう。割り切れない数としている生徒が非常に多いが，これはまた分子が分母で割り切れずに無限小数になるとか，開平できない（本質的には $\sqrt{\ }$ をはずせないと同じだと

思える）というような意味で書いている。そしてその結果彼らの6割が，循環小数 $2.1\dot{5}$ を無理数としてとりあつかっている。しかも，3年生においては著しく極端な結果を示している。

循環小数を無理数の中にいれている生徒を学年別に比較すると非常に注目すべき結果があらわれてくる。1年生が13人で27.7%，2年生が15人で65.2%，3年生が32人で59.3%であって，どうしたことか逆に2年3年生が誤解しているのである。これは循環小数をいくらかくわしく習った2年3年生がそれを習ったがために誤解したという見方ができる。1年生に誤解が少ないようだがそれは循環小数 $2.1\dot{5}$ を有限小数 2.15 とみてとったのではないかと考えることができる。いずれにせよこのことに関しては今後の指導のなかで問題にされなければならない。

また循環小数 $2.1\dot{5}$ を無理数としている生徒，1年13名，2年15名，3年32名中，それぞれ11名，14名，29名というほとんどが循環しない無限小数 0.202002000…（これは実際無理数であるが）を無理数としているのも，彼らが割り切れないとか確定しないという判断基準のもとで無理数を選びだしていることを明らかにしている。彼らによれば，循環しない無限小数のみならずすべての無限小数が無理数なのである。もっとも，はっきりと無理数とは無限小数であるとする生徒は4人のみであるが同じように認識している生徒は意外と多いようである。

循環小数 $2.1\dot{5}$ と，循環しない無限小数 0.202002000… を除くと，他の数は比較的正しく判断されている。なかでも $\sqrt{8}$ を無理数としない生徒は非常にまれで124人（全員）のうち3名である。$\sqrt{4}$ を無理数とした生徒も少ないがその12名のうち4人が（あるいはそれ以上の可能性が強いが）$\sqrt{\ }$ のついたものが無理数であるという考えで判断している。

次に“有理数と無理数をあわせて何というか”という問いに対して実数と答えることのできる生徒は，1年12人（25.5%），2年20人（86.9%），3年42人（77.8%）である。1年生は別として，2年，3年の生徒は実数の基本的体系にはいくらか理解を示しているといえよう。3年が2年より低くなっているのは，2年生で対象となった生徒がトップクラスのしかも上位の者ばかりであったからにほかならない。ところで1年生について述べるとこの問いに関して彼らは実数以外には，自然数（5人），複素数（2人），関数（2人），単項式，数，分数（それぞれ1人ずつ）と答えている。だが，大半の1年生はこの問いには答えていない。このことは，彼らが数の体系はもちろん自然数でさえどんなものかをつかみとっていないということにいきつくだろう。そして，3年生にいたっても，整数（4人），自然数（3人）などと答える生徒もいるのである。

こうしてみてくると，高校生の認識の中にある無理数はあいまいであったり誤っていたりしているという事実をみいだすことができる。以下において，彼らの考える有理数，無理数をもっと深く追求してみることにする。

2　高校生の認識の中の有理数の稠密性

表2は“$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ という関係を満足する有理数 x が存在するか，次の中から正しい解答を選〇びをしなさい。(イ)，存在しない。(ロ)，ただ1つ存在する。(ハ)，1つではないが個数が限られてい

る。(ニ), 無数に存在する。“という問いに対しての解答をもとに学年別に比較したものである。みるとおり学年があがるにつれ正解(ニ)がふえている。以下において，4つの段階に分けて若干の検討を試みたい。

(表2)

$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ を満たす有理数 x	3年　(47人)	2年　(23人)	1年　(54人)
(イ) 存在しない	10人 (21.3%)	1人 (4.3%)	6人 (11.1%)
(ロ) ただ1つ存在する	4人 (8.5)	1人 (4.3)	0人 (0)
(ハ) 1つではないが個数が限られている	13人 (27.6)	6人 (26.1)	8人 (14.8)
(ニ) 無数に存在する	20人 (42.6)	15人 (65.3)	40人 (74.1)

(イ) 存在しないを選びだした生徒のその理由には次のようなものがある。

A, $\frac{1}{2.9\cdots}\leqq x\leqq\frac{1}{2.\ \cdots}$には有理数 x はない。 (1年)

B, $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$を満足する有限小数 x は存在しない。 (2年)

C, $2<x<3$の間には整数が存在しないから。 (3年)

D, $\frac{1}{3}$が無理数であるから。(無理数は存在すると思う) (3年)

これらの生徒達は有理数を理解していないためにこのような誤りをおかしているといえよう。たとえば，Bは有理数は有限小数のみであると考えている（もちろん$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ を満たす有限小数 x も存在するが）ところに最初の誤りをおかしている。またDにしても$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$を，すなわち循環小数を無理数として最初から誤りをおかしている。Aのこらした工夫はみるべきところがある。彼は3よりちょっと小さいあるいは2よりちょっと大きい数を分母にもってくることによって等号をつけて考えようとした。まさに有理数の稠密性を無視した行為といえよう。またCは整数が存在しないからといっているが，彼は有理数，無理数をあわせて整数というと前の問いで述べている1人であり実数の体系をまだ理解していない。

(ロ)ただ1つ存在するを選んだ生徒は表2にみるとおり非常に少ない。これを正答とした1年生2人が，$\frac{1}{3}=0.33\cdots$と，$\frac{1}{2}=0.5$ の間の0.4が有理数であって他には存在しないとしているが，有理数をいくらかでもわかっていれば次の段階として0.45などをみつけうるはずである。また，小数を用いなくても$\frac{4}{12}<x<\frac{6}{12}$というふうになおし，$\frac{5}{12}$をみつけることにより，そしてさらにもっと分母を大きくして他の有理数の存在に気づくだろうということ，それによって(ハ)，(ニ)のいずれかを選んだということが考えられる。

(ハ) 1つではないが個数が限られているを選んだ生徒は(ニ)についで多い。ここにくると，彼らが有理数の稠密性を把握していなかったということが確実になる。たとえば，「x の範囲が限定されているからその数は無数にあると考えるわけにはいかない」などというのが彼らの判断の根拠となっているのである。

(二) 無数に存在するを選びだした生徒はなるほど多いのだが彼らはほんとうにわかっているのだろうか。彼らのなかに判断の理由として$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$には2で割りきれる数（彼は有理数は2で割りきれる数だと考えている）がいくつも存在することをあげていたり，また理由を述べることのできない生徒も多いのである。それでも次のような考え方で判断した生徒もわずかではあるがみられた。

A，$\frac{1.1}{3}$，$\frac{1.2}{3}$，…，$\frac{1.11}{3}$，$\frac{11.2}{3}$，…，$\frac{1.111}{3}$，$\frac{1.112}{3}$，…と無数に存在する。
B，0.4，0.41，0.411，…，0.42，0.421，0.4211，…と無数に存在する。
C，分母を通分すると，$\left(\frac{2}{6},\ \frac{3}{6}\right)$，$\left(\frac{4}{12},\ \frac{6}{12}\right)$，$\left(\frac{6}{18},\ \frac{9}{18}\right)$，…というふうに，だんだんと分子にひらきをもたすことができる。

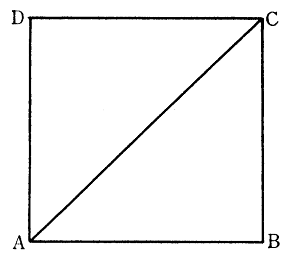
$a<x<b$ (a, b は有理数で $a<b$) を満たす有理数 x は無数に存在するという一般的な有理数の稠密性は次のようにして説明できる。

$a<x<b$ を満たす有理数 x の1つとして $\frac{a+b}{2}$（これは明らかに有理数）が存在する。今，$c=\frac{a+b}{2}$ とおくと，$a<x<c$ を満たす x の1つとして$\frac{a+c}{2}$（有理数）が存在する。またこれを d とおくとことによって同じように有理数の存在がいわれる。以下同様にして無数の有理数の存在をいうことができる。

[3] 正方形の一辺の長さと対角線の長さとの比について

ピタゴラス学派が通約不可能な線分をみいだした根拠となった正方形に関しての次のような問題を高校生の前にだして若干の検討を試みよううと思う。

（問題）正方形の一辺の長さとその正方形の対角線の長さの比は二つの自然数の比としてあらわされるか。



この証明は「AB と AC が二つの自然数 p, q（ただし p, q はたがいに素）の比としてあらわされるとすれば」として出発すると可能である。しかし，ここでは二つの段階に分けて，すなわちその1つは，比が $1:\sqrt{2}$ になることに気づき，無理数が分母，分子整数の分数ではあらわされえないことを活用できるかどうか，2つめに $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を問うことにした。

この某普通高校の生徒（対象）はほとんどピタゴラスの定理を知っているはずであり，したがってまた AB と AC の比が $1:\sqrt{2}$ であることも知っている。しかしながら自然数とは何かなどといったことがわかっていないために次のような誤りをおかしている。

（誤り1）正方形の一辺の長さを1とすると，対角線の長さは$\sqrt{2}$であるから，比は$1:\sqrt{2}$となる。したがって，二つの自然数の比としてあらわすことができる。(1年生と3年生にみられる)

（誤り2）正方形の一辺の長さと対角線の長さの比は $1:\sqrt{2}$ である。これは平方すると 1:2

になる。したがって，二つの自然数の比としてあらわされる。(3年生にみられる)

誤り1の生徒は前に述べた問いで有理数と無理数をあわせて自然数とよぶと答えた生徒であり，彼によれば1も$\sqrt{2}$も自然数なのである。また誤り2の生徒は，二つの線分の長さを比較するのにそれぞれを平方したものを比較してもかまわないと考えている。

次に$\sqrt{2}$が無理数であることの高校生による証明を考察してみると意外な事実，すなわち有理数，無理数の説明のところでそれらをわかっていなかった生徒がここではあたかもわかっているかのように感じられるということに気づくのである。たとえば，有理数を$\sqrt{\ }$のつかないものだとか値が確定している数，割りきれる数とし，無理数を$\sqrt{\ }$のついたもの，値が確定していない数，割りきれない数などと考えているはずの生徒が$\sqrt{2}$が無理数でないとすれば有理数であるから$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ (p, q はたがいに素) とおくことができる」として出発しているからおもしろい。つまり，彼らは有理数や無理数を正しく理解はしていないけれどもこのような証明問題のなかでは彼らの教えられた経験によってこのようにおけばよいことを知っているのだ。まさに「知っている」にすぎない。

$\sqrt{2}$が無理数であることの証明は，過去においてそんなことを証明した経験をもたない1年生にとっては難しかったようである。証明を試みている1年生20名のうち15名（2年3年にもみられる）までが実際に開平を試み，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ となって開平できない（ほとんどの生徒が割りきれないという表現をしている）として，$\sqrt{2}$が無理数であることの証明にかえている。ところで，無理数を正しく説明した生徒が1人だけ1年生にいたのであるが，その彼も「$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ であって分母，分子が整数である分数にあらわせない」と，それだけのことですましている。またその他には「$\sqrt{2}=x$ $(x>0)$ とおく。$2=x^2$ これを満足するような有理数 x は存在しない。したがって，$\sqrt{2}$は無理数である。」というような証明もすべての学年を通してみうけられる。参考のために$\sqrt{2}$が無理数であることの証明を次にしるしておく。

（証明）$\sqrt{2}$が無理数でないとすれば有理数であるから，$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ (p, q はたがいに素) とおくことができる。両辺を平方して変形すると $q^2=2p^2$……① したがって q^2 は偶数，さらに q も偶数となる。$q=2r$ とおく（r は正の整数)。①に代入して変形すると，$p^2=2r^2$ したがって同様に p も偶数となる。このことより p, q はいずれも偶数となり，p, q をたがいに素とおいたことに矛盾する。故に，$\sqrt{2}$は無理数でなければならない。(背理法)

4 Dedekind の切断と実数の連続性の認識

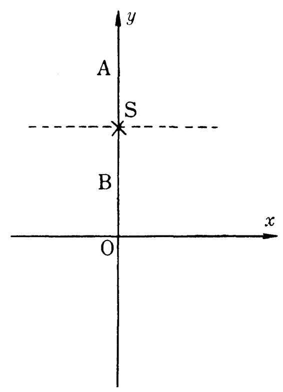
専門的な Dedekind の切断を高校生の前に示すことは容易ではないが座標軸を媒介にすることでそれがいくらか可能になってくる。

y 軸を点Sで切断し，点Sより上部を A，下部をBとする。ただし，点Sは A, Bのいずれか一方に含まれるものとする。このとき以下の3つの問いに答えよ。

(1)，点Sが $(0, \sqrt{3})$ のとき，Aの y 座標の中で最小の自然数は（　）であり，またBの y 座

標の中で最大の自然数は（　）である。

(2), Aの y 座標に最小の有理数がなくしかもBの y 座標に最大の有理数がないように切断できるか。もし切断できるとすればそれはどのような点Sで切断するのか。その例を1つあげなさい。



(3), 適当なものに○をしなさい。

y 軸をどこで切断してもその切断点の y 座標は（整数，自然数，有理数，無理数，実数）になっている。

上のような問いに対しての解答をもとに少しばかり検討してみようと思う。

(1)の問題からの検討……1年生18人（38.8%），2年生19人（82.6%），3年生42人（77.8%）がそれぞれ2および1という正解をだしている。$\sqrt{3}$ を両方の（　）にあてはめている生徒が今度は2，3年生が数名，1年生が19人（40.4%）となっている。このように1年生の理解が少ないのでは自然数が正しく認識されていないからであろう。

(2)の問題からの検討……この問題に関して切断できるという正解をだしている生徒は1年が13人（27.7%），2年8人（34.8%），3年15人（27.8%）である。そして，切断できないと答えている生徒も1年3人，2年3人，3年9人であり，ほかのほとんどの生徒は答えていない。またこのことがむしろ大事だが，切断できるとした生徒でもその切断点の y 座標として $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などのような無理数（無理数でありさえすればよい）をあげている生徒はまれにしかいなく1年2年に1人ずつ，3年に7人である。こうしてみると高校生の認識の中には有理数の切断はほとんど存在していないということがいえそうである。このように正しく理解している生徒は少ないのであるが，他のほとんどは原点を切断点と考えているのである。

(3)の問題からの検討……1の最でみたように1年生は別としても2，3年生のほとんどは有理数と無理数をあわせて実数とよぶことを知っている。では，彼らは実数の連続性を認識しているだろうか。彼らにとって「連続」は新しいものかもしれないが，連続ということばを使わずに(3)のような形をとると1で実数と答えた生徒のほとんどがここでまた実数と答えることができる。実数と答える生徒は，1年17人（36.2%,）2年18人（78.3%），3年43人（79.6%）である。1年生には実数，自然数を知らないがゆえに，この問いに対して自然数を選びだしている生徒が21人もいて実数よりも多い。しかし，2，3年になるとそれがほとんどみられない。また，整数，有理数あるいは無理数を選んでいる生徒のほとんどいないのも，彼らが座標には整数もとれるし有理数や無理数もとれることを実際に問題を解く経験を通して知っているからだろう。

5　高校生のもつ疑問

これまでに少しばかりの検討をなしてきたが，高校生の中には無理数の概念を認識していなかったり誤った概念をもっている者が意外と多い。当然のこととして，彼らは疑問に思うことをい

っぱいもっているだろう。彼らは無理数を把握する上でどのような問題点にぶつかっているのか，高校生自身の提出した疑問点に関して最後の検討を試みることにする。

◦疑問1　(1年生)

有理数や無理数というものは実際の生活には役立たず整数のみがいかされてきた。それなのになぜこんなものをみつけたのか。

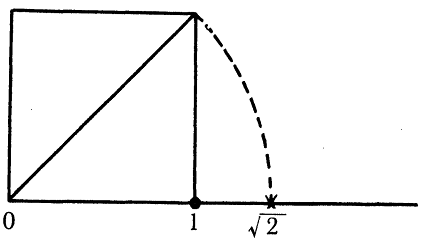
◦疑問2　(3年生)

無理数（たとえば$\sqrt{2}$など）は割りきれないのにどうして座標上に点がとれるのか。

◦疑問3　(3年生)

πはどうして無理数とわかるのか。

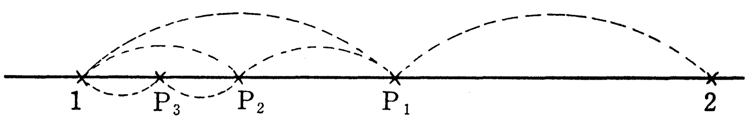
先に3において，ピタゴラス学派が正方形を通して通約不可能な線分をみいだすことによって，$\sqrt{2}$という無理数（新しい数）を発見したことを示したが，それが高校生が疑問1で示すところである。また数研出版の数学Ⅰによれば，その80ページの7整方程式の根において自然数にはじまる数の発展を有理数まで書いたあと『有理数の範囲では加減乗除の四則計算がつねにできて，一次方程式，$ax+b=0$ (a, bは有理数，$a\neq 0$)……(3)は，つねに根をもつ。しかし，開平の計算は必ずしもできない。すなわち，二次方程式，$x^2=2$や$x^2=3$などは有理数の根をもたない。このような方程式がつねに根をもつように$\sqrt{2}$や$\sqrt{3}$などの無理数を考えて数の範囲を実数にまで張拡した』として，方程式との関連のもとで数の発展を教えている。



疑問2は高校生の中に多く潜在する疑問であろう。ピタゴラス学派は無理数$\sqrt{2}$の存在をみいだしたが，その$\sqrt{2}$は次の図のように正方形の一辺を単位の長さとし，対角線を半径とする円をえがくことによって，とることができる。

先の4の(3)にヒントをえて，次のようなおもしろい誤解をしている生徒がいる。彼は有有理数と無理数をあわせて実数とよぶということを知っている。

「何げなく僕たちは座標をとっているが，その点が無理数であるかもしれないということがわかったような気がする。たとえば，図のP点のように限りなく等分していくその点は無理数であるかもしれない。」



ところが，この点はPの番号を極限までとると$\lim_{n\to\infty} P_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=1$となって無理数ではなくなる。彼のこの誤解は，彼が1において，「無理数とは確定した数が存在しないもの」としているところから生じていると考えられる。彼は，$\lim_{n\to\infty} P_n$なる点の値を確定したものではないと受けとめたのである。

π を無理数としている生徒は $\sqrt{8}$ についで多かった。それだけに π が無理数であるということはみんなに知られている。しかし，それがなぜいえるのか，円の直径と円周の比はなぜ自然数の比としてあらわされないのか彼らは知らされていない。もちろん，このことは専門的な知識を必要とするので容易ではないが。しかしながら，彼らがただ計算のために π を使うのではなく，π そのものの本質を知ろうとするところに数学の価値がみいだされそうな気がする。

以上，5つの段階を設けて，高校生の中にある無理数の概念を検討してきたが，彼ら自身，説明せよと言われると何も言えないといっているように，彼らの中にはまだ無理数の概念を認識していない生徒や誤った概念をもっている生徒が非常に多い。彼らに無理数の概念を，そのためには数全部の概念を正しく認識させることが今後の課題である。（終り）