5 | Mathematikdidaktik Grundschule

Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press

5 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 5

University
of Bamberg
Press
2015

Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press
2015

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Herstellung und Druck: docupoint, Magdeburg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press, Anna Hitthaler
Umschlagfoto: © A. Steinweg

http://www.uni-bamberg.de/ubp/

ISSN: 2193-2905
ISBN: 978-3-86309-367-9 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-368-6 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-opus4-455097

Inhaltsverzeichnis

... aus den Arbeitsgruppen

Vorwort

Die traditionell am ersten Novemberwochenende stattfindende Jahrestagung der Mitglieder des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) in Tabarz (Thüringen) stand im Jahr 2015 unter dem Fokus „Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter“. Mit dieser inhaltlichen Schwerpunktsetzung sollte die zentrale praktische und theoretische Entwicklungs- und Forschungsarbeit der Mathematikdidaktik im Primarbereich akzentuiert und diskutiert werden.

In den Hauptvorträgen wurden verschiedene Aspekte des Rahmenthemas in den Blick genommen. So ging Marei Fetzer in ihrem Vortrag „Bildungsstandards und Unterrichtspraxis“ auf die Fähigkeit des Argumentierens ein und beleuchtete dabei, wie Entwicklungen beim Argumentieren gezielt unterstützt werden können. Charlotte Rechtsteiner-Merz widmete sich dem Thema „Rechnen entwickeln – Flexibilität fördern“. Hierbei standen die Ablösung vom zählenden Rechnen und die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen im Mittelpunkt. Mit den räumlichen Fähigkeiten von Grundschulkindern befasste sich Meike Grüßing in ihrem Vortrag „Ich denk mich da immer so rein und dann sehe ich das so“. Schließlich trug Michael Gaidoschik zu dem Thema „Vermeidbare und unvermeidbare Hürden beim Rechnenlernen“ vor. Er arbeitete zentrale Hürden am Eingang zur Grundschulmathematik heraus und diskutierte auf dieser Basis notwendige Handlungsschritte.

Durch die Hauptvorträge ist es gelungen, verschiedene Aspekte der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten aufzugreifen und jeweils konkrete Denkanstöße und Diskussionsansätze zu bieten. So konnten die vorgestellten Forschungsansätze, Erprobungsbeispiele, Standpunkte und Ergebnisse lebendig werden und in eine konstruktive Auseinandersetzung münden.

Ein besonderer Dank richtet sich an alle Kolleginnen und Kollegen, die mit ihren Beiträgen aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung neue Dankanstöße boten und sich der Diskussion in den Plenumssitzungen oder den Arbeitsgruppen stellten. Danken möchte der Sprecherrat im Namen aller Teilnehmenden den Koordinatorinnen und Koordinatoren, die am Samstagnachmittag und in diesem Jahr auch erstmals in einem Zeitfenster am Sonntagvormittag die verschiedenen Arbeitsgruppen moderierten. Ihr Engagement trägt wesentlich dazu bei, dass u.a. auch Nachwuchsforscherinnen und -forscher Gelegenheit zur Präsentation und Diskussion ihrer Projekte im Arbeitskreis Grundschule erhalten.

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger	Dr. Claudia Lack
Prof. Dr. Christof Schreiber	Prof. Dr. Sebastian Wartha

Webseite des Arbeitskreises http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/

Argumentieren – Prozesse verstehen und Fähigkeiten fördern

von Marei Fetzer

Die Fähigkeit zu argumentieren soll im Mathematikunterricht von Beginn an aufgebaut und gefördert werden. Doch wie kann das gehen? Wie lassen sich Entwicklungen beim Argumentieren auslösen und fördern? Im ersten Teil des Beitrags wird vorgestellt, wie Kinder im Mathematikunterricht argumentieren, und an welche Fähigkeiten sich anknüpfen lässt. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen werden im zweiten Teil konkrete Anregungen zusammengestellt, wie sich Entwicklungen beim Argumentieren gezielt anstoßen lassen.

Schlüsselwörter: Argumentieren, Toulmin, Datum, Garant

Das Argumentieren hat als allgemeine mathematische Kompetenz seinen festen Platz im Mathematikunterricht der Grundschule. Dabei geht es darum, dass die Kinder lernen, mathematische Aussagen zu hinterfragen und auf Korrektheit zu prüfen, mathematische Zusammenhänge zu erkennen und Vermutungen zu entwickeln, sowie Begründungen zu suchen und nachzuvollziehen (KMK, 2004, S. 8). Nur leider gelingt das nicht immer so, wie Lehrerinnen und Lehrer sich das wünschen. Aus der Perspektive der mathematikdidaktischen Forschung kann man unterschiedlich ansetzen, um Entwicklungen beim Argumentieren anzustoßen. Unerlässlich sind Angebote für Lehrerinnen und Lehrer, wie sie konkret im Unterricht arbeiten können. Dazu gehören die Entwicklung von Aufgabenformaten oder Lernumgebungen, die zur Förderung der Argumentationskompetenz beitragen, sowie Anregungen zu einer begünstigenden Fragehaltung oder methodische Vorschläge. Voraussetzung für die Entwicklung konkreter Vorschläge für den Unterricht ist allerdings stets das Wissen darüber, wie Kinder im Mathematikunterricht überhaupt argumentieren. Auf der Grundlage einer soliden Kenntnis über den Ist-Zustand können konstruktive Ansätze besonders wirkungsvoll ansetzen.

Entsprechend ist der Beitrag in zwei große Blöcke gegliedert. Im ersten wird der Frage nachgegangen, wie Kinder im Mathematikunterricht argumentieren. Welche Formen des Begründens und Erklärens lassen sich beobachten? Welche Fähigkeiten sind bereits da, worauf lässt sich aufbauen? Dieser Teil folgt einem rekonstruktiv-beschreibenden Forschungsansatz.

Der zweite Block baut auf den Erkenntnissen des rekonstruktiven Teils auf und widmet sich der Frage, wie sich Entwicklungen beim Argumentieren anstoßen lassen. Hier sind konkrete Anregungen zusammengestellt, wie sich Argumentationsprozesse fördern lassen. Der zweite Teil ist konstruktiv aus-gerichtet.

1 Wie argumentieren Grundschulkinder? - Rekonstruktiver Ansatz

Wie argumentieren Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule? Welche Praxis des Argumentierens finden wir im alltäglichen Mathematikunterricht tatsächlich vor? Mit diesem Fragenkomplex beschäftige ich mich seit einigen Jahren (vgl. Fetzer, 2012; 2011a; 2009). Dabei steht für mich im Mittelpunkt, dass Argumentieren ein sozialer Prozess ist, in dem es darum geht, (mich selbst und) andere im Hinblick auf eine inhaltliche Frage zu überzeugen. Entsprechend fokussiere ich interaktive Unterrichtsprozesse. Grundlage meiner Untersuchungen zum Argumentieren sind Videoaufnahmen, von denen Transkripte erstellt wurden. Das methodologische Vorgehen ist rekonstruktiv, die systematisch ausgewählten Szenen werden mit Interaktions- und Argumentationsanalysen untersucht. Die Theorieentwicklung erfolgt über die Komparation zahlreicher Szenen. Theoretisch und methodisch greife ich auf Toulmin und seinen argumentationstheoretischen Ansatz zurück. Entsprechend stelle ich im Folgenden Toulmins Ansatz in seinen Grundzügen vor.

1.1 Toulmin

Stephen Toulmin war ein amerikanischer Philosoph, der in seinem Buch „The Uses of Argument“ (2003) der Frage nachgeht, wie Argumente eingesetzt werden, um andere zu überzeugen. Für Toulmin steht die Struktur von Argumenten im Fokus des Interesses. Wie sind Argumentationen aufgebaut? Was macht eine Argumentation aus? Er stellt fest, dass Argumentationen eine bestimmte Grundstruktur aufweisen. Sie sind stets aus denselben Elementen aufgebaut: Datum, Konklusion und Garant.1 Toulmin hat diese Elemente, die bestimmend sind für eine Argumentation, in einem grafischen Layout (Abb. 1) wiedergegeben. [2]

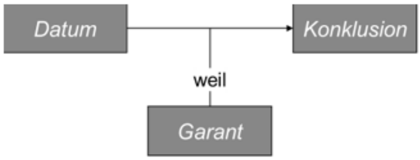

Abb. 1 Grafisches Layout nach Toulmin (2003, S. 92ff.)

Die *Konklusion*[3] ist die Aussage, die belegt werden soll. Beim *Datum*[4] handelt es sich um unbestrittene Tatsachen oder Informationen, die als Antwort auf die Frage „Was nimmst du als gegeben?“ dienen können. Somit besteht die kürzest denkbare Argumentation lediglich aus dem Schluss „Datum, deswegen Konklusion“. *Garanten* bieten eine erweiterte Möglichkeit zu argumentieren. Es sind allgemeine oder hypothetische Aussagen, die als Brücke dienen können, um die Schlüsse vom Datum zur Konklusion zu legitimieren. Sie beantworten die Frage „Wie kommst du dahin?“ und ‚garantieren‘ somit die Zulässigkeit des Schlusses. Diese drei Elemente bilden nach Toulmin den Kern einer Argumentation: Aus dem Gegebenen (Datum) lässt sich die Konklusion folgern, weil der Garant diesen Schluss erlaubt. (Toulmin, 2003, S. 87ff.) Gegeben ist beispielsweise die Aufgabenstellung: „Wer hat Recht? Timo rechnet 3+4*2+6 =20, Luis rechnet 3+4*2+6 =17.“ Es lässt sich schließen, dass Luis Recht hat, weil die Regeln der Punkt-vor-Strichrechnung zur Anwendung kommen.

Auf der Grundlage von Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz wird es mithilfe einer funktionalen Argumentationsanalyse möglich, die Struktur von Argumentationen zu rekonstruieren. Es lässt sich bestimmen, welche Funktion einzelne Handlungen oder Äuße-

---

1 Im englischen Original heißen die genannten Elemente: data, conclusion und warrant (Toulmin 2003, 87ff.).

2 Toulmin führt auch weitere Elemente ein, die jedoch im Zusammenhang mit diesem Beitrag nicht zum Tragen kommen.

3 Concludere heißt auf lateinisch *schließen*. Aus dem Englischen ist der Begriff *conclusion – Zusammenfassung / Schlussfolgerung* bekannt.

4 Datum ist das Partizip des lateinischen Verbs *dare – geben*. Wörtlich übersetzt heißt Datum also *das Gegebene*.

rungen innerhalb einer Argumentation haben. Wovon wird ausgegangen, was wird als gegeben angesehen? Welche Äußerung fungiert als Konklusion? Durch welche Handlung wird der Schluss ggf. legitimiert? Die Argumentationsanalyse ist somit keine Sequenzanalyse, mit deren Hilfe Handlungsabläufe im zeitlichen Ablauf untersucht werden. Sie ist eine *funktionale* Analyse, bei der Handlungen und Äußerung hinsichtlich ihrer *Funktion* innerhalb der Argumentation beleuchtet werden.

1.2 Empirische Forschungsergebnisse

Es ließ sich rekonstruieren, dass sich Argumentationen von Grundschulkindern im Mathematikunterricht auszeichnen durch

- einfache Schlüsse,
- substanzielle Argumentationen,
- geringe Explizität und
- verbales und non-verbales Argumentieren. (Fetzer, 2011a)

Diese vier Punkte werde ich im Folgenden kurz erläutern.

Einfache Schlüsse

Vieles, was wir im Mathematikunterricht der Grundschule beobachten, würden wir auf den ersten Blick nicht als Argumentation beschreiben: Auf die Aufforderung „Suche das Doppelte von 7." antwortet ein Kind mit „14". Es fehlt ein ‚Weil' und somit genau die Komponente, die wir als zentral für eine Argumentation empfinden. Von dem, was in den Bildungsstandards als Argumentationskompetenz beschrieben wird, sind solche Äußerungen (noch) weit entfernt. Gleichwohl sind diese kurzen Einwürfe strukturell betrachtet bereits Argumentationen. Nach Toulmin handelt es sich um einfache Schlüsse, die lediglich aus Datum und Konklusion bestehen. Ein Garant, der die Zulässigkeit des Schlusses legitimieren könnte, bleibt aus. Solche einfachen Schlüsse lassen sich im Unterrichtsalltag oft beobachten und sind sozial akzeptiert.

Substanzielle Argumentationen

Bei einigen Argumentationen bleibt ein gewisser Zweifel an der Zulässigkeit des Schlusses: „Das ist 12, weil Aynur das auch so hat." „Das darf man so machen, weil ich das immer so rechne." Toulmin bietet eine Unterscheidung in sichere und unsichere Schlüsse an.

Den sicheren Schluss nennt Toulmin *„analytische Argumentation“* (2003, S. 114ff.). Hierbei sind alle Informationen, die vom Schluss vom Datum zur Konklusion benötigt werden, im Garanten enthalten. Toulmin selbst gibt zu bedenken, dass solche analytischen Argumentationen, die keinen Zweifel an der Zulässigkeit des Schlusses zulassen, lediglich in der Mathematik als Deduktionen vorkommen (ebd., S. 118). Entsprechend ist es wenig verwunderlich, dass sich im empirischen Datenmaterial keine analytischen Schülerargumentationen finden ließen. Unsichere Schlüsse, die Toulmin als *„substanzielle Argumentationen“* bezeichnet (ebd., S. 114ff.), lassen sich dagegen oft beobachten. Nicht alle Informationen, die für den Schluss benötigt werden, sind hierbei im Garanten enthalten. Es sind unterschiedliche Garanten denkbar, um denselben Schluss zu legitimieren: „Das ist 12, weil Aynur es auch so hat ..., weil ich nochmal nachgerechnet habe, ...weil ich das auswendig weiß.“ Substanzielle Argumentationen sind argumentationstheoretisch zwar vage, können jedoch eine hohe Überzeugungskraft haben. Sie sind nicht nur sozial als angemessen akzeptiert, sondern werden sogar gelehrt: Der Schluss, dass ein Messergebnis korrekt ist, wird beispielsweise durch den Vergleich mit dem Nachbarn oder durch genaues Nachmessen legitimiert.

Geringe Explizität

Argumentationen, die Schüler hervorbringen, sind häufig wenig explizit. Es lässt sich beobachten, dass *einzelne Elemente der Argumentation* implizit verbleiben. Es bleibt beispielsweise unklar, was das *Datum* ist. Wovon gehen wir aus? Sobald das Datum implizit verbleibt, wird es für die Beteiligten einer Argumentation sehr schwierig nachzuvollziehen, worum es geht und was überhaupt geklärt werden soll. Die Interaktion gerät ins Stocken. In anderen Situationen wird der *Garant* der Argumentation nicht explizit gemacht. Stattdessen ‚schwingt‘ die Legitimation des Schlusses ‚mit‘ bzw. wird sie ‚unterschwellig unterstellt‘. Beispielsweise erklärt ein Zweitklässler, wie er 45+8 (nicht) gerechnet hat: „Ich habe 5 plus 8 gerechnet, gibt 13. Aber dann kommt die 4 vorne hin, deshalb kann es die 13 nicht sein.“ (vgl. Fetzer, 2007, S. 214). Er geht zunächst davon aus, dass man die Aufgabe stellenweise zerlegt, beginnend mit den Einern, berechnen kann. Aber 13 kann es nicht sein (Konklusion). Warum? Sein Garant bleibt implizit: Weil 13 nicht einstellig bzw. zu groß ist? Weil die 4 übrig bleibt? Weil er so ein dreistelliges Ergebnis erhielte? Neben diesen Fällen, in denen Datum oder Garant nicht explizit gemacht werden, lässt sich ein dritter Fall geringer Explizität von Argumentationen rekonstruieren. Dabei bleibt die *Funktion von Handlungen* innerhalb der Argumentation diffus oder unklar. Ist der Beitrag eines Schülers als Datum zu verstehen, oder ist er als Konklusion zu deuten? Diese Entscheidung lässt sich insbesondere bei einfachen Schlüssen z. T. schwer treffen. Bei komplexen Argumentationen erweist sich dagegen oft die Unterscheidung von Datum und Garant als problematisch. Diese argumentationstheoretische Mehrdeutigkeit ist jedoch kein Spezifikum der Argumentationsweise von Grundschulkindern im Mathematikunterricht, sondern, wie Toulmin selbst betont (2003, S. 91ff.), typisch für unterschiedliche Kontexte. Geringe Explizität einer Argumentation sorgt für Verwirrung, ‚was gerade Sache ist' und erschwert somit deren Nachvollziehbarkeit. Es wird schwierig, mathematische Aussagen zu hinterfragen oder Zusammenhänge zu erkennen. Gezieltes Nachfragen wird nicht nur für Mitschülerinnen schwierig, sondern auch für die Lehrperson. Die Überzeugungskraft der Argumentation leidet.

Verbales und non-verbales Argumentieren

Vom Gefühl her wissen wir schon längst, dass Mathematiklernen in einer Welt der Dinge stattfindet. Mathe ist mehr als Reden, Mathe ist tun, handeln und ausprobieren. Mit Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz lässt sich rekonstruieren, dass Grundschulkinder im Mathematikunterricht nicht nur verbale, sondern auch non-verbale Formen des Argumentierens umsetzen. Sie zeigen oder verweisen auf das, was sie als gegeben ansehen. So machen sie das Datum non-verbal explizit. Auch Garanten werden in vielen Fällen ausschließlich non-verbal explizit gemacht. Zerschneiden, Verschieben oder Falten machen die Zulässigkeit eines Schlusses über vielfältige Sinneskanäle erfahrbar.

So argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht: Sie bringen einfache Schlüsse hervor und verwenden substanzielle Argumentationen. Oft weisen die Argumentationen eine geringe Explizität auf. Außerdem greifen die Kinder im Mathematikunterricht nicht nur auf verbale Formen des Argumentierens zurück, sondern bemühen sich auch, andere durch non-verbales Argumentieren zu überzeugen. Das sind die Argumentationskompetenzen, an die sich anknüpfen lässt.

2 Wie lässt sich Argumentationsfähigkeit fördern? – Konstruktive Fortführung

Wie lassen sich auf der Grundlage der oben gewonnen Erkenntnisse Entwicklungen anstoßen? Im Folgenden werden die beobachteten Aspekte hinsichtlich der Möglichkeiten einer gezielten Förderung der Argumentationsfähigkeit untersucht.

Einfache Schlüsse – Garanten einfordern

Es lässt sich beobachten, dass Kinder oft einfache Schlüsse hervorbringen, die lediglich aus Datum und Konklusion bestehen. Ein Garant ‚fehlt'. Diese einfachen Schlüsse, so schlicht sie erscheinen, sind die *Grundlage des Argumentierens* und ausbaufähig. Entscheidend für den Ausbau ist das *gezielte Einfordern von Garanten*. Wie kann das gehen? Es eröffnen sich mehrere Ebenen, auf denen Lehrerinnen und Lehrer die Kinder beim Entwickeln von Garanten unterstützen können.

Um Garanten produzieren zu können, braucht es herausfordernde *Aufgabenformate*, bei denen sich Muster und Strukturen erkennen lassen und *Lernumgebungen*, die Spielraum für eigene Wege, das Abwägen von Alternativen und das Erkennen von Zusammenhängen eröffnen. Solchermaßen geeignete Aufgaben finden sich zahlreich in der Literatur, denn deren Beitrag zur Förderung der Argumentationsfähigkeit ist unbestritten und hat sich empirisch bewährt. Weit verbreitet ist beispielsweise das Format der Zahlenmauern (z. B. Padberg & Benz 2011, S. 102ff.). Bei der (systematischen) Variation der Grundsteine stellen die Kinder die Veränderung des Decksteines fest und beobachten, wie sich möglichst große oder kleine Decksteine erzeugen lassen, oder wann der Deckstein gerade bzw. ungerade ist. Aber warum eigentlich? Warum ergibt die größte Zahl positioniert in der Mitte der Grundsteine den größten Deckstein? Wie kommt es, dass die mittlere Zahl irrelevant ist, um im Deckstein eine ungerade Zahl zu erreichen, die äußeren aber beide gerade oder aber beide ungerade sein müssen? Dies sind Fragen, die auf das Entwickeln von Garanten zielen. Auch andere Aufgabenformate, wie beispielsweise Rechendreiecke (z. B. Krauthausen & Scherer, 2014, S. 140ff.), Zahlenhäuser (z. B. Wittmann & Müller, 2012; Nührenbörger & Pust 2011, S. 124ff.), Rechengitter (z. B. Selter, 2004) oder ‚Triff die 50!' (z. B. Hirt & Wälti, 2012, S. 86ff.) fordern in besonderer Weise die Suche nach überzeugenden Garanten heraus und können daher Entwicklungen in Bezug auf die Argumentationskompetenz auslösen.

Bei Schätz- oder Modellierungsaufgaben werden Vergleiche gezogen und Zusammenhänge hergestellt, um Schlüsse zu legitimieren. Wie groß ist dieser Riesenschuh (Abb. 2)?

Abb. 2 Wie groß ist dieser Riesenschuh?[5]

Generell stoßen Aufgaben zum Ordnen und Sortieren die Entwicklung von Garanten und somit eine Erweiterung einfacher Schlüsse zu vollständigen Argumentationen an. Sind Kinder beispielsweise aufgefordert, Aufgaben nach den Kategorien ‚einfach' und ‚schwierig' zu sortieren, werden die Zuordnungen sicherlich von Schülerin zu Schüler unterschiedlich ausfallen. Begründungen für die jeweils getroffene Wahl werden notwendig, Garanten müssen produziert werden.

Aufgaben und Lernumgebungen allein genügen jedoch nicht (unbedingt), um die Argumentationskompetenz der Kinder zu verbessern. Entscheidend ist außerdem eine *Fragehaltung*, die in besonderer Weise auf das Suchen von Garanten zielt (vgl. auch Bezold, 2010).

- Kann das stimmen?
- Wer hat Recht?
- Was fällt dir auf? Begründe deine Entdeckungen.

---

[5] Quelle: http://crazymachines.blogsport.de/2011/03/21/riesiger-fahrender-schuh/

- Geht das auch anders?
- Gibt es noch mehr Möglichkeiten? Sind das alle?
- Gilt das immer?
- Warum ist das so?
- Wie erkennst du das so schnell?

Schließlich ist festzuhalten: Argumentieren bedeutet, *andere* zu überzeugen. Das bedeutet, dass Argumentationskompetenz sich am besten in der *Interaktion* ausbauen und fördern lässt. Günstig sind die Bedingungen für die Suche nach überzeugenden Garanten also vor allem dann, wenn Kinder in Partner- oder Gruppenarbeit agieren, oder aber im Plenum diskutieren.

Substanzielle Argumentationen – Unsicherheit im Schluss als Chance

Schülerinnen und Schüler formulieren, argumentationstheoretisch gesprochen, unsichere Schlüsse. Die angeführten Garanten transportieren nicht alle Informationen, die für den Schluss vom Datum zur Konklusion erforderlich wären. Es sind also unterschiedliche Garanten denkbar. Was auf den ersten Blick als Manko erscheinen mag, eröffnet aus mathematikdidaktischer Perspektive jedoch große *Lernchancen*. Genau die prinzipielle Offenheit substanzieller Argumentationen bietet den nötigen Raum für das ‚Spiel' mit unterschiedlichen Garanten und für Weiterentwicklungen. Gerade zweifelhafte oder wenig überzeugende Garanten bieten Anlass zum Nachfragen oder Ergänzen, zum Eingreifen und Mitdiskutieren. Kollektive Argumentationsprozesse können sich entwickeln (vgl. Miller, 1986). Beim substanziellen Argumentieren können Situationen entstehen, in denen Kinder mathematische Aussagen hinterfragen oder deren Korrektheit prüfen. Die Bedingungen für mathematisches Lernen sind günstig.

Anders als im Alltag ist im Mathematikunterricht oft nicht (in erster Linie) die Konklusion strittig: 5+6=11, so ist das. In Mathe stehen vielmehr unterschiedliche *Garanten zur Diskussion*. Warum ist 5+6 gleich 11? Weil Lisa es auch so hat? Weil ich das auswendig weiß? Weil das Doppelte von fünf 10 ist? Argumentieren-Lernen im Mathematikunterricht bedeutet u.a. zu lernen, wie man ‚auf mathematisch' überzeugt. Was gilt im Mathematikunterricht als ein überzeugender Garant? Ein kleines Beispiel aus der ersten Unterrichtswoche einer ersten Klasse illustriert diesen Prozess der Variation von Garanten. Die Lehrerin zeigt einem Mädchen kurz die abgebildete Karte (Abb. 3): „Wie viele Ameisen sind das?“ Die Antwort erfolgt unmittelbar: „Das sind vier.“ Daraufhin fordert die Lehrerin einen Garanten ein: „Wie siehst du das so schnell?“ „Man sieht doch, dass die eine Ameise sich gleich umdreht und da hinüber läuft.“, antwortet die Schülerin und ‚schiebt‘ die rechte Ameise mit dem Finger nach links. Dieser Garant ist eher vage. Die Lehrerin hakt nach: „Und warum kannst du das dann sehen, dass es vier sind?“ Daraufhin nimmt das Mädchen die Karte in die Hand und dreht sie um 45° nach links: „Wenn ich das drehe und den einen Punkt verschiebe, dann sieht es aus wie ein Würfelbild.“ Diesen Garant akzeptiert die Lehrerin und verdeutlicht auf diese Weise: *So* überzeugen wir im Mathematikunterricht.

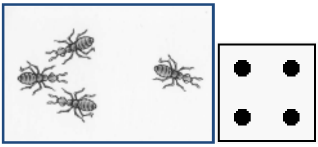

Abb. 3 „Das sind vier.“

Förderung von Argumentationskompetenz geschieht folglich über das geschickte Nutzen der Vagheit substanzieller Argumentationen. Es geht darum, Garanten zu variieren. Dabei gewinnen die Kinder Erfahrung im angemessenen und (sozial) akzeptierten mathematischen Überzeugen. Im Verlauf der Grundschulzeit bleiben substanzielle Argumentationen vorherrschend. Entscheidend ist das Anstoßen von Entwicklungen von außermathematischen hin zu zunehmend (inner-)mathematischen Garanten.

Geringe Explizität – Explizität im Datum und im Garant erhöhen

Eine geringe Explizität von Argumentationen, bei der Datum oder Garant implizit bleiben oder die Funktionszuschreibung diffus ist, erweist sich als problematisch. Das gilt für alle Beteiligten: Ich selbst kann möglicherweise nicht mehr rekonstruieren, was ich gemacht habe, aber auch Mitschüler und Lehrerin können nur schwer verstehen, was ich meine. Das erschwert das Hinterfragen mathematischer Aussagen und Zusammenhänge lassen sich nur eingeschränkt erkennen. Auch das Suchen von Begründungen gelingt kaum, wenn man nicht genau weiß, ‚was gerade Sache' ist. Um die Argumentationskompetenz zu fördern ist es also erforderlich, die Explizität zu erhöhen. Was genau meint das? Konkret geht es darum, am *Datum und am Garant* anzusetzen. Werden diese *beiden* Elemente deutlich, so bedeutet das einen großen Fortschritt in der Argumentationskompetenz. Insbesondere das Datum wird jedoch in seiner fundamentalen Bedeutung für das Ausbilden mathematischer Argumentationskompetenz oft unterschätzt. Es ist eines der beiden unerlässlichen Elemente des einfachen Schlusses. Dennoch zielen Fördermaßnahmen in den meisten Fällen auf das Suchen und Produzieren von Garanten. Diese stellen jedoch schon eine erweiterte Grundlage des Argumentierens dar.

Schulbücher spiegeln diesen Befund wider. Nach einigem Blättern findet man Aufgabenstellungen, die auf ein ‚Herauskitzeln' der Garanten zielen (Abb. 4).

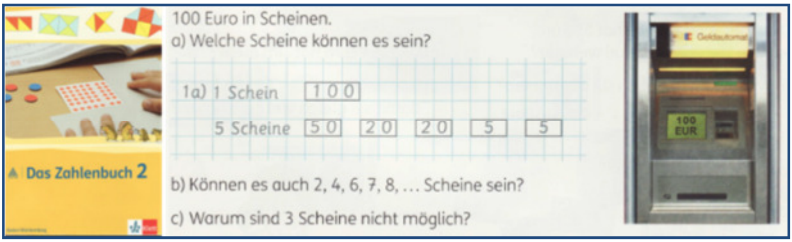

Abb. 4 Einfordern von Garanten (aus Wittmann & Müller, 2012)

Es werden Fragen gestellt: Gilt das immer? Wie rechnest du? Oder es sind Arbeitsaufträge formuliert: Erkläre! Begründe! Beschreibe! Für eine solide Förderung der Explizität von Argumentationen greifen diese Fragestellungen und Aufforderungen zu kurz, die ausschließlich auf das Produzieren von Garanten zielen. Die Betonung des Datums wird vernachlässigt.

Anders die *Lehrer*. Sie wissen sehr wohl um die grundlegende Bedeutung des Datums für eine Argumentation: Der ‚Startpunkt' muss ganz klar sein, um eine Begründung nachvollziehbar zu machen und einen Gedankengang zu (er)klären. So fragen sie gezielt nach dem Datum der Argumentation: „Das habe ich nicht verstanden. Fang nochmal an bitte." „Was für Informationen hast du schon?" „Was ist schon mal klar?"

Die Explizität einer Argumentation zu erhöhen bedeutet zu großen Teilen Spracharbeit. Eine Möglichkeit der Umsetzung ist beispielsweise die *Arbeit mit Schreibanlässen* (Fetzer, 2011b; 2009; 2007). Das Beschreiben von Lösungswegen trägt besonders dazu bei, Daten und Garanten schwarz auf weiß ‚zu fassen'. Wie habe ich angefangen? Was habe ich dann gemacht? Warum? Auch das Beschreiben und Begründen von Auffälligkeiten in eigenen Worten auf Papier verdeutlicht die zentralen Elemente einer Argumentation. Was fällt dir auf? Gleiches gilt für das schriftliche oder zeichnerische Dokumentieren von Veränderungen. Volle Wirkung zeigt die Arbeit mit Schreibanlässen jedoch erst dann, wenn die Kinder nicht für die Schublade schreiben, sondern sich im Anschluss an den Verschriftlichungsprozess untereinander austauschen. „Schreibe Mathe und sprich darüber!" (Fetzer, 2009). Erst dann wird es möglich, das eigene Werk mit den Lösungswegen der anderen Kinder zu vergleichen. Was hast du gemacht? Wie bin ich vorgegangen? Unterschiede im Datum oder in der Bearbeitungsweise werden buchstäblich sichtbar. Diese Deutlichkeit vereinfacht es den Kindern, sich aktiv einzubringen, Unterschiede im Datum zu benennen oder die Variation der Garanten zu entdecken.

Wortspeicherarbeit ist eine andere Alternative, gezielt die Chancen auf Explizität einer Argumentation zu erhöhen. Dabei werden zu den aktuell im Unterricht behandelten Themen Wortspeicher und Formulierungshilfen gesammelt. Wichtig hierbei ist es, nicht eine Vokabelliste mit einzelnen Wörtern zu erstellen, sondern ganze Satzbausteine anzubieten. Dann wird es für die Kinder viel einfacher zu beschreiben, wovon sie ausgegangen sind (beispielsweise davon, dass die Randsteine der Zahlenmauer in der unteren Reihe gerade sind), und Zusammenhänge zu erklären (dann entstehen bei einer dreistöckigen Zahlenmauer in der zweiten Reihe an den Rändern entweder zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen.).

Schließlich trägt der Einbezug von *Arbeitsmitteln und Materialien* in den mathematischen Lernprozess entscheidend zur Erhöhung der

Explizität von Datum und Garant bei. Warum das so ist, wird im folgenden Abschnitt deutlich.

Verbales und non-verbales Argumentieren – Arbeit mit Materialien

Kinder argumentieren im Mathematikunterricht nicht nur verbal, sondern bringen einzelne Elemente ihrer Argumentation in vielen Fällen non-verbal hervor. Sie zeigen auf etwas, um ihr Datum zu verdeutlichen oder verschieben einige Steckwürfelchen, um den Garanten zu visualisieren. Solches Arbeiten mit Materialien stellt eine geeignete Förderung der Argumentationskompetenz bei Kindern dar, denn sie ‚verdoppelt' die Chance auf Explizität und Vollständigkeit einer Argumentation. Nicht alles muss in Worte gefasst werden. Manches lässt sich handelnd gut nachvollziehbar machen. Durch das Falten eines Herzens aus Papier beispielsweise kann ich (mich) von dessen Symmetrieeigenschaften überzeugen: Ja, beide Hälften sind deckungsgleich. Arbeit mit Materialien bedeutet eine Entlastung auf der sprachlichen Ebene, ohne an Explizität oder Überzeugungskraft einzubüßen. Insbesondere die beiden ‚kritischen' Elemente in Bezug auf Explizität, Datum und Garant, lassen sich non-verbal sehr gut fassen. Empirische Beweise, wie sie für die Grundschule typisch sind, funktionieren gut in der Ergänzung verbaler und non-verbaler Elemente. Beispielsweise lässt sich mit Plättchen in sehr überzeugender Weise (wortwörtlich) *zeigen*, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist.

Toulmin – konstruktiv fortführen

Mit Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz lässt sich genau beschreiben, wie Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule argumentieren. Auf diesen Erkenntnissen aufbauend lässt sich gezielt festhalten, wo man ansetzen kann, um Entwicklungen in der Argumentationskompetenz der Kinder anzustoßen. Im Kontext rekonstruktiver Forschung hat sich Toulmins argumentationstheoretischer Ansatz bewährt (z. B. Krummheuer, 1995; Schwarzkopf, 2000; Knipping, 2003; Meyer, 2007; Fetzer, 2007). Aber auch in der konstruktiven Fortführung in der Lehrerfortbildung zeigt Toulmin seine Wirkung. Viele Lehrerinnen und Lehrer kennen sich gut aus mit geeigneten Aufgabenformaten und Lernumgebungen, wie sie oben vorgestellt wurde. Sie wissen um Fragestellungen, welche Argumentationsprozesse in Gang bringen können. Dennoch laufen viele Bemühungen um einen Aufbau der Argumentationskompetenz ins Leere, das Potenzial bleibt wenig genutzt. Grundkenntnisse über die Struktur von Argumenten und die Funktion der Elemente Datum, Garant und Konklusion können Lehrerinnen und Lehrern die Arbeit mit den Kindern erleichtern. Erste Untersuchungen meiner aktuelle Pilotstudie zur Arbeit mit Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz in der Lehrerfortbildung lassen drei Entwicklungen erkennen: In Kenntnis von Toulmins Ansatz achten Lehrerinnen und Lehrer verstärkt auf die Betonung des Datums. Auch lässt sich beobachten, dass geschickt eingeleitete Fragen nach dem Garant viel konsequenter fortgeführt werden. Schließlich gelingt den Lehrerinnen und Lehrern die Variation des Garanten im Sinne der angestrebten Entwicklung von außer- zu innermathematischen Garanten leichter. Insgesamt verdichten sich dadurch die Argumentationsprozesse, die Argumentationsfähigkeit der Kinder verbessert sich.

3 Schluss

Wie argumentieren Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule? Auf der Grundlage von Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz wurde im ersten Teil des Beitrags zusammengetragen, welche Formen des Argumentierens sich beobachten lassen. Kinder argumentieren mit kurzen Schlüssen, sie bringen substanzielle Argumentationen hervor, die oft von einer geringen Explizität gekennzeichnet sind. Außerdem argumentieren sie nicht nur verbal, sondern auch non-verbal. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen habe ich im zweiten Teil des Beitrags eine konstruktive Fortführung vorgenommen und konkrete Vorschläge und Ideen zusammengetragen, wie sich die Argumentationsfähigkeit fördern lässt.

Es erweist sich als zielführend, *Toulmin in der Lehreraus- und –weiterbildung* einzusetzen und (angehenden) Lehrerinnen und Lehrern somit Grundkenntnisse über Argumentationsstrukturen an die Hand zu geben.

Zentral ist es, die *Explizität der Argumentation* zu erhöhen. Das ist die Voraussetzung dafür, dass man eine Argumentation nachvollziehen kann. Dann lassen sich Nachfragen stellen, Zweifel äußern, Alternativen entwickeln. Wichtig ist es, nicht nur auf die Verdeutlichung des

Garanten zu zielen, sondern vor allem auch das Datum explizit zu machen.

Die *Vagheit substanzieller Argumentation* sollte als Chance begriffen werden. Dadurch bieten sich günstige Bedingungen für das Hinterfragen mathematischer Aussagen, das Entwickeln von Vermutungen und das Erkennen von Zusammenhängen. Ausschlaggebend ist hierbei das Spiel mit den Garanten. In der Variation wird deutlich, wie wir in der Mathematik überzeugen (können). Ziel ist es, dass die Kinder zunehmend (inner)mathematische Garanten anführen.

Non-verbale Formen des Argumentierens sollte man sich zu Nutze machen. Es bedeutet eine Entlastung auf der sprachlichen Ebene und gewährleistet gleichzeitig eine gute Nachvollziehbarkeit. Die Struktur von Argumentationen lässt sich für Kinder in der Kombination von verbalen und non-verbalen Elementen besonders gut erfahren.

Pointiert formuliert geht es bei der Förderung der Argumentationsfähigkeit um nachstehende Punkte:

- Daten deutlich machen.
- Garanten einfordern.
- Garanten variieren.
- Innermathematische Garanten unterstützen.
- Vagheit erkennen und als Kommunikationsanlass nutzen.
- Material verwenden und für sich sprechen lassen.
- Non-verbales Argumentieren zulassen.

Literatur

Bezold, A. (2010). *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern*. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Mathe_Bezold.pdf. Gesehen am 17.10.2015.

Fetzer, M. (2007). *Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Fetzer, M. (2009). Schreibe Mathe und sprich darüber. Schreibanlässe als Möglichkeit, Argumentationskompetenzen zu fördern. *PM - Praxis der Mathematik in der Schule, 30* (6), 21-25.

Fetzer, M. (2011a). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32* (1), 27-51.

Fetzer, M. (2011b). Schreiben, um Mathematik zu lernen. *Die Grundschulzeitschrift,* 244, 24-29.

Fetzer, M. (2012). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? In Ludwig, M., & Kleine, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. (S. 249-252). Münster: WTM.

Hirt, U., & Wälti, B. (2012). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Kallmeyer.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand-Verlag.

Knipping, Ch. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis – Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Hildesheim: Franzbecker.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Seelze: Kallmeyer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Hrsg.), *The emergence of mathematical meaning: interaction on classroom cultures* (S. 229-269). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Nührenbörger, M., & Pust, S. (2011). *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht Mathematik*. Seelze: Kallmeyer.

Padberg, F., & Benz, Ch. (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrefortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Selter, Ch. (2004). Zahlengitter - eine Aufgabe, viele Variationen. *Grundschulzeitschrift,* 177, 42-45.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge: University Press.

Wittmann, E., & Müller, G. (2012). *Das Zahlenbuch1/Das Zahlenbuch2*. Stuttgart: Klett.

Dr. Marei Fetzer
Goethe-Universität Frankfurt a.M.
Robert-Mayer-Straße 6-8
60325 Frankfurt
fetzer@math.uni-frankfurt.de

Vermeidbare und unvermeidbare Hürden beim Erlernen des Rechnens bis 100

von Michael Gaidoschik

Die Hürden, die Kinder beim Erlernen des Rechnens überwinden müssen, sind zahlreich. Besonders dicht gestaffelt stehen sie dort, wo es um das Gewinnen erster tragfähiger Einsichten ins dezimale Stellenwertsystem geht. Über Wesentliches, was geschehen sollte, damit Kinder hier nicht frühzeitig straucheln, besteht in unserer Community Einigkeit. Im Beitrag geht es auch um das, worüber wir uns meiner Wahrnehmung nach (noch) nicht einig sind.

Schlüsselwörter: Dezimales Stellenwertsystem, Bündelungsprinzip, Entbündeln, Veranschaulichungen, Lernschwierigkeiten

1 Ein Fallbeispiel: Tobias, ein rechenstarkes Kind zu Beginn seines zweiten Schuljahres

Tobias war in einer Längsschnittstudie zur Entwicklung arithmetischer Kompetenzen (Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler, in Vorbereitung) bereits Ende des ersten Schuljahres als *rechenstark* aufgefallen. 14 von 14 gefragten Additionen und Subtraktionen bis 10 löste er durch spontanen Faktenabruf, acht von acht Aufgaben mit Über- bzw. Unterschreitung der Zahl 10 durch Faktenabruf oder Ableitung. Letztgenannte Aufgaben löste er so rasch, dass die von ihm als Strategie genannten Ableitungen (etwa 6+6+1 für 6+7, 14–10+1 für 14–9) vermutlich eher den Charakter einer nachträglichen Beweisführung hatten, als den tatsächlichen Lösungsweg wiederzugeben.

Im Oktober 2015, zu Beginn seines zweiten Schuljahres, hatte er nichts davon verlernt. Nun, als im Unterricht noch im Zahlenraum bis 20 wiederholt wurde, wollten wir vor allem erfahren, was er bereits mit Zahlen bis 100 anstellen konnte. Tobias konnte sehr viel: über hundert hinaus flott und sicher vorwärts, von hundert weg ebenso flott und sicher rückwärts zählen; in Ziffern notierte zweistellige Zahlen lesen, gehörte mit Ziffern schreiben; mit Zehnerstangen und Einerwürfeln dargestellte Zahlen mit Ziffern notieren und mit Ziffern notierte Zahlen mit Material darstellen. Er weiß sofort, dass

56+10 „sechsundsechzig“ ist. 87–10 löst er in ca. fünf Sekunden richtig, seine Strategie zeigt, dass diese Aufgabe für ihn nicht trivial ist: Er reduziert nicht die Zehnerstelle um 1, sondern rechnet zunächst 87–7=80, dann 80–3=77. Bemerkenswert auch seine Antwort auf die Frage, wie er so schnell (innerhalb einer Sekunde) gewusst habe, dass 76 mehr ist als 67: „Der Sechziger ist ja schon vor dem Siebziger dabei. Man zählt ja nicht siebzig, sechzig!“ Da er den Begriff von sich aus nicht verwendet, frage ich nach, ob er denn schon von „Zehnern“ gehört habe? Aber natürlich, und er kann auch sofort sagen, dass 76 „sieben Zehner und sechs Einer hat“. Ob er erklären könne, was ein Zehner ist? „Ein Zehner ist eine Zahl, die aus Zahlen besteht. Aus zwei Fünfern. Man kann immer so raufzählen: Zehn plus zehn ist zwanzig, und zehn plus zehn plus zehn ist dreißig, und zehn plus zehn plus zehn plus zehn ist vierzig...“ Zuletzt bitte ich ihn, Zahlen zu halbieren. Die Hälfte von 80? Kein Problem: 40. Die Hälfte von 30? Kurzes Nachdenken, dann sehr entschieden: „Das geht gar nicht! Dafür braucht man Mal und so ein Wurzelziehen. Aber mit Plus geht das nicht. Nämlich, da muss man einen Zwanziger und einen Zehner, nämlich, zwei Zehner sind ja zwanzig, und ein Zehner – geht nicht!“

2 Eine unvermeidbare Hürde beim Rechnenlernen: Erste Einsichten ins Dezimalsystem gewinnen

Das dezimale Stellenwertsystem ist eine der „Grundideen der Arithmetik“ (Wittmann & Müller, 2012, S. 160). Cajori sieht in seiner „Erfindung“ gar „diejenige mathematische Errungenschaft, die am meisten zum Fortschritt der menschlichen Intelligenz beigetragen hat“ (Cajori, 1897, zitiert nach Schuppar & Steinweg 2004, S. 185). Nun müssen Kinder das Dezimalsystem zwar nicht neu erfinden. Die eingangs gebotene Vignette illustriert aber, gerade weil Tobias so vieles schon weiß und kann, recht deutlich, wie anspruchsvoll die gedanklichen Konstruktionen sind, die sieben-, achtjährige Kinder leisten müssen, um mit zweistelligen Zahlen erfolgreich umgehen zu können.

Das Gewinnen tragfähiger erster Einsichten ins Dezimalsystem ist eine unvermeidbare Hürde beim Rechnenlernen. Dass und inwiefern viele Kinder und Jugendliche diese Hürde anhaltend nicht bewältigen, wird im nächsten Abschnitt kurz dargestellt und erläutert. Im Weiteren gehe ich der Frage nach, welche der zahlreichen Teilhürden, die es hier zu überwinden gilt, für das weitere arithmetische Lernen von besonderer Bedeutung sind, zugleich aber auch Kindern in besonderer Weise schwer fallen und warum. Abschließend stelle ich einige Vorschläge zur Diskussion, wie wir Kindern meines Erachtens manche Probleme beim Einstieg ins Dezimalsystem ersparen und sie beim Lösen der unvermeidbaren wirksam unterstützen können.

3 Zur Entwicklung von Verständnis für das Dezimalsystem

Missverständnisse und Verständnislücken mit Bezug auf das Dezimalsystem haben weitreichende Konsequenzen auf den arithmetischen Kompetenzaufbau und bilden deshalb einen Kernbestandteil anhaltender Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht bis in die Sekundarstufe und wohl auch darüber hinaus (vgl. z. B. Freesemann, 2014, S. 31; Moser Opitz, 2007, S. 81; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 129–140). Mit Fuson et al. (1997, S. 138) lassen sich viele Phänomene (nicht nur Fehler) in diesem Bereich als Ausdruck einer „concatenated single-digit conception of multi-digit numbers“ begreifen. Kinder behandeln dabei zwei- und mehrstellige Zahlen als Aneinanderreihung von einstelligen Zahlen, die sie nach gelernten Regeln abarbeiten. Ein Nachdenken über Stellenwerte und damit über die Größe der mit Ziffern notierten Zahlen findet nicht statt. Es ist Teil der „Effizienz und genialen Einfachheit“ des Dezimalsystems (Padberg & Benz, 2011, S. 58), dass Kinder mit dieser Denkweise viele Aufgaben korrekt lösen können. Zumeist stoßen sie damit aber bald an Grenzen: Für jede neue Anwendung ist eine neue Regel zu merken, Zusammenhänge mit bereits gelernten Regeln werden mangels Verständnisbasis nicht entdeckt, Regeln werden verwechselt, vermischt, fehlerhaft angewendet, geraten in Vergessenheit (vgl. Gaidoschik, 2002, S. 49-52).

Was wäre demgegenüber ein trag- und in der Sekundarstufe ausbaufähiges Verständnis des Dezimalystems, wie wir es mit Kindern in der Grundschule anstreben sollten? Ein „umfassendes Verständnis“

(vgl. Freesemann, 2014, S. 34) wird es kaum sein können. So wird man wohl nicht fordern, dass Kinder im zweiten bis vierten Schuljahr das Bündelungs- und Positionsprinzip begrifflich-abstrakt erläutern und es etwa auch auf nichtdezimale Stellenwertsysteme umlegen können; daran scheitern mitunter auch Lehramtsstudierende in Prüfungen, nachdem sie einschlägige Übungen absolviert haben.

Welches Wissen und Können sollten wir schon in der Grundschule tatsächlich mit möglichst allen Kindern zu erreichen versuchen? Mit welchen Vor- und Zwischenstufen müssen wir dabei rechnen und in weiterer Folge förderlich umgehen? Forschung, die uns bei der Beantwortung dieser Fragen helfen könnte, ist spärlich gesät (vgl. Freesemann, 2014, S. 35). Fuson et al. haben auf Grundlage von Unterrichtsversuchen in englischsprachigen Ländern das „UDSSI Modell" formuliert, ein „framework of conceptual structures children construct for multidigit numbers" (Fuson et al., 1997, S. 131). Das Modell wurde von Schipper (2009) unter Verweis auf Verschaffel et al. (2007) für den deutschsprachigen Raum adaptiert. Schipper (2009, S. 119 f.) schreibt von „Phasen der Entwicklung des Stellenwertverständnisses". Das entspricht der Darstellung bei Verschaffel et al. (2007, S. 566 ff.), die das Modell als Abfolge von fünf „phases" bzw. „stages" referieren, wobei sie anmerken, dass die empirische Basis für die Aufeinanderfolge dieser Stufen „somewhat unclear" erscheine. Freilich: Fuson et al. (1997, S. 138) nennen ihr Modell zwar „developmental sequence". Sie halten aber wenige Seiten später explizit fest: „Children's multiunit conceptions definitely do not conform to a stage model" (ebenda, S. 143). Ihr Modell bilde vielmehr unterschiedliche „conceptions" ab, die ein und dasselbe Kind in einem gegebenen engen Zeitraum bei der Bearbeitung unterschiedlicher Aufgaben abwechselnd anwenden oder sogar bei der Bearbeitung einer einzelnen Aufgabe kombinieren könne (vgl. ebenda, S. 143).

Ob wir das Modell nun im Sinne von „Konzeptionen" oder „Phasen" verstehen sollen: Es fokussiert auf „two-way relationships", die ein Kind zwischen Ziffernschreibweise, Zahlwörtern und Zahldarstellungen jeweils herstellt (Fuson et al., 1997, S. 138). Betrachten wir nur den SSI-Teil des Modells, so sei für die „Sequence-tens and ones conception" charakteristisch, dass Zehnerstangen und dergleichen mit „zehn, zwanzig, dreißig…“ in Zehnerschritten gezählt und z. B. eine 3 an der Zehnerstelle vom Kind als „dreißig“, nicht aber als „drei Zehner“ verstanden werde. Innerhalb der „Separate-tens and ones conception“ zähle das Kind dezimal strukturiertes Material als „eins, zwei, drei … (Zehner)“, könne aber beispielsweise nicht sagen, dass „drei Zehner“ zugleich auch „dreißig Einer“ sind. In der „Integrated sequence-separate tens conception“ gelinge das „schnelle Umschalten“ von z. B. „fifty doughnuts, the five open boxes of ten doughnuts (five groups of ten ones), and the five closed boxes (five tens)” (Fuson et al., 1997, S. 142).

Ohne dass ich selbst ein adäquateres Modell anzubieten hätte, scheint mir das UDSSI-Modell Wesentliches nicht zu erfassen. Mit den einzelnen „conceptions“ werden nicht so sehr *Denkweisen*, als vielmehr die im Umgang mit didaktischem Material *wahrnehmbaren Übersetzungsleistungen* von Kindern beschrieben. Diese können aber vermutlich auf höchst unterschiedlicher konzeptueller Basis erlernt und eingeübt werden. Gerster und Schultz halten in diesem Zusammenhang fest: „Die meisten Kinder verwenden irgendwann in der zweiten Klasse die Bezeichnungen Zehner und Einer (oder Zehnerstelle und Einerstelle). Die meisten der im Projekt [„Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen“] vorgestellten Kinder waren in der Lage, Zahlen als Zehner/Einer-Kombinationen aus Zehnerstangen und Einerwürfeln darzustellen und umgekehrt. Aber sie versagten bei anderen Aufgaben, z. B. immer dann, wenn zehn Einer als ein Zehner gedacht werden mussten und umgekehrt“ (Gerster & Schultz, 2000, S. 99; Ergänzung MG).

Betrachten wir dazu noch einmal die eingangs geschilderte Szene: Tobias weiß neben vielem anderen, dass die 7 in 76 für „sieben Zehner“ und ebenso auch für „siebzig“ steht. Er erklärt, dass „ein Zehner“ aus „fünf und fünf“ besteht. Aber „dreißig“ zu halbieren, hält er für unmöglich. Er *sagt* „dreißig“, zerlegt dreißig in zwanzig und zehn, scheint dann aber doch wieder nur *„drei“* zu denken – und drei lässt sich nun einmal in seiner Zahlenwelt nicht halbieren. Zehner als *Einheiten*, damit als Ganze, und zugleich als *gebündelte und durch Entbündelung wieder auflösbare Zusammensetzungen* aus je zehn Einzelnen zu denken, vor allem aber: *dieses Wissen auch problemadäquat* *einzusetzen*: das scheint mir die eigentliche Schwierigkeit zu sein, die *wesentliche* Hürde, zu deren Überwindung im Umgang mit Zehnern und Einern (analog später mit Hundertern, Tausendern, noch später Zehnteln, Hundertsteln...) viele Kinder auf Unterstützung angewiesen sind.

4 Einige Befunde zur Schwierigkeit des Halbierens von Zehnerzahlen

Wie hoch diese Hürde ist, sei hier mit einigen Befunden aus der erwähnten Studie illustriert. Tobias‘ Klasse ist eine von zehn zweiten Kärntner Klassen, deren Lehrkräfte ab Herbst 2014 begleitend zum Schuljahr an einer Fortbildungsreihe teilgenommen haben. Ziel war die Vermittlung fachdidaktisch fundierter Konzepte für den Arithmetikunterricht. An den ersten drei von acht Nachmittagen erhielten die Lehrkräfte vorwiegend Anregungen zur Erarbeitung der Zahlen bis 100.

Alle 20 Kinder der Klasse von Tobias wurden im Januar 2015 ein zweites Mal interviewt. 19 Kinder hatten zu diesem Zeitpunkt kein Problem damit, zweistellige Zahlen nach Diktat zu schreiben, in Ziffern geschriebene Zahlen zu lesen und dabei Zehner- und Einerstelle zu benennen. Das Halbieren von 70 gelang aber nur drei Kindern selbstständig und ohne Material (Tobias war eines dieser drei Kinder). Sieben weitere Kinder konnten 70 halbieren, nachdem sie die Aufgabe auf Anregung durch den Interviewer mit Zehnerstangen modelliert und erkannt hatten, dass dafür ein Zehner in 10 Einer umgetauscht werden muss. 10 von 20 Kindern konnten die Hälfte von 70 auch mit diesem Material nicht selbstständig ermitteln.

Eine ernüchternde Rückmeldung für das Fortbildungsteam, denn natürlich hatten wir uns darum bemüht, den Lehrkräften zu vermitteln, wie wichtig Aktivitäten des Bündelns und Entbündelns für die Erarbeitung eines tragfähigen Zehner-Einer-Verständnisses sind. Wir hatten Materialien, Aufgaben und Übungen vorgestellt, die dafür unseres Erachtens besonders geeignet sind (siehe 5.4), und dabei gerade auch das Halbieren von siebzig, dreißig, neunzig... als eine für

Kinder schwierige, aber eben deshalb lehrreiche und lohnende Aufgabe herausgestellt.

Im Gespräch nach den Januar-Interviews zeigte sich die Lehrkraft von Tobias allerdings reumütig. Sie habe dem Entbündeln zu wenig Zeit eingeräumt und wolle dies in den folgenden Wochen korrigieren. Im Juni 2015 wurden die Kinder ihrer Klasse erneut interviewt. Von diesmal 19 teilnehmenden Kindern wussten 16 die Hälfte von 70 ohne längeres Nachdenken; ein weiteres Kind mühte sich etliche Sekunden lang ab und fand dann selbstständig und ohne Material die richtige Lösung; zwei Kinder konnten 70 auch diesmal nur mit unserer Hilfe halbieren. Insgesamt war für die Klasse ein deutlicher Lernzuwachs zu verzeichnen. Wäre er auch ohne gezielte Anstrengungen im Unterricht zu haben gewesen? Wir vermuten: nein, zumindest nicht in diesem Ausmaß. In dieser Vermutung bestärkt uns der Befund aus einer anderen Klasse, deren Lehrkraft nicht an der Fortbildung teilgenommen hatte. Die Hälfte von 70 konnten von den 17 Kindern dieser Klasse Ende des zweiten Schuljahres nur fünf Kinder selbstständig und rasch angeben. Zwei weitere schafften es mit einiger Mühe. Zehn von 17 Kindern schafften es nicht. Neun dieser Kinder zeigten sich im Interview fest davon überzeugt, dass es „bei 70 keine Hälfte gibt".

5 Vermeidbare Hürden aus dem Weg räumen, beim Bewältigen der unvermeidbaren helfen

An anderer Stelle habe ich fünf „Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des Hunderterraums" formuliert und einleitend beklagt, „dass es zum Lehren und Lernen des dezimalen Stellenwertsystems an empirischer Forschung erster wie zweiter Art mangelt" (Gaidoschik, 2015, S. 164). Diese Unterscheidung folgt Wittmann (2013): Er bezeichnet als empirische Forschung erster Art die von ihm als „strukturgenetische didaktische Analyse" favorisierte „Weiterentwicklung der Stoffdidaktik". Empirisch sei sie darin, dass sie „empirisches Material", etwa auch Befunde über Lernvoraussetzungen, berücksichtige (Wittmann, 2013, S. 1096). Empirische Forschung zweiter Art nennt Wittmann unter anderem die methodisch kontrollierte Erprobung und Evaluierung von Unterrichtsmaßnahmen, die auf Basis solcher

Analysen entwickelt worden sind. Ich nutze diesen Beitrag, um einige Vorschläge zur Didaktik des Dezimalsystems teils neu, teils erneut zur Diskussion zu stellen. Die diesen Vorschlägen vorangegangene „empirische Forschung erster Art“ kann hier nur angedeutet werden; jene der „zweiten Art“ ist noch im Gange: Die im Folgenden skizzierten Vorschläge waren Teil der erwähnten Fortbildungsreihe. Was davon von den teilnehmenden Lehrkräften in welcher Weise tatsächlich umgesetzt wurde, ob und wie dies auf das Lernen der Kinder wirkte, muss in den nächsten Monaten noch im Detail ausgewertet und analysiert werden.

5.1 Vermeidbar, wenn nicht politisch, so didaktisch: Dauerprobleme mit einer sprachlichen Idiotie

Der erste Vorschlag (vielmehr das erste Paket von Vorschlägen) betrifft die Reihenfolge, in der wir Kinder mit drei zentralen, als solchen unvermeidbaren stofflichen Hürden konfrontieren: Bündelungsprinzip, Positionsprinzip, Zahlensprechweise.

Außer Streit scheint zu stehen, dass bei der Erarbeitung der Zahlen bis 100 „das Bündeln als grundlegendes und durchgängiges Prinzip deutlich herausgestellt werden“ muss (Müller & Wittmann, 1984, S. 192). Aufgaben, bei denen Kinder auf ikonischer Ebene selbst Zehnerbündel herstellen sollen, bilden in Schulbüchern den Einstieg in die Behandlung der Zahlen bis 100. Ob überhaupt, im Rahmen welcher Aufgaben, wie ausdauernd und intensiv von Kindern im Klassenzimmer auch mit Alltags- und/oder didaktischen Materialien gebündelt wird, ist ein zentrales Kriterium für die Beurteilung der Unterrichtsqualität.

Die Sachlogik spricht dafür, bei solchen Aktivitäten zunächst das Bündeln in den Vordergrund zu stellen, das Positionsprinzip vorerst gleichsam im Hintergrund zu belassen: Kinder fassen jeweils 10 Einer/Einzelne zu 1 Zehner zusammen. Sie lernen, dass sie die Anzahl der Zehner mit den vertrauten Zahlzeichen in einer Stellentafel links von der Anzahl der nicht gebündelten Einer festhalten können. Die Stellentafel ist zunächst vorgegeben, der Fokus liegt auf dem Bündeln. Hierher passen etwa Aufgaben, bei denen zunächst geschätzt und vorab notiert werden soll, wie viele Zehner sich werden bündeln lassen, ehe dies handelnd überprüft und korrigiert wird.

Erst wenn durch solche Aktivitäten das Wort „Zehner“ eine erste Bedeutung gewonnen hat, sollte gezielt daran gearbeitet werden, dass Kinder auch ohne Stellentafel sicher zu unterscheiden wissen, an welcher Position sie Zehner, an welcher sie Einer festhalten bzw. ablesen können. Es macht wenig Sinn, etwas zu unterscheiden, was noch ohne klare Bedeutung ist. Die Positionen selbst müssen als Konvention gelernt werden. Dies wird unnötig erschwert, wenn Kinder zugleich mit der gegenläufigen Konvention der „verdrehten Zahlwörter“ unserer Sprache zurechtkommen müssen. Die politische Forderung, im deutschen Sprachraum eine unverdrehte Zahlensprechweise einzuführen (vgl. Gerritzen, 2008), halte ich für sympathisch, aber chancenlos. Die didaktische Forderung, in den ersten Wochen der Erarbeitung eine Zehner-Einer-Sprechweise zu forcieren, scheint mir dagegen wohlbegründet. Daher stelle ich sie hier erneut, verweise auf die ausführlichere Argumentation in Gaidoschik (2015) – und räume ein, dass mir wohler wäre, könnte ich mich dabei auch auf belastbare Studien zur Wirksamkeit entsprechender Unterrichtsversuche stützen.

5.2 Vermeidbar: Zentrales NICHT ins Zentrum zu stellen

Zehner als Bündelungen zu denken, die bei Bedarf wieder entbündelt werden können: Das habe ich oben als zentral für einen verständigen Umgang mit zweistelligen Zahlen herauszuarbeiten versucht. Wenn das stimmt, dann sollten ins Zentrum der Erarbeitung gerade solche Aufgaben gestellt werden, durch die Kinder zu *gedanklichem Bündeln und Entbündeln* angeregt werden können. Das Halbieren von 30, 50, 70, 90 ist eine solche Aufgabe. Wie dargestellt, meinten neun von 17 Kindern einer Kärntner Klasse am Ende des zweiten Schuljahres, dass 70 nicht halbiert werden könne. Einen der sieben Zehner in 10 Einer zu entbündeln, kam ihnen nicht in den Sinn. Freilich: Im Schulbuch, das in dieser Klasse verwendet wurde (Fürnstahl, 2014) und an dem sich die Lehrkraft nach eigener Aussage eng orientiert hat, wird dem Halbieren zweistelliger Zahlen gerade einmal eine halbe Seite eingeräumt – auf der 177. von 183 Seiten, lange nach der

Einführung der Zahlen bis 100[1]. In zwei deutschen Schulbüchern, die ich als zugegeben kleine Stichprobe durchgesehen habe (Maier, 2010; Rinkens & Höhnisch, 2012), finde ich das Halbieren von Zehnerzahlen überhaupt nicht behandelt. Scherer und Moser Opitz (2010, S. 132) halten zum Entbündeln fest: „Da lernschwache Schülerinnen und Schüler hier oft Schwierigkeiten zeigen, muss darauf im Unterricht besonders geachtet werden.“ Ich vermute, dass viele dieser Schwierigkeiten (und damit zumindest ein Teil von Lernschwächen) vermeidbar wären, würde dies tatsächlich geschehen.

5.3 Vermeidbar: Desorientierung durch Orientierung an zu vielen Darstellungen in zu kurzer Zeit

In Schulbüchern ist es üblich, der vertiefenden Behandlung des Addierens und Subtrahierens mit zweistelligen Zahlen eine „Orientierung im Hunderterraum“ voranzustellen. Das folgt den Empfehlungen aktueller Handbücher für den Arithmetikunterricht (vgl. Gaidoschik, 2015). Im Zuge solcher Orientierungsübungen werden Kinder auf wenigen Schulbuchseiten mit einer Vielzahl unterschiedlich strukturierter Darstellungen konfrontiert. Zehnerbündel und Einer machen in der Regel den Anfang, werden aber oft schon auf der nächsten Doppelseite vom Hunderterfeld abgelöst. Es folgt die Hundertertafel, eine dezimal strukturierte Anordnung der Menge der mit Ziffern notierten Zahlen bis 100. Die Hundertertafel stellt zweistellige Zahlen nicht als Zusammensetzungen aus Zehnern und Einern dar: 28 ist auf ihr nicht weniger als 82, sondern lediglich an anderer Stelle zu finden. Blättert man in den Büchern weiter, folgen zumeist noch Übungen an Zahlenreihe und Zahlenstrahl.

Nun haben alle genannten Darstellungen ihren didaktischen Wert. Wir wissen aber, dass jede Darstellung zunächst Lernstoff ist; ihr didaktischer Wert muss *erarbeitet* werden. Einsicht ins Bündelungs- und Positionsprinzip ist Grundvoraussetzung für den verständigen

[1] Was auf dieser Seite zu tun ist, scheint kaum dazu geeignet, das Nachdenken über das Dezimalsystem zu fördern: Den Kindern wird vorgemacht, dass sie 30 „geschickt“ in 20+10 zerlegen müssen, um in weiterer Folge halbieren zu können (Fürnstahl 2014, Teil C, S. 56). Das sollen sie dann mit 50, 70 und 90 nachmachen. 10 von 17 Kindern, die diese Schulbuchseite ordnungsgemäß abgearbeitet haben, scheiterten wenige Tage später im Interview an ebendiesen Aufgaben.

Umgang mit Hunderterfeld, -tafel, Zahlenreihe, -strahl. Werden diese Darstellungen ohne die genannte Grundvoraussetzung abgearbeitet, trägt dies eher zur Desorientierung als zum Verstehen bei. Die anhaltenden Schwierigkeiten vieler Kinder mit Hunderterfeld und -tafel (vgl. Schipper et al., 2011, S. 39 f.) wie auch Zahlenstrahl (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 138) sind bekannt. Sie erscheinen mir vermeidbar, wenn wir die Tradition der skizzierten „Orientierungsübungen“ auf- und Kindern mehr Zeit geben, nach der ersten Erarbeitung des Bündelungsgedankens erst einmal ausgiebig mit Zehnerbündeln und Einern zu *operieren*. Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln und Halbieren bieten reichlich Gelegenheiten, die zentralen Gedanken zu festigen, dass Zehner sowohl Ganze sind (mit denen gerechnet werden kann wie mit Einern: 30+40 analog zu 3+4), als auch Zusammensetzungen, die durch Bündelung entstehen (35+5), aber auch entbündelt werden können (40–5, Hälfte von 70). Für die Erarbeitung dieser zentralen Gedanken sind Hunderterfeld, -tafel, Zahlenreihe und -strahl kaum geeignet; diese Darstellungen gehören deshalb in spätere Phasen des Arithmetikunterrichts.

5.4 Vermeidbar: Einsatz von Darstellungen zur Umgehung statt zur Klärung von Problemen

Didaktische Materialien sind Mittel zum Zweck. Dieser sollte geklärt sein; erst dann kann und soll geprüft werden, ob ein bestimmtes Material dafür als Mittel taugt. Unterbleiben solche Klärung und Prüfung, besteht die Gefahr, dass das Mittel zum Selbstzweck wird und Lernen nicht befördert, sondern erschwert. Das scheint mir insbesondere im Umgang mit der Hundertertafel häufig zu geschehen. Viele von mir befragte Lehrkräfte haben als Grund, warum sie die Hundertertafel verwenden, im Wesentlichen nur einen nennen können: „Weil sie im Buch ist.“ „Im Buch“ ist sie aber, wie oben argumentiert, häufig zu früh, und oft für Zwecke, für die sie nicht geeignet ist („Orientierung im Zahlenraum“; Erarbeitung von Rechenstrategien; vgl. dazu Gaidoschik, 2015).

Um abschließend an einem Beispiel zu konkretisieren, in welcher Weise meines Erachtens Material und Zweck aufeinander abgestimmt werden sollten: Aufgaben wie 70–5 könnten dazu beitragen, den zentralen Gedanken des Entbündelns (s. o.) zu festigen. Sie unterscheiden sich strukturell von Aufgaben wie 78–5, für deren Lösung es genügt, „hinten zu rechnen" – viele Kinder beschreiben so ihr Vorgehen und Denken. Bei 70–5 klappt das nicht. Das macht die Aufgabe in der zweiten Schulstufe für viele zum Problem; Aufgaben wie 6000–6 sind es noch für viele 16jährige (vgl. Humbach, 2008, S. 118). Bei 70–5 kann das Problem von vielen Kindern aber noch umgangen werden. Sie lösen die Aufgabe durch Rückwärtszählen. Das ist im zweistelligen Bereich erlernbar, ohne dass dabei bewusst entbündelt werden müsste. Das Rückwärtszählen bleibt dann im Bereich des prozeduralen Wissens; es auf den drei- und mehrstelligen Bereich zu erweitern, klappt auf dieser brüchigen Basis oft nicht. Umso wichtiger wäre es, Aufgaben wie 70–5 schon im zweiten Schuljahr zu nutzen, um eine tragfähige konzeptuelle Basis zu erarbeiten. Deshalb ist es zumindest ungeschickt, Kindern zur Lösung solcher Aufgaben die Darstellung der Zahlenreihe oder den Zahlenstrahl anzubieten. An diesen Darstellungen ist bei 70–5 nichts anderes zu machen als bei 78–5; man geht um fünf Zahlen in der Reihe bzw. am Strahl zurück und landet beim Ergebnis. Es erfolgt an diesen Darstellungen keine Entbündelung eines Zehners. Warum sollte sie im Denken des Kindes erfolgen, das solche Darstellungen nutzt?

Anders liegt der Fall, wenn das Kind 70–5 mit Zehnerstangen und Einerwürfeln darstellen soll. 70 sind 7 Zehnerstangen. Um davon 5 Einer wegnehmen zu können, muss ein Zehner entbündelt werden. Das Material erweist sich als sperrig. Es bildet damit aber ein Problem ab, das sich auch auf Symbolebene stellt: 70 hat nun einmal 0 an der Einerstelle, dennoch müssen 5 Einer weggenommen werden. Dieses Problem wird durch die Verwendung von Zehnerstangen verdeutlicht. Zugleich weist das Material einen Weg, es zu lösen: durch Umtauschen/Entbündeln. Das Problem wird nicht umgangen, wie es bei anderen Darstellungen geschieht – und das ist für das Lernen auch gut so.

6 Schlussbemerkungen

Die hier skizzierten Vorschläge sind angreifbar, schon deshalb, weil sie nur skizziert, Argumente oft nur angedeutet, gleichfalls wichtige

Bereiche ausgeblendet sind. Ich formuliere sie in der Hoffnung, dass solches Vorgehen auf der Jahrestagung unseres Arbeitskreises statthaft ist. Ich schließe, indem ich einem gewiss subjektiven Eindruck Ausdruck verleihe und ihn damit gleichfalls zur Diskussion stelle: Wir, die „Community“, diskutieren zu wenig über solche Details der Unterrichtsgestaltung. Diskussion und Forschung würde aber zumindest zur Klärung und Klarheit unserer Positionen führen. Im Idealfall führen sie zur Einigung und Etablierung eines „State of the art“, an dem Schulbücher sich messen (lassen) müssten und Lehrkräfte sich orientieren könnten. Das scheint mir erstrebenswert.

Literatur

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children’s Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (2), 130-162.

Fürnstahl, G. (2014). *Zahlen-Zug 2*. Wien: Dorner.

Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums“. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35* (1), 163-190.

Gaidoschik, M. (2002). *Rechenschwäche – Dyskalkulie*. Wien: öbv&hpt.

Gerritzen, L. (Hrsg.) (2008). *Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise. Fakten – Argumente – Meinungen*. Bochum: Brockmeyer.

Gerster, H. D., & Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Freiburg im Breisgau: PH Freiburg. phfr.bsz-bw.de/files/16/gerster.pdf. Gesehen 02. 11. 2015.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Berlin: Verlag Dr. Köster.

Maier, H. (2010). *Denken und Rechnen 2. Ausgabe Bayern*. Braunschweig: Westermann.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Müller, G., & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. 3., neubearbeitete Auflage*. Braunschweig: Vieweg.

Padberg, F., & Benz, Ch. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Rinkens, H. D., & Höhnisch, K. (2012). *Welt der Zahl 2. Ausgabe Bayern*. Hannover: Schroedel.

Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Schipper, W., Wartha, S., & von Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2. Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr. Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel.

Schuppar, B., & Steinweg, A. S. (2004). Stellenwertsysteme. In G. N. Müller, H. Steinbring, & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 185-206). Seelze: Kallmeyer.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Vol. 1* (S. 557-628). Charlotte, NC: NCTM.

Wittmann, E. Ch. (2013). Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1094-1097). Münster: Waxmann.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Univ. Prof. Dr. Michael Gaidoschik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Institut für Didaktik der Mathematik
Pädagogische Hochschule Kärnten
9020 Klagenfurt
michael.gaidoschik@aau.at

„Ich denk mich da immer so rein und dann sehe ich das so“ - Räumliche Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter

von Meike Grüßing

„Räumlichen Fähigkeiten“ wird eine große Bedeutung für das Mathematiklernen und die Mathematikleistung beigemessen. Dabei wird angenommen, dass sie eine Grundlage für die mentale Repräsentation von mathematischen Konzepten sowie für das mentale visuelle Operieren mit ihnen darstellen. Forschungsergebnisse zu räumlichen Fähigkeiten werden mit Bezug zu verschiedenen Leitfragen skizziert: Wie lassen sich Modelle mit verschiedenen Subdimensionen für die Beschreibung räumlicher Fähigkeiten von Kindern nutzen? Welche Strategien nutzen Kinder bei der Bearbeitung von Aufgaben mit räumlichen Anforderungen? Ergebnisse einer empirischen Studie zeigen den Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und Mathematikleistung.

Schlüsselwörter: Räumliche Fähigkeiten, Raumvorstellung, Mathematikleistung

1 Forschungsperspektiven zu räumlichen Fähigkeiten

Anstelle des Begriffs „Räumliche Fähigkeiten“ werden in der Literatur auch Begriffe wie „Raumvorstellung“, „Räumliches Vorstellungsvermögen“ oder „Räumliches Denken“ verwendet. Zum Teil wird durch die Verwendung des einen oder anderen Begriffs die eingenommene Perspektive ausgedrückt, zum Teil werden diese Begriffe jedoch auch synonym genutzt. Der an dieser Stelle genutzte Begriff „Räumliche Fähigkeiten“ soll für eine umfassende Sichtweise stehen. Er umfasst nicht nur die engere Auffassung von räumlichen Fähigkeiten im Sinne einer Eigenschaft oder Eigenschaftsdimension, sondern berücksichtigt auch die kognitiven Prozesse bzw. die bei der Lösung von Aufgaben mit räumlichen Anforderungen eingesetzten Strategien (vgl. Souvignier, 2000, S. 26ff.).

Maier (1999, S. 14) beschreibt Räumliche Fähigkeiten bzw. Raumvorstellung anschaulich als „die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken“. Diese Fähigkeit geht über die rein rezeptive Wahrnehmung hinaus. Bilder werden nicht nur registriert, sondern weiterverarbeitet. Darüber hinaus umfassen räumliche Kompetenzen auch die Fähigkeit, mit diesen Bildern aktiv umzugehen, sie mental umzuordnen und vorstellungsmäßig neue Bilder zu entwickeln (vgl. Maier, 1999).

1.1 Arbeiten aus psychologischer Perspektive

Es existiert eine große Vielfalt an Forschungsarbeiten zu räumlichen Fähigkeiten. An dieser Stelle sollen einige zentrale Befunde dargestellt werden.

Lohaus, Schumann-Hengsteler & Kessler (1999) unterscheiden eine eigenschaftsorientierte und eine informationsverarbeitungsorientierte Forschungstradition. Im eigenschaftsorientierten Zugang steht die Identifikation von Eigenschaften und Eigenschaftendimensionen im Vordergrund. Viele Studien im Rahmen dieser Forschungstradition zielen auf die Identifikation grundlegender Dimensionen räumlicher Fähigkeiten ab. In der kognitiven und der strategischen Forschungsperspektive werden Denkprozesse analysiert. Diesen Forschungsperspektiven liegt somit ein Informationsverarbeitungsansatz zugrunde (vgl. Lohaus, Schumann-Hengsteler & Kessler, 1999, S. 11f.).

Beide Ansätze ergänzen sich gegenseitig. Der informationsverarbeitungsorientierte Ansatz ermöglicht es beispielsweise, interindividuelle Unterschiede auch auf Unterschiede in den Denkprozessen und den eingesetzten Strategien zurückzuführen.

1.1.1 Die eigenschaftsorientierte Perspektive

Räumliche Fähigkeiten spielen in fast allen Modellen der Intelligenz eine Rolle. Ein bedeutendes Modell der Intelligenz ist in diesem Kontext das Modell der Primärfaktoren der Intelligenz von Thurstone (1938). Mit einer Faktorenanalyse wurden in seiner 1938 veröffentlichten Studie „Primary Mental Abilities“ sieben Primärfaktoren der Intelligenz identifiziert. Der erste von Thurstone interpretierte Faktor ist der Faktor S (Spatial). Als Gemeinsamkeit der auf diesem Faktor besonders hoch ladenden Tests lässt sich der visuell-räumliche Charakter der Tests herausstellen. Die Bandbreite der verschiedenen Tests, die in der Arbeit von Thurstone (1938) den Faktor S (Spatial) charakterisieren, verdeutlicht die Breite dieses Faktors, der später differenzierter betrachtet und weiter untergliedert wird (vgl. Thurstone, 1950). Seit der Arbeit von Thurstone (1938) konnten räumliche Fähigkeiten immer wieder als ein Faktor kognitiver Fähigkeiten nachgewiesen werden.

Nachdem ein weitgehender Konsens über die Existenz eines Faktors Räumliche Fähigkeiten erreicht wurde, hatten anschließende Studien das Ziel, verschiedene räumliche Subfaktoren voneinander zu unterscheiden. In der Publikation „Some primary abilities in visual thinking“ beschreibt Thurstone (1950) die psychologische Interpretation von sieben „Primary Mental Abilities“, die das visuelle Denken betreffen, darunter drei „Space“-Faktoren.

Den ersten Space-Faktor (S1), der in der Sekundärliteratur häufig als „Räumliche Beziehungen“ bzw. „Spatial Relations“ bezeichnet wird (vgl. Maier, 1999) beschreibt Thurstone als „the ability to recognize the identity of an object when it is seen from different angles” (Thurstone, 1950, S. 518). Die zentrale Anforderung in Tests, die diesem Faktor zugeordnet werden können, besteht also darin, ein aus verschiedenen Perspektiven dargestelltes Objekt zu erkennen.

Zur Interpretation des zweiten Space-Faktors S2 formuliert Thurstone (1950) die Annahme, dass bei diesen Tests die Vorstellung einer Bewegung innerhalb der Konfiguration im Vordergrund stehe. „Our hypothesis is that the second space factor represents the ability to imagine the movement or internal displacement among parts of a configuration that one is thinking about” (Thurstone, 1950, S. 518).

Den dritten Space-Faktor S3 charakterisiert Thurstone wie folgt: „According to our present understanding, the third space factor represents the ability to think about those spatial relations in which the body orientation of the observer is an essential part of the problem” (Thurstone, 1950, S. 518f.).

Diese Kategorisierung von Thurstone (1950) wird anschließend in zahlreichen - insbesondere auch in mathematikdidaktischen - Arbeiten rezipiert (vgl. z.B. Maier, 1999; Merschmeyer-Brüwer, 2001; Reinhold, 2007; Rost, 1977).

Die älteren faktorenanalytischen Modelle zur Strukturierung räumlicher Kompetenzen werden Ende der 1970er Jahre in verschiedenen Reviews zusammengefasst (z.B. Mc Gee, 1979; Lohman, 1979, 1988).

Die von Lohman 1979 vorgelegte Reanalyse wird von Clements (1983) als „major step forward towards resolution of the definitional problem for spatial ability“ hervorgehoben (Clements, 1983, S. 11). Lohman

(1979) stellt die drei Faktoren Visualization (Vz), Spatial Orientation (SO) und Spatial Relations (SR) als bedeutende Subfaktoren räumlicher Fähigkeiten im engeren Sinne dar. Diese Kategorisierung weist eine deutliche Nähe zu den von Thurstone (1950) vorgeschlagenen Faktoren auf. Darüber hinaus werden eine Reihe weiterer Faktoren berichtet.

Die Kategorisierung von Linn und Petersen (1985) geht über die psychometrische Perspektive hinaus. Sie entwickeln ihr Kategoriensystem aus der Verknüpfung eines informationsverarbeitungstheoretischen und eines eigenschaftsorientierten Zugangs heraus. Ihr Vorgehen begründen Linn und Petersen mit der Problematik von Kategorisierungen aus psychometrischer Perspektive, die immer von den zugrunde liegenden Aufgaben abhängig sei und damit nie eine allgemein gültige Kategorisierung bieten könne.

Ein Vergleich verschiedener Kategorisierungen deutet auf eine sinnvolle dreifaktorielle Lösung hin. Der Faktor Räumliche Orientierung konnte jedoch empirisch nicht in allen Studien sicher nachgewiesen werden konnte.

Eine Kategorisierung mit einem breiten Bereich „Visualization“ sowie den Bereichen „Mental Rotation“ und „Orientation“ liegt auch der eigenen Studie (Grüßing, 2012) zugrunde. Abweichend von der Tradition früherer Studien, in denen die Bezeichnung „Spatial Relations“ genutzt wird, wird die in aktuellen Studien häufigere Bezeichnung „Mental Rotation“ verwendet. Da jedoch über kognitive Prozesse zunächst noch keine Aussage gemacht wird, ist die Unterscheidung des Faktors „Mental Rotation“ vom Prozess der analogen mentalen Rotation von Bedeutung, auf die auch Lohman hinweist. „Although mental rotation is the common element, the factor does not represent speed of mental rotation. Rather, it represents the ability to solve such problem quickly, by whatever means.“ (Lohman, 1979, S.127). Schwierigere Rotationstests laden in der Regel höher auf dem Faktor „Visualization“ (vgl. Lohman, 1988).

Diese Kategorisierung liegt auch der eigenen Studie (Grüßing, 2012) zugrunde. Als Beispiele für Aufgaben zum Bereich „Visualization“, der sich durch verschiedenartige komplexere Aufgaben charakterisieren lässt, die räumliche Transformationen von Figuren erfordern (z.B. Rotation, Falten, Zusammensetzen), seien an dieser Stelle Aufgaben zum „Papierfalten“ genannt (vgl. Abb. 1). Diese Aufgabe ist an die klassischen Paper Folding Tasks angelehnt, die bereits in der Studie von Thurstone zum Einsatz kamen (vgl. Test „Punched Holes“, Thurstone, 1938, S. 37f.)

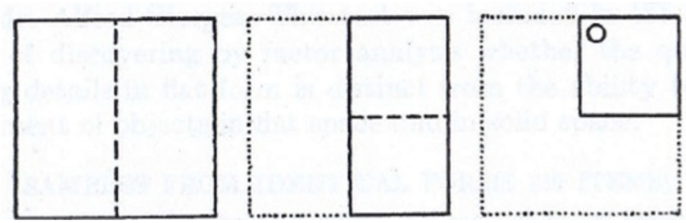

Abb. 1 Beispielitems für den Bereich „Visualization" (Thurstone, 1938, S. 37f)

In diesen Aufgaben wird zunächst anhand von Abbildungen dargestellt, wie ein quadratisches Blatt Papier entlang der gestrichelten Linien gefaltet wird. Die letzte Abbildung zeigt, an welcher Stelle ein Loch in das gefaltete Blatt gestanzt wird. Die Anforderung besteht darin zu entscheiden, wo sich in einem wieder auseinander gefalteten Blatt Löcher befinden würden.

Linn und Petersen (1985) betonen, dass gute Leistungen in den komplexen Aufgaben zur Räumlichen Visualisierung die Fähigkeit einschließen, für jedes Item die optimale Strategie zu wählen. Eine in dieser Kategorie erfolgreiche Person zeichne sich also dadurch aus, dass sie flexibel und adaptiv zwischen verschiedenen Bearbeitungsstrategien wechseln könne (vgl. Linn & Petersen, 1985, S. 1485).

Die Aufgaben zum Bereich „Mental Rotation“ lassen sich vor allem durch die Anforderung zu entscheiden, ob es sich um eine gedrehte oder eine gespiegelte Version der Vergleichsfigur handelt, charakterisieren (vgl. Abb. 2). Sie zeichnen sich im Vergleich zu den Aufgabenstellungen im Bereich „Visualization“ durch eine geringere Komplexität des Stimulus bzw. der notwendigen Prozesse aus.

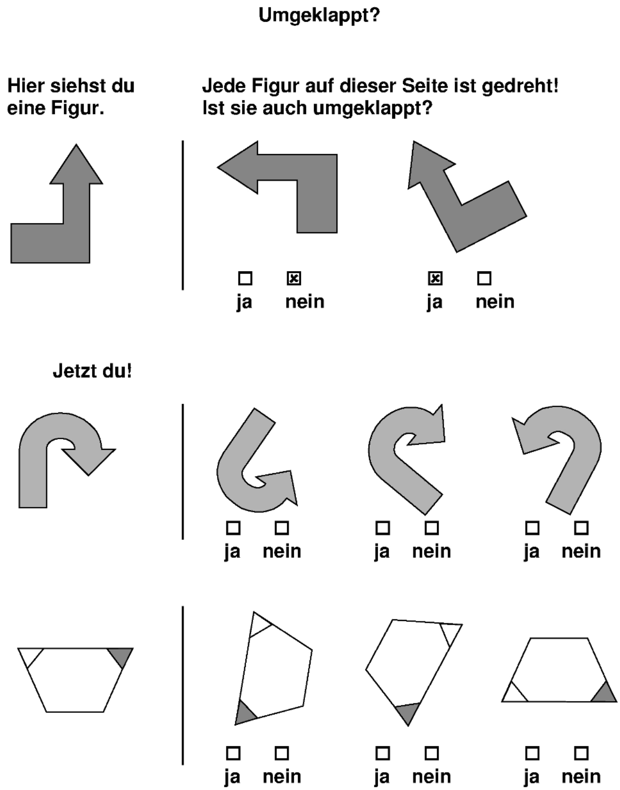

Abb. 2 Beispielitem zum Bereich „Mental Rotation" (vgl. Grüßing, 2012)

Aufgaben zum Bereich „Orientation“ lassen sich charakterisieren durch die Anforderung, sich im Raum zu orientieren und sich eine Situation in einer veränderten Perspektive vorzustellen. Obwohl sich in verschiedenen Studien gezeigt hat, dass die Abgrenzung zu anderen Faktoren problematisch ist, wird durch die Berücksichtigung dieses Bereichs sichergestellt, dass Anforderungen dieser Art im Test enthalten sind.

Im Hinblick auf die Nutzung dieser Modelle als Grundlage für die Beschreibung räumlicher Fähigkeiten von Grundschulkindern ergibt sich die Notwendigkeit, einfache Speed-Tests von komplexeren Tests zu unterscheiden. Während der Faktor „Visualization“ durch eine

Reihe von sehr unterschiedlichen Tests charakterisiert werden kann, die sich vor allem durch ihre Komplexität auszeichnen, liegen den spezifischeren Faktoren wie z.B. „Mental Rotation“ relativ einfache Tests mit sehr ähnlichen Anforderungen zugrunde. Diese wurden unter sehr spezifischen Testbedingungen, in der Regel in Studien mit relativ homogenen Stichproben von Erwachsenen, identifiziert. Eine Nutzung einer Kategorisierung unter Berücksichtigung ausschließlich der aus den faktorenanalytischen Studien resultierenden Faktorbeschreibungen und -interpretationen für eine Studie mit Kindern im Grundschulalter kann also nur unter Vorbehalt erfolgen.

1.1.2 Die informationsverarbeitungsorientierte Perspektive

Zur inhaltlichen Klärung des Begriffs ist die von den individuell eingesetzten Strategien und kognitiven Prozessen ausgehende informationsverarbeitungstheoretische Perspektive von Bedeutung. Insbesondere der Zusammenhang der Vielfalt an eingesetzten Strategien mit der Aufgabenkomplexität kann einen wichtigen Interpretationsrahmen für die Einordnung von Leistungen bei der Bearbeitung von Aufgaben mit räumlichen Anforderungen bieten.

Vor allem zum Prozess der Rotation liegen verschiedene Studien vor, denen die Annahme zugrunde liegt, dass die Lösung einer Aufgabe zur mentalen Rotation tatsächlich durch mentales Drehen eines Objekts erfolgt, bis es die gleiche Lage wie ein Vergleichsobjekt hat. Anschließend kann dann die mental rotierte Ausgangsfigur mit einer Vergleichsfigur verglichen werden. Die zugrunde liegende Annahme einer analogen mentalen Rotation kann durch die gemessenen Reaktionszeiten belegt werden. Es kann ein linearer Zusammenhang zwischen dem Rotationswinkel und der Reaktionszeit nachgewiesen werden.

Kail, Pellegrino und Carter (1980) beschreiben einen ähnlichen Verlauf der Reaktionszeiten auch für Kinder ab 8 Jahren. Dieser Befund spricht dafür, dass die Lösungsprozesse von Kindern sich nicht von den Lösungsprozessen erwachsener Personen unterscheiden. Auch Kinder drehen die Objekte in der Vorstellung. Allerdings unterscheiden sie sich von Erwachsenen durch eine langsamere Rotationsgeschwindigkeit (Kail et al., 1980; vgl. Lohaus et al., 1999).

Die Analyse der unterschiedlichen kognitiven Prozesse bei der Bearbeitung von Aufgaben mit räumlichen Anforderungen führt auch zu der Frage, ob eine Aufgabe von verschiedenen Personen mit derselben Lösungsstrategie gelöst wird, wie es beispielsweise die faktorenanalytisch-psychometrische Forschungsperspektive implizit voraussetzt. Zusammenfassend kann davon ausgegangen werden, dass sich holistische Strategien, bei denen mentale Repräsentationen als Ganzes transformiert werden, von analytischen Strategien, bei denen die Lösung der Aufgabe in mehreren Schritten erfolgt, unterschieden lassen (vgl. Barratt, 1953; Cooper, 1976; Just & Carpenter, 1985; Schultz, 1991). Auch bei Kindern im Grundschulalter lassen sich diese verschiedenen Strategien beobachten (vgl. z.B. Grüßing, 2002).

1.2 Arbeiten aus mathematikdidaktischer Perspektive

Auch aus einer mathematikdidaktischen Perspektive werden sowohl theoretische Modelle als auch empirische Studien präsentiert. Die Modelle räumlicher Fähigkeiten (z.B. Besuden, 1999; Maier, 1999; Pinkernell, 2003) knüpfen an die psychometrischen Modelle an, gehen jedoch in ihrer Zielsetzung darüber hinaus. Sie bieten einen Interpretationsrahmen für die Analyse von Prozessen und Strategien bei der Bearbeitung räumlich-geometrischer Problemstellungen im Mathematikunterricht.

Empirische Studien mit mathematikdidaktischem Schwerpunkt beziehen sich häufig auf spezifische Aspekte im Rahmen der strategischen oder kognitiven Perspektive. Diese Orientierung an den Prozessen bei der Bearbeitung räumlicher-geometrischer Aufgaben ermöglicht auch den Blick auf Lernprozesse. Exemplarisch seien hier Studien zu Prozessen des Codierens und Decodierens räumlicher Informationen in Kinderzeichnungen (z.B. Wollring, 1998) und zu räumlichen Strukturierungsprozessen (z.B. Merschmeyer-Brüwer, 2001; Beutler, 2013) genannt. Zudem liegt eine Reihe von qualitativ rekonstruktiven Studien zu den Prozessen und Strategien räumlichen Denkens von Kindern vor (z.B. Reinhold, 2007; Lüthje, 2010; Plath, 2014; Niedermeyer, 2015). Dabei spielen insbesondere Merkmale der Aufgabenpräsentation eine Rolle.

Aus vorliegenden Interventionsstudien aus mathematikdidaktischer Perspektive (z.B. Hartmann, 2000; Hellmich & Hartmann, 2002) kann zusammenfassend die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Rahmenbedingungen für eine erfolgreiche Förderung räumlicher Fähigkeiten keineswegs endgültig geklärt sind. In diesem Bereich ist weitere Forschung nötig. Eine besondere Rolle spielt in diesem Kontext der Einfluss der Auseinandersetzung mit Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung (z.B. Huhmann, 2013).

2 Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und Mathematikleistung

Räumlichen Fähigkeiten wird eine große Bedeutung für das Mathematiklernen und die Mathematikleistung beigemessen. Dabei wird angenommen, dass sie eine Grundlage für die mentale Repräsentation von mathematischen Konzepten sowie für das mentale visuelle Operieren mit ihnen darstellt. Diese Annahme stützt sich auf empirische Studien, die den Einfluss verschiedener Bereiche räumlicher Fähigkeiten auf die Mathematikleistung untersuchen (z. B. Büchter, 2010; Fennema & Sherman, 1977; Lehmann & Jüling, 2002; Manger & Eikeland, 1998). Als Begründung für diesen Zusammenhang werden zum einen kognitionspsychologische Modelle herangezogen. So spielen visuell-räumliche Aspekte beispielsweise eine Rolle in bereichsübergreifenden Modellen der Informationsverarbeitung (z.B. Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley, 1986), aber auch in bereichsspezifischen Modellen der Repräsentation von Zahlenwissen (z.B. Dehaene, 1992). Im Kontext mathematikdidaktisch orientierter Studien werden die Rolle interner und externer visuell räumlicher Repräsentationen (z.B. Lorenz, 1998; Obersteiner, 2012) sowie die Funktion und Bedeutung von Visualisierungen in mathematischen Problemlöseprozessen (z. B. Presmeg, 1997; Lean & Clements, 1981; Hegarty & Kozhevnikov, 1999) diskutiert.

Da vorliegende empirische Studien in der Regel auf ältere Schülerinnen und Schüler oder auf Erwachsene fokussieren und häufig nur einen kleinen Ausschnitt der mathematischen Kompetenz wie z.B. Rechenleistungen in den Blick nehmen, besteht ein Bedarf an Studien zur empirischen Grundlegung des postulierten Zusammenhangs für das Grundschulalter auf Grundlage umfassender Konzeptualisierungen von Räumlichen Fähigkeiten und mathematischer Kompetenz.

3 Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung: eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr

Vor diesem Hintergrund ergeben sich für eine eigene Studie (vgl. Grüßing, 2012) die folgenden Forschungsfragen:

- Lässt sich für Kinder im 4. Schuljahr ein Zusammenhang zwischen räumlichen Fähigkeiten und mathematischer Kompetenz nachweisen?
- Lässt sich für bestimmte Bereiche räumlicher Fähigkeiten ein (unterschiedlich starker) Einfluss auf die Mathematikleistung nachweisen?

In einer querschnittlichen Erhebung bearbeiteten 447 Schülerinnen und Schüler des 4. Schuljahrs (231 Mädchen, 216 Jungen) Tests zu räumlichen Fähigkeiten und mathematischer Kompetenz.

Zur Entwicklung eines Erhebungsinstruments zu räumlichen Fähigkeiten wurden klassische Aufgaben adaptiert. Vor der Zusammenstellung des Tests durchgeführte Einzelinterviews mit ausgewählten Aufgaben geben Einblicke in die eingesetzten Strategien. Nach einer Präpilotierung und anschließenden Überarbeitung wurde schließlich ein Test mit 19 Items (Cronbachs Alpha = .74) zusammengestellt. Mit Hilfe von konfirmatorischen Faktorenanalysen wurde die angenommene Struktur überprüft.

Für den Test zur Erhebung von mathematischer Kompetenz wurden Aufgaben aus der TIMS-Studie 1995 ergänzt durch weitere, vor allem offen gestellte Aufgaben. Nach der Präpilotierung und Überarbeitung wurde ein Test aus 24 Items (Cronbachs Alpa = .81) zusammengestellt. Diesem Test liegt ein umfassendes Konzept von mathematischer Kompetenz zugrunde, wie es beispielsweise in den Bildungsstandards abgebildet wird.

Als erstes Ergebnis der Studie zeigt sich zunächst, dass die entwickelten Tests eine hinreichende Qualität zur Untersuchung der oben genannten Forschungsfragen aufweisen. Konfirmatorische Faktorenanalysen lassen den Schluss zu, dass das angenommene Modell zur Struktur räumlicher Fähigkeiten geeignet ist, die empirischen Daten zu beschreiben. Aufgrund der hohen Komplexität des Items zum Bereich „Orientation“ wird dieses für die weiteren Analysen dem

Bereich „Visualization“ untergeordnet. Darüber hinaus ergeben sich jedoch auch Anhaltspunkte für eine Revision insbesondere des Tests zu räumlichen Fähigkeiten.

Mit Hilfe von Strukturgleichungsmodellen werden die Hypothesen zum Zusammenhang zwischen räumlichen Fähigkeiten und mathematischer Kompetenz überprüft (vgl. Abb. 3). Die geprüften Modelle weisen jeweils einen akzeptablen bis guten Modellfit auf. Der Zusammenhang zwischen räumlichen Fähigkeiten und mathematischer Kompetenz lässt sich für Kinder im vierten Schuljahr empirisch belegen. Sowohl die Fähigkeiten im Bereich „Visualization“ als auch im Bereich „Mental Rotation“ haben einen signifikanten Einfluss auf die Mathematikleistung und klären insgesamt einen Varianzanteil von 56,1 % auf. Es lässt sich jedoch kein signifikant unterschiedlicher Einfluss der beiden Teilbereiche auf die Mathematikleistung nachweisen.

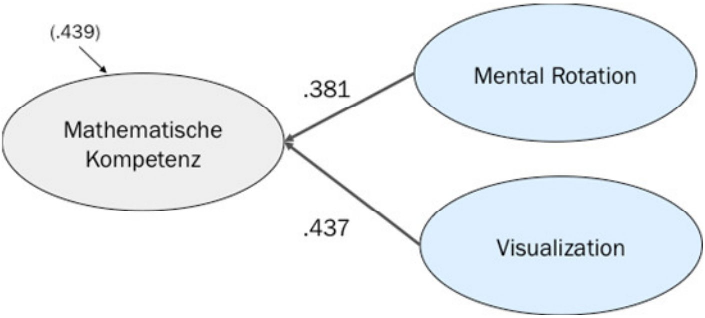

Abb. 3 Modell zum Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und mathematischer Kompetenz

3.1 Exemplarische vertiefende Analysen zu einzelnen Aufgaben

Die dargestellten Ergebnisse zum Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und der Mathematikleistung lassen die Frage offen, wie sich dieser Zusammenhang konkret auf der Ebene der Bearbeitung von Mathematikaufgaben zeigt. Als explorativer Ausblick im Hinblick auf diese Frage sollen an dieser Stelle die Lösungswege zu einer offenen Aufgabe genauer betrachtet werden (vgl. Grüßing, 2012, S. 277ff.). Es werden dabei die Lösungswege einer Gruppe mit hohen räumlichen Fähigkeiten (stärkstes Leistungsdrittel) mit den Lösungswegen einer Gruppe mit niedrigen räumlichen Fähigkeiten (schwächstes Leistungsdrittel) verglichen.

In der Aufgabe „Symmetrieachsen" sollen die Kinder eine Figur mit zwei Symmetrieachsen zeichnen (vgl. Abb. 4). Die Gruppen mit den stärksten und den schwächsten räumlichen Fähigkeiten unterscheiden sich in Bezug auf diese Aufgabe nicht signifikant in der Korrektheit ihrer Lösungen. Häufig wird entweder eine Figur aus dem vorangegangenen Aufgabenteil abgezeichnet oder eine andere aus dem Mathematikunterricht bekannte Figur wie z. B. ein Rechteck oder eine Raute gewählt. In der Gruppe der Kinder mit hohen räumlichen Fähigkeiten wurden jedoch erheblich mehr frei erfundene Figuren gewählt. Ein Beispiel für eine solche Lösung zeigt Abbildung 5.

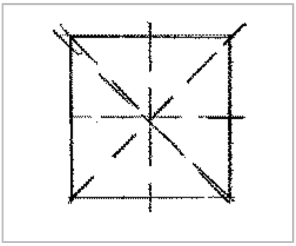

Abb. 4 Lösungsbeispiel „Standardfiguren"

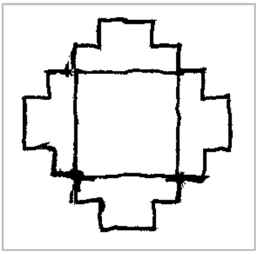

Abb. 5 Lösungsbeispiel „Freie Figur"

Über den Einfluss von räumlichen Fähigkeiten auf die Vorgehensweisen können nur Vermutungen angestellt werden. Die häufigere Wahl von frei gestalteten Figuren könnte als erster Hinweis auf flexiblere Vorstellungen von Symmetrieachsen gedeutet werden. Einen Eindruck der Vorstellungen von Symmetrieachsen, die zur Lösung der Aufgabe genutzt werden, geben die Erläuterungen von Frederik (vgl. Grüßing, 2012, S. 280):

„Spiegelachse - muss ich nachdenken. [...] Ich weiß. Spiegelachse, durch wenn man die durchtrennt. ... Zum Beispiel, wir hatten mal solche Käfer, die auf solchen Ölbildern waren oder wie die heißen. Denn man malt die von einer Seite an und stellt dann einen Spiegel in die Mitte. Und dann muss man das von der anderen Seite genauso anmalen. ... Und das ist bei dem Dreieck da so. Die hat nämlich keine. Wenn ich da nen Spiegel hinstellen würde, dann würde da ja wieder das gleiche sein. Aber das geht ja nicht."

Frederiks Äußerungen zu seinem Vorstellungsbild einer Spiegelachse geben Hinweise darauf, wie dieses durch eine konkrete Handlung in einem sozialen Kontext (vgl. Lorenz, 1998, S. 56f.) entstanden ist und auch noch daran gebunden bleibt. Durch den Anwendungsbezug ist es eine sehr reiche Repräsentationsform. Sie kann von Frederik jedoch gleichzeitig als Schema auf die neue Aufgabenstellung angewendet werden (vgl. Lorenz, 1998, S. 50).

Das hier dargestellte Beispiel gibt erste Hinweise darauf, dass Kinder mit hohen räumlichen Fähigkeiten nicht nur mehr Aufgaben in Tests zur Erfassung mathematischer Kompetenz lösen können, sondern dass ihre Vorgehensweisen sich auch qualitativ unterscheiden. Hier besteht weiterer Forschungsbedarf, um die Zusammenhänge zwischen dem Nutzen räumlich-visueller Repräsentationen beim Lösen von Mathematikaufgaben, räumlichen Fähigkeiten und der mathematischen Kompetenz weiter zu klären.

4 Ausblick

Durch die vorgestellte Studie konnte der angenommene Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und der Mathematikleistung im Grundschulalter untermauert werden. Damit liefert die Studie einen Beitrag zur Erforschung von kognitiven Bedingungsfaktoren für die Mathematikleistung. Sie zielt somit nicht auf die unmittelbare Verwendung der Ergebnisse in der Schulpraxis ab. Unter Berücksichtigung der zugrunde liegenden theoretischen Annahmen sind dennoch mögliche Implikationen für die Praxis zu diskutieren. Insbesondere stützen die Ergebnisse zum Zusammenhang von Räumlichen Fähigkeiten und Mathematikleistung die Forderung, der Entwicklung räumlicher Fähigkeiten im Mathematikunterricht einen größeren Stellenwert beizumessen.

Darüber hinaus ergeben sich auch weiterführende Forschungsfragen, beispielsweise zum Einfluss räumlicher Fähigkeiten in verschiedenen Phasen des Kompetenzerwerbs oder zum Zusammenhang zwischen räumlichen Fähigkeiten, dem Nutzen räumlich-visueller Repräsentationen und der Mathematikleistung.

Literatur

Baddeley, A. D. (1986). *Working Memory*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Barratt, E. S. (1953). An Analysis of Verbal Reports of Solving Spatial Problems as an Aid in Defining Spatial Factors. *The Journal of Psychology, 36*, 17-25.

Besuden, H. (1999). *Raumvorstellung und Geometrieverständnis - Unterrichtsbeispiele. Oldenburger Vor-Drucke*. Oldenburg: Didaktisches Zentrum.

Beutler, B. (2013). Zerlegen und Zusammensetzen - Fähigkeiten von Vorschulkindern beim Umstrukturieren von Bauwerken unter Berücksichtigung von Teil-Ganzes-Beziehungen. *mathematica didactica* 36/2, 221-250.

Büchter, A. (2011). *Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung*. Dortmund: Technische Universität Dortmund.

Clements, M. A. (1983). The question of how spatial ability is defined and its relevance to mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 15*(1), 8–20.

Cooper, L. A. (1976). Individual differences in visual comparison processes. *Perception & Psychophysics, 19*(5), 433–444.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1-40.

Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-Related Differences in Mathematics Achievement, Spatial Visualization and Affective Factors. *American Educational Research Journal, 14*(1), 51-71.

Grüßing, M. (2002). Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben. Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen. *Zentralblatt für* Didaktik der Mathematik, 34(2), 37-45.

Grüßing, M. (2012). *Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung: Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr*. Münster: Waxmann.

Hartmann, J. (2000). Räumlich geometrisches Training und Transfer auf Leistungen im Geometrieunterricht der Grundschule. In M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 245–248). Hildesheim: Franzbecker.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of Visual-Spatial Representations and Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Hellmich, F., & Hartmann, J. (2002). Aspekte einer Förderung räumlicher Kompetenzen im Geometrieunterricht: Ergebnisse einer Trainingsstudie mit Sonderschülerinnen und -schülern. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(2), 56-61.

Huhmann, T. (2013). Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1985). Cognitive Coordinate Systems: Accounts of mental Rotation and Individual Differences in Spatial Ability. *Psychological Review, 92*(2), 137-172.

Kail, R., Pellegrino, J. W., & Carter, P. (1980). Developmental changes in mental rotation. *Journal of Experimental Child Psychology, 29*, 102-116.

Lange, J. de. (1984). Geometry for all or: no geometry at all. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 16*(3), 90-97.

Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial Ability, Visual Imagery and Mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 267-299.

Lehmann, W., & Jüling, I. (2002). Raumvorstellungsfähigkeit und mathematische Fähigkeiten - unabhängige Konstrukte oder zwei Seiten einer Medaille? *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 49*(1), 31-43.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development, 56*, 1479-1498.

Lohaus, A., Schumann-Hengsteler, R., & Kessler, T. (1999). *Räumliches Denken im Kindesalter*. Göttingen: Hogrefe.

Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: a review and reanalysis of the correlational literature. Technical Report No. 8*. Stanford.

Lohman, D. F. (1988). Spatial Abilities as Traits, Processes, and Knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence. Volume 4* (S. 181-248). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lorenz, J. H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht: Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lüthje, T. (2010). *Das räumliche Vorstellungsvermögen von Kindern im Vorschulalter: Ergebnisse einer Interviewstudie*. Hildesheim, Berlin: Verl. eDISSion.

Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht*. Donauwörth: Auer.

Manger, T., & Eikeland, O.-J. (1998). The effects of spatial visualization and students' sex on mathematical achievement. *British Journal of Psycholgy, 89*, 17-25.

McGee, M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin, 86*(5), 889-918.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001). *Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen - Empirische Untersuchungen* *mit Augenbewegungsanalysen. Europäische Hochschulschriften*. Frankfurt a. M.: Peter Lang.

Niedermeyer, I. (2015): *Räumliche Perspektivübernahme am Schulanfang: Eine Interviewstudie zum Einfluss der Symmetrie*. Münster: Waxmann.

Obersteiner, A. (2012). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten. Konzeptionierung und Evaluation einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr*. Münster: Waxmann.

Pinkernell, G. (2003). *Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht: Eine didaktische Analyse mit Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Plath, M. (2014). *Räumliches Vorstellungsvermögen im vierten Schuljahr: Eine Interviewstudie zu Lösungsstrategien und möglichen Einflussbedingungen auf den Strategieeinsatz*. Hildesheim, Franzbecker.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Reinhold, S. (2007). *Mentale Rotation von Würfelkonfigurationen - theoretischer Abriss, mathematikdidaktische Perspektiven und Analysen von Grundschulkindern in einer konstruktiven Arbeitsumgebung* (Dissertation). Leibniz Universität Hannover, Hannover. http://d-nb.info/985075783. Gesehen 08.11.2015.

Rost, D. H. (1977). *Raumvorstellung. Psychologische und pädagogische Aspekte*. Weinheim: Beltz.

Rost, D. H. (2009). *Intelligenz*. Weinheim und Basel: Beltz.

Schultz, K. (1991). The Contribution of Solution Strategy to Spatial Performance. *Canadian Journal of Psychology, 45*(4), 474-491.

Souvignier, E. (2000). *Förderung räumlicher Fähigkeiten. Trainingsstudien mit lernbeeinträchtigten Schülern. Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie*. Münster: Waxmann.

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.

Thurstone, L. L. (1950). Some Primary Abilities in Visual Thinking. *Proceedings of the American Psychological Society, 94*(6), 517-521.

Wollring, B. (1998). Beispiele zu raumgeometrischen Eigenproduktionen in Zeichnungen von Grundschulkindern. In H. R. Becher & J. Bennack (Eds.), *Taschenbuch Grundschule* (S. 126-141). Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

Prof. Dr. Meike Grüßing
Universität Vechta
Driverstr. 22
49377 Vechta
meike.gruessing@uni-vechta.de

Rechnen entwickeln - Flexibilität fördern

von Charlotte Rechtsteiner-Merz

Die Ablösung vom zählenden Rechnen und die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei allen Kindern sind in den letzten zwanzig Jahren zu einem zentralen Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule und zum Forschungsgegen-stand nationaler und internationaler Studien geworden. Der Artikel gibt einen Überblick über relevante Teilaspekte und aktuelle Forschungsergebnisse und stellt darauf abschließend einen Ansatz dar, der die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen unterstützen kann.

Schlüsselwörter: Rechnenlernen, Ablösung vom Zählen, Flexibilität, Zahlenblickschulung

1 Einleitung

Auf dem Weg zum Rechnen stellt sich zum einen die Frage, wie die Ablösung vom zählenden Rechnen gut gelingen, und zum anderen, wie die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen gefördert werden kann. Beiden Fragen geht die nationale und internationale Forschung und Unterrichtsentwicklung seit längerer Zeit nach. So werden in verschiedenen Studien Unterrichts- und Professionalisierungskonzepte untersucht, die die Entwicklung des Rechnens aller Kinder in den Blick nehmen (Scherer, 1999; Moser Opitz, 2001; Gaidoschik, 2008; Rechtsteiner-Merz, 2013; Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler, i. Dr.; Häsel-Weide i. Dr.). Zudem hat sich der Fokus von der Entwicklung routinierten Rechnens zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen verschoben (Selter, 2000; Threlfall, 2002; Baroody & Dowker, 2003; Hatano, 2003; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2004; Rathgeb-Schnierer, 2006).

2 Rechnen entwickeln

Aus didaktischer Sicht ist die zentrale Aufgabe der ersten Klasse, die Kinder auf dem Weg zum Rechnen und damit bei der Ablösung des Zählens zu unterstützen. In späteren Schuljahren liegt das Ziel des Arithmetikunterrichts in der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen, wodurch die Frage nach dem Rechnenlernen durch die Frage, wie flexibles Rechnenlernen entwickelt werden kann, ersetzt wird (Kap. 3). Unklar ist jedoch, ob die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bereits mit der Ablösung vom zählenden Rechnen gefördert werden sollte (u. a. Wittmann & Müller, 1990; Baroody, 2003; Schütte, 2004) oder ob die Ablösung als notwendige Voraussetzung für eine mögliche spätere Flexibilisierung zu verstehen ist (u. a. Geary, 2003), bzw. inwieweit die Ablösung als „Pflicht" und die Flexibilität als „Kür" anzusehen ist (Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwel & van Dooren, 2007).

Eine Antwort hierauf lässt sich bisher in der Forschung, auch aufgrund der Designs der Studien, nur teilweise finden: Für Klasse 1 fokussieren die Untersuchungen v. a. auf die Ablösung vom zählenden Rechnen. Die meisten Studien zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen finden sich erst ab Klasse 2. Die wenigen existierende Studien, die die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen in Klasse 1 in den Blick nehmen, zeigen jedoch, dass sich bereits früh aufgabenadäquates Handeln aller Kinder finden lässt (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2005; Verschaffel et al., 2007; Peltenburg, van den Heuvel-Panhuizen & Robitzsch, 2012; Rechtsteiner-Merz, 2013).

Im Folgenden werden zunächst die stoffdidaktischen Aspekte für die Ablösung vom zählenden Rechnen beschrieben und anschließend zentrale Forschungsergebnisse in diesem Bereich dargestellt.

2.1 Rechnen entwickeln in Klasse 1

Zur Ablösung vom zählenden Rechnen sind drei Entwicklungsbereiche grundlegend: ein umfassender Zahlbegriff, Operationsverständnis und strategische Werkzeuge (u.a. Schipper, 2002; Gerster, 2005; Kaufmann & Wessolowski, 2006; Meyerhöfer, 2011).

Zur Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs gehören sowohl algebraisch orientierte als auch eher ordnungsstrukturierte Vorstellungen von Zahlen (Rechtsteiner-Merz, 2013). Zu den algebraisch orientierten Vorstellungen zählen kardinale Tätigkeiten wie das quasi-simultane Erfassen, das Strukturieren, Vergleichen und Zerlegen von Mengen, was die Entwicklung eines Teile-Ganzes-Konzepts fördert. Tätigkeiten, die eher ordnungsstrukturierten Vorstellungen zugeordnet werden können, sind das Auszählen sowie das Ordnen und Verorten von Zahlen in Relationsbezügen. Das Zählen und (auf strukturierterer Ebene) die Stellenwertschreibweise liefern die Sprache, mit der sowohl Bündelungsvorgänge wie auch die Orientierung im Zahlenraum durch dekadische Ankerzahlen beschrieben werden können. Diese Tätigkeiten und Konzepte lassen sich in zweierlei Hinsicht ordnen (Abb. 1):

- einmal im Hinblick auf die unterschiedlichen Sichtweisen auf Zahlen und deren Beziehungen sowie
- im Hinblick auf ein unterschiedliches Maß an Strukturierung.

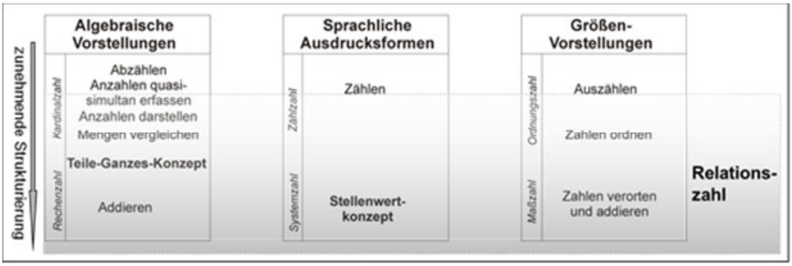

Abb. 1 Modell zur Zahlbegriffsentwicklung (Rechtsteiner-Merz, 2013, 58)

Mit zunehmendem Maß an Strukturierung geht eine Zunahme an relationalen Zusammenhängen einher. Alle drei Stränge stehen in unmittelbarer Beziehung zueinander, bilden in ihrer Gesamtheit umfassende Zahlbegriffsvorstellungen und sind damit grundlegend für die Ablösung vom Zählen. Der Übergang zum Rechnen zeigt sich im Modell als nahezu fließender Prozess sowohl in der algebraischen als auch in der ordnungsstrukturierten Vorstellung. Gleichzeitig wird deutlich, wie komplex die Kompetenzen im Umgang mit Zahlen sein müssen, um sich vom (Ab-)zählen lösen zu können.

Der zweite wesentliche Entwicklungsbereich für die Ablösung vom zählenden Rechnen ist ein vollständig ausgeprägtes Operationsverständnis. Dieses umfasst die Fähigkeiten, zwischen allen vier Repräsentationsebenen (enaktive und ikonische Ebene, Sprach- und Symbolebene) sowie innerhalb jeder Ebene flexibel übersetzen zu können (Bönig, 1995).

Bei der Entwicklung strategischer Werkzeuge, als dritten Bereich, kann man unterscheiden zwischen Werkzeugen zum Zerlegen und Zusammensetzen (Kraft der Fünf, Ergänzen) und solchen, bei denen man auf eine Hilfsaufgabe zurückgreift (Nachbaraufgaben, gegen- oder gleichsinniges Verändern, Analogiebildung) (Rechtsteiner-Merz, 2013).

2.2 Empirische Befunde zur Ablösung vom zählenden Rechnen

Verschiedene Studien zeigen, dass zwischen 20% und 33% aller Kinder nicht vom zählenden Rechnen ablösen können (De Corte & Verschaffel, 1987; Gray, 1991; Gaidoschik, 2010). Hierfür lassen sich verschiedene Ursachen ausmachen: Mulligan, Prescott & Mitchelmore (2004) sowie Mulligan (2011) beschreiben, dass schwächere Kinder in der frühkindlichen Phase kaum eine informelle Musterentwicklung zeigen, sondern im basalen Abzählen verbleiben. Nach Gray & Tall (1994) entwickeln diese Kinder keine Vorstellung von Termen als „procept“. Mit diesem Ausdruck werden die Begriffe Prozedur und Konzept verbunden, was bedeutet, dass Terme neben Prozeduren auch als Konzepte wahrgenommen werden können. Zählende Kinder fassen demnach Aufgaben ausschließlich als Aufforderung zum Zählen – als Prozedur – auf. Außerdem wird deutlich sich, dass der Entwicklung eines Teile-Ganzes-Konzepts eine zentrale Rolle zukommt (Fuson, 1992; Gerster & Schultz; 1998; Sarama & Clements, 2009). Eine Untersuchung zur Rechenentwicklung von Erstklässlern zeigt, dass alle Kinder, die sich im ersten Schuljahr zu Rechnern entwickeln konnten, zu mindestens einem Zeitpunkt im Lernprozess ein Mindestmaß an Beziehungsorientierung entwickelten (Rechtsteiner, 2013). Im umgekehrten Fall gelingt Kindern, die zu keinem Zeitpunkt einen Blick für Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen entwickeln, die Ablösung vom Zählen nicht. Sie verbleiben beim überwiegend zählenden Lösen von Aufgaben (*Zähler* oder *Zähler mit mechanischen Abweichungen*). Daraus lässt sich ableiten, dass die Ablösung vom zählenden Rechnen ein Mindestmaß an Beziehungsorientierung voraussetzt (Abb. 2).

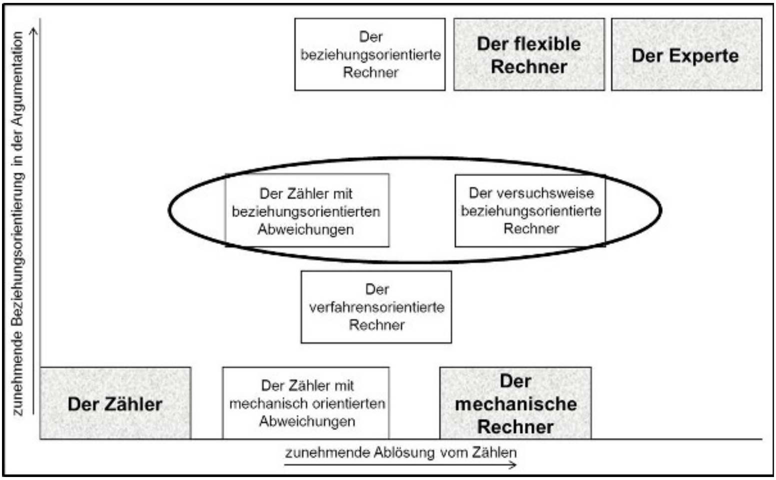

Abb. 2 Beziehungsorientierung als Voraussetzung auf dem Weg zum Rechnen (vgl. Rechtsteiner-Merz, 2013)

Verschiedene Unterrichtskonzepte, die eine aktive Auseinandersetzung mit den oben beschriebenen stofflichen Hürden in den Mittelpunkt rücken und dem Austausch der Kinder untereinander einen hohen Stellenwert einräumen, zeigen positive Auswirkungen auf die Ablösung vom zählenden Rechnen (u. a. Scherer, 1999; Moser Opitz, 2001; Rechtsteiner-Merz, 2013; Gaidoschik et al., i. Dr.; Häsel-Weide, i. Dr.).

3 Flexibilität fördern

Die Entwicklung flexiblen Rechnens wird unstrittig als Kompetenz angesehen, die längere Zeit gefördert werden muss, um nachhaltig darüber verfügen zu können (u. a. Selter, 2000; Schütte, 2004; Rathgeb-Schnierer, 2006; Verschaffel et al., 2007; Threlfall, 2009). Allerdings finden sich in der Literatur unterschiedliche Vorstellungen dazu, was unter Flexibilität zu verstehen sei und die Beschreibungen beziehen sich auf verschiedene Ebenen im Lösungsprozess. Im Folgenden werden zur Begriffsklärung zunächst diese Ebenen ausgeführt, um anschließend die unterschiedlichen Definitionen von Flexibilität zu klären.

3.1 Begriffsklärung

Um den Lösungsprozess beim Rechnen zu beschreiben, entwickelte Rathgeb-Schnierer (2011) ein Modell mit drei Ebenen: die Formen, die Referenzen und die Lösungswerkzeuge. Die Ebene der Formen umfasst „Rechenmethoden“ (Selter, 2000, 229) wie Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen und schriftliches Rechnen. Mit der Referenzebene wird erfasst, ob sich der Lösende im Prozess auf ein Verfahren oder auf Zahl- und Aufgabenmerkmale stützt. Auf der Ebene der Lösungswerkzeuge wird deutlich, aus welchen Teilaspekten ein Lösungsweg zusammengesetzt ist. Dabei können das Zählen, das Abrufen von Fakten sowie das Nutzen strategischer Werkzeuge in unterschiedlichen Kombinationen auftreten.

Die in der Literatur zu findenden Definitionen von flexiblem Rechnen beziehen sich auf die Ebene der Formen und die Ebene der Lösungswerkzeuge.

In der Regel ist allen Definitionen gemein, dass flexible Rechenkompetenzen flexibles und aufgabenadäquates Vorgehen umfassen (Heinze et al., 2009; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2009 a, 2009b; Verschaffel, Luwel, Torbeyns & van Dooren, 2009, Rathgeb-Schnierer, 2014). Dabei wird unter Flexibilität allgemein der Wechsel zwischen den Lösungswerkzeugen verstanden, während sich im Hinblick auf die Kriterien für „aufgabenadäquates Handeln“ im Wesentlichen drei Auffassungen unterscheiden lassen (Rechtsteiner-Merz, 2013):

- Adäquatheit von Lösungsweg und Aufgabencharakteristika,
- Adäquatheit von Lösungsrichtigkeit und Lösungsgeschwindigkeit und
- Adäquatheit des Referenzrahmens.

Wird Adäquatheit mit Lösungsweg und Aufgabencharakteristika verbunden, so steckt die Annahme dahinter, dass die Art der Aufgabe exakt einen bestimmten Rechenweg näher legt als andere (Steinberg, 1985; Blöte, Klein & Beishuizen, 2000; Schipper, 2005). Adäquatheit von Lösungsrichtigkeit und Lösungsgeschwindigkeit beschreibt den effektivsten Weg im Hinblick auf Geschwindigkeit und Lösungsrichtigkeit (Verschaffel et al., 2009). In einigen Untersuchungen findet sich eine Kombination aus der ersten und zweiten Vorstellung (Torbeyns, et al., 2005; Verschaffel, et al., 2007; Torbeyns et al., 2009 a; 2009 b;). Bezieht sich Adäquatheit auf die Referenzen, so spricht man von aufgabenadäquatem Handeln, wenn sich der Lösende im Prozess auf Zahl- und Aufgabenmerkmale stützt (Threlfall, 2009; Rathgeb-Schnierer, 2010; Rechtsteiner-Merz, 2013; Serrazina & Rodrigues, in press).

3.2 Förderung flexibler Rechenkompetenzen

Abhängig von der Konzeptualisierung flexiblen Rechnens zeigen sich zwei zentrale Förderansätze: *Flexibles Rechnen fördern mit Blick auf die Lösungswerkzeuge* sowie *Flexibles Rechnen fördern mit Blick auf die Referenzen*. Gemeinsam sind beiden Ansätzen die Betrachtung von Zahl- und Aufgabenmerkmalen, das Kennen und Nutzen von Strategien oder strategischen Werkzeugen sowie der Austausch über Lösungswege. Der wesentliche Unterschied liegt in der Frage der Schwerpunktsetzung und damit im konzeptuellen Aufbau.

3.2.1 Förderung mit Blick auf Lösungswerkzeuge

Bei diesem Ansatz liegt der Förderschwerpunkt auf der guten und schnellen Beherrschung der Strategien und dem Abrufen von Basisfakten. Entsprechend werden die verschiedenen Strategien mit den Kindern gemeinsam entwickelt und einzeln geübt. In Gesprächen über die verschiedenen Lösungswege werden Vor- und Nachteile, Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie die Passung von Strategie und Aufgabe besprochen (Gaidoschik, 2008, 2010; Lorenz, 2006).

3.2.2 Förderung mit Blick auf den Referenzrahmen

Dieser Ansatz fokussiert vor allem das Nutzen von strategischen Werkzeugen in Abhängigkeit von Zahl- und Aufgabenwahrnehmung. Daraus ergeben sich zwei Förderschwerpunkte:

- die Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs, auf dessen Basis Zahl- und Termbeziehungen beim Rechnen genutzt werden können sowie
- die Entwicklung des Sehens und Nutzens von Aufgabenbeziehungen.

Mit beiden Schwerpunkten geht jeweils die Entwicklung strategischer Werkzeuge einher. Die Schulung des Zahlenblicks stellt das Konzept zur Umsetzung dieses Ansatzes dar und wird im folgenden Kapitel genauer beschrieben.

3.2.3 Die Schulung des Zahlenblicks

Unter dem Begriff „Zahlenblick" versteht Schütte (2004) die Fähigkeit, Zahl- und Aufgabenbeziehungen „augenblicklich sehen und nutzen zu können" (ebd., 143), sowie damit verbunden Zahlen geschickt zu zerlegen und neu zusammenzusetzen.

Um diese Kompetenzen bei Kindern zu entwickeln, sind Aktivitäten zentral, die den Rechendrang zurückhalten und den Blick auf Strukturen und Zusammenhänge lenken. Diese Aktivitäten müssen so aufgebaut sein, dass die arithmetischen Inhalte (zur Zahlbegriffsentwicklung, zum Operationsverständnis und zur Entwicklung strategischer Werkzeuge) stets mit Tätigkeiten zum *Sehen, Sortieren* und *Strukturieren* verbunden sind (Abb. 3). Dabei werden die Kinder durch Impulse und Fragestellungen kognitiv aktiviert und zum Nachdenken über den mathematischen Inhalt, über ihr Denken und ihre Denkentwicklung angeregt (Rechtsteiner-Merz, 2013).

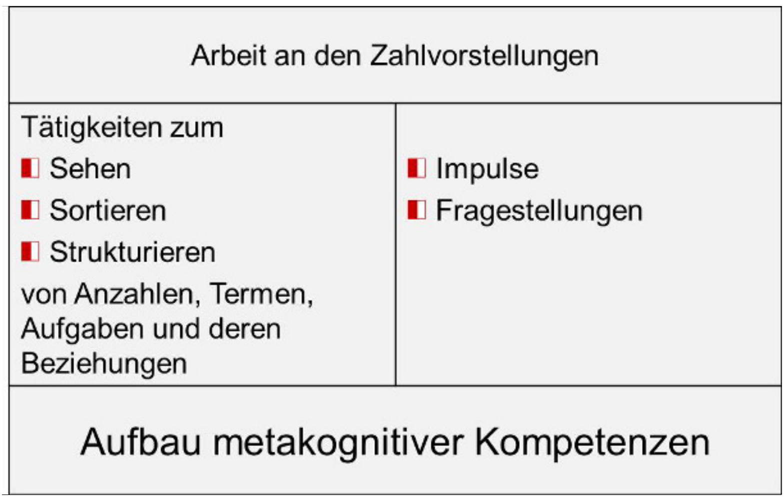

Abb. 3 Modell zur Zahlenblickschulung (Rechtsteiner-Merz, 2013)

Im Folgenden wird exemplarisch je ein Beispiel zu jedem Tätigkeitsbereich skizziert:

Mit Aktivitäten zum (strukturierenden) Sehen sind die Wahrnehmung von Anzahlen und Zahlbeziehungen verbunden: Zum Aufbau mentaler Zahlvorstellungen werden die Kinder angeregt, sich ein Punktebild (Reihen- oder Blockdarstellung) vorzustellen und genau zu beschreiben. Bei dieser Aktivität steht das (mentale) Sehen im Vordergrund. Impulse wie „Wie hast du das gesehen?", „Wäre das auch anders möglich?" etc. regen das Denken der Kinder an und richten dadurch den Blick auf Zusammenhänge und Strukturen.

Bei Aktivitäten zum Sortieren werden Aufgaben nach vorgegebenen Kriterien geordnet. Dabei steht das Betrachten der Aufgaben und damit die Wahrnehmung von Zahl- und Aufgabenmerkmalen im Mittelpunkt: Beim Sortieren der Aufgaben danach, wie das Kind sie lösen kann („auswendig", „Trick" und „zählen"), sind Termkarten entsprechend der eigenen Einschätzung von jedem Kind individuell zu sortieren. Dabei kann angeregt werden, die Aufgaben miteinander zu vergleichen und zu schauen, ob bereits automatisierte Aufgaben („auswendig") beim Lösen von noch zu zählenden helfen könnten.

Beim Strukturieren steht das Wahrnehmen und Bilden von Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen im Vordergrund. Dabei werden Aufgaben zu einander in Beziehung gesetzt oder Aufgabengruppen gebildet: Als Beispiel kann das Strukturieren von Zerlegungen angesehen werden.

3.3 Empirische Befunde

3.3.1 Vorgehensweisen beim Rechnen

Verschiedene Untersuchungen zeigen, dass Kinder nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren überwiegend diese nutzen. Dabei lassen sie Zahl- und Aufgabenmerkmale in der Regel außer Acht und greifen nur noch selten auf Formen des Kopf- oder halbschriftlichen Rechnens zurück (Selter, 2000; Grüßing, Schwabe, Heinze & Lipowsky, 2013).

Auf der Ebene der Lösungswerkzeuge zeigt sich, dass Kinder teilweise andere Strategien nutzen, als dies aus mathematikdidaktischer

Perspektive zu erwarten wäre, und dass individuelle Zahlpräferenzen eine Rolle spielen (Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010; Torbeyns et al., 2009a, 2009b). Außerdem wird in verschiedenen Studien deutlich, dass Kinder nicht zwingend das Werkzeug nutzen, das sie am schnellsten und mit der größten Lösungsrichtigkeit beherrschen (Torbeyns et al., 2005, 2009a, 2009b).

3.3.2 *Einflussfaktoren auf Lösungswege*

Verschiedene Studien belegen, dass der Rechenweg sowohl von Zahl- und Aufgabenmerkmalen (Blöte et al., 2000; Peltenburg et al., 2012) als auch vom Kennen der Strategien und deren Anpassung (Macintyre & Forrester, 2003) abhängt. Rathgeb-Schnierer (2006) erweitert diese Einflussfaktoren um das Wissen über Zahlen und Rechenoperationen sowie die Abhängigkeit vom Lösungskontext und macht deutlich, dass individuelle Zahlpräferenzen bei der Wahrnehmung eine zentrale Rolle spielen.

3.3.3 *Kinder mit Schwierigkeiten und flexibles Rechnen*

Inwieweit die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen auch für Kinder mit Lernschwierigkeiten beim Rechnenlernen angestrebt werden kann, ist strittig. Geary (2003) beispielsweise vertritt die Meinung, dass dies nur für durchschnittlich und gut begabte Kinder möglich sei. Andere Studien hingegen kommen zu dem Ergebnis, dass sich auch bei schwächeren Kindern die Entwicklung flexiblen Rechnens anregen lässt (Torbeyns et al., 2005, 2009a; Peltenburg et al., 2012; Werner & Klein, 2012; Rechtsteiner-Merz, 2013). Dabei wird in allen Untersuchungen deutlich, dass Kinder mit Schwierigkeiten auf dem Weg zum flexiblen Rechnen einen Unterricht benötigen, der sie gezielt anregt. In einer von mir durchgeführten Studie (Rechtsteiner-Merz, 2013) wurden schwache Kinder während eines gesamten Schuljahres im Regelunterricht durch Aktivitäten zur Zahlenblickschulung angeregt. Sie alle waren zu Beginn der zweiten Klasse auf dem Weg zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen. Dies macht zweierlei deutlich: Zum einen, dass gezielte Anregung die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern ermöglicht; zum anderen aber auch, dass die Schulung des Zahlenblicks ein Unterrichtskonzept ist, das alle Kinder auf dem Weg zum flexiblen

Rechnen fördert.

3.3.4 Einfluss unterschiedlicher Unterrichtsansätze

Benz (2007) zeigt, dass Kinder in Klasse 2 bereits vor der Einführung von Strategien zum halbschriftlichen Rechnen eine Kombination verschiedener Lösungswege nutzen. Verschiedene Studien belegen, dass nach der Einführung einer Strategie im Unterricht diese als Hauptstrategie genutzt wird (Klein & Beishuizen, 1998; Blöte et al., 2000; Heirdsfield & Cooper, 2002; Torbeyns et al., 2009a).

Im Vergleich moderner und traditioneller Unterrichtsansätze erweisen sich erstere im Hinblick auf die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei normal begabten und schwachen Kindern als deutlich überlegen (Grüßing et al., 2013), während Kinder mit hoher Begabung auch im traditionellen Unterricht flexibel rechnen lernen (Heinze, Marschik & Lipowsky, 2009).

Eine vergleichende Studie zu den beiden oben beschriebenen Unterrichtsansätze zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen belegt, dass die Entwicklung von Lösungswegen auf der Basis strategischer Werkzeuge mit Blick auf Zahl- und Aufgabenmerkmale längerfristig nachhaltiger wirkt (Heinze, Schwabe, Grüßing & Lipowsky, 2015). Gleichzeitig wird jedoch auch deutlich, dass Kinder, deren Blick auf Zahl- und Aufgabenmerkmale gerichtet wurde, seltener mit Hilfe von Ergänzen oder gegen- und gleichsinnigem Verändern agieren. Diese Beobachtung führen Heinze et al. (ebd.) darauf zurück, dass die Kindergruppe wenig gezielte Anregungen durch die Lehrperson erhielt.

4 Ausblick

Zahlreiche Studien der letzten Jahre beschäftigten sich mit der Problematik der Ablösung vom zählenden Rechnen und dem Ziel der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen.

Wie sich zeigt, untersuchen die bisherigen Interventionsstudien nur sehr kurze Zeiträume. Folgt man jedoch der Annahme, dass die Entwicklung nachhaltiger flexibler Rechenkompetenzen ein langfristiger Prozess ist, so zeigt sich hier ein wesentliches Forschungsdesiderat. Erforderlich sind insbesondere vergleichende Langzeituntersuchungen zu verschiedenen Unterrichtsansätzen.

Literatur

Baroody, A. J. & Dowker, A. (2003). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (S. 1–33). Mahwah: Lawrence Erlbaum Accociates, Publishers.

Benz, Ch. (2007). Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE±ZE im Verlauf des zweiten Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik, 28* (1), 49–73.

Blöte, A. W.; Klein, A. S. & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10* (3), 221-247.

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern*. Münster/ New York: Waxmann.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18* (5), 363–381.

Gaidoschik, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres.* Wien. http://othes.univie.ac.at/9155/1/2010-01-18_8302038.pdf. Gesehen 19.10.2015.

Gaidoschik, M. (2008). Automatisierung arithmetischer Basisfakten: Zur Notwendigkeit eines strategie-zentrierten Erstunterrichts. In É. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 401-404). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Gaidoschik, M., Fellmann, A. & Guggenbichler, S. (i. Dr.). Computing by counting in first grade neither necessary nor beneficial (in press). In K. Krainer & N. Vondrovà (Hrsg.), Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME), Prague. https://www.dropbox.com/sh/8ybnhniqp2r5zm7/AACTHkEbYJTNj4_pKu3tGYkoa/CERME9_TWG2_Gaidoschik_v2.pdf?dl=0 Gesehen 11.11.2015.

Geary, D. C. (2003). Learning Disabilities in Arithmetic: Problem-Solving Differences and Cognitive Deficits. In H. L. Swanson, K. R. Harris & S. Graham (Hrsg.), *Handbook of Learning Disabilities* (S. 199-212). New York: A Divison of Guilford Publications.

Gerster, H.-D. (2005). Anschaulich rechnen - im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern.*

Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik (S. 202-236). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Gray, E.M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22* (6), 551–574.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: a "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (2), 116–140.

Grüßing, M., Schwabe, J., Heinze, A. & Lipowsky, F. (2013). The effects of two instructional approaches on 3rd-graders' adaptive strategy use for multidigit addition and subtraction. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 193-400). Kiel: PME.

Hatano, G. (2003). Foreword. In Arthur J. Baroody & Ann Dowker (Hrsg.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (S. xi-xiii). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Häsel-Weide, Ute (i. Dr.). Replacing persistent counting strategies with cooperative learning. In K. Krainer & N. Vondrovà (Hrsg.), Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME), Prague. https://www.dropbox.com/sh/8ybnhniqp2r5zm7/AACeyxyCkLfE3HYGeBPf AQOpa/CERME9_TWG2_Hasel-Weide_v2.pdf?dl=0 Gesehen 11.11.2015.

Heinze, A., Schwabe, J., Grüßing, M. & Lipowsky, F. (2015). Effects of instruction on strategy types chosen by German 3rd-graders for multi-digit addition and subtraction tasks: an experimental study. In K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Hrsg.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (S 49–56). Hobart, Australia: PME.

Heinze, A., Marschik, F. & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education, 41* (5), 591-604.

Heirdsfield, A. M. & Cooper T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: two case studies. *Journal of Mathematical Behavior, 21* (1), 57-74.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine*. Seelze: Kallmeyer [u.a.].

Klein, A. S. & Beishuizen, M. (1998). The Empty Number Line in Dutch. Second Grades: Realistic Versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (4), 443-464.

Lorenz, Jens Holger (2006). Die Entwicklung von Zahlensinn. Notwendige Veränderungen im Unterricht. *Die Grundschulzeitschrift, 20* (191), 6–9.

Macintyre, T. & Forrester, R. (2003). Strategies for Mental Calculation. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23* (2), 49–54.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau, 65* (4), 401–426.

Moser Opitz, E. (2001). Chapter 4: Mathematical Knowledge and Progress in the Mathematical Learning of Children with Special Needs in their First Year of School. In E. Ch. Wittmann, *Report of the PME 25 Research Forum "Designing, Researching and Implementing Mathematical Learning Enviroments - the research group Mathe 2000.* http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/rf4-5moser.pdf. Gesehen 19.10.2015.

Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children's difficulties in mathematics learning. *Australian Journal of Learning Difficulties, 16* (1), 19-39.

Mulligan, J., Prescott, A. & Mitchelmore, M. (2004). Children' s development of structure in early mathematics. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, (S. 393-400). Bergen University College: Bergen, Norway.

Peltenburg, M., Heuvel-Panhuizen, M. van den & Robitzsch, A. (2011). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 - A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics, 79* (3), 351–369.

Rathgeb-Schnierer, E. (2014). Sortieren und Begründen als Indikator für flexibles Rechnen? Eine Untersuchung mit Grundschülern aus Deutschland und den USA. In J. Roth & J. Ames, *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 943-946). Münster: WTM-Verlag.

Rathgeb-Schnierer, E. (2011). Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann? Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathe-*

matikunterricht 2011 (S. 15-22). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31* (2), 257–283.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.

Scherer, P. (1999)[2]. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Heidelberg: Winter, Ed. S.

Schipper, W. (2005). *Modul G4: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Mathematik*. Kiel (SINUS-Transfer Grundschule). http://sinus-transfer-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Modul4.pdf. Gesehen 11.11.2015.

Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23* (3/4), 243–261.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotationen und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25* (2), 130–148.

Selter, Ch. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21* (3/4), 227-258.

Serrazina, L. & Rodrigues, M. (in press). Additive adaptive thinking in 1st and 2nd grades pupils. In K. Krainer & N. Vondrovà (Eds.), Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME), Prague. https://www.dropbox.com/sh/8ybnhniqp2r5zm7/AAC9o6aaW6XptZE4rniG6f8Ta/CERME9_TWG2_Serrazina_Rodrigues_v2.pdf?dl=0. Gesehen 11.11.2015.

Siegler, R. S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on Derived Facts Strategies in Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (5), 337–355.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education, 41* (5), 541–555.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. In *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29–47.

Torbeyns, J, De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009a). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71* (1), 1–17.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009b). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM Mathematics Education, 41* (5), 581–590.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2005). Simple Addition Strategies in a First-Grade Class With Multiple Strategy Instruction. *Cognition and Instruction, 23* (1), 1–21.

Torbeyns, J, Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2004). Efficiency and adaptiveness of multiple school-taught strategies in the domain of simple addition. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, (S. 321-328) Bergen University College: Bergen, Norway.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & van Dooren, W. (2009). Conceptualising, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24* (3), 335-359.

Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K. & Dooren, W. van (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology, 24* (2), 16-27.

Werner, B. & Klein, T. (2012). "Ich rechne immer mit den Fingern, aber heute hab' ich das mal im Kopf gemacht". Flexibilität bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 bei Förderschülern. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 63* (4), 162–170.

Dr. Charlotte Rechtsteiner-Merz
PH Weingarten
Kirchplatz 2
88250 Weingarten
rechtsteiner@ph-weingarten.de

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Elisabeth Rathgeb-Schnierer
rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Beitrag I: Kathrin Köhler
kathrin.koehler@math.lmu.de

Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins

Unterrichtliche Erarbeitung der Einmaleinssätze

Die Erarbeitung der Aufgaben des kleinen Einmaleins erfolgte lange Zeit über eine eher isolierte Behandlung von Einmaleinsreihen, wobei dem Abarbeiten und Automatisieren der einzelnen Reihen eine zentrale Bedeutung zugemessen wurde (z.B. Leininger et al., 1989; Altmann et al., 1997). Derzeit besteht aber in der didaktischen Literatur weitgehend Konsens darüber, dass ein ganzheitlicher Ansatz diesem traditionellen vorzuziehen ist. Das ganzheitliche Vorgehen sieht vor, mit Hilfe bereits bekannter Einmaleinsätze noch unbekannte zu erschließen (Wittmann & Müller, 1994).

In der Unterrichtspraxis scheinen verschiedene unterrichtliche Ansätze bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins vorzuherrschen: Es gibt unter anderem Lehrkräfte, die das Einmaleins ganzheitlich erarbeiten und somit gemäß der aktuellen Lehrpläne vorgehen, andere folgen wiederum einem eher traditionell einzuordnenden Ansatz, bei dem die Strategieerarbeitung und –thematisierung eine weniger bedeutende Rolle einzunehmen scheint (Köhler & Gasteiger, 2014).

Es stellt sich die Frage, ob und inwiefern diese verschiedenen unterrichtlichen Vorgehensweisen Konsequenzen auf die Strategiewahl der Kinder beim kleinen Einmaleins haben. Das Projekt EmuS (Kleines Einmaleins und Strategieeinsatz) geht dieser offenen Frage nach.

Forschungsstand

Dass das Unterrichtsgeschehen einen Einfluss auf die Strategiewahl der Kinder hat, ist unumstritten (z.B. Sherin & Fuson, 2005). Ob und welche Strategien in der Praxis zum Einsatz kommen, kann allerdings auch von weiteren Faktoren abhängig sein - häufig lässt sich eine Abhängigkeit der gewählten Strategie vom Zahlenmaterial beobachten (z.B. LeFevre et al., 1996) oder vom Individuum und dessen vorhandenen bzw. nicht vorhandenen Voraussetzungen (z.B. Threlfall, 2009). Sind beispielsweise ein bestimmtes Faktenwissen oder Kenntnisse über operative Beziehungen zwischen einzelnen Aufgabenstellungen nicht vorhanden, können entsprechende Strategien auch nicht eingesetzt werden.

Über welche Strategien Kinder zum Lösen von Einmaleinsaufgaben nach der Erarbeitung verfügen, welche sie in der Praxis tatsächlich einsetzen und welche Faktoren sich auf die Strategiewahl auswirken, sind Fragestellungen, die noch weitgehend unbeantwortet sind.

Interviewstudie zur Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins

Zur Klärung dieser Fragen wurden 144 Kinder aus 24 Klassen an 16 Münchner Schulen Mitte des dritten Schuljahres interviewt. Um die Strategieverwendung zu erheben, wurden halbstandardisierte Einzelinterviews durchgeführt. Die leitende Bedingung für die Auswahl der Klassen bestand in der unterschiedlichen Herangehensweise der Lehrkräfte bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins – eine Hälfte kennzeichnete sich durch eine *lehrplankonforme* Erarbeitung (Thematisierung verschiedener Strategien) aus, während die andere Herangehensweise als eher *traditionell* bezeichnet werden kann. Die Einschätzung der Lehrkräfte bezüglich ihrer unterrichtlichen Herangehensweise erfolgte mit Hilfe einer im Vorfeld durchgeführten Fragebogenstudie (Köhler & Gasteiger, 2014). Je Klasse wurden anhand der Ergebnisse des Heidelberger Rechentests sechs Kinder mit unterschiedlichem Leistungsvermögen für das Strategieinterview ausgewählt. In einem ersten Teil des Interviews sollten die Kinder bei sechs Aufgaben angeben, mit welcher Strategie sie diese lösen („self-report“). Ausgewählte Ergebnisse dazu werden im Folgenden vorgestellt.

Ergebnisse

Insgesamt wiesen die Kinder eine Vielfalt an Strategien zur Aufgabenlösung auf. Bei mehr als der Hälfte der Aufgaben setzten Kinder zur Lösung der Einmaleinsaufgaben Strategien auf Basis operativer

Beziehungen ein. Die Strategie der Nachbaraufgabe wurde am häufigsten (bei mehr als einem Drittel der Aufgaben) gewählt, die Faktorzerlegung sowie die Strategie der Verdopplung/Halbierung jeweils ungefähr bei einem Fünftel der Aufgaben als bevorzugte Strategie genutzt. Nur vereinzelt lösten Kinder Aufgaben mithilfe der verkürzten sukzessiven Addition, dem gegensinnigen Verändern oder einer Tauschaufgabe. Bei fast einem Viertel der Aufgaben gaben die Kinder an, die Aufgabe gewusst zu haben. In diesem Fall ist nicht klar festzustellen, ob die Kinder die Aufgabe bereits automatisiert haben, oder ob sie lediglich keine Strategie benennen konnten.

Eine Mitte des dritten Schuljahres ebenfalls noch vorherrschende, aber bei weitem nicht so tragfähige Herangehensweise ist die sukzessive Addition. Sie kam durchschnittlich bei jeder 5. Aufgabe zum Einsatz.

Es gibt erste Anzeichen, dass Kinder, die „lehrplankonform" unterrichtet wurden, häufiger Strategien unter Nutzung operativer Beziehungen einsetzen und seltener auf die sukzessive Addition zurückgreifen als Kinder der „eher traditionellen" Lehrkraft-Gruppe. Auch das individuelle Leistungsvermögen eines Kindes scheint einen Einfluss auf die Strategiewahl zu haben: Die leistungsstärkeren Kinder sowie die mittlere Leistungsgruppe unterscheiden sich deutlich von der leistungsschwachen Gruppe bezüglich des Einsatzes tragfähiger Herangehensweisen. Strategien, die auf Beziehungen basieren, wurden deutlich seltener von der Gruppe der leistungsschwachen Kinder eingesetzt, die sukzessive Addition im Vergleich dazu allerdings deutlich häufiger.

Ausblick

Weitere Analysen sollen detaillierte Erkenntnisse dazu liefern, ob und inwieweit das individuelle Leistungsvermögen sowie verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins die Strategiewahl der Kinder beeinflussen.

Diskussion

Im Anschluss an den Vortrag wurden folgende Aspekte vertiefend diskutiert:

- Die Identifikation der beiden Unterrichtsansätze – „bewusst traditionell und ganzheitlich", aufgrund derer die Probanden in zwei Teilgruppen gesplittet wurden.
- Die Frage, nach der Anzahl der Interviewaufgaben und daraus resultierende Rückschlüsse auf Strategierepertoire.
- Die Abgrenzung des Konstrukts Strategiepräferenz von dem Erscheinungsbild eines mechanischen Rechners.

Literatur

Altmann, W., Gierlinger, W., Kobr, R., Kraus, A., Kraus, E., & Langen, H. (1997). *Rechne mit uns*. München: Oldenbourg.

Köhler, K., & Gasteiger, H. (2014). Verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins – Ergebnisse einer clusteranalytischen Klassifizierung von Lehrkräften. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 7* (1), 100-112.

LeFevre, J.-A., Bisanz, J., Daley, K. E., Buffone, L., Greenham, St. L., & Sadesky, G. S. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology, 125* (3), 284–306.

Leininger, P., Wallrabenstein, H., & Ernst, G. (1989). *Unser Rechenbuch – Nussknacker*. Stuttgart: Klett.

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36,* 347-39.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 41* (5), 541–555.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Stuttgart: Klett.

Beitrag II: Kathrin Akinwunmi
kathrin.akinwunmi@tu-dortmund,de

Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule

Das *Verallgemeinern mathematischer Muster* stellt eine zentrale algebraische Tätigkeit dar. Diese wurde im Vortrag zunächst aus zwei unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet, die anschließend aufeinander bezogen wurden.

(1) Das Verallgemeinern stellt eine zentrale Leitidee für den Zugang zur Algebra und für die Einführung von Variablen in der Sekundarstufe dar, die zunehmend an Bedeutung gewinnt (Mason et al., 2005). Da die Algebra hier als verallgemeinerte Arithmetik an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen kann, verspricht man sich von diesem Zugang, dass er die in Studien nachgewiesenen Probleme und Schwierigkeiten im inhaltlichen Verständnis von Variablen und Termen auffangen und die Kluft zwischen Arithmetik und Algebra (Herscovics & Linchevski 1994) schließen kann. Variablen als Unbestimmte und als Veränderliche (nach Freudenthal, 1973; 1983) dienen als Mittel des Verallgemeinerns. Es lässt sich dadurch eine Sinnstiftung für den Gebrauch von Variablen erzielen, da Variablen benötigt werden, um beispielsweise allgemein zu kommunizieren, argumentieren, explorieren und Probleme zu lösen (Malle, 1993).

(2) Das Verallgemeinern mathematischer Muster ist aber ebenso eine grundlegende Tätigkeit des Mathematikunterrichts der Grundschule, da das Entdecken, Beschreiben und Begründen von Mustern und Strukturen hier feste Bestandteile sind (Wittmann, 2003). In der Interaktion stoßen Kinder auf die Notwendigkeit des Verallgemeinerns, wenn sie sich über Mathematik, also über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen austauschen möchten.

In der Zusammenführung dieser beiden Perspektiven auf das Verallgemeinern ergibt sich die folgende Forschungsfrage:

> *Wie und mit welchen Mitteln verallgemeinern Schülerinnen und Schüler der Grundschule mathematische Muster und wie entwickeln sich dabei Variablenkonzepte?*

Um Verallgemeinerungsprozesse mathematischer Muster im Rahmen des Dissertationsprojekts zu untersuchen (Akinwunmi, 2012), wurden 30 klinische Interviews mit Lernenden der 4. Klasse durchgeführt. Interviewgrundlage waren drei substantielle Aufgabenformate (Plättchenmuster, Partnerzahlen und Zaubertricks), die den Kindern zur Deutung und Beschreibung von mathematischen Mustern vorgelegt wurden. Die Interviews wurden mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks (Steinbring, 2005) analysiert, welches eine Rekonstruktion der Verallgemeinerungen aus begriffsbildungstheoretischer Perspektive ermöglicht. Im Vortrag wurden anhand eines Transkriptausschnitts Einblicke in die Analyse gegeben und die Ergebnisse der Untersuchung daran exemplarisch verdeutlicht.

Entwicklung von Variablenkonzepten im Verallgemeinerungsprozess

Die Analysen zeigen, dass die Beschäftigung mit mathematischen Mustern und Strukturen Anlass zur Verallgemeinerung geben. Dabei entsteht die Verwendung von Wörtern und Zeichen mit Variablencharakter aus der Motivation heraus, eine erkannte mathematische Struktur allgemein und über ein Beispiel hinaus zu beschreiben.

In der Situation der Versprachlichung ziehen Lernende spontan gewählte Wörter und Zeichen aus anderen Kontexten hinzu, die nun als Variablen dienen. Die Kinder setzen diese genutzten Zeichen in eine neue Wechselbeziehung zu der allgemeinen zu beschreibenden Struktur. Durch die Herstellung solcher neuartigen Wechselbeziehungen wird der Variablenbegriff geprägt.

Sprachliche Mittel der Verallgemeinerung

In der Studie wurden ebenso sprachliche Mittel identifiziert, welche die Lernenden bei der Verallgemeinerung ihrer entdeckten Muster nutzen (Abb. 1).

Verallgemeinerungsweise	Beschreibung der Kategorie	Plakative Beschreibung des Terms x^2
Angabe eines Beispiels	Lernende geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses dabei explizit als solches.	„Das ist zum Beispiel drei mal drei."
Aufzählung mehrerer Beispiele	Lernende zählen mehrere Beispiele auf und verweisen ggf. auf einen Fortlauf	„Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter."

Quasi-Variablen	Lernende verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen.	„Ich rechne immer drei mal drei."
Bedingungs-sätze	Lernende verwenden Bedingungssätze.	„Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei."
Variablen	Lernende verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter.	„Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen." oder „? · ?"

Abb. 1 Überblick über mögliche Verallgemeinerungsweisen

Die hier beschriebenen sprachlichen Mittel zur Verallgemeinerung und ihre Mischformen werden von den Lernenden in der Interaktion genutzt und nehmen in diesem Kontext die Rolle von Variablen ein. Dabei dürfen sie nicht als Niveaustufen bewertet, sondern lediglich als Möglichkeiten zur Kommunikation über Muster verstanden werden. Auch wenn die ersten vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen für das Treffen von allgemeingültigen Aussagen aufweisen, verdeutlichen sie dennoch jeweils den allgemeinen Charakter des Musters. Sie ermöglichen also ein ‚Allgemein-verstanden-Werden' in der Interaktion.

Zusammenfassung und Fazit

Lernende der Grundschule sind mit ihren sprachlichen Mitteln in der Lage, mathematische Muster zu verallgemeinern, indem sie mit Hilfe der dargestellten Verallgemeinerungsweisen den allgemeinen Charakter der Struktur beschreiben und dabei über die sichtbaren Objekte hinausweisen. Für eine gelingende Sinnstiftung zum Gebrauch von Variablen ist es deshalb wichtig, Möglichkeiten und Grenzen von Verallgemeinerungen im Unterricht transparent zu machen. Dies kann durch ein wiederkehrendes Aufgreifen und Aushandeln der kindlichen Beschreibungen gelingen, sodass sich Verallgemeinerungen und insbesondere Wortvariablen und Symbole in der Interaktion als tragfähige und weitreichende Kommunikationsmittel erweisen und weiterentwickeln können.

Diskussion

Im Anschluss an den Vortrag wurde über nachfolgende Fragen diskutiert: Wie können Kinder zum Verallgemeinern angeregt werden? Welchen Einfluss haben die spezifischen Aufgaben auf die Verallgemeinerungen der Kinder? Inwiefern beeinflussen die sprachlichen Voraussetzungen der Kinder deren Fähigkeiten zum Verallgemeinern? Kann durch entsprechende Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule die Kluft zwischen Arithmetik und Algebra aufgefangen werden?

Die Referentin konnte aufgrund ihrer Ergebnisse interessante Antworten geben, wie beispielsweise, dass die sprachlichen Voraussetzungen der Kinder weit weniger Einfluss auf deren Verallgemeinerungen haben, als zunächst angenommen. Insbesondere die letzte Frage, die in verschiedenen Diskussionsbeiträgen immer wieder anklang, macht die Relevanz weiterer Forschungsarbeiten in diesem Bereich deutlich.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1*. Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27* (1), 59-78.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage Publications.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18-46). Seelze: Kallmeyer.

Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Bernd Neubert
Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de

Beitrag: Anja Bendler
temp@bendlers.de

Ein PrimarWebQuest zu Statistiken aus dem Bereich Sport

In der Arbeitsgruppe „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ stellte Anja Bendler (Justus-Liebig-Universität Gießen) wesentliche Auszüge aus ihrer wissenschaftlichen Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung mit dem Thema „Ein PrimarWebQuest zu Statistiken aus dem Bereich Sport“ vor. In ihrem Vortrag ging sie sowohl auf grundsätzliche Einsatzmöglichkeiten von WebQuests als auch die Kompetenzentwicklung von Viertklässlern beim Erfassen und Darstellen von Daten ein und arbeitete schließlich die Vorzüge und auch Grenzen der Nutzung von WebQuests überzeugend heraus.

Nach Vorbemerkungen zu WebQuests im Allgemeinen erläuterte Anja Bendler das Herangehen an ihre Arbeit. Motivation für diese war, das große Interesse von Grundschulkindern für Sport für eine fächerverbindende Unterrichtseinheit „Statistiken aus dem Bereich Sport“ zu nutzen. „Roter Faden“ der Umsetzung war ein Projekt, in dem die Schülerinnen und Schüler eine Präsentation für eine Bewerbung als Kinder-Sportreporter anfertigten. Als Quelle zur Beschaffung möglichst aktueller Daten wurde das Internet genutzt. Da Grundschüler gerade bei offenen Unterrichtsangeboten einen festen Rahmen für die Bearbeitung von Aufgaben benötigen, wurde die Web-Quest-Methode als didaktisches Modell der Einheit zu Grunde gelegt. Die zentrale Fragestellung der Hausarbeit bestand darin zu untersuchen, in wie weit ein PrimarWebQuest und insbesondere die selbstständige Arbeit anhand von Hilfestellungen zu einem kompetenteren Umgang mit Daten bei Grundschülerinnen und Grundschülern beitragen können.

Im Zentrum der Ausführungen in der Sitzung der Arbeitsgruppe standen die Vorstellung der Entwicklung der Unterrichtseinheit und der Erkenntnisse zur Beantwortung der aufgeworfenen Fragestellung.

In der Unterrichtseinheit wurde an der Entwicklung der folgenden Kompetenzen gearbeitet:

- *Daten auswerten, indem die Fragen im Reportertagebuch mit Hilfe der angegeben Internetseiten gelöst werden,*
- *Diagramme auswerten, indem dies anhand eines selbstgewählten Beispiels mit Hilfe von Wissenskarten ausgeführt wird,*
- *Diagramme und Piktogramme erstellen, indem dies anhand selbstgewählter Beispiele mit Hilfe von Wissenskarten und Videos ausgeführt wird.*

Der Ablauf der Unterrichtseinheit lässt sich in sieben Phasen gliedern:

Phase 0: Standortbestimmung: Das kann ich schon

Zunächst sollten die bereits vorhandenen Kompetenzen der Viertklässler zum „Daten erfassen und verarbeiten" diagnostiziert werden.

Phase 1: Einführung in die Methode PrimarWebQuest

In dieser Phase lernten die Schülerinnen und Schüler durch exemplarisches Besprechen die Methode des PrimarWebQuests kennen und wurden in Gruppen für die Projektarbeit eingeteilt. Kriterium der Einteilung war nicht die Leistungsstärke der Schüler, sondern deren Interesse an einem bestimmten Thema.

Phase 2: Umgang mit den Quellen – Bearbeitung der einzelnen PrimarWebQuests und Vorbereitung der Präsentation

In den folgenden Stunden wurden die einzelnen PrimarWebQuests durchgeführt. Die Lernenden bearbeiteten selbstständig in ihren Gruppen unter Nutzung bereitgestellter Hilfestellungen die einzelnen Aufgaben.

Phase 3: Zwischenbilanz

Jeweils am Ende einer Doppelstunde fanden Zwischenreflexionen mit der gesamten Lerngruppe statt. Die Schülerinnen und Schüler berichteten von ihrem Arbeitsstand und stellten sich gegenseitig Fragen. Außerdem wurden Probleme gemeinsam besprochen und behoben sowie Kriterien für eine gelungene Präsentation erörtert und auf dem Smartboard festgehalten.

Phase 4: Planung der Präsentationen

In einer Stunde setzten sich die Schülerinnen und Schüler speziell mit der Planung der Präsentation auseinander. Die Wahl der Präsentationsform war offen gelassen. Obwohl auch eine medial gestützte Präsentation, beispielsweise mit dem Präsentationsprogramm von Libre-Office, möglich gewesen wäre, entschieden sich alle Gruppen für eine Plakatpräsentation. Vermutlich brauchen Schülerinnen und Schüler für eine medial gestützte Präsentation noch mehr Unterstützung durch die Lehrkraft als bei der Durchführung dieser Einheit.

Phase 5: Ergebnissicherung – Präsentation vor der Klasse

Pro Gruppe standen 10 Minuten für die Präsentation zur Verfügung.

Phase 6: Besprechung des Bewertungsbogens: Selbst-/Lehrereinschätzung

Während der Präsentation einer Gruppe wurde für diese der Bewertungsbogen durch die Lehrkraft ausgefüllt. Jede Gruppe hatte anschließend Gelegenheit, auch einen Bewertungsbogen zur eigenen Arbeit auszufüllen und über die erreichten bzw. nicht erreichten Anforderungen nachzudenken. Im gemeinsamen Gespräch bekamen die Gruppen dann eine Rückmeldung der Lehrperson.

Phase 7: Standortbestimmung: Das habe ich gelernt

Die abschließende Standortbestimmung diente der Feststellung des Lernzuwachses und lässt dementsprechend die Leistungsentwicklung deutlicher erkennen, als es durch Beobachtungen und die Gruppenergebnisse möglich ist. Auch den Schülerinnen und Schüler wird ihr Lernzuwachs dadurch bewusst.

Für die Vorstellung der Ergebnisse ihrer Untersuchung nutzte Anja Bendler zahlreiche Schülerdokumente. Sie stellte zusammenfassend fest, dass die Lernenden durch die neue Methode, die altersentsprechenden Themen und die authentischen Daten motiviert waren. Die Methode sowie die Hilfestellungen unterstützte das selbstgesteuerte Lernen der Schülerinnen und Schüler.

Die Auswertung der Ergebnisse zeigte, dass die Schülerinnen und Schüler das Entnehmen der Informationen sowohl aus Tabellen als auch aus Diagrammen sicher beherrschen. Einzelne Schwierigkeiten bestanden bei der Informationsentnahme aus etwas längeren Texten.

Die mit Hilfe der Wissenskarte angefertigten Diagrammauswertungen sind alle hervorragend gelungen. Die Möglichkeit, Diagramme mit dem Computer zu erstellen, weckte bei den Lernenden intrinsische Motivation. Die meisten Gruppen fertigten während der Arbeit am PrimarWebQuest die Diagramme mit dem Computer an. Sie wagten sich auch an vermeintlich schwerere Diagrammarten. So entstanden Kreisdiagramme, Säulendiagramme mit mehreren Säulen sowie ein Liniendiagramm. Diese wären vermutlich bei der reinen Arbeit auf Papier nicht angefertigt worden. Die angefertigten Diagramme und Piktogramme entsprechen im Wesentlichen den dafür geltenden Kriterien, ohne dass sie während der Bearbeitung besprochen wurden. Auch das Auswerten der Tabellen und Diagramme erledigten die Lernenden ohne große Mühe. Es kann demnach davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Arbeit mit dem PrimarWebQuest zu einem kompetenteren Umgang mit Daten befähigt wurden. Diese Einschätzung wird durch die Ergebnisse der Abschluss-Standortbestimmung untermauert. Alle Schülerinnen und Schüler konnten ihre Leistungen verbessern. Sogar den Transfer von mit dem Computer erstellten Diagrammen auf das eigene Zeichnen von Diagrammen leisteten die meisten Lernenden.

In der anschließenden Diskussion wurden zahlreiche Fragen sowohl zur Entwicklung statistischer Kompetenzen als auch zum Einsatz der WebQuest-Methode diskutiert. Ein häufig angesprochener Aspekt war der relativ hohe Arbeitsaufwand beim Einsatz der WebQuest-Methode. Dazu bestand aber Konsens, dass sich die Effektivität beim wiederholten Einsatz sowohl für Schüler als auch für Lehrer erhöht.

Anja Bendler wird ihre Unterrichtseinheit auch in einem Zeitschriftenbeitrag in „Grundschulunterricht Mathematik" Heft 2/2016 vorstellen.

Zur Herbsttagung 2016 des Arbeitskreises Grundschule wird die Arbeitsgruppe „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit" wieder angeboten; die inhaltliche Ausgestaltung ist noch offen, es gibt aber erste Überlegungen. Mögliche Angebote und Hinweise bitte an Bernd Neubert.

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer & Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de, simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag: Elisabeth Unterhauser
unterhauser@math.lmu.de

Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren

In der diesjährigen Sitzung stellte Elisabeth Unterhauser ihr Promotionsprojekt vor, das sich mit dem Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren beschäftigt und an der LMU von Hedwig Gasteiger betreut wird.

Ausgangspunkt des Vortrags war eine Darstellung des Forschungsstands und der Erkenntnisse zum Begriffsverständnis ebener Figuren. Dazu führte Frau Unterhauser aus, dass das Begriffsverständnis von ebenen Figuren bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren kaum erforscht ist. Es ist v. a. ungeklärt, wie Kinder ebene Figuren wahrnehmen – ob sie z. B. auf Ecken oder Parallelität der Seiten achten – und was die Entscheidung beeinflusst, mit der die Kinder eine Figur einer bestimmten Begriffsklasse zuordnen. Kinder achten bei ebenen Figuren sowohl auf die Ganzheit der Figur (holistisch) als auch auf ihre Eigenschaften (analytisch). Die holistische Vorgehensweise scheint v. a. charakteristisch für jüngere Kinder und ist auch darin begründet, dass das kindliche Begriffsverständnis von Figuren prototypisch geprägt ist (z. B. Tasmir et al., 2008). Diese prototypische Prägung kann zu einer Begriffsverengung führen. Infolgedessen werden untypische Repräsentanten eines Begriffs nicht als solche identifiziert (z. B. Aslan & Arnas, 2007). Begriffsverständnis schließt auch das Benennen von Repräsentanten und deren Eigenschaften ein. Dabei stützen sich Kinder auf Alltagsbegriffe und Gesten (z. B. Reemer & Eichler, 2005).

Die von Frau Unterhauser vorgestellten Forschungsbefunde beziehen sich auf Kinder zu Schulbeginn oder auf ältere Kinder und inhaltlich auf eine Differenzierung zwischen den Begriffen *Quadrat* und *Rechteck* und nicht auf den weitere Figuren umfassenden Begriff des *Vierecks*. Es liegen dabei kaum Untersuchungen zur Identifikation isolierter Eigenschaften von Figuren vor; insbesondere wurden Kinder nicht aufgefordert, ihre Antworten oder Entscheidungen zu begründen.

Auf der Basis der genannten Forschungsergebnissen entwickelte Frau Unterhauser zunächst eine Pilotstudie mit der Forschungsfrage: *Wie lässt sich das Begriffsverständnis der Figuren Vier- und Dreieck bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren charakterisieren?*

Dazu soll untersucht werden, wie Kinder die Figuren Viereck und Dreieck und deren Eigenschaften bezeichnen und beschreiben. Inwieweit nehmen sie dabei Eigenschaften von Ecken, Seiten und Winkel isoliert wahr? Welche Eigenschaften spielen bei der Identifikation von Repräsentanten von Vierecken und Dreiecken eine Rolle?

Um diesbezüglich Erkenntnisse zu gewinnen, wurde mit 15 Kindern im Alter von 4;1 bis 6;10 Jahren aus zwei Münchener Kindergärten ein halbstandardisiertes Einzelinterview (ca. 30 min) durchgeführt (siehe Abb. 1)

Teilbereiche des Begriffserwerbs von Figuren	**Anzahl**
Benennen von Vierecken und Dreiecken	1 Item
Wahrnehmen und Beschreiben von isolierten Eigenschaften (Linien, Strecken, Streckenlängen, Streckenrelationen, Winkel)	5 Items
Wahrnehmen und Beschreiben von Eigenschaften bei Vierecken und Dreiecken (Seiten, Ecken, Parallelität, Winkel)	4 Items
Zeichnen und Identifizieren von Vierecken und Dreiecken inkl. Begründung (Repräsentanten, Nicht-Repräsentanten, Abb. 2)	4 Items

Abb. 1 Übersicht über Items

Folgende Ergebnisse stellte Frau Unterhauser u. a. vor: Die untersuchten Kinder zeigten qualitativ unterschiedliche Ansätze von Begriffsverständnis, die im Folgenden, in drei Gruppen unterteilt, erläutert werden.

Gruppe 1: Diese Kinder benennen, zeichnen und identifizieren Prototypen, wobei sie holistisch vorgehen. Damit scheint eine Untergeneralisierung der Begriffe Vier- und Dreieck sowie eine partitionale Klassifizierung des Vierecks verbunden, was sich bei den Aufgaben zur Identifikation der Repräsentanten von Viereck und Dreieck zeigt.

So wird bei den Figuren von Abbildung 2 z. B. das Rechteck nicht als Viereck identifiziert.

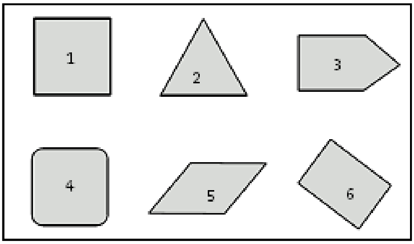

Abb. 2 Vierecke identifizieren

Gruppe 2: Kinder, die dieser Gruppe zugeordnet werden, fokussieren in ihrer Wahrnehmung erste Eigenschaften (z. B. von Seiten oder-Winkeln). Dennoch ist die Ganzheit einer Figur für sie entscheidend. Es kann vorkommen, dass Kinder die Anzahl der Ecken bei Figur 5 (Abb. 2) richtig abzählen, diese aber nicht als Viereck identifizieren, weil die Figur „nicht so aussieht". Es kommt auch vor, dass die Kinder nicht wissen, wie viele Ecken ein Viereck haben muss. So können Kinder keine Identifikationsentscheidung anhand der Anzahl der Ecken treffen.

Abb. 3 Dreiecke zeichnen

Gruppe 3: Kinder in dieser Gruppe achten isoliert und in Figuren auf Eigenschaften. Sie nutzen diese für Identifikationsentscheidungen sowie bei der Begründung, weshalb ein Repräsentant einem bestimmten Begriff zugeordnet wird. Hauptsächlich beziehen sich Kinder auf die Anzahl der Ecken, wobei viele Kinder auch abgerundete Ecken akzeptieren. *Ein* Kind zählt die Seiten. Es definiert z. B. ein Viereck über die Tatsache, dass „es viermal Rand haben muss". Das zeigt sich bei diesem Kind auch beim Zeichnen von Dreiecken (Abb. 3): Es werden lediglich drei Seiten gezeichnet ohne auf die

Geschlossenheit der Figur über das Herstellen der dritten Ecke zu achten.

Zum Abschluss gab Frau Unterhauser einen Ausblick auf ihre geplante Haupterhebung. Es gilt dann zu überprüfen, ob sich die Ergebnisse, die sich im Rahmen der Pilotstudie bei einer Stichprobe von 15 Kindern gezeigt haben, in einem größeren Rahmen bestätigen. Überdies soll untersucht werden, ob sich individuelle Unterschiede im Begriffsverständnis bei Kindern verschiedenen Alters identifizieren lassen. Im Anschluss an die Präsentation von Elisabeth Unterhauser entwickelte sich eine angeregte Diskussion, in der u. a. noch einmal auf die Gestaltung bzw. auf die Aufgabenauswahl sowie auf Details der Konzeption der Studie eingegangen wurde. Hervorgehoben wurde die hohe Relevanz der Studie in Bezug auf Grundlagenwissen zur geometrischen Begriffsbildung bei Kindern zu Schulbeginn.

Auch im kommenden Jahr möchte die AG Geometrie innerhalb der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule wieder die Gelegenheit geben, aktuelle oder jüngst abgeschlossene Forschungsprojekte vorzustellen. Ferner wurde diskutiert, inwieweit sich der Arbeitskreis Geometrie in der Grundschule auch in den Arbeitskreis Geometrie der GDM einbringen kann. Zwei Teilnehmerinnen bekundeten bereits ein erstes Interesse.

Literatur

Aslan, D., & Aktaş Arnas, Y. A. (2007). Three- to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education, 15 (1)*, 83-104.

Reemer, A., & Eichler, K.-P. (2005). Vorkenntnisse von Schulanfängern zu geometrischen Begriffen. *Grundschulunterricht,* (11), 37-42.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69* (2), 81–95.

Unterhauser, E. (2015). Begriffsverständnis von Parallelität bei Kindern im Alter zwischen 3 und 6 Jahren – eine explorative Interviewstudie. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015,* Münster: WTM (im Druck).

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt & Marcus Nührenbörger
brandt@math.uni-frankfurt.de,
marcus.nuehrenboerger@tu-dortmund.de
Beitrag: Carolin Mayer
carolin.mayer@math.tu-dortmund.de

Argumentativ geprägte Lernsituationen zur Erkundung arithmetischer Gleichheiten

Lernende der Primar- und der Sekundarstufe weisen zumeist ein sehr einseitiges Verständnis von Gleichungen und dem Gleichheitszeichen auf (z. B. Winter 1982, Borromeo-Ferri & Blum 2011). Sie betrachten Gleichungen stets in Form einer Aufgabe-Ergebnis-Deutung, bei der einer Rechenaufgabe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein Ergebnis auf der rechten Seite zugeordnet wird. Gleichungen werden so nicht relational betrachtet, indem zwei gleichwertige Terme zueinander in Beziehung gesetzt werden. Für ein umfassendes Gleichheitsverständnis ist jedoch gerade diese algebraische Sichtweise wichtig. Daher wird vermehrt die Förderung eines flexiblen Gleichheitsverständnisses gefordert.

Das hier diskutierte Promotionsprojekt greift diese Forderung auf. Im Kern geht es um die Anregung eines *inhaltlichen* Verständnisses von *Gleichheiten*, bevor ein gründliches Verständnis von *symbolischen Gleichungen* entwickelt werden kann.

Im Fokus stehen zwei Forschungsfragen:

- Was *charakterisiert* ein algebraisches Gleichheitsverständnis von Viertklässlern?
- Wie können *Lernumgebungen gestaltet* sein, die die Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses bei Viertklässlern anregen?

Die Konstruktion der Lernumgebungen ist durch zwei zentrale Design-Prinzipien gekennzeichnet: (1) Es wird auf die Verwendung des Gleichheitszeichens verzichtet. (2) Das Setting soll die Lernenden zum Argumentieren anregen. Ziel des Projektes ist die Anregung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses und die damit verbundene Erforschung von den Charakteristika eines Gleichheitsverständnisses. Auf eine dafür nicht notwendige und möglicherweise sogar hinderliche formale Notation wird verzichtet. Die Lernumgebungen werden auf der Grundlage zweier substantieller Aufgabenformate (Rechenketten und Malkreuze, vgl. Wittmann & Müller 2012) entwickelt (Radford 2011).

Argumentieren und Mathematiklernen

Bei der Erkundung von Gleichheiten unter besonderer Berücksichtigung der strukturellen Beziehungen gleichwertiger Terme stehen argumentative Tätigkeiten der Lernenden im Vordergrund: Warum sind zwei Terme gleich(wertig)? (s. London & Mayer 2015). Die Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses im Sinne eines fundamentalen Lernprozesses vollzieht sich insbesondere im Zuge der Interaktion mit Anderen (Miller 1986), in der Bedeutungen zwischen denen am Diskurs Beteiligten ausgehandelt werden und so mathematisches Wissen entwickelt werden kann (Steinbring 2000, Voigt 1994). Argumentationen können als Interaktionsprozesse verstanden werden, in denen die Bedeutungsaushandlungen besonders intensiv geführt werden (Schwarzkopf 2000).

Eine Argumentation entsteht dann, wenn ein Begründungsbedarf explizit angezeigt wird (Schwarzkopf 2000). Dieser kann im Mathematikunterricht seitens der Lehrperson initiiert oder von den Lernenden subjektiv empfunden werden. Lernende halten einen mathematischen Sachverhalt jedoch meistens nicht von sich aus für begründungsbedürftig, sodass im Unterricht Argumentationen oftmals durch die Lehrperson initiiert werden. Da Lernen aber gerade dann stattfindet, wenn Kinder Begründungen intrinsisch motiviert suchen (vgl. z.B. Schlag 2013), stellt sich die Frage, wie ein stärker subjektiv empfundener Begründungsbedarf für ein mathematisches Phänomen angeregt werden kann. Es wird angenommen, dass sich dieser aus dem Fach heraus ergeben muss, indem eine Erwartungshaltung der Lernenden irritiert wird (Nührenbörger & Schwarzkopf 2013). Eine substantielle Lernchance kann dann entstehen, wenn den Kindern „Möglichkeiten zur Aufklärung“ der Irritation geboten werden. Es müssen, kurz gesagt, produktive Irritationen initiiert werden (ebd., S. 719).

Aufgabenbeispiel: Rechenketten

Die folgende Szene aus der Lernumgebung Rechenketten zeigt exemplarisch eine Lernchance für einen fundamentalen Lernprozess angeregt durch eine produktive Irritation (Abb.1).

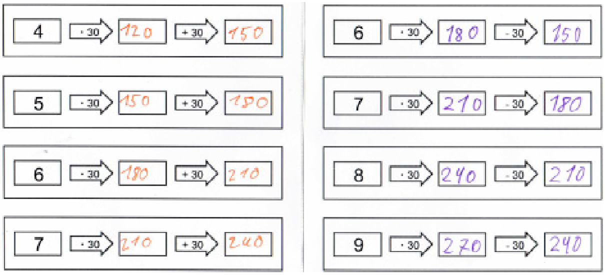

Abb.1 Rechenketten

Die Aufgabenstellung ist so konzipiert, dass zwei Lernende paarweise verschiedene Aufgabenfolgen bearbeiten und im Anschluss daran diese miteinander vergleichen. Die Rechenketten sind so gewählt, dass die Kinder in jeder Zeile gleiche Zielzahlen erreichen, obwohl die Rechenketten verschiedene Aufgaben enthalten (s. Abb.1). Diese Irritation „Andere Aufgaben, trotzdem gleich" soll die Kinder dazu anregen, die Struktur der Ketten zu hinterfragen und eine Begründung der Gleichheit zu entwickeln. Sie kann als produktiv angenommen werden, da den Kindern durch den übersichtlichen, vergleichbaren Aufbau der Rechenketten sowie den Vergleich die Möglichkeit zur Aufklärung der Irritation geboten wird.

Melina und Lena bearbeiten die oben genannte Aufgabe wie folgt.

1 M Aber das sind doch ganz andere Zettel (.) sie hat ja viermal, 30
2 I Mhm
3 M Und hier (*zeigt auf Lisas zweite Pfeile*) am Ende plus und ich minus
4 I Mhm
5 M (.) Aber sie hat am Ende trotzdem 150 raus, genauso wie ich
6 L Ja
7 I (.) Mhm
8 M Ich glaub, ich weiß woran das liegt, sie hat zwei weniger, Dasselbe aber mal 30 halt, dadurch ergibt das halt 30 weniger immer
9 L Ja
10 M Und sie muss ja plus rechnen und ich # minus und dadurch ähm, sind die Ergebnisse auf einmal gleich
11 L # Minus

Melina vergleicht zunächst die Arbeitsblätter (Z. 1-5). Ihr fällt auf, dass die Rechenketten unterschiedlich sind. Sie scheint irritiert zu sein, sprachlich durch die Konjunktion „aber" ausgedrückt (Z. 1 & 5). Möglicherweise ging sie zunächst davon aus, dass die Arbeitsblätter identisch sind, sodass gleiche Zielzahlen entstehen. Als sie merkt, dass dies nicht der Fall ist, scheint sie aufgrund der unterschiedlichen Rechenketten ungleiche Zielzahlen erwartet zu haben. Dass diese Erwartung jedoch auch nicht erfüllt wird, irritiert Melina. Für ihre unerwartete Entdeckung entwickelt sie im weiteren Verlauf eine Begründung (Z. 8 & 10). Die Irritation scheint für sie einen Begründungsbedarf darzustellen, den sie daraufhin zu befriedigen versucht. Sie ist insofern produktiv, als es Melina gelingt, ihre anfängliche Verwirrung aufzuklären und eine mathematische Begründung zu entwickeln. Melina setzt die Differenz der Startzahlen in Beziehung zu den unterschiedlichen zweiten Pfeilzahlen und begründet somit, wenngleich noch nicht allumfassend, die Gleichheit der Zielzahlen.

Literatur

Borromeo-Ferri, R. & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 127-130). Münster: WTM.

London, M. & Mayer, C. (2015). Argumentierend Arithmetik lernen. In A. Budke et al. (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen*. Münster: Waxmann.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse*. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013). Gleichungen zwischen „Ausrechnen" und „Umrechnen". In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In J. Cai & E. Knuth (Hrsg.), *Early Algebraization*. Berlin: Springer.

Schlag, B. (2013). *Lern-und Leistungsmotivation*. Wiesbaden: Springer

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.),*Verstehen und Verständigung*. Köln: Aulis.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *Mathematica Didacta, 5,* 185-211.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G. (2012). *Das Zahlenbuch, Bd. 1-4.* Stuttgart, Leipzig: Klett.

Arbeitsgruppe Lehrerfortbildung

Koordination: Marianne Grassmann & Christoph Selter
marianne@grassmann.info, christoph.selter@t-online.de

Beitrag: Elisabeth Rathgeb-Schnierer & Julia Weinsheimer
rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de,julia.weinsheimer@web.de

PRIMA – Professionalisierung von Grundschullehrkräften im mathematischen Anfangsunterricht

Forschungsarbeiten zur Professionalisierung von Lehrkräften zeigen, dass fachliches und fachdidaktisches Wissen wie auch didaktische Orientierungen mit Handlungsweisen im Unterricht zusammenhängen (z. B. Kunter, Baumert, Blum, Klusmann, Krauss, & Neubrand, 2011). Für das professionelle Handeln von Lehrkräften, die arithmetische Lernprozesse am Schulanfang initiieren und begleiten, ist das Wissen über Zahlbegriffsentwicklung und Rechnenlernen ebenso von Bedeutung, wie das Wissen um Unterrichtskonzepte zur Förderung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen. Der hohe Qualitätsanspruch an den mathematischen Anfangsunterricht und die Tatsache, dass viele Lehrkräfte fachfremd unterrichten, machen Fortbildungen in diesem Bereich unabdingbar. Um dabei Nachhaltigkeit zu gewährleisten, sind folgende Qualitätskriterien zu beachten: Fachspezifik, Langfristigkeit, Verbindung von Erprobung und Reflexion sowie Feedback (Prenzel, Friedrich & Stadler, 2009).

Beim **Aufbau** der Fortbildungsreihe (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz 2014) wurden die genannten Kriterien umgesetzt: (1) Fachspezifik, indem auf schuljahresspezifische Inhalte fokussiert und Lehrkräfte der ersten Klasse als Teilnehmende zugelassen wurden. (2) Langfristigkeit, indem sich die Fortbildungsreihe über den Zeitraum von Juli 2013 bis Mai 2015 erstreckte. (3) Erprobung und Reflexion, indem es bei jeder Veranstaltung geeignete Praxisaufträge gab, die in der Folgeveranstaltung reflektiert wurden. (4) Feedbackkultur, indem in den von uns zur Bedingung gemachten Schultandems durchgängig gemeinsame Planung und Reflexion angeregt wurden.

Die **Durchführung** der Fortbildung orientierte sich an dem Unterrichtsentwicklungsmodell von Helmke (2009, 310), das die Bereiche

„Information über Unterricht", „Rezeption", „Reflexion", „Aktion" und „Evaluation" zirkulär darstellt. Der Unterrichtsentwicklungsprozess kann an verschiedenen Punkten beginnen und ist nicht nach einem Durchlauf abgeschlossen (a.a.O.). Die Bereiche Information über Unterricht, Rezeption und Reflexion sind Elemente jeder Fortbildungsveranstaltungen: Informationen beziehen sich auf mathematikdidaktische (z.B. Lernen von Kindern, Diagnose, Zahlenblickschulung), stoffdidaktische (z. B. Zahlbegriffsentwicklung, Rechnenlernen und Entwicklung von Flexibilität) sowie unterrichtspraktische Hintergründe. Rezeption und Reflexion wird angeregt, indem die Teilnehmenden Aktivitäten ausprobieren, Lernangebote Kriterien bezogen analysieren und diese jeweils vor dem Hintergrund ihrer eigenen Praxis diskutieren. Die Aktion (Praxiserprobung) wird durch konkrete Praxisaufträge sowie die Formulierung individueller Ziele und Umsetzungsschritte gezielt vorbereitet. Evaluation auf reflexiver Ebene erfolgt zu Beginn einer jeden Fortbildung anhand von mitgebrachten Schülerdokumenten, beobachteten und dokumentierten Lernprozessen und eigenen Erfahrungen.

Der Fokus der **wissenschaftlichen Begleitung** lag auf der Entwicklung diagnostischer Fähigkeiten. Hierzu wurde ein Instrument generiert und evaluiert, das einen qualitativen Zugang ermöglicht und die beruflichen Anforderungen mit Fokus auf die Begleitung der Lernprozesse im arithmetischen Anfangsunterricht möglichst adäquat abbildet. Ziel ist es, diagnostische Fähigkeiten zu erfassen, die in entsprechenden Situationen des Lehrerhandelns relevant sind; hierbei wird neben Unterrichtsprodukten auch der Unterrichtsprozess in den Blick genommen. Neben den Beurteilungen von Schülerlösungen und Mathematikaufgaben kommen auch Videosequenzen zum Einsatz, in denen Lehr-Lern-Situationen eingeschätzt und Handlungsmöglichkeiten formuliert werden sollen. Die theoretische Grundlage für die Operationalisierung bildeten u.a. das Modell diagnostischer Fähigkeiten der COACTIV-Studie (nach Brunner et al., 2011) und das Modell professioneller Kompetenzen (nach Lindmeier, 2011), welche modifiziert und konkretisiert wurden.

Der entwickelte Fragebogen ergänzt mit animierter Fragenpräsentation erfasst diagnostische Fähigkeiten in sechs verschiedenen Bereichen (vgl. Abb. 1 links). Zur Analyse einzelner Facetten diagnostischer Fähigkeiten wurden die Antworten zunächst codiert und anschließend in vier Qualitätsstufen (A, B, C und 0) eingeordnet. In der Analyse konnten Kompetenzprofile generiert werden, aus denen sich die Ausprägungen der diagnostischen Fähigkeiten für jede Facette ablesen lassen (umso ausgeprägter, je weiter außen gelegen) (Abb. 1 rechts).

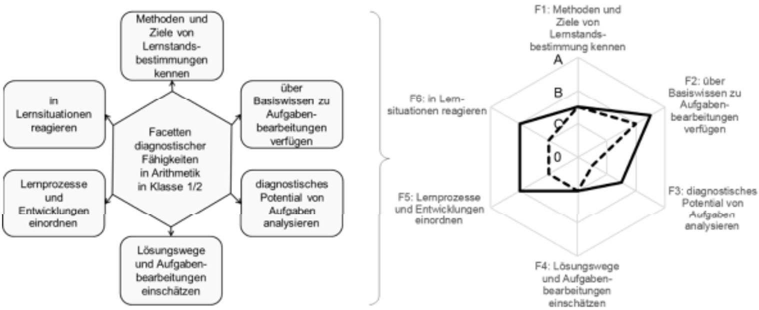

Abb. 1 links Modell diagnostischer Fähigkeiten bei der Begleitung von Lernprozessen in Arithmetik Klasse 1/2
rechts Kompetenzprofil einer Lehrkraft zu Fortbildungsbeginn (--) und –ende (–)

Betrachtet man die Kompetenzprofile aller Lehrkräfte, lässt sich Folgendes beobachten: In den *Facetten F2 über Basiswissen zu Aufgabenbearbeitungen verfügen, F4 Lösungswege und Aufgabenbearbeitungen einschätzen, F5 Lernprozesse und Entwicklungen einordnen* und *F6 in Lernsituationen reagieren* zeigen sich positive Veränderungen über den Fortbildungszeitraum. In den Facetten *F1 Methoden und Ziele von Lernstandbestimmungen kennen* und *F3 diagnostisches Potential von Aufgaben analysieren* stellt sich ein vielfältigeres Bild dar: während bei einigen Lehrkräften ein qualitativer Anstieg zu beobachten war, weisen andere Kompetenzprofile keine Veränderungen beziehungsweise eine geringere Qualitätsstufe auf. Möglicherweise hängen diese Ergebnisse mit den Fortbildungsinhalten zusammen und lassen sich dadurch erklären, dass kein expliziter Schwerpunkt auf den Bereichen Diagnose und Diagnosemethoden lag.

Bei qualitativen, Individuums bezogenen Feinanalysen zeigten sich weitere Veränderungen in den Antworten: z. B. weniger Defizit- und mehr Kompetenzorientierung sowie mehr schülerorientierte als lehrerzentrierte Aussagen. Detaillierte Informationen finden sich in: Weinsheimer, J. (in Vorbereitung), Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften – Entwicklung eines Instruments zur Erfassung und Analyse diagnostischer Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften bei der Begleitung von Lernprozessen im arithmetischen Anfangsunterricht.

Literatur

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A., Krauss, St. (2011). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, St. Krauss, M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften* (S. 215-234). Münster: Waxmann.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze-Velber: Kallmeyer/ Klett.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* . Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers*. Münster: Waxmann.

Prenzel, M., Friedrich, A. & Stadler, M. (2009). *Von SINUS lernen – Wie Unterrichtsentwicklung gelingt*. Seelze-Velber: Kallmeyer/ Klett.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner-Merz, Ch. (2014). Lernprozesse anregen, begleiten und beobachten im Mathematikunterricht der Klasse 1 – eine Fortbildungsreihe. *Beiträge zum Mathematikunterricht, Band 1*. WTM-Verlag, 947-950.

In der anschließenden **Diskussion** wurde großes Interesse an der Thematik deutlich. Schwerpunkte der Diskussion waren der Zusammenhang zwischen den Präsenzphasen und den Aufträgen für Erprobungen in der Praxis, die konkreten Ergebnisse der Fortbildung (auch die Selbsteinschätzung der Teilnehmenden), die Evaluation von Lehrerfortbildungen (können Ergebnisse auch auf Schülerebene erfasst werden?), und der Zusammenhang zwischen Intervention und der Evaluation, da die Entwicklung der Diagnosefähigkeiten zwar Schwerpunkt der wissenschaftlichen Begleitung, aber kein expliziter Inhalt der Fortbildungen war.

Arbeitsgruppe Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Silke Ladel & Christof Schreiber
ladel@math.uni-sb.de, schreiber@math.uni-giessen.de

Beitrag: Daniel Walter
daniel.walter@math.tu-dortmund.de

Wie ‚rechenschwache' Kinder Tablet-Apps nutzen

Der Einsatz von digitalen Medien wird sowohl von der Bildungspolitik als auch von Eltern und Lehrkräften mit hohen Erwartungen verbunden – Erwartungen, denen angesichts des aktuell verfügbaren Softwareangebotes kaum nachgekommen werden kann. Es zeigt sich zumeist, dass die dominierenden *drill & practice*-Formate allenfalls zum Automatisieren erlernter mathematischer Fähigkeiten geeignet erscheinen, nicht aber für den Aufbau mathematischen Verständnisses (Krauthausen, 2012).

Das in diesem Beitrag beschriebene Promotionsprojekt rückt beispielhaft zwei Programme in den Fokus, die aus *mathematikdidaktischer* Perspektive Potentiale zur Überwindung wesentlicher Hürden auf dem Weg zum nichtzählenden Rechnen aufweisen. Von besonderem Interesse ist die Frage, *wie* sog. ‚rechenschwache' Schüler Tablet-Apps nutzen und ob sie die innewohnenden Potentiale in einer Weise verwenden, die lernförderlich erscheint.

Entgegen der fachdidaktischen Zielvorgabe, zählendes Rechnen bis zum Ende des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis 10 zu überwinden, halten nicht wenige Lernende am Ende des ersten (vgl. u.a. Gaidoschik, 2010) sowie im Verlauf des zweiten Schuljahres (Benz, 2005) und auch in der Sekundarstufe (vgl. u.a. Schäfer, 2005) an zählenden Lösungsstrategien fest. Daher erscheint es wesentlich, häufig nicht genommene Hürden auf dem Weg zum nichtzählenden Rechnen aufzuzeigen. Dazu zählen ein einseitig ordinales Zahlverständnis (Gaidoschik, 2014), Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel (Lorenz, 2009) sowie Probleme im Zuge des strukturierten Darstellens und Erfassens von Mengen (Hess, 2012). Die Tablet-Apps ‚Rechentablett' und ‚Virtuelles Zwanzigerfeld' (Urff, 2014, s. Abb.1) bieten Potentiale zur Überwindung dieser Hürden an.

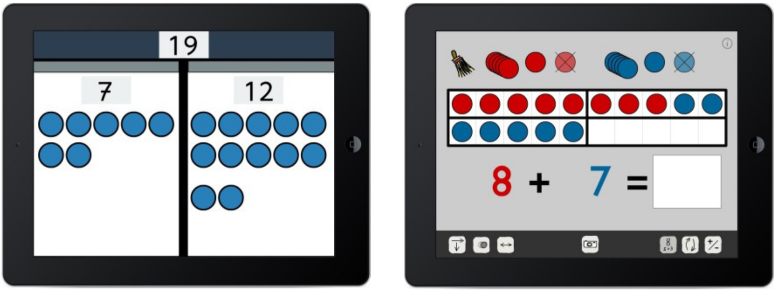

Abb.1 ‚Rechentablett' und ‚Virtuelles Zwanzigerfeld'

Die Überwindung eines einseitig ordinalen Zahlverständnisses kann durch die Multi-Touch Technologie (Sinclair & Heyd-Metzuyanim, 2014) unterstützt werden. Es ist denkbar, mehrere Plättchen am ‚Rechentablett' nicht sequentiell, sondern mit mehreren Fingern simultan darzustellen. Ferner sind die Brunerschen Darstellungsebenen synchron dargeboten, so dass die Veränderung einer beliebigen Darstellungsebene eine automatische Anpassung der jeweils anderen Repräsentationen erwirkt. Dieses „Alleinstellungsmerkmal" (Rauh, 2012, S. 55) digitaler Medien kann einen Beitrag zur Überwindung von Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel leisten (Ladel, 2009). Schließlich können Anregungen zum strukturierten Darstellen und Erfassen von Mengen gegeben werden, indem die dargebotenen Plättchen automatisch oder auf Anfrage gemäß ‚Kraft der Fünf' angeordnet werden können (vgl. Ladel & Kortenkamp 2009).

Die beschriebenen Potentiale werden *nicht* im Sinne eines ‚didaktischen Mehrwertes' (Dörr & Strittmatter, 2002) verstanden, da von *keiner* globalen Überlegenheit digitaler gegenüber nichtdigitalen Medien auszugehen ist. Vielmehr wird kritisch-optimistisch beforscht, ob und wie Lernende Potentiale von Tablet-Apps nutzen.

Um das Nutzerverhalten zu untersuchen, wurden zwei Interviewserien mit jeweils drei Sitzungen bei ‚rechenschwachen' Lernenden zu Beginn ihres zweiten Schuljahres durchgeführt und qualitativ ausgewertet - eine Interviewserie zum ‚Virtuellen Zwanzigerfeld' (08/09 2014; n=19) sowie eine weitere zum ‚Rechentablett' (08/09 2015; n=14). Zu Beginn der Sitzungen wurden Nutzungsmöglichkeiten der jeweiligen Software gemeinsam mit den Kindern erarbeitet.

Die Analysen der Daten zeigen, dass viele SchülerInnen Tablet-Apps zumeist nicht in einer Weise nutzen, die normativ adäquat erscheint. So konnte beobachtet werden, dass der überwiegende Anteil der Kinder bei der Zahldarstellung am ‚Rechentablett' zunächst nicht vom Potential der Multi-Touch Technologie Gebrauch macht, um mehrere Plättchen simultan darzustellen. Erst nach dem Impuls, ‚mehrere Plättchen auf einmal' zu legen, nutzten einige Kinder dieses Potential und stellten neun Plättchen mit beiden Händen simultan dar.

Analoge Beobachtungen lassen sich in den Nutzungsweisen der Kinder im Umgang mit dem ‚Virtuellen Zwanzigerfeld' erkennen. Ikonische Darstellungen wurden im Zuge des Berechnens von Additionsaufgaben primär als Abzählhilfe herangezogen, während die dargebotenen Zahlenwerte häufig nicht hinterfragt wurden. Das Potential der Synchronität der Darstellungsebenen konnte erst nach gezielten Impulsen im Sinne einer Vernetzung der Repräsentationen zum Tragen kommen (für weitere Analysen s. Walter, 2015).

Es bleibt festzuhalten, dass Potentiale der in dieser Studie herangezogenen Tablet-Apps von Kindern nicht automatisch im Sinne der Überwindung zählender Lösungsstrategien genutzt werden. Vielmehr werden sie in einer Art verwendet, die einer Verfestigung der Zähltechniken förderlich erscheint. Erst durch gezielte Impulse kann die Chance erwachsen, von einem Potential auch zu profitieren. Diese Erkenntnis untermauert die Rolle der Lehrkraft, die ein entscheidendes Moment beim Einsatz von Tablet-Apps einnimmt. Material, egal ob physischer oder virtueller Natur, das zum Aufbau des mathematischen Verständnisses konzipiert wurde, braucht professionalisierte Lehrkräfte, die sie einzusetzen wissen. Zugleich benötigen professionalisierte Lehrkräfte angemessene (virtuelle oder physische) Materialien, um die Ziele des arithmetischen Anfangsunterrichts erfüllen zu können.

Literatur

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim: Franzbecker.

Dörr, G., & Strittmatter, P. (2002). Multimedia aus pädagogischer Sicht. In L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia* (S. 28-42). Weinheim: Psychologie-Verlags-Union.

Gaidoschik, M. (2014). *Rechenschwäche – Dyskalkulie*. Horneburg: Persen.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien*. Seelze: Klett.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht*. Frankfurt: Lang.

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Ladel, S. (2009). *Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2009). Virtuell-enaktives Arbeiten mit der „Kraft der Fünf". *MNUPrimar, 1* (3), 91-95.

Lorenz, J. H. (2009). Zur Relevanz des Repräsentationswechsels für das Zahlverständnis und erfolgreiche Rechenleistung. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 230-247). Weinheim und Basel: Beltz.

Rauh, B. (2012). Höheres Lernen mit digitalen Medien - auch im Bereich der Arithmetik? In S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe* (S. 37-58). Hildesheim: Franzbecker.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule*. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Sinclair, N., & Heyd-Metzuyanim, E. (2014). Developing number sense with TouchCounts. In S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.), *Von Audiopodcast bis Zahlensinn* (S. 125-150). Münster: WTM-Verlag.

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen*. Berlin: Mensch und Buch Verlag.

Walter, D. (2015/ im Druck). Nutzungsverhalten rechenschwacher Kinder im Umgang mit Tablet-Apps. *BzMU 2015*. Münster: WTM Verlag.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dagmar Bönig & Silke Ruwisch
dboenig@uni-bremen.de, ruwisch@uni.leuphana.de

Beitrag: Barbara Ott
barbara.ott@phsg.ch

Textaufgaben grafisch darstellen – eine qualitative Analyse von Eigenproduktionen

In der Arbeitsgruppe Sachrechnen gab Barbara Ott unter dem Titel „Textaufgaben grafisch darstellen – Eine qualitative Analyse von Eigenproduktionen“ einen Einblick in ihr Dissertationsprojekt, das sie an der Otto-Friedrich-Universität Bamberg bei Prof. Dr. Anna S. Steinweg durchführt. In diesem Projekt beschäftigt sie sich mit von Kindern selbstgenerierten grafischen Darstellungen zu Textaufgaben. Dementsprechend standen auch im Beitrag Kinderzeichnungen im Zentrum. Es wurde das im Projekt entwickelte theoriebezogene und kategorienbasierte Analyseinstrument vorgestellt und ein Einblick in die Interventions- und Evaluationsstudie zum grafischen Darstellen gegeben.

Darstellungen sind für Erkenntnisprozesse in der Mathematik und dem Mathematikunterricht in verschiedenen Kontexten wesentlich. Auch in verschiedenen Standards und Curricula wird das Darstellen als eigene Kompetenz angeführt. Im Kontext des Sachrechnens können die in Textaufgaben verbal dargestellten mathematischen Strukturen von den Schülerinnen und Schülern u. a. grafisch repräsentiert und so zur Bearbeitung der Aufgaben verwendet werden. Lernende haben jedoch immer wieder Schwierigkeiten, Grafiken als Bearbeitungshilfen zu nutzen (vgl. z. B. Franke & Ruwisch, 2010). Ungeklärt war bisher, ob grafische Eigenproduktionen von Kindern zu Textaufgaben mathematische Aufgabenelemente geeignet abbilden sowie ob und wie die Entwicklung einer Darstellungskompetenz auf der Basis grafischer Eigenproduktionen gefördert werden kann. Auf diese zwei Aspekte fokussiert das Dissertationsprojekt und gliedert sich folglich in zwei Teile.

Theorieentwurf und Analyseinstrument

In einem ersten Teil wurde der Frage nachgegangen, inwieweit in Textaufgaben inhärente mathematische Strukturen in grafischen Darstellungen der Schülerinnen und Schüler wiedererkennbar sind. Auf der Basis von etwa 400 Kinderzeichnungen der ersten und zweiten Jahrgangsstufe wurde im Projekt mittels qualitativer Inhaltsanalyse und theoretischem Kodieren ein kategorienbasiertes und theoriebezogenes Instrument entwickelt, das die Analyse grafischer Darstellungen zu Textaufgaben hinsichtlich der Abbildung mathematischer Strukturen, der mathematischen Passung und des Abstraktionsgrades in Forschung und Praxis ermöglicht (vgl. Ott, 2014). Im Beitrag wurden zunächst dafür wesentliche theoretische Grundlagen zum Begriff der Darstellung und der Grafik als besonderer Darstellung geklärt. Anschließend wurde der Theorieentwurf zu grafischen Darstellungen zu Textaufgaben sowie das Analyseinstrument vorgestellt und an Kinderzeichnungen angewandt.

Das der Untersuchung zugrundeliegende Verständnis einer mathematischen Struktur von grafischen Darstellungen zu Textaufgaben stützt sich auf allgemeine mengentheoretische Überlegungen in Anlehnung an Rinkens (1973). Im Text müssen Objekte, z. B. Gegenstände oder Personen, identifiziert werden, zwischen denen verbal eine Verknüpfung festgelegt ist. Für diese strukturrelevanten Objekte werden in der grafischen Darstellung Zeichen eingeführt. Zur Abbildung der im Text gegebenen Verknüpfung werden diese Zeichen für die strukturrelevanten Objekte so auf dem Papier angeordnet, dass dadurch ihre durch die Textaufgabe vorgegebene Beziehung zueinander dargestellt wird.

Im Forschungsprojekt konnten sechs Kategorien zur Abbildung der mathematischen Struktur in grafischen Darstellungen zu Textaufgaben identifiziert werden: nicht grafische, textferne, illustrative, objektbezogene, implizit diagrammatische und explizit diagrammatische Darstellungen. Elemente der mathematischen Struktur der Textaufgabe sind hierbei nur in objektbezogenen und diagrammatischen Darstellungen erkennbar. Objektbezogene Darstellungen enthalten strukturrelevante Objekte, diagrammatische Darstellungen darüber hinaus auch Verknüpfungen.

Ein Schülerdokument kann verschiedene Darstellungen enthalten. Dies wird im Analyseinstrument durch die Anordnung dieser Kategorien in einem Entscheidungsbaum in die Auswertung einbezogen. Mittels eines streng dichotomen und kompetenzorientierten Vorgehens bei der Kategorisierung ist so eine eindeutige Kategorienzuordnung jedes Dokuments möglich. Die einzelnen Kategorien sind durch Leitfragen miteinander verbunden, die an den Kategoriendefinitionen orientiert sind. So ermöglicht dieses Instrument eine zunehmend feinere Analyse jedes Dokuments im Lauf des Analyseprozesses. Eine Zuordnung zur Kategorie erfolgt erst dann, wenn kein Element der Darstellung eine positive Antwort auf die Leitfrage zulässt bzw. die letzte Kategorie erreicht ist (vgl. Ott, 2015). Im Workshop wurde das Analyseinstrument zur Strukturabbildung anhand von Kinderzeichnungen zu einer Textaufgabe erprobt und diskutiert.

Die mathematische Passung zwischen Textaufgabe und grafischer Darstellung kann in den Elementen der mathematischen Struktur vollständig, teilweise oder nicht vorhanden sein. Zudem können die Strukturelemente auch keine Beachtung erfahren. Daraus ergibt sich zur Analyse eine Ankreuzmatrix, in der für jedes Dokument ein eindeutiges Ankreuzmuster entsteht (vgl. Ott, 2014). Der Abstraktionsgrad einer grafischen Darstellung wird in Anlehnung an Peschek (1988) als Aufmerksamkeitsfokussierung verstanden und zeigt sich in zwei Indikatoren: Der Fokussierung in der grafischen Darstellung auf die strukturrelevanten Objekte und der Fokussierung auf deren wesentliche Eigenschaften. Diese Fokussierung kann jeweils hoch oder niedrig ausgeprägt sein. Daraus ergibt sich erneut eine Matrix als eindeutige Analysefolie (vgl. Ott, 2015).

Intervention und Entwicklungsverläufe

Im zweiten Teil des Projekts wurde eine Interventions- und Evaluationsstudie durchgeführt. Ziel der Intervention war es, die grafischen Darstellungsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler weiterzuentwickeln. In der Erprobung wurde als fachdidaktische Methode ausgewählt, über Reflexionseinheiten auf Bewusstheit (Mason, 1987) bezüglich grafischer Darstellungen in den als wesentlich erkannten Aspekten Einfluss zu nehmen. Reflexion wurde dabei als kognitive Aktivität im Sinn eines Standpunkt- und Perspektivwechsels verstanden (Schülke, 2013, S. 52). Ausgangspunkt und Gegenstand der Reflexionsprozesse im Klassenverband bildeten von den Lernenden selbstgenerierte grafische Darstellungen zu Textaufgaben. Als Medium der Reflexion wurde in den Einheiten die Sprache gewählt, indem gemeinsam versucht wurde, ausgewählte grafische Darstellungen zu verstehen und zu erklären.

Auf Grundlage der bereits zuvor im Workshop analysierten Kinderzeichnungen aus Pretest, Posttest und Follow-up konnten nun Entwicklungsverläufe von Kindern im Projekt nachvollzogen und der Entscheidungsbaums als Analyseinstrument evaluiert werden.

Diskussion und Ausblick

Im Workshop ergaben sich jeweils während der Arbeitsphasen interessante Diskussionen. Dabei stellte sich v. a. die getrennte Analyse der einzelnen Aspekte einer grafischen Darstellung als wichtig heraus. Abschließend wurde diskutiert, inwieweit sich eine Kontextänderung der Testitems zu den verschiedenen Messzeitpunkten auswirken könnte. Zudem wurde ein Ausblick auf Ergebnisse der quantitativen Auswertung sowie der begleitenden Interviews gegeben.

Literatur

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010^2). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum.

Mason, J. (1987). "Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen". *mathematik lehren 21*, 4–5.

Ott, B. (2015). Qualitative Analyse grafischer Darstellungen zu Textaufgaben – eine Untersuchung von Kinderzeichnungen in der Primarstufe. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 163-182). Heidelberg: Springer.

Ott, B. (2014). Kinder zeichnen zu Textaufgaben – Vorstellung eines Instruments zur Analyse graphischer Darstellungen. In J. Roth, & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 879-882). Münster: WTM.

Peschek, W. (1988): Untersuchungen zur Abstraktion und Verallgemeinerung. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung* (S. 127-190). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky u.a.

Rinkens, H. D. (1973). *Abstraktion und Struktur. Grundbegriffe der Mathematikdidaktik*. Ratingen: Henn.

Schülke, C. (2013). *Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern*. Münster: Waxmann.

Arbeitsgruppe Vorschulische Bildung

Koordination: Meike Grüßing
gruessing@ipn.uni-kiel.de

Beitrag: Lars Eichen & Julia Bruns
lars.eichen@hu-berlin.de, j.bruns@hu-berlin.de

Entwicklung eines videobasierten Instruments zur Erhebung von Handlungsfähigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen im mathematischen Bereich (VimaH)

In der diesjährigen Sitzung der Arbeitsgruppe „Vorschulische Bildung" wurde das Projekt *VimaH – Entwicklung eines videobasierten Instruments zur Erfassung von situationsspezifischen Fertigkeiten im mathematischen Bereich* vorgestellt. Unterschiedliche Prozessmodelle für pädagogische Fachpersonen beschreiben Kompetenzen auf zwei Ebenen: der Dispositions- und der Performanzebene (bspw. Fröhlich-Gildhoff, Weltzien, Kirstein, Pietsch & Rauh, 2014). Auf der Dispositionsebene sind personenspezifische Kompetenzfacetten, wie das fachliche und fachdidaktische Wissen angesiedelt, auf der Performanzebene dagegen handlungsbezogene Kompetenzfacetten. Im Übergang zwischen diesen beiden Ebenen siedelt die Autorengruppe situationsspezifische Fertigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen an, also die Fähigkeiten, die ihrem Handeln in einer Situation vorausgehen (siehe auch Blömeke, Gustafsson & Shavelson, 2015). Diese können in drei Facetten beschrieben werden: der Wahrnehmung, der Interpretation und der Handlungsplanung. Für den mathematischen Bereich meint die Wahrnehmung, mathematische Tätigkeiten und Potenziale in elementarbereichsspezifischen Situationen zu erkennen. Dies umfasst sowohl die mathematischen Aktivitäten und Äußerungen der Kinder, wie auch das mathematische Potenzial von Materialien, Spiel- und Alltagssituationen. Bei der Interpretation werden die Wahrnehmungen anhand von fachlichen und fachdidaktischen Kriterien und auch in Bezug auf die Interessen und den Lern- und Entwicklungsstand der fokussierten Kinder eingeordnet. Die Facette der Handlungsplanung umschreibt die Planung von Spiel- und Lernumgebungen, die dem aufgrund der Wahrnehmung und Interpretation festgelegtem Ziel entsprechen. Bezogen auf die Aktivitäten der Kinder können dies adaptive mathematische Spiel- und Lernumgebung zur Begleitung und Förderung ihrer frühen mathematischen Bildungsprozesse sein oder adäquate Spiel- und Lernumgebungen zur weiteren Beobachtung des mathematischen Lern- und Entwicklungsstandes der Kinder.

In den verbreiteten Prozessmodellen zur Beschreibung der Kompetenzen elementarpädagogischer Fachpersonen wird ein starker Zusammenhang zwischen den einzelnen Kompetenzfacetten angenommen. Erste empirische Ergebnisse zeigen einen Einfluss des mathematikdidaktischen Wissens und der Einstellung zur Mathematik auf die Fähigkeiten zur Situationswahrnehmung (Carle & Wittmann, 2015; Dunekacke, Jenßen & Blömeke, 2015) sowie einen Einfluss der Einstellung zur Mathematik auf die Fähigkeit zur Handlungsplanung (Carle & Wittmann, 2015). Studien zu den Interpretationsfähigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen und den Zusammenhängen zwischen Interpretation und den anderen Kompetenzfacetten auf der Ebene der situationsspezifischen Fähigkeiten und der Disposition fehlen bislang. Um die Interpretationsfähigkeit empirisch zu untersuchen, braucht es neben den Instrumenten zur Erfassung der dispositionalen Kompetenzfacetten standardisierte Instrumente, die die Erfassung der situationsspezifischen Fertigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen im mathematischen Bereich erlauben. Als geeignetes Verfahren schlagen verschiedene Autorinnen und Autoren die Testung mit Hilfe von Videovignetten vor (Blömeke, 2013; Dunekacke, 2015; Lindmeier, 2013), da diese stärker als papierbasierte Verfahren die Komplexität, Spontanität und Unmittelbarkeit von pädagogischen Alltagssituation nachbilden. Videos werden dabei als kontext-sensitiver Impuls für die Datengewinnung genutzt (Blömeke, 2013).

In dem Projekt VimaH wird ein videobasiertes Instrument entwickelt, dass an der Schnittstelle zwischen der Dispositions- und Performanzebene ansetzt. Ziel ist zum einen die valide Erfassung der Fähigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen zur Situationswahrnehmung im Bereich Mathematik und zum anderen die valide Erfassung der Fähigkeiten elementarpädagogischer Fachpersonen zur kontextspezifischen Interpretation der gezeigten Fähigkeiten im Bereich Mathematik. Dazu wurden in einem ersten Schritt die formalen Kriterien und der mathematische Inhalt der Videovignetten mit Hilfe von Expertinnen und Experten bewertet. In einer Vorstudie mit $N = 37$ elementarpädagogischen Fachpersonen wurden zu ausgewählten, positiv bewerteten Vignetten mit dem Fokus auf den Bereich Mengen und Zahlen zur Situationswahrnehmung und Interpretation offene Antworten erhoben. Die Fachpersonen durchliefen im Vorfeld eine einjährige Fortbildung zur frühen mathematischen Bildung. Entsprechend wurde erwartet, dass die offenen Antworten sowohl richtige Antworten von unterschiedlicher Qualität, aber auch typische Fehler zeigen. Auf der Grundlage dieser offenen Antworten wurden geschlossene Multiple-Choice-Items entwickelt. In einem Itempanel wurden diese Items mit Hilfe von Expertinnen und Experten überprüft, diskutiert und weiterentwickelt. Die Pilotierung des vorläufigen Instruments steht zum Zeitpunkt der Arbeitsgruppe noch aus. Geplant ist zudem, die letzten fünf Schritte von der Vorstudie bis zur Pilotierung für die Bereiche Raum und Form, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zu wiederholen, um die Situationswahrnehmung und Interpretationsfähigkeit der elementarpädagogischen Fachpersonen in allen Inhaltsbereiche der Mathematik erfassen zu können.

Im Mittelpunkt der Workshopphase der Arbeitsgruppe standen zwei Items, die in dem Itempanel für die Interpretation kritisch bewertet wurden. Ausgehend von den Kritikpunkten der Expertinnen und Experten wurden für jedes Videoitem mindestens zwei Verbesserungen vorgeschlagen, die in Kleingruppen im Hinblick auf das Kriterium der Inhaltsvalidität überprüft wurden. Im Fokus stand dabei die Frage, welche der vorgeschlagenen Verbesserungen den Inhalt des Items besser repräsentiert.

In der abschließenden Diskussion wurden die Arbeitsergebnisse gesammelt und die Vor- und Nachteile der Erfassung von situationsspezifischen Fertigkeiten mit Hilfe der vorgelegten Items diskutiert.

Literatur

Blömeke, S. (2013). Moving to a higher state of confusion. Der Beitrag der Videoforschung zur Kompetenzforschung. In *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (S. 25–43). Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie, 223,* 3-13.

Carle, U. & Wittmann, G. (2015). *Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen als Bedingung der Vernetzung von Elementar- und Primarbereich - eine repräsentative Untersuchung in zwei Bundesländern (AnschlussM).* http://www.anschluss-m.uni-bremen.de/docs/Carle+Wittmann2015AnchlussM_Schlussbericht_netz.pdf. Gesehen am 03.11.2015.

Dunekacke, S., Jenßen, L. & Blömeke, S. (2015). Validierung eines Leistungstests zur Erfassung mathematikdidaktischer Kompetenz angehender frühpädagogischer Fachkräfte durch die videogestützte Erhebung von Performanz. *Zeitschrift für Pädagogik, 61,* 80–98.

Fröhlich-Gildhoff, K., Weltzien, D., Kirstein, N., Pietsch, S. & Rauh, K. (2014). *Expertise. Kompetenzen frühkindheitspädagogischer Fachkräfte im Spannungsfeld von normativen Vorgaben und Praxis. Erstellt im Kontext der AG Fachkräftegewinnung für die Kindertagesbetreuung in Koordination des BMFSFJ März 2014.* Freiburg i.Br: Zentrum für Kinder- und Jugendforschung.

Lindmeier, A. (2013). Video-vignettenbasierte standardisierte Erhebung von Lehrerkognitionen. In U. Riegel & K. Macha (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (Fachdidaktische Forschungen. 4, S. 45–61). Münster: Waxmann.

University of Bamberg Press

In dem vorliegenden Tagungsband sind die Beiträge aller Vortragenden der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) in Tabarz vom 06. bis 08. November 2015 zum Thema „Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter“ dokumentiert.

Nach wie vor liegt ein Schwerpunkt der Arbeit des Arbeitskreises Grundschule in der Förderung des Austausches und der Zusammenarbeit aller am Mathematikunterricht in der Grundschule in Praxis, Theorie und Forschung unmittelbar oder mittelbar Beteiligter. Durch die jährliche Herbsttagung wird dies traditionell zur gelebten Praxis.

Das diesjährige Thema wurde im Rahmen von vier Hauptvorträgen aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und im Plenum diskutiert. Außerdem waren auch in diesem Jahr wieder Arbeitsgruppen zu den Bereichen Arithmetik, Geometrie, Sachrechnen und Daten, Zufall & Wahrscheinlichkeit, Kommunikation & Kooperation, Vorschulische Bildung und Lernen, Lehren & Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe aktiv und man befasste sich intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen.

Mit der Jahrestagung 2015 blickt der Arbeitskreis Grundschule auf eine Veranstaltung zurück, die geprägt war durch den lebendigen und konstruktiven Austausch zu mathematikdidaktischen Fragestellungen. Dies steht im Zeichen einer inzwischen 24jährigen Tradition.

eISBN 978-3-86309-368-6

9 783863 093686

www.uni-bamberg.de/ubp