つまようじを投げて円周率 π を求めよう！

—課外講義「これがサイエンスだ！」講義録—

成　瀬　政　光

1　はじめに

本稿は，SSH 課外講義「これがサイエンスだ！」の中で，2015 年 5 月 29 日に実施された「つまようじを投げて円周率 π を求めよう！」（講師は筆者，以下「本講義」という）の講義録に講義では触れていない数学的背景を加筆したものである[*1]．本稿は高校生向きに書いてあることを，読者の方には承知していただきたい．

本講義では，古代から知られている円周率 π の近似法を紹介し，その中の「モンテカルロ法」と「ビュフォンの針」について，それぞれビーズとつまようじを投げて実験をした．それに加え，円周率 π にまつわる公式の紹介やコンピュータを用いた数学（数値解析）を紹介した．

本講義はサイエンスショーのような少々遊び心が過ぎた余興のようになった感も否めない．しかし数学の講義において，作業をともなうアクティビティを提示でき，教員も生徒も楽しみ，熱気の帯びた講義ができたことが「サイエンスだ！」と拡大解釈し，本稿を提出する次第である．

2　円周率 π

円周率の定義は $\pi = \dfrac{\text{円周}}{\text{直径}}$ とするのが初等的な定義であり，最もポピュラーであろう．その他にも，積分値を用いて定義する方法[*2] などがある．

円周率は陸上の 400 m トラックにも用いられている．直線路 80 m と曲線路（半径 38 m の半円）で構成されているトラックでは，陸上のルールブックによれば,「曲走路は半円（円周率は 3.1416 とする）として計算して」作られる（図 1 参照）．では「$\pi = 3$ としたときと $\pi = 3.1416$ としたときは何 m の差があるか」という問いを出した．受講者に陸上部の生徒が居たので，インタビューしたところ「2〜3 m ではないか？」との回答であった．答えは，$\pi = 3.1416$ のときは $80 \times 2 + 38 \times 2 \times 3.1416 = 398.761$ (m) であり，$\pi = 3$ のときは $80 \times 2 + 38 \times 2 \times 3 = 388$ (m) となる．誤差は 10 m もあるのであ

[*1] 本講義の簡単な報告は，学院 HP に掲載されている：http://waseda-honjo.jp/topic/2015/06/20150601101045.html

[*2] 例えば黒田[2, p.178] は，$\pi = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ と定めている．

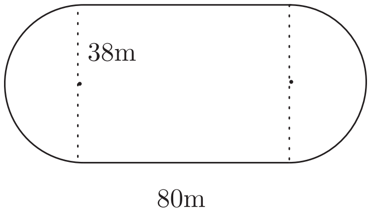

図 1　陸上のトラック

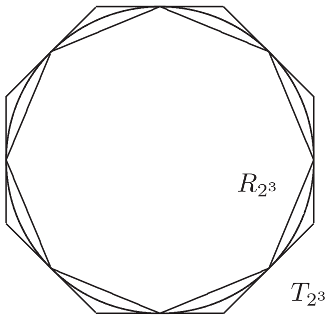

図 2　アルキメデスの方法

る．やはり小数点以下の誤差ということで少なく見積もっていた生徒が多いのか，これは生徒らにとって驚きだったようである．

3　さまざまな近似法

円周率 π はよく知られているように，無理数である[*3]．そのため，π の値を小数表示したときは循環小数とならない．つまり，小数点以下の数の現れ方は不規則である．先の陸上トラックの例もそうだが，例えば衛星の打ち上げに関して，軌道を計算する際にも円周率は重要である．そのため，円周率の正確な値を求める方法や円周率の値に速く効率よくたどりつく近似法を議論することは十分な科学的動機となる．また，円周率を求めることでコンピュータの性能を測るための指標に用いられることもある．

では実際に π の値はどのように求めるのであろうか．本講義では昔からよく知られている，アルキメデスの方法，モンテカルロ法，ビュフォンの針と呼ばれる 3 つの近似法を順に紹介する．

3.1　アルキメデスの方法

この近似法は最も有名であろう．円に内接する多角形と外接する多角形を考える．円周の長さをこの 2 つの多角形の周の長さで「はさみうち」して円周率の値を求めるのである．多角形の辺の本数を多くすればするほど円に近づく．それにより，円周率を近似するのである．はさみうちにする対象は周の長さでも，面積でもよい．しばしば取り上げられる多角形は正 2^N 角形である．図 2 は，

[*3] π が無理数であることの証明は高校 3 年生が少々頑張れば理解できる．

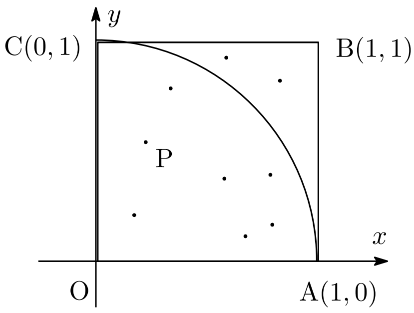

図 3　モンテカルロ法

$N=3$ の場合を示している．つまり，円を内接正 2^3 角形 R_{2^3} と外接 2^3 角形 T_{2^3} でサンドイッチしている．$N\to\infty$ と限りなく大きくしていけば，π の値が求まるのである．$N=3$ 程度であれば，初等幾何や三角比の知識を用いて，中高生でも求めることができる．実際，2003 年の東京大学の入試問題では「円周率が 3.05 よりも大きいことを証明せよ」と出題されたことがあり，話題になった．これはまさにアルキメデスの方法によって示す問題である．円周の長さで証明するのであれば，$N=3$ のときの議論をすればよい．用いるのは三角関数の余弦定理と平方根の近似程度である[*4]．

次にアルキメデスの方法で計算された代表的な近似を紹介する．アルキメデス自身は正 96 角形で $3\dfrac{10}{71}<\pi<3\dfrac{1}{7}$ と近似した．ヴィエト（4 節の公式 4.1 参照）は正 6×2^{16} 角形で 3.141592653 と近似した．日本代表としては，和算で有名な関孝和は正 2^{17} 角形で 3.1415926535 と近似した．これは，当時の日本の数学の水準は欧州に比べて別段低かったわけではないということも物語っている．

3.2　モンテカルロ法

モンテカルロ法は，中性子が物質中を動き回る様子を探るためにスタニスワフ・ウラムが考案し，ジョン・フォン・ノイマンにより命名された手法である．モンテカルロはモナコ公国の地名である．

3.2.1　原理

座標平面上で議論する．図 3 のように，1 辺の長さが 1 である正方形 OABC と半径が 1 である四分円 OAC をとる．正方形 OABC の面積は 1，四分円の面積は $\dfrac{\pi}{4}$ である．ここで，正方形 OABC 内に無数の点をランダムに打つ．その中で，四分円に入った点の個数をカウントする．このとき，点の個数は面積に比例すると考えることができるので，π の値は $4\times\dfrac{\text{四分円に入った点の個数}}{\text{すべての点の個数}}$ で計算されると考えられる．

3.2.2　実験

本講義における実験の手順は次の通りである：

1. 適当な量のビーズを持ち，なるべく様々な投げ方で（ランダムとなるように）投げる．

2. 正方形からはみ出たビーズはカウントしない．

[*4] 次のサイトには，面積で近似する方法など，さまざまな解法が紹介されている：http://mathtrain.jp/pi305

図 4　モンテカルロ法の実験の様子

表 1　モンテカルロ法　本講義での実験結果

	すべてのビーズ	四分円内のビーズ
計	1639	1306
グループごと	136	115
	160	124
	70	57
	117	92
	119	85
	84	61
	131	110
	137	113
	180	153
	81	64
	131	110
	106	90
	134	93
	53	39

3. 正方形内に入ったビーズと四分円に入ったビーズの個数を数える（境界線上のものは四分円上に入るとカウントする）.

4. これを 3〜4 回繰り返す.

本講義では，正方形は 1 辺が 17 cm のもの,「点」を表すものとしては直径 1 mm のビーズを用いた．正方形とビーズの大きさの比が適当なものであったか，検討の余地はあったかもしれない.

本講義における生徒らの実験結果は，表 1 の通りである．これから，$\dfrac{1306}{1639} \times 4 = 3.187309335$ という近似値が得られた.

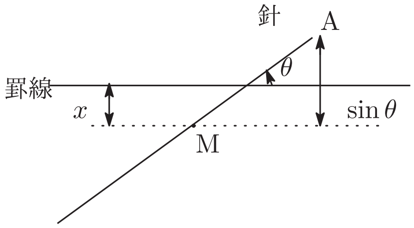

図 5　針と罫線が交わる条件を求める図

3.2.3　モンテカルロ法のその他の実践

モンテカルロ法は，身近な PC ソフト Microsoft Excel を用いて，次のように計算することができる．

1. 点 $\mathrm{P}(x, y)$ の各座標の値 x, y を，それぞれ 0 から 1 までの間の数で乱数をとる[*5]．
2. 点 P が四分円に入るということは「$\mathrm{OP} \leqq 1$」であるということ，つまり $x^2 + y^2 \leqq 1$ であるかを判別する．
3. すべての点の個数と「$\mathrm{OP} \leqq 1$」である点の個数の割合を計算し，4 倍すれば π の近似値である．

また，本講義のように身近なものを用いた「実験」という形では，沢畑[7] のものがある[*6]．そこでは，円の中に点を入れるのではなく，無数の点の中に円を上げる方法をとっている．無数の点は投げる円の直径と等しい長さの線分の格子点としている．

3.3　ビュフォンの針

ビュフォンの針は，ジョルジュ＝ルイ・ルクレールとコント・ド・ビュフォンが提起した円周率の求積法である．

3.3.1　原理

長さが 2 である針を用意する．平行な罫線を引き，罫線間の距離を 4 とする[*7]．罫線に向かって針をランダムに投げたとき，π の値は $\dfrac{\text{すべての針の本数}}{\text{交わった針の本数}}$ によって近似値を求めることができる．この式で求められる理由は次の通りである．

図 5 のように，針の中点を M とする．点 M から罫線までの距離を x，針と罫線のなす角を θ（ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$）とする．針の先端 A から点 M までの高さは $\sin\theta$ である（$\mathrm{AM} = 1$ であることに注意）．このとき,「針が罫線と交わる」という状況を式で表せば

$$x \leqq \sin\theta \tag{3.1}$$

である．そこで $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に注意して (3.1) 式のグラフに書けば，図の斜線の範囲である．

[*5] コマンドは “`=rand()`” である．

[*6] この実践はタイトルにビュフォンの針とあるが，その実験のために，モンテカルロ法を改良した方法を示している．

[*7] 一般に，罫線間の距離が針の長さの 2 倍であればよい．

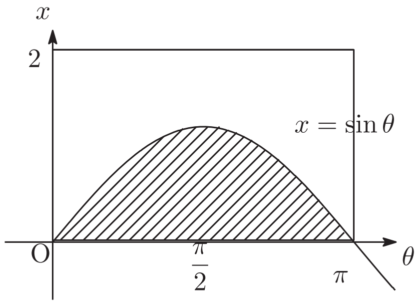

図 6　$x \leqq \sin\theta$ の領域を表したグラフ

一方で x については，点 M が罫線上にあるときは $x = 0$ であり，針と罫線が直交し，かつ点 M が罫線の中点にあるとき（当然交点はもたない）は $x = 2$ である．つまり $0 \leqq x \leqq 2$ であることに注意しよう．これから，モンテカルロ法と同様に，針が罫線と交わる確率を面積で考えれば，すべての針については $0 \leqq x \leqq 2$ かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲であるので，面積は 2π である（図 6 における長方形の部分）．罫線と交わる針については (3.1) 式が示す斜線部の面積であるので，$\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^\pi = 2$ である．よって，$\dfrac{\text{罫線と交わる針}}{\text{すべての針}} = \dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$ である．つまり π の値は $\dfrac{\text{すべての針}}{\text{罫線を交わる針}}$ で計算することができる．

3.3.2　実験

本講義における，実験の手順は次の通りである：

1. 適当な本数の爪楊枝をもち，なるべく様々な投げ方で投げる．
2. 罫線の幅からはみ出た爪楊枝の本数はカウントしない．
3. 投げた爪楊枝の本数と罫線を交わった（接するのも可）爪楊枝の本数を数える．
4. これを 3〜4 回繰り返す．

本講義では,「針」として爪楊枝を用いた．身近なもので実験したかったからである．これもモンテカルロ法同様に,「針」として適当なものであるかどうか吟味が必要であろう．

本講義における生徒らの実験結果は，表 2 の通りである．これから $\dfrac{1513}{466} = 3.246781116$ という近似値が得られた．

3.3.3　ラッキーな近似

本講義で実験の後に，ビュフォンの針で π の値を近似した例とそれにまつわるエピソードも紹介した．Lazzarini が 1901 年に 3408 本の針で π の値を 3.1415929 であると近似した．これは驚異的な結果，それ以上に目を疑いたくなるような結果である．3408 本の針であるので，3.3.2 節において述べた今回の実験の 2 倍の針で近似値がここまで精度が上がるとは，直観的にも信じがたい．実際，1994 年に Badger が "Lazzarini's Lucky Approximation of π" という論文を発表し，それが

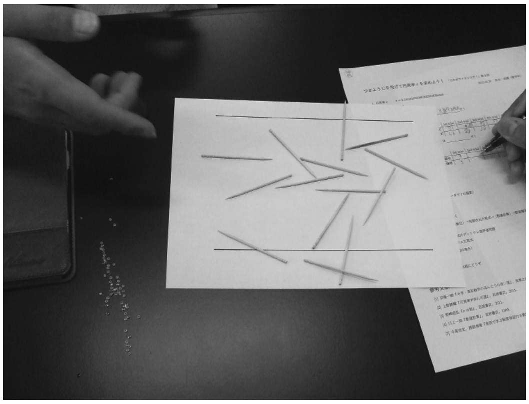

図 7　ビュフォンの針の実験の様子

表 2　ビュフォンの針　本講義での実験結果

	すべての楊枝	交わった楊枝
合計	1513	466
グループごと	150	28
	224	67
	49	14
	80	25
	75	23
	71	18
	111	39
	133	38
	44	13
	47	21
	228	72
	53	17
	67	25
	181	66

「奇跡的」であることを示した．そこでは，円周率を 0.5×10^{-6} の誤差で 5%水準で近似しようとすれば，134×10^{12} 本の針が必要であることを述べている．ただ，Lazzarini の結果が実際に求めたものであるのか，そうでないのかはわからない．この件から筆者は学院生に向けて，近年世間を騒がせた研究者の一件を教訓に，科学的視点からラッキーな結果に批判的な目をもつことや,「ねつ造」は重罪であること，を述べた．

4　π にまつわる公式

数学上のさまざまな研究を進めていった中で，円周率 π を含む公式が数々登場する．本節ではそれらを紹介する．公式内に登場する $\prod$ は総積の記号である．

公式 4.1 (ヴィエトの公式)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots \tag{4.1}$$

これはアルキメデスの方法で円に内接する多角形の面積を用いて近似する方法である．S_N を内接正 N 角形の面積とする．N を限りなく大きくすれば円になるというアイデアである．つまり，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = \pi$ であるとヴィエトは考えたのである．$S_4 = 2$ であることから，

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} &= \lim_{N\to\infty} \frac{S_4}{S_N} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{S_4}{S_8} \cdot \frac{S_8}{S_{16}} \cdot \frac{S_{16}}{S_{32}} \cdot \cdots \cdot \frac{S_{N/2}}{S_N}\end{aligned}$$

と形式的に計算できる．また，(4.1) 式の右辺は第 1 の根号は $\cos 45°$，第 2 の根号は $\cos\left(\frac{45}{2}\right)^{\circ}$，第 3 の根号は $\cos\left(\frac{45}{2^2}\right)^{\circ}$ となっている．つまり，$\displaystyle\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{45}{2^{n-1}}\right)^{\circ}$ ともかける．

公式 4.2 (ウォリスの公式)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \tag{4.2}$$

これは高校でも積分の計算問題として登場するものである．例えば，矢野ら[10, p.161] を参照すれば，$\displaystyle A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ としたとき，漸化式 $\displaystyle A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ より求めることができる（ただし，ウォリスの公式という名称は出てきていない）．

公式 4.3 (ゼータ関数を用いた近似)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \left(= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \tag{4.3}$$

$$= \frac{2^2}{2^2 - 1} \times \frac{3^2}{3^2 - 1} \times \frac{5^2}{5^2 - 1} \times \frac{7^2}{7^2 - 1} \times \cdots \left(= \prod_{p:\text{素数}} \frac{p^2}{p^2 - 1} \right) \tag{4.4}$$

ゼータ関数とは，リーマンが定義した関数であり，$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ である．この関数を用いれば，(4.3) 式は $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ とかける．リーマンがこの関数を定義したのは，素数の並びの研究を行うためである．それは (4.4) 式に素数があることからわかる．これらの式を用いた議論からリーマンが主張したものが，いわゆる「リーマン予想」である．

公式 4.4 (ライプニッツの公式)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\left(=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}\right) \tag{4.5}$$

奇数の逆数を符号を変えて，和をとればよいのである．形としては非常にわかりやすいだろう．関数を級数の形で表すテイラー展開を知っていれば，$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$ として計算される．また x にさまざまな値を代入し，より速く π の値を求める方法も模索されている．

上に挙げた 4 つの級数は PC ソフト Excel でも計算することができる．それぞれの公式についてプログラムを作成し，どの級数が早く収束するのかを確かめるのも面白いだろう．

5 数値解析とは

数値解析とは，微分方程式などの解析的な問題を近似的に解く方法である．そのために主にコンピュータを用いて計算する．しかしコンピュータは有限値しか扱えないことが短所である．つまり，方程式を近似的に解くこととなり，誤差が発生することを意味している．

また，数値解析の研究において議論となるポイントは中尾ら[4] によると次の点である：

- 現象を表すモデルが正しいか？
- コンピュータで現実的に計算できるか？
- 計算ができたとしても，速く計算できるか？
- 計算ができたとしても，誤差が少ないか？

では，数値解析は計算がどのように行われるのかを具体的に見ていくことにする．

5.1 ニュートン法

ニュートン法とは，方程式の解を求めるために，方程式の表す曲線に対する接線と x 軸の交点を求め続ける方法である．例えば，$\sin x=x$ のように解くのが難しい方程式でも，接線（実質，微分法がわかればよい）と x 軸の交点を求めることができれば，解が求まるのである．これは数値解析の例として最も入門的なものである[*8]．

[*8] 以前は高等学校の教科書にも掲載されていた，と筆者は記憶している．

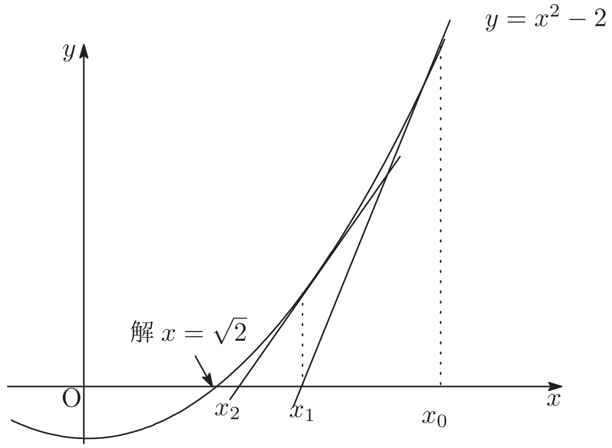

図 8　ニュートン法による解の近似の様子

例えば，$x^2 - 2 = 0$ の解を求める[*9]．図 8 にあるように，まずは $y = x^2 - 2$ のグラフへ $x = x_1$ における接線を引く．その接線と x 軸との交点を x_2 とする．次に $x = x_2$ ににおける接線を引き，その接線と x 軸との交点を x_3 とする．これを繰り返し，x 軸との交点 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ を求める付け続ければ，それらが徐々に $y = x^2 - 2$ のグラフと x との交点，つまり方程式の解へ近似するのである[*10]．具体的には $x = x_0$ における接線の傾きは $f'(x_0) = 2x_0$ であるため，接線の方程式は $y = 2x_0(x - x_0) + (x_0^2 - 2)$ である．これと x 軸との交点が x_1 であるため $x_1 = \dfrac{2 + x_0^2}{2x_0}$ である．これを繰り返せば，$x_{k+1} = \dfrac{x_k^2 + 2}{2x_k}$ となる．この式を用いれば，例えば PC ソフト Excel などの計算ソフトで解を容易に近似させることができる．

5.2　数値解析で方程式を解く

前小節では，原理的にも簡単な近似法について紹介した．では次に，偏微分方程式のように解くのが難しそうな方程式をコンピュータによって解く方法，つまり数値解析とはどのように行うのかを見る．本講義では早稲田大学にて行われている研究例を扱った．

5.2.1　数値解析の手順

偏微分方程式は高安[8] によれば，一般的に

偏微分方程式→離散化→有限次元方程式→数値計算→
数値解を求める→解の検討→偏微分方程式に戻る

という手順で数値解析される．

まず偏微分方程式は実数の範囲で与えられることが多い．しかし，コンピュータは有限小数までしか扱うことができないため，実数は扱うことができない．そこで，コンピュータで扱えるように

[*9] もちろん解は $x = \pm\sqrt{2}$ である．
[*10] ただし，x_1 のとり方によっては，解に近似しないこともありうる．

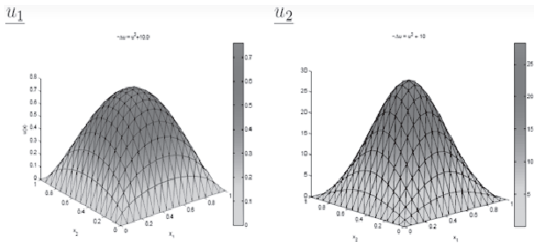

図 9　方程式 (5.1) の離散化のイメージ（高安[8]）

方程式をいじる必要がある．これを「離散化」という．解きたい偏微分方程式を離散化したものを有限次元方程式という．この有限次元方程式について，コンピュータで解析させるのである．これを「数値解析」という．数値解析によって求められた解を数値解という．最後に，求められた数値解がどれくらいの誤差であるのかを，解きたい偏微分方程式と照らし合わせながら，解の検討をする．その検討から得られた反省をもとに，離散化する方法を改めて議論することを繰り返すのである．その中で，より正確で早い近似を求める方法を探すことが，数値解析の研究である．

5.2.2　数値解析の例

本講義では 1 つ目の例として，高安[8] の例を見た．領域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ において

$$\begin{cases} -\triangle u = u^2 + 10 & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

という方程式の解く手順を本講義では「視覚的に何となく理解する」ことを目的として，簡単に解説した．メッシュを細分化する（$h = 2^x$ として，$x = 6, 7, 8$ の場合を見た）ことで，解が求まっていく様を了解した（図 9 参照）．またナヴィエーストークス方程式の研究について紹介した．この方程式は一般解の存在すらわかっていないこともあり，格好の数値解析の研究対象となっていると紹介した[*11].

次に，大石[6] の例を見た．この研究は，係数が（何万というような）膨大な数である連立 1 次方程式をコンピュータによって解析するときに，解の存在と誤差評価の双方（精度保証付き数値計算法）を行うものである．この論文では，$Ax = b$ などと行列 A やベクトル b で表したり，そのノルムを用いて議論していた（いわゆる線形代数である）．先の高安[8] の議論においても，ヒルベルト空間論やフーリエ変換など，コンピュータに関係ない解析的な議論をしている[*12].

以上の例から，数値解析というのは，コンピュータにすべてお任せしてできる議論なのではなく，人の頭で考えることが重要となる，と筆者は指摘した．例えば 5.2.1 節において述べた手順において,「離散化」と「解の検討」は完全に人間が議論すべきことである．また，数値解析をするまでの前段階までの議論は完全にコンピュータとは関係のない数学の議論をしている．つまり,「コンピュー

[*11] 解いたものに賞金が出ることも併せて紹介した．
[*12] 偏微分方程式論の研究であるから，当然といえば当然であるのだが.

タを用いた数学」といっても，コンピュータのことだけを議論すればよいのではなく，数学的な背景をきちんと議論する必要がある．そこで，筆者は「数学的な背景をきちんと議論ができるようになるためには，高校時代にこれまで（または，これから）学習することが基礎になる」ということを最後のメッセージとして伝えた．

おわりに

本講義の受講者は 54 名であった．学年の内訳は 47 名，1 年生 2 年生 5 名，3 年生 2 名である．参加者は理系進学希望者に限られるわけではなく，理系進学希望は 35 名，文系進学希望者は 17 名であった (2 名は未定)[*13]．

受講者の感想については，大きく分けて，実験について述べたものと，単元の「串刺し」について述べたものがあった．実験については，数学で実験をしたことの新鮮さ，π の求め方自体への興味を見てとれた．こうした課外講義には，アクティビティを取り入れ，アクセントを出すことが生徒へ印象付ける上では必要である，ことを筆者は再確認した．また単元の「串刺し」については，例えば「π の値と確率が結びつくのが面白かった．確率は想像以上に面白い」とあった．このように複数の分野を結びつけた講義をし，面白みを伝えることが課外講義の 1 つのメリットである．さらに「sin などを早く勉強したい」というコメントがあり，今後の学習に対して意欲をかきたてることができたといえよう．

一方で「勉強の先の科学」を見せるという点について，5 節で述べた数値解析について触れたコメントはほとんどなかった．表題にもある π の値の求め方がインパクトが強すぎたためだろう．これは反省点である．

本講義では数値解析について取り上げたが，筆者は数値解析の専門ではない．筆者が大学院時代に，隣の数値解析の研究室へ，しばしばお邪魔していた程度のつながりしかない．「精度保証付き数値計算」もその中で知ったものである．また筆者が話題として円周率を選択したのは，過去の「これがサイエンスだ！」におけるアンケートによれば，数学の講義で聞きたい内容で円周率が最も多かったためである．課外講義「これがサイエンスだ！」は 1 年生への興味関心を喚起するという目的があるため，5 月という，とりわけ早い時期に関心の強いテーマであろう話題を提供したのである．

最後に当日の講義に参加し，アンケートに協力してくれた 54 名の学院生，および当日お手伝いをしていただいた数学科非常勤講師の五十嵐恵祐氏に感謝申し上げる．また，本講義の機会を与えてくれた SSH 委員に感謝申し上げる．

＜参考文献＞

[1] 川上一郎『数値計算』，岩波書店，1989.
[2] 黒田成俊『微分積分』，共立出版，2002.
[3] 京極一樹『中学・高校数学のほんとうの使い道』，実業之日本社，2011.

[*13] アンケートでは学部進学について当てはまるものを 1 つ選ぶ形とし，回答の選択肢は，1. 理系進学を強く希望している，2. 理系寄りに考えている，3. 文系寄りに考えている，4. 文系進学を強く希望している，とした．ここでは，1，2 を回答した者を理系進学希望者，3，4 を回答した者を文系進学希望者とした．

[4] 中尾充宏，渡部善隆『実例で学ぶ制度保証付き数値計算』，サイエンス社，2011.
[5] 野崎昭弘『π の話』，岩波書店，2011.
[6] 大石進一，太田貴久ら「悪条件連立一次方程式の制度保証付き数値計算法」，日本応用数理学会論文誌，**15**(3)，2005，pp.269–287.
[7] 沢畑雅彦「「ビュフォンの針」と 10 円玉について」,『第 97 回全国算数・数学教育研究（北海道）大会特集号』，p.497，2015.
[8] 高安亮紀「楕円型非線形偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題に対する制度保証付き数値計算法」，数値解析セミナー ♯13，2010.
[9] 上野健爾『円周率が歩んだ道』，岩波書店，2013.
[10] 矢野健太郎，石原繁『微分積分改訂版』，裳華房，2002.