UMA TIPOGRAFIA DE BASE ELÍPTICA E OUTROS CRUZAMENTOS DO DESIGN COM A GEOMETRIA DAS CURVAS CÓNICAS

Joaquim M. de C. Bonifácio da Costa
Instituto Politécnico de Castelo Branco - Escola Superior de Artes Aplicadas
joaquim.bonifacio@ipcb.pt

Fernando José Carneiro Moreira da Silva
Universidade Técnica de Lisboa - Faculdade de Arquitetura

Vítor Manuel Bairrada Murtinho
Universidade de Coimbra – FCT. Departamento de Arquitetura

RESUMO
Através de alguns exemplos práticos, pretende-se defender que o conhecimento geométrico e, em particular, o conhecimento das curvas cónicas e suas aplicações, pode potenciar o trabalho projetual dos designers, diminuir os custos de hardware e software no ensino e no trabalho profissional, diminuir a necessidade de recurso a meios sofisticados e caros, reduzir a necessidade de permanente atualização dos meios tecnológicos, e de utilização de software que implique formação especializada e, sobretudo, que necessite de longos períodos de formação. Temos em vista contribuir para o reconhecimento da importância do estudo destas curvas e das superfícies por elas geradas, em especial no ensino da Geometria em cursos de Design. De facto, a partir da sistematização do conhecimento existente em outras áreas, como, por exemplo, a arquitetura e as engenharias, pelo aprofundamento da adaptação de propriedades das cónicas e de conhecimentos de áreas, como a geometria analítica ou a projetiva para a linguagem dos traçados geométricos, e pela contribuição com a sugestão de novos traçados, pode desenvolver-se a capacidade dos designers e estudantes de design resolverem problemas, no âmbito do projeto, na representação técnica e na comunicação externa com não peritos.
PALAVRAS-CHAVE: Design, Curvas cónicas, Splines, Superfícies, Geometria

ABSTRACT
Through some examples, we intend to argue that the knowledge of geometry and, in particular, the knowledge of conic curves and their applications, may potentiate the project work of designers, reducing the costs of hardware and software in teaching and professional work, reducing also the need for sophisticated and expensive means, and its continuous updating, and the use of software which involves specialized training, and especially requiring long training periods. We want to contribute to the recognition of the importance of the study of these curves and surfaces generated by them, especially in the teaching of Geometry in Design courses. In fact, from the systematization of existing knowledge in other areas, such as architecture and engineering, developing the adaptation of properties of conic curves and also the knowledge of areas such as analytic or projective geometry to the geometric design and contributing by suggesting new ways to draw the curves, we can develop the ability of designers and design students to solve problems in the context of the project, and others such as technical representation and external communication with non-experts.

KEYWORDS: Design, Conic curves, Splines, Surfaces, Geometry
Através de exemplos práticos, pretendemos contribuir para a demonstração de que, no contexto do ensino e da atividade profissional em design, o conhecimento geométrico e, em particular, o conhecimento das curvas cónicas e suas aplicações, pode ser muito útil, pois:

- potencia o trabalho de projeto dos designers, incrementando o conhecimento das linhas, superfícies e formas, dos processos para obter cada uma delas, das suas propriedades e das utilizações que propiciam, permitindo centrar o projeto nos objetivos e conceito que o designer quer desenvolver e não no que os meios disponíveis o deixam fazer;
- contribui para a diminuição dos custos de hardware e software no ensino e no trabalho profissional e diminui a necessidade de recurso a meios sofisticados e caros, criando condições para a obtenção dos mesmos resultados com utilização de programas correntes isolada ou conjugadamente;
- contribui para a redução da necessidade de permanente atualização dos meios tecnológicos, sabendo-se que as novas versões são cada vez mais frequentes e, apresentando-se como introduzindo inovações indispensáveis, implicam normalmente também atualização do próprio equipamento;
- pode reduzir a necessidade de utilização de software que implique formação especializada e, sobretudo, que necessite de longos períodos de formação.

Temos em vista, portanto, contribuir para o reconhecimento da importância do estudo destas curvas, das curvas que se podem obter a partir delas, das curvas similares, das superfícies por elas geradas e das formas cuja construção possibilitam, em especial no ensino da Geometria em cursos de Design. Atendendo ao atual estado do conhecimento na área, diminuto e disperso, este texto insere-se assim no contexto do desenvolvimento de um processo de pesquisa conducente:

- à sistematização do conhecimento existente em outras áreas, como, por exemplo, a arquitetura e as engenharias;
- ao aprofundamento da adaptação de propriedades das cónicas e de conhecimentos de áreas como a geometria analítica ou a projetiva para a linguagem dos traçados geométricos;
- à contribuição com a sugestão de novos traçados.

Pretende-se, desta forma, contribuir para o desenvolvimento da capacidade dos designers e estudantes de design resolverem problemas, no âmbito do projeto, na representação técnica e na comunicação externa com não peritos.

Não existem praticamente referências bibliográficas sobre a geometria e o design: apenas se encontram alguns textos em áreas próximas como a arte ou a arquitetura. Por outro lado, o tema da geometria das cónicas aparece geralmente tratado na literatura com abordagens analíticas, não gráficas. Não obstante, há autores, como por exemplo LIMING (1981) que, embora escrevendo no campo da geometria analítica, não deixam, pela natureza aplicada dos seus trabalhos, de fazer referências aos problemas da resolução gráfica. Tal é mais evidente quando o tema é a engenharia mecânica, e em especial com a engenharia automóvel, ou ferroviária, mas também na engenharia civil no ramo das estruturas, na engenharia aeronáutica ou na arquitetura.
Num âmbito lato, existem manuais dedicados ao desenho técnico, por exemplo CUNHA (1982), que correspondem à necessidade de sistematizar conhecimentos teóricos dispersos por diferentes fontes e campos do conhecimento, tornando-os utilizáveis em muitas diferentes situações e áreas profissionais, embora seja identificável que são essencialmente destinados às engenharias. Veiga da Cunha apresenta, por exemplo, dois

diferentes procedimentos para traçar curvas parabólicas não utilizando a relação foco-diretriz (CUNHA, 1982, 164). Este mesmo assunto, o do traçado de arcos parabólicos, num caso concreto, o do traçado do arco de uma ponte conhecidos os pontos de apoio e a tangente no vértice, já foi anteriormente abordado por nós, em BONIFÁCIO (2009), e foi marcante para a criação da hipótese de que as cónicas pudessem ser um contributo para o design, pelo tipo de problemas que foram suscitados e pelas leituras e reflexões pessoais que implicou, designadamente sobre a geometria, o desenho, os traçados e os novos instrumentos informáticos.

A necessidade de uma reflexão atualizada sobre as curvas cónicas tinha sido já expressa em COSTA (2005), a propósito da interseção de superfícies. Tendo em conta o método historicamente consolidado para os traçados geométricos, ou seja, utilizar como linhas auxiliares retas e arcos de circunferência, os traçados de régua e compasso, devida não apenas aos instrumentos disponíveis mas, sobretudo, porque os cálculos e demonstrações que orientam os traçados foram construídos com essas premissas, nesse texto sugeriu-se que é possível, nos nossos dias, utilizar os traçados das curvas cónicas como linhas auxiliares na determinação da interseção de superfícies. Esta possibilidade resulta sobretudo da maior simplicidade gerada pelo recurso a programas informáticos, pois permitem, em algumas circunstâncias, traçar as curvas cónicas de forma expedita. Todavia, a aplicabilidade deste recurso depende de ser fácil e expedito o traçado das curvas cónicas em cada situação concreta, e também exige a existência de procedimentos relativamente simples e utilizáveis, do ponto de vista prático diretamente nos traçados e, quando necessário pela sua maior complexidade, implica a criação de patches ou rotinas para os programas informáticos que facilitem a obtenção destas curvas nas mais diversas condições.

Tal como salientámos em COSTA (2013, 61), concluiu-se do estudo anteriormente referido que é possível utilizar as curvas cónicas na interseção de superfícies, mas constatou-se que o nível de conhecimento disponível não é o necessário, está disperso por diferentes áreas e grande parte do que se sabe sobre propriedades relevantes das cónicas encontra-se na geometria projetiva, a qual nas últimas décadas praticamente não tem sido objeto de estudo e divulgação, sendo raros os conhecedores, até nos seus fundamentos. De fato, e pelo contrário, parece existir uma evidente correlação entre a atividade de projeto na criação de objetos e espaços e a necessidade de conhecimentos de geometria projetiva, mesmo que apenas das suas aplicações práticas e, nesse contexto, com especial relevância, o estudo das curvas cónicas. Assim, e numa aceção lata da definição de design, que vai do simples rascunho de uma ideia, desde o esboço, até ao design industrial, são inúmeras as áreas onde se encontra a necessidade dos traçados das curvas cónicas e implicitamente de aplicações práticas resultantes da geometria projetiva, sendo a correlação cada vez mais evidente quanto mais complexa e profunda do ponto de vista científico e tecnológico é a área do design em que atuamos.

Como primeiro exemplo, vamos supor que se pretende conceber uma fonte tipográfica em que as letras minúsculas curvas como o “o”, o “a”, o “c” ou o “d” têm como forma base uma elipse com eixos oblíquos relativamente às direções vertical e horizontal, e inscrita num retângulo [ABCD]. É definido um ponto E de tangência da elipse num dos lados do retângulo.

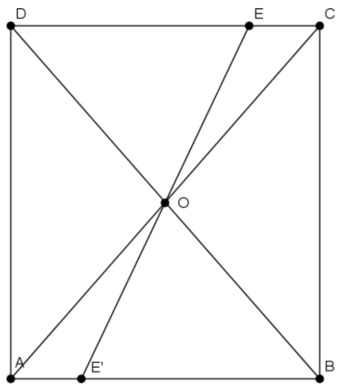

Fig. 1

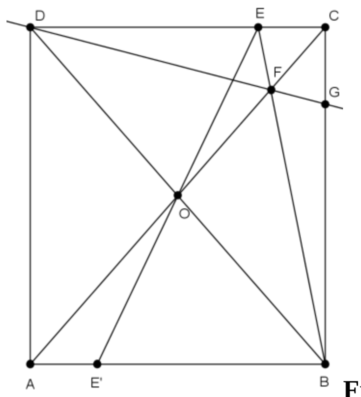

Fig. 2

Se traçarmos as diagonais do retângulo obtemos o seu centro O que é, simultaneamente, centro da elipse. E’, simétrico de E relativamente a O é o ponto de tangência em AB.
Na figura 2, adaptando de NAGORE (1988, 149), que indica como determinar um outro ponto de tangência, a partir de quatro tangentes e o ponto de tangência numa delas, vamos determinar G, ponto de tangência da elipse em CB. Para tal, interseta-se EB com a diagonal AC determinando F. A reta DF interseta CB em G, o ponto de tangência pretendido.

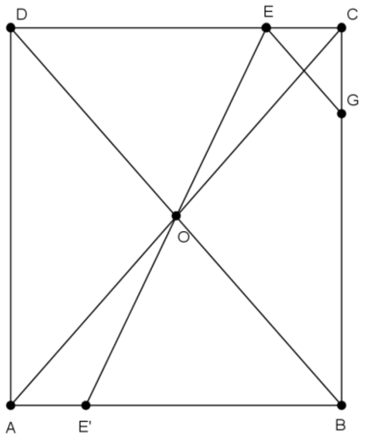

Fig. 3

De notar que se pode simplificar, como se depreende da figura 3, pois EG é paralelo a BD, ou seja, quando as tangentes descrevem um retângulo, os pontos de tangência da elipse situam-se em paralelas às diagonais. Esta é uma propriedade que não se encontra documentada na literatura, não obstante o trabalho de Nagore fazer referência a uma propriedade similar, mas relativa ao quadrado (NAGORE, 1988, T. III, 154).

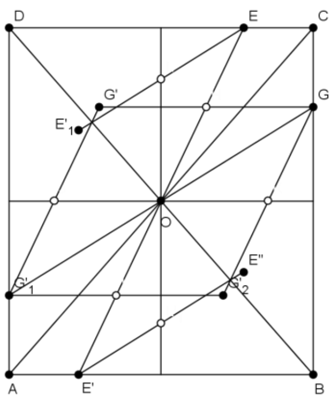

Fig. 4

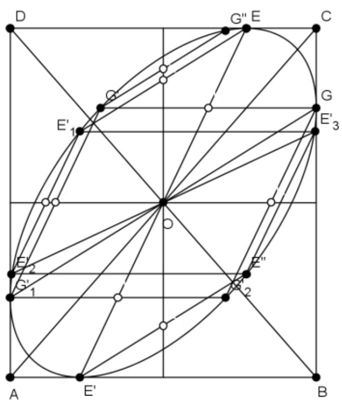

Fig. 5

Se pretendermos desenhar a elipse em traçado de régua e esquadro, ou por desenho vetorial, mas socorrendo-nos de uma ferramenta de splines em vez do traçado da própria elipse, podemos determinar novos pontos desta pelos procedimentos constantes nas figuras 3 e 4, ou seja, sendo EE' um diâmetro e CD sendo a tangente em E, uma corda que seja paralela a CD como por exemplo GG' é bissetada por EE'(APOLLONIUS, 1896, 17), o que permite determinar G'. Por outro lado, todos os pontos da elipse têm simétricos relativamente a O, o que permite determinar G'1. Mais, o segmento que passa em O paralelo a AB contem o diâmetro conjugado de EE', pois é paralelo às tangentes nos extremos do diâmetro (NAGORE, 1988, 165). Tal permite determinar G'2 a partir de G. Ainda, a paralela em O ao lado BC do retângulo contem o diâmetro conjugado de GG'1, o que permite determinar por exemplo E'' a partir de E'. Utilizando as referidas propriedades podemos determinar sucessivamente novos pontos.

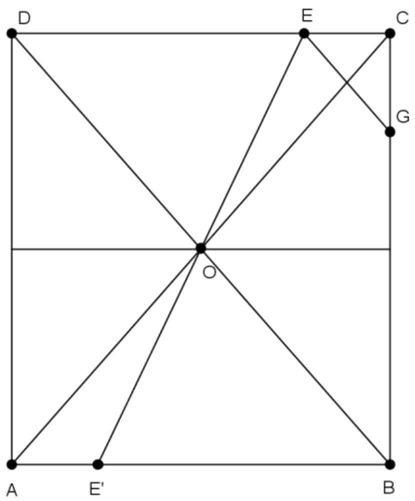

Fig. 6

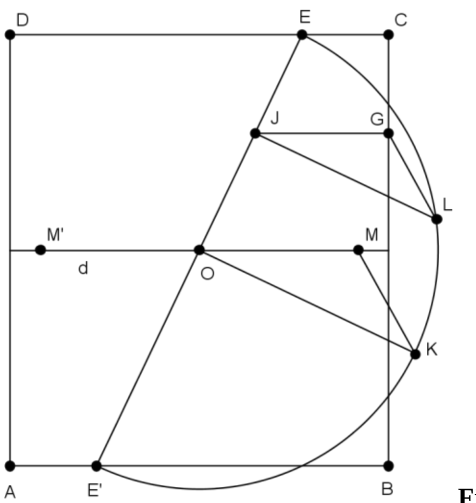

Fig. 7

Mas mais prático será trabalhar com um programa informático que determine a elipse a partir de cinco pontos, como alguns programas de geometria dinâmica como o Geogebra [1] ou o Cinderela [2], ou, em alternativa, um dos programas de desenho vetorial ou CAD que desenhe a elipse a partir dos seus eixos maior e menor, ou de um destes e dos focos. Neste caso, para determinar os eixos vamos partir das condições descritas na figura 6. Seguidamente, e como se apresenta na figura 7, determinamos o diâmetro conjugado de EE'[3]. É sabido que este está contido no segmento d, por este ser paralelo às tangentes nos extremos de EE'. Traçando a semicircunferência EE'e projetando G paralelo a d até EE' determinamos J. Fazendo a perpendicular em J a EE' até à semicircunferência, temos L. Se por O traçarmos a perpendicular a EE' até K na semicircunferência e por este passarmos uma paralela a GL, obtemos M, extremo do diâmetro conjugado, sendo M' o outro extremo, simétrico relativamente a O (CUNHA, 1982, 158).

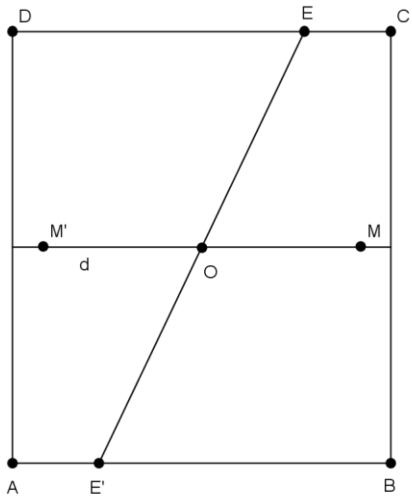

Fig. 8

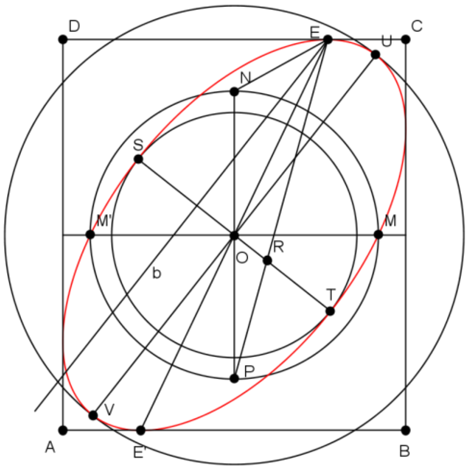

Fig. 9

Vamos agora determinar o eixo maior e menor da elipse. Para tal, os dados são os diâmetros conjugados EE’ e MM’. Traça-se a circunferência que passa no menor diâmetro, no caso MM’, e uma perpendicular a este diâmetro até intersetar a circunferência em N e P. Une-se N e P a E e determina-se b, bissetriz do ângulo <NEP. O eixo maior vai ser paralelo à bissetriz b e o eixo menor tem direção perpendicular a esta. Por outro lado, EP é intersetado pela direção do eixo menor em R. ER é o raio da circunferência do eixo maior da elipse e RP é o raio da circunferência que contem o eixo menor, o que permite por fim conhecer ST e UV os eixos da elipse (CUNHA, 1982, 158).

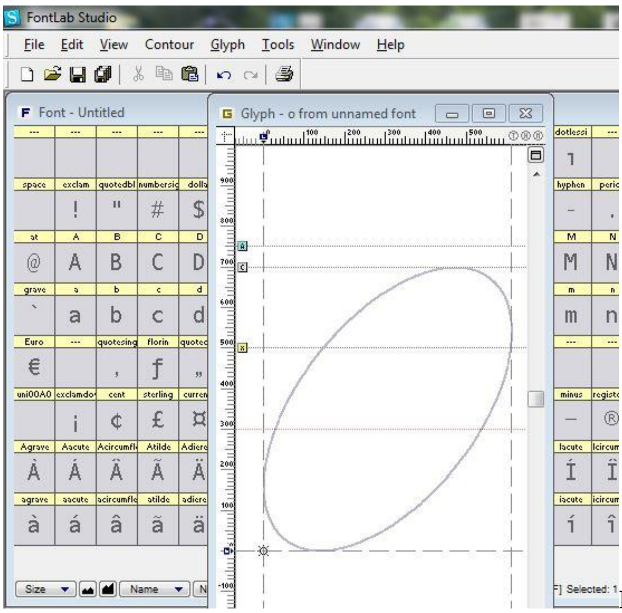

Fig. 10

Na figura 10, vemos a cópia da elipse para um programa editor de fontes, no caso o FontLab Studio [4], o que permite iniciar a construção das várias letras da fonte nas condições pretendidas.

Assim, e apesar da aparente complexidade, a solução do problema fica reduzida à determinação dos pontos de tangência no retângulo, seguida da dos diâmetros conjugados e, a partir destes, dos eixos da elipse.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de utilizações diretas e indiretas das curvas cónicas.

Fig. 11 – Isao Hosoe – caixas de plástico ou vidro em elipse abatida
Fonte: http://www.ihd.it/isao/welcome.html [acedida em 25/5/2013]

O primeiro exemplo é um conjunto de caixas de Isao Hosoe, desenvolvido em plástico e com tampa, cuja forma também foi depois utilizada em vidro, e que representam um compromisso entre a forma paralelepipédica mais fácil de arrumar e a forma elíptica de maior facilidade de limpeza, de maior resistência ao choque com menor gasto de material. Paralelamente, e utilizando os conhecimentos de Isao Hosoe na área da engenharia aeroespacial, permitiu criar um sistema de tampas que quase não necessitam de pressão para o seu encerramento a vácuo e que resulta da forma em elipse abatida. No desenho desta, utilizam-se procedimentos derivados dos das cónicas, os das curvas suavizadas, designadamente splines, curvas Bézier e outras.

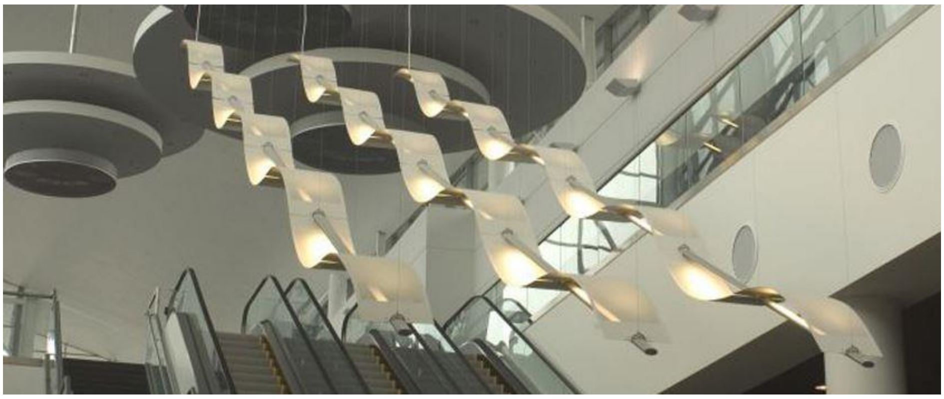

Fig. 12 – "Onda" de Isao Hosoe (LUXIT S.p.A.) aplicada no Colorado Convention Center
Fonte:http://www.fdvgroup.com/LUXIT/COLORADO_CONVENTION_CENTER_%28USA%29
[acedida em 20/5/2013]

Neste segundo exemplo, trata-se de uma linha de luminárias desenvolvida por Isao Hosoe a partir de formas parabólicas agregando diversos segmentos em sequência.

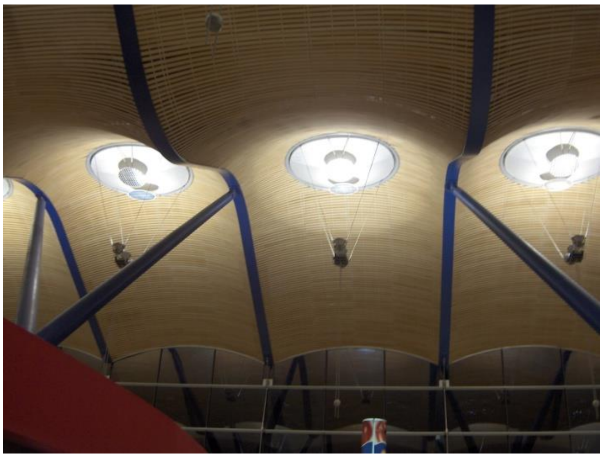

Fig. 13 – Aeroporto Madrid Barajas – Terminal 4

O teto falso do Terminal 4 do Aeroporto Madrid Barajas é um exemplo de uma superfície gerada por uma parábola deslocando-se, aparentemente, sobre uma diretriz sinusoidal.

Fig. 14 – Cobertura dos espaços de circulação exterior na Fiera Milano

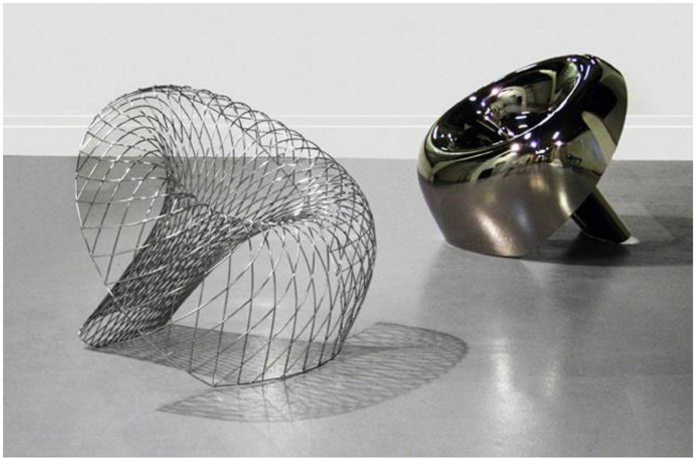

Fig. 15 – Cadeira Reverb Wire de Brodie Neill
RECityMagazine - Milan 2012 [acedida em 25/5/2013]

A cobertura exterior da Fiera Milano e a cadeira Reverb Wire são dois exemplos que demonstram que os avanços tecnológicos das duas últimas décadas, designadamente os informáticos, permitiram a utilização de procedimentos matemáticos derivados de conhecimentos teóricos ligados às curvas cónicas, para encontrar novas soluções estéticas e funcionais.

Contextualizando e sistematizando, estão identificadas as seguintes áreas relacionadas com as curvas cónicas e que têm tido expressão no design, na arquitetura e em outras áreas profissionais relacionadas:
- as curvas cónicas propriamente ditas;
- as Famílias e Feixes de cónicas;
- as linhas Splines, Bézier e outras;
- as superfícies geradas por cónicas ou pelas linhas referidas, a interseção de superfícies e a planificação de superfícies.

Vamos seguidamente, apresentar exemplos práticos das potencialidades geométricas que na atualidade existem, começando pelas cónicas propriamente ditas. Como exemplo, e sabendo que uma cónica fica definida por 5 condições, pontos ou tangentes nesses pontos, é sempre possível traçar a curva obtidos 5 pontos. O processo a seguir descrito é o apresentado por NAGORE (1988, T III, 145), que tem a vantagem de permitir escolher a direção que contem um sexto ponto F qualquer e, por exemplo, através de geometria dinâmica, obter a curva.

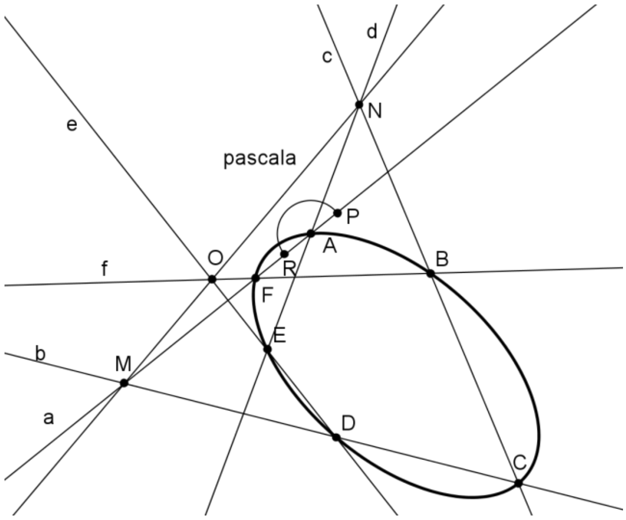

Fig. 16 – Dados 5 pontos que definem a cónica determinar um sexto ponto qualquer.

Dados os pontos A, B, C, D e E, escolhe-se P qualquer na direção pretendida a partir de A definindo a reta a. Onde esta interseta b, que contem C e D, obtemos M. A reta c é definida por B e C, e a reta d é definida por A e E, e intersetam-se em N. M e N definem a reta “pascala”. Onde esta interseta a reta e, definida por E e D, obtemos O, que com B, define f. A interseção de f e a é o ponto F pretendido. De notar que, se fizermos rodar em torno de A o ponto P 180° até R podemos obter todos os pontos da curva.

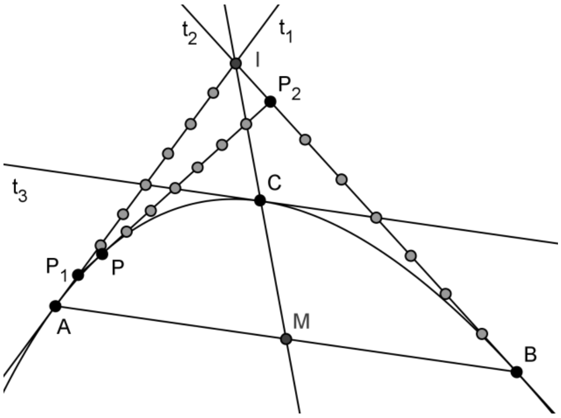

Fig. 17 – Determinação gráfica da parábola conhecidos dois pontos e respetivas tangentes.

O método da figura 17 permite construir a parábola definida pelos pontos A e B e respetivas tangentes t_1 e t_2. Sendo I interseção de t_1 e t_2 e M o ponto médio de AB, então o ponto C, ponto médio de MI, pertence à parábola sendo o ponto desta cuja respetiva tangente t_3 é paralela a AB. Se dividirmos AI e IB em partes iguais, no caso em oito partes, e unirmos o primeiro ponto P_1 de um segmento ao primeiro ponto P_2 do outro segmento, obtemos uma tangente à parábola. Repetindo o processo para os restantes pontos, obtemos a curva num procedimento documentado há dezenas de anos como a definição da curva pelas tangentes envolventes. Mas, para além disso, se o segmento de P_1 a P_2 for dividido em igual número de partes, o primeiro ponto P, é o ponto de tangência dessa tangente. Repetindo o processo para os outros pontos obtemos a forma gráfica da parábola.

A construção gráfica da parábola e a sua utilização como discriminante, introduzindo pequenas alterações de processo que permitem construir arcos elípticos e hiperbólicos derivados da parábola, acompanhada da elevação de grau, como na figura 18, permitem construir as splines.

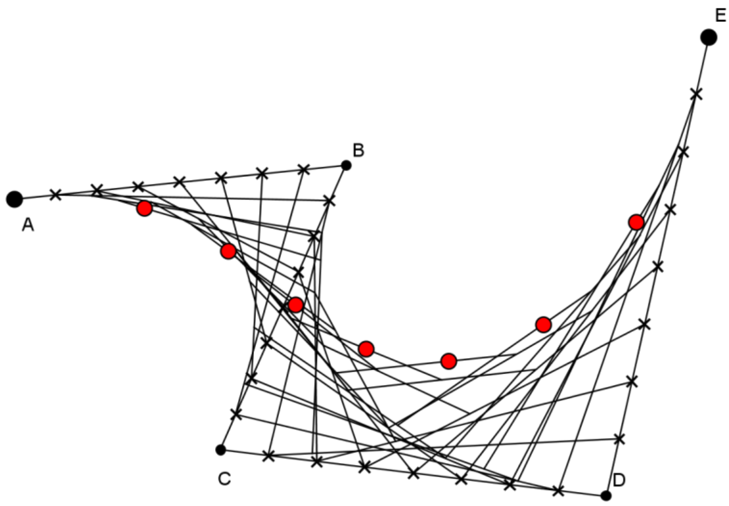

Fig. 18 – Construção de uma curva quártica

Note-se que, para construir uma curva cúbica podemos proceder como anteriormente na parábola e apenas acrescentar a A, B, e C o ponto D. Daqui, e utilizando um procedimento derivado do anterior, ou seja, determinando o primeiro ponto da parábola definida por A, B e C, e depois o primeiro ponto da parábola definida por B, C e D, podemos unir o segmento definido pelos dois pontos e dividi-lo no mesmo número de partes, obtendo o primeiro ponto da cúbica que vai de A a D, e elevando um grau à equação que descreve a curva. Acrescentando um outro ponto E qualquer, e tornando a elevar o grau, obtemos a quártica que vai de A a E. Assim, podemos construir as splines, normalmente utilizando troços de curvas cónicas, de segundo grau, ou troços de cúbicas, terceiro grau, associados.

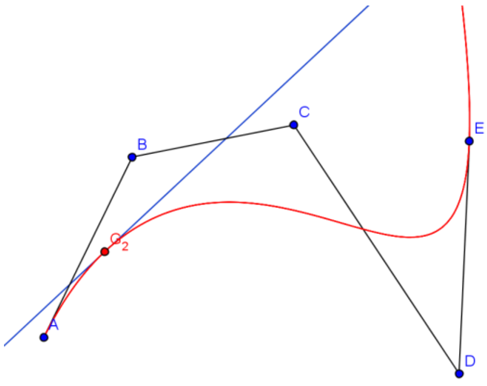

Fig 19 – Curva quártica e tangente num ponto.

A figura 19 corresponde a um exemplo de quártica construída, pelo procedimento descrito, num programa informático que não possui a função de desenho de splines, demonstrando na prática que tal pode ser realizado em qualquer programa vetorial, desde que conhecidos os processos envolvidos e ultrapassadas as dificuldades teóricas, designadamente serem curvas descritas normalmente através de equações matemáticas de relativa complexidade.

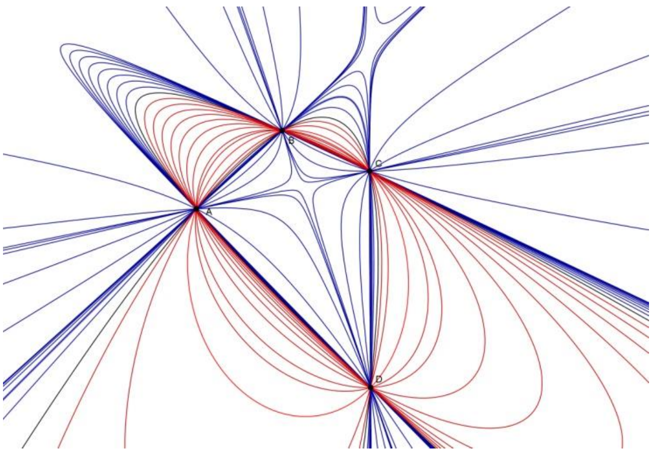

Fig. 20 – Feixe de cónicas a passar por quatro pontos em quadrilátero convexo.

Podemos igualmente utilizar as cónicas em procedimentos mais complexos, como por exemplo em algumas máquinas e programas desenhados para o reconhecimento de imagem, que em alguns casos se socorrem dos feixes de cónicas. Apresenta-se, na figura 20, um feixe de cónicas que passa por quatro pontos em quadrilátero convexo não paralelogramo, e que é formado por duas parábolas, elipses e hipérboles.

Fig. 21 – Hiperbolóide de revolução de uma folha

O hiperbolóide de revolução de uma folha é uma das superfícies geradas com curvas cónicas. Esta superfície é obtida pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo de simetria dos seus dois ramos. É uma superfície regrada, pelo que pode ser construída por retas, em dois sistemas direcionais cruzados. Fixa pelas articulações das interseções das várias retas, pode tornar-se extremamente resistente, pelo que tem diversas aplicações em estruturas de elevada resistência, como depósitos elevados de líquidos e torres de refrigeração de centrais nucleares e térmicas. Se apenas fixarmos as retas de cada sistema em dois pontos de cada uma delas, podemos obter uma estrutura que, apesar de permitir regular a largura da gola do hiperboloide e a sua altura, é relativamente estável, permitindo aplicações por exemplo numa mesa de altura regulável.

Assim, pensamos ter contribuído para:
- o reconhecimento da necessidade do estudo das curvas cónicas e das superfícies geradas a partir destas, tanto do ponto de vista teórico, como do ponto de vista das aplicações práticas genericamente, e em particular no âmbito do ensino da Geometria em cursos de Design;
- o aprofundar do conhecimento das curvas cónicas, em particular dos seus traçados geométricos;
- criar bases para a sistematização do conhecimento existente, designadamente fazendo a adequação dos conhecimentos teóricos da Matemática para os traçados geométricos em Geometria Aplicada e sua utilização no Design, contribuindo assim para a sua ligação ao ensino do Design e à prática profissional em Design.

Foi igualmente definido o objetivo de contribuir para o estudo das relações entre geometria e design, salientando o papel dos traçados geométricos no design, e preenchendo a lacuna existente na literatura sobre aplicações gráficas das cónicas no design e, paralelamente, identificar potencialidades que o estudo das curvas cónicas pode induzir no aumento da capacidade de resolução de problemas de representação gráfica rigorosa, por designers e outros profissionais, designadamente os das áreas das artes visuais e da arquitetura.

NOTAS
[1] http://www.geogebra.org

[2] http://www.cinderella.de/tiki-index.php
[3] Nas cónicas centrais, ou seja, na elipse e na hipérbole, um diâmetro é conjugado de um outro quando é paralelo às tangentes nos extremos do outro diâmetro. O diâmetro conjugado bisseta todas as cordas paralelas ao outro diâmetro. Os dois diâmetros conjugados são suficientes para definir a curva cónica.
[4] http://www.fontlab.com/font-editor/fontlab-studio/

BIBLIOGRAFIA

APOLLONIUS OF PERGA – **Treatise on conic sections**: **edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of de subject by T. L. HEATH, M. A.**. Cambridge: The University Press, 1896.

BONIFÁCIO, Joaquim – Determinação gráfica da parábola conhecidos dois pontos da curva e a tangente no vértice (exemplo prático de geometria aplicada ao design). Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº2, Jan. (2009) art. 32. [http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/32 acedido em 20/12/2009].

COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto.]

COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio; SILVA, Fernando Moreira da; MURTINHO, Vítor Bairrada – Os traçados das cónicas: Aplicações práticas no design, arquitetura e áreas afins. Geometrias' 13. Porto: APROGED, 2013. [Boletim da APROGED – Publicação das comunicações do XII Encontro da APROGED, 6 e 7 de Abril de 2013, Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto]

CUNHA, Luís Veiga da – **Desenho Técnico**. 5ª ed.. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

FARIN, Gerald – **NURBS from projective geometry to practical use**. Natick, Massachusetts: A K Peters, 1995.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics**. Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X [obra completa].

SHIKIN, Eugene V. – **Handbook and atlas of curves**. New York: CRC Press, 1995.

SHIKIN, Eugene V. y PLIS, Alexander I. – **Handbook on SPlines for the user**. New York: CRC Press, 1995.