1 Mathematikdidaktik Grundschule

Medien und Materialien

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011

hrsg. von Anna Susanne Steinweg

UNIVERSITY OF BAMBERG PRESS

Mathematikdidaktik Grundschule
Band 1

Mathematikdidaktik Grundschule

hrsg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 1

University of Bamberg Press 2011

Medien und Materialien

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011

hrsg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press 2011

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de/ abrufbar

Herstellung und Druck: docupoint GmbH, Barleben
Umschlaggestaltung: Dezernat Kommunikation und Alumni

http://www.uni-bamberg.de/ubp/

ISSN: 2193-2905
ISBN: 978-3-86309-045-6 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-046-3 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-opus-3824

Inhaltsverzeichnis

Berichte aus den Arbeitsgruppen

Vorwort

Wir freuen uns sehr über das erstmalige Erscheinen dieses Tagungsbandes, der die Ergebnisse unserer Herbsttagung in Tabarz vom 4. bis 6. November 2011 zum Thema „Medien und Materialien" dokumentiert.

Der Arbeitskreis Grundschule wurde vor genau 20 Jahren auf Anregung von Hendrik Radatz gegründet und verfolgt seither als größter Arbeitskreis innerhalb der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) das Ziel, die Entwicklung der Didaktik der Grundschulmathematik zu verbessern. Einen Schwerpunkt der Arbeit des Arbeitskreises Grundschule stellt daher die Förderung des Austausches und der Zusammenarbeit aller am Mathematikunterricht in der Grundschule in Praxis, Theorie und Forschung unmittelbar oder mittelbar Beteiligten dar.

Die jährliche Herbsttagung des Arbeitskreises richtet sich seit ihrem Bestehen an einen Teilnehmerkreis, der den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen der schulischen Praxis sucht. Diese interdisziplinäre, offene und kollegiale Kooperation von Vertretern aus Praxis und Theorie prägt die jährliche Zusammenkunft bis heute.

Das Interesse an der jährlichen Herbsttagung und den Ergebnissen aus der hier stattfindenden fachdidaktischen Diskussion reicht darüber jedoch weit hinaus. Ergebnisse aus der im Arbeitskreis zur Diskussion gestellten fachdidaktischen Forschung und Unterrichtsentwicklung wurden daher in der Vergangenheit in verschiedenen Publikationen bereits vereinzelt dokumentiert.

Der vorliegende Tagungsband knüpft hier an, verfolgt aber auch weitere Zielsetzungen. Neu ist im Wesentlichen das Bestreben, vom gegenwärtigen Zeitpunkt an jährlich einen Tagungsband herauszugeben, in dem ausführliche Beiträge zu sämtlichen Hauptvorträgen der jeweiligen Herbsttagung sowie Berichte aus den Arbeitsgruppen aufgenommen werden. Die Vielfalt, die sich aus unserem Dialog im Spannungsfeld von fachwissenschaftlicher, pädagogischer, psychologischer und unterrichtspraktischer Orientierung ergibt, wird damit zeitnah einem breiteren Publikum zugänglich. Aktuelle Entwicklungen aus der mathematikdidaktischen Forschung und Lehrerbildung können künftig unmittelbar im Anschluss an die Tagung dokumentiert, aktuell an weitere Rezipienten herangetragen werden und weiterführende Auseinandersetzungen anregen.

Gewiss, man kann auch das Zahlenreich erforschen, man kann auch rechnend denken lernen, aber Entdeckungen, die man mit Augen und Händen macht, sind überzeugender und überraschender.
(Freudenthal 1973, 380)

Rechnend denken oder denkend rechnen zu lernen ist bis heute zentraler Gegenstand der mathematikdidaktischen Diskussion – und wird es mutmaßlich stets bleiben. Dass sinnvoll eingesetzte Medien und Materialien hier eine tragende Rolle spielen, ist unbestritten und wurde auf der Herbsttagung 2011 aus verschiedenen Blickwinkeln und für verschiedene Inhaltsbereiche betrachtet.

Unser Dank gilt allen Kolleginnen und Kollegen, die die Herbsttagung 2011 mit wissenschaftlichen Beiträgen bereichert und diese zur Diskussion gestellt haben. Auch die intensive Arbeit an bestehenden Projekten oder neu entwickelten Forschungsschwerpunkten in den Arbeitsgruppen am Samstagnachmittag kann nur dank der engagierten Betreuung durch ihre Leiterinnen und Leiter gelingen – auch dafür ein dafür herzliches Dankeschön!

Prof. Dr. Christiane Benz

Dr. Simone Reinhold

Dr. Thomas Rottmann

Bernadette Thöne

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe -Band II*, Stuttgart: Klett.

Webseite des Arbeitskreises http://home.ph-karlsruhe.de/~gdm_grundschule/

Funktionales Denken entwickeln - von der Grundschule bis zum Abitur

von Andreas Büchter

Funktionales Denken, verstanden als Denken in funktionalen Zusammenhängen, ist weit über die Funktionenlehre hinaus auch in anderen Inhaltsbereichen typisch für mathematisches Arbeiten. Der großen Bedeutung funktionalen Denkens stehen dabei nicht mindergroße Schwierigkeiten bei der Ausbildung adäquater mentaler Modelle („Grundvorstellungen") auf Seiten der Schülerinnen und Schüler gegenüber. Ausgehend von einer Bestandsaufnahme in der Grundschule werden Ansätze zur Förderung des funktionalen Denkens in den Sekundarstufen vorgestellt.

Schlüsselwörter: Funktionales Denken, Aufgaben, Unterrichtsmethoden, Material, Medien, Handlungsorientierung

1 Funktionales Denken innerhalb und außerhalb des Mathematikunterrichts

Funktionales Denken durchdringt die Mathematik und den Mathematikunterricht, ist aber auch im Alltag eine typische Betrachtungsweise. Vor einer systematischen Darstellung des Funktionsbegriffs und funktionalen Denkens lenken ausgewählte Beispiele zunächst den Blick auf die Bedeutung und die Schwierigkeiten funktionalen Denkens.

1.1 Funktionales Denken im Mathematikunterricht

Innerhalb des Mathematikunterrichts ist funktionales Denken nicht auf den Bereich der klassischen Funktionenlehre der Sekundarstufen beschränkt, sondern spielt auch in anderen Inhaltsbereichen bzw. Leitideen eine zentrale Rolle (vgl. Abb. 1).

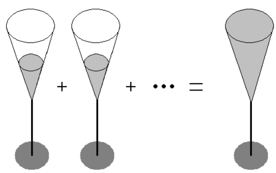


Abb. 1 „Wie viele bis zur halben Höhe gefüllte Gläser werden benötigt?"

Wenn Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe I eine (eingekleidete) Aufgabe wie in Abbildung 1 bearbeiten sollen, dann packen viele ein umfangreiches technisches Handwerkzeug aus, schätzen den Durchmesser und die maximale Füllhöhe – falls diese nicht angegeben sind – und ziehen die Strahlensätze heran, um die Volumina der bis zur halben Höhe gefüllten Gläser und des vollständig gefüllten Glases zu bestimmen. Schließlich ergibt eine Division das gewünscht Ergebnis. Wenn in den vorangegangen Jahres des Mathematiklernens allerdings funktionale Betrachtungen in der Geometrie üblich waren, geben sie womöglich auch direkt die Antwort: „Es werden acht bis zur halben Höhe gefüllte Gläser benötigt, da das Volumen ein Achtel beträgt, wenn die Längen halbiert werden."

Funktionales Denken kann aber nicht nur bei der Anwendung vorhandener Konzepte, sondern – wie etwa bei der folgenden Statistik-Aufgabe (Abb. 2) – auch bei der Entwicklung von neuen Konzepten wichtig sein.

> Für eine Fußballmannschaft (11 Spieler) wird das „Durchschnittsalter" auf zwei verschiedene Arten bestimmt:
> (1) Das arithmetische Mittel beträgt 24,2 Jahre und
> (2) der Median beträgt 22 Jahre.
> Wie würden sich diese beiden Werte verändern, wenn der älteste Spieler 11 Jahre älter wäre?

Abb. 2 Verschiedene Mittelwerte – verschiedene Eigenschaften.

Bei dieser Aufgabe kann entdeckt oder erfahren werden, dass sich der Median einer Datenreihe nicht ändert, wenn der größte oder der kleinste Wert verändert werden, während sich jede Änderung eines Wertes direkt im arithmetischen Mittel niederschlägt.[1]

1.2 Funktionales Denken außerhalb der Schule

Im Alltag interessieren sich viele Menschen – nicht nur zum Zwecke des Small-Talks – für das aktuelle und das prognostizierte Wetter. Wetterdaten für unzählige Messstationen und auf diesen Daten basierende Wetterprognosen findet man überall im Internet. In Abbildung 3 sind Temperaturdaten tabellarisch und als Liniendiagramm dargestellt. Typische Fragestellungen, die mithilfe dieser Darstellungen beantwortet werden können, sind

[1] Vom höheren Standpunkt aus betrachtet können sowohl der Median als auch das arithmetische Mittel als Funktion in *n* Veränderlichen aufgefasst werden.

- Wie warm wird es morgen?
- Wann ist es morgen am wärmsten?
- Wie schnell steigt die Temperatur?

Uhrzeit	Temperatur
0	18,2
1	17,8
2	17
3	15,1
4	12,9
5	10,2
6	7,8
7	6,2
8	5,8
9	6,4
10	7,3
11	8,4
12	9,5
13	10,7

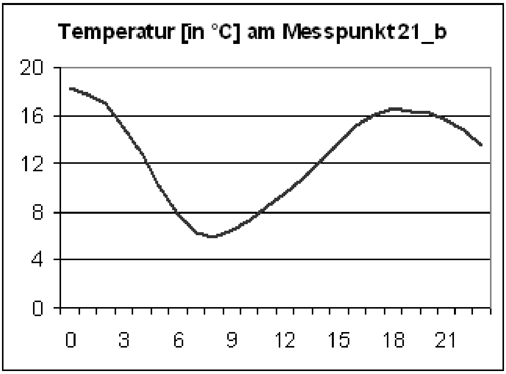


Abb. 3 Messwerttabelle und Liniendiagramm für Tagestemperaturen

Und auch für den Finanzminister und die Steuerzahler ist funktionales Denken relevant. Die zu zahlende Steuer hängen direkt vom anrechenbaren Bruttoeinkommen (und bestimmten weiteren Tarifmerkmalen) ab. Diskussionen über Steuerreformen, „kalte Progression" usw. werden letztlich immer vor dem Hintergrund des jeweils gültigen Einkommensteuertarifs und mit dem Ziel seiner Veränderung geführt (vgl. Abb. 4).

§ 32a Einkommensteuertarif

(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7 834 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7 835 Euro bis 13 139 Euro: $(939{,}68 \cdot y + 1\,400) \cdot y$;
3. von 13 140 Euro bis 52 551 Euro: $(228{,}74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 1\,007$;
4. von 52 552 Euro bis 250 400 Euro: $0{,}42 \cdot x - 8\,064$;
5. von 250 401 Euro an: $0{,}45 \cdot x - 15\,576$.

„y" ist ein Zehntausendstel des 7 834 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
„z" ist ein Zehntausendstel des 13 139 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
„x" ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Abb. 4 Auszug aus dem Einkommensteuergesetz (EStG)

Wenn man typische Fragestellungen in diesem Kontext – wie die nach dem Durchschnitts-, Grenz- oder Spitzensteuersatz – weiterverfolgt gelangt man schnell zu Konzepten der Differenzialrechnung (vgl. Büchter und Henn 2010, S. 310 ff.).

1.3 Funktionales Denken funktioniert nicht von alleine

Auch wenn – wie weiter unten gezeigt wird – Kinder funktionales Denken häufig bereits vor ihrer Einschulung ausüben, kann keineswegs davon ausgegangen werden, dass sich diese „Denkgewohnheit" von alleine entwickelt. Gerade innerhalb des Mathematikunterrichts zeigt sich immer wieder, dass das Denken in funktionalen Zusammenhängen durchaus anspruchsvoll ist, tragfähige und flexible Vorstellungen voraussetzt und auch sprachliche Mittel benötigt. Ein typisches Beispiel für Schwierigkeiten bei der funktionalen Interpretation von Funktionsgraphen ist die Aufgabe in Abbildung 5.

Ein LKW fährt auf einer Landstraße mit einer nahezu konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h. Vor einer Rechtskurve bremst er etwas ab, bevor er anschließend wieder auf 80 km/h beschleunigt. Welcher Graph stellt den beschriebenen Zusammenhang zwischen Zeit und Geschwindigkeit am besten dar? Begründe deine Antwort.

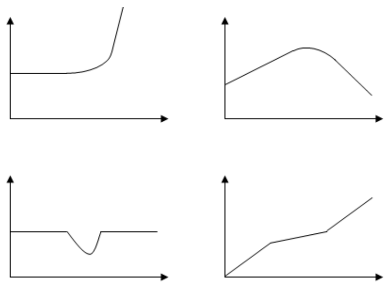


Abb. 5 Zuordnung oder „Ortslinie"

Nicht wenige Schülerinnen und Schüler entscheiden sich etwa in den Klassen 7 oder 8 für den oben rechts angegebenen Graphen und deuten ihn dabei quasi als Landkarte, als Ortslinie der Rechtskurve, nicht aber als Zuordnung zwischen Zeit und Geschwindigkeit.

Ausgehend von dem folgenden hochgradig gesellschaftlich relevanten Textausschnitt lässt sich begründen, dass neben anderen Voraussetzungen auch sprachliche Mittel mitentscheidend für funktionales Denken sind:

Tempo 30 in allen Städten und Gemeinden
[...] Wenn ein Pkw mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h fährt und ein Kind 15 m vor ihm auf die Fahrbahn läuft, trifft der Pkw das Kind mit einer Aufprallgeschwindigkeit von 47 km/h, wenn der Fahrer eine Vollbremsung macht.

Fährt dieser Pkw in derselben Situation mit 30 km/h, kommt er nach 15 m zum Stehen, und das Kind wird nicht angefahren.“ (Limbourg 1999, S. 1)

Grundsätzlich stellt sich bei Unfällen in Tempo-30-Zonen mit zu schnell gefahrenen PKW die Frage: *Wäre der Unfall auch passiert, wenn der PKW nur 30 km/h schnell gefahren wäre?* Die sprachliche Darstellung des Textausschnitts und dieser Frage verweisen darauf, dass sprachliche Mittel, wie etwa die Möglichkeiten, Konditionalsätze zu bilden oder den Konjunktiv zu verwenden, einen wesentlichen Anteil am Denken in funktionalen Zusammenhängen haben. Die gut belegte Vermutung, dass fachtypische Denkweisen überwiegend sprachlich vermittelt sein dürften, hat in jüngerer Zeit zu einer stärkeren Berücksichtigung der fachspezifischen Sprachregister in den verschiedenen Fachdidaktiken und in der Curriculumentwicklung (vgl. MSW 2011) geführt.

2 Funktionen und funktionales Denken

Nach der einleitenden Darstellung der Bedeutung funktionalen Denkens und potenzieller Schwierigkeiten hierbei wird das Konzept „funktionales Denken“ im Folgenden zunächst systematisch vor dem Hintergrund der historischen Entwicklung und didaktischer Aspekte des Funktionsbegriffs betrachtet. In den nachfolgenden Abschnitten werden dann Beispiele für funktionales Denken im Elementar- und Primarbereich sowie Ansätze zur vertieften Förderung funktionalen Denkens im Sekundarbereich vorgestellt.

2.1 Historische Entwicklung des Funktionsbegriffs

Der moderne Funktionsbegriff wurde wesentlich im 18. und 19. Jahrhundert entwickelt. An dieser Stelle genügt eine grobe Skizze der Entwicklung, um das Konzept „funktionales Denken“ später präziser fassen zu können. Ausführlichere Darstellungen findet man z. B. bei Büchter und Henn (2010), Krüger (2000) oder Malle (1996).

- *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716) verwendet vermutlich als erster systematisch die Bezeichnung „Funktion“.
- *Johann Bernoulli* (1667 – 1748) definiert Funktionen für Zusammenhänge zwischen geometrischen Größen, die mithilfe von Termen dargestellt werden können.
- *Leonhard Euler* (1701 – 1783) erweitert diese Sichtweise um Funktionen, die graphisch gegeben sind. Auf ihn geht die suggestive Schreibweise $f(x)$ zurück.

- *Peter Gustav Lejeune-Dirichlet* (1805 – 1859) stellt die Eindeutigkeit der Zuordnung in den Vordergrund, beschränkt sich dabei aber noch auf Intervalle.
- *Richard Dedekind* (1831 – 1916) liefert eine weniger anschauliche Definition, die bezüglich ihrer Allgemeinheit auch heutigen Ansprüchen genügt (eindeutige Zuordnung zwischen beliebigen Mengen); er verwendet dafür die Bezeichnung „Abbildung“, die heute synonym mit „Funktion“ verstanden wird.
- *Felix Hausdorff* (1862 – 1942) präzisiert die Definition schließlich auf mengentheoretischer Basis soweit, dass sie heutigen Ansprüchen vollständig genügt.

Der dynamisch-anschauliche Aspekt von Funktionen („... wird zugeordnet ...“) ist im Hausdorff'schen Funktionsbegriff nur noch implizit über die historischen Vorläufer enthalten. Wie so oft in der Mathematik gelingt eine präzise Definition auf mengentheoretischer Basis durch Aufgabe anschaulich-suggestiver Begriffsbestandteile. Für das Arbeiten mit Funktionen muss aber auf solche Vorstellungen zurückgegriffen werden.

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ist es ratsam zunächst mit dem Dirichlet'schen Funktionsbegriff zu arbeiten, der ausreicht, um anschauliche Zusammenhänge zwischen Größen zu beschreiben. Später sollte dieser Begriff z. B. mit Blick auf die Präzisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (vgl. Büchter und Henn 2007, S. 183 ff.) zum allgemeineren Dedekind'schen Funktionsbegriff weiterentwickelt werden.

2.2 Didaktische Aspekte des Funktionsbegriffs

Die Didaktik des Funktionsbegriffs ist ein gut bearbeitetes Feld mit vielen wissenschaftlichen und vielen praxisorientierten Veröffentlichungen bis hin zu konkreten Lernmaterialien. An dieser Stelle werden die zentralen Aspekte „Darstellungsarten“ und „Grundvorstellungen“ betrachtet.

2.2.1 Darstellungsarten von Funktionen

„Funktionen haben viele Gesichter“ (Herget et al. 2000), d. h. sie lassen sich auf unterschiedliche Arten darstellen. Die Darstellungen lassen sich – etwas vergröbert und idealisiert – klassifizieren als *situative* (Text/Beschreibung/Phänomen), *numerische* (Tabelle), *geometrische* (Graph) und *algebraische* (Term) Darstellung. Typische Beispiele für die Darstellungsarten sind in den obigen Abbildungen 3 bis 5 zu finden.

Wichtig für „Kompetenz mit Funktionen“, also das jeweils sachangemessene Arbeiten mit Funktionen, ist eine sichere und flexible Beherrschung der Darstellungsarten und der möglichen Darstellungswechsel zwischen ihnen. Wenn man berücksichtigt, dass auch innerhalb einer Darstellungsart noch ein Wechsel der konkreten Darstellung vorgenommen werden kann (z. B. durch Termumformung oder durch eine Veränderung der Skalierung) sind $4 \cdot 4 = 16$ Typen von Darstellungswechseln möglich und beim konkreten mathematischen Arbeiten auch tatsächlich relevant. Der Wechsel der Darstellung ist bei vielen Problemstellungen ein Schlüssel zur Antwort.

2.2.2 Grundvorstellungen von Funktionen

Wer mit relativ abstrakten Begriffen arbeiten möchte, benötigt tragfähige Vorstellungen zu diesen Begriffen. Für den Mathematikunterricht ist wichtig, dass er die vorhandenen individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler in Richtung der fachlich idealisierten Grundvorstellungen weiterentwickelt (vgl. vom Hofe 1995, 2003). Für den Funktionsbegriff sind die folgenden Grundvorstellungen von zentraler Bedeutung (vgl. Malle 2000; Vollrath 1989):

- *Zuordnungsvorstellung*: Lässt sich eine Größe einer anderen eindeutig zuordnen? Welche Größe wird einer anderen (eindeutig) zugeordnet?
  (Beispiele: Der Zuordnungsversuch zwischen Körpertemperatur und Umgebungstemperatur wird im Allgemeinen scheitern; hingegen kann der Tageszeit eindeutig die Außentemperatur zugeordnet werden.)
- *Ko-Variationsvorstellung*: Wie verändert sich eine Größe mit der anderen?
  (Beispiel: Wie verändert sich der Bremsweg, wenn sich die Geschwindigkeit verändert?)
- *Objektvorstellung*: Wie verhält sich die Funktion als Ganzes?
  (Beispiele: Eine quadratische Funktion hat höchstens ein Maximum; Schwingungen lassen sich mithilfe einer angepassten Sinusfunktion beschreiben.)

2.3 Das Konzept „funktionales Denken“

Die Forderung, dass funktionales Denken im Mathematikunterricht gefördert werden soll, wurde in prominenter Form erstmals im Rahmen der „Meraner Reformvorschläge“ erhoben. Die „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ sollte zu einer Sonderaufgabe des Mathematikunterrichts werden (vgl. Vohns 2007, S. ff.). Dieser Forderung liegt die Erkenntnis zugrunde, dass die Entwicklung des modernen Funktionsbegriffs Auslöser für eine immer schneller voranschreitende Modernisierung der gesamten Mathematik war.[2] Der Funktionsbegriff erwies sich in allen Bereich als äußerst nützlich; er regte neue Begriffs- und Theoriebildungen an. So hat z. B. *Felix Klein* (1849 – 1925), der die „Meraner Reformvorschläge“ maßgeblich mitgestaltet hat, in seinem *Erlanger Programm* eine Klassifikation verschiedener Geometrien auf der Basis bestimmter Funktionstypen (zugelassene geometrische Transformationen) vorgeschlagen. Lietzmann (1951) bilanziert die Bedeutung der Reformvorschläge für den Mathematikunterricht:

> „Was ist nun das entscheidend Neue, das die sogen. Meraner Pläne mit ihrer Forderung des ‚funktionalen Denkens' gebracht haben? [...] Es galt, dieses Durchtränken der Mathematik mit dem Funktionsbegriff gründlicher als bisher zu betreiben, den Funktionsbegriff gewissermaßen als Kitt zu verwenden, der die verschiedenen Kapitel der Schulmathematik zu einer Gesamtheit zu vereinigen geeignet ist.“

Tatsächlich hat die Funktionenlehre seit Mitte des 20. Jahrhunderts immer mehr Platz im Mathematikunterricht eingenommen, häufig allerdings in Form einer algebraisch dominierten Auseinandersetzung mit solchen Funktionen, die durch gut überschaubare geschlossene Funktionsterme dargestellt werden können. Ob insbesondere *Felix Klein* „funktionales Denken“ so verstanden hat, darf bezweifelt werden.

Wie lässt sich das Konzept „funktionales Denken“ aus heutiger Sicht fassen? Vollrath (1989) hat die folgende Klärung vorgeschlagen: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“ Dabei bindet er funktionales Denken eng an Funktionen und die Arbeit mit Funktionen in der Breite. Insbesondere berücksichtigt er auch statische Betrachtungsweisen im Sinne der mengentheoretischen Präzisierung des Funktionsbegriffs, die ohne dynamische Zuordnungs- oder Veränderungsvorstellungen auskommen. Mit dieser Öffnung verliert das Konzept „funktionales Denken“ an Kontur und innerer Kohärenz. Als pragmatische Begriffsklärung für den Mathematikunterricht schlage ich deshalb eine

[2] Dabei wurde auch deutlich, dass der Begriff „Funktion“, etwa im Sinne Leibniz', Bernoullis, Eulers und Dirichlets, und der Begriff „Abbildung“, der vor allem in der Geometrie verwendet wurde, aus moderner Sicht gleichbedeutend sind und synonym verwendet werden können.

Rückbesinnung auf die dynamischen Aspekte und auf den Ursprung des Funktionsbegriffs vor:

Funktionales Denken soll verstanden werden als Denken in funktionalen Zusammenhängen, bei dem das Änderungsverhalten der beteiligten Größen im Mittelpunkt steht.

In diesem Verständnis müssen Funktionen als abstrakte Objekte, mit denen funktionale Zusammenhänge beschrieben werden können, keine explizite Rolle spielen; vielmehr steht Zusammenhang zwischen den Größen im Sinne der *Ko-Variationsvorstellung* im Vordergrund. Damit hat funktionales Denken keine zu enge Bindung an die Funktionenlehre der Sekundarstufen und kann als „Kitt“ im Sinne *Lietzmanns* erfahrbar werden.

3 Funktionales Denken in der Grundschule

Die Förderung funktionalen Denkens bis hin zur Etablierung einer Denkgewohnheit beginnt nicht erst, wenn in der Sekundarstufe I Funktionen systematisch betrachtet werden. Der obigen Begriffsklärung folgend geht es vielmehr darum, möglichst früh in Situationen funktionale Zusammenhänge zu identifizieren bzw. – je nach erkenntnistheoretischem Standpunkt – funktionale Zusammenhänge in Situationen hineinzusehen. Dies beginnt in der Regel schon vor der Einschulung, wie die beiden folgenden Gesprächsausschnitte zwischen einem vierjährigen Kind (K) und seinem Vater (V) zeigen:

Am Küchentisch beim Abendessen

K: Papa, ich bin doch 4 und Mia ist 1.
V: Ja.
K: Und wenn ich 5 bin, wie alt ist Mia dann?
V: 2.
K: Und wenn ich 6 bin?
V: Dann ist Mia 3.
K: Ist Mia dann 4, wenn ich 7 bin?

Draußen beim Laubfegen

V: Sieht du, wenn man das zu zweit macht, ist man auch viel schneller.
K: Und wenn das 3 oder 4 oder 9 sind, geht es noch schneller.
V: Wie viele wären denn am besten? 3, 4 oder 9?
K: 9 ...

Im ersten Gesprächsausschnitt betrachtet der Vierjährige das Alter der jüngeren Schwester in Abhängigkeit von seinem Alter und nähert sich über einzelne Zuordnungen der gemeinsamen Veränderung beider Größen. Im zweiten Gesprächsausschnitt ist zumindest ein Bewusstsein dafür vorhanden, dass im fraglichen Kontext die „Einsatzdauer“ abnimmt, wenn die „Einsatzkräfte“ (in der betrachteten Größenordnung) mehr werden.

Hier wird schon sichtbar, dass funktionales Denken im Sachrechnen der Grundschule sehr häufig möglich oder sogar naheliegend ist. Häufig hängt eine Größe (z. B. Kosten) mit einer zweiten Größe (z. B. Menge) zusammen oder inhaltlich sogar von dieser ab. In vielen Fällen treten – wie im Alltag – proportionale Zuordnungen auf. Da es aber auch andere Arten des Zusammenhangs gibt, ist es von Anfang an wichtig, dass auch nicht-proportionale Zuordnungen in den betrachteten Sachsituationen berücksichtig werden.

Funktionales Denken ist in der Grundschule jedoch nicht auf das Sachrechnen beschränkt; vielmehr liegen viele bewährte Aufgabenformate in der Arithmetik und der Geometrie vor, mit denen funktionales Denken gefördert werden kann (vgl. Jansen 2008). Ein typisches Beispiel sind operative strukturierte Übungen zu den Grundrechenarten (vgl. Abb. 6), wobei neben dem Päckchenformat viele weitere Darstellungen existieren (Malhäuser, Plushäuser ...).

5 + 6 = ___	3 – 2 = ___	9 + ___ = 16	3 · 7 = ___
6 + 6 = ___	4 – 2 = ___	8 + ___ = 16	4 · 7 = ___
7 + 6 = ___	5 – 2 = ___	7 + ___ = 16	5 · 7 = ___
7 + 7 = ___	7 – 2 = ___	6 + ___ = 16	6 · 7 = ___
7 + 8 = ___	9 – 2 = ___	6 + ___ = 17	7 · 7 = ___

Abb. 6 Operativ strukturierte Übungen zu den Grundrechenarten

Bei der Aufgabenbearbeitung kann entdeckt oder genutzt werden, wie die Summanden mit der Summe zusammenhängen, wie die Differenz mit Subtrahend und Minuend zusammenhängt, ... Dies kann implizit geschehen, wenn die Schülerinnen und Schüler entsprechende Zusammenhänge „beiläufig" entdecken oder nutzen, aber auch explizit durch Fragen angestoßen werden: „Wie verändert sich das Ergebnis, wenn die erste Zahl um 2 vergrößert wird?"

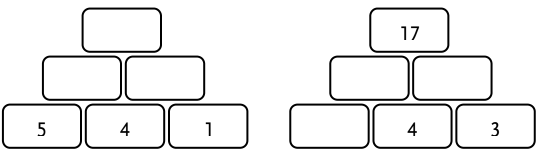


Abb. 7 Zahlenmauern

Noch stärker ausgerichtet auf funktionales Denken sind Zahlenmauern in ihren unterschiedlichen Konstellationen (vgl. Abb. 7).

Auch hier liegen neben der fortwährenden Ausübung der Addition und Subtraktion Betrachtungen und Fragen nahe, die typisch für funktionales Denken sind:

- Wie verändert sich die Zahl im obersten Stein, wenn die Zahl unten links um 1, 2, 3, ... vergrößert / verkleinert wird?
- Wie verändert sich die Zahl im obersten Stein, wenn die Zahl unten in der Mitte um 1, 2, 3, ... vergrößert / verkleinert wird?
- Die Zahl im obersten Stein soll sich nicht verändern. Wie müsste sich die Zahl unten links verändern, wenn die Zahl unten rechts um 2 vergrößert werden soll?

Weitere Aufgabenformate, bei denen funktionales Denken nahe liegt oder zumindest hilfreich ist, sind (ohne Anspruch auf annähernde Vollständigkeit) z. B.

- figurierte Zahlen und Zahlenfolgen, bei denen insbesondere das Änderungsverhalten interessant ist,
- Aufgaben zum Auslegen von Flächen bzw. Rauminhalten, bei denen die Plättchen- bzw. Würfelzahl von den Kantenmaßen abhängt,
- Diagramme, in denen funktionale Zusammenhänge darstellt sind,
- Fermi-Aufgaben, bei denen das Ergebnis in Abhängigkeit von den getroffenen Annahmen betrachtet werden kann und sollte,
- ...

4 Ansätze zur vertieften Förderung funktionalen Denkens in den Sekundarstufen

Der Mathematikunterricht in den Sekundarstufen kann inhaltlich, methodisch und bei den verwendeten Materialien an die Lerngelegenheiten der Grundschule anknüpfen und dabei insbesondere das funktionale Denken soweit vertiefen, dass es zur Denkgewohnheit wird. Die Bedeutung dieser Zielsetzung wird im Folgenden zunächst ausgeführt, bevor unterrichtspraktische Beispiele dargestellt werden, die – häufig materialbasiert, handlungsorientiert und mit Unterstützung digitaler Werkzeuge – dazu beitragen, dass tragfähige Vorstellungen von Funktionen ausgebildet werden, die funktionales Denken effektiver und effizienter werden lassen.

4.1 Funktionales Denken zur Gewohnheit werden lassen

Wenn Kreisberechnungen systematisch betrieben werden, dann sollen Schülerinnen und Schüler häufig zunächst die Erkenntnis gewinnen, dass anscheinend eine „Kreiszahl“ existiert, und anschließend diese Kreiszahl näherungsweise bestimmen. Ein mögliches

Lernarrangement, das beide Schritte vereint, ist in Abbildung 8 angegeben.

Suche verschiedene „runde“ Gegenstände wie Dosen, Gläser, Teller, ... und miss jeweils ihren Durchmesser und ihren Umfang. Wie verändert sich für verschieden große Gegenstände der Umfang mit dem Durchmesser?

Abb. 8 Von runden Gegenständen zur Kreiszahl

Wenn das Denken in funktionalen Zusammenhängen tatsächlich eine Denkgewohnheit für die Schülerinnen und Schüler ist und entsprechende Tätigkeiten wiederholt im Unterricht angeregt werden, dann erscheint die Aufgabe in Abbildung 8 eine ganz gewöhnliche Annäherung an die Maße eines Kreises und nicht etwa nur ein besonderer Kniff zur Bestimmung der Kreiszahl zu sein. Das Vorgehen ist dann typisch und mit Unterstützung digitaler Werkzeuge können die Schülerinnen und Schüler schnell vorzeigbare und für praktische Zwecke ausreichend genaue Resultate gewinnen (vgl. Abb. 9).

	A	B	C
1	**Gegenstand**	**d [in cm]**	**u [in cm]**
2	Glas	6,4	19,9
3	Dose	5,8	18,6
4	Bierdeckel	11,0	34,9
5	Teller	16,7	52,6
6	Kerze	3,9	12,2
7	Eimer	22,4	70,7
8	Tasse	8,0	25,0
9	Küchenrolle	13,8	43,0
10	Dinkelstange	1,4	4,6
11	Topf	19,5	61,4
12			

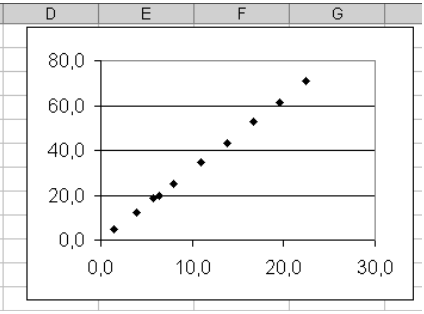


Abb. 9 Messergebnisse zur Bestimmung der Kreiszahl

Aus der graphischen Darstellung der Daten in Abbildung 9 resultiert schnell die Vermutung, dass bei Kreisen der Umfang proportional zum Durchmesser ist. Die Kreiszahl kann dann als Proportionalitätsfaktor bestimmt werden; mit den konkreten Daten aus Abbildung 9 gelingt dies auf ein Hundertstel genau.

Aktivitäten, die das obigen Vorgehen naheliegend und die Betrachtung gewöhnlich erscheinen lassen, sind z. B. die Entdeckung und

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit oder die Entdeckung des Hooke'schen Gesetzes für Federn und die Bestimmung konkreter Federkonstanten. Bei der Schallgeschwindigkeit kann in gut übersichtlichem Gelände mithilfe einer Starterklappe von Sportfesten der Zeitunterschied zwischen „gesehen" und „gehört" zum Ausgangspunkt der Untersuchung gemacht werden (vgl. Vogel 2008). Bei der Entdeckung und Bestimmung der Federkonstanten kann z. B. eine PET-Flasche an eine Feder gehängt und mit unterschiedlichen Mengen Wasser befüllt werden, wobei jeweils die Auslenkung gemessen wird (vgl. Büchter et al. 2010).

4.2 Förderung tragfähiger Vorstellungen

Funktionen stellen universelle Modelle dar, mit denen funktionale Zusammenhänge mathematisch beschrieben werden können. Erkenntnisse und Arbeitsweisen aus dem Bereich der Funktionen können also genutzt werden, um die funktionalen Zusammenhänge zu untersuchen und funktionales Denken zu unterstützen. Damit Schülerinnen und Schüler tatsächlich auf dieses mathematische Werkzeug zurückgreifen können, müssen sie über tragfähige Vorstellungen von Funktionen verfügen. Das Beispiel in Abbildung 5 hat gezeigt, dass von der Verfügbarkeit solcher Vorstellungen aber nicht ohne Weiteres ausgegangen werden kann. Schülerinnen und Schüler müssen vielmehr behutsam an Funktionen und ihre Darstellungen herangeführt werden, damit sie solche Darstellungen in den modellierten Kontexten angemessen interpretieren und nutzen können. Dafür müssen sie entsprechende Primärerfahrungen machen können, d. h. selbst ummittelbar die Größen wahrnehmen, zwischen denen ein Zusammenhang betrachtet wird. In Abbildung 10 wird ein entsprechendes Szenario dargestellt, das für den Einstieg in die Arbeit mit Funktionsgraphen konzipiert wurde (vgl. Brauner 2008).

Im dargestellten Lernszenario ist besonders produktiv, dass es selbst bei möglichst genauen „Choreografien" und „Protokollen" Unterschiede zur Ausgangszeichnung geben wird. Dies führt in diesem handlungs- und dialogorientierten Szenario in der Regel zu Diskussionen um Zuordnungsaspekte („Nach 16 Sekunden warst du gar nicht am weitesten vom Stuhl entfernt.") und Änderungsverhalten („Da bist du viel zu langsam gewesen.").

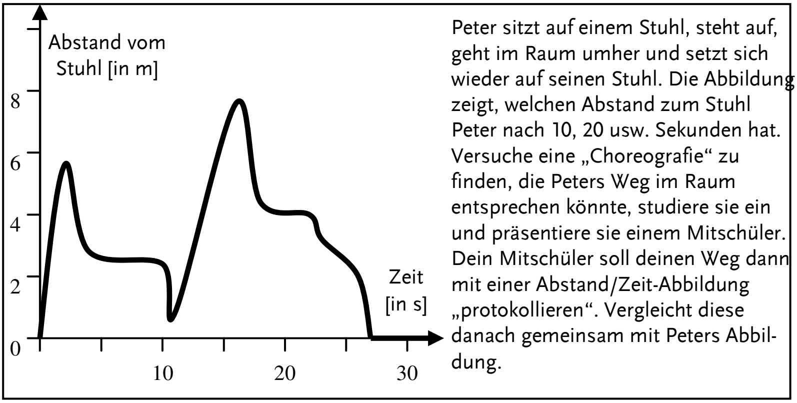


Abb. 10 Graphen gehen

4.3 Das Arbeiten mit Funktionen wieder auf die Füße stellen

Die Funktionenlehre in der späten Sekundarstufe I war traditionell stark innermathematisch geprägt und auf die Darstellungswechsel zwischen Term und Graph fokussiert („Stelle die Geradengleichung auf.“ bzw. „Stelle die Parabel im Koordinatensystem dar.“); die Arbeit mit Funktionen erschien dabei häufig als Selbstzweck. Dabei ist der zentrale Aspekt in den Hintergrund getreten, dass Funktionen universelle Modelle für die Beschreibung außer- oder innermathematischer funktionaler Zusammenhänge darstellen.

Vor allem beim funktionalen Denken in außermathematischen Situationen beginnt der typische Weg der Annäherung an ein Phänomen aber mit dem Erheben von Daten, d. h. häufig mit dem Messen der betrachteten Größen. In der Regel werden die Daten anschließend graphisch dargestellt, bevor – wenn der darstellte Zusammenhang schlicht genug ist – auch zugehörige Terme aufgestellt werden können. Die reale Bedeutung dieser Schrittfolge (Situation → Tabelle → Graph → ggf. Term), die insbesondere in den Anwendungsdisziplinen zentral ist, spiegelt sich allerdings immer noch nicht angemessen im Unterricht wieder. Die oben genannten Lernarrangements zur Bestimmung der Kreiszahl (Abb. 8 u. 9), der Schallgeschwindigkeit oder einer Federkonstanten sind typische Beispiele für dieses Vorgehen, die allesamt unterrichtspraktisch erprobt und bewährt sind.

Weitere gängige Kontexte, die dabei helfen können, das Arbeiten mit Funktionen vom Kopf wieder auf die Füße zu stellen, sind z. B.

- Füllkurven, die entstehen, wenn unterschiedlich geformte Gefäße gleichmäßig mit Wasser (25 ml, 50 ml, 75 ml, 100 ml, ...) befüllt werden und die Füllhöhe gemessen, tabelliert und graphisch dargestellt wird; bei besonderen geometrischen Formen können Schülerinnen und Schüler gegen Ende der Sekundarstufe I auch zugehörige Terme aufstellen;
- Abbrennvorgänge bei unterschiedlich dicken und unterschiedlich geformten Kerzen, die auf ähnliche Tätigkeiten und Überlegungen wie bei Füllkurven hinaus laufen;
- Abkühlungsprozesse von Heißgetränken wie Tee oder Kaffee, deren mathematische Beschreibung und Untersuchung in der Sekundarstufe II bis hin zum Aufstellen und Lösen einfacher Differenzialgleichungen führen kann (vgl. Büchter und Henn 2010, S. 320 ff.).

Darüber hinaus sind anregende Szenarien in der Themenbox „Funktionaler Zusammenhang“ (Müller 2008) des Mathekoffers (Büchter und Henn 2008) enthalten.

4.4 Die „funktionale Brille“

Der Mathematikunterricht bietet vermutlich in jeder Stunde Anlässe zu funktionalem Denken, die zwar nicht unbedingt immer, aber auf jeden Fall immer öfter auch dazu genutzt werden sollten, dieses als Denkgewohnheit bei den Schülerinnen und Schülern zu entwickeln. Im vorliegenden Text wurden einige typische Beispiele für außer- und innermathematische Kontexte aus dem Bereich der Grundschule und der Sekundarstufen vorgestellt, die zum funktionalen Denken einladen. Von diesen Beispielen ausgehend lassen sich weitere Beispiele schnell finden. Grundsätzlich können geeignete Anlässe lassen leicht gefunden werden, wenn man mit der „funktionalen Brille“ durch den Unterricht geht und immer wieder prüft, ob die folgende Frage gestellt werden kann:

„Wie verändert sich A, wenn sich B verändert?“

Literatur

Brauner, U. (2008). Graphen gehen. Ein Gefühl für Diagramme entwickeln. *mathematik lehren*, Heft 148, 20-23.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls.* 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (Hrsg.) (2008). *Der Mathekoffer. Mathematik entdecken mit Materialien und Ideen für die Sekundarstufe I.* Seelze/Velber: Friedrich Verlag.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Büchter, A., Henn, H.-W. & Müller, J. H. (2010). Experimenteller Zugang zu funktionalem Denken. Arbeiten mit der Funktionen-Box des Mathekoffers. In R. Bruder & A. Eichler (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 15: Modellierungen von Erastosthenes bis Google* (S. 15-24). Hildesheim: Franzbecker.

Herget, W., Malitte, E. & Richter, K. (2000). Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht. In L. Flade & W. Herget (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen* (S. 115-124). Berlin: Volk und Wissen.

Jansen, P. (2008). Frühe Wege zu Funktionen. Erfahrungen aus der Grundschule nutzen. *mathematik lehren*, Heft 148, 12-15.

Lietzmann, W. (1951). *Methodik des mathematischen Unterrichts.* 2 Bände. Heidelberg: Quelle & Meyer.

Limbourg, M. (1999). Tempo 30 in allen Städten und Gemeinden. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-647/Emsdett.doc. Gesehen 03.11.2011.

Krüger, K. (2000). *Erziehung zum funktionalen Denken – zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.* Berlin: Logos-Verlag.

Malle, G. (1996). Aus der Geschichte lernen. *mathematik lehren*, Heft 75, 4-8.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, Heft 103, 8-11.

MSW – Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2011). Kernlehrplan und Richtlinien für die Hauptschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/hauptschule/Mathe_HS_KLP_Endfassung.pdf. Gesehen 03.11.2011.

Müller, J. H. (2008). Funktionaler Zusammenhang. Themenbox. In A. Büchter & H.-W. Henn (Hrsg.), *Der Mathekoffer. Mathematik entdecken mit Materialien und Ideen für die Sekundarstufe I.* Seelze/Velber: Friedrich Verlag.

Vogel, M. (2008). Wie schnell hört man eigentlich? Daten erheben, auswerten und interpretieren. *mathematik lehren*, Heft 148, 16-19.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips.* Norderstedt: Books on Demand.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10 (1), 3-37.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, Heft 118, 4-8.

Dr. Andreas Büchter
Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen
Paradieser Weg 64, 59494 Soest
andreas.buechter@msw.nrw.de

PriMaMedien - Den digitalen Medien eine Chance!

von Silke Ladel & Christof Schreiber

Die ‚Neuen Medien' werden von der Fachdidaktik Mathematik in der Sekundarstufe und der Grundschulpädagogik bereits seit vielen Jahren wahrgenommen. In der Fachdidaktik Mathematik der Primarstufe werden die Einsatzmöglichkeiten digitaler Medien in Deutschland jedoch weitgehend vernachlässigt. In diesem Beitrag stellen wir die aktuelle Sachlage in Deutschland und im internationalen Vergleich dar und zeigen die Entwicklung der letzten Jahre auf. Anschließend gehen wir auf ausgewählte didaktische Ansätze eines gezielten und sinnvollen Medieneinsatzes zum Lernen, Lehren und Forschen im Mathematikunterricht der Primarstufe ein.

Schlüsselwörter: Digitale Medien, Computer, Primarstufe, Mathematik, Lehrerbildung,

1 Entwicklung

Den Überblick über die Entwicklung der ‚Neuen', ‚digitalen' oder ‚computerbasierten' Medien haben wir im Vortrag versucht, auf der Grundlage von vier Veröffentlichungen aus der Grundschulpädagogik bzw. der Mathematikdidaktik darzustellen. Schon vor 1996 gab es rege Bemühungen auch in der Mathematikdidaktik der Primarstufe, die von der Grundschulpädagogik wahrgenommen wurden (Mitzlaff 1996). Dabei lag der Schwerpunkt deutlich auf den Übungsprogrammen. Solche hat Krauthausen auch einerseits verteidigt (2003) und deren Rolle geklärt, nicht ohne den Hinweis auf viele nicht geeignete Programme (Krauthausen und Lorenz 2008). Wichtig war aber auch mit Mitzlaff (2008) auf die Defizite hinzuweisen, die zumindest aus seiner Sicht in den Bereichen außerhalb der Übungsprogramme bestehen. Diese Lücke wird dann allerdings von Krauthausen und Lorenz (2008) geschlossen - wenn es sie denn gab - und es wird gezeigt, dass auch kompetenzorientierter Mathematikunterricht durch digitale Medien unterstützt werden kann.

2 Zahlen und Daten

Der aktuelle Stand zur Computernutzung von Kindern im Alter von 6 bis 13 Jahren zu Hause sowie in der Schule wurde anhand der Kids-

VerbraucherAnalyse (2011) sowie der KIM-Studie (2010) aufgezeigt. Demnach verfügen ca. vier von fünf Grundschulkindern bereits über Erfahrungen mit dem Computer. Drei von vier Kindern waren bereits online. Ca. 50% der Kinder gibt an, mit dem Computer für die Schule zu arbeiten, wobei ein Großteil davon auf die Nutzung von Lernprogrammen fällt. Die Frage nach der sozialen Erwünschtheit der Antworten sei an dieser Stelle offen. Die aktuellsten Zahlen zur Ausstattung der Schulen mit Geräten stammen aus dem Jahr 2006 (Europäische Kommission (Hrsg.) 2006a, 2006b, BMBF (Hrsg.) 2006) und zeigen, dass die Grundschulen in Deutschland sowie im europäischen Ausland mit Geräten ausgestattet sind und zwar mit ca. 1 PC pro 10 Schüler. Bereits 2006 stellte die Ausstattung demnach kein Hindernis mehr für den Einsatz im Mathematikunterricht dar. Dass die Nutzung an Grundschulen dennoch unterdurchschnittlich ist, zeigt die Studie zu ‚Indicators on ICT in Primary and Secondary Education' (Pelgrum-EdAsMo und Doornekamp-Doornekamp, 2009), der zu Folge Deutschland bei der Nutzung im Mathematikunterricht von vierten Klassen mit 21% deutlich im unteren Drittel liegt. Die Begründungen der Lehrkräfte für den nicht erfolgten Einsatz legen nahe, dass ein großes Defizit bzgl. der Entwicklung didaktischer Konzepte besteht.

3 Didaktische Ansätze

Im Folgenden werden sechs didaktische Ansätze aufgeführt, die einen sinnvollen Gebrauch digitaler Medien aufzeigen. Diese wurden im CERMAT (Centre of Educational Research in Mathematics and Technology) (Kap. 3.1 – 3.3), sowie im Rahmen des Projektes ‚Lehr@mt' an der Goethe-Universität in Frankfurt entwickelt (Kap. 3.4 – 3.6). Das Projekt „Lehr@mt – Medienkompetenz als Phasen übergreifender Standard in der hessischen Lehrerbildung" wird in Kooperation vom Amt für Lehrerbildung in Frankfurt und der Goethe Universität durchgeführt und vom Hessischen Kultusministerium gefördert. Eines der Teilprojekte ist am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik verortet (vgl. Reinhard u.a. 2010).

3.1 Die interaktive Stellenwerttafel

Zahlen können auf unterschiedliche Art und Weise dargestellt werden, in Wortform (z.B. fünfundzwanzig), in reiner Ziffernschreibweise (z.B. 25), in Ziffernschreibweise unter Angabe von Bündelungseinheiten (z.B. 2Z 5E) oder in der Stellenwerttafel. Die zwei dabei zugrunde liegenden Prinzipien sind das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip. Aktuell im Internet und auf Lernsoftware zu findende Veranschaulichungen oder Aufgaben zur Stellenwerttafel sind häufig darauf beschränkt bereits erlernte Lerninhalte zu automatisieren, z.B. „Bei welcher Zahl steht eine „0“ an der Einerstelle: 340, 321, 406?“. Die Interaktivität besteht lediglich darin, die korrekte Antwort auf eine Frage einzugeben, und entsprechend Rückmeldung (richtig, falsch) zu erhalten. Die Aufgaben werden des Weiteren von einer Vielzahl an Animationen und Bildern überdeckt, die in keinem Zusammenhang zur Aufgabe stehen, jedoch die volle Aufmerksamkeit des Kindes in Anspruch nehmen (z. B. Place Value Pirates http://www.mrnussbaum.com/placevaluepirates1.htm) (vgl. hierzu Kohärenzprinzip Kap. 3.2). Sind Anschauungen gegeben, so genügen diese selten den mathematikdidaktischen Prinzipien und ermöglichen kaum Einsicht in mathematische Zusammenhänge. Ein Mehrwert digitaler Medien besteht nicht.

Um dem entgegen zu wirken, wird aktuell eine interaktive Stellenwerttafel entwickelt. Diese Entwicklung erfolgt im ständigen Wechselspiel aus Erprobungen und Anpassungen und wird entsprechend dem aktuellen Stand hier vorgestellt (s. Abb. 1). Die Verwendung von Objekten in der Stellenwerttafel ist im herkömmlichen Unterricht häufig auf einen kleinen Zahlenraum beschränkt, da es zu aufwändig wäre, z.B. 3 Hunderter in 300 Einer zu entbündeln. Ein Vorteil digitaler Medien besteht in der Möglichkeit, auch mit großen Anzahlen anschaulich arbeiten zu können. So kann in dieser interaktiven Stellenwerttafel ein Objekt von den Hundertern zu den Einern gezogen werden und es erscheint eine ‚Wolke’ von einhundert Objekten bei den Einern. Diese sind bewusst nicht strukturiert dargestellt, da das Ziel nicht die Erfassung strukturierter Zahldarstellungen ist, sondern es soll die Vorstellung gestärkt werden, dass und wie sich der Wert eines Objekts ändert, je nach dem, an welcher Stelle es steht. Wird ein Objekt von den Zehnern zu den Hundertern gezogen – und sind entsprechend viele Objekte bei den Zehnern vorhanden – so gehen automatisch neun weitere mit in die Hunderterspalte und werden dort zu einem Objekt. Dieser Vorgang muss also nicht zählend erfolgen, indem jedes einzelne der zehn Objekte gezogen werden muss, sondern es passiert mit einem Zug. Sind zu wenige Objekte vorhanden, so geht das Objekt automatisch wieder zurück an seine Ursprungsstelle. Die ikonische Darstellung ist automatisch mit einer symbolischen Darstellung verknüpft. Dies stellt einen weiteren Mehrwert digitaler Medien dar (vgl. hierzu Kap. 3.2). Wird ein Objekt von den Hundertern zu den Einern verschoben, so verringert sich die Zahl bei den Hundertern um eins, bei den Einern vergrößert sie sich um 100. Gleichzeitig wird diese Zahl rot markiert, um den Kindern zu signalisieren, dass hier die Möglichkeit zu bündeln besteht (vgl. Fokus of Attention (Raskin 2000)).

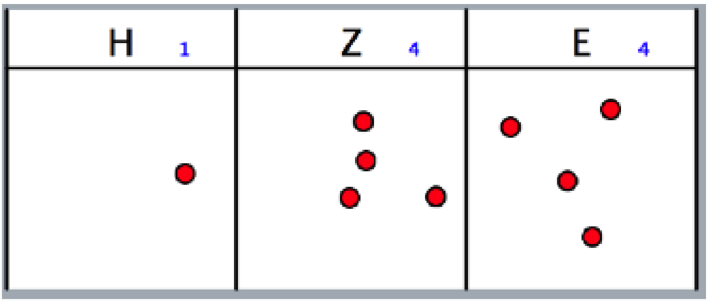


Abb. 1 Screenshot der interaktiven Stellenwerttafel

3.2 Multiplex-R: Verknüpfung multipler externer Repräsentationen

Sweller und Chandler (1991) sowie Mayer et al. (2001, 2005) haben auf der Grundlage theoretischer Annahmen zur Struktur des menschlichen Gedächtnisses Annahmen experimentell überprüft und dabei die Tragfähigkeit dieser Ansätze immer wieder bestätigt. Dem entsprechend gehen aktuelle Theorien davon aus, dass die menschliche Wahrnehmung und Informationsverarbeitung über zwei Kanäle organisiert ist, dem auditiven und dem visuellen (vgl. Paivio 1986). Daraus kann jedoch nicht die Folgerung getroffen werden ‚viel hilft viel', d.h. je mehr Sinneskanäle angesprochen und je mehr unterschiedliche Darstellungsformen verwendet werden, umso eher sind Lernerfolge zu erwarten. Sweller und Chandler gehen u.a. davon aus, dass die Kapazität der menschlichen Informationsverarbeitung im Arbeitsgedächtnis begrenzt ist (cognitive load theory). Diese Kapazität kann jedoch durch Informationen, die im Langzeitgedächtnis abgespeichert wurden, vergrößert werden. Das Vorwissen der Lernenden spielt demnach eine wichtige Rolle. Des Weiteren unterscheiden Sweller und Chandler drei Quellen kognitiver Belastung, die Instrinsic Cognitive Load (ICL), die Extraneous Cognitive Load (ECL) und die Germane Cognitive Load (GCL). In diesem Beitrag wird an Beispiel dreier Prinzipien kurz aufgezeigt, wie die ECL durch eine entsprechende Gestaltung des Lernmaterials verringert werden kann, um so möglichst viele kognitive Ressoursen für den GCL frei zu halten, der für die Konstruktion von Schemata im Arbeitsgedächtnis genutzt wird. Diese Prinzipien gehen auch mit der Cognitive Theory of Multimedia Learning (CTML) (Mayer et al. 2001, 2005) konform, die den Hintergrund für Erklärungen bestimmter Diskrepanzen zwischen erwartetem und tatsächlichem Lernerfolg zum multimedialen Lernen bildet. Der CTML zu Folge kann durch eine kombinierte Darstellung von Wort und Bild effektiver gelernt werden als nur mit einer einzelnen Darstellung (Multimediaprinzip).

Sind Informationen, die der Lernende gleichzeitig bearbeiten muss, räumlich oder zeitlich getrennt präsentiert, tritt der sogenannte Split Attention Effekt auf. Es muss viel Arbeitsspeicherkapazität darauf verwendet werden, die beiden Informationen zu integrieren. Das *Kontiguitätsprinzip* besagt, dass Bilder und Symbole sowohl räumlich als auch zeitlich nah beieinander repräsentiert werden sollen.

Informationen gelangen über zwei Kanäle in das Arbeitsgedächtnis, dem auditiven und dem visuellen. Wird einer dieser Kanäle überansprucht, so kann es zu einer kognitiven Überlastung kommen. Deshalb sollte Text zu einem Bild nicht in schriftlicher Form erfolgen (beides visueller Kanal), sondern gesprochen werden (*Modalitätsprinzip*).

Das *Kohärenzprinzip* besagt, dass Informationen, die irrelevant sind, also nicht mit dem zu lernenden Inhalt in Verbindung stehen, vermieden werden sollen. Nette Tierchen, die mit dem Schwanz wedeln, belasten demnach das Arbeitsgedächtnis und nehmen so Speicher weg, der zur Konstruktion von Schemata benötigt wird.

Mit den beiden Prototypen Doppelmoppel und Multiplex-R wird beispielhaft gezeigt, wie eine solche Umsetzung von Gestaltungsprinzipien bezogen auf den Anfangsunterricht Mathematik aussehen kann (vgl. Ladel 2009). Dabei haben die Kinder die Möglichkeit in einer Repräsentationsform zu arbeiten (z.B. virtuell-enaktiv) und sehen gleichzeitig die Auswirkungen ihres Tuns in einer anderen Repräsentationsform (z.B. symbolisch). Der Zusammenhang der verschiedenen Darstellungsformen wird somit direkter für die Kinder erfahrbar. Arbeiten die Kinder mit realem Material, so müsste diese Übersetzung von einer anderen Person erfolgen (z.B. Lehrkraft, Mitschüler). Thompson (1989, 1992) konnte in einer Untersuchung mit dem Computersetting Blocks Microworld zeigen, dass die Kinder, die kontinuierlich die beiderseitige Beziehung zwischen nonverbal-symbolischer und virtuell-enaktiver Repräsentation im Computersetting aufgezeigt bekommen hatten, bei diesen zu einer bedeutungsvolleren Entwicklung von Notationen führte und besser Zusammenhänge herstellen konnten.

Durch eine automatische Verknüpfung können die Kinder operative Aufgaben im Sinne von ‚was passiert mit ..., wenn ...' besser bearbeiten und es besteht zudem die Möglichkeit dem zählenden Rechnen mit Material entgegen zu wirken, indem 5 oder 10 Objekte ‚auf einmal' auf die Arbeitsfläche gezogen werden können (vgl. Ladel und Kortenkamp 2009). Das ginge natürlich am realen Rechenrahmen auch, an diesem fehlt jedoch die automatische Verknüpfung zur symbolischen Repräsentation.

3.3 Cabri Elem Creator

Lernsoftware wird in der Grundschule von Lehrkräften häufig eingesetzt. Diese beachtet leider nicht immer das Primat der Didaktik und ist entsprechend wenig für den Einsatz im Mathematikunterricht geeignet. Beachtet Lernsoftware zwar mathematikdidaktische Prinzipien, so ist sie häufig nur der letzten Phase des mathematischen Lernprozesses, dem Automatisieren, zuzuordnen. Lehrkräfte bemängeln damit zu Recht, dass kein qualitativ hinreichendes Material vorhanden ist, um den Computer im Unterricht einzusetzen. Mit dem Cabri Elem Creator wird die Rolle der Lehrkraft gestärkt, indem diese selbst ohne sich Programmierkenntnisse aneignen zu müssen in der Lage sind, sinnvolle Lernumgebungen erstellen zu können. Die in der Dynamischen Geometriesoftware Cabri vorhandenen Funktionen wurden auf die Inhalte der Grundschule abgestimmt und begrenzt. Die Lehrkraft hat als Ausgangspunkt ein weißes Blatt und kann nun Elmente und Funktionen, die zur Bearbeitung einer Aufgabe benötigt werden, in einer Lernumgebung den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stellen. Als ein Beispiel sei an dieser Stelle das Rechendreieck genannt (s. Abb. 2). Ziel dieser Aufgabe ist nicht das Üben der Addition, sondern es wird damit die Möglichkeit geboten, Entdeckungen am Rechendreieck zu machen. Die Addition übernimmt dabei der Computer (computational offloading, vgl. Bauer und Johnson-Laird 1993), so dass sich die Kinder ganz auf die Zusammenhänge konzentrieren können und hierfür entsprechend Kapazität im Arbeitsgedächtnis zur Verfügung haben (vgl. Kap. 3.2).

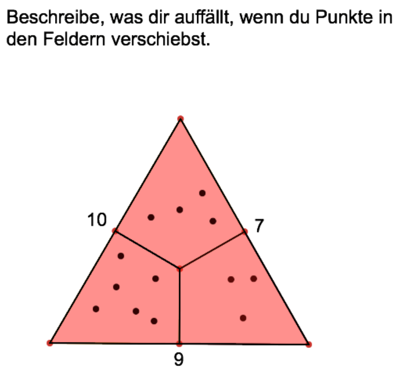


Abb. 2 Screenshot einer möglichen Aufgabe zum Entdecken erstellt mit Cabri Elem

3.4 Mathe-Chat

Zunächst werden hier zwei Initiativen zum Schreiben mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe vorgestellt. Einerseits das Forschungsprojekt ‚Mathe Chat' (Schreiber 2010a; 2010b) indem es um die Rolle der schriftlich-grafischen Kommunikation in kollektiven mathematischen Problemlöseprozessen geht und andererseits die daraus entwickelte ‚wiki-basierte Lernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im M@thematikunterricht der Primarstufe' kurz ‚WiLM@' (vgl. Reinhard 2009).

Das Setting in ‚Mathe-Chat' ist so gewählt, dass zwischen den beiden Seiten des Settings nur die schriftlich-grafische Kommunikation möglich ist. Technisch wird dies mit 2 Tablet-PCs realisiert, mit denen die Schüler über ein Whiteboard (s. Abb. 3 rechte Seite) synchron kommunizieren können. Jede Eintragung auf dem Whiteboard ist sofort auf beiden Geräten zugänglich und kann von beiden Seiten direkt weiter bearbeitet werden. Außerdem können die Schüler über die Chatbox (s. Abb. 3 linke Seite) „quasisynchron" (Dürscheid 2003, 44) mit Hilfe der Tastatur kommunizieren, wobei eben jede Eintragung erst dann für die andere Seite sichtbar wird, wenn der Erzeuger der Nachricht diese auch absendet. Bis dahin kann eine Nachricht noch verändert oder gar gelöscht werden. Ist die Nachricht abgeschickt, bleibt sie unveränderbar in der Chatbox stehen, man kann sich dann nur auf diese im weiteren Verlauf beziehen, die Nachricht aber nicht verändern.

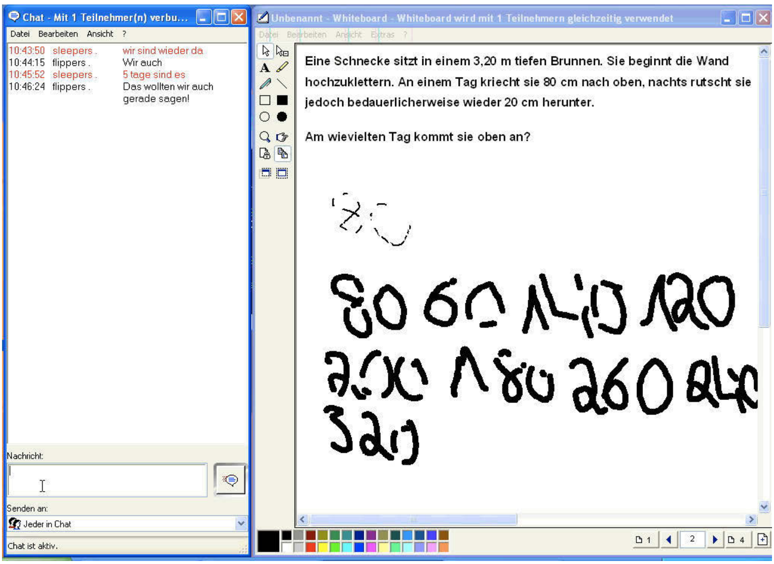


Abb. 3 Screenshot einer Net-Meeting Sitzung in ‚Mathe-Chat'

Mit Camtasia-Studio werden die Aktivitäten auf den Bildschirmen aufgezeichnet und können dann später zu Forschungszwecken als Screenvideos genutzt werden. Der Vorteil der Neuen Medien ist hier, dass man die Schüler über die Chat-Umgebung ausschließlich auf schriftlich-grafischer Ebene kommunizieren lassen kann. Die teilnehmenden Viertklässler sind in diesem Setting darauf angewiesen, all ihre Lösungsvorschläge, Tipps, Hinweise etc. dem Partner schriftlich-grafisch mitzuteilen. Außerdem ist der Verlauf durch die technischen Möglichkeiten problemlos und sehr genau zu dokumentieren.

3.5 WiLM@

Aus dem für Forschungszwecke gestalteten Konzept des ‚Mathe-Chat' haben wir die ‚Wiki-basierte Lernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im M@thematikunterricht der Primarstufe' kurz ‚WiLM@' entwickelt (vgl. Reinhard 2009). Eingesetzt werden Tablet – PC oder Cintiqboards, die jeweils über einen Touchscreen verfügen, so dass die Schüler Lösungen zu mathematischen Problemen direkt auf dem Bildschirm mit einem Stift verschriftlichen können. Außerdem wird eine Internetverbindung benötigt um auf die Lernumgebung WiLM@ zugreifen zu können. Es ist nicht nur eine synchrone Kommunikation sondern eben auch die asynchrone Kommunikation möglich, da alle Lösungsschritte auf einer Datenbank weiterhin zur Verfügung stehen. Die Schüler können auf eigene Lösungen oder auch auf freigegebene Lösungen anderer Schüler jederzeit zurückgreifen. Wichtig sind die unterschiedlichen Öffentlichkeitsbereiche: Die Schüler können ihre Aufgaben alleine bearbeiten. Sie können aber auch zu Beginn, während der Bearbeitung oder nach der Bearbeitung einer Aufgabe diese für die eigene Gruppe öffnen, wobei die Gruppe vom Lehrer vorher definiert wurde. Die Aufgabe kann aber auch nach einer Art von Abstimmung innerhalb der Gruppe und mit Zustimmung des Lehrers ‚öffentlich' gemacht werden, was bedeutet, dass alle Schüler aus der Klasse und evtl. kooperierenden Klassen die Lösung sehen, kommentieren oder auch an der Lösung weiter arbeiten können.

3.6 PriMaPodcast

Als Gegenstück zu den beiden Initiativen zum Schreiben mit digitalen Medien wird nun ein Versuch zum mündlichen Darstellen im Mathematikunterricht dargestellt. Das Fehlen schriftlich-grafischer Elemente beim Erstellen von Audio-Podcasts erschwert die Kommunikation über mathematische Sachverhalte. Dies kann eine besondere Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler sein und zum Lernen beitragen. Es kann aber auch genau beobachtet werden, was sich verändert, wenn die Möglichkeit der Darstellung auf das verbale Darstellen beschränkt ist. In dem hier beschriebenen Projekt werden Audio-Podcasts erstellt, als Produkt soll also die mündliche Darstellung mathematischer Inhalte realisiert werden.

Die erstellten PriMaPodcasts sind mathematische Podcasts, die von Schülern der Primarstufe erstellt werden. Von Interesse ist, wie ein mathematischer Sachverhalt dargestellt wird, wenn schriftlich-grafische Elemente zur Darstellung nicht verwendet werden können. Oder konkreter: Wie beschreiben Schülerinnen und Schüler mathematische Begriffe wie ‚symmetrisch', ‚größer', ‚kleiner' usw. oder Vorgänge wie die Addition, die Division, ein schriftliches Rechenverfahren oder ein geometrisches Objekt, wenn nur mündlich dargestellt werden kann?

Beim Erstellen von PriMaPodcasts sollen die Schülerinnen und Schüler auf einen mathematischen Impuls spontan reagieren, was als Audio-Datei mitgeschnitten wird. Diese erste Aufnahme können sich die Schülerinnen und Schüler mehrfach anhören und reflektieren. Es schließt sich dann die Planung für eine weitere Aufnahme zum selben Impuls an. Hier wird eine Art Manuskript oder Drehbuch erstellt. Dieses ist Grundlage für die abschließende Erstellung eines PriMaPodcast.

Dabei wird der gesamte Prozess von Studierenden protokolliert und aufgezeichnet: Die erste Aufnahme, in der die Schülerinnen und Schüler auf den Impuls spontan reagieren, die anschließende Planung mit einer Art Manuskript und die Erstellung des PriMaPodcasts. Die Verknüpfung von rein verbaler Phase, über eine eher schriftbasierte Phase hin zu einer mündlichen Phase, die auf dem schriftlichen Manuskript beruht macht das Vorgehen auch für Forschungszwecke vielversprechend. Die Besonderheit liegt nämlich dann in der äußerst vielfältigen Mischung mündlicher und schriftlicher Anteile in den einzelnen Phasen des gesamten Prozesses (vgl. Schreiber 2011a, im Druck). Ein Beispiel kann bei lehrer-online unter http://www.lehrer-online.de/mathe-podcasts.php gehört werden (vgl. Schreiber 2011b).

4 Schlussbemerkung

Zwei zentrale Punkte in Bezug auf den Einsatz digitaler Medien möchten wir zum Schluss noch unterstreichen:

Die digitalen Medien sollten in der Lehrerbildung aller Phasen – also im Studium, im Referendariat und in der Lehrerfortbildung – einen festen Platz erhalten. Dieser sollte unbedingt auch in der Fachdidaktik zu finden sein. Die Beteiligung aller Phasen der Lehrerbildung ermöglicht dabei, Theorie und Praxis im Bereich des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe zu verbinden. Bei diesem Thema erscheint uns die Verbindung der Phasen auch deshalb besonders wichtig, weil nicht davon ausgegangen werden kann, dass eine nachhaltige Veränderung des Medieneinsatzes alleine von der Generation heutiger Studierender ausgehen kann. Außerdem bleibt es durch die nach wie vor sehr schnelle Innovation im Bereich der technischen Möglichkeiten erforderlich, auch weiterhin denen neue Impulse zu geben, die die Ausbildungsphasen erst kürzlich absolviert haben. Solche Phasen – übergreifenden Konzepte sind gerade auch im Bereich des Medieneinsatzes in der Primarstufe über längere Zeit erprobt (Schreiber 2008a, 2008b).

Zweitens sind wir der Ansicht, dass die Mathematikdidaktik es nicht weiterhin allein Software-Entwicklern, Lernpsychologen, Mediendidaktikern, etc. überlassen darf, computergestützte Lernumgebungen für den Einsatz im Mathematikunterricht der Primarstufe zu gestalten. Die Mathematikdidaktik muss die Verantwortung dafür übernehmen, dass der Einsatz digitaler Medien mathematikdidaktischen Prinzipien genügt und Lernumgebungen entsprechend gestaltet werden. Dem entsprechend sollte sie verstärkt an der Entwicklung didaktischer Konzepte zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe arbeiten. Dabei darf sie bestehende Erkenntnisse gerade aus dem Bereich des multimedialen Lernens (vgl. Kap. 3.2) nicht ignorieren, sondern muss diese in die Entwicklung mit einbeziehen. Die Mathematikdidaktik sollte Hand in Hand mit Software-Entwicklern arbeiten, damit zukünftige Programme dem Primat der Didaktik genügen und ein entsprechend sinnvoller Einsatz in der Primarstufe möglich ist, der den Mehrwert digitaler Medien auch wirklich nutzt.

Literatur

Bauer, M.I. & Johnson-Laird, P.N (1993). How diagrams can improve reasoning. *Psychological Sciente*, 4, 372-378.

Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) (Hg.) (2006). *IT-Ausstattung der allgemein bildenden und berufsbildenden Schulen in Deutschland. Bestandsaufnahme 2006 und Entwicklung 2001 bis 2006.* Bonn, Berlin.

Dürscheid, C. (2003): Medienkommunikation im Kontinuum von Mündlichkeit und Schriftlichkeit. Theoretische und empirische Probleme. *Zeitschrift für Angewandte Linguistik* (38), 37–56.

Egmont Ehapa Verlag & Egmont MediaSolutions (Hrsg.) (2011). *KidsVerbraucherAnalyse 2011 – Erstmals mit Daten zu Vorschulkindern!* Pressemitteilung vom 09.08.2011. Berlin.

Europäische Kommission (Hg.) (2006a). Benchmarking access and use of ICT in european schools 2006. Final report from head teacher and classroom teacher surveys in 27 European Countries. Bonn. http://ec.europa.eu/information_society/eeurope/i2010/benchmarking/index_en.htm. Gesehen 07.11.2011.

Europäische Kommission (Hg.) (2006b). Use of computers and the internet in schools in Europe 2006. Country Brief: Germany 6/2006. http://ec.europa.eu/information_society/eeurope/i2010/benchmarking/index_en.htm. Gesehen 07.11.2011.

Krauthausen, G. & Lorenz, J. H. (2008). Computeriensatz im Mathematikunterricht. In Walther, Gerd et al. (Hrsg.) *Bildungsstandards für die Grundschule: Matheamtik konkret.* Berlin: Cornelsen

Ladel, S. (2009). *Multiple eterne Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz. Zur Bedeutung für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht.* Didaktik in Forschung und Praxis, Bd. 48. Hamburg: Verlag Dr. Kovacs.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2009). Virtuell-enaktives Arbeiten mit der „Kraft der Fünf". *MNU PRIMAR* 1(3), 91 – 95.

Mayer, R.E. (2001). *Multimedia learning.* Cambridge: Cambridge University Press.

Mayer, R.E. (Hg.) (2005). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning.* Cambridge University Press. New York.

Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest (2011). *KIM-Studie 2010. Kinder + Medien, Computer + Internet. Basisuntersuchung zum Medienumgang 6- bis 13-Jähriger.* Stuttgart.

Mitzlaff, H. (1996). *Handbuch Grundschule und Computer. Vom Tabu zur Alltagspraxis.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Mitzlaff, H. (Hg.) (2008a). *Internationales Handbuch. Computer (ICT), Grundschule, Kindergarten und Neue Lernkultur. Band 1.* Hohengehren: Schneider.

Mitzlaff, H. (Hg.) (2008b). *Internationales Handbuch. Computer (ICT), Grundschule, Kindergarten und Neue Lernkultur. Band 2.* Hohengehren: Schneider.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding-approach.* New York: Oxford University Press

Pelgrum-EdAsMo, W.J. & Doornekamp-Doornekamp B.G. (2009). Indicators on ICT in Primary and Secondary Education http://ec.europa.eu/education/more-information/doc/ictindicrep_en.pdf. Gesehen 07.11.2011.

Raskin, J. (2000). *The human interface.* München: Addison-Wesley.

Reinhard, Chr., Merkel, A., Schreiber, Chr. & Bachmann, K. (2010). Projekt Lehr@mt: Teilprojekt Mathematik - Medienpädagogische Aktivitäten aus mathematikdidaktischer Perspektive für die Grundschullehrerausbildung. In: Knaus, Thomas & Engel, Olga (Hrsg.) *framediale - digitale Medien in Bildungseinrichtungen.* kopaed: München, 127 – 136.

Reinhard, Chr. (2009). WiLM@ - Schreiben im Mathematikunterricht. Bei ‚lehrer-online' http://www.lehrer-online.de/wilma-didaktik.php. Gesehen 07.11.2011.

Schreiber, Chr. (2011a). Digitale Medien und Darstellung im Mathematikunterricht - Schriftlichkeit und Mündlichkeit. *Tagungsband zur framediale 15'.* Frankfurt. Im Druck

Schreiber, Chr. (2011b). PriMaPodcast - Podcasts zur Mathematik in der Primarstufe. Bei ‚lehrer-online' http://www.lehrer-online.de/mathe-podcasts.php. Gesehen 07.11.2011.

Schreiber, Chr. (2010a). *Semiotische Prozess-Karten - Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen.* Waxmann: Münster u. a.

Schreiber, Chr. (2010b). Über mathematische Probleme chatten. Bei ‚lehrer-online' http://www.lehrer-online.de/mathe-chat.php. Gesehen 07.11.2011.

Schreiber, Chr. (2008a). Drei Phasen der Lehrerbildung - eine Verbindung. *SEMINAR - Lehrerbildung und Schule 1/2008, Kompetenzerwerb in der Lehrerbildung,* Schneider Verlag: Hohengehren, 137 – 145.

Schreiber, Chr. (2008b). *Phasen übergreifende Veranstaltungen in der Lehrerbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht.* Franzbecker: Hildesheim, 717 – 720.

Sweller, J. & Chandler, P. (1991). *Evidente for cognitive load theory.* Cognition and Instruction, 8(4*)*, 351-362.

Thompson, P. W. (1989). Mathematics software. Paper presented at the Apple Computer Higher Education Conference on "Designing for Learning", Cuptertino, CA.

Walther, G. et al. (2008) *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin: Cornelsen

Dr. Silke Ladel
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Institut für Mathematik und Informatik
Bismarckstr. 10, 76133 Karlsruhe
ladel@ph-karlsruhe.de

Dr. Christof Schreiber
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Mathematik
Institut für Didaktik der Mathematik
Senckenberganlage 11, 60054 Frankfurt am Main
schreiber@math.uni-frankfurt.de

Die Macht der Materialien (?)
Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation

von Jens Holger Lorenz

Die Medien sind die Message (McLuhan)

Ausgehend von der in der didaktischen Forschung sehr spärlichen Diskussionslage wird der Frage nachgegangen, wie es von den Handlungen mit Veranschaulichungsmaterial zur den Zahlen im Kopf kommt. Es wird die Schwierigkeit dargelegt, in den externen Repräsentationen Strukturen zu sehen und sie in Beziehung mit internen Repräsentationen im Kopf des Kindes zu setzen. Es wird der problematische Zusammenhang zwischen den Anschauungsmitteln und dem abstrakten Begriff, auf den sie verweisen, zu diskutieren sein.

Schlüsselwörter: Anschauungsmittel, Zahlenrepräsentation, Operationsrepräsentation, Verbalisierung, Strukturen

1 Das Problem: Wie kommen die Zahlen in den Kopf des Kindes?

Seit Jahrhunderten ist man sich in Mathematikdidaktik einig, dass Kinder günstiger Weise durch Handlungen lernen. Diverse Veranschaulichungsmittel wurden in der Geschichte der Didaktik erfunden, welche die mathematische Struktur und die Kinder zu entsprechenden Handlungen anregen sollten. Wie hat man sich aber das Lernen mit diesen Materialien vorzustellen? Könnte es sein, dass das Handeln, das Manipulieren der konkreten Objekte gar nicht automatisch zu entsprechenden Anschauungsbildern führt? Einige Anmerkungen sollen gegenüber diesem angenommenen Automatismus skeptisch machen. Es handelt sich um Schwierigkeiten, die sich aus der Natur des verwendeten Veranschaulichungsmittels selbst ergeben.

2 Zur Verwendung unterschiedlicher Materialien

Die vermeintlich kindgerechte Ausgestaltung des Klassenzimmers mit vielen Materialien lässt in einigen Fällen den Raum einer Ausstellungsetage eines Schulmittelverlages gleichen. Das Argument, den Kindern einer Klasse möglichst viele Veranschaulichungsmittel anzubieten, aus denen sie das für sie Entsprechende oder Ansprechenste auswählen könnten oder zumindest jenes, das am besten ihrem Lernstil entspricht, übersieht aber ein wesentliches Moment.

Zum einen stellt die eigenständige Auswahl eines Veranschaulichungsmittels eine kognitive Überforderung dar: Es wird das Ziel mit den Voraussetzungen verwechselt. Erst wenn das Kind viele Materialien in ihrer Handhabung kennen würde, wäre eine Entscheidung für oder gegen eines möglich. In Unkenntnis ihrer Vor- und Nachteile bleibt ihm lediglich die Sympathie für Farbe und Form als Entscheidungsinstanz.

Zum anderen ist aber die gleichzeitige Verwendung mehrerer Materialien insbesondere bei leistungsschwächeren Schülern problematisch. Die Handlungen, die für eine Rechenoperation an einem Veranschaulichungsmittel durchgeführt wird, verlaufen bei dem nächsten vollkommen anders, sie sind als Handlungen nicht übertragbar. Man vergleiche die Handlung am Rechenrahmen, am Zahlenstrahl, an der Hundertertafel und den Mehr-System-Blöcken. Die Handlungen sind grundverschieden.

„Anschauungsmittel haben somit zunächst aus sich heraus keine automatische und eindeutige Bedeutung“ (Söbbeke 2005, S. 374f; auch Steinbring 2005).

Überspitzt formuliert lässt sich sagen, dass ein Veranschaulichungsmittel eine Sprache darstellt, mit Hilfe derer arithmetische Beziehungen im Unterricht repräsentiert werden, sie sind ein Kommunikationsmedium. In diesem Sinne muss jedes Veranschaulichungsmittel neu gelernt werden, und Handlungen von einem auf andere Materialien zu übertragen sind Übersetzungsprozesse, und diese sind bekanntlich äußerst schwierig.

Insofern obliegt es der Lehrperson, sich Rechenschaft über die Stärken und Schwächen eines verwendeten Mittels abzulegen, seine Erweiterbarkeit über die aktuelle Tagesdemonstration hinaus in größere Zahlenräume und für weitere Rechenoperationen etc. Denn leistungsschwächere Schüler entwickeln Lernprobleme, wenn sie von einem auf ein anderes Veranschaulichungsmittel umlernen müssen (Lorenz und Radatz 1993).

3 Handlungen mit Material und Rechnen im Kopf

Bei der Auswahl der Materialien ist zu prüfen, ob die Handlungen, die Kinder damit durchführen, tatsächlich hilfreich sind für die Entwicklung von Zahlvorstellungen und Rechenoperationen. Das Folgende soll zum Nachdenken über ihre Verwendungsweise anregen. Wie rechnen wir Erwachsene 46+19? Die meisten rechnen im Kopf 46+20-1 und begründen dies mit „Vereinfachung“, „günstig rechnen“ u. Ä. Aber wie sieht die entsprechende Handlung am Material aus? Denken wir als Lehrkräfte, als kompetente Rechner so, oder gelingt es uns lediglich, die Rechnung in das Material übertragen, obwohl wir ganz anders rechnen?

An der Hunderter-Tafel sieht 46+19 so aus: Zwei Kästchen nach unten, anschließend ein Kästchen nach links. Hat von den Leserinnen und Lesern einer so im Kopf die Aufgabe gelöst? Wohl kaum. Aber wozu dann die Handlung? (Und wer blättert bei Rechnungen im Tausenderraum im Kopf Hunderterseiten um?)

Am Rechenrahmen: Auffüllen der 46 zum vollen Zehner, dann ein weiterer Zehner und schließlich die verbleibenden Perlen, also 46+4+10+5. Ist das die Rechenstrategie, die im Unterricht angestrebt wird?

Und schließlich gehen die lernschwächeren Kinder bei den meisten Veranschaulichungsmaterialien in gleicher Weise vor: Sie zählen die Perlen, Kästchen, Striche am Zahlenstrahl usw. Und damit bleiben sie zählende Rechner.

4 Von der Hand in den Kopf?

Die Annahme, genügend Handlungen mit dem Veranschaulichungsmaterial würden entsprechende Strukturen im Kopf hervorrufen, dürfte zumindest für die leistungsschwächeren Schüler nicht gelten. Sie sind nicht leistungsschwach, weil ihnen die Handlungserfahrungen fehlen würden, denn davon haben sie meist sehr viel mehr als die Klassenkameraden. Aber das Handeln, das Manipulieren von Klötzchen, Antippen von Zahlenfeldern oder –strichen etc. führt nicht zu Strukturen im Kopf. Dies ist eben kein Automatismus.

„Anschauungsmittel müssen zu einem Unterrichtsinhalt gemacht werden und zwar in einem zusätzlichen, neuen Sinne: in der unterrichtlichen Arbeit mit den Kindern ist eine explizite und bewusste Sicht auf Strukturen und Beziehungen im Anschauungsmittel notwendig.“ (Söbbeke 2005, S.376).

Das Kind entwickelt Strukturen im Kopf durch Nachdenken über Zahlbeziehungen, durch Reflexion. Aus diesem Grund wird im Unterricht und in der Förderung sinnvoller Weise die jeweilige Handlung unterbrochen, und das Kind ist aufgefordert, den Fortgang der Handlung und das Handlungsergebnis zu beschreiben und aufzumalen. *Die Handlung wird von der Tischplatte in den Kopf verlegt, dort muss sie stattfinden.* Dies mag ein schwieriges Unterfangen sein, aber die Erfahrung zeigt, dass Manipulation des Materials nur der Ausgangspunkt, nicht aber der Weg zum Zahlverständnis ist.

5 Repräsentationen im Denken

Was passiert beim Rechnen im Kopf, wie denken wir Zahlen und Rechenoperationen? Diese Frage betrifft das Denken allgemein und speziell Frage danach, wie wir Zahlen repräsentieren und damit umgehen. Und dies betrifft auch die Funktion der Veranschaulichungsmittel. Die Inhalte unseres Denkens, die Repräsentationen von etwas, das möglicherweise außerhalb von uns liegt, sind immer symbolisch. Das Format allerdings kann im Denken unterschiedlich sein: gestisch bzw. handlungsmäßig, bildhaft, sprachlich oder eben auch mathematisch-symbolisch. Diese Formate bilden die „Medien des Denkens“ (Aebli 1980). Denken ist Prozess des Operierens mit diesen Symbolen in unterschiedlichen Formaten. Hierbei erzeugt bzw. konstruiert das Denken neues Wissen, ohne dass externe Information (etwa in Form von Material) zusätzlich zur Verfügung stehen muss. Zumindest ist dies nicht notwendig.

Ein Beispiel: Ein Grundschulkind lernt die 5er-Reihe auswendig. Damit ist sein Wissen in einer bestimmten Form, nämlich als verbale Kette, gespeichert, mehr nicht. Er beginnt die Reihe immer mit „5, 10, 15, ...“. Durch Denken kann es aber den (logischen) Schluss ziehen, dass aus der Tatsache, dass $2 \cdot 5=10$, auch gelten muss, dass $4 \cdot 5=20$. Hier ist nicht gesagt, wie das Kind auf den Schluss kommt, ob es sich bildhaft die erste Tatsache $2 \cdot 5=10$ als beide Hände neben einander gelegt vorstellt und dann diese wiederum noch einmal vorstellungsmäßig daneben legt, oder ob andere Formen des Denkens vorliegen. Es gelangt aber zu einer Einsicht, die auf seinen Repräsentationen eines Denkinhalts beruhen.

Damit sind wesentliche Charakteristika des Denkens benannt: Denken erzeugt Bedeutung, ist aktiv, kumulativ, idiosynkratisch und zielgerichtet. Wissen ist also keine Abbildung sondern eine (persönliche) Konstruktion mittels organisierender Schemata (Resnick 1986) und Denken ist der Prozess des Operierens mit Symbolen, die Wissen, das als subjektive Erfahrungen, als Vorstellungen oder Gedanken vorliegt, repräsentieren.

Dies klingt erst einmal sehr einfach und einleuchtend, aber aus mathematikdidaktischer Sicht stellt sich die Frage, wie die Repräsentationen von Zahlen und Rechenoperationen in den Kopf des Kindes kommen. Piaget meinte, dass um die Welt „zu begreifen“ das Kleinkind sensumotorische bzw. *enaktive Schemata* entwickelt; und diese stellen die Bausteine der weiteren kognitiven Entwicklung („buildung blocks“, Rumelhart et al. 1986) dar. Nach Piaget entstehen die Schemata durch „Interiorisierung“ der regulären Struktur von Handlungen. Auch dies erscheint auf den ersten Blick überzeugend, aber es erhebt sich die Frage, wie diese „Interiorisierung“ vonstatten geht („Von der Beobachtung zum inneren Bild“, Aebli 1980). Zumindest setzt dies voraus, dass irgendwelche Handlungsmerkmale im Gedächtnis fixiert und einer Abstraktion unterworfen werden (Campbell 2005), besser noch: die Handlungsstruktur. Aber woher soll das Kind wissen, was nun Struktur ist und was schmückendes Beiwerk, das abstrahiert, d.h. weggelassen, weggedacht werden kann?

Versuchen wir den Vorgang am Beispiel der Mathematik zu verstehen: Addition als Handlungsvollzug ist die Vereinigung von Mengen, zumindest in dieser Form erleben die Kinder sie im ersten Schritt. Die Addition als Begriff, als Herauslösen aus der Wirklichkeit, ist aber eine doppelte Abstraktion: auf die Ebene der Mengen (es gilt für Autos, Muggelsteine und Gummibärchen) und von dort zur Ebene der Zahlen.

Die jeweiligen Repräsentationen, die den Kindern zu Verfügung stehen, sind unterschiedlicher Art: Der Handlungsvollzug (die Vereinigung von Mengen) ist eine enaktive Repräsentation, die überführt wird in eine ikonische Repräsentation und schließlich in eine sprachliche Repräsentation, bevor sie in eine mathematisch-symbolische Form mündet. Es bleibt als mathematikdidaktisches Forschungsproblem bestehen, diese Übergänge zu beschreiben und zu erklären. (Es ist hier nicht beabsichtigt, dies als didaktische Stufenfolge darzulegen, im Gegenteil: Es sind Denkformate!)

Auch andere Ansätze, Formen des Wissen und der Repräsentationen zu beschreiben, führen auf empirische Widersprüche. Die Unterscheidung deklarativen vs. prozeduralen Wissens löst die Theorieprobleme der Mathematikdidaktik nicht hinreichend auf. So wird deklaratives Wissen als semantisches Netzwerk aufgefasst, als Begriffsgefüge, wohingegen prozedurales Wissen als nichtbewusste kognitive Operationen fungiert, als „Produktionen" (Metapher: Computerprogramm, vgl. auch Anderson 2005).

Dies bedeutet aber innerhalb dieser Theorie, dass das deklarative Wissen *vor* dem prozeduralen Wissen entsteht. Aufgebautes prozedurales Wissen ist leichter abrufbar, aktivierbar. Man denke etwa an die Einmaleins-Reihen, die als Lösungsverfahren für die Multiplikation dem Schüler zur Verfügung stehen, die schriftlichen Rechenverfahren, den Satz des Pythagoras, die binomischen Formeln, das Differenzieren und Integrieren von Polynomen usw. Bevor also diese automatisierten Verfahren als Routinen verfügbar sind, so die Theorie, müssten die semantischen Netzwerke, also die Begrifflichkeit etwa der Multiplikation vorhanden sein. Nun weiß jeder Praktiker, dass dem keineswegs so ist. Gerade die leistungsschwächeren Schüler entfalten ein großes Wissen der Routinen, ohne über ein Verständnis (Netzwerk) der Begriffe zu verfügen. Hier widerspricht die Empirie der Theorie.

Ähnliches gilt auch für die vorschulische Phase des Erwerbs mathematischen Wissens: Der kindliche Zählvorgang gelingt als Aufbau prozeduralen Wissens bereits während des Spracherwerbs, also im Alter von 2;5-3 Jahren und durchläuft die bekannten Stufen der Zählkompetenz. Dies bedeutet, dass der Aufbau konzeptionellen, also deklarativen Wissens dem prozeduralen Wissen zeitlich nachgeordnet ist und auf diesem auffußt.

6 Repräsentationen beim Vor- und Grundschulkind

Ohne an dieser Stelle auf die empirischen Studien der frühen Kindheit eingehen zu wollen, die zeigen, dass bereits Säuglinge in sehr frühem Alter Mengenanzahlen unterscheiden können (Wynn 1990, 1992), stellt sich die Frage nach der Repräsentation von Zahlen im Vorschulalter (Kinder kommen nicht als tabula rasa in die Schule). Die Annahme Piagets, dass sich Zahlen und Rechenoperationen als Ergebnis einer generellen, unspezifischen Entwicklung, insbesondere der Koordination von Seriation und Klassifikation entwickeln, lässt sich nicht mehr aufrechterhalten.

Es lässt sich, im Gegensatz zu Piaget, festhalten, dass sich die Invarianz wesentlich früher entwickelt und beim Kind vorhanden ist, als die angenommen Altersgrenze von fünf Jahren angibt (Gelman 1990a, b). Zudem ist auf den in der Mathematikdidaktik immer noch schwelenden Streit hinzuweisen, ob sich die Invarianz oder das Zählen früher entwickelt. Ohne sämtliche empirischen Befunde hier referieren zu wollen, so lässt sich doch festhalten, dass sich die Konservierung sehr früh (<5 J) einstellt, es aber sich am kindlichen Verhalten nicht ablesen lässt, ob sich die richtigen Konservierungsantworten über Invarianzurteile, über schnelles Zählen oder über Subitizing, das heißt direkte Wahrnehmungsurteile einstellen.

Es ist auf Grund der empirischen Lage anzunehmen, dass sich eine Entwicklung, eine Repräsentationsänderung einstellt, da jüngere Kinder einen höheren Zeitbedarf bei ihren Urteilen aufweisen als ältere Kinder. Dies erklärt sich, wenn man annimmt, dass jüngere Kinder zählen, ältere Kinder hingegen logisch schließen.

7 Die Frage der Notwendigkeit von Material

Im Zusammenhang mit dem Thema der Veranschaulichungsmittel ist zu fragen, ob dieser Repräsentationswechsel über Handlungen mit Material zustande kommt, oder ob andere Mechanismen dafür verantwortlich zeichnen.

Kommen wir noch einmal zurück zu den frühkindlichen arithmetischen Anzahlunterscheidung, die sich sehr früh (<7 M) nachweisen lassen und die nicht modalitätsspezifisch nur nachweisbar sind, sondern auch intermodal (Starkey et al. 1990). Mehr noch, ab dem Alter von zwölf Monaten sind Kleinkinder in der Lage, Mengenordnung nach der Anzahl vorzunehmen (Sophian 1996, 1998).

Heißt dies nun, es existieren protoquantitative Schemata (Repräsentationen) im Kopf des Säuglings? Dies wäre zu weit gehend, aber es existieren in Bezug auf Mengen verschiedene Schemata, insbesondere ein

- „increase-decrease-Schema“ und ein
- „part-whole-Schema“

Stellt dies nun einen angeborenen Zahlenmodul dar? Ist das Urteil über die Anzahl einer Menge im Alter von wenigen Monaten lediglich ein „subitizing“, also ein Wahrnehmungsprozess (Glasersfeld 1982, Mack 2002) oder doch konzeptionell gesteuert (Mandler et al. 1982, Gelman 1990)? Zumindest lässt sich auf dem aktuellen Stand der empirischen Befunde festhalten, dass es sich nicht (nur) um eine angeborene Fähigkeit im Bereich der visuellen Wahrnehmung handelt. Die beobachtete Intermodalität setzt vielmehr voraus, dass es ein einheitliches Format für numerische Informationen (Anzahl und Anzahlveränderungen) gibt. Die Anzahl aber ist etwas, das das Kind der Umwelt aufdrückt, sie ist nicht wahrnehmbar wie die Farbe „Blau“.

Wenn dem tatsächlich so ist (und die empirischen Studien wollen ernst genommen werden), dann sind diese „Erkenntnisse“ materialunabhängig. Sie sind nicht gekoppelt an bestimmte Handlungen, sie werden wohl kaum in Form vorgestellter Perlenansammlungen oder Klotzbauten repräsentiert. Auch Töne werden als Träger von Zahleigenschaften erkannt. Im Sinne der didaktischen Diskussion wäre es aber vermessen, prinzipiell alles zum Veranschaulichungsmittel zu erklären, nur weil sich alles zählen lässt. Andererseits setzt die intermodale Eins-zu-Eins-Zuordnung kein Wissen über Zahlen („3“), oder Bezeichnungen („+1“) voraus, sondern ist lediglich die kognitive Basis für (anschließendes) Lernen.

Die Entwicklung der Zahlwortreihe beginnt als (fehlerhafte) Sprachkette, ohne Bewusstsein von Prinzipien. Zählprinzipien entwickeln sich im Laufe des Gebrauchs der Zahlwortreihe, insbesondere die Prinzipien der das Prinzip der Eins-zu-Eins-Zuordnung, das Prinzip der stabilen Ordnung, das Kardinalprinzip, Abstraktionsprinzip und schließlich das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung. Aber: Diese Prinzipien sind nicht bewusst und schon gar nicht explizit versprachlichbar. Und die Prinzipien werden in bestimmten Bereichen angewendet, sie sind aber nicht übertragbar. Und: Sie sind prinzipiell auf alles anwendbar, das besagt das Abstraktionsprinzip, wodurch zumindest der Zählprozess sich als materialungebunden erweist.

8 Die Veränderung der Repräsentationen

Ein für die Mathematikdidaktik brauchbares Konzept, um Veränderungen der Repräsentationen zu beschreiben, liegt in dem Modell der „Repräsentationsumorganisation“ vor (RR-Modell, Karmiloff-Smith 1996). Es beschreibt Lernphasen, die jedes Lernen durchläuft, egal auf welcher Altersstufe und mit welchem Inhalt. Die Phasen sind also keine Stufen im Sinne Piagets.

In dem Modell ist die Phase I eine datengetriebene Lernphase, die aufgrund äußerer Stimuli abläuft. Hier kann man also eine Funktion von Veranschaulichungsmitteln verorten. In dieser Phase ist Wissen nur implizit, als Prozedur verfügbar, nicht explizit oder bewusst und daher auch nicht verbalisierbar. Während dieser Phase kommt es additiv zu bereichsspezifischen repräsentationalen Verbindungen, die zur Verhaltensgeläufigkeit („behavioral mastery“) führen. Man denke etwa an die Zahlwort- oder Einmaleinsreihen, etc. (s.o.). Nichtverbalisierbar bedeutet, dass die Zahlensätze zwar aufgesagt werden können, es liegt aber kein versprachlichbares Wissen über Zusammenhänge vor. Dies gilt auch für Materialhandlungen in der Grundschule.

Man beachte, dass hier die enge Kopplung an das Material noch vorliegt. Das Material besitzt eine Salienz und Restriktionen, welche einerseits die Aufmerksamkeit des Kindes auf sich ziehen und zu Handlungen veranlassen wollen (sollen: die motivationale Wirkung!), andererseits besitzt jedes Material restringierende Eigenschaften, welche den Handlungsraum, die Möglichkeiten seines Umgangs einengen.

In der nächsten Phase, der Phase II (E1), kommt es zu einer Repräsentationsänderung. Jetzt kommt es zu einer internen Steuerung, welche die (auch/nur falsche) äußere Information lenkt. Die Repräsentation ist von dieser abgekoppelt, was einen Transfer der vorhandenen Repräsentation in andere Bereiche ermöglicht. Diese Abkopplung ist notwendig mit einem Detailverlust verbunden, d.h. sie ist weniger spezialisiert und daher ist eine Analogiebildung möglich. Aber auch in dieser Phase gilt, dass die Repräsentationen unbewusst und nicht verbalisierbar sind. Für den Unterricht bedeutet dies eine Abkopplung vom Material und seinen charakteristischen Eigenschaften. Wichtig in diesem Zusammenhang ist die Ablösung vom Material!

Auch in der folgenden Phase II (E2) ist das Wissen nicht verbalisierbar, aber es wird in neuem Format repräsentiert. Diese Repräsentationsänderung ist in einer Reihe von Studien belegt worden. So kommt es bereits im Vorschulalter zu bildhaften Vorstellungen bei der Vorhersage von Ergebnissen additiver oder subtraktiver Handlungen (4/5 Jahre; Vilette 2002, Baroody und Brannon 2002). Auch werden die Repräsentationen in anderem Format darstellbar, etwa in Handlungen oder Zeichnungen (auf diese Form der Wissenserfassung wird auch im Grundschulalter selten zurückgegriffen!).

Hier ließe sich spekulieren, ob die Handhabung des Materials nicht kontraproduktiv ist. Aber es fehlen sowohl empirische Befunde als auch eine belastbare Theorie.

Erst in der Phase III (E3) werden die Repräsentationen bewusst und verbalisierbar. Gleichzeitig werden die Format-/Repräsentationswechsel häufig. So zeigen sich auch bei verbaler und nonverbaler Aufgabendarbietung von Additions- oder Subtraktionssituationen, dass von den Kindern in eine bildhaft-visuelle Repräsentation gewechselt wird (Klein und Brisanz 2000, Rasmussen et al. 2004).

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Wissen nicht mit Verständnis gekoppelt sein muss, dass im Rahmen kindlicher arithmetischer Lernprozesse eher das Gegenteil zu erwarten ist. Für Wissen ohne konzeptionelles Verständnis und notwendige Repräsentationsänderungen lassen sich beispielhaft anführen:

- Kinder zeigen ihr Alter mit Fingern, können aber weder ihr Alter sagen noch die Zahl mit Mengen oder in anderer Form darstellen;
- Die Verwendung des Kommutativgesetzes (a+b=b+a), welche die Kinder bei der min-Strategie der Addition anwenden, indem sie vom größeren Summanden weiterzählen; hierbei liegt keine explizite Erkenntnis der Ergebnisgleichheit (Baroody et al. 2003), sondern ein unterschiedliches konzeptionelles Verstehen, (Canobi et al. 1998) vor.
- Verwendung der Inversion (a+b-b); hierbei muss in der kindlichen Entwicklung zwischen einer *qualitativen* Inversion, die bereits im Vorschulalter vorliegt und die Ergebnisgleichheit bei Entfernung der hinzu gelegten Objekte, unabhängig von der Ausgangszahl konstatiert, und einer *quantitativen* Inversion unterschieden werden, die im Schulalter die Ergebnisgleichheit auch bei Entfernung anderer, aber gleich vieler Elemente anzugeben weiß (Rasmussen et al. 2003); noch schwieriger und daher erst in einer höheren Altersstufe zu erreichen ist die Inversion a+b-a. Sie bedarf einer sehr formalen Repräsentation.
- Zahlen werden im Vor- aber auch noch im Grundschulalter als Ergebnis eines Zählvorganges repräsentiert. Sie geben das Produkt eines Prozesses an. Dies steht in dieser Form der Zahlbereichserweiterung in den höheren Klassenstufen entgegen, da diese Repräsentationsänderung nicht vorgenommen wird, es erschwert auch die Hinzunahme der Null zu den Zahlen, die von Kindern in einer bestimmten Entwicklungsphase noch abgelehnt wird.
- Die Zahlen als Anzahlbestimmung von Mengen und damit eng mit dem Zählprozess verbunden bzw. durch ihn repräsentiert stehen kraftvolleren Strategien im Weg. Nicht zuletzt diese Repräsentationsverkürzung stellt das Hauptcharakteristikum von Dyskalkuliekindern dar. Die notwendige Repräsentationsänderung im Grundschulalter (vorzugsweise in den Eingangsklassen) muss zu Längen führen, zur Repräsentation von Zahlen als räumliche Beziehungen (Relationalzahlaspekt).

- Die Rechenoperationen werden ebenfalls verkürzt repräsentiert, so etwa die Addition als Mengenvergrößerung; es bedarf einer Umorganisation, die mit der Überführung der Repräsentation von Zahlen als Mengeneigenschaften hin zu Zahlen als Längenbeziehungen einhergeht. So ist der Zählprozess meist an die Finger gebunden, die Zahl wird aber von einem bestimmten Zeitpunkt der Entwicklung verändert als Länge, etwa „Fünf“ als Handbreite, repräsentiert, die nun Analogiebildung und Transfers ermöglicht. Die Modalität der Repräsentation kann immer noch enaktiv sein: Im ersten Fall „Hinzutun“ (Mengen), im zweiten Fall „Sprung nach rechts“ in dem vorgestellten Zahlenraum, für den es nach neuesten Befunden neuronale Grundlagen als Entwicklungsbedingungen im menschlichen Gehirn gibt (Dehaene, 1999). Ähnliches gilt für die Subtraktion: In einer ersten Phase als Rückwärtszählen repräsentiert, dann als Mengenverkleinerung (Wegnehmen), das Analogiebildung auf verschiedene Mengen erlaubt, das schließlich in der Grundschule umorganisiert wird zu „Sprung nach links“ (Längen im vorgestellten Zahlenraum).

9 Schlimmer noch: Zahlenrepräsentation vs. Operationsrepräsentation

Der Erwerb mathematischer Konzepte gelingt durch die Verbindung verschiedener Repräsentationsformate, und das ist an dieser Stelle, der Frage der Wirkung von Veranschaulichungsmitteln, nicht entscheidend. Für die Grundschule gilt, dass die Prototypen arithmetischer *Operationen* aus Handlungen entstanden sind, deren situative Charakteristik abgestreift wurde; sie bleiben aber dynamisch. Dies wurde im Vorangehend als enaktive Repräsentation bezeichnet. Die durchaus angemessene Repräsentation, die auf Handlungen beruht, hat aber ihre einschränkende Funktion. So sind z.B. bei Text- bzw. Sachaufgaben jene Situationen einfacher für Kinder lösbar, die eine dynamische Struktur aufweisen. Schwieriger sind statische Vergleichsaufgaben, die nicht der prototypischen Operationsvorstellung entsprechen. Die Prototypen von Rechenoperationen werden vom Grundschulkind (und den meisten Erwachsenen) als Handlungsabläufe gedacht: Addition als das Zusammenfügen von Mengen (Hinzutun, Gewinnen, Anheften, Ankleben, Verlängern etc.), die Subtraktion als Wegnehmen (Abschneiden, Verlieren, Verbrennen etc.), Multiplikation als wiederholtes Ausführen oder Hinzutun von Mengen und Division als Auf- oder Verteilen einer Menge. Es passiert etwas in der Vorstellung!

Die Zahlenrepräsentation ist hingegen etwas vollkommen anderes, wenn man der aktuellen Theorie folgt (Dehaene 1999; v. Aster & Lorenz 2005; Obersteiner im Druck). Zahlen werden mental auf einem imaginierten Zahlenstrahl repräsentiert, auf dem Bewegungen ausgeführt werden: Sprünge nach rechts für die Addition, nach links für die Subtraktion (zumindest in unserem Kulturkreis mit seiner Leserichtung „von links nach rechts“).

Dies bedeutet aber eine Erschwerung für den Anfangsunterricht, denn die Veranschaulichungsmaterialien, welche den Aufbau eines mentalen Zahlenraums bewirken sollen, sind offensichtlich andere, als jene, die ein Verständnis für Rechenoperationen hervorzurufen vermögen. Das eine sind lineare Darstellungen, welche den relationalen Zahlbegriff unterstützen, das andere sind (amorphe) Mengenhandlungen.

Und wir Didaktiker wissen nicht, wie wir beides verbinden sollen.

„Die Verwendung eines Darstellungsmittels hat weitreichende Konsequenzen. Bei der Vermittlung mathematischen Verständnisses dient es zunächst als anschauliches, kontextfreies Modell (externe Repräsentation des Zahlenraums), anhand dessen den Kindern der Aufbau des Zahlenraums nahegebracht werden soll. Gelingt dieses Unterfangen, entwickeln die Kinder – aufbauend auf diesem Darstellungsmittel – eine innere Vorstellung über den Aufbau der Zahlen (mentale Repräsentation des Zahlenraums)“ (Krajewski 2008, S. 362).

Man sieht, auch in der psychologischen Forschung wird mit schwammigen Begriffen operiert, denn das „Nahebringen“ und seine Wirkung bleiben unscharf, das Kind verbleibt eine black box.

Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken – das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett.

Anderson, J.R. (2000). *Kognitive Psychologie*. Heidelberg: Spektrum.

Aster, M.v. & Lorenz, J.H. (Hrsg.) (2005). *Rechenstörungen bei Kindern – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A.J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A.J. & Brannon, E.M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition, 83*, 223-240.

Baroody, A.J. & Dowker, A. (Hrsg.) (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Böttinger, C. (2007). Muster und Rechenaufgaben – Rechenaufgaben und Muster. *Grundschulzeitschrift*, 21(201), 30-41.

Campbell, J.I.D. (2005). *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.

Canobi, K.H., Reeve, R.A. & Pattison, P.E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology, 34*, 882-891.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Gelman, R. (1990a). Structural constraints on cognitive development. *Cognitive Science, 14*, 39.

Gelman, R. (1990b). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and animate-inanimate distinction as examples. *Cognitive Science, 14*, 79-106

Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie, 50*, 191-218.

Janvier, C. (Hrsg.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Karmiloff-Smith, A. (1996). *Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science*. Cambridge, MA: MIT Press.

Klein, J.S. & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. Canadian Journal of Experimental Psychol0gy, 54, 105-115.

Krajewski, K. (2008). Prävention der Rechenschwäche. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), Handbuch der Pädagogischen Psychologie (S. 360-370). Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J.H. (1995). Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. Grundschulzeitschrift, 9(82), 9-12.

Lorenz, J.H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns*. Braunschweig: Schroedel.

Mack, W. (2002). *Die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind*. Frankfurt: Habilitationsschrift an der Fakultät für Psychologie.

Mandler, G. & Shebo, B.J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 11*, 1-22.

Mulligan J. & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (S. 117-146). Rotterdam: Sense Publishers.

Obersteiner, A. (im Druck). *Mentale Repräsentation von Zahlen als kognitive Grundlage arithmetischer Kompetenzentwicklung*. Technische Universität München, Dissertation.

Presmag, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (S. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Rasmussen, C., Ho, E. & Bisanz, J. (2004). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*, 89-102

Resnick, L.B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Permutter (Hrsg.), *Perspectives on intellectual development: Minnesota Symposia on Child Psychology, Vol. 19*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart, D.E., McClelland, J.L. & PDP Research Group. (1986). *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition* (vol. 1). Cambridge, MA: MIT Press.

Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? *Grundschule, 16(4)*, 54-56.

Schwartz, D.L. & Heiser, J. (2006). Spatial representations and imagery in learning. In R. K. Sawyer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (S. 283-298). Cambridge: University Press.

Seel, N.M. (2003). Psychologie des Lernens. München: Reinhardt.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Söbbeke, E. (2007). „Strukturwandel" im Umgang mit Anschauungsmitteln. *Grundschulzeitschrift, 21*(201), 4-13.

Sophian, C. (1987). Early developments in children's use of counting to solve quantitative problems. *Cognition and Instruction, 4*, 61-90.

Sophian, C. (1996). Young children's numerical cognition: What develops? *Annals of Child Development, 12*, 49-86.

Sophian, C. (1998). A developmental perspective on children's counting. In C. Dolan (Hrsg.), *The development of mathematical skills* (S. 27-46). New York: Psychology Press.

Sophian, C. & Adams, N. (1987). Infants' understanding of numerical transformations. British Journal of Developmental Psychology, 5, 257-264.

Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. *Cognition, 43*, 93-126.

Starkey, P., Spelke, E.S. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36*, 97-127.

Steinbring, H. (2005). The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. Berlin: Springer.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development, 17*, 1365-1383.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36*, 155-193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.

Prof. Dr. Jens Holger Lorenz
PH Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561
69120 Heidelberg
jens.lorenz@t-online.de

Welcher Zufallsgenerator ist der Beste?
- Überlegungen zu „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ in der Grundschule

von Bernd Neubert

Im Vortrag wird die Bedeutung von „Medien und Materialien“ für die Leitidee „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ thematisiert. Drei Aspekte werden besonders angesprochen: die Rolle der typischen Zugänge zur Wahrscheinlichkeit für die Grundschule, das „didaktische Potenzial“ verschiedener Zufallsgeneratoren und die Arbeit mit mehreren Zufallsgeneratoren.

Schlüsselwörter: Zufall, Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeit

Zufallsbedingte Erscheinungen spielen im Leben eines jeden Menschen eine Rolle. Auch Kinder werden im Alltag mit zufälligen Erscheinungen konfrontiert. Sie sammeln subjektive Erfahrungen, die sehr prägend sein können. Sie wissen zwar, dass gewisse Dinge vom „Zufall“ abhängen und man für deren Eintreten „Glück“ braucht, wollen dies jedoch oft nicht wahrhaben. Ein Hinterfragen der Erscheinungen erfolgt eher intuitiv. Fehlschlüsse und unpassende Erklärungen für zufällige Vorgänge können die Folge sein.

Um diese Probleme besser hinterfragen zu können, erhoben Mathematikdidaktiker schon länger die Forderung nach einer frühen Auseinandersetzung mit dem Thema „Wahrscheinlichkeit“. Mit den KMK-Bildungsstandards erhielt diese Forderung Verbindlichkeit. Bis zum Ende der 4. Jahrgangsstufe sollen Schülerinnen und Schüler die Kompetenz erworben haben, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten zu vergleichen, so sehen es die KMK-Bildungsstandards vor (2005).

In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, welche Bedeutung „Medien und Materialien“ für die Entwicklung der in der Leitidee „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ zu entwickelnden Kompetenzen haben. Drei Aspekte stehen werden dabei angesprochen:

1. Welche Rolle spielen die in der Literatur thematisierten Zugänge zur Wahrscheinlichkeit in der Grundschule?

2. Welches „didaktische Potenzial“ besitzen verschiedene Zufallsgeneratoren?
3. Auf wie viele Zufallsgeneratoren sollte man im Unterricht zurückgreifen?

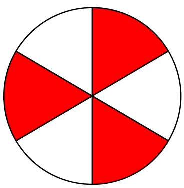
1 Experiment oder Arbeitsblatt? – Zugänge zur Wahrscheinlichkeit in der Grundschule

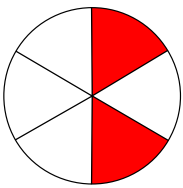
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Wahrscheinlichkeitsbegriff mit mathematischen Mitteln zu beschreiben. Daraus ergeben sich unterschiedliche Zugänge zur Wahrscheinlichkeit, an die auch in der Grundschule angeknüpft werden kann.

Eine gängige Unterscheidung in der Literatur ist die zwischen dem empirisch-statistischen und dem klassisch-kombinatorischen Zugang. Beim *empirisch-statistischen Zugang* (auch als frequentistischer Zugang bezeichnet) wird über das Ermitteln und Vergleichen von Häufigkeiten eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses gefunden. Es geht also um Beobachtungen von Zufallsexperimenten. Dazu werden Zufallsexperimente, z. B. Drehen eines Glücksrads oder Ziehen aus einer Urne, mehrfach durchgeführt. Die Ergebnisse werden festgehalten (z.B. mit Hilfe von Strichlisten) und ausgewertet. Dem *klassisch-kombinatorischen Zugang* liegt der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff (LAPLACE – Formel) zugrunde. Hier geht es um theoretische Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit von Ereignissen. Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten für das Eintreten des gewünschten Ereignisses wird der Gesamtanzahl aller Möglichkeiten gegenüber gestellt.

An den folgenden Beispielen zum Glücksrad soll gezeigt werden, dass durch entsprechende Formulierung der Aufgabenstellungen zum gleichen Sachverhalt stärker auf den einen oder anderen Zugang orientiert werden kann.

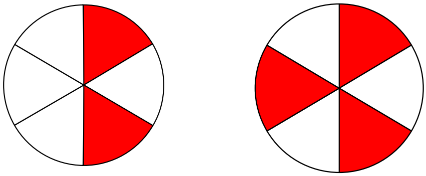
Aufgabe a:





Du siehst hier zwei Glücksräder mit roten Gewinnfeldern.
Drehe an jedem Glücksrad 50-mal!
Notiere für beide Räder, wie oft der Zeiger auf einem roten Feld stehen bleibt!
Kannst du erklären, warum das so ist?

Aufgabe b:



Du siehst hier zwei Glücksräder mit roten Gewinnfeldern.
Bei welchem Rad sind die Gewinnchancen größer? Warum?
Begründe deine Entscheidung!

Während Aufgabenstellung a zum Experimentieren und Notieren der Ergebnisse auffordert, regt Aufgabenstellung b zu theoretischen Überlegungen an.

Für den Unterricht haben beide Zugänge ihre Berechtigung. Der spielerisch-experimentelle Zugang knüpft stärker an die Erfahrungen der Kinder in Spielen an und ist vermutlich überzeugender, um vorhandenen Fehlvorstellungen entgegen zu wirken. Für das Erfassen der Ergebnisse der Experimente reicht der Umgang mit natürlichen Zahlen aus. Auch wenn dem klassisch-kombinatorischen Zugang durch die Notwendigkeit der Bruchrechnung mathematische Grenzen gesetzt sind und dieser eher in die Sekundarstufe gehört, lässt er sich für spezielle Beispiele auch schon in der Grundschule gehen. Eine Möglichkeit zur Verzahnung der beiden Zugänge besteht darin, zunächst Vermutungen über Wahrscheinlichkeiten anzustellen und dies später experimentell zu überprüfen.

2 Welcher Zufallsgenerator ist der Beste?

Grundschulkinder begegnen Zufallsexperimenten in unterschiedlichen Kontexten außerhalb des Unterrichts und lernen verschiedene Zufallsgeneratoren kennen. An erster Stelle werden meist Würfelspiele genannt, aber auch der Münzwurf, das Ziehen aus einer Urne sowie das Drehen an einem Glücksrad oder Glückskreisel sind ihnen bekannt. In verschiedenen Anregungen zur Gestaltung des Unterrichts werden diese Zufallsgeneratoren für Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit genutzt.

Anliegen dieses Abschnitts ist es, über das „didaktische Potenzial“ bei der Verwirklichung von unterschiedlichen Zielen für die Entwicklung der Kompetenz „Wahrscheinlichkeiten in Zufallsexperimenten vergleichen“ in der Grundschule zu reflektieren. Folgende Zufallsgeneratoren werden in die Analyse einbezogen: Münze, Würfel und andere geometrische Körper, Urne, Glücksrad.

2.1 Münze

Die „ideale Münze“ ist ein sehr einfacher Zufallsgenerator, da bei einem Wurf nur die Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ möglich sind. Für den Unterricht ist vor allem die Frage „Was fällt häufiger Kopf oder Zahl?“ geeignet. An Versuchsreihen mit größer werdender Anzahl (50 Würfe) können die Kinder erkennen, dass Zahl und Kopf etwa gleich oft fallen, die Ergebnisse demnach gleichwahrscheinlich sind. Diese Erkenntnis kann auch durch das einmalige Werfen entsprechend vieler Münzen erreicht werden. Beim mehrmaligen Werfen einer Münze sollte auch betont werden, dass man nicht vorhersagen kann, ob beim nächsten Wurf Kopf oder Zahl fällt. Damit kann die Einsicht in die Zufälligkeit dieses Ereignisses vertieft werden.

Im Unterricht kann die Münze auch durch Wendeplättchen ersetzt werden. Selbst der viel beschriebene Münzwurf des Schiedsrichters zur Seitenwahl vor Beginn eines Fußballspiels wird heute in der Regel mit einer Wurfmarke mit verschieden farbigen Seiten ausgeführt.

2.2 Würfel und andere geometrische Körper

Der Würfel wird im Mathematikunterricht nicht nur als Zufallsgenerator, sondern auch in anderen Zusammenhängen genutzt (Würfeln von Rechenaufgaben, Untersuchungen am Würfel in der Geometrie). Deshalb wird er in Schulbüchern und methodischen Materialien oft an den Anfang gestellt. Der Würfel ist ein symmetrischer Körper, bei dem keine Seite gegenüber einer anderen ausgezeichnet ist. Für Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit resultiert aus dieser Eigenschaft die Gleichwahrscheinlichkeit für das Eintreten der sechs Zahlen. Da viele Kinder die Vorstellung haben, dass bestimmte Zahlen beim Würfeln häufiger fallen als andere, sollten Einstiegsaufgaben mit der

Untersuchung der Gleichwahrscheinlichkeit für das Eintreten der einzelnen Augenzahlen verbunden sein. Später wird beim Würfeln mit zwei Würfeln herausgearbeitet, dass die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Würfelsummen auch unterschiedlich sein können.

Eine Schwierigkeitssteigerung beim Würfeln mit einem Würfel stellen Aufgaben dar, bei denen es mehrere Gewinnzahlen gibt. Dies lässt sich durch die Vorgabe von Spielregeln in der Aufgabenstellung realisieren:

Über die Bestimmung der günstigen Ereignisse für die jeweiligen Spielregeln und deren Vergleich kann die Aufgabe durch kombinatorische Überlegungen (Zählen der günstigen Möglichkeiten) gelöst werden.

Name:	Aufgabe 4

Schau dir den 6er Würfel und die Gewinnregeln an.

a) Wähle die Gewinnregel aus, mit der du die größte Gewinnchance hast. Kreuze sie blau an!

b) Wähle die Gewinnregel aus, mit der du die kleinste Gewinnchance hast. Kreuze sie grün an!

1	2	3	4	5
Du gewinnst bei 1, 2 oder 3.	Du gewinnst bei 1, 3 oder 5.	Du gewinnst bei 1.	Du gewinnst bei Zahlen, die kleiner als 6 sind.	Du gewinnst bei 5 oder 6.
☐	☐	☐	☐	☐

Begründe deine Entscheidung!

Die Eigenschaft des Würfels, dass es beim Würfeln immer genau sechs Elementarereignisse gibt, kann aus stochastischer Sicht sowohl als Vorteil als auch Nachteil gesehen werden. Der Vorteil besteht darin, dass ein Vergleich der günstigen Ergebnisse auch gleichzeitig ein Vergleich der Wahrscheinlichkeiten ist. Als Nachteil muss demzufolge gesehen werden, dass das Verhältnis zwischen günstigen und möglichen Ergebnissen bei den Überlegungen der Schüler nicht berücksichtigt werden muss.

Im Vergleich zum Würfel mit einer Ergebnismenge von genau sechs Elementarereignissen können durch die Verwendung weiterer Platonischer Körper als Zufallsgeneratoren auch Aufgaben entwickelt werden, bei denen die Ergebnismengen unterschiedliche Anzahlen von Elementarereignissen haben.

Platonische Körper stellen für Grundschüler in der Regel unbekannte Körper dar. Deshalb ist es notwendig, zunächst den geometrischen Aufbau (Anzahl kongruenter Begrenzungsflächen) zu klären. Daraus ergeben sich Möglichkeiten für die gemeinsame Behandlung von Inhalten zu Geometrie und Wahrscheinlichkeit. In den folgenden Ausführungen stehen die Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit im Vordergrund.

Die Aufgabentypen zu einem Platonischen Körper entsprechenden beim Würfel möglichen. Exemplarisch wird eine Aufgabe zum Dodekaeder vorgestellt. Für den Einsatz in den Anfangsklassen ist das Begriffswort „Zwölferwürfel“ für das Dodekaeder zu empfehlen (vgl. Breiter et al. 2009).

Aus der Einbeziehung verschiedener Platonischer Körper ergeben sich neue Möglichkeiten und Sichtweisen für Wahrscheinlichkeitsvergleiche. Die unterschiedliche Anzahl an Begrenzungsflächen und die damit verbundene unterschiedliche Anzahl von Elementarereignissen erfordert, den Blick auch auf das Verhältnis von günstigen und möglichen Ergebnissen zu richten.

An Aufgaben wie der folgenden sollen die Schüler erkennen, dass die Chancen für eine bestimmte Glückszahl steigen, je weniger Flächen der Platonische Körper besitzt. Für das Lösen dieser Aufgabe ist ein Strategiewechsel vom Vergleich günstiger Möglichkeiten zum Vergleich ungünstiger Möglichkeiten denkbar.


Name: | Aufgabe 2

Wenn du die „6“ würfelst, gewinnst du.

Schau dir den 6er Würfel und den 12er Würfel an.
Bei welchem Würfel ist deine Gewinnchance größer?
Kreuze an!

6 ☐ 6 ☐

Begründe deine Entscheidung!

Für Vergleiche zwischen zwei Platonischen Körpern als Zufallsgeneratoren eignen sich vor allem Würfel und Dodekaeder. Da die Anzahl der Begrenzungsflächen beim Dodekaeder mit 12 doppelt so groß wie die beim Würfel ist und damit auch die Anzahl der möglichen Elementarereignisse doppelt so groß ist, können Aufgaben zum Vergleich von Gewinnchancen zwischen Würfel und Dodekaeder (12er Würfel) zum Nachdenken über Proportionalitäten anregen. Die Vergleiche zwischen diesen beiden Körpern sind insofern noch relativ einfach, da die Anzahlen der Möglichkeiten sich im Verhältnis 1: 2 verhalten. Trotzdem stellt das selbstständige Finden dieser Erkenntnis für viele Grundschüler eine hohe Hürde dar.

2.3 Zufallsexperimente mit zwei Würfeln

Das Ziel für die Durchführung von Zufallsexperimenten mit zwei Würfeln ist das Herausarbeiten der Erkenntnis, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten verschiedener Würfelsummen unterschiedlich ist. Manchen Kindern fällt es schwer, den Vorstellungsumbruch von der Gleichwahrscheinlichkeit der Zahlen beim Würfeln mit einem Würfel zur unterschiedlichen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten verschiedener Würfelsummen nachzuvollziehen. Deshalb sollten sie zunächst auf empirisch-statistischem Wege selbstständig erkunden, bevor durch kombinatorische Überlegungen eine theoretische Begründung erfolgt.

Als Einstieg eignen sich Spiele wie das Wurmspiel (Neubert 2002), in dem sich die Kinder mit dem Phänomen des Würfelns mit zwei Würfeln auseinandersetzen können.

Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt, die Augenzahlen der beiden Würfel werden addiert. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 6 ist, Spieler 2 bei der Summe 9.
Spielt einige Runden! Wer gewinnt häufiger?

Nach Überlegungen zu unterschiedlichen Spielregeln kann die vollständige Untersuchung aller Möglichkeiten zur Summenbildung beim Würfeln mit zwei Würfeln erfolgen. Erfahrungsgemäß gibt es mitunter Schwierigkeiten beim Herausarbeiten der Einsicht, dass innerhalb der Summe die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielt. Beispielsweise sind 2 + 1 und 1 + 2 verschiedene Zerlegungen der Summe 3, was folglich bei der Bestimmung der Anzahlen möglicher Zerlegungen für diese Summe berücksichtigt werden muss. Verschieden farbige Würfel können als Anschauungsmittel genutzt werden, um die notwendige Einsicht zu erreichen: Das Ereignis „2 auf dem roten Würfel und 1 auf dem blauen Würfel" ist ein anderes als „1 auf dem roten Würfel und 2 auf dem blauen Würfel". Auf diese Art kann auch geklärt werden, warum es für Summen aus zwei gleichen Summanden nur eine Möglichkeit gibt.

2.4 Aufgaben unter Einbeziehung des Quaders

Den Quader lernen Grundschüler in der Regel schon im Anfangsunterricht als geometrischen Körper kennen. Das Interessante am Quader aus stochastischer Sicht ist, dass er auf Grund unterschiedlicher Größe der Begrenzungsflächen einen asymmetrischen Zufallsgenerator darstellt. Dies kann für Aufgaben mit unterschiedlicher Zielsetzung genutzt werden. Für die Experimente sollten die Flächen des

Quaders genau so mit Punkten versehen werden wie beim Spielwürfel (1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 liegen gegenüber). Für die Sekundarstufe kann das Experimentieren mit dem Quader auch zum Validieren eines mathematischen Modells genutzt werden. Es erscheint naheliegend, das beim Würfel angewendete Modell der geometrischen Wahrscheinlichkeit auf den Quader zu übertragen. Das hieße, von den Flächenanteilen der einzelnen Quaderflächen an der Gesamtoberfläche auf die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Gewinnzahlen zu schließen. Diese Hypothese verträgt sich allerdings nicht mit experimentellen Ergebnissen. Es lässt sich lediglich nachweisen, dass gleich große (gegenüber liegende) Flächen die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit nach sich ziehen und die Gewinnchance für größere Flächen höher ist als für kleinere. Flächeninhalt und Wahrscheinlichkeit verhalten sich aber nicht proportional. (Eichler und Vogel 2009, S. 148 ff.)

2.5 Urne

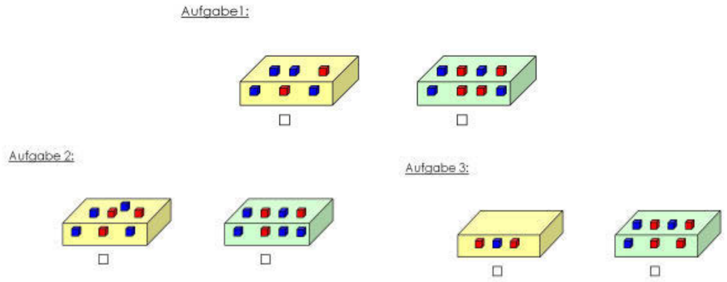
Die Urne als Zufallsgenerator haben viele Kinder beispielsweise an einer Losbude auf einem Jahrmarkt kennen gelernt. Im Vergleich mit dem Würfel können bei Urnen durch unterschiedliche Anzahlen von Kugeln die Ergebnismengen nahezu beliebig variiert und Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads entwickelt werden. Im Wesentlichen ist zwischen den folgenden Aufgabentypen zu unterscheiden:

- *Aufgaben zum Vergleich zweier Urnen hinsichtlich der Gewinnchancen*
- *Aufgaben zum Vergleich der Gewinnwahrscheinlichkeit innerhalb einer Urne*
- *Erarbeitung eigener Urnen-Aufgaben*

Als Urne (im Sinne der Terminologie der Wahrscheinlichkeit) können im Unterricht verschiedene Behältnisse wie Schachteln, Kisten oder Beutel verwendet werden. Vor dem Experimentieren sollte geklärt werden, welches Begriffswort für diesen Zufallsgenerator gewählt wird. An Stelle des in der deutschen Sprache mehrdeutigen Begriffs „Urne“ kann der Begriff des jeweiligen Behältnisses für die Formulierung der Aufgabenstellungen verwendet werden.

Für die folgenden Beispiele 1 bis 3 gilt die gleiche Aufgabenstellung. Aufgrund der unterschiedlichen „Mischungsverhältnisse“ in den Urnen erhalten die Aufgaben einen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad:

Wenn du rot ziehst, gewinnst du! Aus welcher Schachtel würdest du ziehen?
Begründe deine Überlegungen!

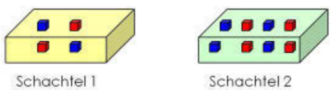


Bei Aufgabe 1 führt die Strategie des Vergleichs der günstigen Ereignisse (bei Gleichheit der ungünstigen) zum Ziel. Bei Aufgabe 2 ist die Anzahl der günstigen Ereignisse gleich, hier führt ein Vergleich der ungünstigen Ereignisse zum Ziel. Bei Aufgabe 3 kommt man mit keiner der beiden Strategien zum Ziel.

Aufgabe 4:

Betrachte die beiden Schachteln und kreuze den passenden Satz an! Begründe deine Entscheidung!

- ☐ Mit Schachtel 1 ist meine Chance zu gewinnen größer.
- ☐ Bei beiden Schachteln ist meine Chance zu gewinnen gleich.
- ☐ Mit Schachtel 2 ist meine Chance zu gewinnen größer.



Bei Aufgabe 4 beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit für beide Urnen P = 0,5, da genau die Hälfte der Kugeln günstig sind. Allerdings zeigen Untersuchungen, dass es vielen Grundschülern genau wie bei der strukturgleichen Aufgabe zum Vergleich von Würfel und Dodekaeder schwer fällt, dies zu erkennen. Dies lässt darauf schließen, dass der Verhältnisaspekt der Bruchrechnung in diesem Alter noch wenig entwickelt ist.

Die Erarbeitung eigener Aufgaben lässt für alle Zufallsgeneratoren einen breiten Spielraum sowohl für die Aufgabenstellung als auch den Bearbeitungsprozess. Exemplarisch für diesen Aufgabentyp stehen die folgenden Beispiele:

- Du sollst ein Gefäß für ein Spiel mit 8 Kugeln füllen. Du hast rote und blaue Kugeln. Wie musst du das Gefäß füllen, wenn die Chance für das Ziehen einer roten Kugel größer als die für das Ziehen einer blauen sein soll?
- In einem Gefäß sind 7 rote Kugeln. Du möchtest noch blaue dazu tun. Die Chance für das Ziehen einer roten Kugel soll größer als das für das Ziehen einer blauen sein. Welche Möglichkeiten hast du?

2.6 Glücksrad und Glückskreisel

An Glücksrädern und Glückskreiseln werden „Wahrscheinlichkeitsverhältnisse“ anschaulich und ermöglichen Flächenvergleiche. Außerdem lassen sich noch weitere Parameter für die Gestaltung von Aufgaben finden:

Die Kreissektoren können unterschiedlich groß sein.

Man kann die Felder färben oder nummerieren.

Man kann die Felder bei gleicher Anzahl unterschiedlich anordnen.

Die Aufgabengruppen entsprechen denen für die Urne:

Aufgaben zum Vergleich zweier Glückräder hinsichtlich der Gewinnchancen

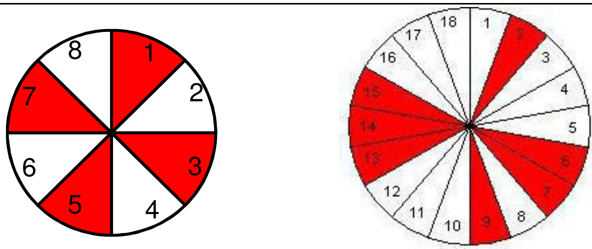
Aufgaben zum Vergleich der Gewinnwahrscheinlichkeit innerhalb eines Glücksrads

Erarbeitung eigener Glücksrad-Aufgaben

Bei den beiden Aufgaben zum Vergleich zweier Glücksräder hinsichtlich der Gewinnchancen ergibt sich aus dem unterschiedlichen Aufbau der Glücksräder ein unterschiedlicher Schwierigkeitsgrad.

Du siehst hier zwei Glücksräder mit roten Gewinnfeldern. Bei welchem Rad sind die Gewinnchancen größer? Warum?

Bei der ersten Aufgabe sollen zwei Glücksräder mit gleich großen und gleich vielen Kreissektoren verglichen werden. Mit diesem Aufgabentyp kommen in der Regel auch schon Erstklässler zurecht, da sie hier die Strategie des Vergleichs günstiger Ergebnisse anwenden können.



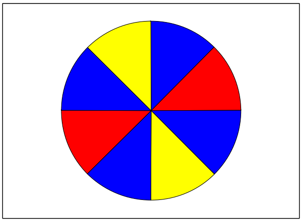
Du siehst hier zwei Glücksräder mit roten Gewinnfeldern. Bei welchem Rad sind die Gewinnchancen größer? Warum?

Bei der zweiten Aufgabe liegt weder bei den Gesamtanzahlen von 8 und 18 noch den Anzahlen 4 und 7 an günstigen Feldern Proportionalität vor. Die Färbung der Felder wurde bewusst so gewählt, dass beim linken Glücksrad mit 4 von 8 Feldern genau die Hälfte der Felder Gewinnfelder sind, während dies beim rechten Rad mit 7 von 18 Feldern weniger als die Hälfte sind. Zusätzlich zur Färbung sind die Felder auch nummeriert. Dies kann eine Hilfe bei der Bestimmung der Anzahl der Felder sein. Man muss aber auch damit rechnen, dass die doppelte Kennzeichnung einige Kinder irritiert.

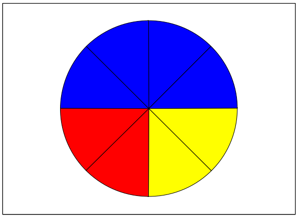
Für die folgende Aufgabe wird als weiterer Parameter, der den Vergleich beeinflusst, die Anordnung der Felder des Glücksrads aufgenommen. Die Anzahl der jeweiligen Felder einer Farbe ist in beiden Glücksrädern gleich, ihre Anordnung ist aber verschieden.

Du gewinnst bei blau. Welches Glücksrad wählst du? Kreuze eine Antwort an und schreibe eine Begründung für deine Wahl!

Glücksrad 1



Glücksrad 2



Ich wähle Glücksrad 1, weil
Ich wähle Glücksrad 2, weil
Es ist egal, welches Glücksrad man wählt, weil
____
Ich bin mir nicht sicher, weil
____

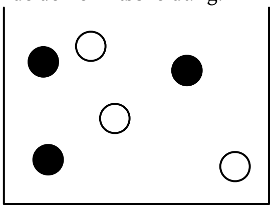
Auch wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Farbe blau bei beiden Glücksrädern gleich groß ist (vier von acht Feldern sind günstig), entscheiden sich Kinder (und auch Erwachsene) häufig für Glücksrad 1 oder 2. Die Begründungen sind meist gegensätzlich. Die Entscheidung für Glücksrad 1 wird mit der besseren Chance, wenn die Felder auseinander liegen, begründet, die Entscheidung für Glücksrad 2 mit dem nebeneinander liegen der günstigen Felder.

3 Aufgaben mit verschiedenen Zufallsgeneratoren

Die bisherigen Betrachtungen konzentrierten sich hauptsächlich auf Aufgaben zu einem Zufallsgenerator. Im Folgenden werden Aufgaben vorgestellt, bei denen mehrere Zufallsgeneratoren untersucht werden. Dieser Aufgabentyp wurde bereits beim Vergleich verschiedener Platonischer Körper (Würfel und Dodekaeder) angesprochen. In den folgenden Beispielen werden nun Zufallsgeneratoren miteinander verglichen, die im äußeren Aufbau keine solchen Gemeinsamkeiten aufweisen, wie sie bei verschiedenen Platonischen Körpern vorhanden sind. Die Beispielaufgaben sind exemplarisch für den Vergleich von Urne und Würfel gewählt. Sie lassen sich entsprechend auf andere Zufallsgeneratoren übertragen. Die Schwierigkeitssteigerungen entsprechen aus mathematischer Sicht im Wesentlichen denen, die für die einzelnen Zufallsgeneratoren beschrieben wurden.

Als Beispiele wurden Aufgaben gewählt, bei denen die Gewinnwahrscheinlichkeit für beide Zufallsgeneratoren gleich ist.

In dem Gefäß sind **6** Kugeln, **3** schwarze und **3** weiße. Du gewinnst, wenn du **schwarz** ziehst. Bei dem Würfel gewinnst du, wenn du die Zahl 1, 5 oder 6 würfelst. Wählst du Gefäß oder Würfel, um zu gewinnen?
Begründe deine Entscheidung!



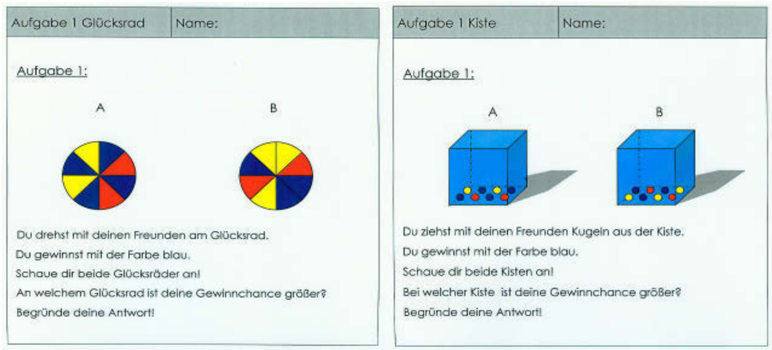
1, 5, 6

Bei einer Untersuchung in einer vierten Klasse war die Anzahl richtiger Lösungen sehr unterschiedlich. Während die meisten Kinder die Gleichheit der Gewinnchancen bei der hier dargestellten Aufgabe erkannten, gelang dies bei einer zweiten Aufgabe (Gefäß mit 12 Kugeln, 10 schwarze und 2 weiße, Gewinnzahlen Würfel 1, 2, 3, 4 oder 5) nur wenigen.

Das letzte Beispiel hat einen anderen Charakter als die bisher vorgestellten. Zwei Aufgaben gehören immer zusammen. Sie haben die gleiche mathematische Struktur, sind aber für unterschiedliche Zufallsgeneratoren konzipiert. Exemplarisch wurden als Zufallsgeneratoren Urne und Glücksrad und als Aufgabentyp der Vergleich zweier Zufallsgeneratoren gewählt. Analoge Aufgabenstellungen können aber auch zu anderen Zufallsgeneratoren und anderen vorgestellten Aufgabentypen konzipiert werden.

Als Transferleistung sollen die Kinder diesen Zusammenhang erkennen. Hier zeigt sich, ob die Kinder schon über entsprechende Modellierungskompetenzen verfügen.

Für den Einsatz im Unterricht erscheinen zwei Varianten möglich. Bei der ersten Variante werden zunächst ausschließlich Aufgaben zu einem Zufallsgenerator gelöst und mit zeitlichem Abstand die entsprechenden Aufgaben zum zweiten. Danach erfolgt eine Reflexionsphase zum Vergleich. Bei der zweiten Variante werden die Kinder parallel mit den strukturgleichen Aufgaben zu beiden Zufallsgeneratoren konfrontiert. Ziel ist es, dass sie die Gemeinsamkeiten der Aufgaben beim Lösen erkennen.



4 Zusammenfassung

Für die Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ sollten auch schon in der Grundschule verschiedene Zugänge zur Wahrscheinlichkeit gewählt werden. Dazu können verschiedene Zufallsgeneratoren genutzt werden. Die analysierten Zufallsgeneratoren sind den Kindern in der Regel bekannt. Die Zufallsgeneratoren besitzen unterschiedliches „didaktisches Potenzial“ für die Verwirklichung verschiedener Ziele, was bei der Auswahl für den Unterricht berücksichtigt werden sollte (Neubert 2011b, S. 6). Untersuchungsergebnisse an verschiedenen Zufallsgeneratoren zeigen vergleichbare Tendenzen im Lösungsverhalten der Schüler.

Literatur

KMK (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München; Neuwied.

Breiter, E., Pfeil, C. & Neubert, B. (2009). Das Thema „Zufall“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Aufgabenvorschläge für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Sache – Wort – Zahl* (102), 27 – 30, 35 – 38.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Neubert, B. (2002). Grundschüler beurteilen ein Würfelspiel – Ein Erfahrungsbericht. *Stochastik in der Schule* 22(1), 25 -29.

Neubert, B. (2011a). *Leitidee: Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Offenburg; Mildenberger Verlag,

Neubert, B. (2011b). Welcher Zufallsgenerator ist der Beste? Spielerisch-experimentelle Zugänge ermöglichen theoretische Überlegungen zu Kombinatorik, Zufall und Wahrscheinlichkeit. *Grundschulunterricht Mathematik* (58)4, S. 4 – 6.

Neubert, B. (2007). Kompetenzen von Grundschülern bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Stochastik in der Schule* 27(3), 28 – 33.

Dr. Bernd Neubert
Justus-Liebig-Universität Gießen
Institut für Didaktik der Mathematik
Universität Gießen
Karl-Glöckner-Straße 21c
35394 Gießen
Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de

Vom Calculieren zum Kalkulieren – Materialien als Lösungs- und als Lernhilfen

von Wilhelm Schipper

Mathematiklernen ohne Materialverwendung scheint undenkbar zu sein. Aus den Handlungen an Materialien sollen mentale Vorstellungen mathematischer Begriffe und Verfahren entstehen, die es den Kindern letztlich ermöglichen, mathematische Anforderungen ohne Rückgriff auf Materialien zu bewältigen. Die Arbeit mit rechenschwachen Kindern zeigt aber, dass die Calculi in ihren Händen viel zu oft kein Kalkulieren in ihren Köpfen entstehen lässt. Es werden empirische Studien vorgestellt, die zur Erklärung dieses Phänomens beitragen können.

Schlüsselwörter: Arbeitsmittel, Veranschaulichungen, Zahlenfelder, Vorstellungsbilder, Rechenschwäche

1 Materialhandlungen rechenschwacher Kinder

Anna besucht das zweite Schuljahr. Sie wird von ihrer Lehrerin als schwach in Mathematik eingeschätzt. Deshalb hat sie dieses Kind neben drei weiteren als leistungsschwach und vier als leistungsstark in Mathematik eingeschätzten Kindern für die Beteiligung an einer Studie zur Verwendung des Hunderter-Punktefeldes ausgewählt (Rottmann und Schipper 2002). Mithilfe dieses Materials hatte die Lehrerin das Rechnen im Zahlenraum bis 100 erarbeitet. Im Rahmen der Studie wurden den Kindern Additions- und Subtraktionsaufgaben gestellt und sie durften wählen, ob sie beim Lösen der Aufgaben das Hunderter-Punktefeld verwenden oder darauf verzichten wollen. Anna hat sich für das Punktefeld entschieden. U. a. soll sie die Aufgabe 58 + 37 rechnen.

Sie tippt auf das Feld 85 und zählt dann in Einerschritten von eins an mit Antippen weiter bis sie mit „fünfzehn“ auf Feld 100 endet. Der Versuchsleiter wiederholt die Aufgabe mit Betonung der acht beim Zahlwort *acht*undfünfzig. Nach kurzem Zögern tippt Anna auf das Feld 49 und beginnt von dort an weiterzuzählen. Mit „siebenunddreißig“ tippt sie auf das Feld 86, setzt ihren Zählprozess aber ohne zu zögern fort. Beim weiteren Zählen macht sie einen Sprung von „neununddreißig“ nach „fünfzig“ und landet schließlich mit dem Zahlwort „einundsechzig“ auf dem Feld 100. Auf die Frage „Weißt du noch, was ´rauskommt?“ antwortet sie mit „hundert“ und tippt dabei noch einmal auf das Feld 100.

Anna zeigt Probleme, die bei rechenschwachen Kindern in der Bielefelder Beratungsstelle (http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm) häufig zu beobachten sind. Aus der „achtundfünfzig“ wird in ihrem Kopf eine „fünfundachtzig“, ein Zahlendreher. Beim Weiterzählen springt sie von 39 nach 50, Unsicherheiten beim Aufsagen der Zahlwortreihe. Die Zahl 58 stellt sie im zweiten Versuch auf Feld 49 ein. Dabei kombiniert sie zwei Fehlertypen. Sie sucht die Fünfziger-Zahlen in der fünften Reihe, ein Zeilenfehler, und für sie stehen die vollen Zehner am linken Rand des Punktefeldes.

Es war nicht Aufgabe dieser Studie, das Wissen und die Einstellung der Lehrerin zum Mathematiklernen mit Materialien und Veranschaulichungen zu erfassen. Vermutlich hat sie aber in ihrer ersten Lehrerausbildungsphase im Fach Pädagogik etwas vom Prinzip der Handlungsorientierung gehört, vielleicht sogar in der Mathematikdidaktik etwas über das operative Prinzip im Sinne Piaget‘s und über Bruner‘s Repräsentationsmodi des Wissens. Aus Handlungen an konkreten Materialien entstehen mentale Vorstellungen, die es den Kindern ermöglichen, mathematische Anforderungen ohne Rückgriff auf Materialien „innermathematisch“ zu bewältigen, so die Kurzfassung diese Prinzips, wie es auch heute noch in manchen Publikationen in Lehrerzeitschriften dargestellt wird.

Bei Anna könnte man den Eindruck haben, dieses Prinzip habe bei ihr nicht gewirkt. Das Gegenteil scheint richtig zu sein. Die *Kurzfassung* des Prinzips hat sich bei ihr nachhaltig, aber eben nur in Kurzform ausgewirkt. Im ersten Schuljahr hat sie gelernt, Additions- und Subtraktionsaufgaben zunächst mit Wendeplättchen und Alleszählen, dann mit Weiterzählen mit Plättchen und am Zwanziger-Punktefeld zu lösen. Gegenüber dem Verfahren unserer Vorfahren, mit Calculi die Bestände ihrer Schafherden darzustellen und die Anzahl der

Schafe aus mehreren Herden durch Zusammenlegen der Repräsentanten zu bestimmen, nutzt Anna sogar ein fortschrittlicheres Verfahren. Ihre zeitgemäßen Calculi sind Wendeplättchen und strukturierte Zahlenfelder, die sie aber ohne Beachtung der Struktur als Hilfen beim Weiterzählen nutzt. Die mithilfe ihrer Handlungen an solchen Materialien aufgebauten mentalen Vorstellungen für Addition und Subtraktion sind geprägt durch Zählhandlungen an Zahlrepräsentanten.

Anna ist in einem Teufelskreis gefangen. Mentale Vorstellungen über Zahleigenschaften, Zahl- und Aufgabenbeziehungen, z. B. über Analogien, stehen ihr nicht zur Verfügung. Weil ihr solche Vorstellungen mathematischer Begriffe und Konzepte fehlen, ist sie auf Zählprozeduren an Repräsentanten angewiesen. Und weil sie immer wieder an Repräsentanten zählt, gelangt sie zu keinen Vorstellungen über Zahlen und Operationen. Der entscheidende qualitative Sprung vom Calculieren zum Kalkulieren, also von einem Zählen an konkreten oder nur noch mental vorgestellten Repräsentanten zu einem Rechnen mit entwickelten Zahl- und Operationsvorstellungen, gelingt ihr und zu vielen anderen Kindern nicht. Offen bleibt die Frage, ob Anna das Material als Zählhilfe nutzt, weil sie rechenschwach ist, oder ob sie rechenschwach ist, weil sie das Material als Zählhilfe nutzt.

2 Typen mentaler Vorstellungen

Hendrik Radatz hat ab Mitte der 1980er-Jahre in mehreren Studien die Art der mentalen Vorstellungen von Grundschülern bezogen auf Rechenaufgaben untersucht. In diesen Studien geht es immer um Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen. In zwei Studien (Radatz 1986, 1995) untersucht er, welchen Einfluss Rahmungsprozesse auf die Aktivierung von mentalen Vorstellungen haben.

Der besondere Pfiff seiner ersten Studie besteht darin, dass er Abbildungen von Rechenaufgaben Grundschulkindern einerseits in einer Mathematikstunde, andererseits in einer Religionsstunde zur Deutung vorlegt. Beide Gruppen bekommen keinen Hinweis, dass es Abbildungen von Rechenaufgaben sind. Im Rahmen des Mathematikunterrichts werden die Darstellungen ganz überwiegend mathematisch gedeutet, wenn auch nicht immer im intendierten Sinne. Im Religionsunterricht herrschen dagegen Drudel-Deutungen von hüpfenden Kängurus und Ähnliches vor. Eine noch explizitere Rahmung nimmt Hendrik Radatz in seiner zweiten Studie vor. Der Schülergruppe A wird gesagt, die Abbildungen seien Darstellungen von Rechenaufgaben aus Schulbüchern, der anderen Gruppe B wird dieser Hinweis nicht gegeben. Alle Deutungen in der Gruppe A sind ausnahmslos mathematischer Art, etwa die Hälfte aller Deutungen in der Gruppe B sind Drudel-Phantasien. Die Bedeutung steckt nicht in den Bildern, sie wird hineingelesen. Sie sind individuell sehr unterschiedlich und situationsabhängig.

In einer weiteren Studie untersucht Hendrik Radatz (1990) den umgekehrten Übersetzungsprozess von einer symbolischen in eine ikonische Darstellung. Zu den Aufgaben 7 – 2 = 5 und 4 + 3 = 7 sollen die Kinder Bilder malen. Die Zeichnungen werden von ihm als (1) Bildgeschichten, (2) Mengenoperationen oder (3) als Übertragungen in andere Symbolformen typisiert. Die folgende Abbildung 1 zeigt jeweils ein Beispiel für diese Typen.

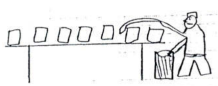
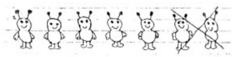
		
Bildgeschichte	Mengenoperation	andere Symbolform

Abb. 1 Typen von Darstellung für 7 – 2 = 5 aus Radatz (1990)

Die Studie zeigt, dass leistungsschwache Rechner in deutlich mehr als zwei Drittel aller Fälle Übersetzungen in andere Symbolformen als Darstellungen für Rechenaufgaben wählen. Anzahlen werden in Bilder übersetzt, teilweise in Kringelbilder, die aus dem Mathematikunterricht bekannt sind, teilweise aber auch in selbst gewählte Objekte, wie die Sterne in der Abbildung 1. Für die Zeichen „minus“ und „gleich“ erfinden manche Kinder eigene Symbole. In den Darstellungen der leistungsstarken Kinder spielen dagegen vor allem die schulisch vermittelten Mengenoperationen eine Rolle; in knapp einem Fünftel der Fälle sind sie zudem in der Lage, zu den Aufgaben Rechengeschichten zu malen, also Grundvorstellungen zu Rechenoperationen zu aktivieren.

Dass sich die mentalen Vorstellungen von leistungsstarken und leistungsschwachen Kindern deutlich unterscheiden, haben auch zahlreiche Studien unter Mitwirkung von Eddie Gray gezeigt. Während Hendrik Radatz vor allem schriftliche Produkte von Schülerinnen und Schüler analysiert, werden in diesen Studien die spontanen mündlichen Reaktionen von Kindern auf mathematische Begriffe untersucht. Ihnen werden Zahlen oder Rechenaufgaben genannt und sie sollen beschreiben, welche Bilder in ihrem Kopf erscheinen („what came to mind"; Gray et al. 1999, 3).

Bei der Nennung der Zahl 5 „sehen" leistungsschwache Kinder unabhängig von ihrem Alter vor ihrem inneren Auge fünf Finger, fünf Plättchen oder fünf andere konkrete Objekte. Die leistungsstarken Kinder „sehen" dagegen „zwei plus drei" oder gar „100 – 95". Bei Rechenaufgaben berichten die Leistungsstarken, dass sie die geschriebene Aufgabe sehen, zu der dann sofort das Bild der Lösung „aufblitzt". Ein Kind berichtet, dass bei der Aufgabe 9 + 7 ganz schnell 10 + 6 in seinem Kopf auftauche. Die leistungsschwachen Kinder „sehen" dagegen ihre Finger oder Plättchenreihen, an denen sie in Gedanken abzählen.

Solche Beobachtungen machen wir auch in unserer Beratungsstelle. Florian, ein Hauptschüler im achten Schuljahr, wurde gebeten, die Aufgabe 6 + 8 zu lösen. Für die richtige Lösung braucht er 12 Sekunden und wird dann gefragt, wie er die Aufgabe gelöst hat. Er antwortet, er habe von der 8 aus gerechnet, weil dies die größere Zahl sei. Dann habe er sich die Hände vorgestellt und „immer zwei" gezählt. Als mentales Vorstellungsbild für die Lösung dieser Aufgabe aktiviert er also die Vorstellung des Zählens in Zweierschritten an den vorgestellten Fingern.

Zahlen und Rechenaufgaben können anscheinend qualitativ sehr unterschiedliche, aber zeitlich je dauerhafte mentale Vorstellungen aktivieren. Leistungsschwache Kinder „sehen" konkrete physikalische Objekte, oft mit Form- und Farbeigenschaften. Diese inneren Bilder sind mentale Hilfen für ein Abzählen „im Kopf". Die Vorstellungen der leistungsstarken Kinder sind dagegen frei von solchen physikalischen Objekten. Sie sehen vor ihrem „geistigen Auge“ die Aufgabe, zu der sofort die Lösung „aufblitzt“, oder sie sehen Beziehungen zwischen Aufgaben wie 9 + 7 = 10 + 6. Die Vorstellungsbilder dieser Kinder enthalten das Wissen um Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben. Die Ablösung von mentalen Vorstellungen konkreter Objekte des Handelns ermöglicht die „Sicht“ auf Beziehungen und Strukturen. Warum manchen Kindern dies gelingt, anderen nicht, ist ebenso eine offene Frage wie die, ob Zahl- und Operationsvorstellungen tatsächlich aus Handlungen an Materialien entstehen oder im Gegenteil durch solche Handlungen verhindert werden.

3 Verständnis strukturierter Zahlenfelder in der Mitte des zweiten Schuljahres

In einer neueren Studie haben wir in der Mitte des zweiten Schuljahres das Verständnis für strukturierte Zahlenfelder untersucht. Es kann davon ausgegangen werden, dass Schülerinnen und Schüler zu diesem Zeitpunkt – etwa drei Monate nach der Einführung in den Zahlenraum bis 100 – solche Zahlenfelder mindestens schon gesehen, vermutlich sogar mehr oder weniger intensiv damit gearbeitet haben. Denn strukturierte Zwanziger- und Hunderter-Punktefelder und -Zahlen-Tafeln sind verbreitete Arbeitsmittel, die den Kindern helfen sollen, ein Verständnis für die Struktur der Zahlenräume zu entwickeln und in ihnen zu rechnen.

In BIRTE 2 (Schipper et al. 2011), einer computergestützten Diagnostik arithmetischer Kompetenzen in der Mitte des zweiten Schuljahres, sind zwei Module aufgenommen worden, mit denen einerseits die ordinale Zahldarstellung auf solchen Feldern, andererseits die schnelle, quasi-simultane Zahlauffassung in diesen Zahlenräumen geprüft wird. Dabei kann unterstellt werden, dass hohe Lösungskompetenzen bzw. typische Fehler als Indikatoren für das individuelle Verständnis der Struktur dieser Zahlenfelder gedeutet werden können. Die folgenden Befunde basieren auf den Daten der Normierungsstichprobe mit 2087 Kindern aus acht Bundesländern, die in einem engen Zeitfenster von Mitte Januar bis Ende Februar in zweiten Schuljahren erhoben wurden.

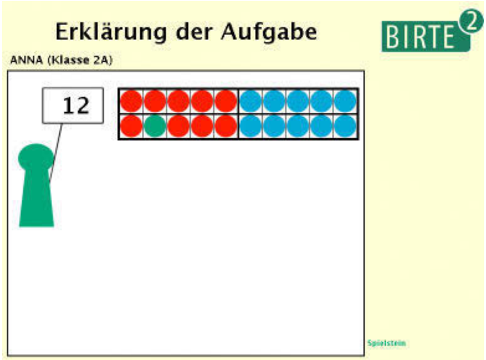


Abb. 2 Erklärung des Aufgabenformats Spielstein

Die ordinale Zahldarstellung wird im Modul „Spielstein“ mit sechs Aufgaben im 20er-Punktefeld geprüft, für die die Kinder 60 Sekunden reine Bearbeitungszeit haben, und weiteren sechs Aufgaben im 100er-Punktefeld mit 90 Sekunden Bearbeitungszeit. An einer Beispielaufgabe wird zunächst die Konvention gezeigt, dass diese Darstellungen zeilenweise gelesen werden sollen. Die Abbildung 2 zeigt die einführende Beispielaufgabe im Modul Spielstein. Die Kinder geben ihre Lösungen durch Anklicken des entsprechenden Feldes mit der Maus ein.

Die quasi-simultane, kardinale Zahlauffassung wird im Modul „Schnelles Sehen“ u.a. mit je sechs Aufgaben im Zahlenraum bis 20 und bis 100 geprüft. Die Präsentationszeit für den jeweiligen Ausschnitt aus dem Punktefeld beträgt 0,5 Sekunden. Für die Eingabe der Lösungen stehen für beide Aufgabengruppen jeweils 120 Sekunden Bearbeitungszeit zur Verfügung.

Den Abbildungen 3 und 4 sind die Prozentsätze richtiger Lösungen für jede Aufgabe der beiden Module zu entnehmen. Die Zahlen unter den Säulen zeigen die gestellten Aufgaben. Die Abbildung 5 zeigt für jedes Modul die durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten in den Zahlenräumen bis 20 und bis 100.

Für beide Module sind die Leistungen im Zahlenraum bis 20 erwartungsgemäß besser als im Zahlenraum bis 100. Ebenfalls erwartungskonform ist, dass die schnelle Zahlauffassung in beiden Zahlenräumen schwerer ist als die Zahldarstellung. Denn bei der Zahldarstellung haben die Kinder im Durchschnitt 10 Sekunden Zeit, das passende Feld zu finden, notfalls auch per Abzählen, während ihnen für die Betrachtung einer Zahldarstellung nur 0,5 Sekunden zugestanden wird. Für die mentale Rekonstruktion haben sie dann aber durchschnittlich 20 Sekunden Zeit.

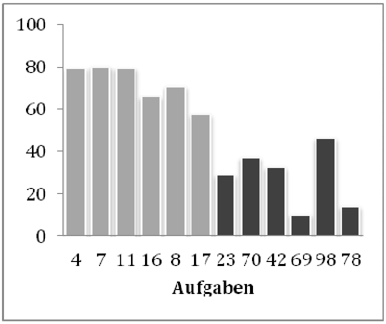


Abb. 3 Prozentsätze richtiger Lösungen im Modul Spielstein

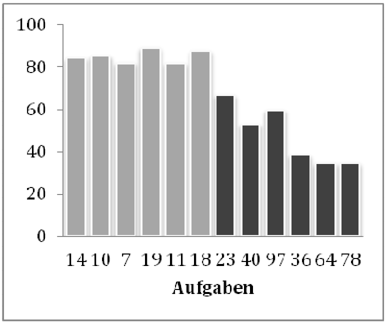


Abb. 4: Prozentsätze richtiger Lösungen im Modul Schnelles Sehen

	Spielstein	Schnelles Sehen	Gesamt
Zahlenraum bis 20	83 %	72 %	79 %
Zahlenraum bis 100	47 %	28 %	39 %
Gesamt	65 %	50 %	59 %

Abb. 5 Prozentsätze richtiger Lösungen

Insgesamt können die Leistungen nicht zufrieden stellen. 17 Prozent aller Aufgaben zur *Zahldarstellung* im Zahlenraum bis 20 werden nicht richtig, weitere 3,7 % gar nicht gelöst. Im Zahlenraum bis 100 werden sogar 53 % der Aufgaben falsch, weitere 4,5 % nicht gelöst. Wenn man davon ausgeht, dass Aufgaben zur Zahldarstellung im Zahlenraum bis 20 von allen Zweitklässlern sicher gelöst werden sollten, dann haben 37,9 % von ihnen dieses Ziel verfehlt. Gesteht man ihnen im Zahlenraum bis 100 zwei Fehler bei der Zahldarstellung zu, dann haben sogar 49,1 % der Kinder diese Erwartung nicht erfüllt. Etwa jedes zweite Kind ist nicht in der Lage, in einem Zeitraum von 90 Sekunden wenigsten zwei von sechs Aufgaben zur Zahldarstellung auf dem Hunderter-Punktefeld richtig zu lösen.

Die Befunde zur *quasi-simultanen Zahlauffassung* sind noch ernüchternder. Im Zahlenraum bis 20 werden 72 % der Aufgaben zum Schnellen Sehen richtig gelöst, im Zahlenraum bis 100 nur 28 %. In diesem Zahlenraum hat mehr als die Hälfte aller Kinder höchstens eine Aufgabe richtig gelöst. Etwa jedes zweite Kind hat in der Mitte des zweiten Schuljahres, also nach der Zahlenraumerweiterung bis 100, ein deutlich unzureichendes Verständnis der Struktur des Hunderter-Feldes.

Sicher muss berücksichtigt werden, dass das Aufgabenformat etwas gewöhnungsbedürftig ist. Andererseits sind mehr als 70 % aller Aufgaben zur schnellen Zahlauffassung im Zahlenraum bis 20 richtig gelöst worden, so dass das schlechte Ergebnis im Zahlenraum bis 100 nicht nur auf das Aufgabenformat zurückgeführt werden kann. Die um 44 % niedrigere Lösungshäufigkeit im größeren Zahlenraum ist in erster Linie auf das unzureichende Verständnis der Struktur des Hunderter-Punktefeldes zurückzuführen. Das unzureichende Strukturverständnis verhindert die schnelle Auffassung von Teilstrukturen. Das zeigen auch Fehleranalysen.

Beim Schnellen Sehen spielen vor allem zwei Typen von Fehlern eine große Rolle, nämlich Fehler, die auf ein unzureichendes Verständnis der Struktur der Zahlenfelder zurückzuführen sind, und Zählfehler. Zu den Strukturverständnisfehlern gehören vor allem Zeilenfehler. Bei der dargestellten Zahl 28 beispielsweise sehen die Kinder in der dritten Reihe acht Felder und manche identifizieren diese Zahl deshalb als 38. Die Zählfehler können vor allem beim Abzählen von Reihen oder Punkten entstehen, aber auch beim Addieren, wenn die visuell erfassten Teilstrukturen rechnerisch zusammengefasst werden.

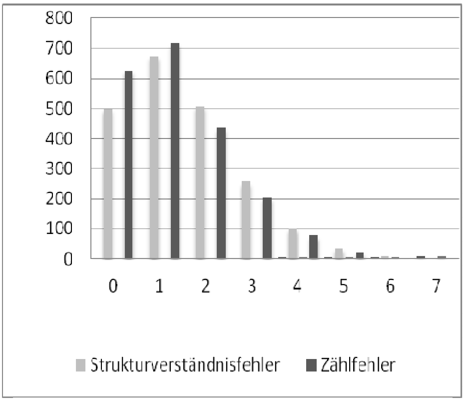


Abb. 6 Häufigkeiten systematischer Fehler beim Schnellen Sehen

Insgesamt werden deutlich mehr Strukturverständnisfehler (durchschnittlich 12,2 % aller Lösungen je Aufgabe) als Zählfehler (durchschnittlich 7,9 % aller Lösungen je Aufgabe) gemacht. Wie systematisch diese Fehler sind, zeigt die Abbildung 6, aus der hervorgeht, wie viele Kinder wie viele der 12 Aufgaben mit der gleichen Fehlerstrategie gelöst haben.

Etwa ein Viertel aller Kinder, nämlich 500 der 2087, haben keinen Strukturverständnisfehler gemacht, 625 keinen Zählfehler. Nur einen Strukturverständnisfehler machen 32,3 %, nur einen Zählfehler 34,3 %. Wenn Kinder zwei oder mehr systematische Fehlern machen, überwiegt jeweils die Anzahl der Fehler, die auf ein unzureichendes Strukturverständnis zurückzuführen sind. Das normalerweise größte Problem der besonders schwachen Kinder, ihr zählendes Rechnen, ist beim Schnellen Sehen nicht das Zählen, sondern das unzureichende Verständnis für die Struktur der Zahlenfelder.

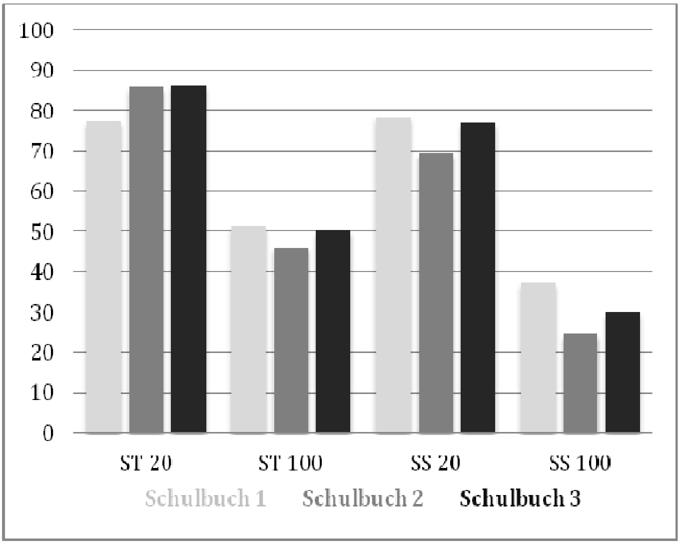


Abb. 7 Durchschnittliche Leistungen bei Verwendung unterschiedlicher Schulbücher

Der Einfluss des verwendeten Schulbuchs scheint bei dieser Art von Aufgaben nur gering zu sein. Die folgende Abbildung 7 zeigt die Leistungen der Kinder bei der Zahldarstellung und bei der schnellen Zahlauffassung für beide Zahlenräume getrennt nach eingesetztem Lehrwerk.

Die drei ausgewählten Lehrwerke unterscheiden sich im ersten und zweiten Schuljahr in der Anzahl bildlicher Darstellungen von Zahlenfeldern und der auf sie bezogenen Aufgaben teilweise erheblich. Das spiegelt sich in den Leistungen der Kinder kaum wider. Im Zahlenraum bis 100 zeigt das Schulbuch 1 beispielsweise 98 Abbildungen von Zahlenfeldern und –tafeln, das Schulbuch 3 nur 68. Die mittleren Lösungshäufigkeiten bei Spielstein-Aufgaben im Zahlenraum bis 100 unterscheiden sich mit 51,3 % bzw. 50,2 % aber nur sehr geringfügig. Größer, aber ebenfalls nicht signifikant sind die Leistungsunterschiede zwischen den Nutzern der beiden Schulbücher beim Schnellen Sehen im Zahlenraum bis 100.

Im Schulbuch 2 finden sich im 1. Schuljahr 67 Abbildungen von Zahlenfeldern, im Schulbuch 3 dagegen 122, fast doppelt so viele. Die Leistungen der Kinder mit dem Schulbuch 2 bei den Spielstein-Aufgaben im Zahlenraum bis 20 unterscheiden sich mit 85,8 % richtigen Lösungen nur ganz geringfügig von denen der Kinder mit dem Schulbuch 3 und einem Mittelwert von 86,3 %. Weder die Quantität der Aufgaben noch die teilweise deutlich unterschiedlichen Konzeptionen der Lehrwerke scheinen zu besonderen Leistungsunterschieden bei diesen Aufgaben zu führen. Vermutlich gilt auch hier, was für viele anderen Studien gilt: Den Unterschied machen die Lehrerinnen und Lehrer, nicht die Schulbücher.

4 „Baustellen“

Die vorgestellten Studien zeigen, dass sich die mentalen Vorstellungen leistungsstarker und leistungsschwacher Kinder deutlich unterscheiden und das Verständnis für Zahlenfelder in der Mitte des zweiten Schuljahres nicht den Erwartungen entspricht. Bezogen auf das Nutzen von Materialien und Veranschaulichungen im Mathematikunterricht gibt es offensichtlich noch einiges zu tun. Um drei „Baustellen“ muss sich die Mathematikdidaktik in besonderer Weise bemühen.

(1) Reduzierung der exzessiven Nutzung unstrukturierter Materialien

In ihrer Dissertation hat Brigitte Höckmaier (2009) 150 bayerische Lehrerinnen und Lehrer befragt, welche Materialien sie im ersten und zweiten Schuljahr im Mathematikunterricht einsetzen. Der absolute Spitzenreiter mit 100 % Nennungen sind Zählplättchen. Sie beherrschen den mathematischen Anfangsunterricht.

Die Befunde von Michael Gaidoschik (2010) deuten in die gleiche Richtung. Dass sich so wenige Kinder bis zum Ende des ersten Schuljahres vom zählenden Rechnen lösen konnten, führt er (auch) darauf zurück, dass von den verwendeten Schulbüchern her die Kinder immer wieder aufgefordert werden, Rechenaufgaben mithilfe von Plättchen zu lösen.

Das Hauptproblem für Lehrerinnen und Lehrer besteht wohl darin, den richtigen Zeitpunkt für die Verbannung von Wendeplättchen, Steckwürfeln und Artverwandten zu finden. Für den Aufbau von Grundvorstellungen für Addition und Subtraktion benötigen nicht wenige Schulanfänger noch solche Zählmaterialien. Für die Erarbeitung und vor allem die Automatisierung von Additions- und Subtraktionsstrategien sind sie aber kontraproduktiv. Hier werden unbedingt strukturierte Materialien benötigt, die Handlungen nahe legen, die strukturell mit den angestrebten Kopfrechenstrategien übereinstimmen. Gut geeignet sind Materialien, an denen anfangs gezählt werden kann, die aber auch die Darstellung von Zahlen als Ganzheiten erlauben.

Schulbuchautoren sollten es konsequent vermeiden, in der Automatisierungsphase beim Zehnerübergang von den Kindern zu fordern, diese Aufgaben mit Plättchen zu legen oder Kringelbilder mit unterschiedlichen Farben zu malen.

(2) Frühe und dauerhafte Sicherung von Zahl- und Aufgabenbeziehungen

Zu viele Kinder entwickeln trotz unterrichtlicher Behandlung kein dauerhaft gesichertes Verständnis für Zahl- und Aufgabenbeziehungen, z. B. zu Zahlzerlegungen und zum Verdoppeln und Halbieren. Für operative Strategien wie schrittweises Rechnen oder das Nutzen des Verdoppelns und Halbierens sind diese Kenntnisse unverzichtbar. Mit Beginn der Behandlung des Zehnerübergangs muss dieses Faktenwissen vorhanden sein, um die Kinder vom zählenden Rechnen wegzuführen. BIRTE 2 verweist auch bezogen auf Faktenwissen auf Probleme. Fast ein Fünftel aller Kinder war nicht in der Lage, das Doppelte von 6 zu bestimmen. Die Hälfte von 18 konnte nur die Hälfte aller Kinder ermitteln.

Chancen für Veränderungen sind gegeben, wenn es gelingt, gegen das schlechte Image des Faktenwissens anzugehen. Auswendigwissen muss von der Konnotation eines sturen Auswendiglernens von sprachlichen Reiz-/Reaktionsketten gelöst werden. Faktenwissen macht den Kopf frei für andere Anforderungen. Ohne Faktenwissen können mathematische Entdeckungen kaum gelingen. Dies sind wichtige Botschaften für Lehrerinnen und Lehrer.

(3) Sicherung des Verständnisses strukturierter Materialien

Abzählen an konkreten oder vorgestellten Materialien verhindert auf Dauer die Entwicklung operativer Strategien. Deshalb werden strukturierte Materialien benötigt. Sie führen bei richtigem Einsatz zu größeren Lernerfolgen. So konnten Hasemann und Stern (2002) in einer Studie zur „Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben“ zeigen, dass ein so genanntes „abstrakt-symbolisches Trainingsprogramm“ unter Einbeziehung von Zahlenstrahl und Hunderter-Tafel erfolgreicher war als das so genannte „alltagsnahe Trainingsprogramm“, in dem Kinder Sachsituationen selbst nachspielen und Zeichnungen beispielsweise mithilfe von Strichlisten anfertigen. Zu gleichen Befunden kommt Tobias Barwanietz (2005) in seiner Dissertation zur „Förderung der Modellierungsfähigkeit im Mathematikunterricht der Grundschule“.

Eine erfolgreiche Nutzung von strukturierten Materialien setzt aber voraus, dass die Kinder die Struktur verinnerlicht haben. Die Befunde aus der Normierungsstichprobe von BIRTE 2 zeigen, dass sehr viele Kinder in der Mitte des zweiten Schuljahres hier noch erhebliches Entwicklungspotential haben. Wir können davon ausgehen, dass die Probleme dieser Kinder nicht darauf zurückzuführen sind, dass diese Zahlenfelder im ersten oder zweiten Schuljahr nicht behandelt wurden. In der Arbeit von Höckmair (2009) rangiert die Hunderter-Tafel mit 97 % aller Nennungen auf Platz 2 der Rangliste der meistgenutzten Materialien. Nicht die fehlende, sondern vermutlich die falsche Nutzung ist die Ursache des Problems. Die Autorin unterscheidet in ihrer Lehrerbefragung zwischen den Kategorien „Hunderter-Tafel visuell“ und „Hunderter-Tafel konkret“, also zwischen der Darbietung der Hunderter-Tafel durch Schulbuch und Lehrkraft und der konkreten Nutzung durch Schülerinnen und Schüler. Konkret genutzt wird sie nur in 79 % der Fälle. Wie diese Nutzung aussieht, wird nicht näher beschrieben.

Wichtig wären Übungen zur quasi-simultanen Zahlauffassung, weil sie das Strukturverständnis und auch die rechnerischen Kompetenzen bei der Ermittlung der Gesamtzahl aus den visuell erfassten einzelnen Teilen fördern. Michael Gaidoschik (2010, 479) konnte beispielsweise zeigen, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis 10 durch Fakten nutzende Strategien lösen können, je mehr strukturierte Zahldarstellungen sie zu Beginn des ersten Schuljahres quasi-simultan erfassen. Miriam Lüken (2010) hat gezeigt, dass es mit $r = 0{,}61$ einen hochsignifikanten Zusammenhang zwischen der Zahlbegriffsentwicklung – gemessen mit dem OTZ (Van de Rijt et al. 2001) – und den Fähigkeiten bezogen auf Muster und Strukturen gibt.

Übungen zum Aufbau von Zahlenfeldern „im Kopf“ – Stell´ dir vor, du gehst von der 37 drei Schritte nach unten; wo bist du dann? – können das Verständnis für Zahlbeziehungen fördern und die Grundlagen für das Rechnen bilden. Übungen dieser Art mit rechenschwachen Kindern zeigen, dass manche von ihnen auf diesem Wege sehr schnell lernen, volle Zehner ohne Abzählen zu verrechnen, wenn man ihnen den Zusammenhang zwischen Wegen auf Zahlenfeldern und Rechenoperationen bewusst macht. Und darum geht es doch, dass die Kinder den Zusammenhang zwischen ihren konkreten Handlungen und den mathematischen Operationen lernen.

Literatur

Barwanietz, T. (2005) *Die Förderung der Modellierungsfähigkeit im Mathematikunterricht der Grundschule. - Der Einfluss alltagsnaher und abstrakt-symbolischer Handlungsorientierung auf die mathematische Modellierungsfähigkeit und die Lernmotivation von Grundschulkindern.* Dissertation, Universität Regensburg http://epub.uni-regensburg.de/10365/ . Gesehen 21.11.2011

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr.* Frankfurt: Peter Lang.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111-133.

Hasemann, K. & Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben - Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23* (3), 222-242.

Höckmair, B. (2009). *Mit den Händen fühlen, denken, lernen – Konkrete Arbeitsmittel im Unterricht*. Regensburg: S. Roderer.

Lüken, M. (2010). Ohne „Struktursinn" kein erfolgreiches Mathematiklernen – Ergebnisse einer empirischen Studie zur Bedeutung von Mustern und Strukturen am Schulanfang. In A. Lindmeier & S. Ufer, *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010.* (http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/de/forschung/bzmu/bzmu2010.html. Gesehen am 24.10.2011).

Radatz, H. (1986). Anschauung und Sehverstehen im Mathematikunterricht der Grundschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1986*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 239-242.

Radatz, H. (1990). Was können sich Schüler unter Rechenoperationen vorstellen? *Mathematische Unterrichtspraxis, 11,* (1), 3-8.

Radatz, H. (1995). Sag mir, was soll es bedeuten. Wie Schülerinnen und Schüler Veranschaulichungen verstehen. *Die Grundschulzeitschrift, 9,* (82), 50-51.

Rottmann, T. & Schipper, W. (2002). Das Hunderter-Feld – Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? *Journal für Mathematik-Didaktik, 23,* (1), 51-74.

Schipper, W., Wartha, S. & v. Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2 – Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr – Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel.

Van de Rijt, B. A. M., van Luit, J. E. H. & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*. Göttingen: Hogrefe.

Prof. Dr. Wilhelm Schipper
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
wilhelm.schipper@uni-bielefeld.de

Bericht Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Elisabeth Rathgeb-Schnierer
rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de
Impulsbeitrag: Charlotte Rechtsteiner-Merz
rechtsteiner@ph-weingarten.de

In der diesjährigen Sitzung der Arbeitsgruppe „Arithmetik“ berichtete Frau Rechtsteiner-Merz aus ihrem laufenden Dissertationsprojekt zum Thema *„Zahlenblickschulung als Möglichkeit zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern in Klasse 1 – eine qualitative Studie“*.

Um der Frage nachzugehen, inwiefern Erstklässler mit Lernschwierigkeiten durch Zahlenblickschulung flexibles Rechnen entwickeln können, wurden im Schuljahr 2007/08 aus verschiedenen Klassen insgesamt 20 Kinder ausgewählt und im Abstand von 2 – 3 Monaten pro Kind vier problemzentrierte Interviews durchgeführt (Rechtsteiner-Merz 2008). Der Beitrag von Frau Rechtsteiner-Merz bezog sich nicht auf das gesamte Forschungsprojekt, sondern fokussierte auf zwei ausgewählte Teile: theoretische Überlegungen zur Zahlenblickschulung sowie Überlegungen zur Datenanalyse.

Im ersten Teil beschrieb Frau Rechtsteiner-Merz zunächst die Zahlenblickschulung in Anlehnung an Menninger (1940) und Schütte (2004, 2008), die so gefasst werden kann: Zahlenblickschulung intendiert die Zurückstellung des Rechendrangs zugunsten von Aktivitäten zum Sehen und Nutzen von Aufgaben- und Zahlbeziehungen. Für die vorliegende Studie wurde diese Definition wie folgt weiterentwickelt: Zahlenblickschulung bedeutet die Arbeit an Zahlvorstellungen und den damit verknüpften Zahlaspekten durch Aktivitäten, die das Sehen, das Sortieren und das Strukturieren von Anzahlen, Termen, Aufgaben und deren Beziehungen anregen. Welche Aktivitäten im Rahmen der Studie relevant waren, wurde am Beispiel des Rechenzahlaspekts verdeutlicht (vgl. Rechtsteiner-Merz 2011a). Alle Aktivitäten waren mit Impulsen und Fragen zum Aufbau metakognitiver Kompetenzen verknüpft.

Im zweiten Teil stellte Frau Rechtsteiner-Merz einen Auszug aus dem Kategoriensystem vor, das zur Interviewanalyse herangezogen wurde. Mit diesem wurden die Begründungen zum Sortieren im Hinblick auf das Erkennen von Zahl-, Term-, und Aufgabenbeziehungen ausgewertet (Rechtsteiner-Merz 2011b). Nach einer detaillierten Erläuterung der Kategorien, die in personenbezogene und sachbezogene Äußerungen unterteilt waren, hatten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Möglichkeit zwei verschiedene Interviewausschnitte arbeitsteilig zu kategorisieren. Schon während dieser Arbeitsphase wurde in den einzelnen Gruppen rege diskutiert, wobei immer wieder die Frage nach der Definition einer Kategorie, der Trennschärfe zwischen den Kategorien und der Hierarchien der Kategorien zur Sprache kam. In der abschließenden Plenumsrunde wurden diese Aspekte noch einmal konstruktiv diskutiert. Frau Rechtsteiner-Merz konnte neben den kategorisierten Transkriptausschnitten viele Anregungen für die Weiterarbeit an den Daten und dem Kategoriensystem mitnehmen.

Literatur

Menninger, K. (1940). *Rechenkniffe*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2008). Zahlenblickschulung als Möglichkeit zur Schulung flexibler Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern in Klasse 1. In E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (653-656). Münster: WTM-Verlag.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2011a). Den Zahlenblick schulen. Flexibles Rechnen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift*, 25 (248/249), Materialheft.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2011b). Datenerhebungs- und Auswertungsinstrumente zur Untersuchung flexibler Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (663-666). Münster: WTM-Verlag.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 25 (2), 130 – 148.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. München: Oldenbourg

Bericht Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Bernd Neubert, Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de

Impulsbeitrag: Grit Kurtzmann, grit.kurtzmann@uni-rostock.de

Den Rahmen der Arbeitsgruppe „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ (Moderation: Dr. Bernd Neubert) bildete ein Forschungsthema zur Lehrerfortbildung. Grit Kurtzmann (Universität Rostock) stellte das Projekt Entwicklung eines internetgestützten einjährigen Fortbildungskurses für MathematiklehrerInnen der Grundschule zur Leitidee „ Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ vor.

Ziel des Projektes ist die Entwicklung eines überwiegend fachlich orientierten Fortbildungskurses für MathematiklehrerInnen der Grundschule zur inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Die Ideen zu diesem Projekt entwickelten sich vor allem aus Beobachtungen in der Unterrichtspraxis: Durch fachliche Unsicherheiten in der Behandlung des Stoffgebietes entsteht bei Lehrkräften eine ablehnende bzw. abneigende Haltung. Andererseits schätzen Lehrer ein, dass Schüler deutlich mehr Interesse, Aufmerksamkeit und Motivation als in anderen Bereichen der Mathematik zeigen, diese günstige Voraussetzung für die Behandlung des Stoffgebietes aber kaum genutzt wird.

Für die zu entwickelnde Lehrerfortbildung wird auf eine Methode zurückgegriffen, mit der an der Universität Rostock schon seit 2006 eine erfolgreiche Fortbildungsreihe durchgeführt wird. Frau Kurtzmann stellte diese internetgestützte einjährige Lehrerfortbildung (IgeL) vor, die für Lehrer der Orientierungsstufe konzipiert wurde und für die auch eine Broschüre zur Verfügung steht.

Für die zu entwickelnde Lehrerfortbildung zur Leitidee „ Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ soll an diese als erfolgreich erwiesene Methode angeknüpft und das Folgende beibehalten werden:

- ein begleitendes Material, in dem die Fortbildungsteilnehmer wichtige Inhalte nachlesen können, ohne aufwändige Literaturrecherche zu betreiben

- die Verknüpfung fachdidaktischer Inhalte mit konkreten Unterrichtsanwendungen
- Ausprobieren einzelner Aufgaben während der Arbeitsphasen

Die Untersuchungsmethode des Dissertationsprojektes stützt sich auf die konstruktive Entwicklungsforschung nach Zech & Wellenreuther (1992). Für die Umsetzung des Projekts werden in Forschungsseminaren ein E-learning Kurs und kursbegleitendes Material entwickelt (WS 2011/12) und mit Studenten erprobt (SS 2012). Im Schuljahr 2012/13 wird ein erster Fortbildungskurs durchgeführt, dem in der Implementationsphase weitere folgen.

Schließlich wurden in der Präsentation Ansätze betrachtet, die für die inhaltliche Seite der Fortbildung von Bedeutung sind:

1. Sicheres Wissen und Können
2. Prototypische Herangehensweise
3. Prozessbetrachtung im Stochastiklehrgang

Literatur

Hellmig, L., Hoffmann, S., Kleinschmidt, E., Kowaleczko, E., Kurtzmann, G., Leye, D., Lindstädt, M., Roscher, M. & Sill, H.-D (2010). *Vorschläge und Erfahrungen zur Arbeit mit polyvalenten Aufgaben im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe*. Institut für Qualitätsentwicklung Mecklenburg-Vorpommern.

Zech, F. & Wellenreuther, M. (1992). Konstruktive Entwicklungsforschung. eine zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik. *Journal für Math.-Didaktik,* 13 (2/3), 143 -198.

Im Anschluss an die Präsentation wurden sowohl spezielle Fragen zum Projekt als auch allgemeine diskutiert. Besonders bewegte die Teilnehmer das Problem der Qualifizierung möglichst vieler Grundschullehrerinnen und –lehrer hinsichtlich der Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“.

Als Themen für mögliche künftige Sitzungen wurden die Gestaltung von Lehrveranstaltungen in der ersten Ausbildungsphase und ein Blick in die internationale Entwicklung vorgeschlagen. Konkrete Festlegungen wurden nicht getroffen.

Anregungen und Beiträge per Email an den Koordinator sind herzlich willkommen.

Bericht Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer & Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-braunschweig.de, s.reinhold@tu-braunschweig.de
Impulsbeitrag: Theresa Deutscher, Theresa.Deutscher@math.tu-dortmund.de

Auf dem diesjährigen Treffen der Arbeitsgruppe „Geometrie“ berichtete Frau Dr. Theresa Deutscher (TU Dortmund) über ausgewählte Ergebnisse ihres im Frühjahr abgeschlossenen Dissertationsprojekts (vgl. Deutscher 2012), das sich der Erfassung arithmetischer und geometrischer Fähigkeiten von Schulanfängern widmet. Gegenstand der Präsentation von Frau Deutscher waren ihre empirischen Erhebungen zu Fähigkeiten von Schulanfängern gemäß den Grundideen der Geometrie nach Wittmann (1999). Frau Deutscher wies dabei dem Kompetenzbereich ‚Muster und Strukturen’ als inhaltsübergreifender Grundidee einen Schwerpunkt in der Auswertung zu. Sie stellte der Arbeitsgruppe den durch sie weiterentwickelten GI-Test Geometrie (vgl. Waldow und Witttmann 2001) sehr ausführlich vor. Dieser bildete die Basis für klinische Einzelinterviews mit über 100 Schulanfängern, um die Vorerfahrungen der Kinder zu erfassen.

Anhand von vielfältigen Beispielen konnte sich die Arbeitsgruppe einen Überblick über die zur Erfassung spezifischer geometrischer Kompetenzen eingesetzten Geometrietestaufgaben verschaffen. Konzeption und Zielsetzungen der Aufgaben wurden intensiv diskutiert. Diagramme veranschaulichten die im Test feststellbaren Erfolgsquoten der Vorschulkinder (vgl. Abb. 1).

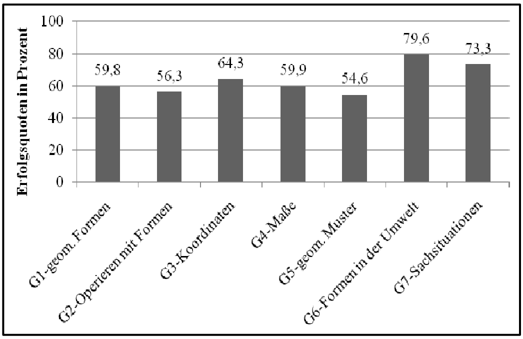


Abb. 1 Durchschnittliche Erfolgsquoten der Schulanfänger in den Aufgabenblöcken des Geometrietests (vgl. Deutscher 2012)

Qualitativ wurden Vorgehensweisen und typische Fehler der Schulanfänger in den jeweiligen Inhaltsbereichen der Geometrie in den Blick genommen. Die Heterogenität der Schüler stellte Frau Deutscher dabei nicht nur auf interindividueller Basis heraus, sondern zeigte diese auch anhand abweichender intraindividueller Lernstände der Kinder auf. Damit hob die Referentin die Relevanz inhaltlich differenzierter Lernstandsfeststellungen hervor. Im Plenum wurden anhand ausgewählter vorliegender Dokumente von Kindern Ausprägungen von individuellen kindlichen Lernständen erörtert.

Leistungsdifferenzen im Geometrietest konnten weder auf das Alter noch auf das Geschlecht der Kinder zurückgeführt werden. Demgegenüber erwies sich der soziale Hintergrund als lernstandsbeeinflussender Faktor in der Studie. Die Vorstellung der vornehmlich quantitativen Auswertung schloss Frau Deutscher mit einer Übersicht zur Korrelation der geometrischen und arithmetischen Fähigkeiten der Schulanfänger ab, die sich in ihrer Untersuchung als mittelstark ($r=0{,}571$, $n=108$, $p<0{,}0001$) nachweisen ließ.

Literatur

Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen*. Wiesbaden: Vieweg.

Waldow, N. & Wittmann, E. (2001). Ein Blick auf die geometrischen Vorkenntnisse von Schulanfängern mit dem mathe 2000-Geometrie-Test. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt.* (S. 247-261). Hamburg: Kovač.

Wittmann, E. (1999). Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung* (S. 205-216). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.

Für das Treffen im kommenden Jahr hat sich Frau Meike Plath (Leuphana Universität Lüneburg) bereit erklärt, Zielsetzungen und Forschungsergebnisse ihres Promotionsprojektes zur Untersuchung von Raumvorstellungsvermögen vorzustellen und zu diskutieren. Hierfür danken wir bereits an dieser Stelle und laden alle Interessierten herzlich ein.

Bericht Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt & Marcus Nührenbörger
brandt@math.uni-frankfurt.de, marcus.nuehrenboerger@tu-dortmund.de
Impulsbeitrag: Gyde Höck, ghoeck@t-online.de

Von „Mach du deine Sachen und ich meine” zur ko-konstruktiven Lösungsfindung in festen Lernpartnerschaften, so lautete der Titel der diesjährigen Sitzung der Arbeitsgruppe, in der Frau Gyde Hoeck (Goethe-Universität Frankfurt a.M.) aus ihrem Dissertationsprojekt zur Gestaltung von Kommunikation *in* Kooperation und ihren Einfluss auf die Lösungsfindung berichtet hat.

Grundlage ihrer Dissertation ist das Forschungsprojekt „Kollektives Problemlösen”[3]. Ausgewählte, mathematisch konzentrierte Gesprächssequenzen zu arithmetisch geprägten Aufgaben aus festen Lernpartnerschaften in Klasse 3/4 wurden transkribiert und mit Hilfe der Interaktionsanalyse im Hinblick auf interaktionale Verdichtungen und die jeweilige individuelle Partizipation der einzelnen Kinder an der gemeinsamen Lösungsfindung untersucht.[4]

Die theoretische Grundlage bildet u.a. die Untersuchung von Howe (2009), die in ihren Arbeiten die Ausprägungen von Ko-Konstruktion unter Peers mit zwei Hauptkategorien beschreibt:

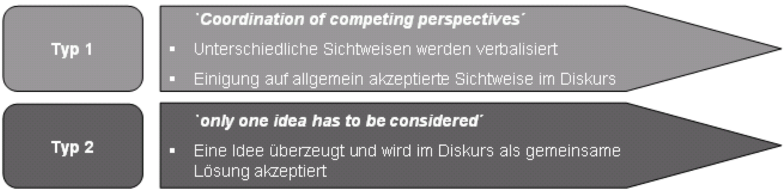


Abb. 1 Hauptkategorien “joint construction” nach C.Howe (aus Brandt/Höck 2011)

Die ko-konstruktiven Aushandlungsprozesse wurden in der Arbeitsgruppe exemplarisch anhand der Transkripte von zwei Lernpartnerschaften (Gruppe A und B) in Zweierteams beleuchtet und einem der Typen nach Howe zugeordnet. In einer anschließenden Squarephase

[3] Das Projekt wurde vom ZLF der Goethe-Universität Frankfurt finanziell unterstützt (Feb. 2009 – Jan. 2010).
[4] Theoretische und methodische Grundlage siehe Krummheuer & Brandt 2001.

wurden diese Zuordnungen diskutiert. Der Abgleich im Plenum verdeutlichte unterschiedliche Ansätze der Betrachtung, konnte aber zugleich folgende Einschätzungen ausschärfen:

Lernpartnerschaft A (Alina und Iman): Die Struktur der Aufgabe (Zahlenfolgen fortsetzen) führt zu einer Aushandlung auf zwei Ebenen: *organisatorisch* (Alina) „Wie wird die Aufgabe ins Buch geschrieben" und *inhaltlich* (Iman) „Wie wird die Reihe fortgesetzt"). Erst im Anschluss an die Klärung der Organisation setzen beide die Reihe fort und arbeiten ko-konstruktiv an der gemeinsam entwickelten inhaltlichen Idee. Diese Phase kann eher dem Typ 1 nach Howe zugeordnet werden.

Lernpartnerschaft B (Patrick und Saaron): In diesem Tandem scheint Patrick sowohl organisatorisch als auch inhaltlich dominierend in der Gestaltung der Lösungsfindung – dennoch zeigt Saaron ein klares Verständnis von der Aufgabenstruktur und ist evtl. in der Entwicklung der Lösung sogar einen Schritt voraus. Übergeordnet wird somit für diese dyadische Sequenz der Typ 2 festgehalten, jedoch mit punktuellen Tendenzen zu Typ 1.

Durch das eingesetzte Doppeldeckerprinzip (Wahl und Mutzeck 1990) - die Analyse von in kooperativen Lernformen entstandener Ko-Konstruktion und die Durchführung eben solcher Pair-Squarephasen - konnte ein reger Austausch in der Arbeitsgruppe initiiert werden. Die Ergebnisse und noch offenen Fragen (z.B. nach der Steuerung der betrachteten ko-konstruktiven Prozesse durch den gezielten Einsatz der ausgewählten Materialien oder nach Vorteilen der jeweiligen Form der Ko-Konstruktion), bilden eine fruchtbare Arbeitsgrundlage für die weitere Analyse und regen zum fortgesetzten Austausch über „Kommunikation und Kooperation" an.

Literatur

Brandt, B. & Höck, G. (erscheint 2011). *Ko-Konstruktion in mathematischen Problemlöseprozessen-partizipationstheoretische Überlegungen*. In B. Brandt et al. (Hrsg.), *Mathematikdidaktische Forschung am IDeA-Zentrum*. Münster: Waxmann.

Howe, C. (2009). Collaborative group work in middle childhood – joint construction, unresolved contradiction and the growth of knowledge. *Human Development*, 52, 215-239.

Wahl, D. & Mutzeck, W. (1990). *Wie Kursleiter/-innen und Teilnehmer/-innen miteinander umgehen*. Studienbrief 1. Tübingen: DIF Universität Tübingen.

Bericht Arbeitsgruppe PriMa Medien

Koordination: Silke Ladel & Christof Schreiber
ladel@ph-karlsruhe.de, schreiber@math.uni-frankfurt.de
Impulsbeitrag: Johannes Will, johannes-will@gmx.de

In der diesjährigen Sitzung der Arbeitsgruppe „PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe" berichtete Johannes Will (Lehrer an der Valentin-Senger-Schule in Frankfurt am Main) über „Interaktive Whiteboards im mathematischen Anfangsunterricht?!".

Häufig werden Whiteboards im Unterricht lediglich dazu genutzt, Tafelbilder virtuell anstatt mit Kreide zu erstellen oder bewegte Bilder zu zeigen. Dabei werden die Potentiale der interaktiven Whiteboards (Interaktivität, Speicherfunktion, digitale Darstellung und Modifizierbarkeit der Inhalte) kaum ausgeschöpft. Dies zeigte Johannes Will in einem ersten Teil seines Vortrags. Aktuelle Software für Whiteboards fungiert meist nur als Oberfläche für dynamische Tafalanschriebe. Die Interaktivität in Bezug auf Hilfs-, Veranschaulichungs- und Arbeitsmittel ist auf das Bewegen einzelner Objekte mit einem digitalen Stift beschränkt. Auch die Möglichkeit verschiedene Darstellungen miteinander zu verknüpfen wird kaum in Anspruch genommen. Als ein Beispiel wurde hier das virtuelle Zwanzigerfeld von Christian Urff (online verfügbar unter http://www.lernsoftware-mathematik.de/prototypen/zwanzigerfeld.html) gezeigt.

Es wurde die These erörtert, dass ein interaktives Whiteboard als Hilfs-, Arbeits-, und Veranschaulichungsmittel den Aufbau günstiger dynamischer Vorstellungsbilder unterstützen kann, weil damit Repräsentationen auf der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen Ebene verbunden, Zusammenhänge und Übergänge zwischen diesen Ebenen dargestellt und die Vorteile gängiger Unterrichtsmedien vereint werden können. Da aber geeignete, unter didaktischen Gesichtspunkten entwickelte Software noch Mangelware ist, gibt es kaum Gründe, interaktive Whiteboards für die Arbeit im mathematischen Anfangsunterricht anzuschaffen.

Als Ausblick wurde diskutiert, wie Software gestaltet sein müsste, die ein Whiteboard zum interaktiven Hilfs-, Arbeits-, und Veranschaulichungsmittel machen kann.

Weitere Hinweise

Die gesamte Präsentation des Impulsbeitrags ist unter http://prezi.com/6ylwfv_q2wg8/interaktive-whiteboards-im-mathematischen-anfangsunterricht/ zu finden.

Die Arbeitsgruppe plant auf der 46. Jahrestagung der GDM vom 05. bis 99. März 2012 in Weingarten wieder eine selbstmoderierte Sektion anzubieten. Dazu lädt sie herzlich ein, Beiträge in dieser Sektion anzumelden.

Bericht Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Renate Rasch, r-rasch@uni-landau.de

Impulsbeiträge: Johannes Groß & Maximilian Geier

gross@uni-landau.de, geier@uni-landau.de

Problemhaltige Textaufgaben sind mit besonderen Anforderungen an die Lösenden verbunden. In der Regel muss eine Auseinandersetzung mit mathematischen Zusammenhängen erfolgen, die sich nicht oder nicht ausschließlich mit dem vertrauten Operationsverständnis bewältigen lassen. Aufgrund der höheren Komplexität ist bei diesen Aufgaben davon auszugehen, dass die beim Lösen zu absolvierenden Prozesse nicht so linear wie bei Routineaufgaben durchlaufen werden können. In diesem Zusammenhang sind Brüche, Sprünge und Rückgriffe auf bereits passierte Phasen zu erwarten. Wie genau jedoch die Lösungsprozesse bei problemhaltigen Textaufgaben aufgebaut sind, ist bisher nicht bekannt. Diese Ergebnisse sind jedoch wichtig, um diese Aufgabengruppe gewinnbringend im Mathematikunterricht einsetzen zu können.

Johannes Groß (DFG-Graduiertenkolleg „Unterrichtsprozesse“, Universität Koblenz-Landau) möchte mit seinem Forschungsvorhaben Antworten auf diese Fragestellung geben. Basierend auf verschiedenen theoretischen Modellen aus der Psychologie und der Mathematikdidaktik wurde ein Kategoriensystem entwickelt, dass es erlaubt, die internen und externen Prozesse von Grundschulkindern bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben zu analysieren. Dieses Analyseinstrument wird gegenwärtig in Rahmen einer Studie eingesetzt. In der Untersuchung bekamen Schülerinnen und Schüler der 3. und 4. Klassenstufe nacheinander fünf problemhaltige Textaufgaben zur eigenständigen Bearbeitung dargeboten. Zur Unterstützung ihres Lösungsprozesses konnten sie jederzeit verschiedene Arbeitsmittel (Papier, Stifte, Mehrsystemblöcke) einsetzen. Der Bearbeitungsvorgang wurde mit einer Videokamera aufgezeichnet. Basierend auf den analysierten Videos soll in einem weiteren Schritt ein Modell entwickelt werden, das den Lösungsprozess von Grundschulkindern bei problemhaltigen Textaufgaben widerspiegelt.

Man geht davon aus, dass der kontinuierliche Einsatz von problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule für die Lernenden gewinnbringend ist. Es sind Aufgaben, die zur kognitiven Aktivierung beitragen und mathematische Denkprozesse auf den Weg bringen. Viele Fragen in diesem Zusammenhang blieben bisher allerdings offen, z. B.: Sind diese Aufgaben vielleicht doch eher etwas für leistungsstarke und begabte Schüler? Ist nicht eine Überforderung der leistungsschwächeren Kinder zu erwarten bzw. bringen die angesprochenen Aufgaben für diese Schülergruppe überhaupt einen Nutzen? *Maximilian Geier* (Institut für Mathematik, Universität Koblenz-Landau) geht mit seinem Forschungsprojekt solchen Fragen nach.

Vier dritte Klassen haben dazu im Zeitraum von zehn Schulwochen regelmäßig Problemaufgaben bearbeitet. Die Entwicklung traditioneller fachlicher Fähigkeiten, sowie im Lösen von Problemen, wurde durch Tests vor und nach dem Treatment festgehalten. Diese Ergebnisse lassen nun einerseits einen Vergleich der Entwicklung schwacher Schüler (nach traditionellen fachlichen Kriterien) mit den übrigen Schülern zu, andererseits auch den Vergleich mit einer Kontrollgruppe, die parallel dazu im gleichem zeitlichen Umfang ausschließlich Routineaufgaben bearbeitet hat.

Das Unterrichtskonzept der Textaufgaben-Stunden wurde an das Konzept des „Dialogischen Lernens" von Ruf und Gallin (1998) angelehnt. Die individuellen Bearbeitungswege der Schüler wurden in sogenannten „Reisetagebüchern" festgehalten. Eine Auswertung dieser ermöglicht einen vertiefenden Blick auf die Entwicklung der Leistungen der Schüler, die sie neben ihren arithmetischen Fähigkeiten erbringen.

Literatur

Ruf, U. & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Bd. I. Seelze: Kallmeyer.

Bericht Arbeitsgruppe Vorschulische Bildung

Koordination: Meike Grüßing, gruessing@ipn.uni-kiel.de

Impulsbeitrag: Reinhold Haug, Dinah Reuter, Stephanie Schuler & Gerald Wittmann, reinhold.haug@ph-freiburg.de, dinah.reuter@ph-freiburg.de, stephanie.schuler@ph-freiburg.de, gerald.wittmann@ph-freiburg.de

Im Rahmen der Sitzung der Arbeitsgruppe „Vorschulische Bildung" stellten Reinhold Haug, Dinah Reuter, Stephanie Schuler und Gerald Wittmann (Pädagogische Hochschule Freiburg) das Projekt „MATHElino" unter dem Thema *Muggelsteine, 1-Cent-Stücke, Holzwürfel – Materialien für das gemeinsame Lernen von Kindergarten- und Grundschulkindern* vor. Ausgangspunkte für das von der Robert Bosch Stiftung und der Joachim Herz Stiftung geförderte Projekt sind die Arbeiten von Royar und Streit (2010) zum mathematischen Lernen von Kindergartenkindern sowie die an der PH Freiburg durchgeführten „MATHElino-Tage" für Kindergarten- und Grundschulkinder.

Im Projekt MATHElino lernen Kindergarten- und Grundschulkinder gemeinsam in materialgestützten offenen Lernumgebungen, die unter anderem nach dem Prinzip „Gleiches Material in großer Menge" (Lee 2010) konzipiert sind. Die betreuenden Erzieherinnen und Erzieher und Grundschullehrerinnen und -lehrer werden zusammen weitergebildet, um die Kooperation zwischen den Institutionen zu stärken und den Kindern beim Arbeiten mit dem Material die richtigen Impulse geben zu können. Die kooperative Arbeit der Kindergarten- und Grundschulkinder mit „mathematikhaltigen Materialien", die Kooperation zwischen Kindergärten und Grundschulen und die Professionalisierung von Fachkräften stellen damit die drei Säulen des Projekts dar. Derzeit bilden sechs verschiedene Materialien die Grundlage für die MATHElino-Lernumgebungen:

- Pattern Blocks bestehend aus sechs verschiedenen Formen und Farben
- Holzwürfel
- Spielwürfel in vier verschiedenen Farben
- Muggelsteine in vier verschiedenen Farben
- Fliesen in zwei verschiedenen Farben
- Streckenpuzzle bestehend aus 12 verschiedenen quadratischen Puzzleteilen mit Streckenabschnitten

Lernumgebungen nach Lee (2010) zeichnen sich insbesondere durch ihren hohen Aufforderungscharakter aus. Sie bieten vielfältige Anregungen zum mathematischen Tätigsein und ermöglichen Grunderfahrungen in verschiedenen inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Inhaltsbereichen. Durch den zunächst freien Zugang und die offenen Aktivitäten mit dem Material bieten sie einen niederschwelligen Einstieg. Zunehmend steht dann die selbstständige Beschäftigung mit Mustern und Strukturen im Vordergrund. Die Kinder machen Entdeckungen auf verschiedenen Niveaus. Die Dokumentation der Entdeckungen ermöglicht eine Vertiefung der Auseinandersetzung. Eine weitere Vertiefung wird im MATHElino-Projekt durch angeleitete Interaktionen mit Hilfe didaktischer Impulse angestrebt.

Damit die Lernumgebungen zum einen den Bedürfnissen der Kinder der verschiedenen Altersgruppen und den verschiedenen Bildungskonzepten gerecht werden und zum anderen die Funktion eines verbindenden Elements einnehmen können, stellt die Kooperation in Tandems eine weitere Säule des Projekts dar. Die Kinder beider Institutionen eines Tandems arbeiten gemeinsam in den materialgestützten Lernumgebungen. Parallel finden gemeinsame Fortbildungen für die Fachkräfte in Kindergärten und die Lehrkräfte statt, in denen ein Austausch über Erfahrungen, Schwierigkeiten und weitere Entwicklungsperspektiven ermöglicht wird.

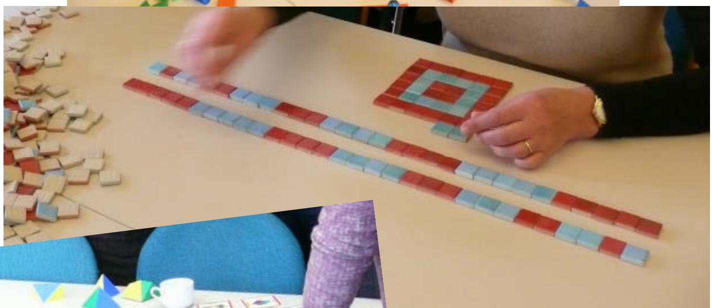
Im Anschluss an die Vorstellung des Projekts in der Arbeitsgruppe konnte das Material von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern Umgang erprobt werden (vgl. auch Bildimpressionen der Tagung in diesem Band). Schwerpunkte der Reflexion und Diskussion waren zum einen die mathematischen Aktivitäten, die durch dieses Material angeregt werden, sowie geeignete Impulse zur vertieften Auseinandersetzung. Zum anderen wurden auch die Möglichkeiten und Grenzen der Lernumgebungen im Hinblick auf die Selbstdifferenzierung sowie auf das kooperative Arbeiten mit dem Material diskutiert.

Literatur

Lee, K. (2010). *Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge*. Beiheft der Zeitschrift Betrifft Kinder. Berlin: Verlag das netz.

Royar, T. & Streit, Ch. (2010). *MATHElino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen*. Seelze: Kallmeyer.

Bildimpressionen der Materialarbeit
auf der Tagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM
Tabarz, 4.11. – 6.11.2011



Bildimpressionen der Materialarbeit

Fotos: Simone Reinhold 2011

Mit freundlicher Unterstützung von

Winklers
Schöningh
Bildungshaus Schulbuchverlage
Schroedel
westermann
Diesterweg

UNIVERSITY OF BAMBERG PRESS

Dieser Tagungsband dokumentiert Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) in Tabarz vom 4. bis 6. November 2011 zum Thema „Medien und Materialien“.

Der Arbeitskreis Grundschule wurde vor genau 20 Jahren auf Anregung von Hendrik Radatz gegründet und verfolgt seither als größter Arbeitskreis innerhalb GDM das Ziel, die Entwicklung der Didaktik der Grundschulmathematik zu verbessern. Einen Schwerpunkt der Arbeit des Arbeitskreises Grundschule stellt daher die Förderung des Austausches und der Zusammenarbeit aller am Mathematikunterricht in der Grundschule in Praxis, Theorie und Forschung unmittelbar oder mittelbar Beteiligten dar.

Das Rahmenthema der Tagung „Medien und Materialien“ wurde in fünf Hauptvorträgen im Plenum diskutiert. Zusätzlich setzten sich Arbeitsgruppen zu den klassischen Themenfeldern Arithmetik, Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit, Geometrie und Sachrechnen sowie Gruppen zu den Bereichen Kommunikation & Kooperation, PriMa Medien und Vorschulische Bildung, intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander.

Die jährliche Herbsttagung des Arbeitskreises richtet sich seit ihrem Bestehen an einen Teilnehmerkreis, der den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sucht. Diese interdisziplinäre, offene und kollegiale Kooperation von Vertretern aus Praxis und Theorie prägt die jährliche Zusammenkunft bis heute.

ISBN: 978-3-86309-045-6
ISSN: 2193-2905
14,80 €