早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Permanence and global asymptotic stability of equilibria for mathematical models with time delays

時間遅れをもつ数理モデルにおけるパーマネンスと平衡点の大域漸近安定性

申 請 者

江夏	洋一
ENATSU	Yoichi

数学応用数理専攻　非線形システム研究

2011 年 11 月

これまで, 種の時間変化に対する個体群動態を記述した数理モデルの漸近挙動が広く考察されてきた. 本論文では, 微分方程式および差分方程式によって記述された時間遅れをもつ数理モデルにおける平衡点の安定性解析に関する結果を述べる. 具体的には, 研究テーマを以下の 3 項目:

- 時間遅れをもつ協力型 Lotka-Volterra モデルのパーマネンス条件
- 非線形接触項および時間遅れをもつ感染症モデルにおける内部平衡点の大域漸近安定性
- 連続時間モデルにおける平衡点の大域安定性を保つ離散スキームの導出

に大別し, 研究成果を紹介する.

第 1 章では, 以下の時間遅れつき協力型 Lotka-Volterra モデルを考える (Lu, Lu (2008) 参照).

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(r_1 - a_{11}^1 x_1(t-\tau) - a_{11}^2 x_1(t-2\tau) + a_{12}^1 x_2(t-\tau)), \\ x_2'(t) = x_2(t)(r_2 + a_{21}^0 x_1(t) + a_{21}^1 x_1(t-\tau) - a_{22}^0 x_2(t) - a_{22}^1 x_2(t-\tau)),\ \tau \geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし, $r_i > 0$, $a_{ij}^k > 0$, $(i,j = 1,2, k = 0,1,2)$ である. 以下の初期条件:

$$\begin{cases} x_1(\theta) = \phi_1(\theta) \geq 0,\ \theta \in [-2\tau, 0],\ \phi_1(0) > 0, \\ x_2(\theta) = \phi_2(\theta) \geq 0,\ \theta \in [-\tau, 0],\ \phi_2(0) > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

の下で (1.1) がパーマネント, すなわち, ある正定数 m_i, M_i $(i = 1,2)$ が存在して (1.2) を満たす任意の ϕ_i $(i = 1,2)$ に対して

$$m_i \leq \liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} x_i(t) \leq M_i, \quad i = 1,2$$

が成立するための十分条件を考える. 競争型モデルや捕食者 · 被食者型モデルとは対照的に, (1.1) のような協力型モデルがパーマネントであるためには, 係数に対して τ に依存した条件が要求されるだろう, と多くの研究者により示唆され, 生物学的にも幅広い関心を集めている. その一方で, (1.1) がパーマネントであるための時間遅れに無関係な新しい十分条件を提案し, 以下の定理を得た.

定理 1.1. $a_{11}^1 a_{22}^0 > a_{21}^0 a_{12}^1$ かつ $a_{11}^2 a_{22}^0 > a_{21}^1 a_{12}^1$ ならば, 系 (1.1) はパーマネントである.

定理 1.1 を得るための解析手法における独自性は, Nakata, Muroya (2010) によって構築された $x_1(t)$ および $x_2(t)$ の上極限評価手法と Wang, Ma (1991) の研究に端を発する境界 Lyapunov 汎関数法の応用により得られる $x_1(t)$ および $x_2(t)$ の下極限評価手法を組み合わせた点にある. さらに, Nakata, Muroya (2010) により提案された (1.1) のパーマネンス条件に関する結果を一般次元に拡張した.

第 2 章では, 以下の時間遅れつき SIRS (Susceptible-Infected-Recovered-Susceptible) 感染症モデルを考える.

$$\begin{cases} S'(t) = B - \beta S(t) \int_0^h f(\tau) G(I(t-\tau)) d\tau - \mu S(t) + \delta R(t), \\ I'(t) = \beta S(t) \int_0^h f(\tau) G(I(t-\tau)) d\tau - (\mu + \gamma) I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t) - (\mu + \delta) R(t),\ h \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし, $B>0$, $\beta>0$, $\mu>0$, $\gamma>0$, $\delta\geq 0$, $f\in C([0,h],\mathbb{R}_+)$, $\int_0^h f(\tau)d\tau=1$ である. 初期条件は以下の通りである.

$$S(0)=\psi_1(0)>0,\ I(\theta)=\psi_2(\theta)\geq 0,\ \theta\in[-h,0],\ \psi_2(0)>0,\ R(0)=\psi_3(0)>0. \tag{2.2}$$

また, 感染個体との非線形接触を特徴付ける関数 G は以下の 2 つの仮定を満たす.

(H1) $G(I)$ は $[0,+\infty)$ 上連続かつ単調増加で $G(0)=0$ である,

(H2) $I/G(I)$ は $(0,+\infty)$ 上単調増加かつ $\lim_{I\to+0}(I/G(I))=1$ である.

このとき, (2.1) の解 $(S(t),I(t),R(t))$ は $[0,+\infty)$ 上ただ一つ存在し, すべての $t\geq 0$ に対して $S(t)>0$, $I(t)>0$, $R(t)>0$ であり, $\lim_{t\to+\infty}(S(t)+I(t)+R(t))=B/\mu$ が成立する. また, 基本再生産数 R_0 を以下のように定義する.

$$R_0=\frac{B\beta}{\mu(\mu+\gamma)}.$$

この基本再生産数は「単位感染個体群が生産する 2 次感染個体群密度」を表し, 感受性人口集団への伝染病の侵入条件を与えるための閾値 (threshold) として重要な役割を果たしている. (2.1) は常に境界平衡点 $E_0=(S_0,0,0)$, $S_0=B/\mu$ をもつ. また, $R_0>1$ ならば, (2.1) は E_0 に加えて, ただ一つの内部平衡点 $E_*=(S^*,I^*,R^*)$, $S^*>0$, $I^*>0$, $R^*>0$ をもち, 次を満たす.

$$B-\mu S^*-\beta S^*G(I^*)+\delta R^*=0,\ \beta S^*G(I^*)-(\mu+\gamma)I^*=0,\ \gamma I^*-(\mu+\delta)R^*=0.$$

はじめに, $\delta=0$ の場合, 双線形接触項を含む遅れつき SIR (Susceptible-Infected-Recovered) モデルにおいて McCluskey (2010) によって構築された Lyapunov 汎関数を用いた解析手法および非線形接触項を含む遅れなし SIR モデルにおいて Korobeinikov (2007) によって構築された Lyapunov 関数を用いた解析手法の組み合わせにより, 以下の命題を得た.

命題 2.1. $\delta=0$ とする. このとき, $R_0\leq 1$ ならば (2.1) の境界平衡点 E_0 は大域漸近安定であり, $R_0>1$ ならば (2.1) の内部平衡点 E_* は大域漸近安定である.

ここで, (2.1) の平衡点 E_0 (resp., E_*) が大域漸近安定であるとは, E_0 (resp., E_*) が一様安定でありかつ (2.2) を満たす任意の ψ_i $(i=1,2,3)$ に対して, (2.1) の解が $\lim_{t\to+\infty}(S(t),I(t),R(t))=E_0$ (resp., $\lim_{t\to+\infty}(S(t),I(t),R(t))=E_*$) を満たすことである. さらに, この結果を非分離形の非線形接触項を含む時間遅れつき SIR モデルにおける平衡点安定性解析にも拡張した.

一方, $\delta\geq 0$ の場合においても, 基本再生産数の値ごとに対応したリャプノフ汎関数を構成し, open problem であった内部平衡点の大域漸近安定性に関して以下の定理を得た.

定理 2.1. (i) $R_0\leq 1$ ならば, (2.1) の境界平衡点 E_0 は大域漸近安定である.
(ii) $R_0>1$ かつ

$$\mu S^*-\delta R^*\geq 0 \tag{2.3}$$

ならば, (2.1) の内部平衡点 E_* は大域漸近安定である.

定理 2.1 は McCluskey (2010) の SIR 感染症モデル ($\delta = 0$) から SIRS 感染症モデル ($\delta \geq 0$) への大域解析に関する拡張結果である. さらに, (2.3) は h に無関係な条件式であり, 以下の定理によって, 与えられた R_0 に対して内部平衡点 E_* が大域漸近安定であるための δ の具体的範囲を得た.

定理 2.2. $R_0 > 1$ とする. このとき, 以下の条件:

$$\begin{cases} 0 \leq \delta < +\infty, & \text{for} \quad 1 < R_0 \leq 1 + \dfrac{\mu}{\gamma}, \\ 0 \leq \delta \leq \bar{\delta} := \dfrac{\mu}{\frac{R_0}{1+\frac{\mu}{\gamma}} - 1}, & \text{for} \quad R_0 > 1 + \dfrac{\mu}{\gamma} \end{cases} \tag{2.4}$$

が成り立つならば (2.3) が成り立つ. 特に $G(I) = I$ のとき, (2.3) と (2.4) は互いに同値である.

さらには, 単調反復法 (モデル変数の上極限, 下極限により構成された反復列が内部平衡点に収束するための係数条件を考察する方法) の適用により, δ が十分大きいならば, (2.1) の内部平衡点が大域漸近安定である結果も得た. 上記手法は SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) モデルや viral infection モデルをはじめとする多くの時間遅れつき感染症モデルにおける平衡点の安定性解析にも応用できる.

第 3 章では, 第 2 章で紹介された連続時間 SIR モデルのもつ内部平衡点の安定性を保つ離散スキーム導出に関する研究報告を行う. 離散時間モデルにおいても, 上記連続時間モデルのもつ平衡点の安定性を保つ離散スキーム導出に関する研究が広く行われてきた. McCluskey (2010) が与えた Lyapunov 汎関数の時間微分における対数関数項の式変形の適切な差分化に着目し, 後退オイラー法のバリエーション (a variation of backward Euler method) を用いて離散化された以下の差分モデルを考える.

$$\begin{cases} s(p+1) - s(p) = B - \beta s(p+1) \displaystyle\sum_{j=0}^{m} f(j) i(p-j) - \mu_1 s(p+1), \\ i(p+1) - i(p) = \beta s(p+1) \displaystyle\sum_{j=0}^{m} f(j) i(p-j) - (\mu_2 + \gamma) i(p+1), \\ r(p+1) - r(p) = \gamma i(p+1) - \mu_3 r(p+1), \ m \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

ただし, $B > 0$, $\beta > 0$, $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\gamma > 0$, $f(j) \geq 0$ $(j = 0, \ldots, m)$, $\sum_{j=0}^{m} f(j) = 1$ である. (3.1) は常に境界平衡点 $\tilde{E}_0 = (s_0, 0, 0)$, $s_0 = B/\mu_1$ をもつ. また, $\tilde{R}_0 = \frac{B\beta}{\mu_1(\mu_2+\gamma)}$ とおくと, $\tilde{R}_0 > 1$ ならば, (3.1) は $\tilde{E}_0$ に加えて, ただ一つの内部平衡点 $\tilde{E}_* = (s^*, i^*, r^*)$, $s^* > 0$, $i^* > 0$, $r^* > 0$ をもつ. このとき, 以下の定理を得た.

定理 3.1. $\tilde{R}_0 \leq 1$ ならば, (3.1) の境界平衡点 $\tilde{E}_0$ は大域漸近安定であり, $\tilde{R}_0 > 1$ ならば, (3.1) の内部平衡点 $\tilde{E}_*$ は大域漸近安定である.

連続時間モデルにおける安定性結果と同様に, 上記手法を分離形の非線形接触項を含む時間遅れつき差分モデルにおける平衡点の安定性解析に拡張した.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　江夏　洋一　　印

（２０１２年　２月　現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	○Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Lyapunov functional techniques for the global stability analysis of a delayed SIRS epidemic model, Nonl. Anal. RWA. (2012) doi:10.1080/10236198.2011.602973. Y. Enatsu, 他5名, Stability analysis of delayed SIR epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, Appl. Math. Comp. 218 (2012) 5327-5336. Y. Nakata, Y. Enatsu and Y. Muroya, Two types of condition for the global stability of delayed SIS epidemic models with nonlinear birth rate and disease induced death rate, Int. J. Biomath. 5 (2012) 1250009 (29 pages). Y. Enatsu, 他5名, Global dynamics of a delayed SIRS epidemic model with a wide class of nonlinear incidence rates, J. Appl. Math. Comput. (2011) doi:10.1007/s12190-011-0507-y. ○Y. Enatsu, 他４名, Global dynamics of difference equations for SIR epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, Journal of Difference Equations and Applications (2011) doi:10.1080/10236198.2011.555405. Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a discrete SIS epidemic model with immigration of infectives, Journal of Difference Equations and Applications (2011) doi:10.1080/10236198.2011.602973. ○Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability of SIR epidemic models with a wide class of nonlinear incidence rates and distributed delays, Disc. Cont. Dynam. Sys. B 15 (2011) 61-74. ○G. Lu, Z. Lu and Y. Enatsu, Permanence for Lotka-Volterra systems with multiple delays, Nonl. Anal. RWA. 12 (2011) 2552-2560. Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata, Global stability of a delayed SIRS epidemic model with a non-monotonic incidence rate, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011) 1-14. Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata, Monotone iterative techniques to SIRS epidemic models with nonlinear incidence rates and distributed delays, Nonl. Anal. RWA. 12 (2011) 1897-1910. Y. Muroya, Y. Enatsu, Y. Nakata and A. Bellen, Global stability for a discrete epidemic model for disease with immunity and latency spreading in a heterogeneous host population, Nonl. Anal. RWA. 13 (2011) 258-274. Y. Nakata, Y. Enatsu and Y. Muroya, On the global stability of an SIRS epidemic model with distributed delays, Disc. Cont. Dynam. Sys. Supplement (2011) 1119-1128.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a class of discrete SIR epidemic models, Math. Biosci. Engi. 7 (2010) 347-361. 〇Y. Enatsu, Permanence for multi-species nonautonomous Lotka-Volterra cooperative systems, AIP Conf. Proc. International Conference on Boundary Value Problems: Mathematical Models in Engineering, Biology and Medicine 1124 (2009) 109-118. Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya (掲載決定), Global stability of SIRS epidemic models with a class of nonlinear incidence rates and distributed delays, Acta Math. Sci..
講演	Y. Enatsu, H. Nakai, Nonlinear aspects of competitive four-dimensional Lotka-Volterra systems, The Second China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, Okayama University, Japan, August 2008. Y. Enatsu, Permanence for *n*-dimensional nonautonomous Lotka-Volterra systems with loop structure, Conference on Boundary Value Problem, Santiago de Compostela, Spain, September 2008. Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Stability analysis of delayed epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, International Research Training Group 1529 Mathematical Fluid Dynamics Seminar, TU Darmstadt, Germany, February 2010. Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Global asymptotic stability for a class of epidemic models with delays, International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University, Japan, March 2010. Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Global stability for a class of epidemic models with delays and a nonlinear incidence rate, 8th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, Dresden, Germany, May 2010. Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Global asymptotic stability of SIRS models with a class of nonlinear incidence rates and distributed delays, The Third China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, Sea North Green Garden, China, October 2010. Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, On the global stability of a positive equilibrium for delayed epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Azores University, Portugal, July 2011. Y. Enatsu, Stability analysis of a positive equilibrium for delayed epidemic models, International Research Training Group 1529 Mathematical Fluid Dynamics Seminar, TU Darmstadt, Germany, November 2011.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演	江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，非線形接触項と時間遅れをもつ感染症モデルの大域漸近安定性，日本数学会秋季総合分科会，大阪大学, 2009年9月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，数理モデルにおける Lyapunov 関数を用いた平衡点の大域漸近安定性について，第７回計算数学研究会，裏磐梯ロイヤルホテル, 2009年10月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，生物数学における大域漸近安定性に関する Lyapunov 関数の構成法，第６回生物数学の理論とその応用（RIMS 研究集会)，龍谷大学, 2009年11月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，時間遅れをもつ感染症モデルにおける平衡解の大域安定性解析，第32回発展方程式若手セミナー，伊豆長岡, 2010年8月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，時間遅れをもつ感染症モデルにおける平衡点の大域安定性，第18回応用解析研究会シンポジウム，箱根湯本, 2011年2月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，時間遅れをもつ感染症モデルの大域安定性解析,「現象の数理」研究会，伊東, 2011年2月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，連続感染症モデルの大域安定性を保つ離散モデル，日本数学会年会，早稲田大学, 2011年3月. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭, Global stability of a positive equilibrium for epidemic models with delays，平衡非線形現象の解析 -- 発展方程式の立場から-- (RIMS 研究集会), 京都大学, 2011年10月.
その他	江夏洋一，中田行彦，室谷義昭, Lyapunov functional techniques on stability analysis for mathematical models，京都大学数理解析研究所講究録 1704 (2010) 120-127. 江夏洋一，中田行彦，室谷義昭，時間遅れをもつ感染症モデルにおける平衡解の大域安定性解析，第 32 回発展方程式若手セミナー報告集 (2010) 47-56.