早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Vector Fields in $\mathcal{G}^1(M)$ on 3-manifolds and Their Characterization
3次元$\mathcal{G}^1(M)$のベクトル場とその特徴付けについて

申 請 者

山中 竹春
Takeharu Yamanaka

2003 年 5 月

1960年代に Smale と Palis により提唱された構造安定性予想は、まず離散力学系(微分同相写像)の場合にMañé(1988年)により完全な証明が与えられ、のちに林修平(1992年)により $\mathcal{F}^1(M)$においてもその予想が正しいことが示された。連続力学系(ベクトル場)の場合は特異点の存在から証明は困難を極めたが、林(1997年)によるConnecting Lemmaの開発・適用により予想の肯定性が示された。そこで微分同相写像の集合 $\mathcal{F}^1(M)$に相当するベクトル場集合 $\mathcal{G}^1(M)$ への結果の拡張が当然期待されるが、Guckenheimer による Geometric Lorenz Attractor は $\mathcal{G}^1(M)$ に属しながら公理Aを満たさない例となっているため、これは成立しないことが知られている。しかし $\mathcal{F}^1(M)$の特徴付けにより離散力学系の安定性問題が完全に解決したことから、$\mathcal{G}^1(M)$に対しても(公理A系とは異なる別の何らかの)特徴付けが必要とされる。しかしながら、これに関しては現時点で殆んど何らの結果も得られていない。本論文はこのようななか、まず3次元系における $\mathcal{G}^1(M)$の最初の特徴付けを目指したものである。

上記に述べた Geometric Lorenz Attractor が公理Aを満たさないのは、ある特異点に周期軌道が集積しているため、周期軌道全体の集合の閉包が双曲型集合になり得ないからである。そこで本論文第1章では逆に $\mathcal{G}^1(M)$に属するベクトル場のある特異点に周期軌道列が集積していた場合、その特異点はどのような性質を満たすか、という問題を議論している。

定義 1.1.1 $X\in \mathcal{G}^1(M)$の特異点 σ が Lorenz-like であるとは、Xの σ における微分の固有値がすべて実根で、$\lambda_1<\lambda_2<0<-\lambda_2<\lambda_3$ を満たすことである。

次の定理１．１．２で第1章の主結果が述べられている。

定理 1.1.2 $\mathcal{G}^1(M)$の開かつ稠密集合に属するベクトル場 X において以下が成り立つ。もし X のある特異点に周期軌道列が集積しているならば、X または $-X$ に対して、その特異点は Lorenz-like である。

Geometric Lorenz Attractor の特異点は Lorenz-like である。それゆえ定理１．１．２により、$\mathcal{G}^1(M)$ のほとんどすべてのベクトル場 X において、X の特異点に周期軌道列が集積していた場合、その特異点近傍における X の振る舞いは、Geometric Lorenz Attractor の特異点近傍における振る舞いと位相共役であることが分かる(Hartman-Grobman の定理)。

証明の概要は以下の通りである。まず、$X\in \mathcal{G}^1(M)$ であるから、常に attracting な周期軌道(sink)と repelling な周期軌道 (source)の数は有限である。従って、sink と source の数を数えることには意味があるのであるが、 任意の $X\in \mathcal{G}^1(M)$は source と sink の合計数が増えない近傍 $\mathcal{U}_1$ で近似できる(補題１．２．１)。今、X は3次元系であるので、周期軌道の指数(安定方向の次元) は0，1，2のいずれかであるが、$X\in \mathcal{U}_1$ なる限り、X をわずかに摂動して周期軌道が出来たとしても、それは必ず指数1の saddle である。以下、$X\in \mathcal{U}_1$, $\sigma\in Sing(X)\cap\overline{per_1}(X)$ とする。ただし、$Sing(X)$ は Xの特異点全体の集合、$\overline{per_1}(X)$ は Xの指数1の周期軌道全体の集合とする。

必要なら X を $-X$ に取ることにより、σ の指数は2と仮定する。従って、σ での微分 $D_\sigma X$ は実部が負の固有値 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ と正の実固有値 $\lambda_3\in\mathbb{R}$ を持つことになる。このとき σ に集積している周期軌道 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\cdots$ の normal bundle 上には当然、dominated splitting が存在するから(補題１．２．３)、これを利用して、σ の unstable manifold $W^u(\sigma)$ 上にある種の dominated splitting が構築できる。ここで注意したいのはこの dominated splitting は Linear Poincaré Flow P_t^X についてのものだということである。しかし、実は同様の関係が微分 DX_t についても成立する(補題１．２．４)。 さて、今 $N^s(\sigma)$ を σ の固有値 λ_1,λ_2 $(\mathrm{Re}(\lambda_1),\mathrm{Re}(\lambda_2)<0)$ に対応する2次元固有空間とする。Palis の λ-Lemma から、ある時間の列 $\{t_n\}_{n\ge 1}$ を適当に取って、

$$\lim_{n\to\infty} DX_{-t_n}(N_y^s)=L^s \quad and \quad \lim_{n\to\infty} DX_{-t_n}(N_y^u)=L^u$$

とできよう。但し、L^s, L^u は $N^s(\sigma)$ の適当な線形部分空間である。この時、補題１．２．４の関係は連続性から L^s, L^uに対しても維持されて、

$$\|D_\sigma X_{-t}/L^u\|\cdot\|D_\sigma X_t/D_\sigma X_{-t}(L^s)\|\le e^{-2\eta t} \quad for\ \forall t\ge T$$

が成り立つ。 従ってジョルダン標準形を考えれば、$D_\sigma X/N^s$ の固有値 λ_1, λ_2 は実数で、$\lambda_1<\lambda_2$ を満な

さければならない。これで $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ が得られた。

$-\lambda_2 < \lambda_3$ の証明:
σには周期軌道列が集積しているから、補題1. 2. 2 (C^1 Connecting Lemma) により、σの安定多様体と不安定多様体をつなぎ、homoclinic loop Γ を作ることが出来る。そこでまず Γ 上の任意の点 p と、p の近くの点 $y \notin \Gamma$ から出発する軌道 $\theta = \{X_t(y) | 0 \le t \le T \ \ for\ some\ \ T\}$ を適当に取る。pが非遊走点であるから、y と $X_T(y)$ は $p \in \Gamma$ に対していくらでも近く取れ、この pair$(y, X_T(y))$ に C^1 Closing Lemma を適用することで saddle の周期軌道 γ が作れる。このとき、Γ の近傍は摂動することなく、かつ γ は Γ にいくらでも近くなるように Closing することが可能である(補題1. 2. 5)。Closing によりベクトル場は X から Y に変わるが、小さい摂動なので σ の固有値の大小関係は変わらない。σ_X に対して $-\lambda_2 < \lambda_3$ が成立しないとすると、σ_Y についても $-\lambda_2 < \lambda_3$ は 成立しない。そして、もし $-\lambda_2 < \lambda_3$ が成立しないならば、γ が双曲型周期軌道であることに矛盾することを示す。具体的には、まず γ は Γ にいくらでも近くとれるので γ は特異点 σ_Y の非常に近くを通るとして良い。ということは γ の周期は非常に大きいはずである。このとき双曲型周期軌道の性質からちょうど一周回ってきたときの Linear Poincaré Flow の unstable bundle 上の伸び具合、$\|P_T^Y / N_\xi^u\|$, $\xi \in \gamma$ は非常に大きいものとなるはずである(但し T は γ の最小周期。$Y_T(\xi) = \xi$)。 しかし、もし $-\lambda_2 < \lambda_3$ が成り立たず、$-\lambda_2 \ge \lambda_3$ であるとすると、$\|P_T^Y / N_\xi^u\|$ はあまり大きくならないことがある計算から示される。こうして矛盾が導かれ、$-\lambda_2 < \lambda_3$ が示される。

第1章で $\mathcal{G}^1(M)$ のほとんどの力学系において、周期軌道列が集積するような特異点近傍の振る舞いは Geometric Lorenz Attractor の特異点近傍と位相共役であることが示された。従って、もしベクトル場が公理Aを満たさない原因のほとんどが周期軌道列が特異点に集積することから来ているとすれば、逆にそのようなベクトル場の多くは Geometric Lorenz Attractor と何らかの意味で似た部分集合をもつのではないかと予想される。近年、Morales らは双曲型集合を一般化した singular 双曲型集合なる概念を定義し、Geometric Lorenz Attractor がその典型例になることを示した。

定義 2.1.1 $X \in \chi^1(M)$ のコンパクト不変集合 Λ が singular 双曲型集合であるとは Λ は周期軌道列が集積する特異点を持ち、さらに接バンドル TM 上に以下の条件を満たす invariant continuous splitting $TM/\Lambda = E^s \oplus E^{cu}$ が存在することである。

1. E^s は1次元、E^{cu} は2次元で flow のベクトル $X(y)$, $y \in \Lambda$ を含む。
2. ある定数 $\lambda > 0, C > 0$ が存在して、次の条件を満たす。
   - $\|DX_t / E_x^s\| \cdot \|DX_{-t} / E_{X_t(x)}^{cu}\| \le Ce^{-\lambda t}$
   - $\|DX_t / E_x^s\| \le Ce^{-\lambda t}$
   - $|\det(DX_t / E_x^{cu})| \ge Ce^{-\lambda t}$

本論文第 2 章では $\mathcal{G}^1(M)$ の稠密集合に属する力学系は公理A系であるか、もしくは周期軌道を稠密部分集合に含む singular 双曲型集合を持つことを証明している(定理2. 1. 2)。この結果により、$\mathcal{G}^1(M)$ に属しながら公理A系でないものの多くは singular 双曲型集合を持ち、その意味において Geometric Lorenz Attractor と同様の構造を有する部分集合を持つことが示された。定理2. 1. 2により、3次元 $\mathcal{G}^1(M)$ における一つの特徴付けが与えられたことになる。

定理 2.1.2 $\mathcal{G}^1(M)$ に次のような稠密な部分集合 $\mathcal{V}$ が存在する：$\mathcal{V}$ に属する任意のベクトル場は公理Aを満たすか、ないし X または $-X$ が周期軌道を稠密部分集合に含む singular 双曲型集合を持つ。

証明の概要は以下の通りである。まず、以下の2つの命題が基本である。

命題 2.2.5 $X \in \mathcal{G}^1(M)$ とし、集合 Λ は周期軌道が稠密に含まれている不変集合とする。このとき $\Lambda \cap Sing(X) = \phi$ ならば、Λ は X の双曲型集合である。

命題 2.2.6 $X\in \mathcal{G}^1(M)$ とし、集合 Λ は周期軌道が稠密に含まれている不変集合とする。さらに X は sink と source の数が増えないような近傍に属しているものとする。このとき $\Lambda\cap Sing(X)\neq\phi$ でかつ任意の $\sigma\in\Lambda\cap Sing(X)$ が Lorenz-like であるならば、Λ は singular 双曲型集合である。

我々は命題2．2．5、命題2．2．6を基にして、定理2．1．2の証明を行う。今、任意のベクトル場 $S\in \mathcal{G}^1(M)$を sink と source の数が増えないような近傍 $\mathcal{U}_1$ で近似しておく。 $\mathcal{U}_1$ の中に公理Aを満たすベクトル場ないし singular 双曲型集合を持つベクトル場が必ず存在することを示せばよい。
　次の補題2．2．7はよく知られている。

補題 2.2.7 ベクトル場全体の集合 $\chi^1(M)$ の中に次のような剰余集合 $\mathfrak{R}$ が存在する: 任意のコンパクト集合 K と $X\in\mathfrak{R}$ に対して、$K\cap\overline{per_1}(X)=\phi$ が成り立てば、X の近くの Y に対しても $K\cap\overline{per_1}(Y)=\phi$。

今、$\mathcal{U}_1$ の中に属しているすべてのベクトル場の特異点の個数はちょうど L 個であるとしてよい。この時、ある定数 k $(0\leq k\leq L)$が存在して次が成り立つ。

補題 2.2.8 ある近傍 $\mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1$ が存在して、
(1) $\forall Y\in\mathcal{U}_2$ に対して、$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ には周期軌道が集積していない。
(2) $\forall Y\in\mathcal{U}_2\cap\mathfrak{R}$ に対して、$\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \cdots, \sigma_L$ には周期軌道が集積している。

この補題が重要なのはある摂動を行って、$\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \cdots, \sigma_L$ のどれかが isolated になったとしても、また僅かな摂動で周期軌道がそれらに集積している状況が作り出せることにある。ある意味で robust transitive に近い状況を作り出せる。この性質を用いて、補題2．2．9を証明する。

(補足) 仮に $k=l$ になったとする。この時、$\forall Y\in\mathcal{U}_2$ は周期軌道が集積するような特異点を一つも持たないことになる。すると命題2．2．5より、$\overline{per}(Y)$ は双曲型、さらに general density theorem から、$\mathcal{U}_2$ のどれかの Y について $\Omega(X)=\overline{per}(Y)$ と仮定出来るので、$\mathcal{U}_2$ の中に公理Aを満たす Y があることになり、証明は終了する。従って、$k<l$ を仮定し、$\mathcal{U}_2$ の中のある Y が singular 双曲型集合を持つことを示せばよい。

補題 2.2.9 $X\in\mathcal{U}_2\cap\mathfrak{R}$, $\sigma\in Sing(X)\cap\overline{per_1}(X)$ とする。この時、σ (指数2とする)の（1次元）不安定多様体 $W^u(\sigma)$ は当然、$\overline{per_1}(X)$ に含まれるが X を少し摂動した Y に対しても、$W^u(\sigma)$ は $\overline{per_1}(X)$ から離れない。

補題2．2．9から補題2．2．10が導かれる。

補題 2.2.10 $X\in\mathcal{U}_2\cap\mathfrak{R}$ とする。今、X の周期軌道の列 $\{\gamma_n\}$ が X の二つの特異点 σ_1, σ_2 に同時に集積しているとする。この時、σ_1, σ_2 の指数は等しくなければならない。

$\mathcal{G}^1(M)$ の任意のベクトル場 S を $X\in\mathcal{U}_2\cap\mathfrak{R}$ でいくらでも近く近似する。X は周期軌道が集積するような特異点を持つから、$\{\gamma_n\}_{n\geq1}$ をそのような周期軌道の列とする。$K=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n}$ と置くとき、補題2．2．10により、任意の $\sigma_1,\sigma_2\in K\cap Sing(X)$ に対して、σ_1, σ_2 の指数は等しい。従って、Lemma2．2．2より、σ_1, σ_2 は Lorenz-like であるので K は命題2．2．6の条件を全て満たす。ゆえに K は singular 双曲型集合であり、X が singular 双曲型集合を持つことが示された。