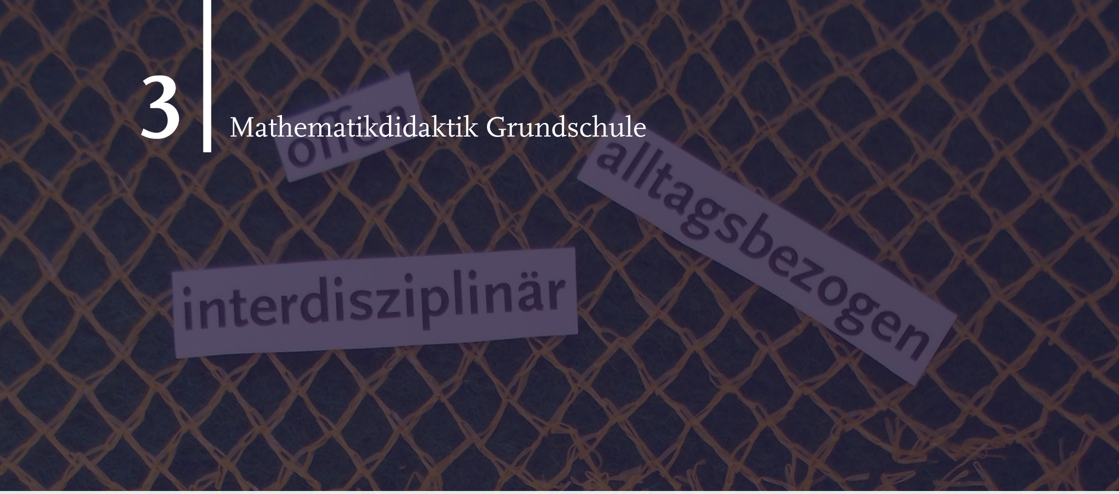
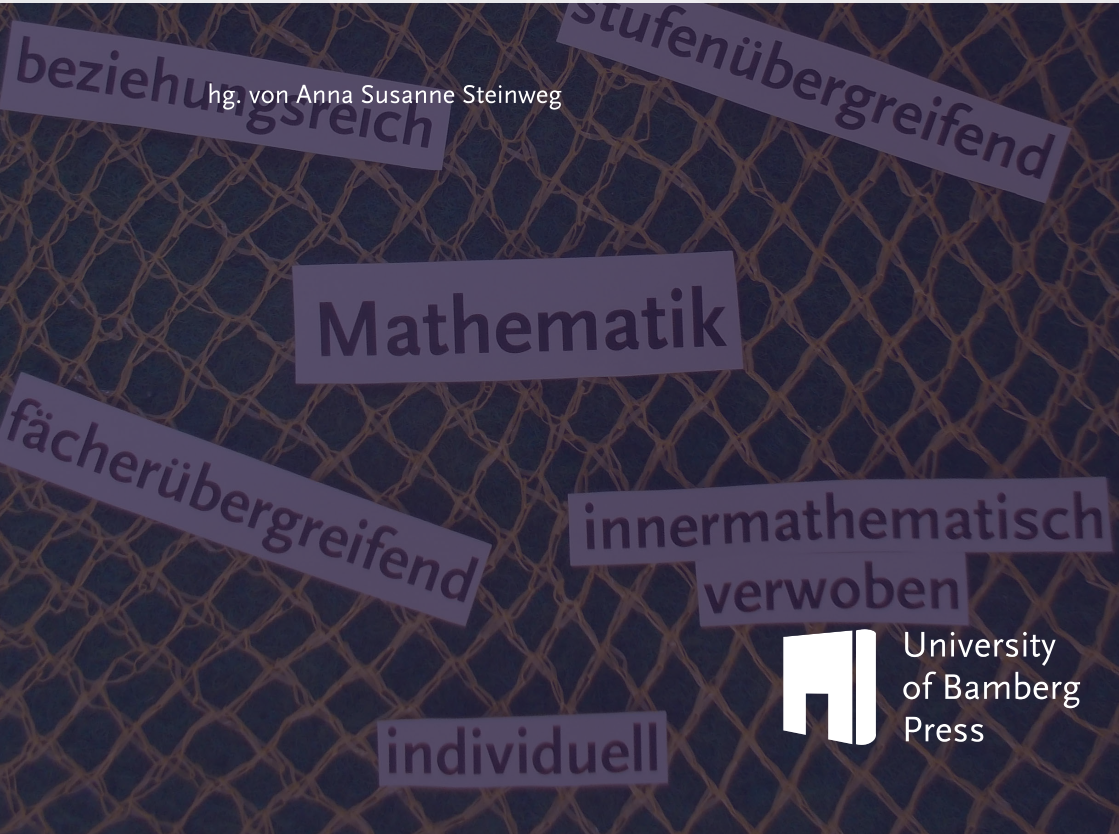
3 | Mathematikdidaktik Grundschule




# Mathematik vernetzt

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2013

hg. von Anna Susanne Steinweg




University of Bamberg Press

# 3 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

Band 3

hg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

University
of Bamberg
Press
2013

# Mathematik vernetzt

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2013

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press
2013

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de/ abrufbar



Herstellung und Druck: docupoint, Magdeburg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press, Andra Brandhofer
Foto auf dem Umschlag: Anna Susanne Steinweg



ISSN:2193-2905
ISBN: 978-3-86309-194-1 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-195-8 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-opus4-56975

## Inhaltsverzeichnis

## Berichte aus den Arbeitsgruppen

## Vorwort

Der hier vorliegende dritte Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ fasst die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der GDM in Tabarz (Thüringen) zusammen. Vom 8. bis 10. November 2013 widmete man sich mit großem Interesse dem Thema „Mathematik vernetzt“. Im Austausch zwischen Schulpraxis, den verschiedenen Phasen der Lehreraus- und Weiterbildung sowie der Schulverwaltung wurde das Thema aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet.

Für Kinder im Vor- und Grundschulalter ist die Welt des „mathematischen Denkens“ zunächst keine isolierte Welt. Sie tritt ihnen vielmehr in bedeutsamen Kontexten, Fragen und Alltagssituationen gegenüber, oft versteckt in komplexen Problemen. Dass sie der Schlüssel zur Bewältigung vielfältiger Anforderungen ist, erleben und erfahren Kinder nach und nach. Aus diesem Blickwinkel liegt Vernetzung in der Natur der Sache. Bezogen auf den Unterricht basiert darauf die Idee des fächerverbindenden oder -übergreifenden Unterrichts. Insbesondere im Bereich der Geometrie existieren vielfältige Ansätze und konkrete Entwürfe, die einen direkten Bezug zum Fach Kunst aufzugreifen. Natürlich ist hier auch der umgekehrte Weg, die Integration mathematischer Inhalte in künstlerische Themen, ein häufig beschrittener. Auch Bezüge zwischen Mathematik und anderen Unterrichtsfächern (z. B. Sachunterricht, Sport oder Musik) werden oft explizit herausgestellt und unterrichtlich genutzt. Auch die Vernetzung mit der Sprache und den überfachlichen Kompetenzen findet derzeit u.a. im wissenschaftlichen, didaktischen und bildungspolitischen Diskurs besondere Berücksichtigung und war bereits Thema eines Vortrages der Herbsttagung 2012 („Prozessbezogene Kompetenzen: Fördern, Beobachten und Bewerten“).

In Bezug auf die verschiedenen Inhaltsbereiche der Mathematik spielt die innermathematische Vernetzung eine besondere Rolle, wenn es darum geht, vorhandenes Wissen flexibel und belastbar zu verknüpfen.

Die Hauptvorträge der diesjährigen Tagung haben verschiedene Anknüpfungspunkte der Mathematik aufgegriffen und somit ein breites „Netz“ an Denkanstößen und Diskussionspunkten geboten. Im Zentrum standen dabei immer wieder konkrete Möglichkeiten und Beispiele zur Umsetzung der aufgezeigten Ansätze. So konnten die vorgestellten Forschungsansätze, Erprobungsbeispiele, Standpunkte und Ergebnisse lebendig werden und konstruktive Diskussionen auslösen.

Unser Dank richtet sich ganz besonders an alle Kolleginnen und Kollegen, die sich auch in diesem Jahr durch ihre wissenschaftlichen Beiträge und Befunde aktiv an der Tagung beteiligt haben und auf diesem Weg neue Anregungen und Erkenntnisse eingebracht haben. Dadurch haben sie maßgeblich zum Gelingen der Tagung beigetragen. Danken möchten wir auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren, die am zweiten Tagungstag mit ihren Arbeitsgruppen zusammenkamen. Hier können wir auf eine lange Tradition zurückblicken, die es insbesondere jungen Forscherinnen und Forschern ermöglicht, ihre Projekte zu präsentieren und zur Diskussion zu stellen.

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger

Dr. Claudia Lack

Dr. Thomas Rottmann

Bernadette Thöne

Webseite des Arbeitskreises http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/

## Mathematik für alle! (Wie) geht das?

von Albrecht Beutelspacher

### 1 Einführung

Von den drei Winterschen Grunderfahrungen ergeben sich die ersten beiden großen Themen in ziemlich natürlicher Weise: Es geht einerseits um das Verhältnis Mathematik zur Welt und zum anderen um die Mathematik als deduktiv geordnete Welt eigener Art. Die dritte Grunderfahrung, nämlich „Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, zu erwerben" fällt meines Erachtens – bei aller Wertschätzung des Problemlösens – gegenüber den ersten Themen ab.

Dabei ist allerdings zu bedenken, dass Winter seine Forderungen im Zusammenhang mit dem Mathematikunterricht formuliert hat, insbesondere mit der Frage, inwiefern der Mathematikunterricht allgemeinbildend sei. Wenn man über Mathematik und Mathematikvermittlung in informellen, offenen Situationen und Kontexten nachdenkt, wird die dritte Grunderfahrung entscheidend, und zwar in einem erweiterten Sinne. Es geht darum, in welcher Beziehung ich als Person zur Mathematik stehe, inwiefern die Mathematik mein Leben bereichert, in welcher Art und Weise ich etwas von der Mathematik „habe".

In der Tat geht es bei einer informellen Beziehungsmöglichkeit zur Mathematik in besonderer Weise darum, Menschen mit etwas bekannt zu machen, was sie interessiert, Ihnen einen Impuls zu geben, der sie weiter trägt, oder sie zu irritieren, um durch diese Verfremdung ihr Denken anzuregen. Denn in solche offenen Situationen kommen die Menschen vollkommen freiwillig – und sie haben keine Hemmungen, wieder zu gehen, wenn sie keine Beziehung zu dem Dargebotenen gewinnen können. Der Vorteil ist allerdings, dass Menschen in solchen informellen Lernsituationen, die ein Teil ihrer Freizeit ist, in besonderer Weise offen für Neues sind.

Zunächst geht es darum, eine direkte Beziehung zwischen der Person und der Mathematik zu aktivieren. Diese kann auf Vorwissen und Interessenlage aufbauen, etwa wenn es um die Geschichte der

Mathematik geht, um Verbindungen zu anderen Disziplinen oder um Anwendungen. Eine Beziehung kann aber auch quasi neu geschaffen werden, indem man ... verfremdet eine vertraute Umgebung erschließt (zum Beispiel wenn man „mathematische“ Strukturen bei Pflanzen betrachtet) oder etwas gänzlich Neues probiert; dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass man „mit der mathematischen Brille“ (allzu) vertraute Objekte betrachtet oder neue Objekte und Situationen in einen überraschenden Zusammenhang mit vertrauten bringt....

Erst nachdem eine solche Beziehung geschaffen ist, kann man über den mathematischen Blick auf die Welt oder sogar über das Innenleben der Mathematik sprechen.

Ich möchte im Folgenden von vier Aspekten meiner Tätigkeit zur Popularisierung von Mathematik berichten, die jeweils in spezifischer Weise Mathematik mit Nichtmathematikern in offenen Kontexten konfrontiert.

## 2 Mathematik in der Umwelt

Mathematik ist auch eine Art und Weise, die Welt zu sehen. Wenn man mathematische Begriffe wie „Symmetrie“ oder „Anordnung“ im Kopf hat, sieht man mehr. Man sieht Symmetrisches und entdeckt Asymmetrisches. Man findet Ordnungen und man bemerkt auch kleinste Störungen der Ordnung. Das bedeutet: Man sieht nicht nur mehr von der Welt, sondern man sieht sie auch differenzierter. Und wer differenziert, hat mehr vom Leben.

Seit einigen Jahren veranstaltet das Mathematikum „Mathematische Stadtführungen“. Die Idee ist, sozusagen mit der „mathematischen Brille“ durch eine Stadt zu gehen. Dabei entdeckt man in jeder Stadt Bemerkenswertes: Die Formen der Verkehrszeichen, die Muster der Pflasterungen in den Fußgängerzonen, Symmetrie (und Asymmetrie) von Häusern, Formen von Kirchenfenstern, die Anzeigen zur Löschwasserentnahme. Ferner bieten Auslagen in Geschäften und die fast allgegenwärtigen Kunstobjekte reiches Material für mathematische Entdeckungen.

Bei unseren Führungen beschränken uns darauf, den Menschen „die Augen zu öffnen“, einen neuen Blick auf die – in der Regel – vertraute Stadt zu werfen. Man könnte natürlich auch versuchen, Schulmathematik unterzubringen (Was ist das Volumen des Rathauses?), Fermi-Aufgaben anzuschließen o.ä.. Wir haben dieser Versuchung bislang widerstanden.

Ein ganz ähnliches Projekt haben wir unlängst in einer Mathe-AG mit Schülerinnen und Schülern eines 3. Schuljahrs einer ländlichen Gemeinde durchgeführt. Zunächst wurde zunächst besprochen, wo man Mathematik sehen kann. Dann gingen die Schülerinnen und Schüler mit einer Kamera in ihren Ort und fotografierten alles, was zum Thema passte (Muster, Symmetrie. Zahlen usw.) Der Höhepunkt und Abschluss war eine Fotoausstellung, die auch Eltern und den Bürgermeister zum Staunen brachte, weil ihnen oft nicht klar war, um welche Motive es sich handelt und wo diese zu finden sind.

## 3 Mathematik in Kunst und Kultur

Kunst, Kultur und Geschichte als Anknüpfungspunkte eignen sich besonders für bildungsaffine Menschen. Daher wenden sich die beiden folgenden Formate vornehmlich an diese Zielgruppe.

Meiner Erfahrung nach bietet sich hier besonders das Medium des Vortrags an. Man kann dabei zahlreiche Themen ansprechen: Mathematik in der Geschichte (Wie haben die Römer gerechnet? Die Geschichte des Gleichungslösens), Mathematik und Kunst, Mathematik und Musik, Mathematik und Religion (Kann man Gott berechnen?). Es eignen sich aber auch innermathematische Themen, wie etwa „die Unendlichkeit" oder „Pi – die allumfassende Zahl".

Ein solcher Vortrag muss allerdings mehr bieten als „nur" Mathematik. Es geht auch um Metabotschaften. Beim Thema „Unendlichkeit" spreche ich nicht nur über den mathematischen Unendlichkeitsbegriff, stelle allerdings heraus, dass man in der Mathematik in objektiver Weise über Unendlichkeit sprechen kann und „hieb und stichfeste" Beweis führen kann.

Man kann meiner Erfahrung nach punktuell formale Mathematik präsentieren, beim Thema „Pi" zum Beispiel die archimedische Methode der Approximation von pi, die Leibnizsche Reihe und moderne Berechnungsmethoden – allerdings alles ohne Beweis.

Auf den Titel ist besondere Sorgfalt zu verwenden, denn aufgrund des Titels kommen Zuhörer oder auch nicht.

Und, wie oft, gilt auch hier das Diktum Mark Twains: „Eine gute Rede hat einen guten Anfang und einen guten Schluss – und beide sollten möglichst dicht beieinander liegen."

## 4 Mathematik in der Geschichte

Seit einigen Jahren verfasse ich mehr oder weniger regelmäßig Radiobeiträge in der Sendereihe „Wissenswert" von hr2. Das Format ist mit 15 Minuten Sendezeit fast ideal. Man kann durchaus inhaltlich etwas sagen, läuft aber nicht Gefahr, einen Vortrag abzuspulen. Die Redakteurin hat die Reihe genannt „Albrecht Beutelspacher erzählt aus der Geschichte der Mathematik".

Das stimmt nur zum Teil. Es ist richtig, dass ich erzähle, und es stimmt, dass ich in der Regel das Thema an einem historischen Ereignis festmache. Bei einem so flüchtigen Format wie einem Radiobeitrag ist ein starker Beginn essentiell. Ich versuche, den ersten Satz oder den ersten Abschnitt so zu formulieren, dass er unmittelbar „zündet". Wie bei einer klassischen Short Story soll einen der erste Satz direkt in das Geschehen hineinziehen. Hier sind einige Beispiele:

1. Beginn einer Sendung, in der es um die Lösbarkeit von Gleichungen ging:

*In der Nacht zum 30. Mai 1832 saß ein junger Mann in seinem Zimmer in Paris und schrieb fieberhaft und ohne abzusetzen einen Brief an seinen Freund Auguste Chevalier. Er versuchte, alles, was er wusste, in diesen Brief aufzuschreiben. Manches war rudimentär, manches noch unausgegoren, aber er wusste, er hatte der Welt etwas Wichtiges zu sagen. Und er wusste: er musste es jetzt sagen.*

*Er hatte keine Zeit mehr. Denn im Morgengrauen des 30. Mai musste er sich einem Duell stellen, und er ahnte, dass er dieses Duell nicht überleben würde.*

*Der Mann hieß Evariste Galois. Er war zwanzigeinhalb Jahr alt. Seine Ideen würden die Mathematik revolutionieren. Und er würde an den Folgen des Duells sterben.*

2. Beginn einer Sendung, in der das Quadrat im Mittelpunkt stand:

*Am 7. Dezember 1915 wurde in Sankt Petersburg eine Ausstellung mit futuristischen Gemälden eröffnet. Unter allen ausgestellten Werken zeichnete sich eines durch extreme Radikalität aus. Das „Schwarze Quadrat“ von Kasimir Malewitsch. Dieses Bild, das zu einer Ikone der Moderne wurde, zeigt in der Tat ein schwarzes Quadrat auf weißem Grund. Sonst nichts. Dieses Quadrat zeigt nichts, es verbirgt nichts, es bedeutet nichts. Es ist der radikale Gegenentwurf zu der Kunst, die die Welt zeigt. Auf diesem Bild ist nichts von der Welt vorhanden: weder Menschen noch Natur noch Religion. Alles auf diesem Bild ist von Menschen gemacht. Und dafür steht das Quadrat.*

3. In einer Sendung zum Thema „Punkt“ habe ich so begonnen:

*„Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“ So lautet der erste Satz des ersten Mathematikbuchs der Welt. Das Buch stammt aus dem Jahre 300 v. Chr. und es heißt „Die Elemente“. Dieses Buch hat kein Vorwort, es bietet zu Beginn keinen Überblick, keine Motivation, sondern beginnt mit dem wie aus Stein gemeißelten Satz: „Ein Punkt ist was keine Teile hat.“*

Die bisher besprochenen Formate setzen weitgehend den informell Lernenden als rezeptiv voraus, also als jemand, der in der Lage ist, auch rezeptiv zu lernen. Damit kann man zwar Kenntnisse über Mathematik und Mathematiker gewinnen, zu einem mehr oder weniger tiefen Eindringen in mathematische Gedankengänge kann es aber nur kommen, wenn man – wenigstens exemplarisch – Mathematik macht. Dies kann beim mathematischen Experimentieren gelingen.

## 5 Mathematische Experimente

Das Mathematikum in Gießen hat sich als der Ort für die Vermittlung von Mathematik durch interaktive Experimente etabliert. An den über 150 Stationen können Besucher Muster legen, Brücken bauen, Kugelwettrennen veranstalten, sich unendlich oft im Spiegel sehen oder sich an Knobelspielen den Kopf zerbrechen. Die Experimente sind nach folgenden Kriterien konzipiert:

- sie machen echte Erfahrungen möglich, nicht über den Computer vermittelte Erfahrungen

- ihnen liegt jeweils ein benennbares mathematisches Phänomen zugrunde
- Sie scheinen auf den ersten Blick einfach zu sein, bieten aber ein überraschend es Ergebnis oder eine überraschende Schwierigkeit.
- Sie ermöglichen Besuchern Erfolgserlebnisse.
- Sie ermöglichen gemeinsames Erforschen und Erfahren.
- Sie sind anschlussfähig an tiefere mathematische Behandlung (etwa im Mathematikunterricht).

Diese Thesen sollen an einem Beispiel erläutert werden. Es geht um ein Knobelspiel, bei dem zwei Teile zu einer Pyramide, und zwar zu einer dreiseitigen Pyramide, einem so genannten Tetraeder zusammengesetzt werden sollen.

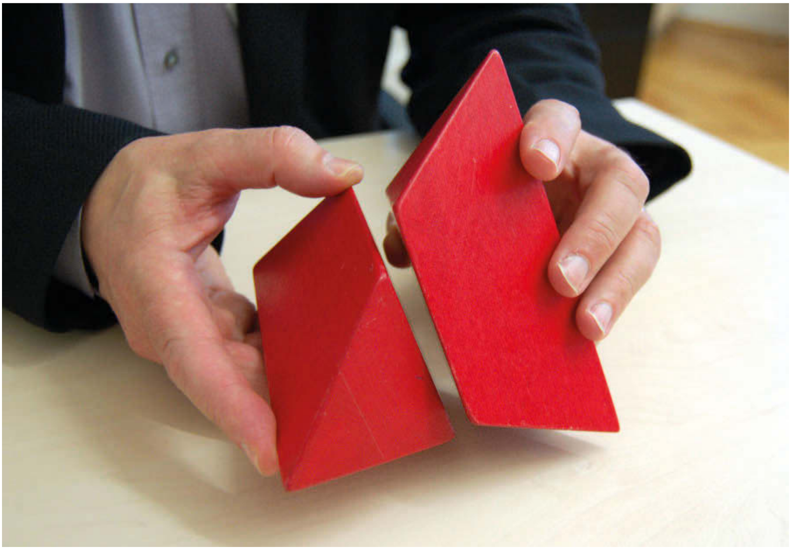


Abb. 1 Knobelspiel aus zwei Teilen eine dreiseitige Pyramide zusammensetzen

Die beiden Teile sind identisch: sie haben jeweils zwei Spitzen, an die sich Dreiecke anschließen. Die Dreiecke werden durch zwei Trapeze und ein Quadrat zusammengehalten. Niemand wird dies so analysieren, sondern einfach versuchen, die beiden Teile zusammenzusetzen. Die ersten Versuche ergeben in der Regel eine symmetrische Figur, da Symmetrie ja eine sehr starke – und in der Regel gute – Leitschnur ist. Wenn man nicht zu den wenigen gehört, die das Puzzle „einfach so" schaffen, wird man kurz überlegen: Bei einer dreiseitigen Pyramide hat ein Viereck nichts verloren.

Wenn man jetzt die Quadrate aufeinander legt und dann noch eine Drehung im 90° durchführt, hält man wie durch ein Wunder die Pyramide in der Hand.

Das Exponat aktiviert eine enorme Raumvorstellung. Außerdem kann man noch weitere Fragen stellen:

- Wie entsteht der Schnitt durch das Tetraeder? Um diese Frage zu beantworten, hält man am besten das Tetraeder so, dass die langen Kanten der beiden Teile waagerecht bzw. senkrecht sind. Dann ist der Schnitt senkrecht in der Mitte der beiden Kanten.
- Umgekehrt kann man fragen: (Wie) kann man ein Tetraeder so durchschneiden, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist? Auch darauf gibt das Experiment eine Antwort.

Meiner Beobachtung nach – und erste qualitative Evaluationen bestätigen dies – gelingt den Besuchern des Mathematikums ein erster Schritt in die Mathematik. Dies bedeutet zweierlei: Zum einen betreiben die Besucher wirklich Mathematik, und zwar in dem Sinne, dass sie Ergebnisse durch Nachdenken erhalten. Sie erleben den Aha-Moment, in dem sich alles zusammenfügt und man sicher ist: genau so gehört es zusammen. Zum andern ist dies nur ein Schritt in die Mathematik, dem weitere folgen können. Dazu gibt es Angebote (Experimentvorführungen, Vorträge, Literatur), aber kein Besucher muss dies tun.

Noch ein Wort zur Sprache. Wer immer das Mathematikum schon einmal besucht hat, weiß, dass es ein fröhliches, lautes Haus ist. Wenn man aber genau beobachtet, sieht man überall kleine Gruppen von Besuchern, die sich um ein Experiment scharen und gemeinsam versuchen, das Problem zu lösen. Und wenn man hört, was die Kinder und Jugendlichen sagen (zugegeben. Manchmal auch brüllen), dann geht es immer um die Experimente. Die Besucher, die an einem Experiment gemeinsam arbeiten, benutzen sogar eine erstaunlich präzise Sprache, indem sie von „Kanten“ und „Ecken“ und „zusammenpassen“ und ähnlichem sprechen. Es ist nicht die formale Sprache, die sie benutzen, aber sie machen bereits Mathematik.

Das Mathematikum ist tatsächlich ein Haus, das Besucher jeden Alters und jeder Vorbildung anzieht. Es hat nicht nur bei den Besuchern viel bewirkt, sondern sicher auch dazu beigetragen, dass der Zugang zur Mathematik über Experimente heute selbstverständlich geworden ist, und es hat zu einer Änderung der Haltung gegenüber Mathematik und Naturwissenschaften beigetragen.

## 6 Fazit

Wenn Mathematik wichtig ist, dann ist sie auch außerhalb des Schulunterrichtes wichtig. Menschen jeden Alters sind bereit, sich der Mathematik zu öffnen. Es lohnt sich, mit unterschiedlichsten Formaten auf die Menschen zuzugehen, um sie an der Faszination der Mathematik wenigstens ein Stück weit teilhaben zu lassen.

Prof. Dr. Dr. h. c. Albrecht Beutelspacher
Justus-Liebig-Universität
Mathematisches Institut
Professur für Diskrete Mathematik und Geometrie
Arndtstraße 2
35392 Gießen
albrecht.beutelspacher@mathematikum.de

## Kinder entern Sprache und Mathematik mit der Schatzkiste – Frühförderung in Kita und Familie

von Dagmar Bönig

*Im Projekt „Entdecken und Erzählen“ (Enter) geht es darum die sprachliche und mathematische Bildung von Kindern aus sozial benachteiligten Familien im letzten Kindergartenjahr zu fördern. Dazu werden Bücher und Spiele so ausgewählt, dass sie zu gemeinsamen Aktivitäten von Kindern und Eltern anregen. Dieser Beitrag stellt das dem Projekt zugrunde liegende Konzept, Erfahrungen aus der praktischen Arbeit sowie ausgewählte Ergebnisse vorgestellt.*

Schlüsselwörter: Family Literacy, Family Numeracy, sprachliche Früh¬förderung, mathematische Frühförderung

### 1 Einleitung

Raffa ist fünf Jahre alt und besucht seit drei Jahren eine Bremer Kindertagesstätte in einem Ortsteil, der durch eine hohe Arbeitslosenquote und einen hohen Migrantenanteil geprägt ist[1]. Er wächst zweisprachig auf, in seiner Familie wird durchgehend Türkisch gesprochen. Der folgende Dialog zwischen Raffa (R) und einem Studenten (S) entstand im Februar 2013 bei der Betrachtung des Bilderbuchs „Der rote Regenschirm“ (Schubert & Schubert 2011).

S: Was siehst Du hier auf dem Bilderbuch?
R: Eine Giraffe ... und eine ...ähh ... mhhh...
S: Was ist das?
R: Mhh ... ähh ... eine Hund.
S: Ein Hund.
R: Ein Hund.
S: Ja, das ist ein Hund. Das stimmt. Welche Farbe hat denn der Hund?
R: Grau.
S: Grau, hm ... Und was macht der Hund?
R: Ein .... die fliegt.
S: Der Hund fliegt. Wieso kann der Hund fliegen?
R: Mit ... auf ... was fliegt.

[1] Im angesprochenen Stadteil Gröpelingen erhalten 46,6% der dort lebenden Kinder Sozialgeld (Armuts- und Reichtumsbericht des Landes Bremen 2009; S. 192)

S: Der fliegt, das stimmt. Aber wie fliegt der denn? Wie kann ein Hund fliegen?
R: Was fliegt denn das?
S: Du hast ja schon darauf gezeigt. Das ist ein Regenschirm.
R: Regenschirm.
S: Das ist ein schweres Wort.
R: Nein, Regenschirm.
S: Der Hund fliegt mit einem Regenschirm.
R: Ja.

Der Dialog zeigt, dass Raffas sprachliche Kompetenz kurz vor der Einschulung noch deutlichen Einschränkungen unterliegt. Alltägliche Begriffe wie Regenschirm gehören noch nicht zu seinem Wortschatz. Er verwendet einfachste Sätze, wobei z. T. Fehler auftauchen. Ähnliches gilt auch für die weiteren 37 Vorschulkinder dieser Kita (von denen lediglich vier muttersprachlich Deutsch sprechen).

Soziale Herkunft und Zuwanderungshintergrund haben in Deutschland bereits in der Grundschule nachweislich großen Einfluss auf den Bildungserfolg (z. B. Krajewski & Schneider 2009, Stanat et al. 2012). Da schulische Leistungen an sprachliche Kompetenzen gebunden sind, ist ein gelingender Zweitspracherwerb für Migrantenkinder von großer Bedeutung. Sprachliche Einschränkungen haben dabei schon früh auch Auswirkung auf den mathematischen Kompetenzerwerb (vgl. z. B. Heinze et al. 2007, Schmitman gen. Pothmann 2008). So erreichten Kinder, die vor Schuleintritt sowohl sprachliche wie mathematische Förderung erhielten, höhere Lernfortschritte als Kinder, die nur in einem Bereich gefördert wurden (Schmitman gen. Pothmann 2008, S. 166).

Im arithmetischen Bereich ist die Bedeutsamkeit früher mathematischer Vorerfahrungen auf den Lernerfolg empirisch belegt (vgl. z. B. Krajewski 2003, Dornheim 2008). Man muss allerdings befürchten, dass gerade Kin-der aus sozial benachteiligten Familien bereits im Kindergartenalter über geringere mathematische Fähigkeiten verfügen (Jordan et al. 2006; Samara & Clements 2009). Positive Effekte einer frühen mathematischen Förderung lassen sich aber auch für die Kinder mit zunächst niedrigeren mathematikbezogenen Fähigkeiten nachweisen (vgl. Peter-Koop et al. 2008).

Der Wirtschaftsnobelpreisträger James Heckmann hat bildungspolitische Maßnahmen zur Verbesserung der Bildungschancen sozial benachteiligter Familien evaluiert. Er führt den Bildungsrückstand von Kindern in diesen Familien vornehmlich auf den Mangel an elterlicher Unterstützung zurück (Becker 2010). Eine möglichst gute frühe Förderung in Kombination mit (instruktiven und motivationalen) Unterstützungsangeboten für die Eltern verspricht seiner Meinung nach bislang den größten Nutzen. Untersuchungen aus dem Bereich frühkindlicher Sprachförderung lassen ebenso darauf schließen, dass der Einfluss der Familie erheblich ist (vgl. Tizard & Hughes 1984; Hurrelman et al. 1993; Ulich 2003; Nickel 2007).

An Eltern gerichtete Programme, die sich auf die mathematische Bildung beziehen, sind vor allem im anglo-amerikanischen Sprachraum verbreitet (Peter-Koop 2010). Dort belegen Interventionsstudien, dass geeignete Elternaktivitäten positiven Einfluss auf die numerischen Fähigkeiten ihrer Kinder ausüben können (Starkey & Klein 2000). Im Rahmen der deutschen BiKS 3-10 – Studie konnte aktuell auch belegt werden, dass die Qualität der familiären Anregungsbedingungen eng mit den numerischen Fähigkeiten der Kinder zusammenhängt (Anders et al. 2012). Allerdings berücksichtigen in Deutschland etablierte Förderprojekte (wie zum Beispiel HIPPY), die sich insbesondere an Migrationsfamilien mit Kindern im Vorschulalter richten, überwiegend keine mathematischen Inhalte.

Vor diesem Hintergrund ist 2011das Projekt "Entdecken und Erzählen" (Enter) als  Family Literacy und Family Numeracy Projekt an der Universität Bremen mit dem Ziel konzipiert worden, sprachliche Kompetenz (Schwerpunkt: mündliches Erzählen/Ausdrucksfähigkeit sowie Präpositionen) und mathematisches Grundverstehen bei Vorschulkindern aus sozial benachteiligten Familien zu fördern[2].

## 2 Konzept des Projekts „Entdecken und Erzählen"

Im Kern geht es in diesem Projekt darum, mit kindorientierten Materialien, die im Kindergarten wöchentlich ausgeliehen werden können,

[2] Aus dem Bereich der Deutschdidaktik ist Prof. Dr. Jochen Hering (Universität Bremen) am Projekt beteiligt.

gemeinsame Aktivitäten von Kindern und familiären Bezugspersonen anzuregen. Es ist davon auszugehen, dass Kinder aus sozial benachteiligten Familien deutlich weniger sprachliche und literale, aber auch mathematikbezogene Anregungen bekommen[3] (vgl. z. B. Kluczniok et al. 2011). Daher muss die Enter-Schatzkiste insbesondere Materialien mit hohem Aufforderungscharakter enthalten.

„Gerade das Spiel bietet sach- und entwicklungsangemessene, natürlich differenzierende und ko-konstruktive Lerngelegenheiten.“ (Gasteiger 2013, S. 337)

Darüber hinaus verweisen bereits einige Studien auf einen positiven Fördereffekt (geeigneter) Spiele auf die mathematischen Kompetenzen von Vorschulkindern (Gasteiger 2013; Rechsteiner et al. 2012, Schuler 2013; Sieger & Ramani 2009). Gerade in Familien mit Migrationshintergrund haben Spiele eine doppelte Funktion: Die Beschäftigung vermittelt Kindern Erfolgserlebnisse bei zunächst niedrigschwelligen sprachlichen Anforderungen. Wenn dazu begleitende Gespräche in der Familie stattfinden, können Kinder zugleich auch ihren mathematikbezogenen Grundwortschatz ausbauen. Für die Schatzkiste haben wir Spiele mit arithmetischem bzw. geometrischem Fokus ausgewählt (z. B. Halli Galli, Make ’n’ Break).

Bei den Bilderbüchern haben wir uns von drei Kriterien leiten lassen. Zum einen haben wir uns für Bücher entschieden, die mit einer spannenden und vergnüglichen Geschichte zum gemeinsamen Betrachten und Lesen einladen, Freude am Umgang mit Sprache und Geschichten wecken. Zum anderen fiel die Wahl auf Bilderbücher, die mit überschaubaren Erzählstrukturen gerade benachteiligten und wenig literarisierten Kindern kompetentes (antizipierendes) „Mitlesen“ und Nacherzählen erleichtern (vgl. Hering 2008). Und schließlich nahmen wir auch Bücher mit explizit mathematischem Bezug auf. Von Studierenden entwickelte dialogische Hörspiele zu den Bilderbuchgeschichten können das Betrachten eines Bilderbuchs beglei-

[3] Exemplarische Befragungen von am Projekt beteiligen Kindern und Eltern ergaben, dass in den Familien kaum vorgelesen bzw. gemeinsam gespielt wird. Der Umgang mit elektronischen Medien (Fernseher, Spielkonsole) gehört demgegenüber zum festen Bestandteil der Freizeitgestaltung vieler Kinder.

ten oder ein Kind und seine Familie durch das Zuhören in die Welt der Geschichten entführen. Darüber hinaus verwickeln sie die kindlichen Betrachter und MitleserInnen in Dialoge, bei denen insbesondere das Verstehen von Raum-Lage-Beziehungen und Präpositionen geübt wird.

Insgesamt sind die Spiele, Bücher und das Begleitmaterial auf unterschiedliche Interessen und Vorerfahrungen der Kinder hin ausgelegt. Entsprechend wählen die Kinder nach eigenen Interessen und Fähigkeiten aus (vgl. Largo & Beglinger 2009), ein Teil der Materialien wird ihnen in der Kita auch vorgestellt.

Die familiären Aktivitäten werden darüber hinaus in der Kita über einen wöchentlich stattfindenden Stuhlkreis aufgegriffen, vertieft und ergänzt, da gerade eine Kopplung der beiden Sozialisationsinstanzen eine wirksame Förderung von Kindern aus gering literalisierten Milieus erfordert (vgl. Nickel 2013, S. 510)

## 3 Projektablauf

Der erste Durchlauf des Enter-Projekts fand 2011 statt, die Kooperation mit der ausgewählten Kita musste aber leider mangels personeller Unterstützung abgebrochen werden. Im Jahr 2012 (2013) wurde das Projekt dann in einer Kita mit 46 (38) Vorschulkindern durchgeführt, 2013 kamen zwei weitere Kitas mit 27 bzw. 23 Kindern hinzu. Die Projektmaterialien wurden durch die Deutsche Kindergeldstiftung Bremen finanziert.

Ein Projektdurchlauf beginnt an der Universität jeweils im Wintersemester mit einem in die Ausbildung eingebundenen Projektseminar, in dem die beteiligten Studierenden auch das didaktisch-methodische Konzept des Projekts und die Materialien kennen lernen. Ausgehend von der Erarbeitung (bzw. fortlaufenden Überarbeitung des Fördermaterials) werden dann die ErzieherInnen der entsprechenden Kitas mit der Idee des Projekts und den Umgang mit den Materialien der Schatzkiste vertraut gemacht (Info-Nachmittag, Handreichung). Im Januar findet der erste Eltern-Kind-Nachmittag statt. Neben Erläuterungen zur Projektintention sollen Kinder und Eltern über ein Erproben exemplarisch ausgewählter Spiele und das gemeinsame Betrachten von Bilderbüchern für das Projekt begeistert werden. Die eigentliche Projektarbeit erstreckt sich dann über ein halbes Jahr (Februar – Juli). In dieser Zeit können die Kinder Materialien ausleihen. Im wöchentlich stattfindenden Stuhlkreis, der von den im Projekt mitarbeitenden Studierenden geleitet wird, erzählen die Kinder von dem, was sie am Wochenende mit den ausgeliehenen Materialien in ihren Familien erlebt haben. Zum anderen werden in den Stuhlkreisen Bücher und Spiele, die die Kinder noch nicht kennen bzw. noch nicht ausgeliehen haben, vorgestellt. Um eine kontinuierliche Elternmitwirkung zu gewährleisten, bieten wir im Verlauf des Projekts weitere Eltern-Kind-Nachmittage an. Hier bekommen die Eltern weitere Informationen zur sinnvollen Nutzung von Büchern und Spielen und können gezielt Rückmeldungen zum Projektverlauf geben. Eine Feedback-Runde ist auch mit dem gesamten Team der ErzieherInnen eingeplant. Im Rahmen von Abschlussarbeiten werten die Studierenden abschließend Teilaspekte des Gesamtprojekts aus, die gewonnenen Erkenntnisse fließen dann in die Weiterentwicklung des Konzepts ein.

## 4 Stuhlkreisarbeit

Der wöchentlich stattfindende Stuhlkreis (Dauer ca. 45 Minuten) ist ein unverzichtbarer Baustein des Projekts. Er bietet ein Forum um über die familiäre Nutzung der Materialien zu sprechen, zugleich lernen die Kinder ausgewählte Materialien kennen und erproben diese. Einerseits werden die Kinder darüber zu einer kontinuierlichen Ausleihe motiviert, andererseits können sie hier aber vor allem bedeutsame Kompetenzerfahrungen im zunächst noch von der Stuhlkreisleitung unterstützten Erzählen erwerben. Der Austausch über ausgeliehene Materialien und die Vorstellung bislang weniger genutzter Bilderbücher erfolgen nach Prinzipien des dialogischen Vorlesens (Whitehurst et al. 1988); denn gerade im Hinblick auf eine Erweiterung des Wortschatzes und den Erwerb grammatikalischer Strukturen hat sich das dialogische Vorlesen als wirksame Sprachfördersituation herausgestellt (vgl. Schönauer-Schneider 2012).

Der Ablauf der Stuhlkreise ist ritualisiert und verläuft in vier Phasen (vgl. Abb. 1), die auch für die Kinder deutlich erkennbar sind (jede Phase wird mit Hilfe von bildgestützten Ablaufkarten angezeigt).

Da die am Projekt beteiligten Kinder noch große Schwierigkeiten haben kohärente Geschichten zu erzählen, wird in der Erzählrunde eine Erzählkarte als Unterstützung eingesetzt. Das auf der Erzählkarte abgebildete Erzählschema besteht aus sechs Fragen, die nach dem typischen Dreischritt einfacher Erzählungen (Einleitung, Hauptteil, Schluss) aufeinanderfolgen.

1. Wer bist Du?
2. Was hast Du ausgeliehen?
3. Welches Buch/Spiel genau?
4. Was ist passiert?
5. Mit wem hast Du gespielt oder gelesen?
6. Wie hat es Dir gefallen?

Alle Fragen sind für Kinder durch Bildsymbole unterstützt. Die Erzählkarte wird im Stuhlkreise reihum gegeben. Wer nicht berichten möchte, gibt die Karte weiter. Die Erzählkarte bietet den Kindern ein festes Schema, welches sie beim Aufbau ihrer Erzählfähigkeit unterstützt. Ihre wiederkehrende Nutzung soll zur Verinnerlichung dieses einfachen Erzählmusters beitragen.

| | |
|---|---|
| Einstieg / Begrüßung | Begrüßungslied<br>Begrüßung durch das Enter-Maskottchen<br>bildunterstützte Erläuterung des Stuhlkreisablaufes |
| Erzählrunde | Austausch über die entliehenen Materialien<br>Unterstützung durch „Erzählkarte" und Stuhlkreisleitung |
| Vorstellung neuer Materialien | a) Erprobung eines Spiels oder<br>b) Vorstellung eines Bilderbuchs durch<br>- dialogisches Vorlesen<br>- handlungsorientierte Anschlusskommunikation |
| Abschied | Ausblick auf die Materialvorstellung im nächsten Stuhlkreis<br>Abschiedslied |

Abb. 1 Ablauf des Stuhlkreises

Im Anschluss an die Erzählrunde werden den Kindern noch weniger bekannte Materialien aus der Schatzkiste vorgestellt. Da im Stuhlkreis meist drei Betreuungspersonen (zwei Studierende, eine ErzieherIn) anwesend sind, kann dies auch in kleineren Gruppen geschehen. Diese Arbeitsphase wird darüber hinaus genutzt um spezifische Inhalte zu vertiefen (wie z. B. den Umgang mit Präpositionen zur Versprachlichung von Raum-Lage-Beziehungen).

Mit der regelmäßigen Stuhlkreisarbeit versucht das Projekt wesentliche Anforderungen an eine kindorientierte Spracharbeit vor allem auch mit Kindern mit nichtdeutscher Erstsprache (vgl. Rothweiler & Ruberg 2011) zu erfüllen.

## 5 Ausgewählte Ergebnisse

Insgesamt gesehen hat sich das Materialangebot für die Kinder als attraktiv erwiesen. Im Durchgang 2013 lag die durchschnittliche Quote der Kinder bei der wöchentlichen Ausleihe zwischen 75 und 80%, wobei die Spiele in der Gunst der Kinder etwas höher standen. Gerade die Spiele waren für Kinder mit ausgesprochen geringen Deutschkenntnissen eine Möglichkeit Kompetenzerfahrungen zu erleben (vgl. Fallbeispiel von Damir in Abb. 2).

Damir ist ein Kind mit bulgarischen Wurzeln, welches zu Beginn des Projektes sehr schüchtern war. Einfachste Unterhaltungen bzw. Fragen waren nicht möglich. Seine Teilnahme an den wöchentlich stattfindenden Stuhlkreisen war zwar passiv, beobachtend, aber dennoch stets sehr interessiert und aufmerksam. Im Rahmen des Projektes wurden zahlreiche Materialien in der Kita eingeführt und erprobt um den Kindern dadurch Hemmungen mit deren Beschäftigung zu nehmen und Spielregeln vorab zu klären. Dabei war auffällig, dass Damir bei Spielen begeistert dabei war, die Spielregeln durch exemplarisches Spielen sehr schnell verstehen und übernehmen konnte. Gerade bei Spielen mit geometrischem Fokus wurde deutlich, dass er sich durch die fehlende Notwendigkeit der Sprachverständigung gut einbringen und schnell Erfolgserlebnisse für sich erzielen konnte. So stand er der Ersterprobung des Spieles „Make 'n' Break" zunächst zwar skeptisch gegenüber, konnte aber schon nach kurzer Zeit der Beobachtung gut ins Spiel einsteigen und gewann schnell mehrere Runden. Seine Begeisterung und die Erfolgserlebnisse motivierten ihn sichtlich weiterzuspielen. Im Verlauf des Projektes zeigte sich Damir zunehmend aktiver, hörte stets aufmerksam bei Gesprächen zu und war sehr stolz, wenn er sich einbringen und beteiligen konnte. Sein Ausleihverhalten zeigt einen deutlichen Schwerpunkt bei Spielen aus dem geometrischen Bereich, darunter auch einige recht anspruchsvolle Spiele, die für viele der anderen Kinder bisher noch weniger attraktiv sind. In den Erprobungsphasen in der Kita wählte er gezielt geometrische Spiele aus, mit denen er sich gerne und intensiv beschäftigte und zunehmend mehr Erfolgserlebnisse im Spiel mit den anderen Kindern erlebte.

Abb. 2 Fallbeschreibung eines Projektkindes

Der Anteil der ausgeliehenen Bücher stieg aber gerade durch die Vorstellung von Büchern im Stuhlkreis im Verlauf des Projekts an[4]. Besonders begehrt waren dabei Bücher mit Begleitmaterialien (wie z. B. Hörspielen).

Um Fördereffekte im sprachlichen Bereich abschätzen zu können wurde der Untertest Wortklassen der normierten LiSe-DaZ – Sprachförderdiagnostik (Schulz & Tracy 2011) vor Beginn und nach Ende des Projekts bei einer Gruppe von 12 Kindern (sowie einer weiteren Teilgruppe von acht Jungen) eingesetzt. Der Test zielt insbesondere auf die Erfassung des Sprachstandes von Kindern (im Alter von drei bis sieben), die Deutsch als Zweitsprache erwerben. Ausgehend von der gemeinsamen Betrachtung einer Bildergeschichte werden dem Kind im Verlauf des Tests gezielte Fragen gestellt. Die Antworten geben dann Aufschluss darüber, in welchem Umfang ein Kind über Wortklassen verfügt, die für den Strukturaufbau von Sätzen bedeutsam sind. Dazu gehören Vollverben, Hilfs- und Modalverben, Konjunktionen, Präpositionen und Fokuspartikel. Insgesamt zeigten sich in beiden Gruppen Verbesserungen, insbesondere ging der Anteil der unterdurchschnittlichen Leistungen um 11 Prozentpunkte zurück (Jungengruppe: 13 Prozentpunkte).

Ermutigend sind darüber hinaus auch die bisherigen Ergebnisse im Hinblick auf die Erzählförderung. Im Verlauf des Projekts erhöhte sich sowohl der Anteil der Kinder, die sich an der Erzählrunde betei-

[4] Im Interview mit sechs exemplarisch ausgewählten Kindern (im Durchlauf 2012) zeigt sich, dass die Nutzung von Fernseher und/oder Spielkonsole im Verlauf des Projekts immer noch vor dem Vorlesen oder Hörspiel hören bevorzugt wird. Die Bücher- und Hörspielerprobungen im Stuhlkreis sowie die Erlebnisberichte von zu Hause lassen jedoch darauf schließen, dass dies vor allem in den fehlenden kindlichen Erfahrungen und der mangelnden Sensibilisierung für den fantasievollen Umgang mit Geschichten begründet liegt.

ligten, als auch vielfach die Länge ihrer Erzählungen. Zudem benötigten sie zunehmend weniger Hilfestellungen. Am Projektende hatten viele Kinder das Schema der Erzählkarte verinnerlicht und konnten frei erzählen. Die kindliche Erzählfähigkeit entwickelt sich nach Boueke et al. (1995) in Stufen.

| **Erzählstufe** | **Erläuterung** | **Projekt beginn** | **Projekt ende** |
|---|---|---|---|
| Übergang nicht feststellbar – isoliert | | 2* | 2* |
| Isoliert | Elemente werden nicht miteinander verbunden | 13 | 4 |
| Übergang isoliert – linear | | 2 | 2 |
| Linear | Chronologische (und dann ... und dann) und lokale (dort ... und da) Verknüpfung | 3 | 4 |
| Übergang linear – strukturiert | | | 2 |
| Episodisch strukturiert | Chronologische Ordnung, Anfang und Ende sowie erste narrative Strukturen sind erkennbar | | 1 |

Abb. 3 Verteilung der Erzählstufen einer Kindergruppe (n = 20)
* Hier handelt es sich um zwei Kinder, die kaum Deutsch sprachen und nur sehr sporadisch am Projekt teilnahmen.

In zwei Stuhlkreisgruppen wurde die Entwicklung der Erzählfähigkeit einzelner Kinder in 1:1-Situationen durch eine dialogische Bildbetrachtung eines Wimmelbuchs erhoben. Von den 20 Kindern konnten sich die meisten um eine Erzählstufe (bzw. Erzählzwischenstufe) verbessern (vgl. Abb. 3).

Exemplarisch und als Vergleich zum Einstiegsdialog mit Raffa sei hier auf die Erzählung von Arkan (A) am Ende des Projekts verwiesen zum Buch „Der rote Regenschirm“ verwiesen. Während Arkans Erzählungen am Projektbeginn noch von vielen isolierten Teilen geprägt sind, sind seine Ausführungen hier deutlich länger, strukturierter und detailreicher.

A: Ääh ... Ein rotes Regenschirm und ein ... ein weiß...ein weißer Gesicht und ein, und ein schwarzer Fell ... und das ... das ist Hund. Fällt in den Regenschirm und dann guckt er überall, wo er fliegt.
S: Aah, super, klasse. Und wo fliegt er überall lang?
A: Ääh ... überall, weil weil er ... gar nix, im Meer ... und ... und Afrika und Türkei.
S: Mhm.
A: Da kann er auch ... und er ka, und .... mhhh .. und wenn der runterfällt,
S: Mhm.
A: ... wenn der runterfällt, dann ... dann kommt er über ... über den Regenschirm
S: Ah, klettert der dadrauf?
A: Ja. Wenn er fallt, dann drückt er ganz fest, dann wird er nicht runterfallen.
S: Mhm, stimmt. Das machst Du auch mit den Händen, ne, gut.
A: Wenn ... aber wenn der schwimmen will, dann hat der Angst, wenn der runterfällt, denn ganz hoch, ... hoch hoch hoch hoch, ganz hoch is, dann hat der Angst, weil er schwindlig.

Anhaltspunkte für die mathematikbezogene Entwicklung der Kinder ergeben sich über die Resultate zweier Erhebungen mithilfe des EMBI-KiGa (Peter-Koop et al. 2011), an der 18 Kinder beteiligt waren. Im Bereich der Vorläuferfähigkeiten schneiden viele Kinder bereits zu Projektbeginn gut ab, Schwierigkeiten tauchen hier bei der Erfassung von Raum-Lage-Beziehungen und im Bereich Muster fortsetzen auf. Beim zahlenbezogenen Wissen fällt es etlichen Kinder noch schwer, Vorgänger und Nachfolger zu benennen und die Erfassung von Teil-Ganzes-Beziehungen gelingt den Kindern nur teilweise, während am Ende des Projekts fast die Hälfte der Kinder alle möglichen Zerlegungen der Zahl 6 angeben kann. Im Bereich des Zählens werden die erreichten Punktzahlen nach Ausprägungsgraden (Stufe 0 bis 6) zusammengefasst. Hier konnte ein Drittel der Kinder den Ausprägungsgrad um mindestens eine Stufe erhöhen und ein weiteres Drittel um eine halbe Stufe. Bei dem letzten Drittel blieb die Stufe unverändert. Die feststellbaren Veränderungen sind allerdings noch wenig belastbar, da der EMBI-KiGa nicht normiert ist. In einer Erprobung des Grundkonzepts in zwei Kitas im Detmolder Raum hat Frau Streit-Lehmann (Universität Bielefeld) im Rahmen ihres Dissertationsprojekts neben dem EMBI auch den standardisierten und normierten Test TEDI-Math (Kaufmann et al. 2009) eingesetzt. In Abweichung zu unserer Arbeit in den Bremen lag hier der Stuhlkreis ausschließlich in der Verantwortung der ErzieherInnen. Der Interventionszeitraum war mit drei Monaten kürzer, die Kinder durften allerdings auch mehrfach wöchentlich Material ausleihen. Hier zeigen erste Auswertungen bei 75% der Kinder deutliche Verbesserungen[5] (Steigerung des TEDI-Prozentrangs um mindestens 10% sowie erhöhte Punktzahl im EMBI-V-Teil und Anstieg im Ausprägungsgrad des A-Teils).

Auch die Rückmeldungen der beteiligten ErzieherInnen und Eltern sind insgesamt positiv und ermutigend. Allerdings profitieren nicht alle Kinder und Familien in der von uns erwünschten Weise: Wenn die häuslichen Verhältnisse wenig Ruhe für gemeinsame Aktivitäten bieten, wenn Eltern durch die Alltagsbewältigung so in Anspruch genommen sind, dass ihnen für Gemeinsames mit ihren Kindern keine Zeit bleibt usw., fehlen Ressourcen, die auch solch ein Projekt nicht herstellen kann.

*Mein herzlicher Dank gilt allen Studierenden, die bislang im Enter-Projekt mitgearbeitet haben. In diesen Artikel sind insbesondere Ergebnisse der Abschlussarbeiten von Jennifer Bastigkeit, Jana Evers, Andrea Hermes, Ines Horstmann, Franziska Koch, Lena Märkl, Nikolas Schymczyk, Medina Tscharntke und Nadja Wierenberg eingeflossen.*

## Literatur

Anders, Y., Rossbach, H.-G., Weinert, S., Ebert, S., Kuger, S., Lehrl, S. & von Maurice, J. (2012). Home and preschool learning environments and their

[5] nach persönlicher Auskunft von Frau Streit-Lehmann, veröffentlichte Ergebnisse liegen noch nicht vor

relations to the development of early numeracy skills. Early Child Research Quarterly 27, 231-244

Becker, L. (2010). Vorschule macht erfolgreicher. Frühe Bildung für arme Kinder. In: FAZ, 30.08.10; http://www.faz.net/-gqe-6kdja. Gesehen 31.10.13.

Boueke, D.; Schülein, F.; Büscher, H.; Teehorst, E.; Wolf, D. (1995). Wie Kinder erzählen. Untersuchungen zur Erzähltheorie und zur Entwicklung narrativer Fähigkeiten. München.

Die Senatorin für Arbeit, Frauen, Gesundheit, Jugend und Soziales (2009). Lebenslagen im Land Bremen. Armuts- und Reichtumsbericht des Senats der Freien Hansestadt Bremen.
http://www.soziales.bremen.de/sixcms/media.php/13/Lebenslagen_im_Land_Bremen_2009.pdf Gesehen 30.10.13.

Dornheim, D. (2008). Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten. Berlin: Logos.

Gasteiger, H. (2013). Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele – Ergebnisse einer Interventionsstudie. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. (S. 336-339). Münster: WTM Verlag.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L. & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenz bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. Zeitschrift für Pädagogik 53(4), 562-581.

Hering, J. (2008). Vorlesen, Bilderbücher und die Entstehung von Erzählfähigkeit. Erzählen, Kind-Bild-Buch Nr. 4, 48 – 57

Hurrelmann, B., Hammer, M. & Nieß , N. (1993). Leseklima in der Familie. Eine Studie der Bertelsmann-Stiftung. Bd.1, Gütersloh: Verlag Bertelsmann Stiftung.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Olah, L., Locuniak, M. (2006). Number sense groth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. Child Development 77, 153-175

Kaufmann, L., Nuerk, H.-C., Graf, M. & Krinzinger, H. (2009). TEDI-Math – Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse. Göttingen: Testzentrale

Kluczniok, K., Schmitt, M., Kuger, S. & von Maurice, J. (2011). Familiale Anregungsbedingungen im Spiegel ökonomischer Ressourcen. In A. Lange & M. Xyländer (Hrsg.), Bildungswelt Familie. Theoretische Explorationen und empirische Befunde (S. 190-207). Weinheim: Juventa.

Krajewski, K. (2003). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovac.

Krajewski, K. & Schneider, W (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a pricursor of mathematical school achievement and mathemaitcal difficulies: Findings from a four-year longitudinal study. Learning and Instruction 19, 513-526.

Largo, R.H. & Beglinger, M. (2009). Schülerjahre. Wie Kinder besser lernen. München: Piper.

Nickel, S. (2007). Family Literacy in Deutschland: Stand der Entwicklung und Gedanken zur konzeptionellen Weiterentwicklung. In: M. Elfert, & G. Rabkin (Hrsg.): Gemeinsam in der Sprache baden: Family Literacy. Internationale Konzepte zur familienorientierten Schriftsprachförderung. Stuttgart: Klett.

Nickel, S. (2013). Der Erwerb von Schrift in der frühen Kindheit. In M. Stamm & Edelmann, D. (Hrsg.), Handbuch frühkindliche Bildungsforschung (S. 501-514). Wiesbaden: Springer

Peter-Koop, A. (2010): Aktivitäten und Forschungsbefunde am (vor-)schulischen Mathematiklernen ihrer Kinder. http://www.schule-interaktiv.de/dtag/cms/contentblob/Telekom-Stiftung/de/1258574/blobBinary/Eltern.pdf Gesehen 30.10.13.

Peter-Koop, A., Grüßing, M., Enstipp, M. & Remmerssen, T. (2011). ElementarMathematischesBasisInterview – KiGa. Offenburg: Mildenberger

Peter-Koop, A., Grüßing, M. & Schmitmann gen. Pothmann, A. (2008). Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten: Befunde zur vorschulischen Identifizierung und Förderung von potentiellen Risikokindern in Bezug auf das schulische Mathematiklernen. Empirische Pädagogik 22 (2), 209-224

Rechsteiner, K., Hauser, B. & Vogt, F. (2012). Förderung der mathematischen Vorläuferfertigkeiten im Kindergarten: Spiel oder Training? In M. Ludwig, & M. Kleine (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. 2. Band (S. 677-680). Münster: WTM Verlag.

Rothweiler, M. & Ruberg, M. (2011). Der Erwerb des Deutschen bei Kindern mit nichtdeutscher Erstsprache. Eine Expertise der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte. München.

Samara, J. & Clements, D. H. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Child. New York: Routledge.

Schönauer-Schneider, W. (2012). Sprachförderung durch dialogisches Bilderbuchlesen. In: H. Günter & W.R. Bindel (Hrsg.), Deutsche Sprache in Kindergarten und Vorschule (S. 238-266). Baltsmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Schubert, I. & Schubert, D. (2011). Der rote Regenschirm. Frankfurt: Sauerländer Verlag.

Schuler, S. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs. Münster: Waxmann.

Schulz, P. & Tracy, R. (2011). LiSe-DaZ. Linguistische Sprachstandserhebung – Deutsch als Zweitsprache. Göttingen: Testzentrale

Siegler, R. S. & Ramani, G. B. (2009). Playing Linear Number Board Games - But Not Circular Ones - Improves Low-Income Preschoolers' Numerical Understanding. Journal of Educational Psychology 101 (3), 545-560.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K., Richter, D. (Hrsg.) (2012). Kompetenzen von Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs. Münster: Waxmann.

Starkey, P. & Klein, A. (2000). Fostering parental support for children's mathematical development: An intervention with Head Start families. Early Education and Development 11, 659-680.

Tizard, B. & Hughes, M. (1984). Young children learning. Harvard University Press.

Ulich, M. (2003). Sprachliche Bildung und Literacy im Elementarbereich. München. http://www.ifp.bayern.de/projekte/laufende/ulich.html Gesehen 30.10.13.

Whitehurst, G. J.; Falco, F. L.; Lonigan, C. J.; Fischel, J. E.; De-Baryshe, B. 0.; Valdez-Menchaca, M. C.; Caulfield, M. (1988). Accelerating Language Development Through Picture Book Reading. In Developmental Psychology 24 (4), 552-559.

Prof. Dr. Dagmar Bönig
Universität Bremen, FB 12
Bibliothekstr. 1
28359 Bremen
dboenig@uni-bremen.de

## Zwischen den Fächern: Interdisziplinäres Arbeiten im Mathematikunterricht der Grundschule

von Gabriele Moll & Kristina Reiss

*Interdisziplinäre Bezüge zwischen der Mathematik und anderen Fächern der Grundschule sind bereits an verschiedenen Stellen der Lehr- und Bildungspläne verankert. So wird beispielsweise beim mathematischen Umgang mit Sachsituationen explizit auf die mündliche und schriftliche Versprachlichung von Sachverhalten hingewiesen. Dennoch ist das Potential fächerübergreifenden Arbeitens in der Grundschule sicherlich noch nicht ausgeschöpft. In diesem Beitrag wird daher anhand verschiedener Beispiele betrachtet, in welchen Situationen des Mathematikunterrichts die Verbindung zu anderen Disziplinen in besonderer Weise thematisiert werden kann. Es soll darüber hinaus untersucht werden, in welchem Kontext andere Fächer von mathematischen Aspekten profitieren können. Eine Übersicht wird speziell für die Fächer Deutsch und Sachkunde gegeben.*

Schlüsselwörter: Fächerübergreifender Unterricht, interdisziplinäres Arbeiten, Grundschule, Mathematik, Deutsch, Sachunterricht

### 1 Warum sollte man in der Grundschule interdisziplinär arbeiten?

Der vielfach gebrauchte Kompetenzbegriff im Sinne von Weinert (2001) weist nicht nur auf das gegenwärtige Verständnis von gutem Unterricht, sondern auch auf die konkreten Ziele hin, die seit einigen Jahren (nicht nur) im Mathematikunterricht verstärkt verfolgt werden. Standen noch vor Einführung der Bildungsstandards in den meisten Bundesländern die Inhalte, also das was gelehrt werden sollte, im Fokus, zeigen sich nun Bemühungen im Sinne einer Output-Orientierung bei den Lernenden den Aufbau umfassender Kompetenzen zu stärken. Neben den „kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten“ beinhaltet dies auch die „motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert 2001, S.27f). Es geht also insbesondere darum, dass Schülerinnen und Schüler mit dem im schulischen Kontext erworbenen Wissen in der Schule oder im Alltag sinnvoll umgehen. Der Beitrag, den die Fächer Deutsch und Mathematik im Bereich der

Grundschule dazu leisten können, scheint in beiden Fächern ähnlich zu sein. So wird an den jeweiligen Stellen der Bildungsstandards darauf verwiesen, dass der Auftrag der Grundschule in der Entfaltung grundlegender Bildung liege, diese Basis für weiterführendes Lernen und die Fähigkeit zur Kulturaneignung sei, und dabei die sprachliche beziehungsweise mathematische Kompetenz einen wesentlichen Bestandteil darstelle (KMK 2004a,b). Diese gemeinsame Zielsetzung legt nahe, bei der Umsetzung im Unterricht nicht in den engen Grenzen einer Disziplin zu bleiben, sondern Verbindungen zwischen den Fächern zu nutzen. So wird beispielsweise im Lehrplan für die Primarstufe des Bundeslands Bayern explizit darauf hingewiesen, dass Grundschulkinder  Phänomene aus einer ganzheitlichen Perspektive wahrnehmen, die nicht nach Fächern gegliedert ist. Dementsprechend sei „[f]ächerverbindendes Lernen [...] in allen Jahrgangsstufen der Grundschule wichtig und notwendig“ (Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000). Allerdings finden sich in diesem Lehrplan keine Hinweise darauf, wie die Verknüpfung konkret ausgestaltet werden soll. Im Folgenden sollen daher Verbindungen zwischen dem Mathematikunterricht und den Fächern Deutsch sowie Sachkunde aufgezeigt werden. Dabei wird sowohl auf bereits bestehende als auch auf mögliche und wünschenswerte Bezüge eingegangen. Die Ausführungen werden an manchen Stellen durch Inhalte des bayerischen Lehrplans gestützt, ähnliche Inhalte finden sich allerdings auch in den Curricula der anderen Bundesländer. Die genannten Bezüge sind dabei immer aus der Fachperspektive zu sehen. So geht es keinesfalls darum, einen Unterricht fernab des Fachprinzips zu realisieren, sondern vielmehr darum, vom einzelnen Fach ausgehend Blickweisen zu eröffnen, welche über die Grenzen dessen hinausgehen und so die Arbeit im Fach bereichern können.

## 2 Deutsch und Mathematik

Ein Zusammenhang zwischen den Leistungen von Grundschülern in Deutsch und Mathematik konnte in vielen Studien belegt werden. So zeigen die Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs aus dem Jahr 2011, dass die erreichten Kompetenzstände – in Abbildung 1 repräsentiert durch die Mittelwerte auf einer Punkteskala von 450 bis 550 Punkten – in den Bereichen Lesen, Zuhören und Mathematik in den meisten

Bundesländern tendenziell in die gleiche Richtung zeigen (Böhme & Haag 2011).

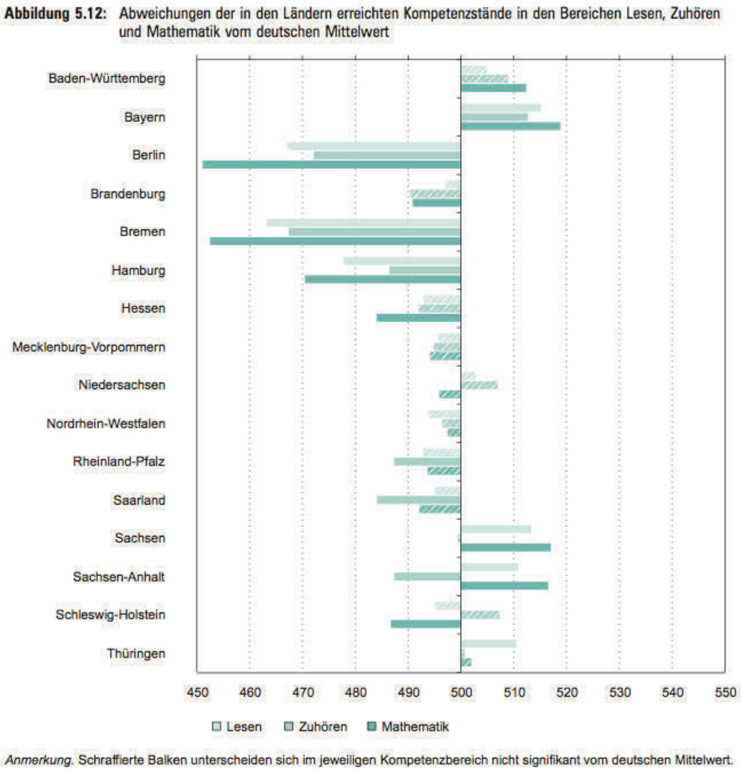



Abb. 1 Kompetenzstände in Lesen, Zuhören und Mathematik aus dem Ländervergleich 2011 (Böhme & Haag 2011)

Nur in einigen wenigen Bundesländern weichen die Kompetenzstände in den Bereichen Lesen und Mathematik im Gegensatz zum Bereich Zuhören in die andere Richtung vom Mittelwert ab (Böhme & Haag 2011). Denkt man jedoch an die Relevanz der Lesefähigkeit für das erfolgreiche Erfassen des Aufgabentextes von Mathematikaufgaben, so ist dieser differenzierte Zusammenhang wenig erstaunlich. Im Rahmen des Ländervergleichs wurden überdies für die Fächer Deutsch und Mathematik Intraklassenkorrelationen berichtet (Böhme & Weirich 2011; Haag & Roppelt 2011). Diese sollten Aufschluss darüber geben, ob die Unterschiede der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich des Kompetenzstandes auf die Schulebene zurückgeführt werden können. Zwar erfolgte dabei kein direkter Vergleich der Korrelationen in Mathematik und Deutsch, es lässt sich aber erkennen, dass diese über die Länder hinweg recht ähnlich sind. So zeigen sich bei den Spitzengruppen eher geringe Korrelationswerte, während in den Stadtstaaten höhere Koeffizienten auf größere Unterschiede zwischen den Schulen hindeuten.

Der Zusammenhang zwischen Deutsch- und Mathematikleistung lässt sich auch für Teilpopulationen belegen. So konnten Herwartz-Emden et al. (2008) in einer Studie zur Leistungsentwicklung bei Kindern mit und ohne Migrationshintergrund Zusammenhänge zwischen den Kompetenzen in Deutsch und Mathematik belegen. Dabei gehen höhere Leistungen im Fach Deutsch häufig mit höheren Leistungen im Fach Mathematik einher. Während sich jedoch die Leistungsunterschiede beim Lesen von der ersten bis zur zweiten Klasse verstärken, konnten in der Mathematik keine Unterschiede in der Leistungsentwicklung zwischen Kindern mit und ohne Migrationshintergrund nachgewiesen werden (vgl. Abb. 2).

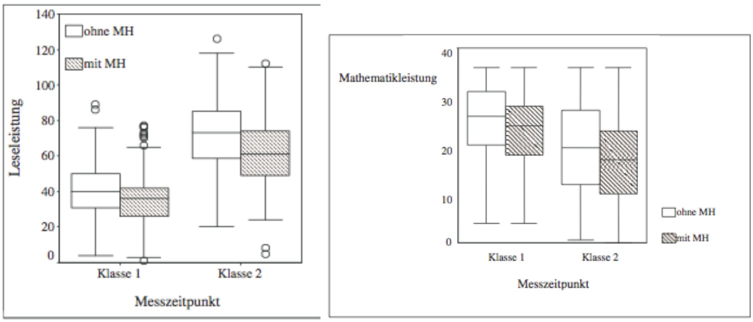



Abb. 2 Unterschiede in der Leistungsentwicklung bei Kindern mit und ohne Migrationshintergrund im Lesen und in Mathematik (Herwartz-Emden et al. 2008)

Dabei greift es sicher zu kurz, die klaren Korrelationen alleine auf Lesefähigkeiten zurückzuführen. Auch wenn eine Post-hoc-Analyse nicht möglich ist, so ist doch sinnvoll, Zusammenhänge und Bezüge zwischen dem Fachunterricht in Deutsch und Mathematik zu betrachten. In den folgenden Abschnitten geht es darum, auf welche

Weise sich Aspekte des Fachs Deutsch im Mathematikunterricht und Aspekte der Mathematik im Deutschunterricht finden lassen.

## 2.1 Deutsch im Mathematikunterricht

Schon ein Blick in Deutsch- und Mathematikbücher der ersten Klasse lässt an manchen Stellen ähnliche Herangehensweisen der Disziplinen vermuten. So werden die Kinder im Anfangsunterricht anhand von Bildern häufig dazu angeregt, Beobachtungen zu schildern und Geschichten zu erzählen (vgl. Abb. 3). Während dies im Deutschunterricht mit der Absicht geschieht, Sachverhalte sprachlich präzise zu beschreiben, zielt der Mathematikunterricht eher auf Rechengeschichten, bei denen es um die Interpretation mathematischer Objekte und Operationen geht (vgl. Schütte 1997). Was genau in der konkreten Situation von den Kindern gefordert wird, ist selten ausschließlich dem Bild selbst zu entnehmen, sondern muss meist vom Kind gemäß des Fachkontextes interpretiert werden. Hier zeigt sich deutlich, dass gerade bei Überschneidungen im Lernmaterial die Gelegenheit genutzt werden kann, Inhalte verschiedener Fächer aufzugreifen.

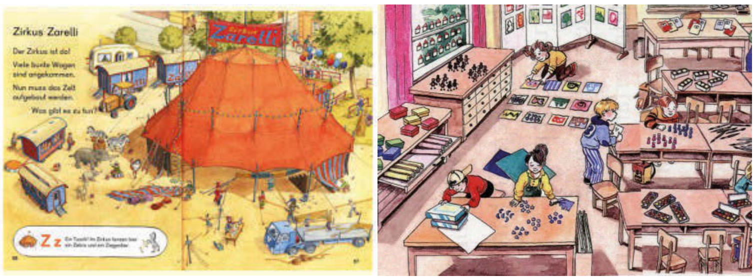
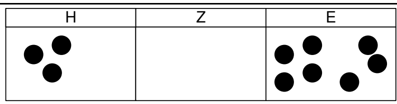



Abb. 3 Erzählanlässe aus Schulbüchern in Deutsch und Mathematik (Berktold et al. 2008; Hübner et al. 2000)

Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn mit den Aufgaben Kompetenzen angesprochen werden, die sowohl in den Bildungsstandards des Fachs Deutsch als auch in den Bildungsstandards für Mathematik verankert sind. Bezogen auf die Bildungsstandards Mathematik ist dies vornehmlich bei den prozessbezogenen Kompetenzen der Fall. So wird im Rahmen des mathematischen Kommunizierens von den Schülerinnen und Schülern gefordert, dass sie „eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren“ (KMK 2004a). Zusätzlich wird beim mathematischen Argumentieren erwartet, dass die Kinder „Begründungen suchen und nachvollziehen“ (KMK 2004a). Ähnlich dazu ist in den Bildungsstandards für das Fach Deutsch im Bereich Sprechen und Zuhören formuliert, dass die Schülerinnen und Schüler „funktionsangemessen sprechen“, also unter anderem „argumentieren“, „Begründungen und Erklärungen geben“ sowie „Beobachtungen wiedergeben“ und „Sachverhalte beschreiben“ (KMK 2004b). In diesen Punkten unterscheiden sich die Ziele der beiden Fächer nur marginal. Gleichwohl ist das Fach Mathematik darauf angewiesen, dass im Deutschunterricht sprachliche Kompetenzen vermittelt und damit die Grundlagen für eine erfolgreiche Bearbeitung zahlreicher mathematischer Aufgaben gelegt werden. Der Lehrplan Bayern verweist zum Beispiel im Zusammenhang von Sachrechenkarteien beziehungsweise Sachrechenbüchern ausdrücklich auf die Verbindung zum Fach Deutsch. Ohne ausreichende Fähigkeiten in Bezug auf das Schreiben und das Erschließen von Texten ist das Anlegen solch einer Kartei eher nicht möglich.

Auch Aufgaben, bei denen Kinder aufgefordert werden ihre eigenen Lösungswege schriftlich zu begründen, wie sie sich zum Beispiel in Vergleichsarbeiten in Mathematik für die dritten Klassen finden (vgl. Abb. 4), bauen auf ausgeprägte Fertigkeiten in Bezug auf das Verfassen von Texten.

Stellenwert Punkte




Paul will die Zahl 370 in einer Stellenwerttafel legen. Dabei macht er einen Fehler.

Erkläre seinen Fehler.

Abb. 4 Aufgabe aus den Vergleichsarbeiten Mathematik für die Grundschule – VERA-3 (IQB 2012)

Stern hat bereits 1992 beschrieben, wie diffizil der Gebrauch der deutschen Sprache beim sinnentnehmenden Lesen sein kann und wie stark die Lösungsraten einer mathematischen Aufgabe von der Formulierung des Aufgabentextes abhängen können. Ergebnisse einer amerikanischen Studie zum mathematischen Situationsverständnis (Hudson 1983) wurden von ihr repliziert und damit der Einfluss des Textverstehens auf die Schwierigkeit einer Textaufgabe erneut nachgewiesen. Es zeigte sich, dass die Aufgabe „5 Vögel haben Hunger. Sie finden 3 Würmer. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?“ von 96 Prozent der befragten Schülerinnen und Schüler gelöst werden konnte. Demgegenüber war es nur 25 Prozent der Kinder möglich, die Frage „Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?“ richtig zu beantworten (Stern 1992). Auch Carpenter et al. (1980) konnten zeigen, dass die Schwierigkeit beim Bearbeiten von Textaufgaben häufig weniger im Lösen der zugrundeliegenden mathematischen Gleichung als vielmehr in der Umsetzung der Situation in diese Gleichung liegt. Wie Lorenz (2005) ausführte, können bereits minimale Veränderungen in der Satzstruktur zu völlig anderen mathematischen Modellen führen. Beispielsweise muss man zur Lösung der Aufgabe „Eine Verkäuferin verdient im Jahr 2356 Euro. Wie viel verdient sie im Monat?“ eine Divisionsaufgabe aufstellen. Vertauscht man lediglich die Wörter Jahr und Monat, so führt eine Multiplikation zur richtigen Lösung der Aufgabe. Dass der Modellierung mathematischer Gleichungen auf Basis des Textes im Unterricht große Bedeutung beigemessen werden sollte, lassen auch verschiedene Studien zu sogenannten Kapitänsaufgaben erkennen. Diese Art von Aufgaben erinnern zunächst an gewöhnliche Textaufgaben. Jedoch ist es nicht möglich, die entsprechende Frage mit Hilfe der Informationen im Text zu beantworten. Dennoch zeigten Grundschüler in unterschiedlichen Studien, die in verschiedenen Länder durchgeführt wurden, das Bestreben, die Aufgaben unabhängig vom Kontext mit dem gegebenen Zahlenmaterial zu lösen (Baruk 1989; Spiegel & Selter 2003). An geeignetem Aufgabenmaterial kann und sollte daher auch im Mathematikunterricht sinnerfassendes Lesen geübt werden. Eine Aufgabe von Gerlach aus dem Jahr 1911 weist darauf hin, dass textbasierte Aufgaben im Mathematikunterricht bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts nicht ungewöhnlich waren (vgl. Abb. 5). Im konkreten Beispiel wurden sogar ganze Geschichten über verschiedene mathematische Aufgaben hinweg erzählt. Die Forderung nach sprachlich anspruchsvollen Aufgaben ist demnach nicht neu, sondern sollte lediglich nicht aus dem Blick verloren werden.

28. Fritz dauerte die Zeit bis zu den Ferien sehr lange. Endlich waren sie da. Gleich am ersten freien Tage reisten sie ab. Jeder von ihnen bekam 1 Mark mit. Ob ihr wohl noch Geld wieder mitbringen werdet? sagte die Mutter. — Weil es schon spät war, fuhren sie mit der Elektrischen nach dem Bahnhofe. Das kostete 1 Groschen. Wieviel Geld hatte jetzt noch jeder?

29. Am Bahnhofe kaufte Otto beide Fahrscheine. Die kosteten zusammen 6 Groschen. Wieviel kostete jeder Fahrschein, und wieviel Geld hatte jetzt noch jeder?

51. An einem Tage wurde auch Onkel Rudolf in Osterholz besucht. Da mußten die Knaben freilich einen tüchtigen Marsch machen. Früh um 6 Uhr gingen sie fort und waren doch erst um 10 Uhr dort. Wie lange waren sie unterwegs gewesen?

Abb. 5 Textaufgabe aus dem Jahr 1911 (Gerlach 1911)

Zusammenfassend lässt sich in Anlehnung an Maier und Schweiger (1999) sagen, dass Mathematik Sprache in jedem Fall nutzt. Mathematische Texte sind oftmals komplex, erfordern mehr als nur fachliches Wissen und setzen nicht selten ein hohes Textverständnis voraus. Damit scheint Mathematik offensichtlich geeignet zu sein, die Ziele des Deutschunterrichts zu unterstützen.

## 2.2 Mathematik im Deutschunterricht

Betrachtet man mathematische Strukturen im Deutschunterricht, so stößt man zunächst auch auf das sinnentnehmende Lesen. Dabei finden sich in Texten natürliche Zahlen unter verschiedenen Aspekten, allerdings häufig auf einem sehr grundlegenden Niveau. In Abbildung 6 ist als Beispiel eine Leseaufgabe aus den Vergleichsarbeiten Deutsch (VERA-3 Deutsch) dargestellt. Es wird schnell deutlich, dass

Zahlen in der Tabelle zum Benennen der Angebote (Ordinalzahlaspekt), zur Angabe von Datum, Uhrzeit oder Preis (Maßzahlaspekt), oder zur Angabe von Telefonnummern (Kodierungsaspekt) verwendet werden. Rechenzahlaspekte finden sich im Beispiel nicht. Dem Aufgabenstimulus folgt eine Reihe von Teilaufgaben, zu deren Beantwortung unterschiedlichste Informationen der Tabelle entnommen werden müssen. Sucht man in diesen Teilaufgaben nach mathematischen Strukturen, so wird man allenfalls in Teilaufgabe 3 fündig (vgl. Abb. 7).

**Naturkundemuseum**

**Naturkundemuseum: Angebote für Kinder**

An vielen Nachmittagen gibt es im Naturkundemuseum Angebote für Kinder. Hier eine Auswahl:

| **Angebot 1** | **Luftexperimente** |
|---|---|
| Datum | 8. September, 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr |
| Beschreibung | Nach einer spannenden Führung durch die Sonderausstellung „Herrscher der Lüfte" wollen wir verschiedene Experimente durchführen, um den Flug der Tiere zu verstehen. |
| Zielgruppe | Kinder ab 8 Jahren |
| Leitung | Ina Meier |
| Preis | 2,50 € |
| Anmeldung | Anmeldung erforderlich.<br>Tel: 0898-3144 (Di - Fr 10.30 - 16.30 Uhr) |

| **Angebot 2** | **Drachen schauen und Drachen bauen** |
|---|---|
| Datum | 16. September, 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr |
| Beschreibung | Wir schauen uns die Sonderausstellung „Flugsaurier" an und erfahren, was sich die Menschen über Drachen erzählen. Anschließend bauen wir unseren eigenen flugfähigen Drachen. |
| Zielgruppe | Kinder ab 7 Jahren |
| Leitung | Gerd Richter |
| Preis | 2,50 € + Kosten für Bastelmaterial |
| Anmeldung | Anmeldung erforderlich.<br>Tel: 0898-3144 (Di - Fr 10.30 - 16.30 Uhr) |

| **Angebot 3** | **Walderlebnisspiele** |
|---|---|
| Datum | 22. September, 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr |
| Beschreibung | Bei unseren Walderlebnisspielen können die Kinder als Detektiv, Künstler oder Förster draußen den Wald erkunden. |
| Zielgruppe | Kinder von 6 bis 8 Jahren |
| Leitung | Ina Meier |
| Preis | 2,50 € |
| Anmeldung | Anmeldung erforderlich.<br>Tel: 0898-3144 (Di - Fr 10.30 - 16.30 Uhr) |

| **Angebot 4** | **Muschelwerkstatt** |
|---|---|
| Datum | 25. November, 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr |
| Beschreibung | Experimente und Herstellung von schönem Muschelschmuck |
| Zielgruppe | Kinder ab 8 Jahren |
| Leitung | Miriam Teile |
| Preis | 2,50 € + Kosten für Bastelmaterial |
| Anmeldung | Anmeldung erforderlich.<br>Tel: 0898-3144 (Di - Fr 10.30 - 16.30 Uhr) |

Abb. 6 Leseaufgabe Naturkundemuseum aus VERA-3 Deutsch (IQB 2013b)

**Teilaufgabe 3:**

Wann kannst du im Museum anrufen, um dich für eine Veranstaltung anzumelden?

- ☐ montags um 16.00 Uhr
- ☐ dienstags um 8.00 Uhr
- ☐ freitags um 14.00 Uhr
- ☐ sonntags um 11.00 Uhr

Abb. 7 Teilaufgabe zur Leseaufgabe Naturkundemuseum aus VERA-3 Deutsch (IQB 2013b)

Der Anspruch an das mathematische Verständnis ist hierbei für die angesprochene Altersstufe relativ gering. Eine Aufgabe aus den Bildungsstandards im Fach Deutsch für den Primarbereich (KMK 2004b) vermittelt ein ähnliches Bild (vgl. Abb. 8).

**Der Igel**

Der Igel ist etwa 22 bis 27 cm lang und 14 cm hoch. Auf dem Rücken hat er viele, fast gleich lange Stacheln (ca. 3 cm). Bauch und Gesicht sind behaart. Seine Farbe geht von Erdfarben bis Grau und Braun. Auf seinem Stachelpanzer wimmelt es meist von Flöhen. Er besitzt eine spitze Schnauze, die in einem kleinen Rüssel endet. Die Ohren sind breit und rund, seine Augen schwarz und klein.

Der größte Teil seiner Nahrung besteht aus Insekten, daneben auch aus Regenwürmern, Nacktschnecken, kleinen Vögeln und gelegentlich Mäusen.

Abb. 8 Aufgabe Der Igel aus den Bildungsstandards Deutsch (KMK 2004b)

Hier wird ausschließlich der Maßzahlaspekt angesprochen und mit folgender Aufgabe verknüpft: „Wie sieht der Igel aus? Schreibe auf, was der Text über die Größe des Igels sagt.“ Wiederum ist der Anspruch an die mathematischen Fähigkeiten der Drittklässler nicht sehr groß. Des Weiteren ist zum Lösen einer solchen Aufgabe auch kein hohes Maß an Textverständnis notwendig, da die Zahlen schon aus dem ersten Satz und ohne Kenntnis des größeren Zusammenhangs entnommen werden können.

Auch ein Blick in Lehrpläne und Schulbücher bestätigt den Eindruck. Bezüge finden sich im Lehrplan Bayern hauptsächlich im Punkt „Tabellen und Schaubilder – Sich und andere informieren“ (Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000) und konkretisieren sich in Schulbüchern in Aufgaben, bei denen beispielsweise geeigneten Fahrplänen oder Säulendiagrammen entsprechende Informationen entnommen werden müssen (vgl. Abb. 9). Auch hier sind die Anforderungen – sowohl an das mathematische als auch an das sprachliche Verständnis – vergleichsweise gering. Von einer wirklichen Verknüpfung der Fächer kann somit eher nicht gesprochen werden.

Insgesamt nutzt der Deutschunterricht allenfalls elementare mathematische Zusammenhänge. Entsprechende Aufgaben sind in der Regel wenig komplex. Sie erfordern eher Basiswissen und setzen kaum Textverständnis voraus. Damit zeigt sich Mathematik bislang als wenig gefordert, die Ziele des Deutschunterrichts zu unterstützen. Das muss nicht so sein: Anspruchsvolle Modellierungsaufgaben, bei denen Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzt, innermathematisch gelöst und die Lösungen dann wieder auf die Ausgangssituation zurück bezogen werden sollen (KMK 2004a), hätten durchaus das Potential eine Brücke zwischen den Fächern zu schlagen.

Kannst du in diesem Busfahrplan aus München lesen?

- Wann fährt der 1. Bus?
- Wo fährt er ab?
- Wann kannst du vom Hansapark zwischen 7.00 und 8.00 Uhr abfahren?
- Wie lange braucht der Bus der Baumgartnerstraße bis zum Margaretenplatz?
- Überlege dir weitere Aufgaben.

BUS 132 Landshuter Allee - Harras U S R - Rotenhanstraße

| | | | Montag - Freitag | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Landshuter Allee | ab | | 5.16 | 5.36 | 5.56 | 6.16 | 6.36 | 6.56 | 7.16 | 7.36 | 7.56 | 8.16 | 8.36 | 8.56 | | 19.36 | 19.56 | 20.16 |
| Rotkreuzplatz U | | | 5.19 | 5.39 | 5.59 | 6.19 | 6.39 | 6.59 | 7.19 | 7.39 | 7.59 | 8.19 | 8.39 | 8.59 | | 19.39 | 19.59 | 20.19 |
| Winthirplatz | | | 5.20 | 5.40 | 6.00 | 6.20 | 6.40 | 7.00 | 7.20 | 7.40 | 8.00 | 8.20 | 8.40 | 9.00 | | 19.40 | 20.00 | 20.20 |
| Steubenplatz | | | 5.21 | 5.41 | 6.01 | 6.21 | 6.41 | 7.01 | 7.21 | 7.41 | 8.01 | 8.21 | 8.41 | 9.01 | | 19.41 | 20.01 | 20.21 |
| Wilhelm-Hale-Straße | | | 5.23 | 5.43 | 6.03 | 6.23 | 6.43 | 7.03 | 7.23 | 7.43 | 8.03 | 8.23 | 8.43 | 9.03 | | 19.43 | 20.03 | 20.23 |
| Lautensackstraße | | | 5.25 | 5.45 | 6.05 | 6.25 | 6.45 | 7.05 | 7.25 | 7.45 | 8.05 | 8.25 | 8.45 | 9.05 | | 19.45 | 20.05 | 20.25 |
| Hauzenberger Straße | | | 5.26 | 5.46 | 6.06 | 6.26 | 6.46 | 7.06 | 7.26 | 7.46 | 8.06 | 8.26 | 8.46 | 9.06 | | 19.46 | 20.06 | 20.26 |
| Elsenheimerstraße | | | 5.27 | 5.47 | 6.07 | 6.27 | 6.47 | 7.07 | 7.27 | 7.47 | 8.07 | 8.27 | 8.47 | 9.07 | | 19.47 | 20.07 | 20.27 |
| Astallerstraße | | | 5.29 | 5.49 | 6.09 | 6.29 | 6.49 | 7.09 | 7.29 | 7.49 | 8.09 | 8.29 | 8.49 | 9.09 | | 19.49 | 20.09 | 20.29 |
| Heimeranplatz U S | | | 5.31 | 5.51 | 6.11 | 6.31 | 6.51 | 7.11 | 7.31 | 7.51 | 8.11 | 8.31 | 8.51 | 9.11 | | 19.51 | 20.11 | 20.31 |
| Hansastraße | | | 5.33 | 5.53 | 6.13 | 6.33 | 6.53 | 7.13 | 7.33 | 7.53 | 8.13 | 8.33 | 8.53 | 9.13 | | 19.53 | 20.13 | 20.33 |
| Hansapark | | | 5.34 | 5.54 | 6.14 | 6.34 | 6.54 | 7.14 | 7.34 | 7.54 | 8.14 | 8.34 | 8.54 | 9.14 | | 19.54 | 20.14 | 20.34 |
| Baumgartnerstraße | | | 5.35 | 5.55 | 6.15 | 6.35 | 6.55 | 7.15 | 7.35 | 7.55 | 8.15 | 8.35 | 8.55 | 9.15 | | 19.55 | 20.15 | 20.35 |
| Herzog-Ernst-Platz | | | 5.37 | 5.57 | 6.17 | 6.37 | 6.57 | 7.17 | 7.37 | 7.57 | 8.17 | 8.37 | 8.57 | 9.17 | | 19.57 | 20.17 | 20.37 |
| Hans-Fischer-Straße | | | 5.38 | 5.58 | 6.18 | 6.38 | 6.58 | 7.18 | 7.38 | 7.58 | 8.18 | 8.38 | 8.58 | 9.18 | | 19.58 | 20.18 | 20.38 |
| Poccistraße U | | | 5.40 | 6.00 | 6.20 | 6.40 | 7.00 | 7.20 | 7.40 | 8.00 | 8.20 | 8.40 | 9.00 | 9.20 | | 20.00 | 20.20 | 20.40 |
| Aberlestraße | | | 5.41 | 6.01 | 6.21 | 6.41 | 7.01 | 7.21 | 7.41 | 8.01 | 8.21 | 8.41 | 9.01 | 9.21 | | 20.01 | 20.21 | 20.41 |
| Margaretenplatz | | | 5.42 | 6.02 | 6.22 | 6.42 | 7.02 | 7.22 | 7.42 | 8.02 | 8.22 | 8.42 | 9.02 | 9.22 | | 20.02 | 20.22 | 20.42 |
| Harras (Rondell) U | | | 5.44 | 6.04 | 6.24 | 6.44 | 7.04 | 7.24 | 7.44 | 8.04 | 8.24 | 8.44 | 9.04 | 9.24 | | 20.04 | 20.24 | 20.44 |
| Harras (Unterführung) U S R | an | | 5.46 | 6.06 | 6.26 | 6.46 | 7.06 | 7.26 | 7.46 | 8.06 | 8.26 | 8.46 | 9.06 | 9.26 | alle 20 Min | 20.06 | 20.26 | 20.46 |
| Harras (Unterführung) U S R | ab | 5.30 | 5.50 | 6.10 | 6.30 | 6.50 | 7.10 | 7.30 | 7.50 | 8.10 | 8.30 | 8.50 | 9.10 | 9.30 | | 20.10 | 20.30 | 20.50 |

Abb. 9 Aufgabe aus einem Lesebuch der zweiten Klasse (Dransfeld et al. 2009)

## 3 Sachkunde und Mathematik

Neben Deutsch stellt die Sachkunde einen weiteren Bereich dar, in dem Verknüpfungen mit dem Unterrichtsfach Mathematik denkbar und auch curricular konstituiert sind. Bezüge, die sich beispielsweise im Lehrplan Bayern hierzu finden, sind mathematisch hauptsächlich den Bereichen Größen und Messen sowie Raumerfahrungen und Raumvorstellungen zuzuordnen. Dabei geht es in unterschiedlichsten Lernfeldern des Sachunterrichts darum, mit Geld, dem Kalender oder der Uhr umzugehen, oder sich anhand von Plänen und Skizzen in der eigenen Umgebung zu orientieren. Vergleiche von Aufgaben aus Sachkundebüchern mit Aufgaben aus dem Bereich VERA-3 Mathematik zeigen erstaunlich viele Gemeinsamkeiten in der Gestaltung und den Inhalten (vgl. Abb. 10). Damit scheint hier großes Potential für eine erfolgreiche Verbindung der beiden Disziplinen vorhanden zu sein. Analog zum Deutschunterricht nutzt aber auch der Sachkundeunterricht größtenteils nur elementare mathematische Zusammenhänge. Obwohl an einigen Stellen ähnliche Inhalte thematisiert werden, bleiben die Fächer weitestgehend unverbunden. Dies erstaunt, da die Beispiele erkennen lassen, dass Mathematik eigentlich bestens geeignet sein sollte, die Ziele des Sachunterrichts zu unterstützen.



Abb. 10 Vergleich Aufgabe aus einem Sachkundebuch und aus VERA-3 Mathematik (Bräutigam et al. 2004; IQB 2013a)

In der anderen Richtung kann Mathematik besonders über Sachaufgaben und deren Kontexte eine Brücke zum Sachkundeunterricht schlagen. In welchem Maß der Kontext einer Sachaufgabe deren Schwierigkeit beeinflusst und im Idealfall reduziert ist bislang nicht ausreichend erforscht. Studien, die im Rahmen von Theorien zum Verhalten in sozialen Beziehungen (Social Exchange Theory) bei Erwachsenen durchgeführt wurden, weisen jedoch auf die Bedeutung eines authentischen Kontexts im Bezug auf logisches Begründen hin. Auf eigenen Studien aufbauend konnten Wason und Shapiro (1971) die Bedeutung einer realistischen Einbettung für das Lösen von „selection tasks“ belegen. Dabei wurden 32 Studierende auf zwei Versuchsgruppen verteilt. In beiden Gruppen wurden den Teilnehmern vier Karten vorgelegt. In der ersten Gruppe zeigte die erste Karte ein D, die zweite ein K, die dritte eine 3 und die vierte eine 7. Dazu wurde den Probanden folgende Regel gegeben: Jede Karte, auf der ein D zu sehen ist, zeigt auf der anderen Seite eine 3. Aufgabe der Versuchspersonen war es dann zu ermitteln, welche Karten sie umdrehen müssen, um zu überprüfen, ob die Aussage für die vorliegenden

Karten stimmt. Die Struktur der Aufgabe, welche die zweite Versuchsgruppe zu bearbeiten hatte, war entsprechend. Allerdings wurde diese thematisch eingebettet. Statt der abstrakten Präsentation mit Buchstaben und Zahlen waren die Karten mit Städtenamen (Manchester und Leeds) und Transportmitteln (Auto und Zug) beschriftet. Die Hypothese lautete in diesem Fall: Immer wenn ich nach Manchester gehe, fahre ich mit dem Auto. Die Anweisung war dabei ebenso die Karten zu benennen, die zur Prüfung der Hypothese nötig seien. Es stellte sich heraus, dass 10 von insgesamt 16 Personen aus der Gruppe mit Kontext die richtige Strategie anwendeten, während dies bei der abstrakten Präsentation nur 2 von ebenfalls 16 Teilnehmern gelang. Die Studie von Wason wurde von verschiedenen Forschern mehrfach wiederholt. So kamen Griggs und Cox (1982) zu ähnlichen Ergebnissen. Bei ihrer Erhebung entsprach die abstrakte Bedingung weitestgehend der ursprünglichen Wason Selection Task, während als modifizierter Kontext das Mindestalter beim Verzehr von Alkohol gewählt wurde. Die Karten zeigten dabei „trinkt Bier“, „trinkt Cola“, „ist 25 Jahre alt“ und „ist 16 Jahre alt“. Als Angestellter einer Bar sollte geprüft werden, ob Minderjährige Alkohol konsumieren. Während kein Versuchsteilnehmer in der Lage war die richtige Lösung für die abstrakt gestellte Aufgabe zu finden, konnten 73 Prozent die thematisch eingebundene Aufgabe bewältigen. Es gab jedoch auch Studien, die diese Zusammenhänge nicht bestätigen konnten (Manktelow & Evans 1979). An dieser Stelle eröffnet sich besonders für den Mathematikunterricht ein Forschungsdesiderat. Die Bedeutung des Kontexts für das Bewältigen von Sachaufgaben ist noch nicht ausreichend belegt. Sie ist möglicherweise auch stark abhängig von der konkreten Ausgestaltung dieses Kontexts. So kann eine Aufgabe zwar grundsätzlich realistisch sein, dennoch aber nicht der Erfahrungswelt der Kinder entstammen. Es ist anzunehmen, dass in solch einem Fall die Einbettung das Lösen der mathematischen Aufgabe eher erschwert. Auf der anderen Seite legt aber gerade das Experiment von Griggs und Cox nahe, dass ein authentischer Kontext, der tatsächlich aus der Lebenswelt der Kinder entnommen ist, durchaus zur Erhöhung der Lösungswahrscheinlichkeit beitragen kann. In einem Kooperationsprojekt (DEVI – Development of the handling of fragile and conflicting evidence in primary school) der Ludwig-

Maximilians-Universität München und der Technischen Universität München wird derzeit der Einfluss des Kontexts auf die Beurteilung von Vierfeldertafeln erforscht (vgl. Lindmeier et al. 2012). Künftige Publikationen könnten speziell für die Mathematik in der Grundschule aufschlussreich sein.

Es lässt sich also zusammenfassend feststellen, dass Bemühungen einer sinnvollen interdisziplinären Verknüpfung im Bereich der Grundschule durchaus – teilweise auch schon seit geraumer Zeit – vorhanden sind. Allerdings scheinen diese Verbindungen bislang eher punktuell und auf konkrete Bereiche beschränkt zu sein. Das Potential, das der Sachunterricht für fächerübergreifendes Lernen mit der Mathematik bietet, soll hier in besonderer Weise betont werden. Gerade auf der Basis des Klassenlehrerprinzips, das in der Grundschule stark verbreitet ist, bietet sich die Gelegenheit die Grenzen der einzelnen Fächer zu öffnen. Curriculare Verweise gibt es bereits, auch wenn diese sicherlich ausbaufähig sind. Hilfreich wäre überdies, wenn auch die Fachdidaktiken die Chancen der Vernetzung künftig stärker nutzen würden.

## Literatur

Baruk, S. (1989). Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2000). Lehrplan für die bayerische Grundschule.
http://www.isb.bayern.de/grundschule/lehrplan/ . Gesehen 28.10.2013.

Bräutigam, G., Gürtler, C., Schipper, S. & Schmidt, K. (2004). Jo-Jo Heimat- und Sachunterricht 2. Grundschule Bayern. Berlin: Cornelsen.

Berktold, K., Hoyer, S., Röbe, F. & Röbe, H. (2008). Die Auer Fibel. http://www.klett.de/produkt/isbn/3-12-004939-5. Gesehen 28.10.2013.

Böhme, K. & Haag, N. (2011). Zusammenfassung zentraler Ergebnisse des Ländervergleichs in den Fächern Deutsch und Mathematik. In P. Stanat et al. (Hrsg.), Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011 (S.128-130). Münster: Waxmann.

Böhme, K. & Weirich, S. (2011). Der Ländervergleich im Fach Deutsch. In P. Stanat et al. (Hrsg.), Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011 (S.103-116). Münster: Waxmann.

Carpenter, T.P., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Lindquist, M.M. & Reys, R.E. (1980). Solving verbal problems: Results and implications for National Assessment. Arithmetic Teacher 28, 8-12.

Dransfeld, F. et al. (2009). Jo-Jo Lesebuch 3. Grundschule Bayern. Berlin: Cornelsen.

Gerlach, A. (1911). Des Kindes erstes Rechenbuch. Leipzig: Quelle und Meyer.

Griggs, R.A. & Cox, J.R. (1982). The elusive thematic-materials effect in Wason's selection task. British Journal of Psychology 73 (3), 407-420.

Haag, N. & Roppelt, A. (2011). Der Ländervergleich im Fach Mathematik. In P. Stanat et al. (Hrsg.), Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011 (S.117-127). Münster: Waxmann.

Herwartz-Emden, L., Braun, C., Heinze, A., Rudolph-Albert, F. & Reiss, K. (2008). Geschlechtsspezifische Leistungsentwicklung von Kindern mit und ohne Migrationshintergrund im frühen Grundschulalter. Zeitschrift für Grunschulforschung 2, 13-28.

Hudson, T. (1983). Correspondances and numerical differences between disjoint sets. Child Development 54, 84-90.

Hübner, G., Kleinschmidt, D., Knolle, H., Pohle, E., Prange, H., Schneider, J., Umberg, S. & Westermann, H. (2000). Mathebaum 3. Mathematik für Grundschulen. Hannover: Schroedel.

IQB (2012). Vergleichsarbeiten VERA-3 Mathematik. Beispielaufgaben. https://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben. Gesehen 29.10.2013.

IQB (2013a). Vergleichsarbeiten VERA-3 Mathematik. Beispielaufgaben.

https://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben. Gesehen 29.10.2013.

IQB (2013b). Vergleichsarbeiten VERA-3 Deutsch. Beispielaufgaben. https://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben. Gesehen 29.10.2013.

KMK (2004a). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject. Gesehen 28.10.2013.

KMK (2004b). Bildungsstandards im Fach Deutsch für den Primarbereich. https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject. Gesehen 28.10.2013.

Lindmeier, A., Reiss, K., Barchfeld, P. & Sodian, B. (2012). Make your choice. Students' early abilities to compare probabilities of events in an urn-context. In T.-Y. Tso (Eds.), Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3, S.161-168). Taipei: PME.

Lorenz, J. H. (2005). Grundlagen der Förderung und Therapie. In M.G. von Aster & J.H. Lorenz (Hrsg.), Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik (S.165-177). Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). Mathematik und Sprache. Wien: öbv & hpt.

Manktelow, K.I. & Evans, J. (1979). Facilitation of Reasoning by realism: Effect or non-effect? British Journal of Psychology 70, 477-488.

Schütte, S. (1997). Geschichten zum Rechnen. Die Grundschulzeitschrift 102, 26-44.

Spiegel, H. & Selter, C. (2003). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

Stern, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben „gelöst"? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. Mathematikunterricht 38 (5), 7-29.

Wason, P.C. & Shapiro, D. (1971). Natural and contrived experience in a reasoning problem. Quaterly Journal of Experimental Psychology 23, 63-71.

Weinert, F.E. (2001). Leistungsmessung in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz.

Gabriele Moll
Technische Universität München
TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Arcisstraße 21, 80333 München
gabriele.moll@tum.de

Prof. Dr. Kristina Reiss
Technische Universität München
TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Arcisstraße 21, 80333 München
kristina.reiss@tum.de

## Mathematikhaltige Erzählanlässe – Vernetzungen zwischen Kita und Grundschule

von Marcus Nührenbörger

*Die vielfältigen Lernerfahrungen von Kindern vor der Schule sind zuletzt in den Fokus der mathematikdidaktischen Forschung gerückt. Daran anknüpfend geht es in dem Beitrag um die Etablierung mathematikhaltiger Erzählanlässe, die als Brücke zwischen Lernsituationen in der Kita und Grundschule fungieren. Hierzu werden produktive Lerngelegenheiten erörtert, die auf komplementäre Weise frühe spielerisch-konkrete Lernerfahrungen mit fortschreitenden, eher symbolischen Lernprozessen vernetzen.*

Schlüsselwörter: Erzählen, Argumentieren, Spielen, Interaktion, Kindergarten, Anschlussfähigkeit

### 1 Mathematik lernen im Übergang von der Kita in die Grundschule

Es gehört seit Jahren zum fachdidaktischen Standardwissen, dass Kinder zwar zu einem bestimmten Zeitpunkt mit dem schulisch initiierten Lernen beginnen, aber bereits viel früher anfangen, Mathematik zu lernen und in unterschiedlichen Ausprägungen vielfältige mathematische Kompetenzen aufzubauen (z. B. Selter 1995). In dieser Hinsicht besitzen sicherlich manche Kita-Kinder weiter ausgeprägte mathematische Fähigkeiten und Kenntnisse als so manches Grundschulkind. Allerdings weist Schipper (1998) auf einen wesentlichen Unterschied bei der Beachtung der jeweiligen mathematischen Kompetenzen hin: Die Schulanfängerinnen und Schulanfänger besitzen zwar zuweilen eine hohe *informelle* Kompetenz, die aber nicht mit einer hohen *formalen* Kompetenz gleich zu setzen ist. Mit anderen Worten: Es existiert kein nahtloser „Anschluss“ zwischen den Lernsituationen und -anforderungen in schulischen Einrichtungen auf der einen Seite und in außerschulischen Kontexten und in vorschulischen Einrichtungen auf der anderen Seite. Diese sind vielmehr auch von Unterschieden bzw. „Diskontinuitäten“ (Winter 1994) geprägt: So bauen Kinder beispielsweise in den spiel- und alltagsorientierten Kontexten der Kita eher informelles, auf konkrete Probleme bezogenes mathematisches Wissen auf. In diesem Zusammenhang weist Winter (1994, 11) darauf hin, dass die Beziehungen zwischen den realen Anwendungen und der Mathematik oftmals zu optimistisch gesehen werden: „Auf jeden Fall werden, wenn man die Sache ernst nimmt (die Sachsituationen etc.) Diskontinuitäten zwischen Lebenswelt und arithmetischen Begriffen sichtbar, die grundsätzlicher Natur sind. In der Didaktik ist bisher das Verhältnis zwischen innen und außen, zwischen rein und ungewandt allzu harmonisch-optimistisch eingeschätzt worden." Mit dem Wechsel in die erste Klasse beginnen die Kinder, sich mehr mit den Aspekten der stärker formalisierten, auf abstrakte Konzepte abzielenden „Schulmathematik" zu beschäftigen, die letztlich nicht unbedingt mit den alltagsgebundenen mathematischen Vorerfahrungen verknüpfbar sind.

Wesentlich für eine produktive Verbindung zwischen den beiden Institutionen sind aus mathematikdidaktischer Perspektive zum einen abgestimmte Vorstellungen über das Fach Mathematik und über mathematische Lehr- und Lernprozesse. Zum anderen sind es aber vor allem explizite Anknüpfungspunkte, die es den Kindern ermöglichen, Mathematik frühzeitig in alltagsgebundenen und spielerischen Kontexten *bewusst* zu erfahren und mit anwendungs- und strukturorientierten Lernkontexten in der Schule zu verbinden. Denn letztlich ruht die Konstruktion mathematischen Wissens auf spielerischen Erkundungen der strukturellen Zusammenhänge und Beziehungen (vgl. Steinbring 2001). Leitend für aktive und interaktive Erkundungen, Fortsetzungen und Erfindungen in Kita und im Anfangsunterricht der Grundschule sind die mathematischen Grundideen (vgl. Wittmann 2006), zu denen auch Zahlen in der Umwelt der Kinder gehören, und die damit verbundenen stufenübergreifenden allgemeinen Lernzielen (Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren und Formulieren).

### 1.1 Numerische Bewusstheit

Mit Blick auf arithmetische Lernprozesse heben Wittmann und Müller (2009) die Entwicklung „numerischer Bewusstheit" bei Kindern hervor. Darunter wird das Wissen verstanden, „dass die Zahlen in der Zahlenreihe angeordnet sind und für verschiedene Zwecke benutzt werden können sowie andererseits die Fähigkeit zur strukturierten

Anzahlerfassung, d.h. die Fähigkeit beim Zählen und Rechnen Beziehungen zwischen den einzelnen Zahlen zu erkennen und zu nutzen“ (Wittmann & Müller 2009, 14). Beachtenswert sind somit nicht allein die einzelnen Zahlaspekte. Vielmehr ist die Fähigkeit zur Konstruktion von Beziehungen zwischen Zahlen oder – wie es Sophian (2008) ausdrückt – die Fähigkeit zum Vergleich von Zahlen wesentlich für die Entwicklung mathematischen Denkens.

Numerische Bewusstheit ist nicht ausschließlich innermathematisch zu verorten, sondern auch bei der Auseinandersetzung mit Zahlen in der Umwelt der Kinder – z.B. beim Zählen, Messen und musterhaften Zusammensetzen und Fortführen von Objekten (z.B. van Oers 2010). Ginsburg (2006) versteht unter „everyday mathematics Aktivitäten, die einerseits mathematische Tätigkeiten enthalten, andererseits als solche auch *bewusst* von den Kindern erkannt werden können (vgl. hierzu Freudenthal 1981, 100). Gasteiger (2010) prägt in einem ähnlichen Sinne den Begriff „natürliche Lernsituationen“, die sich in Alltags- und Spielsituationen der Kinder ergeben und die gezielt begleitet werden können. Ein wesentliches Moment für die (Weiter-)Entwicklung numerischer Bewusstheit ist, dass mathematische Strukturen explizit in den Blick genommen und zur Sprache gebracht werden. Denn „man lernt weder durch Belehrung allein noch durch Beschauen der Umwelt allein Mathematik. Man kann zu Mathematik kommen, wenn man über Wirklichkeitsbereiche nachdenkt. Dieses Nachdenken ist kein einfaches Imitieren, sondern ein aktiver, schöpferischer Prozess, die Bildung eines Modells auf irgendeinem Sprachniveau“ (Winter 1976, 340).

In der Auseinandersetzung mit mathematikhaltigen (Problem-)Situationen des Alltags löst somit nicht allein das Handeln in der Situation oder das Betrachten von Objekten mathematisch-strukturelles Denken aus. Vielmehr ist es – wie Schwarzkopf (2006) mit Blick auf das „elementare Modellieren“ herausgearbeitet hat – zentral, dass die Lernenden eine begriffliche Beziehung zur Sachsituation konstruieren, die eine mathematische Deutungsgrundlage schafft. Diese aktive Konstruktion von Beziehungen ist für die Entwicklung numerischer Bewusstheit zentral. Denn „zwischen der Sache und der Mathematik [...] vermittelt nicht eine Eins-zu-Eins Übersetzung, bei der die konkreten Sachelemente direkt mit mathematischen Symbolen und Operationszeichen verbunden werden. Wesentlich für eine produktive Verbindung zwischen der Sache und der Mathematik ist die Konstruktion von Beziehungen, Strukturen und Zusammenhängen im Sachkontext, denn letztlich zielt die Mathematik auf solche Strukturen“ (Steinbring 2001, 174).

## 1.2 Erzählen und Erkennen

Die Qualität des mathematischen Lernens ist nicht allein eng verwoben mit individuell-kognitiven Prozessen und affektiven Aspekten der Wahrnehmung einer Situation, sondern vor allem auch mit sozialen Prozessen der interaktiven Aushandlung von mathematikhaltigen Bedeutungen der Situation (vgl. Krummheuer 1997). Damit rücken die auf sozial-interaktiver Ebene vorherrschenden Bedingungen zur Konstruktion neuen Wissens näher in den Fokus der Betrachtung: Die Interaktionsprozesse sind nicht nur Randbedingungen des Lerngeschehens oder Gegenstand von Vermittlungsprozessen, sondern auch Medium des fachlichen Lernens. Kurz formuliert: Sie stellen die soziale Konstituente des Mathematiklernens dar.

Krummheuer (1997) weist auf der Grundlage unterrichtlicher Interaktionsprozesse darauf hin, dass Lernende ihre mathematischen Überlegungen nicht unbedingt explizit machen. Vielmehr zeigen sie die Rationalität ihres Vorgehens und ihrer Sichtweise im Format einer narrativen Argumentation an und legen mathematische Ansichten in einem erzählenden Stil dar. Anders formuliert, die Kinder sind sich ihrer numerischen Einsichten nicht in der Art bewusst, dass sie diese gezielt ansprechen oder begründen. Vielmehr erläutern sie „narrativ argumentierend“ spezifische Aspekte ihrer mathematischen Erkundung. Mit „Erzählen“ ist aus mathematikdidaktischer Sicht keine linguistische Verortung der verbalen Beiträge gemeint. Vielmehr soll damit zum Ausdruck gebracht werden, dass Kinder ihre mathematischen Überlegungen wie in einer „Geschichte“ sequenziell darstellen und zugleich anhand ihrer Geschichte mathematische Erklärungen mitteilen. Im Zuge der Erzählung strukturieren sie ihre Erfahrungen und beginnen, diese mit Blick auf die gegenwärtige Interpretation der Situation wie auch auf zukünftige Interpretationen ähnlicher Situationen zu reflektieren und zu begründen. Die Erzählungen eröffnen ihnen so die Möglichkeit, sich der mathematischen Strukturen in ihren Geschichten bewusst zu werden; insbesondere dann, wenn sie im Interaktionsprozess mathematisch gehaltvolle Handlungszüge im gegenwärtigen wie auch für den kommenden Moment überdenken.

Eine Erzählung ist im Interaktionsprozess nicht unbedingt ausschließlich einem Kind zuzuordnen. Die Erzählrollen können auch zwischen Personen variieren, so dass eine mathematikhaltige Erzählung letztlich gemeinsam hervorgebracht wird. Die Erzählenden gehen hierbei implizit davon aus, „(...) dass die Mitagierenden im gedanklichen Nachvollzug aus dem Plot des Bearbeitungsprozesses die aktuell hervorgebrachte Argumentation für sich selbst konstruieren können“ (Krummheuer 1997, 33).

Mathematikhaltige Erzählungen können dahingehend unterschieden werden, inwiefern neue Erkenntnisse gewonnen werden. Verfügen die Kinder bereits über einen Referenzkontext zur Erklärung einer Lernsituation (z.B. indem sie eine Menge immer wieder neu auszählen), dann festigen sie ihr Faktenwissen (z.B. Sicherheit beim Zählen), aber sie lernen nicht unbedingt etwas Neues hinzu. Miller (1986) spricht hierbei vom relativen Lernen. Deuten sie hingegen eine neue Struktur in die Handlungssituation (z.B. gegensinniges Verändern zum Ausgleichen einer Menge), dann generieren sie womöglich eine neue, überzeugende Sichtweise. Sie lernen auf fundamentale Weise neues mathematisches Wissen, wie es Miller (1986) ausdrücken würde. Derartige fundamentale Lernprozesse „reflektierender Abstraktion“ entstehen nach Miller (1986) ausschließlich in sozialen Interaktionsprozessen; z.B. wenn sich Kinder mit mathematischen Inhalten in einem Erzählkontext auseinandersetzen. Denn in solchen sozialen Begegnungen kann ein Lernender die Erfahrung machen, dass eine Situation nicht allein durch sein bislang entwickeltes Verständnis zu bewältigen ist, sondern die Situation eine nähere Erläuterung und Klärung erfordert, oder aber „(...) dass andere Beteiligte Lösungen bzw. Teillösungen hervorbringen, deren Glaubwürdigkeit er einerseits nicht bestreiten kann, die aber andererseits zum eigenen antizipierten Plot im Widerspruch stehen“ (Krummheuer 1997, 42). Hierbei scheint es relevant zu sein, dass in der mathematikhaltigen Erzählung eine Balance eingehalten wird zwischen dem Rückgriff auf Fakten und der Konstruktion neuer Sichtweisen auf den Lerninhalt: „Das in der Interaktion entstehende strukturell neue Wissen muss es den Beteiligten erlauben, die Bezüge zu den ursprünglichen, eher empirisch und situiert bedeutsamen Wissenskonstruktionen aufrecht zu erhalten“ (Nührenbörger & Schwarzkopf 2010, 76). Paradoxerweise müssen fundamentale Lernprozesse auf der einen Seite an das alte Wissen gebunden bleiben, dieses auf der anderen Seite aber zugleich systematisch überschreiten. Epistemologisch formuliert stehen diese Wissenskonstruktionen deswegen stets in Spannung zwischen einer Deutung elementarer Beziehungen, die an konkrete Objekte oder sichtbare Phänomene geknüpft ist, und dem sich entwickelnden Verständnis, dass mathematische Begriffe strukturelle Beziehungen in symbolisierter und operativer Weise verkörpern (vgl. Steinbring 1999).

Für das Lernen von Mathematik im Zeitraum des Übergangs von der Kita in die Grundschule bieten sich als Anlass für mathematikhaltige Erzählungen insbesondere Spielsituationen an.

### 1.3 Spielen und Strukturieren

Ohne an dieser Stelle auf die Diskussion um die Bedeutung des Spiels einzugehen, kann Spielen im Kern als eine Aktivität verstanden werden, das durch eine (Spiel-)Regel und eine (Spiel-)Rolle gekennzeichnet ist und wiederholt stattfinden kann (vgl. hierzu zusammenfassend Schuler 2013). Auf dieser Bedeutung des Spiels und des „spielerischen Lernens“ (Oerter 2006) fußen wesentliche Handlungskonzepte der Institution Kita, die auch für das Lernen von Mathematik aufgegriffen werden können (z.B. Ginsburg 2006, von Oers 2010). Bereits in den 70er-Jahren stellten Floer und Schipper (1975) heraus, dass Kinder in der Grundschule und in der Kita beim Spielen mit mathematikhaltigen Spielformaten (wie z.B. Domino- oder Würfelspiele) lernen zu vergleichen, zu ordnen, zu addieren und zu subtrahieren. In den letzten Jahren konnten diese Erkenntnisse durch unterschiedlich angelegte Studien dahingehend bestätigt werden, dass mathematikhaltige Spiele im Kontext der formalen Offenheit des Kitaalltags mathematische Lernprozesse bei Kindern anzuregen vermögen – u.a. auch im Vergleich zu eher direktiven Trainingsprogrammen (z.B. Golinkoff et al. 2009, Rechsteiner & Hauser 2012). Als wesentlicher Gelingensfaktor erscheinen hier mathematisch gehaltvolle Spielsituationen, die eine Verbalisierung von Spielmomenten erlauben und von einer adaptiven Begleitung der Erwachsenen gekennzeichnet sind (vgl. Schuler 2012). Hingegen besteht bei einer zu starken Intervention durch die Erzieherinnen die Gefahr, dass diese in Konkurrenz zur Spielsituation steht, so dass letztlich die Spielsituation auf- bzw. abbricht oder gar direktive Interaktionsmuster entstehen.

Die Bedeutung des „spielerischen Lernens“ für mathematische Lernprozesse vor und in der Grundschule erweitern Steinweg (2001) und Wittmann (2004) um die Perspektive, dass gerade das operative Erkunden elementarer mathematischer Zusammenhänge als Spielen zu verstehen sei. „Die Voraussetzung für die mathematische Tätigkeit als Spiel ist, dass Mathematik nicht in festgelegten und festlegenden Aufgabenformen erscheint, sondern durch Muster lebendig gestaltet wird und sich lebendig gestalten lässt“ (Steinweg 2001, 263). Als Spiel dient somit die operativ variierende Auseinandersetzung mit Mathematik in ihrer eigenen Strukturhaftigkeit, die letztlich Anlass zur Exploration ist. In diesem Sinne geht es nicht allein darum, den Kindern Zähl- und Rechenschemata nahe zu bringen, vielmehr sollten sie von Anfang an angeregt werden, mathematische Beziehungen zwischen Zahlen zu entwickeln, zu diskutieren und zu reflektieren. Denn der epistemologische Kern des arithmetischen Wissens besteht in spielerisch-flexiblen, inhaltlich bedeutsamen und langfristig in Zeichen und Symbolen darstellbaren Beziehungen zwischen Zahlen und Rechenoperationen.

Somit liefert das mathematische Spiel eine Brücke für die Verbindung vorschulischer und schulischer mathematischer Lernprozesse (vgl. Nührenbörger & Tubach 2013). Zugleich aber kann über das Spielen auch die Diskrepanz zwischen den beiden Institutionen verdeutlicht werden: Die spielerischen Aktivitäten der Kinder in der Kita können in *substantiellen Spielumgebungen* eingebettet werden, die einerseits an die alltäglichen Spielerfahrungen der Kinder anknüpfen, andererseits grundlegende mathematische Ideen in den Blick nehmen. Die Spielumgebung wird zum Anlass, mathematische Einsichten anzubahnen. Demgegenüber findet Mathematiklernen in der Grundschule im Rahmen von substantiellen Lernumgebungen (Wittmann & Müller 1990) statt. Die mathematisch-spielerische Auseinandersetzung ist eingebettet in gezielte, systematische Lernprozesse. Letztlich sollen somit die mathematischen Ideen - unter Nutzung von Arbeitsmitteln zur Darstellung und Erkundung des mathematischen Wissens - als mentale Handlungen mit vorgestellten (idealen) Objekten realisiert werden und sich auf eine Vielfalt mathematischer Zeichen und Symbole stützen (vgl. Nührenbörger & Tubach 2013).

## 2 Konstruktive Mathematikdidaktik: Entwicklung von komplementären Lerngelegenheiten

Damit Anregungen zur Weiterentwicklung der numerischen Bewusstheit nicht einfach nur spontan und gewissermaßen „zufällig“ zustande kommen, entwirft die konstruktive Mathematikdidaktik Lernsituationen, die von einer zentralen mathematischen Struktur geleitet werden. Diese „künstlichen Objekte“ (Steinbring 1999) sorgen dafür, dass die Kinder in ihren Aktivitäten mit mathematischen Anforderungen konfrontiert werden, die das Entstehen von narrativen Argumentationsprozessen und schließlich auch mathematisch-fundamentalen Lernprozessen begünstigen können. Wesentliches Ziel ist es dabei, günstige Bedingungen zu schaffen, so dass die Lernenden ihre bisherigen Referenzkontexte in einer Bewältigungssituation nutzen und zugleich in den mathematischen Objekten neue Strukturen zu sehen. Diese neue Erkenntnis sorgt womöglich letztlich für eine Erweiterung des begrifflichen Wissens.

Entscheidend bei der Gestaltung vorschulischer Lernsituationen ist es, „(...) den Kindern zahlreiche Möglichkeiten zu geben, sich selbst aktiv mit mathematischen Fragestellungen auseinanderzusetzen, sie anzuregen, zu hinterfragen und eigenständig Probleme zu lösen und dabei sowohl im Sinne des Faches als auch alters- und entwicklungsgemäß geeignete Inhalte im Blick zu haben“ (Gasteiger & Benz 2012, 105). Während hierzu in den letzten Jahren eine Vielzahl an mathematikhaltigen Situationen (z.B. mit Blick auf die mathematische Kompetenz des Zählens und der Verwendung von Zahlwörtern) aufgearbeitet worden sind, bleibt die Frage einer kohärenten Vernetzung von vorschulischen und schulischen Inhalten und Lerngelegenheiten außen vor.

Hier bieten sich mathematische Spielsituationen an, die es den Kindern ermöglichen, in der Kita numerische Bewusstheit aufzubauen und in der Grundschule differenziert weiterzuentwickeln. Im Kern basieren diese Spielsituationen auf den konstituiertenden Merkmalen einer substantiellen Lernumgebung in der Grundschule (Wittmann 1995): Substantielle Lernumgebungen repräsentieren die zentralen Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Zudem bieten sie reichhaltige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten der Kinder. Sie sind flexibel und können so an die individuellen Gegebenheiten der Lernenden angepasst werden. Der fachliche Rahmen sichert ein inhaltlich gleiches Lernangebot für alle Kinder, das inhaltlich ganzheitlich strukturiert ist mit einem Mindestmaß an Komplexität.

Für substantielle Spielumgebungen in der Kita bedeutet dies, dass die darin eingebundenen Lernsituationen mathematisch herausfordern sowie vielschichtig durchgespielt und verknüpft werden können (vgl. hierzu v.a. Winter 1976):

*Lernsituationen, die herausfordern*: Bei der Konzeption von Spielumgebungen ist aus konstruktiver Sicht wesentlich, dass diese mathematisch reichhaltig sind und somit vom Fach aus inhärente Bedeutung besitzen. In diesem Sinne ist es wesentlich, dass die Spielumgebungen

(1) zu den subjektiven Erfahrungsbereichen der Kinder passen, so dass die lebensphasenspezifischen Lernpotentiale individuell auch berücksichtigt werden; oder mit den Worten von Winter (1976, 339): „Was ein Kind überfordern kann, ist ja nicht eine „schwierige“ Aufgabe, sondern eine Aufgabe, die keinen intuitiven Untergrund hat.“

(2) zur narrativen Argumentation über erkundete mathematische Strukturen auffordern, die im Diskurs mit anderen reflektierend und antizipierend betrachtet werden. Dies sind insbesondere Situationen, die vom Fach aus „produktiv irritieren“ (Nührenbörger & Schwarzkopf 2013) oder mit den Worten von Winter

(1976) „zum Fragen, Beobachten, Nachdenken anreizen, also eine Lücke, eine Störung, eben etwas Fragwürdiges enthalten.“ Solche Anlässe zum Begründen und elementaren Beweisen können sowohl fachlich als auch sozial intendiert sein.

*Lernsituationen, die vielschichtig durchgespielt werden*: Spielumgebungen sollten vielfältige, mehrdeutige mathematische Betrachtungen und Zugänge für die Kinder zulassen. Denn die Nutzung von anschauungsgestützten und anwendungsorientierten Lernsituationen muss bewusst gelernt werden, indem die Kinder „(...) ein neues `Sehverstehen´ entwickeln“ (Söbbeke & Steinbring 2007, 67). Dieses Sehverstehen nimmt die strukturelle Deutung von Objekten und deren numerische Beziehungen untereinander in den Blick und entsteht in gemeinsamen mathematikhaltigen Erzählungen der Kinder untereinander und mit begleitenden Erzieherinnen oder Lehrkräften.

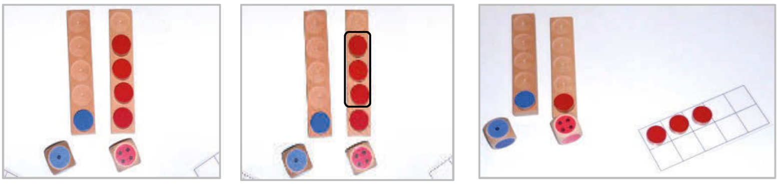
*Lernsituationen, die vielfältig verknüpft werden*: Damit gewonnene mathematische Erkenntnisse nicht wirkungslos bleiben, sondern auf unterschiedliche, ähnlich angelegte Situationen übertragen werden können, sollte eine Spielumgebung nicht für sich alleine stehen, sondern im operativen Sinne mit anderen verbunden werden. Neben dieser horizontalen Verknüpfung von strukturgleichen Lernsituationen, sollten diese auch vertikal hinsichtlich des Spiralcurriculums und der Anschlussfähigkeit zwischen Elementar- und Primarbereich verwoben sein. Unter Berücksichtigung der institutionell gebundenen Spiel- und Unterrichtskonzepte sind die Lerninhalte aufeinander zu beziehen. Wesentliche Anknüpfungspunkte bieten die Grundideen der Mathematik, die auf einen systematischen Aufbau mathematischen Wissens zielen.

Im Folgenden wird an einem Beispiel kurz aufgezeigt, wie eine entsprechende Spiel- und Lernumgebung gestaltet werden kann, so dass die Kinder im mathematischen Spiel ihre numerische Bewusstheit zu den unterschiedlichen Zeitpunkten in den verschiedenen Institutionen Kita und Schule weiter entwickeln können. In der Kita werden hierzu mathematische Erfahrungen an den Materialien ermöglicht. Allerdings ist dieses Spiel nicht auf ein Regelspiel reduziert, in dem gezählt oder gewürfelt wird. Vielmehr ist die substantielle Spielumgebung mit den Lernumgebungen in der Grundschule verwoben. Das

Verständnis des Spiels als exploratives Handeln mit dem Material verbindet die Aktivitäten in Kita und Grundschule (vgl. Nührenbörger & Tubach 2012). Die mathematische Erkundung in der Grundschule geschieht auf komplementäre Weise in fortschreitenden, eher symbolisch-strukturierten Lernkontexten, die explizite Arbeitsaufträge, Spielprotokolle und Reflexionsgespräche beinhalten.

*„Wer hat mehr?“* Die Spiel- und Lernumgebung „Wer hat mehr?“ (vgl. Nührenbörger & Tubach 2014) thematisiert die Bedeutung der Zahl „5“ (vgl. Krauthausen 1995) als dekadische Strukturierungshilfe (jedes Kind erhält einen 5er-Block, ein 10er-Feld und einen Würfel mit den Augenzahlen 0-5), die in der Kita angebahnt und in der Grundschule systematisch weiter erkundet werden kann (s. Abb. 1).

*Spielregel*: Zwei Spieler würfeln und legen die Anzahl an Plättchen entsprechend der gewürfelten Augenzahl in ihren 5er-Block. Der Spieler mit der größeren Anzahl an Plättchen darf die Menge an Plättchen, die er mehr hat, nehmen und auf sein 10er-Feld legen. Anschließend werden die 5er-Blöcke geleert und es darf erneut gewürfelt werden. Der Spieler, der als erstes sein 10er-Feld voll hat, hat gewonnen.



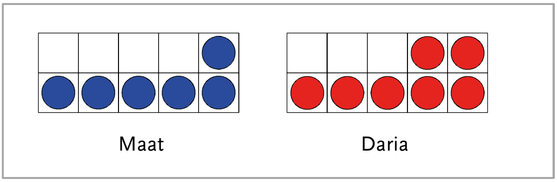
Die Plättchen werden entspr. der Augenzahl in die 5er-Blöcke gelegt. | Vergleich: Es sind 3 rote Plättchen mehr. | Der (rechte) Spieler darf die 3 Plättchen nehmen und auf sein 10er-Feld legen.

Abb. 1 Würfeln und Vergleichen

*Lernchancen:* Kern des Spiels ist zweierlei; zum einen der Vergleich zweier Mengen und die Bestimmung des Unterschiedes, so dass Einsichten in die Differenzbeziehung zweier Zahlen gewonnen werden; zum anderen die Orientierung im kleinen Zahlenraum mit Bezug auf dekadische Strukturierungen, so dass Einsichten in die Zerlegung und Zusammensetzung von Zahlen gewonnen werden.

## 3 Rekonstruktive Mathematikdidaktik: Erkundungen von numerischer Bewusstheit bei Kindern

In der Kita können über das Abzählen Einblicke in die Referenzvielfalt der Zahlen gewonnen werden, die als Würfelzahl, Felderanzahl oder Differenz zwischen zwei Zahlen repräsentiert werden. Darüber hinaus zielen die Aktivitäten der Kinder darauf, die sich im Laufe des Spiels zeigenden Veränderungen der Unterschiede reflektierend und antizipierend in den Blick zu nehmen. Anhand eines Beispiels sollen verschiedene Zugangsweisen zur Entwicklung numerischer Bewusstheit im Rahmen der Spielumgebung in der Kita sowie im Unterschied zur Lernumgebung in der Grundschule aus der Perspektive der Lernenden herausgearbeitet werden.



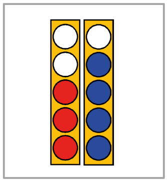



Abb. 2a Spielstand zu Beginn der Szene

Abb. 2b Zahlvergleich (3 u. 4)

Die beiden Kinder Maat und Daria haben bereits mehrere Plättchen im Spielverlauf gesammelt (s. Abb. 2a). Ihre Kollektionen betrachtend erwähnen sie kurz, wie viele Plättchen ihnen noch fehlen, bis sie ihr 10er-Feld voll haben. Die jeweiligen Differenzen („4“ bzw. „3“) werden zufällig auch von den Kindern gewürfelt. Maat erkennt im Vergleich der Anzahlen (s. Abb. 2b), dass er „einen mehr“ hat und legt diesen in sein Feld. Er nimmt dann die Verringerung des Unterschieds in den Blick und erläutert, dass ihm nun nur noch drei Plättchen fehlen; arithmetisch gesprochen: $4=10-6$ und $(10-6)-1=10-(6+1)=3$. In der Grundschule könnten sich an diesen Erkundungen $[(a-x)-1=a-(x+1)]$ operative Serien in Form sog. schöner Päckchen auf ikonischer und symbolischer Ebene anschließen, die für das mathematikhaltige Spiel in der Kita unzugänglich bleiben: $10=10-0$ / $9=10-1$ … $4=10-6$ / $3=10-7$ … .

Im weiteren Verlauf würfelt Maat eine „2“. Während er die Anzahl an Plättchen in seinen 5er-Block legt, würfelt Daria die Augenzahl „4“. Den Wurf von Maat betrachtend korrigiert sie ihren Wurf auf „5“, um so die Differenz „3“ zu erzeugen. An dieser Stelle wird sie von der begleitenden Erzieherin ermahnt, korrekt zu würfeln. Daria würfelt nach kurzem Protest noch einmal und erzielt eine 2. Analysiert man die Szene weniger aus spielpädagogischer Perspektive, dann wird deutlich, dass hier der soziale Kontext des Spiels zum „zwingenden Anlass“ wird, dass sich Daria antizipierend mit der gezielten Herstellung der Differenz 3 auseinandersetzt: Die Differenz zwischen „4“ und „2“ kann (um eins) erhöht werden, wenn „4“ (um eins) erhöht wird: $(4+1)-2=(4-2)+1$. Diese immanente Exploration der Spielsituation tritt auch am Ende des Spiels auf, als zunächst die Würfelwürfe „2“ und „1“, anschließend „4“ und „2“ verglichen werden. Maat erkennt schnell, dass die Verdopplung der Augenzahlen auch eine Verdopplung der Differenz zu Folge hat: $(2+2) - (1+1) = 1+1$.

In der Grundschule können die Spielerfahrungen der Kinder aufgegriffen werden, indem nun systematisch und mit Hilfe symbolischer Repräsentationen Würfelergebnisse abgebildet und verglichen sowie letztlich auch geordnet werden. So kann beispielsweise die Konstanz der Differenz über die Erkundung gleicher Differenzen zwischen Zahlenpaaren auf elementar-arithmetischer Ebene dargestellt und erläutert werden (z. B. $3 = 3-0=4-1=5-2=\ldots$).

## 4 Resümee

Die Auseinandersetzung mit mathematischen Lernprozessen in der Kita birgt stets die Gefahr, den Kindern eine Vielzahl an Kompetenzen – zuweilen eingebettet in Entwicklungsstadien – zuzusprechen, wenn diese auf informelle Weise spiel- oder alltagsgebunden mathematische (Problem-)Situationen lösen. Aus mathematikdidaktischer Sicht erscheint es aber wesentlich, differenziert zu analysieren, inwiefern die mathematischen Aktivitäten einerseits mit tragfähigen mathematischen Ideen verwoben sind, die in der Grundschule formalisiert werden, und andererseits zugleich dem eigenständigen Charakter der Institution Kita gerecht werden. Hierbei ist für mathematische Lernprozesse im Übergang von der Kita zur Grundschule nicht allein das Handeln mit den gleichen Objekten oder Situationen in beiden Einrichtungen wesentlich. Vielmehr scheint die Etablierung mathematikhaltiger Erzählanlässe im Kontext explorativer Lernsituationen geeignet zu sein, die zum mathematischen Spielen herausfordern, die vielfältig durchgespielt und vielschichtig vernetzt werden können. So können die vorschulischen Lernerfahrungen mit den in der Schule angestrebten mathematischen Kompetenzen verknüpft werden, ohne diese gleichzusetzen. Das Konstrukt „numerische Bewusstheit“ umspannt die kindlichen arithmetischen Fähigkeiten und Kenntnisse vom Zählen über das zählende Rechnen bis hin zum rechnenden Zählen (vgl. Wittmann & Müller 2009).

Anschlussfähigkeit aus mathematikdidaktischer Sicht meint daher, dass in der Kita Kinder mathematische Strukturen im Rahmen von substantiellen Alltags- und Spielumgebungen erkunden und erläutern, sich ihrer bewusst werden. Denn dadurch gewinnen sie „Spielraum“ zum Mehr-Deuten von Zahlen und konkreten Operationen, die von Kontext zu Kontext variieren können. Hingegen wird Mathematik in der schulischen Lernumgebung als Spiel bewusst fokussiert und differenziert betrachtet. Den Grundschulkindern eröffnet sich ein mathematischer „Erkundungsraum“, in dem sie mathematische Zeichen für Zahlen und Operationen strukturell nutzen und reflektieren lernen.

## Literatur

Floer, J. & Schipper, W. (1975). Kann man spielend lernen? Eine Untersuchung mit Vor- und Grundschulkindern zur Entwicklung des Zahlverständnisses. Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule (3), 241-252.

Freudenthal, Hans (1981). Kinder und Mathematik. Grundschule 13(3), 100-102.

Gasteiger, H. & Benz, Ch. (2012). Mathematiklernen im Übergang - kindgemäß, sachgemäß und anschlussfähig. In S. Pohlmann-Rother & U. Franz (Hrsg.). Kooperation von KiTa und Grundschule (S. 104-120). Köln: Carl Link-Verlag.

Gasteiger, H. (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster: Waxmann.

Ginsburg, H. P. (2006). Mathematical play and playful mathematics: A guide for early education. In D. Singer, R. M. Golinkoff & K. Hirsh-Pasek (Hrsg.), Play = Learning: How play motivates and enhances children's cognitive and social-emotional growth (S. 145-165). New York: Oxford University Press.

Golinkoff, R.M., Hirsh-Pasek, K., Berk, L.E. & Singer, D.G. (2009). A Mandate for Playful Learning in Preschool: Presenting the Evidence. New York: Oxford University Press.

Krauthausen, G. (1995). Die "Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.). Mit Kindern rechnen (S. 87-108). Frankfurt am Main: Der Grundschulverband.

Krummheuer, G. (1997). Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2010). Die Entwicklung mathematischen Wissens in sozial-interaktiven Kontexten. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Hrsg.), Mathematik im Denken der Kinder (S. 73-81). Seelze: Klett-Kallmeyer.

Nührenbörger, M. & Tubach, D. (2012). Mathematische Lernumgebungen. Komplementäre Lerngelegenheiten in Kita und Grundschule. Die Grundschulzeitschrift 26(255/256), 87-89.

Nührenbörger, M. & Tubach, D. (2014) (eingereicht). Verständnis mathematischer Zusammenhäge bei Kindern am Ende der Kita und zu Beginn der Grundschule. Zeitschrift für Grundschulforschung 7(1).

Oerter, R. (2006). Spielen und lernen. Elemente einer Spielpädagogik in der Schule. Schulmagazin 5 bis 10 74(7-8), 5-8.

Rechsteiner, K., Hauser, B. (2012). Geführtes Spiel oder Training? Förderung mathematischer Vorläuferfertigkeiten. Die Grundschulzeitschrift 26 (258/259), 8-10.

Schipper, W. (1998). Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen - Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), Das besondere Kind im Mathematikunterricht (S. 119-140). Offenburg: Mildenberger.

Schwarzkopf, R. (2006). Elementares Modellieren in der Grundschule. In A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann & S. Prediger (Hrsg.), Realitätsnaher Mathematikunterricht (S. 95-105). Hildesheim: Franzbecker.

Schuler, S. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Münster: Waxmann.

Selter, Ch. (1995). Zur Fiktivität der "Stunde Null" im arithmetischen Anfangsunterricht. Mathematische Unterrichtspraxis II/1995, 11-19.

Söbbeke, E. & Steinbring, H. (2007). Anschauung und Sehverstehen – Grundschulkinder lernen im Konkreten das Abstrakte zu sehen und zu verstehen. In J.H. Lorenz & W. Schipper (Hrsg.). Hendrik Radatz: Impulse für den Mathematikunterricht (S. 62-68). Braunschweig: Schroedel.

Sophian, C. (2008). Rethinking the starting point for mathematics learning. In O. N. Saracho (Hrsg.), In Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education (S. 21-44). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Steinbring, H. (1999). Die künstlichen Objekte der Mathematikdidaktik und ihr theoretischer Charakter. In Ch. Selter, G. Walther (Hrsg.), Mathematikdidaktik als design science. Leipzig: Klett.

Steinbring, H. (2001). Der Sache mathematisch auf den Grund gehen – heißt Begriffe bilden. In Ch. Selter & G. Walter (Hrsg.), Mathematik und gesunder Menschenverstand (S. 174-183). Leipzig: Klett.

Steinweg, A.S. (2001). Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Münster.

van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. Educational Studies in Mathematics 74(1), 23-37.

Winter, H. (1976). Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschuzle. Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 337-353.

Winter, H. (1994). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. Grundschule 26(3), 10-13.

Wittmann, E.Ch. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K.P. Müller (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 528-531). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E.Ch. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker & H.-G. Roßbach (Hrsg.), Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich (S. 49-63). Klinkhardt: Bad Heilbrunn.

Wittmann, E.Ch. (2006). Mathematische Bildung. In L. Fried & S. Roux (Hrsg.), Handbuch der Pädagogik der frühen Kindheit (S. 205-211). Beltz: Weinheim.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2009). Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm. Klett: Leipzig.

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger
Technische Universität Dortmund
Fakultät Mathematik
Institut für Entwicklung
und Erforschung des Mathematikunterrichts
44221 Dortmund
Marcus.Nuehrenboerger@math.tu-dortmund.de

## Vernetzen als durchgängiges Prinzip – Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

von Jürgen Roth

*Vernetzung spielt im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle, wenn es etwa darum geht Beziehungen zwischen Inhaltsbereichen zu erfassen oder herzustellen und gelerntes Wissen sowie erarbeitete Fähigkeiten anzuwenden. Im Mathematik-Labor der Universität Koblenz-Landau (www.mathe-labor.de) können Schulklassen an anhand von enaktiv nutzbaren Materialien, Videos und Computersimulationen die mathematischen Strukturen von Phänomenen erforschen. Dabei werden Vernetzungen auf verschiedensten Ebenen (Medien, Lernorte, Nutzergruppen, Zugangsweisen, Lehre-Forschung-Praxis u.a.) umgesetzt bzw. angestoßen.*

Schlüsselwörter: Vernetzung, Schülerlabore Mathematik, forschendes Lernen, Lernumgebungen

### 1 Vernetzen – Beziehungen bewusst herstellen oder suchen

Für die Mathematik als die Wissenschaft von Mustern (vgl. Devlin 1998, S. 3-4) und Strukturen ist es charakteristisch, dass sie nach Beziehungen zwischen Phänomenen sucht oder diese bewusst herstellt. Wenn der Mathematikunterricht ein authentisches Bild von Mathematik vermitteln will (vgl. Vollrath und Roth, 2012, S. 24ff), muss er folglich in allen Schulstufen und Schulformen in diesem Sinn vernetzen. Daneben ist es für den Lernerfolg wesentlich, Beziehungen zwischen den verschiedenen Inhaltsbereichen zu erfassen oder herzustellen und gelerntes Wissen sowie erarbeitete Fähigkeiten anzuwenden. Darüber hinaus ist es beim Verständnisaufbau vorteilhaft, wenn Beziehungen zwischen Phänomenen, Darstellungen, Begriffen, Konzepten, Kontexten u.a. hergestellt oder zumindest gezielt gesucht werden. Ein geeigneter, vernetzter Medieneinsatz von enaktiv nutzbaren Materialien, Simulationen auf der Basis von dynamischen Mathematiksystemen und ggf. Videos kann die Entwicklung des Verständnisses der mathematischen Grundlagen von Phänomenen unterstützen. Wenn Schüler/innen an Lernumgebungen, die diese Aspekte berücksichtigen, in Gruppen forschend lernen, fördert dies – auch durch die Vernetzung der individuellen Perspektiven und Fähigkeiten – den Erkenntnisgewinn nachhaltig. Es ist zum Teil mit einigem Aufwand verbunden solche Vernetzungen im Unterricht umzusetzen. Dazu sind geeignete Unterrichtskonzepte, die Verfügbarkeit adäquater Medien und Materialien sowie strukturelle Rahmenbedingungen notwendig. Dies kann Lehrkräfte vor große Herausforderungen stellen. Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr" am Institut für Mathematik der Universität Koblenz-Landau, das als Schülerlabor Mathematik konzipiert ist, wird dieses Vernetzen in vielfältiger Weise angeregt und umgesetzt. Zur Einordnung des Begriffs „Schülerlabor Mathematik" sei auf eine von Baum, Roth & Oechsler (2013, S. 9) angegebene Definition verwiesen:

*„Schülerlabore Mathematik (SLM) sind außerschulische Lernstandorte mit vorstrukturierten, regelmäßig einsetzbaren Lernumgebungen in festen Räumen, in denen Schüler/innen unter expliziter Zielsetzung selbstständig, handlungsorientiert und experimentell mathematische Grundlagen und Zusammenhänge an Phänomenen in einem begrenzten Zeitrahmen entdecken, erarbeiten und durchdringen können, ohne dabei dem für den Lernort Schule typischen Leistungsdruck zu unterliegen."* (Baum et al., 2013, S. 9)

Um die Arbeit im Schülerlabor sinnvoll mit dem schulischen Unterricht zu vernetzen, arbeiten die Schüler/innen in den Labor-Lernumgebungen an Lehrplanthemen. Lehrkräfte werden durch Anregungen und Materialien dabei unterstützt, die Laborarbeit über geeignete Vor- und Nachbereitung organisch in den Unterricht zu integrieren. Während ihren Klassen im Mathematik-Labor arbeiten, können Lehrkräfte ihre Schüler/innen bei der Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen beobachten. Dies ermöglicht es ihnen sich einerseits mit vernetzenden Lernumgebungen vertraut zu machen und eröffnet ihnen andererseits den Freiraum, sich diagnostisch mit den Arbeits- und Denkweisen ihrer Schüler/innen auseinandersetzen. In analoger Weise wird das Mathematik-Labor in Landau auch genutzt um in speziellen Pflichtseminaren für Lehramtsstudierende im Master of Education Mathematik fachmathematische, fachdidaktische und bildungswissenschaftliche Ausbildungsanteile der Studierenden praxisbezogen zu vernetzen. Lehramtsstudierende entwickeln hier praxisrelevante Lernumgebungen für das Mathematik-Labor, vertiefen ihre diagnostischen Fähigkeiten bei der Durchführung der Laborstationen mit Schüler/innen und erhalten darüber hinaus Einblicke in qualitative und quantitative Methoden der fachdidaktischen Forschung. Am Beispiel der Laborstation „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ wird exemplarisch ein fächerverbindender Aspekte und damit eine weitere Vernetzungsmöglichkeit aufzeigt. Wesentlich an Schülerlaboren ist auch, dass sie ideale Forschungsrahmenbedingungen ermöglichen. Hier kann es gelingen Didaktiker/innen, Bildungswissenschaftler/innen, Lehrer/innen, Fachleiter/innen, Studierende und Schüler/innen zusammenzubringen – also zu vernetzen – um die empirische Unterrichtsentwicklungsforschung gemeinsam voranzutreiben. Im klar umrissenen Rahmen der Laborarbeit an fachdidaktisch gestalteten Lernarrangements bietet sich die Möglichkeit die vielfältigen Beziehungen zwischen verschiedenen Aspekten von Lernprozessen zueinander in Beziehung zu setzen und gezielt zu erforschen. Diese Vernetzungen auf ganz verschiedenen Ebenen im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ werden im Folgenden anhand von Beispielen exemplarisch erläutert.

## 2 Das Konzept des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ – Vernetzende Lernumgebungen zum forschenden Lernen

Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ sollen Schüler/inne/n authentische Erfahrungen mit der Mathematik ermöglicht werden, indem sie sich anhand von Arbeitsaufträgen selbständig forschend mit enaktiv nutzbaren Materialien und Simulationen auseinandersetzen. Sie arbeiten also im Sinne des forschenden Lernens.

### 2.1 Forschendes Lernen

Roth und Weigand 2014 erläutern ein Modell des forschenden Lernens (vgl. Abb. 1). In diesem Modell lässt sich der Prozess des forschenden Lernens durch drei untereinander vernetzte Phasen beschreiben, die durch die Konfrontation von Lernenden mit einem für sie subjektiv neuen mathematischen Phänomen angestoßen werden.

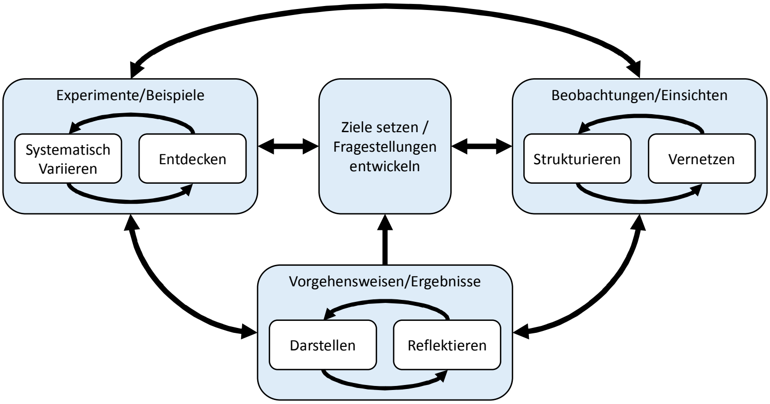



Abb. 1 Modell des forschenden Lernens (vgl. Roth & Weigand 2014)

Voraussetzung dafür ist, dass sich Lernende bzgl. der Durchdringung dieses Phänomens *Ziele setzen und Fragestellungen entwickeln* oder sich zumindest auf von außen gesetzte Ziele und Fragestellungen einlassen. Diese Fragestellungen lassen sich anhand von Experimenten bzw. Beispielen untersuchen. Dazu werden die *Experimente bzw. Beispiele systematisch variiert* und die dabei auftretenden Phänomene genau beobachtet. Dies kann dazu führen, dass die Schüler/innen für sie *subjektiv Neues entdecken*. Zur genaueren Untersuchung dieser entdeckten Phänomene können weitere systematische Variationen im Experiment bzw. Beispiel hilfreich sein. Diese Phase ist eng verknüpft mit der Phase in der gewonnenen *Beobachtungen bzw. Einsichten* im Sinne der Mathematik als der Wissenschaft von Mustern und Strukturen bewusst *strukturiert* werden. Dabei werden Beziehungen zwischen den Beobachtungen untersucht und zugrunde liegende Muster herausgearbeitet. Dieses Strukturieren innerhalb der Beobachtungen und Einsichten kann dazu führen, dass die hier gemachten Erfahrungen *mit dem Vorwissen* in Beziehung gesetzt, also *vernetzt* werden. Diese Vernetzung ist wesentlich für den Lernprozess und kann wieder dazu führen, die gemachten Beobachtungen und gewonnenen Einsichten noch einmal neu aus der Perspektive der Vorerfahrungen und des Vorwissens zu strukturieren. Forschendes Lernen kann nur dann gewinnbringend sein, wenn diese beiden Phasen übergehen in die Phase, in der die *Vorgehensweisen und Ergebnisse* *dargestellt* werden. Erst auf der Basis von Ergebnissen, die mit adäquaten externen Repräsentationen festgehalten wurden, ist eine fundierte Reflexion möglich, die ggf. zu einer verbesserten bzw. veränderten Darstellung führt. Für das Weiterarbeiten mit dem Gelernten ist es notwendig, dass in dieser Phase nicht nur Ergebnisse sondern auch Vorgehensweisen festgehalten werden. Nur so kann das forschend Erarbeitete verständnisbasiert weiterverwendet werden und bleibt zugänglich. Ohne dieses *Darstellen und Reflektieren der Ergebnisse und Vorgehensweisen* werden die oben genannten Tätigkeiten im Rahmen des forschenden Lernens oft ohne Lernwirkung bleiben. Darüber hinaus stößt es ggf. die anderen Phasen des forschenden Lernens neu und vertieft an. Alle Phasen des forschenden Lernens können direkt dazu führen, dass sich die Schüler/innen neue Ziele oder zumindest leicht variierte Zwischenziele setzen. Auf diese Weise wird der Prozess des forschenden Lernens im Sinne eines Regelkreises von den Lernenden selbstbestimmt vorangetrieben.

## 2.2 Vernetzende Lernumgebungen zum forschenden Lernen

Wie aus der Beschreibung in Abschnitt 2.1 deutlich wird, muss die Fähigkeit zum forschenden Lernen bei Schüler/innen zunächst entwickelt werden. Dazu benötigen sie Unterstützung, die im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ durch die Gestaltung der Labor-Lernumgebungen erfolgt, die nach festen Prinzipien gestaltet sind (vgl. Roth, 2013). Die Schüler/innen arbeiten grundsätzlich in Vierergruppen selbständig an schriftlichen Arbeitsaufträgen. Sie setzen sich dabei mit Materialien, gegenständlichen Modellen, Simulationen und ggf. Videos auseinander, rufen bei Bedarf die zur Verfügung gestellten Hilfestellungen ab, kommunizieren in der Gruppe über ihre Beobachtungen, strukturieren und dokumentieren ihre Arbeitsprozesse sowie -ergebnisse und reflektieren diese.

Die Schüler/innen arbeiten in anhand von Arbeitsheften, die Aufgabenstellungen umfassen und gleichzeitig als individuelle Laborprotokolle dienen, in die Ergebnisse und Vorgehensweisen eingetragen werden (vgl. Abb. 2). Deren Darstellung und die notwendigen Reflexionen werden im Arbeitsheft explizit eingefordert.

Abb. 2 Schülergruppe im Mathematik-Labor "Mathe ist mehr"

Im Projekt „ProLab – Protokollieren im Labor“, an dem das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ und die Nawi-Werkstatt in Landau beteiligt sind, konnten Engl et al. (2014) nachweisen, dass bereits diese Vorgehensweise zu einer Verbesserung der Darstellungskompetenz führt. Wenn Schüler/innen zunächst an einer Station des Mathematik-Labors arbeiten und anschließend in der Nawi-Werkstatt chemische Experimente durchführen, sind sie dort signifikant besser in der Lage ihre Ergebnisse zu protokollieren als Schüler/innen, die vorher das Mathematik-Labor nicht besucht haben.

### *2.2.1 Selbständig arbeiten – Zugangsweisen vernetzen*

Die Schüler/innen arbeiten im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ selbständig anhand von schriftlichen Arbeitsaufträgen. Für eine authentische Erfahrung mit der Mathematik und die Entwicklung einer forschenden Arbeitshaltung ist es wesentlich, dass die Anleitungen nicht durch Lehrpersonen erfolgen. Nur wenn Schüler/innen auf sich selbst gestellt sind, besteht wirklich die Möglichkeit, dass sie sich den Gegenständen selbständig-forschend nähern und sie explorieren. Andernfalls stellt sich schnell die Haltung ein, auf Inputs von Lehrkräften zu warten. Die von Schüler/innen gewünschte Unterstützung durch Betreuer im Mathematik-Labor muss sich insofern auf Motivations-, Rückmelde- sowie ggf. allgemeinstrategische Hilfen beschränken und sollte keine inhaltlichen Hilfen umfassen. So können die Schüler/innen Eigenverantwortung und Selbstregulation aufbauen und sich in der Gruppe gegenseitig beim Forschen unterstützen. Auf diese Weise haben die Schüler/innen die Chance ihre jeweils eigenen Vorstellungen einzubringen. Dies kann dazu führen, dass die individuellen Zugangsweisen von den anderen Schüler/innen wahrgenommen, diskutiert, untersucht und so produktiv vernetzt werden. Um diese selbständige Arbeit der Schüler/innen zielführend zu gestalten, wird eine Reihe von Maßnahmen umgesetzt.

### *2.2.2 Vernetzung von Medien und Materialien*

Durch das Zusammenwirken und Vernetzen verschiedener Medien ergeben sich wesentliche Impulse für eine schülerzentrierte, eigenständige Erarbeitung von mathematischen Inhalten. Ein geeigneter, individuell verantworteter Einsatz verschiedener Medien kann eine entscheidende Komponente bei Problemlöse- und Forschungsprozessen sein. Im Mathematik-Labor werden auf der Basis des dynamischen Mathematiksystems GeoGebra erzeugte Simulationen, Materialien und gegenständliche Modelle sowie natürlich „Papier und Bleistift“ als Medien eingesetzt. Vereinzelt kommen Videos hinzu, die in der Regel den Einstieg in einen Phänomenbereich beim forschenden Lernen erleichtern sollen. Die Medien stehen als Angebote zur Verfügung. Die Schülerinnen können selbst entscheiden, ob und ggf. welche sie zur Problemlösung nutzen wollen. Es ist ein wesentliches Ziel, dass die Schüler/innen einer Arbeitsgruppe sich über die Phänomene die sie erforschen intensiv austauschen. Aus diesem Grund gibt es für die vier Schüler/innen einer Arbeitsgruppe jeweils nur einen Laptop. Sie müssen also gemeinsam planen und entscheiden, welche Veränderungen an einer Simulation vorgenommen werden und wie die beobachteten Konsequenzen daraus zu interpretieren sind. An der Station „Mathematik und Kunst“, in der es um den Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und das inhaltlich-anschauliche Arbeiten mit Brüchen geht (vgl. Schumacher & Roth, 2013) wird z. B. mit geometrischen Strukturen von Kunstwerken der konkreten Kunst und Puzzles dieser Kunstwerke (vgl. Abb. 3) gearbeitet.

Abb. 3 Links: Max Bill „progression in 5 quadraten“ (Nachkonstruktion: Stefan Schumacher); Rechts: Puzzle des Kunstwerks „komplementär-rotation“ von Max Bill

Enaktiv nutzbare Materialien haben sich als fruchtbar für den experimentellen Zugang zu inhaltlichen Aspekten des betrachteten Phänomens erwiesen. Simulationen spielen ihre Stärken insbesondere dann aus, wenn Schüler/innen Beziehungen zwischen dem betrachteten Phänomen und dem mathematischen Gehalt herausarbeiten. Dazu kann gerade die Möglichkeit zum bewussten Ansteuern von Spezial- oder Grenzfällen beitragen, die mit gegenständlichen Modellen häufig gar nicht oder nur umständlich realisierbar wären. So lassen sich Vermutungen überprüfen, die sich aus dem Arbeiten mit dem enaktiv handhabbaren Material ergeben haben und neue Hypothesen aufstellen. Dabei ist es u. a. hilfreich, dass in Simulationen Fokussierungshilfen (z. B. farbliche oder gestalterische Hervorhebungen wesentlicher Aspekte) realisierbar sind, die ein- und wieder ausgeblendet werden können. Manchmal ist eine Simulation aber auch notwendig, wenn ein verstehensbasierter Prozess mit Materialien auf die Dauer sehr aufwändig oder nur für spezielle Fälle durchführbar ist. Hier können Simulationen dazu beitragen, das Wesentliche eines Phänomens durch systematisches Variieren des Beispiels zu erfassen. Ein Grundverständnis zur Addition von ungleichnamigen Brüchen lässt sich etwa mit Faltquadraten erarbeiten (vgl. Abb. 4). Das Falten für verschiedenste Zahlenwerte ist allerdings nicht praktikabel.

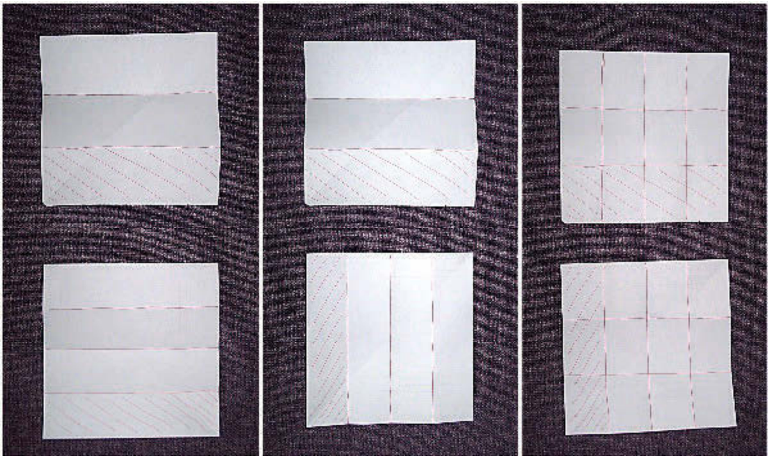


Abb. 4 Brüche mit Hilfe von Faltquadraten addieren

Hier setzt der Nutzen der Simulation ein. Es können nahezu beliebige Brüche realisiert werden und die Grundidee des Verfeinerns der Unterteilung bis eine gemeinsame Einteilung bei beiden Brüchen vorliegt, lässt sich gut erarbeiten (vgl. Abb. 5). Die Beziehung zwischen diesem qualitativen Grundverständnis und der „quantitativen“ Darstellung der Bruchzahlen und ihrer Erweiterungen steht hier durchgängig im Mittelpunkt. Die Grundidee muss bei jeder konkreten Bearbeitung wieder umgesetzt, auf diese Weise wiederholt und so vertieft werden. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit Rückmeldehilfen zu einzelnen Schritten der Bearbeitung direkt in der Simulation zu geben. Durch das Vernetzen des Arbeitens mit enaktiv nutzbaren Materialien und Simulationen können beide Repräsentationsformen ihren jeweiligen Nutzen voll ausspielen.

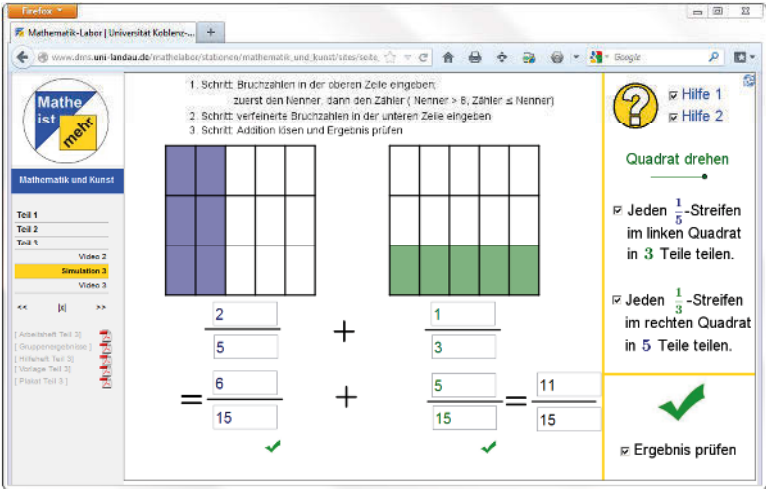



Abb. 5 Simulation (vgl. Schumacher & Roth, 2013)

Über diese Materialien hinaus ist es notwendig den Prozess des forschenden Lernens auch außerhalb der Simulationen durch abrufbare Hilfen zu unterstützen. Dazu liegen in jeder Laborlernumgebung Hilfehefte bereit, die bei Bedarf von den Schülerinnen und Schülern genutzt werden können. Sie bieten gestufte Hilfen bestehend aus weiterführenden Fragen, Anregungen zum Weiterfragen bzw. Informationen zu evtl. fehlendem Grundwissen. Neben der regelmäßigen Aufforderung in den individuellen Arbeitsheften, Vorhersagen zu treffen und diese Vorhersagen am Experiment zu überprüfen, gibt auch ein gemeinsames Heft „Gruppenergebnisse“. Jeweils nach erarbeiteten Sinnabschnitten werden die Schüler/innen aufgefordert, sich die Ergebnisse und Vorgehensweisen gegenseitig in der Gruppe zu erklären und gemeinsam im Heft „Gruppenergebnisse“ festzuhalten. Dieses Heft wird eingescannt und steht den Schüler/innen für das Weiterarbeiten im schulischen Mathematikunterricht zur Verfügung. Es ist damit Instrument, das verschiedenen Aufgaben erfüllt: Mit seiner Hilfe können die verschiedenen Perspektiven der Schüler/innen auf das untersuchte Phänomen berücksichtigt und so vernetzt werden, es dient der rückblickenden Reflexion der Vorgehensweisen sowie der Ergebnisse und stellt ein erstes Element zur Vernetzung der Lernorte dar.

### *2.2.3 Lernorte vernetzen*

Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ setzt auf Breitenförderung in Mathematik. Um dies zu erreichen und im Sinne der Unterrichtsentwicklung zu wirken, werden alle Materialien zu den Laborstationen über die Internetseite des Labors über www.mathe-labor.de zur Verfügung gestellt. Dort sind nicht nur alle Arbeits- und Hilfehefte abrufbar, sondern auch die „Gruppenergebnisse“, Simulationen und Materiallisten. Auf diese Weise ist es für Lehrkräfte möglich, Ideen aus dem Mathematik-Labor auch direkt im Unterricht umzusetzen und ggf. an die Klassensituation und die eigene Unterrichtsgestaltung anzupassen. Schüler/innen können nach einem Besuch des Mathematik-Labors alle Materialien auch zuhause nutzen, etwa zum Nacharbeiten und Wiederholen. Darüber hinaus werden den Lehrkräften, die das Mathematik-Labor mit ihren Klassen besuchen, über diese Seite Informationen zum Konzept des Mathematik-Labors, zu den Zielen jeder Laborstation und zum notwendigen Vorwissen der Schüler/innen für eine gewinnbringende Nutzung der jeweiligen Laborstation zur Verfügung gestellt. Darüber hinaus gibt es bei den einzelnen Stationen Materialangebote und Hinweise zur Weiterarbeit am Thema im Unterricht und zum Teil auch Aufgaben, die im Sinne der Diagnose der im Mathematik-Labor von ihren Schüler/inne/n erreichten Lernergebnisse eingesetzt werden können. In Vorgesprächen werden diese Materialien jeweils vorgestellt und mit den begleitenden Lehrkräften diskutiert. Diese Vernetzung der Arbeit im Schülerlabor mit dem schulischen Mathematikunterricht ist uns besonders wichtig, weil Untersuchungen aus anderen Schülerlaboren gezeigt haben (vgl. etwa Schmidt et al., 2011), dass Schülerlaborarbeit nur so effektiv ist, wie die Vor- und Nachbereitung im Unterricht. Eher negative empirische Befunde zur Lernwirksamkeit sind gerade auch auf mangelnde Einbindung in den Unterricht zurückzuführen. Eigene Vergleichsuntersuchungen zeigen dagegen: Schüler/innen, die im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ ein Inhaltsgebiet des Lehrplans selbständig forschend bearbeitet haben, zeigen eine mindestens genauso große inhaltliche Leistungsentwicklung bei diesem Thema, wie Schüler/innen, die im schulischen Mathematikunterricht, im selben Zeitumfang und zum selben Thema eher lehrerzentriert durch die eigene Lehrkraft unterrichtet werden (Dexheimer, 2012, S. 64; Schumacher & Roth, 2013). Wenn man bedenkt, dass die Schüler/innen im Mathematik-Labor eine für sie ganz neue Lernumgebung vorfinden und hier neben dem Lernen der Fachinhalte eine ganze Reihe von Prozesskompetenzen angestoßen und (weiter-)entwickelt werden, ist dies als ermutigendes Ergebnis zu werten. Es zeigt, dass der eingeschlagene Weg in die richtige Richtung führt.

#### *2.2.4 Vernetzen durch fächerübergreifendes Arbeiten*

Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ ist es vergleichsweise einfach fächerübergreifend zu arbeiten. Es stehen Laptops sowie sonstige Arbeitsmaterialien griffbereit zur Verfügung. Die Stationen und sämtliche zugehörigen Materialien werden in mehrstufigen Prozessen zusammen mit Lehramtsstudierenden entwickelt. Der hier realisierte hohe Aufwand lässt sich so in der Schule von einer einzelnen Lehrkraft manchmal gar nicht leisten. Auch aus diesem Grund können ausgearbeiteten Stationen des Mathematik-Labors als Vor- bzw. Grundlagen für den eigenen Unterricht von Lehrkräften genutzt und angepasst werden. Dazu werden die Arbeitsmaterialien (z. B. Arbeits- und Hilfehefte, Gruppenergebnisse) der Laborstationen als veränderbare Word-Dateien auf der Homepage des Mathematik-Labors unter www.mathe-labor.de zur Verfügung gestellt.

Inhaltlich ist fächerübergreifendes Arbeiten nur dann gerechtfertigt, wenn alle beteiligten Fächer davon profitieren. Die Auseinandersetzung mit der Station „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors (vgl. Schumacher & Roth, 2013) ist sowohl für das Fach Mathematik als auch für das Fach Kunst gewinnbringend. Dies liegt insbesondere daran, dass hier Kunstwerke der Konkreten Kunst betrachtet werden. Künstler dieser Kunstrichtung, wie etwa Max Bill, sind der Auffassung, „es sei möglich, eine kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen denkweise zu entwickeln.“ (Bill 1977) In der konkreten Kunst werden also mathematische Strukturen mit künstlerischen Mittel visualisiert und den Künstlern ist es darüber hinaus wichtig, dass der Betrachter die mathematischen Konstruktionsprinzipien wieder erschließen kann. Insofern kann hier die Mathematik einen Beitrag dazu leisten, einerseits die im Kunstunterricht angestrebte Kompetenz zur Analyse der Gestaltungselemente eines

Kunstwerks zu unterstützen und andererseits selbst Kunstwerke im Stile der konkreten Kunst nach mathematischen Gestaltungsprinzipien zu entwickeln. Auch die Mathematik kann hier in vielfältiger Weise profitieren. Einerseits wird ein produktives Üben mit Hilfe von nach mathematischen Gestaltungsregeln selbst gestalteten Kunstwerken möglich, andererseits lassen sich anhand von Kunstwerken der „konkreten Kunst“ u. a. folgende Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff und der Bruchrechnung selbstständig durch Schüler/innen im Flächenmodell erarbeiten: Teil eines Ganzen; Teil mehrerer Ganzer; Quasikardinalzahlaspekt; Anschauliche Größenvergleiche; Verfeinern von Brüchen; inhaltlich-anschauliche Addition von Brüchen. Beide genannten Aspekte werden im Folgenden an zwei Beispielen aus der Station skizziert.

Das Kunstwerk „progression in fünf quadraten“ von Max Bill (vgl. Abb. 3, links) besteht z. B. aus fünf übereinander angeordneten Quadraten, die nach unten hin immer feiner unterteilt werden. Anhand dieser Struktur des Kunstwerks sammeln Schüler/innen im Rahmen der Laborarbeit erste Erfahrungen zu Bruchzahlen. Diese wird durch „Kunstwerk-Puzzles“ unterstützt, die zu jedem eingesetzten Kunstwerk zur Verfügung stehen. So kann z. B. die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ durch das gleichmäßige Zerlegen in bzw. Auslegen mit entsprechenden Puzzleteilen an konkreten Beispielen handelnd erschlossen und die dabei gemachten Beobachtungen strukturiert werden.

Zum Abschluss der Laborarbeit, können die Schüler/innen ihr bisher erworbenes Wissen über Bruchzahlen und die Bruchrechnung produktiv einsetzen um eigene Kunstwerke nach mathematischen Gestaltungsprinzipien zu entwerfen. Dabei wird indirekt neues Wissen über Bruchzahlen generiert, sowie vorhandenes Wissen gefestigt. Als Ideenlieferant dient hier eine „Kunstwerkreihe“ von Max Bill mit dem Titel „$8\left(2\,\frac{4}{4}\right) = 8$“ (vgl. Abb. 6).

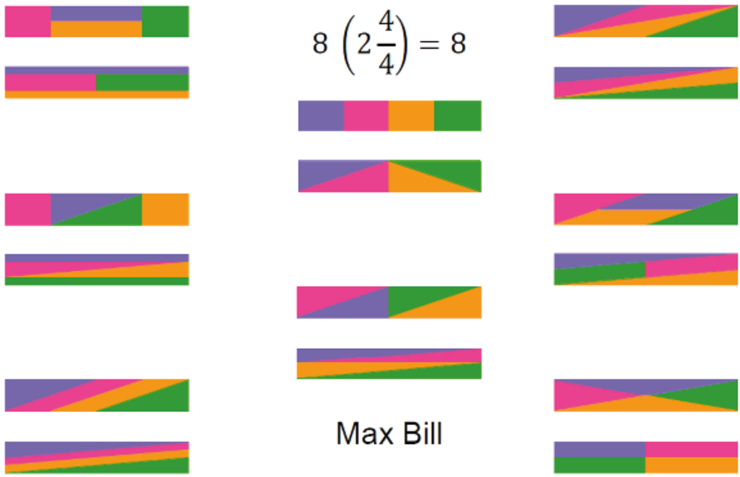



Abb. 6 Kunstwerkreihe von Max Bill mit dem Titel „$\mathbf{8}\left(\mathbf{2}\frac{4}{4}\right) = \mathbf{8}$“ (Nachkonstruktion von Stefan Schumacher)

Diese Reihe besteht aus acht Kunstwerken, die jeweils aus zwei deckungsgleichen Rechtecken bestehen. Auf die beiden Rechtecke hat Max Bill je vier Farben gleichmäßig verteilt. Dieses Prinzip soll von den Schüler/innen durch das Verteilen von drei Farben auf zwei deckungsgleiche, regelmäßige Sechsecke übertragen werden (vgl. Abb. 7).

**Gestaltungsprinzip**

- Als Grundform der Bilder dienen regelmäßige Sechsecke.
- Verteilt drei Farben auf zwei Sechsecke.
- Verwendet dabei von jeder Farbe dieselbe Menge.

Abb. 7 Offener Arbeitsauftrag zur Gestaltung eines Kunstwerks.

Zu jedem Kunstwerk, fertigen die Schüler/innen ein Poster an, auf dem neben dem Kunstwerk auch das zugrundeliegende mathematische Konzept dargestellt wird. Die so entstandenen Kunstwerke können im Anschluss an den Laborbesuch im Rahmen einer Klassenzimmervernissage präsentiert werden.

### 2.3 Forschung, Lehre und Unterrichtspraxis vernetzen

Neben den bereits herausgearbeiteten Vernetzungen wird im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ noch eine weitere Vernetzung realisiert. Als Lehr-Lern-Labor dient es der praxisnahen Ausbildung von Studierenden, der Weiterbildung von Lehrkräften und der Unterrichtsentwicklung im Fach Mathematik. Nicht zuletzt ist das Mathematik-Labor aber auch eine Einrichtung, in der fachdidaktische Entwicklungsforschung vorangetrieben wird. Es ist damit ein Katalysator für Vernetzungen zwischen den im mathematischen Bildungsprozess der Region handelnden Personen. Die Laborstationen werden von Studierenden im Rahmen ihrer Ausbildung konzipiert, umgesetzt, mit Schulklassen erprobt und evaluiert. Bei der Erprobung können sie Erfahrungen in der Diagnose von Schülerleistungen und im Umgang mit Schülerfragen sowie Schülerschwierigkeiten gewinnen. Sie kommen ins Gespräch mit den begleitenden Lehrkräften und tauschen sich mit ihnen über Konzeptionen und Praxiserfahrungen aus. Die Kolleg/inn/en aus den Schulen bringen ihre Ideen in die (Weiter-)Entwicklung der Laborstationen ein und bildungswissenschaftliche sowie fachdidaktische Forscher/innen finden ein ideales Forschungsumfeld für empirisch gestützte Unterrichtsentwicklungs- und Lehr-Lern-Prozessforschung. Auf diese Weise profitieren alle Beteiligten jeweils voneinander und lernen sich ganz nebenbei gegenseitig besser kennen. Dies kann dazu beitragen, dass sich alle Akteure mit ihren jeweiligen spezifischen Beiträgen zur Weiterentwicklung von Mathematikunterricht schätzen lernen.

### Literatur

Bill, M. (1977). die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In E. Hüttinger, M. Bill (S. 105-116). Zürich.

Baum, S., Roth, J., & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik: Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. MU 59(5), 4–11.

Devlin, K. J. (1998). Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akad. Verl.

Dexheimer, M. (2012). Empirische Untersuchung zur Wirksamkeit einer optimierten Station des Mathematik-Labors (Masterarbeit). Universität Koblenz-Landau, Landau. Online verfügbar unter http://www.dms.uni-landau.de/roth/za/mathelabor/Dexheimer_Empirische_Untersuchung_zur_Wirksamkeit_einer_optimierten_Station_des_Mathematik_Labors.pdf Gesehen 05.11.2013.

Engl, A., Engl, L., Roth, J., & Risch, B. (2014). Einflüsse auf das Protokollierverhalten im Schülerlabor: Eine empirische Vergleichsstudie mit Schülerinnen und Schülern der Orientierungsstufe. Erscheint in CHEMKON 21.

Roth, J. (2013). Mathematik-Labor "Mathe ist mehr": Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht verzahnen. MU 59(5), 12–20.

Roth, J., & Oechsler, R. (2013). Forschend Lernen - Lernprozesse fördern. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik ; Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 4.3.2013 bis 8.3.2013 in Münster (S. 846–849). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Roth, J., & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht: Eine Annäherung. Erscheint in mathematik lehren (184).

Schmidt, I., Di Fuccia, D. S., & Ralle, B. (2011). Außerschulische Lernstandorte: Erwartungen, Erfahrungen und Wirkungen aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. MNU 64(6), 362–369.

Schumacher, S., & Roth, J. (2013). Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung - Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik ; Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 4.3.2013 bis 8.3.2013 in Münster (S. 926–929). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Prof. Dr. Jürgen Roth
Universität Koblenz-Landau
Institut für Mathematik
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7
76829 Landau
roth@uni-landau.de
www.dms.uni-landau.de

## Bericht Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Elisabeth Ratgeb-Schnierer
rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Impulsbeiträge: Sabrina Hunke, sabrina.hunke@mathematik.tu-dortmund.de

In der Arbeitsgruppe „Arithmetik“ berichtete Sabrina Hunke (TU Dortmund) aus ihrem abgeschlossenen Dissertationsprojekt zum Thema „Überschlagsrechnen in der Grundschule“.

Ausgehend von literaturbasierter Kritik an der Praxis des Überschlagrechnens (Bobrowski, 1990) bezog sich der erste Teil auf die Definition des Überschlagsrechens (Lorenz, 2005) und die Vorstellung von Überschlagsaufgaben, die sich den Typen „direkte und indirekte Überschlagsfragen“ zuordnen lassen (van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Direkte Überschlagsfragen sind dadurch gekennzeichnet, dass eine Ergebniszahl oder eine Überschlagsrechnung verlangt wird. Indirekte Überschlagsfragen erfordern nicht zwingend eine Ergebniszahl und lassen somit eher informelle Vorgehensweisen zu.

Auf der Basis des aktuellen Forschungsstandes wurden vier zentrale Forschungsfragen formuliert (Hunke, 2012, 113f): „Welche Vorgehensweise wählen Viertklässler bei der Bearbeitung typischer Aufgaben zum Überschlagsrechnen in additiven und multiplikativen Kontexten? Inwiefern lassen sich bei Viertklässlern flexible Rechenkompetenzen beim Überschlagsrechnen beobachten? Inwiefern interpretieren Viertklässler ihr durch Runden gefundenes Überschlagsergebnis bei indirekten Überschlagsfragen? Welche Fehler zeigen Viertklässler beim Überschlagsrechnen?“

In einer explorativen Interviewstudie mit 42 Viertklässlern wurde den o. g. Fragen nachgegangen. Die Hälfte der Kinder bearbeitete in den Interviews indirekte „Reicht das Geld?“-Aufgaben, die andere Hälfte direkte „Wie viel ungefähr?“-Aufgaben. Die Auswertung der Interviews fand qualitativ statt, indem die Aussagen anhand eines datenbasiert entwickelten Kategoriensystems kodiert wurden.

Im Rahmen der Datenanalyse wurden die Vorgehensweisen und die Komponenten des Überschlagsprozesses im Vortrag ausführlicher dargestellt. Die Darstellung der Vorgehensweisen bezog sich speziell auf informelle Überschlagsstrategien, welche die Viertklässler bei den „Reicht das Geld?"-Aufgaben zeigten. Interessant war hierbei, dass sich bei allen sechs identifizierten informellen Überschlagsstrategien Gemeinsamkeiten feststellen ließen: Es wird keine genaue Rechnung vollständig durchgeführt, vielmehr zeigen Kinder immer wieder Aspekte informellen Vorgehens, das sich in Aussagen wie „das kann man auch sehen", „dann ist es schon irgendetwas mit..." und „und dann noch das Kleingedruckte" manifestiert.

Abschließend legen die Ergebnisse der Dissertation verschiedene Schlüsse nahe: Zunächst wird die Notwendigkeit deutlich, Lehrkräfte für die Thematik zu sensibilisieren. Darüber hinaus zeigt sich, dass die Unterscheidung in indirekte und direkte Überschlagsfragen sinnvoll ist, wobei sich erstere besonders zur Einführung eignen, da sie eher informelle Lösungsvorgehen herausfordern. Ebenso wird deutlich, dass der Einsatz geeigneter Aufgaben zum Überschlagsrechnen entscheidend ist, um einem kalkülbasierten Vorgehen vorzubeugen.

An den Vortrag schloss sich eine rege Diskussion an. Thema war eine geeignete Aufgaben- und Unterrichtskultur, durch die das Schätzen und Einschätzen sowie die Intuition der Kinder mehr herausgefordert und gestärkt werden.

### Literatur

Bobrowski, S. (1990). Schätzen - Runden - Überschlagen - Ein verzichtbarer Lerninhalt in der Grundschule? mathematik lehren 39, 14-19.

Hunke, S. (2012). Überschlagsrechnen in der Grundschule. Lösungsverhalten von Kindern bei direkten und indirekten Überschlagsfragen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lorenz, J. H. (2005). Überschlagen - Schätzen - Runden. Drei Begriffe, eine Tätigkeit? Grundschule Mathematik, 4, 44-45.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Children learn Mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht: Freudenthal Institut.

## Bericht Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Bernd Neubert, Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de

Impulsbeiträge: Grit Kurtzmann, Elke Binner
grit.kurtzmann@uni-rostock.de, elke.binner@dzlm.de

In der Arbeitsgruppe „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ stellten Grit Kurtzmann (Universität Rostock) und Elke Binner (DZLM Berlin) in diesem Jahr Fortbildungen zur Stochastik für Grundschullehrkräfte in Mecklenburg-Vorpommern und Berlin vor. Hintergrund ist die seit 2012 parallele Entwicklung von Bausteinen für diese Fortbildungen in MV und am DZLM/HU Berlin. Es findet ein regelmäßiger Austausch zum Ausbildungskonzept (Kernkompetenzen, inhaltliche Schwerpunkte, Gestaltungsprinzipien, Zielgruppen und Länderinteressen), Entwicklung von Kursmaterialien und zu Evaluationsmaßnahmen für die Kurse statt.

Es wurden zunächst strukturell und inhaltlich die Lehrerfortbildungen verglichen. Beide Kurse werden unter vergleichbaren organisatorischen Bedingungen durchgeführt. Es gibt jeweils 4 Präsensveranstaltungen und 3 Arbeitsphasen, wobei dafür in Berlin ein halbes Schuljahr und in MV ein ganzes Schuljahr zur Verfügung stehen. In den Arbeitsphasen werden in beiden Kursen die vermittelten fachlichen Inhalte im eigenen Unterricht erprobt und grundlegende stochastische Inhalte vermittelt. Grundlage dafür sind die Empfehlungen des AK Stochastik der GDM (2012). In den Berliner Kursen ist die Heterogenität der Lehrkräfte größer als in den Kursen in MV, u. a. auch bedingt durch die 6-jährige Grundschule. In MV sind die Gruppen der Kursteilnehmer homogener und bezüglich der Stochastik als fachfremd einzuschätzen. In der Herangehensweise in den Präsenzveranstaltungen unterscheiden sich die Kurse. Zielgruppe in Berlin sind Lehrkräftetandems. Lehrkräfte setzen sich zunächst in der Rolle „Lernende“ mit herausfordernden Aufgaben auseinander. Das lässt Lehrkräfte und Kursleiter Stärken, aber auch fachliche Defizite erkennen. Die Aufgaben sind auch Ausgangspunkt für das weitere Lernen, um grundlegendes Wissen zu erarbeiten, Strukturen und Zusammenhänge zu erkennen und zu nutzen. Die Kursleiter verstehen sich auch als Prozessbegleiter in der Auseinandersetzung zu einer Linienführung im Unterricht.

In den Kursen in MV wird über ein Strukturmodell ein Zugang gewählt, der alle stochastischen Situationen beschreibt und nicht nur Ergebnisse von zufälligen Vorgängen und Datenerfassungen untersucht, sondern sich auch mit den Bedingungen beschäftigt, unter denen die Ergebnisse entstanden sind. Die Entwicklung des naturwissenschaftlichen Denkens (Ursache-Wirkung) spielt dabei eine wesentliche Rolle. In MV werden weiterhin Entwicklungskonzepte vorgestellt, wie z. B. Entwicklung der Erstellung von Diagrammen in den Klassen 1 - 4. Den Kursteilnehmern wird ein Vorschlag unterbreitet, welchen Stand ein Schüler mindestens am Ende jeder Klassenstufe haben sollte. Damit sollen die Kursteilnehmer ermutigt werden, Anteile der Stochastik in ihren Unterricht dauerhaft zu verankern.

In beiden Kursen werden vermittelte Inhalte im Unterricht erprobt, reflektiert und dienen dem Austausch in der nächsten Präsenzzeit.

In einem zweiten Teil stellte Grit Kurtzmann ein mögliches Konzept zur Entwicklung des präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriffs vor, das von den Vorgängen aus der Erfahrungswelt der Kinder ausgeht aus folgenden Stufen besteht.

- Umgangssprachliche Verwendungen der Wörter „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ zum Ausdruck des Grades der Erwartung einer Vorhersage
- Vergleichen der Wahrscheinlichkeiten zweier Ergebnisse
- Qualitative Schätzung von Wahrscheinlichkeiten – die Wahrscheinlichkeitsskala

Hierzu wurden Beispiele vorgestellt.

In der abschließenden Diskussion wurden u. a. Probleme von Betrachtungen zu den Bedingungen in stochastischen Situationen diskutiert.

Auf der Herbsttagung 2014 des Arbeitskreises Grundschule wird die Arbeitsgruppe „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ wieder angeboten; die inhaltliche Ausgestaltung ist noch offen.

## Bericht der Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer & Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de, s.reinhold@tu-braunschweig.de

Impulsbeitrag: Rose Vogel & Birgit Brandt
vogel@math.uni-frankfurt.de, birgit.brandt@paedagogik.uni-halle.de

In der Arbeitsgruppe Geometrie stellten Rose Vogel und Birgit Brandt (Goethe-Universität Frankfurt/Main und Martin-Luther-Universität Halle, Forschungszentrum IDeA/Frankfurt) die Konzeption und erste Ergebnisse des Projekts „erStMaL" (*early Steps in Mathematics Learning*) vor. Das Projekt „erStMal" ist im IDeA-Zentrum/Frankfurt im Rahmen der LOEWE-Initiative des Landes Hessen angesiedelt und verfolgt als Longitudinalstudie das Ziel, die mathematische Denkentwicklung bei Kindern im Alter von drei bis neun Jahren aus unterschiedlichen mathematikdidaktischen Perspektiven zu beleuchten (vgl. Brandt, Vogel & Krummheuer 2011). Domänenspezifische Entwicklungslinien in allen für die Bildungsstandards relevanten mathematischen Inhaltsbereichen werden dabei sowohl in ihrer innermathematischen Vernetzung als auch in ihren sozialen Konstitutionsbedingungen in den Blick genommen. Für dieses Anliegen wurden Kinder in Spiel- und Erkundungssituationen sowie in unterschiedlichen sozialen Kontexten beobachtet und videografiert. Die speziell für das Projekt entwickelten Angebote sind jeweils einem mathematischen Inhaltsbereich schwerpunktmäßig zuzuordnen, lassen aber auch Aktivitäten in anderen Bereichen zu.

In der Sitzung wurden Spiel- und Erkundungssituationen, die im Projekt „erstMaL" entwickelt wurden sowie Situationen, die Erzieherinnen zu einem vorgegebenen mathematischen Bereich gestalteten, vorgestellt. In den Erzieherinnen-Situationen fällt auf, dass Erzieherinnen für den Bereich „Muster und Strukturen" vor allem auf geometrisches Legematerial zurückgreifen und sich kaum auf arithmetische Aspekte beziehen (vgl. Brandt 2013). Die im Rahmen des Projekts entwickelten mathematischen Erkundungssituationen lassen sich durch die Strukturmomente „Mathematischer Auftrag", „Material-Raum-Arrangement“ und „Impulse der erwachsenen Person“ charakterisierenden (vgl. Vogel 2014). Die Situationen wurden zudem mit Hilfe spezifisch entwickelter „Didaktischer Design Pattern“ beschrieben, um eine vergleichbare Durchführung der Situationen zu garantieren. Nach der Vorstellung des Projektrahmens bestand die Gelegenheit, Projektmaterialien zu den Situationen „Bauen“, „Körper“, „Musterkarten“ und „Maps“ kennen zu lernen und zu erproben. Ein Blick auf individuelle kindliche Entwicklungsprofile zum mathematischen Denken schloss die Präsentation ab.

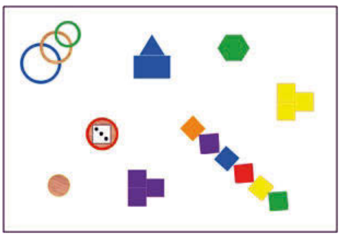
In der Arbeitsgruppensitzung gab es darüber hinaus die Möglichkeit eine von Uta Knyrim (Erfurt) erstellte Präsentation zum Thema „Maßwerkbetrachtungen in der Grundschule“ zu studieren und Anregungen zur Realisierung mathematisch-künstlerischer Projekte im Unterricht zu gewinnen.

## Literatur

Brandt, B. (2013). Everyday pedagogical practices in mathematical play situations in German “Kindergarten”. Educational Studies in Mathematics 84(2), 227-248 (DOI: 10.1007/s10649-013-9490-6).

Brandt, B., Vogel, R. und Krummheuer, G. (Hrsg.) (2011). Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am Center for Individual Development and Adaptive Education (IDeA). Münster: Waxmann.

Vogel, R. (2014). Mathematical situation of play and exploration as an empirical research instrument. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel &. R. Vogel (2014), Early Mathematics Learning – Selected Papers from the POEM 2012 Conference. Springer.



Die Bilder zeigen Materialien aus mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen des Projekts „erStMaL“: konkretes Material zum Bauen von geometrischen Körpern (links) und einen Plan von arrangierten Gegenständen und Körpern von oben (rechts).

## Bericht Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt & Marcus Nührenbörger
brandt@math.uni-frankfurt.de
marcus.nuehrenboerger@tu-dortmund.de

Impulsbeitrag: Anne Fellmann, fellmann@math.uni-frankfurt.de

In der Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation der diesjährigen Herbsttagung stellte Anne Fellmann (Goethe Universität) Ergebnisse aus ihrem fertigen Promotionsprojekt (noch nicht veröffentlichte Promotion der Autorin) vor.

In ihrer Präsentation gab sie einen Überblick über ihr Promotionsprojekt IPhaMat (Integration der drei Phasen der Lehrerbildung im Mathematikunterricht der Grundschule), welches auf die Entwicklung und Erprobung integrativ konzipierter Veranstaltungen zum Einsatz kooperativer Lehr-Lernformen im Mathematikunterricht zielt. Sie legte dar, wie die drei Professionen der Lehrerbildung (Studierende, Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und aktive Lehrkräfte) in einer phasenübergreifend konzipierten universitären Veranstaltung entsprechende Lehr-Lernarrangements für den Mathematikunterricht geplant und anschließend in der Schule umgesetzt haben. Zunächst wurden als zentrale Ergebnisse aus dem empirischen Material sowohl die rekonstruierten handlungsleitenden Orientierungen (Bohnsack 2009) der einzelnen Professionsgruppen als auch die Erfahrungsräume dargestellt, aus welchen sich diese Orientierungsrahmen speisen. Die Vortragende merkte an, dass auf Grundlage der empirischen Befunde festgehalten werden kann, dass sich weder in Bezug auf eine mathematikspezifische Planung und Umsetzung noch in Bezug auf Kommunikation und Kooperation gemeinsame Basistypiken in den im Sample vertretenen Fällen rekonstruieren ließen. Die generierte soziogenetische Typenbildung, welche sich mittels komparativer Analyse vom Einzelfall abstrahieren ließ, stellt sich wie folgt dar:

- Entwickeltes Rollenverständnis als Lehrkraft als Destillat unterrichtlichen Erfahrungswissens und reflexiver Verarbeitung versus Suche nach einem Rollenverständnis als Lehrkraft als Destillat kaum vorhandenen unterrichtlichen Erfahrungswissens und reflexiver Verarbeitung

- o Fremdbestimmt orientiertes Handeln versus selbstbestimmt orientiertes Handeln im Erfahrungsraum der drei Phasen der Lehrerbildung und ihrer Bezugssysteme
- o Konstruktivistisch orientiertes Rollenverständnis versus instruktivistisch orientiertes Rollenverständnis im Erfahrungsraum unterschiedlicher Schulformen bzw. Schulstufen und institutionell gesetzter invarianter Rahmenbedingungen durch die Bildungsadministration

Anschließend hatten die Teilnehmenden die Möglichkeit, in Arbeitsgruppen anhand ausgewählter Transkriptausschnitte auf Grundlage folgender Fragstellungen mögliche Lesarten bei der Umsetzung von Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht zu entwickeln und diese zu diskutieren:

- ✓ Was zeigt sich bei den Lehrenden, die kooperative Lehr-Lernformen durchführen im Hinblick auf die prozessbezogene Kompetenz des Kommunizierens und im Hinblick auf die Kooperation?
- ✓ Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Lehrerbildung?
- ✓ Wie müssen Angebote/begleitende Maßnahmen beschaffen sein, um (angehende) Lehrkräfte bei der vermehrten und gelingenden Umsetzung kooperativer Lehr-Lernformen in ihrer professionellen (Weiter-)Entwicklung zu unterstützen?

Beispielsweise wurde herausgearbeitet, dass einigen Lehrenden das Vertrauen in die kommunikativen Fähigkeiten der Kinder fehle oder den Kindern der Mehrwert der Kommunikation nicht deutlich war.

Zum Schluss wurde anhand der dargestellten Ergebnisse aus der Studie und der Arbeitsgruppenergebnisse diskutiert, wie Angebote/begleitende Maßnahmen beschaffen sein müssten, um (angehende) Lehrkräfte bei der vermehrten und gelingenden Umsetzung kooperativer Lehr-Lernformen in ihrer professionellen (Weiter-)Entwicklung zu unterstützen. Beispielsweise wurde herausgearbeitet, dass es Aufgabe der Lehrerbildung sei, selbstreflexive Prozesse bei den Lehrenden zu initiieren als auch ein Bewusstsein dafür zu schaffen, dass kooperatives Arbeiten nicht unabhängig von fachmathematischen Anforderungen zu verstehen sei, insbesondere wenn prozessbezogene Kompetenzen im Mittelpunkt stünden.

**Literatur**

Bohnsack, R. (2008). Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in Methodologie und Praxis qualitativer empirischer Forschung. Opladen und Farmington Hills: Leske+Budrich

## Bericht Arbeitsgruppe Lehrerfortbildung

Koordination: Marianne Grassmann & Christoph Selter

marianne@grassmann.info, christoph.selter@t-online.de

Impulsbeitrag: Christoph Selter, christoph.selter@t-online.de

Elke Binner, elke.binner@hu-berlin.de

Zunächst ist Christoph Selter in seinem Teil des Impulsreferates auf das Selbstverständnis und die Struktur des DZLM (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik) sowie auf Möglichkeiten der Vernetzung mit anderen Hochschulen und Institutionen eingegangen. Dabei wurde verdeutlicht, was im vergangenen Jahr angeschoben und erreicht wurde und wo Schwerpunkte der weiteren Entwicklung von DZLM-Aktivitäten liegen. Insgesamt wurde betont, wie wichtig die Entwicklung theoretisch fundierter und empirisch abgesicherter Standards für die Konzeptionierung und Durchführung von Fortbildungen ist.  Eine ausführliche Darstellung der Ausführungen kann hier nicht vorgenommen werden, es wird auf die Homepage des DZLM (DZLM.de) verwiesen.

Im zweiten Teil des Impulsreferats wurden von Elke Binner und Christoph Selter exemplarisch DZLM–Fortbildungen, die in Berlin (für Lehrpersonen)  bzw. NRW (für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren) durchgeführt wurden bzw. werden, kurz dargestellt. Dabei wurden die mögliche Breite der inhaltlichen Schwerpunkte in den Angeboten (vgl. Themenkatalog des DZLM auf der Website) und die Notwendigkeit, sich auf unterschiedliche Adressaten einzustellen (Lehrkräfte, Multiplikatoren), deutlich.

In der anschließenden Diskussion wurde eine Reihe zentraler Punkte angesprochen.

Es wurde deutlich hervorgehoben, dass die Dezentralisierung der Lehrerfortbildung, etwa sichtbar an der Abschaffung von Landesinstituten, dazu beigetragen hat, dass sich eine gewisse Beliebigkeit der Angebote eingeschlichen hat. Es werden zudem häufig lediglich Nachmittagsangebote realisiert, die bestenfalls als Erfahrungsaustausch zwischen den Kolleginnen und Kollegen gewertet werden können. Insofern wird eine zentrale Institution (DZLM), die sich der systematisch angelegten, konzeptionell fundierten Fortbildung von mathematikunterrichtenden Lehrkräften widmet, sehr begrüßt.

Probleme in der Umsetzung einer qualifizierten Fortbildung werden vor allem in den unterschiedlichen Forderungen und Bedingungen in den einzelnen Bundesländern gesehen. Als wünschenswert wurde herausgearbeitet, dass das DZLM in Fragen der Fort- und Weiterbildung von Mathematiklehrkräften zunehmend Ansprechpartner der Politik wird.

Um einheitliche Standards in der Fortbildung umzusetzen, heben die Teilnehmer der Diskussion die Notwendigkeit der Zusammenarbeit mit der und die Einflussnahme auf die KMK vor, damit von dieser Seite ländergemeinsame Anforderungen für Fortbildungen formuliert werden, die dann in den Ländern umzusetzen sind. Derartige Vorgaben werden von den Teilnehmern als wichtige Hilfe bei Gesprächen mit Vertretern der Landesregierungen über notwendige Fortbildungsmaßnahmen angesehen. Als besonderes Problem wird die unterschiedliche Praxis bei der Gewährung von Anrechnungsstunden in den einzelnen Bundesländern diskutiert. Bei voller Unterrichtsbelastung ist es für Lehrpersonen schwer, Fortbildungen, die über einen längeren Zeitraum gehen und mit erheblichen Belastungen zwischen den Präsenztagen verbunden sind, zu besuchen.

Abschließend wurden die Möglichkeiten der weiteren Vernetzung diskutiert, insbesondere die Möglichkeit der Schaffung von DZLM-Regionalstellen.

Diverse Teilnehmer haben die Bereitschaft signalisiert, Fortbildungen in Kooperation mit dem DZLM durchzuführen.

## Bericht Arbeitsgruppe PriMaMedien - Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

Koordination: Silke Ladel & Christof Schreiber

ladel@math.uni-sb.de, Christof.Schreiber@math.uni-giessen.de

Impulsbeitrag: Bernd Wollring, wollring@uni-kassel.de

### Charakterisierende Aufgaben zu den prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards - dargestellt mit der Software BlockCAD[1]

*BlockCAD ist eine Werkzeug-Software zum virtuellen Bauen mit System-Steinen (etwa Lego®). Die prozessbezogenen Kompetenzen Problemlösen, Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren und Modellieren werden mit jeweils einer typischen Aufgabe mit BlockCAD charakterisiert.*

Schlüsselwörter / Keywords: 2D-Ansichten zu 3D-Objekten, Prozessbezogene Kompetenzen zu Raum und Form

BlockCAD (Isaksson 1998, 2005) ist eine Werkzeug-Software zum virtuellen Bauen mit System-Steinen (etwa Lego®). Sie ermöglicht das Erstellen von Bauwerken, das Bewegen, Laden und Speichern, das Umfärben einzelner Steine und das Exportieren von Bildern. Das Arbeiten mit Baugruppen unterstützt Kooperationen. BlockCAD unterstützt in spezifischen Lernumgebungen den Erwerb prozessbezogener Kompetenzen zum Inhaltsbereich *Raum und Form*. Es schafft einen virtuellen Spielraum und modelliert Objekte, die vielen Grundschülern aus ihrer realen Lebenswelt geläufig sind. Die *allgemeinen „prozessbezogenen" Kompetenzen* in den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich (KMK 2004) werden kurz neu gekennzeichnet und jeweils durch eine *prototypische Aufgabe* charakterisiert, die mit BlockCAD formuliert und zu lösen ist. Diese Aufgaben wurden in der Arbeitsgruppe diskutiert und bearbeitet.

***Problemlösen*** *bezeichnet die Fähigkeit, Lösungen von mathematischen Problemen zu erarbeiten, dabei verschiedene Wege zu erproben und schließlich Lösungsversuche und Lösungsverfahren planen zu können.*

***Aufgabe zu P.*** Gegeben sind zwei System-Steine derselben Farbe, beide mit zwei Reihen zu je 3 Knöpfen. Wie viele verschiedene

[1] Ein ausführlicher Beitrag erscheint in Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) (2014)

Bauwerke kann man daraus bauen? (Idee: Th. Jahnke) Arrangiere sie mit BlockCAD.

***Darstellen** bezeichnet das zumeist nicht flüchtige Ausformen und Festhalten mathematischer Objekte in Gegenständen, Bildern oder Zeichen, um diese sich oder anderen zu vergegenwärtigen und angemessen bearbeiten zu können.*

***Kommunizieren** bezeichnet im Zusammenhang mit Mathematik das selbstständige deutungssichere Mitteilen von Beschreibungen, Tatbeständen, Vorgehensweisen und Argumenten an andere Individuen, zumeist auf der Basis von gemeinsam vereinbarten Bezeichnungen und Bedeutungen.*

***Aufgabe zu D. und K.*** Gegeben ist ein Bauwerk, dargestellt mit realen System-Steinen oder mit BlockCAD. Erstelle dazu einen Bauplan mit Hilfe von Bildern, die aus BlockCAD exportiert sind.

***Argumentieren** bezeichnet die Fähigkeit, im Rahmen vereinbarter Regelwerke und gemeinsam akzeptierter Tatbestände schlussfolgernd zu denken, Korrektes von Unkorrektem zu unterscheiden und weiterführende Gedanken zu entwickeln.*

***Aufgabe zu A.*** Gegeben ist eine Darstellung, in der mit BlockCAD alle 24 Türme aus drei Steinen arrangiert sind, deren drei Steine eine von vier gegebenen Farben rot, blau, gelb und grün tragen. In keinem Turm tritt eine Farbe mehrfach auf (Permutationen ohne Wiederholung). Nachträglich wurden einige Steine weiß gefärbt, das Arrangement bildet somit einen „Lückentext“. Bestimme die fehlenden Farben.

***Modellieren** bezeichnet die Fähigkeit Mathematik und andere, in der Regel lebensweltliche Gegenstände, zueinander in Beziehung zu setzen und daraus Schlüsse zu ziehen.*

***Aufgabe zu M.*** Baue mit BlockCAD ein Modell zu einem 50m langen Verkehrsstau. Ein Knopf zählt einen Meter. Welche und wie viele Fahrzeuge stehen darin und wie viele Menschen sitzen darin?

## Literatur

Isaksson, A. (1998, 2005). BlockCAD 3.19. www.blockcad.net Gesehen 31.10.2013

KMK (2005). Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Luchterhand.

## Bericht Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dagmar Bönig
dboenig@uni-bremen.de

Impulsbeitrag: Eva Cless
cless.eva@hu-berlin.de

In der Arbeitsgruppe „Sachrechnen" der Herbsttagung 2013 stellte Eva Cless (Humboldt-Universität zu Berlin) erste Ergebnisse aus ihrer an der Schnittstelle zwischen Mathematik- und Sachunterrichtsdidaktik angesiedelten Dissertationsstudie vor.

Zum Phänomen Geld werden in einer phänomenografischen Interviewstudie Erlebensweisen von Grundschulkindern erhoben. Damit verbunden ist das Ziel der Entwicklung fächerübergreifende Thematisierungsvorschläge von Geld in der Grundschule.

Eva Cless begründete die Anlage der Studie und stellte den Interviewleitfaden vor. Die Konstruktion der Interviewfragen erfolgte dann unter Berücksichtigung relevanter Aspekte aus mathematik- und sachunterrichtsdidaktischer Perspektive (Franke & Ruwisch 2010, Gläser 2004, Peter-Koop & Nührenbörger 2007),

Die Referentin stellte dann den Prozess der phänomenografischen Analyse der Daten nach Murmann (2002) vor. Am Beispiel „Geld in seiner Funktion als Wertaufbewahrungsmittel" legte sie dar, wie die Ergebnisse der Analyse in phänomenografischen Kategoriensätzen dargestellt werden. Darüber hinaus verdeutlichte sie, wie diese Art der Ergebnisdarstellung das Nachvollziehen von Verbindungen zwischen dem Erleben unterschiedlicher Erlebensgegenstände und unterschiedlichem Erleben gleicher Erlebensgegenstände ermöglicht.

Die ersten Ergebnisse deuten darauf hin, dass Erlebensgegenstände von Geld anschlussfähig an Bereiche der Sachunterrichts- und der Mathematikdidaktik erlebt werden.

Grundlegend bezogen sich Diskussionspunkte auf den forschungsmethodischen Ansatz der Phänomenografie (Marton & Booth 1997, Murmann 2002) und den dort verwendeten Erlebens-Begriff (im Original awareness). Als Ergänzung zur Diskussionsfrage des „Geldwerts“ brachte die Referentin exemplarische Interviewausschnitte ein, in denen für die Kinder „Geldwert“ bedeutsam wird. Im Vergleich der Interviewausschnitte wurden Anschlüsse an unterschiedliche fachliche Klärungen von „Geldwert“ aufgezeigt. In der weiteren Diskussion wurde die Anschlussfähigkeit der vorgestellten Ergebnisse an Größenvorstellungen eingeschränkt, die Anschlussfähigkeit an das Sachrechnen aber unterstützt. Abschließend wurde diskutiert, inwieweit „Erleben“ Grundlage zur Formulierung didaktischer Leitlinien sein kann.

## Literatur

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.

Gläser, E. (2004). Modernisierte Arbeitsgesellschaft–didaktisch-methodische Überlegungen zum ökonomischen Lernen. In Richter, D. (Hg.). Gesellschaftliches und politisches Lernen im Sachunterricht (S. 173-188). Bad Heilbrunn

Marton, F. & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, N.J.

Murmann, L. (2002). Physiklernen zu Licht, Schatten und Sehen – Eine phänomenografische Untersuchung in der Primarstufe. Berlin.

Peter-Koop, A. & Nührenbörger, M. (2007). Größen und Messen. In Walther, G. et al..(Hrsg.). Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 89-117). Berlin: Cornelsen Scriptor

## Bericht Arbeitsgruppe Vorschulische Bildung

Koordination: Meike Grüßing
gruessing@ipn.uni-kiel.de

Impulsbeitrag: Simone Dunekacke, Wibke Baack, Lars Jenßen, Sigrid Blömeke und Marianne Grassmann

simone.dunekacke@hu-berlin.de, wibke.baack@hu-berlin.de

In der diesjährigen Sitzung der Arbeitsgruppe „Vorschulische Bildung“ wurde das Projekt KomMa - Struktur, Niveau und Entwicklung professioneller Kompetenz von angehenden Erzieher/-innen im Bereich Mathematik vorgestellt. Das vom BMBF geförderte Projekt untersucht, ob frühpädagogische Fachkräfte im Rahmen der verschiedenen Ausbildungswege darauf vorbereitet werden, mathematisches Lernen von Kindern im Alter von drei bis sechs Jahren zu begleiten. Da es bislang kein empirisch gesichertes Kompetenzmodell für frühpädagogische Fachkräfte gibt (National Advisory Panel 2008), orientiert sich das im Projekt entwickelte Modell an jenen für Lehrkräfte im Primarbereich, so wie es Anders (2012) empfiehlt. Der Schwerpunkt liegt auf den kognitiven Dispositionen, die in Anlehnung an Shulman (1986) in mathematisches Fachwissen, mathematikdidaktisches und pädagogisches Wissen ausdifferenziert werden.

Auf Grundlage des Kompetenzmodells wurde ein Leistungstest entwickelt, mit dem die Wissensbereiche empirisch erfasst werden. Der Test wurde im Sommer 2013 mit N=457 angehenden frühpädagogischen Fachkräften im Raum Berlin/Brandenburg pilotiert. Erste Ergebnisse der Erprobung deuten darauf hin, dass sich die drei Wissensdimensionen voneinander unterscheiden lassen, es aber Zusammenhänge zwischen diesen gibt. Ob diese Befunde substanziell sind, wird sich in der Hauptstudie im Winter 2013/14 zeigen.

Einige der entwickelten Items haben sich in der empirischen Erprobung nicht bestätigt. Darüber hinaus konnte der Test verlängert werden, um die Reliabilität zu erhöhen. Deswegen wurden nach der Pilotierung Items nach- bzw. neu konstruiert.

Im Mittelpunkt der Arbeitsphase stand die Diskussion von 12 neukonstruierten Items zur Mathematikdidaktik. Ausgehend vom Gütekriterium der Inhaltsvalidität, also der Frage, inwieweit der Test bzw. die einzelnen Items tatsächlich das zu messende Konstrukt erfassen, wurden die Teilnehmer/-innen gebeten, zwei Fragen zu jedem Item zu beantworten: (1) *Wird der Inhalt durch das Item optimal repräsentiert?* (2) *Stellt dieses Item eine gute Repräsentation aller (theoretisch) möglichen Items dar?* (Hartig, Frey & Jude 2011). In Kleingruppen wurden anschließend problematische Items und allgemeine Schwierigkeiten der Items diskutiert.

Die abschließende Diskussion griff zunächst die Frage auf, inwieweit die angegebenen Antwortalternativen bei verschiedenen Items tatsächlich trennscharf und eindeutig richtig sind. Darüber hinaus wurde bei einigen Items über die Zuordnung zu einer Subdimension und mögliche Alternativen diskutiert. Items, die auf Transkriptionen von realen Situationen beruhen, wurden von den Teilnehmer/-innen positiv bewertet, wenngleich hier ein sorgfältiges Abwägen zwischen verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten erfolgen muss.

Im Rahmen einer kleinen Posterpräsentation konnten die Teilnehmer/-innen Einblick in verschiedene weitere Projekte zur vorschulischen mathematischen Bildung bekommen. In diesem Jahr präsentierten sich das Projekt Anschluss M und das Projekt KomMa.

## Literatur

Anders, Y. (2012). Modelle professioneller Kompetenzen für frühpädagogische Fachkräfte. Aktueller Stand und ihr Bezug zur Professionalisierung. Aktionsrat Bildung.

Hartig, J., Frey, A. & Jude, N. (2011). Validität. In H. Moosbrugger & A. Kelava (Hrsg.), Testtheorie und Fragebogenkonstruktion. Heidelberg: Springer.

National Mathematics Advisory Panel (2008). The final report of the national mathematics advisory panel. Washington, D. C.: Department of Education.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: Educational Researcher 15 (2), 4-14.

**Mit freundlicher Unterstützung von**

Winklers
Bildungshaus Schulbuchverlage
Schöningh
Schroedel
westermann
Diesterweg

University of Bamberg Press

Dieser Tagungsband dokumentiert Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) in Tabarz vom 8. bis 10. November 2013 zum Thema „Mathematik vernetzt".

Der Arbeitskreis Grundschule wurde vor 22 Jahren auf Anregung von Hendrik Radatz gegründet und verfolgt seither als einer der größten Arbeitskreise innerhalb GDM das Ziel, die Entwicklung der Didaktik der Grundschulmathematik zu verbessern. Einen Schwerpunkt der Arbeit des Arbeitskreises Grundschule stellt daher die Förderung des Austausches und der Zusammenarbeit aller am Mathematikunterricht in der Grundschule in Praxis, Theorie und Forschung unmittelbar oder mittelbar Beteiligten dar.

Das Rahmenthema der Tagung „Mathematik vernetzt" wurde in fünf Hauptvorträgen im Plenum diskutiert. Zusätzlich setzten sich Arbeitsgruppen zu den klassischen Themenfeldern Arithmetik, Geometrie, Sachrechnen und Daten, Zufall & Wahrscheinlichkeit sowie Gruppen zu den Bereichen Kommunikation & Kooperation, Vorschulische Bildung, Lehren & Forschen mit Neuen Medien in der Primarstufe und Lehrerfortbildung intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander.

Die jährliche Herbsttagung des Arbeitskreises richtet sich seit ihrem Bestehen an einen Teilnehmerkreis, der den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schu-lischer Praxis sucht. Diese interdisziplinäre, offene und kollegiale Kooperation von Vertretern aus Praxis und Theorie prägt die jährliche Zusammenkunft bis heute.

eISBN 978-3-86309-195-8

www.uni-bamberg.de/ubp