棄却検定の比較表

石川栄助

A Comparative Table to Make Sample Criterion a for Testing Rejection

Eisuke ISHIKAWA

§ 0 はしがき
§ 1 標本規準變量
§ 2 THOMPSON の棄却検定の表
§ 3 増山博士の棄却限界表
§ 4 THOMPSONの棄却限界値と増山博士の棄却限界との關係
§ 5 SMIRNOV-GRUBBS の棄却検定表
§ 6 SMIRNOV-MASUYAMA の棄却限界表
§ 7 棄却検定表の比較

§ 0 はしがき

観測資料中，条件のおもわしくない不良の資料を含む事がある．これを客観的に棄却する方法に THOMPSON の方法，増山博士の方法，SMIRNOV-GRUBBS の方法，及び SMIRNOV-MASUYAMA の方法等がある．これらの方法は標本規準変量を土台に考える事が出来る．即ち標本規準変量を次の様に第一種と第二種とに分ける時，THOMPSON の棄却限界値の表は第一種の規準変量によつて求められ，増山博士の棄却限界値の表は第二種規準変量によつて求める事が出来た．そして両者の限界値間の関係を明らかにする事が出来た．この関係は又 SMIRNOV-GRUBBS の限界値，SMIRNOV-MASUYAMA の限界値の間にも成立する．ここに4種の棄却限界値の表を掲げ，数値表によつて棄却検定法を具体的に比較する．

§ 1 標本規準変量

正規分布をなす資料から n 個の標本，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{n-1}, X_n$ をとり，この中の極端なる値を X_n とする．X_n の棄却を考えるには，まず標本平均と標本分散を求め，標本規準変量を計算するが，この場合次の2つの方法で求めておく．

(1) X_n を含めて n 個の資料について，標本平均及び標本分散を求める，

(2) X_n を除いて $n-1$ 個の資料について，標本平均及び標本分散を求める．

(1)による統計量を第一種の統計量といい，それぞれ第一種の標本平均，第一種の標本分散と称し $\bar{X}$, s^2 で表わす．

又(2)による統計量を第二種の統計量とよび，それぞれ第二種の標本平均，第二種の標本分散と称し，$\bar{X}'$, s'^2 で表わす事にする．

即ち

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

$$\overline{\mathrm{X}}' = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{X}_i \qquad s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}')^2 \qquad \cdots\cdots (1.2)$$

第一種の標本平均，標本分散よりの標本規準変量を τ，第二種の標本平均，標本分散よりの標本規準変量を τ' で表わし，それぞれ第一種の規準変量，第二種の規準変量と名ずける．即ち

第一種規準変量 ： $$\tau = \frac{\mathrm{X}_n-\overline{\mathrm{X}}}{s} \qquad \cdots\cdots (1.3)$$

第二種規準変量 ： $$\tau' = \frac{\mathrm{X}_n-\overline{\mathrm{X}}'}{s'} \qquad \cdots\cdots (1.4)$$

THOMPSON の棄却検定法，SMIRNOV-GRUBBS の棄却検定法は τ を用い，増山博士の棄却限界法及び SMIRNOV-MASUYAMA の棄却限界法は τ' を用いたことになつている．

§ 2 THOMPSON の棄却検定表

正規分布をなす資料から n 個の標本，X_1, X_2, ……, X_n をとり，その平均を $\overline{\mathrm{X}}$，標本分散を s^2 とおき，その中の極端なる資料を X_n とする．然る時第一種規準変量 τ を求め，次の統計量 ：

$$t = \tau\sqrt{\frac{n-2}{n-1-\tau^2}} \qquad \cdots\cdots (2.1)$$

但し $\tau = \dfrac{\mathrm{X}_n-\overline{\mathrm{X}}}{s}$

をとれば，t の確率密度は

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{(n-2)\pi}\;\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \qquad \cdots\cdots (2.2)$$

となり，自由度 $n-2$ の t—分布をなす．従つて (2.1) 式の $|t|$, $|\tau|$ の実現値を t_0, τ_0 とおけば，t —分布表を用いて

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_r(|t| \geqq t_0) = \mathrm{P}_r(|\tau| \geqq \tau_0) \qquad \cdots\cdots (2.3)$$

なる確率 P を自由度 $n-2$ で求め，有意水準 α と比較して

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{P} > \alpha & \text{ならば} & \mathrm{X}_n\ \text{を保留する．} \\ \mathrm{P} \leqq \alpha & \text{ならば} & \mathrm{X}_n\ \text{を棄却する．} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots (2.4)$$

とするのが，THOMPSON の棄却検定法であるが，$\mathrm{P} \leqq \alpha$ の場合は SMIRNOV の方法によるのが安全である事が第1表と第3表とを比較する事によつてもわかる．

今有意水準を α とした時，次の式 ：

$$\mathrm{P}_r(|t| \geqq t_\alpha) = \mathrm{P}_r(|\tau| \geqq \tau_\alpha) = \alpha \qquad \cdots\cdots (2.5)$$

を満足する t, τ をとれば，t_α と τ_α との間に (2.1) 式が成立するから次の関係式をうる．

$$t_\alpha = \tau_\alpha\sqrt{\frac{n-2}{n-1-\tau_\alpha^2}}$$

これより τ_α を解き

$$\tau_\alpha = t_\alpha\sqrt{\frac{n-1}{n-2+t_\alpha^2}} \qquad \cdots\cdots (2.6)$$

をうる．ここに t_α は自由度 $n-2$, α 水準の t— 値である．

従つて上式によつて τ_α を求めておく時は，THOMPSON の棄却検定は次のように簡単となる．

$$\left.\begin{array}{lll} \tau_0 < \tau_\alpha & \text{ならば}, & X_n \text{ を保留} \\ \tau_0 \geqq \tau_\alpha & \text{ならば}, & X_n \text{ を棄却} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.7)$$

ここに　$\tau_0 = \dfrac{X_n - \bar{X}}{s}$,　　$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum X$,　　$s^2 = \dfrac{1}{n}\Sigma(X-\bar{X})^2$

もしも X_n が棄却になつた時は SMIRNOV の方法によれば安全である.

上の τ_α 値を THOMPSON の棄却限界値又は単に THOMPSON の検定値とよぶ事にする．この値は (2.6) 式より容易に計算が出来る．第1表は n と α を与えての THOMPSON の棄却検定 τ_α の表である.

第1表　THOMPSON の棄却検定 τ の表

α \ n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5%	1.65	1.76	1.81	1.85	1.87	1.88	1.90	1.90	1.91	1.92	1.92
1%	1.71	1.92	2.05	2.14	2.21	2.26	2.29	2.32	2.35	2.37	2.38
α \ n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5%	1.92	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94
1%	2.40	2.41	2.42	2.43	2.44	2.45	2.45	2.46	2.47	2.47	2.47

〔使用例 1〕 次は或る人が 100米コースを10回走つた時の所要秒数である.

14, 14, 15, 14, 13, 15, 14, 18, 13, 14

第8回目の18秒は異状として棄却すべきか.

〔解〕　$X_n = 18$ とおき，18を含めての標本平均$\bar{X}$，及び標本分散 s^2 を求める.

即ち　$\bar{X} = 14.4$　　$s = \sqrt{1.84}$

$$\therefore \quad \tau_0 = \frac{|X_n - \bar{X}|}{s} = \frac{|18-14.4|}{\sqrt{1.84}} = 2.654$$

第1表より　$n = 10$,　$\alpha = 0.01$　の τ の値は　$\tau_{0.01} = 2.29$

よつて　　$\tau_0 > \tau_{0.01}$　　故にX_n を棄却.

即ち　$X_n = 18$　は1%基準をもつて異状とみなされる[1].

§ 3　増山博士の棄却限界値の表

同一母集団から $n-1$ 個の標本 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{n-1}$ をとり，その平均値を $\bar{X}'$，不偏分散を s'^2 とおけば危険率 α をもつ棄却限界値 X_α として増山博士は標本平均の差の検定の考えから次の値を提案した.

1)　正確には第3表の SMIRNOV の棄却検定表参照.

$$X_\alpha = \bar{x}' \pm s'\sqrt{\frac{n}{n-1}\ F^1_{n-2}(\alpha)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

今自由度 $n-2$ の t の値 $t_{n-2}(\alpha)$ を単に t_α とおき，$n-1$ 個の資料の標本分散を s'^2 とおけば，上式は簡単に次のようになる．

$$X_\alpha = \bar{x}' \pm t_\alpha\ s'\sqrt{\frac{n}{n-2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

上の資料 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{n-1}$ の標本と異なると考えられる極端な資料 X_n をとる時，上式より

$$|X_n - \bar{x}'| \geqq t_\alpha\ s'\sqrt{\frac{n}{n-2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

ならば X_n を異状のものとして棄却するのが，増山博士の方法である．

上式を変形すれば次のようになる．

$$\frac{|X_n - \bar{x}'|}{s'} \geqq t_\alpha\sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

この左辺は第二種規準変量 τ'_0 である．よつて左辺を τ'_α とおけば，(3.3) 式は

$$\left.\begin{array}{lll} \tau'_0 \geqq \tau'_\alpha & \text{ならば，} & X_n \text{ を棄却する．} \\ \tau'_0 < \tau'_\alpha & \text{ならば，} & X_n \text{ を棄てない．} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

ここに $\tau'_0 = \dfrac{|X_n - \bar{x}'|}{s'}$，　$\tau'_\alpha = t_\alpha\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}$

従つて τ' の値を種々の n につき，α 水準について予め求めておけば，増山博士の棄却限界法は容易になる．第 2 表は (3.4) 式による限界値 τ' の表である．

第2表　増山博士の棄却限界値 τ' の表

α ＼ n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5 %	6.08	4.11	3.40	3.04	2.83	2.68	2.58	2.50	2.44	2.39	2.35
1 %	14.04	7.54	5.64	4.77	4.28	3.97	3.75	3.59	3.47	3.38	3.30
α ＼ n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5 %	2.32	2.29	2.27	2.25	2.23	2.21	2.20	2.19	2.18	2.17	2.16
1 %	3.24	3.18	3.14	3.10	3.06	3.03	3.01	2.98	2.96	2.94	2.93

〔使用例 2〕 前例に於て $X_n = 18$ を増山博士の棄却限界法を用いて棄却検定せよ．

〔解〕 $X_n = 18$ を除いた標本平均 $\bar{x}'$，標本分散 s'^2 を求める．

$$\bar{x}' = 14.0 \qquad s' = \tfrac{2}{3}$$

$$\therefore\ \tau'_0 = \frac{|X_n - \bar{x}'|}{s'} = \frac{3(18-14)}{2} = 6.00$$

第 2 表の $n = 10$, $\alpha = 1\,\%$ の τ' の値は　$\tau'_{0.01} = 3.75$

故に　　$\tau'_0 > \tau'_{0.01}$

よつて $X_n = 18$ は1%基準で棄てられる.

§4　THOMPSON の棄却検定値と増山博士の棄却限界値との関係

正規母集団より n 個の標本 X_1, X_2, ……, X_n をとり，特に異状なる X_n を棄却するのにTHOMPSON の方法と増山の方法による棄却限界値をそれぞれ τ_α, τ'_α とおけば (2.6), (3.4) 式より次の通りである.

THOMPSON :
$$\tau_\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n-2+t_\alpha^2}}\ t_\alpha \qquad \cdots\cdots (4.1)$$

MASUYAMA :
$$\tau'_\alpha = \sqrt{\frac{n}{n-2}}\ t_\alpha \qquad \cdots\cdots (4.2)$$

両式より t_α を消去すれば

$$\tau_\alpha' = \sqrt{\frac{n}{n-1-\tau_\alpha^2}}\ \tau_\alpha \qquad \cdots\cdots (4.3)$$

又は
$$\tau_\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n+\tau_\alpha'^2}}\ \tau_\alpha' \qquad \cdots\cdots (4.4)$$

即ち上の関係式は第1表と第2表の関係式である. 従つて増山博士の棄却限界は容易に THOMPSON の棄却検定値より求める事が出来る. 又この逆も成立する.

〔例用例 3〕 $n = 10$, $\alpha = 0.05$ の時の第1表 τ の値 $\tau_{0.05} = 1.90$ を (4.3) 式を代入すれば，$n = 10$ の第2表の τ' の値が求まる.

即ち
$$\tau'_{0.05} = \sqrt{\frac{n}{n-1-\tau_\alpha^2}}\ \tau_\alpha = 1.90\sqrt{\frac{10}{10-1-3.61}} = 2.588$$

しかして第2表の $\tau'_{0.05}$ は，　$\tau'_{0.05} = 2.58$ となつている.

(多少の誤差は数表の4捨5入のためである)

〔注意〕 (4.3) 式，(4.4) 式の関係は実は第一種規準変量限界値と第二種規準変量限界値との関係である. 次節の SMIRNOV系の棄却限界値についても上の関係が成立する. (§6 参照)

§5　SMIRNOV-GRUBBSの 棄却限界値表

正規母集団より n 個の標本をとり，大いさ順に次の様に並べる.

$$X_1 \leqq X_2 \leqq \cdots\cdots \leqq X_n$$

この場合に X_n が最大となる限界を与えるのが，SMIRNOV[1], GRUBBS[2] の棄却限界値である.

まず第一種規準変量 τ を用い

$$\left.\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{X_n-\overline{X}}{s} \\ \overline{X} &= \frac{1}{n}\Sigma X_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X-\overline{X})^2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (5.1)$$

1) SMIRNOV : Doklady, 33, 1941.

2) GRUBBS : Annals of Mathematical Statistics (1950). No. 1.

なる τ の分布を考える.(本節注意参照)

α 水準にて $P = P(\tau \geqq \tau_\alpha) = \alpha$ なる限界値 τ_α を求める時, τ の実現値を τ_0 とおけば

$$\left.\begin{array}{lll} \tau_0 \geqq \tau_\alpha & \text{ならば} & X_n \text{を棄却} \\ \tau_0 < \tau_\alpha & \text{ならば} & X_n \text{を棄てない} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.2)$$

とするのが, SMIRNOV-GRUBBS の棄却検定法である. 第3表は GRUBBS によつた略表である.

第3表　SMIRNOV-GRUBBS の 棄 却 検 定 表

α \ n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5 %	1.69	1.87	2.00	2.09	2.17	2.24	2.29	2.34	2.39	2.43	2.46
1 %	1.72	1.96	2.13	2.27	2.37	2.46	2.54	2.61	2.66	2.71	2.76
α \ n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5 %	2.49	2.52	2.55	2.58	2.60	2.62	2.64	2.66	2.68	2.70	2.72
1 %	2.80	2.84	2.87	2.90	2.93	2.96	2.98	3.01	3.03	3.05	3.07

〔注意〕 規準正規母集団 N (0,1) から n 個の標本をとり, 大いさ順に $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$ と並べた時, 最大値 x_n による第一種規準変量 τ の確率密度は

$$P(\tau < \lambda) = \frac{n!}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_D e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} \; dx_1,\ dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

$$D: \quad -\infty < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots\cdots \leqq x_n < \bar{x} + \lambda s$$

従つて $P = P(\tau \geqq \tau_\alpha) = 1 - P(\tau < \lambda) = \alpha$ として τ_α を求める.

〔使用例 4〕 例 (1) を SMIRNOV-GRUBBS の方法で解け.

〔解〕 $\bar{X} = 14.4$, $s = 1.359$, $\tau_0 = 2.654$

第3表の $n=10$, 1 %の τ の値は $\tau_{0.01} = 2.54$

$\therefore \quad \tau_0 > \tau_{0.01}$

従つて $X_n = 18$ は 1 %基準で棄てられる.

§ 6 SMIRNOV-MASUYAMA の棄却限界表

正規母集団より n 個の資料をとり, 大いさ順に

$$X_1 \leqq X_2 \leqq \cdots\cdots X_{n-1} \leqq X_n$$

と並べる. 然る時最大値 X_n の棄却を増山博士の棄却限界法の考えから, 最大値 X_n を除いた第二種規準変量 τ' を求め, α 水準での τ' の値を τ'_α とおけば,

$$\left.\begin{array}{lll} \tau'_0 \geqq \tau'_\alpha & \text{ならば} & X_n \text{を棄てる} \\ \tau'_0 < \tau'_\alpha & \text{ならば} & X_n \text{を棄てない} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6.1)$$

但し　$\tau'_0 = \dfrac{X_n - \overline{X}'}{s'}$,　$\overline{X}' = \dfrac{1}{n-1} \Sigma X_i$,　$s'^2 = \dfrac{1}{n-1} \Sigma (X_i - \overline{X}')^2$

とする事が出来る．

ここに τ_α' は第3表 SMIRNOV-GRUBBS の τ_α より，次の式によつて計算出来る．(§4 参照)

$$\tau'_\alpha = \sqrt{\frac{n}{n-1-\tau_\alpha^2}}\ \tau_\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (6.2)$$

例えば　$n = 19$,　$\alpha = 5$ %の第3表 τ_α の値は　$\tau_{0.05} = 2.60$.

これを上式に代入し

$$\tau'_\alpha = \sqrt{\frac{19}{18-6.76}} \times 2.60 = 3.38$$

をうる．この様にして SMIRNOV-MASUYAMA の棄却限界値をうる．第4表は増山博士によつて求められたもので統計学辞典によつた値である．

第4表　SMIRNOV-MASUYAMA の棄却限界 τ′ の表

α \ n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5 %	8.80	5.87	4.85	4.35	4.07	3.88	3.75	3.66	3.59	3.54	3.49
1 %	19.49	10.36	7.67	6.43	5.75	5.36	5.03	4.82	4.67	4.55	4.45
α \ n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5 %	3.46	3.43	3.41	3.40	3.38	3.37	3.36	3.35	3.35	3.34	3.33
1 %	4.37	4.30	4.25	4.21	4.17	4.13	4.11	4.08	4.06	4.04	4.02

〔使用例　5〕 例(1)を SMIRNOV-MASUYAMA の方法で解け．

〔解〕　$\tau'_0 = 6.00$　　$\tau'_{0.01} = 5.03$　　$\therefore \tau'_0 > \tau'_{0.01}$

故に　$X_n = 18$　は棄てられる．

§ 7　棄却検定表の比較

棄却検定法としての THOMPSON の方法，増山博士の方法はお互に関連があり，又 SMIRNOV-GRUBBS の方法と SMIRNOV-MASUYAMA の方法とに関連がある．ここに標本個数を n, 有意水準を α として，それぞれの方法による限界値を比較すると第5表のようになる．

この表をみる時，規準変量 τ_0 を用いる場合は，棄却に関しては THOMPSON の方法よりも SMIRNOV の方法が棄却し難い，換言すれば棄却の場合は THOMPSON の方法よりも SMIRNOV の方法の方が大事をとつている事がわかる．これに反して保留の場合は THOMPSON の方法を用いてもよいことがわかる．又規準変量 τ'_0 を用いる場合は増山博士の方法よりも SMIRNOV-MASUYAMA の方法が棄却に際して大事をとつており，保留の場合は増山博士の方法を用いてもよい事等がわかる．

なお第一規準変量 τ を用いるか，第二規準変量 τ' を用いるかは観測の状況によつて判断する．保留の場合は前者を，棄却の場合は後者る用いると便利である．

第5表　棄却検定表の比較

方法	τ				τ'			
	THOMPSON [1]		SMIRNOV-GRUBBS		MASUYAMA [2]		SMIRNOV-MASUYAMA	
α ＼ n	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %
4	1.65	1.71	1.69	1.72	6.08	14.04	8.80	19.49
5	1.76	1.92	1.87	1.96	4.11	7.54	5.87	10.36
6	1.81	2.05	2.00	2.13	3.40	5.64	4.85	7.67
7	1.85	2.14	2.09	2.27	3.04	4.77	4.35	6.43
8	1.87	2.21	2.17	2.37	2.83	4.28	4.07	5.75
9	1.88	2.26	2.24	2.46	2.68	3.97	3.88	5.36
10	1.90	2.29	2.29	2.54	2.58	3.75	3.75	5.03
11	1.90	2.32	2.34	2.61	2.50	3.59	3.66	4.82
12	1.91	2.35	2.39	2.66	2.44	3.47	3.59	4.67
13	1.92	2.37	2.43	2.71	2.39	3.38	3.54	4.55
14	1.92	2.38	2.46	2.76	2.35	3.30	3.49	4.45
15	1.92	2.40	2.49	2.80	2.32	3.24	3.46	4.37
16	1.93	2.41	2.52	2.84	2.29	3.18	3.43	4.30
17	1.93	2.42	2.55	2.87	2.27	3.14	3.41	4.25
18	1.93	2.43	2.58	2.90	2.25	3.10	3.40	4.21
19	1.93	2.44	2.60	2.93	2.23	3.06	3.38	4.17
20	1.93	2.45	2.62	2.96	2.21	3.03	3.37	4.13
21	1.94	2.45	2.64	2.98	2.20	3.01	3.36	4.11
22	1.94	2.46	2.66	3.01	2.19	2.98	3.35	4.08
23	1.94	2.47	2 68	3.03	2.18	2.96	3.35	4.06
24	1.94	2.47	2.70	3.05	2.17	2.94	3.34	4.04
25	1.94	2.47	2.72	3.07	2.16	2.93	3.33	4.02

参考文献

(1) W. R. THOMPSON : On a criterion for the rejection of observations and the distribution of the ratio of deviation to sample standard deviation ; Ann. of the Math. Stat. Vol. 6. (1935).

(2) FRANK. E. GRUBBS : Sample criterion a for testing outlying observations ; Ann. of Math. Stat. Vol 21 (1950).

(3) 中山伊知郎編：統計學辭典 (1951).

(4) 統計科學研究會編：統計数値表 (1952).

(5) 増山元三郎：少數例のまとめ方 (1953).

(6) 石川榮助：實用近代統計學 (1955).

1), 2) この表は筆者の求めた値である．

Summary

Let $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ be random samples from the normal population with $N(\xi, \sigma^2)$, then the values of the mean and the variance are given by

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

When outlying data X_n are excepted from these samples, these values are denoted by

$$\bar{X}' = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i \ , \qquad s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

Thus the normal deviates of sample may be written as follows :

$$\tau = \frac{X_n - \bar{X}}{s} \ , \qquad \tau' = \frac{X_n - \bar{X}'}{s'} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

We wish to have a method of rejecting outlying data X_n, by the values τ and τ'.

These manners may be stated as follows :

where $t_\alpha = t -$ value, ($\alpha -$ level, and $d.f. = n-2$)

(1) THOMPSON'S manner

$$\left.\begin{array}{llll} \text{If} & \tau_0 \geqq \tau_\alpha & \text{then} & X_n \text{ is rejected} \\ & \tau_0 < \tau_\alpha & \text{then} & X_n \text{ is accepted} \end{array}\right\}$$

$$\text{where} \quad \tau_0 = \frac{|X_n - \bar{X}|}{s}$$

$$\tau_\alpha = t_\alpha \sqrt{\frac{n-1}{n-2+t_\alpha^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

and τ—table (Table 1) computed by the writer.

(2) MASUYAMA'S manner

$$\left.\begin{array}{llll} \text{If} & \tau'_0 \geqq \tau'_\alpha & \text{then} & X_n \text{ is rejected} \\ & \tau'_0 < \tau'_\alpha & \text{then} & X_n \text{ is accepted} \\ \text{where} & \tau'_0 = \dfrac{|X_n - \bar{X}'|}{s'} & & \\ & \tau'_\alpha = t_\alpha \sqrt{\dfrac{n}{n-2}} & & \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.7)$$

and τ'_α — table (Table 2) computed by the writer.

(3) Relation of τ and τ'

Concerning τ_α and τ'_α we have the commutation relation as follows.

$$\tau_\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n+\tau_\alpha'^2}}\ \tau'_\alpha \ , \qquad \tau'_\alpha = \sqrt{\frac{n}{n-1-\tau_\alpha^2}}\ \tau_\alpha$$

Let X take samples in ascending order.

$$X_1 \leqq X_2 \leqq \cdots\cdots \leqq X_{n-1} \leqq X_n$$

When the rejecting method for peculiar X_n can be considered by SMIRNOV, GRUBBS and MASUYAMA.

(4) SMIRNOV-GRUBBS :

If $\tau_0 \geqq \tau_\alpha$ then X_n is rejected

$\tau_0 < \tau_\alpha$ then X_n is accepted

where $$\tau_0 = \frac{|X_n - \bar{X}|}{s}$$

and τ_α-table (Table 3) by GRUBBS.

(5) SMIRNOV-MASUYAMA :

If $\tau_0' \geqq \tau_\alpha'$ then X_n is rejected

$\tau_c' < \tau_\alpha'$ then X_n is accepted

where $$\tau_0' = \frac{|X_n - \bar{X}'|}{s'}$$

and τ_α' —table (Table 4) by MASUYAMA.

(6) Comparative table for testing rejection

We have Table 5. that is comparative table to make sampling criterion a for testing rejection.