

Ricardo Jorge Carvalho Rosado

Um Universo Fluido:  
Aplicação de Alguns Integrais Termodinâmicos  
às Equações de Friedmann



Departamento de Física  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade de Coimbra

(2011)

Um Universo Fluido:  
Aplicação de Alguns Integrais Termodinâmicos  
às Equações de Friedmann

Autor: Ricardo J. C. Rosado

Orientador: A. H. Blin

Tese de Mestrado em Física de Partículas  
Com vertente de Cosmologia Teórica  
Submetida à Faculdade de Ciências e Tecnologia  
da Universidade de Coimbra

(2011)

À minha mãe que desejou que eu chegasse a onde cheguei.

Agradeço ao meu orientador, Alex H. Blin, pelo acompanhamento  
dado neste trabalho.

Agradeço aos meus amigos Ricardo Cabrita e Paulo Dias, sem os  
quais não poderia ter a dissertação bem escrita

Agradeço também aos meus amigos e colegas pelos comentários e  
incentivos dados, que me permitiram realizar o trabalho.

Finalmente gostaria de agradecer aos meus tios, primos e avós, que  
me deram o suporte necessário durante estes anos mais importantes.

## Índice

Resumo e Abstract.....	4
Introdução.....	5
Capítulo 1: Da Relatividade Restrita.....	7
Capítulo 2: Da Relatividade Geral.....	19
Capítulo 3: Da Cosmologia.....	29
Capítulo 4: Da Termodinâmica.....	39
Capítulo 5: Simulação e Resultados.....	51
Conclusões.....	65
Bibliografia.....	67
Anexo.....	69

Este trabalho incide sobre as propriedades relativísticas e termodinâmicas da matéria de modo a se obter dados para universos de fluidos em contraste com universos de poeira. Com o auxílio de uma simulação em *python*, é estudado o comportamento destes universos, dando especial atenção às consequências das propriedades fluidas da matéria negra fria.

This paper focuses on the relativistic and thermodynamic properties of matter in order to obtain data for fluid universes as opposed to dust universes. With the help of a simulation in *python*, we study the behavior of these universes, giving special attention to the consequences of the fluid properties of cold dark matter.

# Introdução

O trabalho descrito neste texto baseia-se em conceitos ao alcance de qualquer um com um conhecimento simples de matemática e física.

No Universo existem várias entidades, como a matéria, a radiação e energia negra, cada uma com características diferentes e cada uma interferindo na evolução do Universo de maneira diferente.

A matéria negra, teorizada em 1934, tem sido uma das áreas mais estudadas em Relatividade Geral. Recentemente, com o auxílio da teoria da Supersimetria, foi postulada o que poderá ser a partícula de matéria negra. Os valores de massa desta partícula ainda não são conhecidos com precisão. Apesar disso, conhecem-se os limites da massa desta partícula.

O Universo é uniforme em larga escala, portanto, este trabalho, baseou-se num modelo em que cada uma destas entidades se comporta como um fluido uniforme. Um gás fluido difere de um gás de poeira pela presença de uma pressão, que interfere com as equações de Friedmann. Esta pressão deve ser calculada através de um conjunto de equações da física estatística.

A massa das partículas de um gás interfere com as propriedades termodinâmicas deste, como a pressão, que, por sua vez, interfere com a evolução do universo a larga escala, cujas consequências serão estudadas neste trabalho.

O primeiro capítulo descreve algumas bases da Relatividade Restrita e um pouco do formalismo usado.

No segundo capítulo, descreve-se um pequeno resumo da Relatividade Geral e uma visão simples de como chegar às equações diferenciais desta.

O terceiro capítulo é reservado à aplicação dessas equações diferenciais ao universo e algumas das soluções obtidas para um universo Homogéneo e Isotrópico a grande e pequena escala.

Enquanto que os três capítulos anteriores se restringem à área da Cosmologia, o quarto capítulo descreve equações da termodinâmica, ou física estatística, para gases, que permitirão obter as grandezas necessárias para as equações obtidas no capítulo três.

O quinto capítulo descreve o trabalho realizado na simulação a partir dos dados obtidos pela WMAP e apresenta as respectivas conclusões.



# Capítulo 1

## Da Relatividade Restrita

No início do século XX dois grandes pilares foram erguidos para suportarem a Física. Um dos quais, a mecânica quântica, tem evoluído desde então, tendo ganho muitos adeptos e novos ramos. Desde a Física de Matéria Condensada, à Bariogénese, à (QED) Electrodinâmica Quântica, todas elas se ligam a esta teoria base. Conquistou o chamado “Modelo Padrão” e ainda hoje é uma teoria extremamente promissora, tendo em conta que é uma teoria com o historial de apenas um século.

A Relatividade, por outro lado, tem estado na ciência há cerca de 500 anos. Desenvolvida inicialmente por Galileu, a teoria também evoluiu bastante desde esse tempo, ganhando um lugar especial na Física.

A Relatividade Galileana mantinha o princípio de que o espaço e o tempo seriam absolutos, ou seja, as medidas de tempos e comprimentos seriam as mesmas independentemente do referencial [1]:

$$t' = t \quad (1.1a)$$

$$x' = x - v_x t \quad (1.1b)$$

$$y' = y - v_y t \quad (1.1c)$$

$$z' = z - v_z t \quad (1.1d)$$

“*O espaço e o tempo são a tela para as leis da Física*”. Pode parecer uma frase um pouco poética, no entanto, é uma frase muito mais literal que o que aparenta, como se verá mais tarde.

A nova relatividade, a Relatividade Restrita, começou após o aparecimento do Electromagnetismo unificado de Maxwell.

As equações de Maxwell, para qualquer referencial [2,3]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2d)$$

Rescrevendo as equações para o vácuo ( $\rho=J=0$ ) permanecem apenas as componentes induzidas, ou transversas. Usando a identidade [3,16]  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  adquirem-se as equações [2,3]:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.3a)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.3b)$$

Comparando estas equações com a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi \quad (1.4)$$

Conclui-se facilmente que  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}^{-1} = 299\,792\,458 \text{ m/s} = c$  é o valor da velocidade de propagação de uma onda electromagnética (EM) no vácuo, tendo mais tarde se comprovado que a luz é uma onda EM.

O problema que surge destas equações é que estas simplesmente não têm qualquer ponto de referência. A partir deste momento na história a Física começou a fracturar-se. De um lado, a Mecânica Clássica, defendendo o absolutismo do espaço e do tempo, previa que a luz teria uma velocidade  $c$  para o referencial em que ela seria produzida, ganhando ou perdendo velocidade em outros referenciais. E um pequeno fragmento da Física, o Electromagnetismo, que afirmava que a velocidade da luz era apenas  $c$ . Modelos foram propostos, tentando validar a Mecânica Clássica, pois parecia muito contra-intuitivo e contra a relatividade de Galileu (1.1) que qualquer que fosse o referencial a velocidade da luz seria sempre uma constante.

Surpreendentemente, o Electromagnetismo passou os testes, e partindo do simples princípio de que a velocidade da luz no vácuo é  $c$ , meio século depois do

Electromagnetismo ter surgido, a perspectiva do espaço e do tempo absolutos seria quebrada.

Portanto, com estas características do EM, é possível definir dois princípios simples que serão as bases da nova mecânica [1]:

- A velocidade da Luz é a mesma para qualquer observador
- As Leis da Física são iguais em todos os referenciais inerciais.

Com o aparecimento da Relatividade Restrita surge o conceito de espaço-tempo, uma única entidade cujas propriedades abriram um leque de efeitos novos. Esta teoria enrola o espaço com o tempo, com uma mudança de referencial o espaço e o tempo rodam entre si (de forma hiperbólica em contraste a uma forma esférica) [1]:

$$\begin{aligned}
 t' &= \gamma \left( t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} \right) \\
 x' &= x - \gamma v_x t + \frac{x v_x}{v^2} (\gamma - 1) (v_x + v_y + v_z) \\
 y' &= y - \gamma v_y t + \frac{x v_y}{v^2} (\gamma - 1) (v_x + v_y + v_z) \\
 z' &= z - \gamma v_z t + \frac{x v_z}{v^2} (\gamma - 1) (v_x + v_y + v_z)
 \end{aligned}
 ; \text{ com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1.5)$$

O referencial pode ser reorientado ficando:

$$\begin{aligned}
 t' &= \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \\
 x' &= \gamma (x - vt) \\
 y' &= y \\
 z' &= z
 \end{aligned}
 ; \text{ com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1.6)$$

Mais propriamente, e como que num espírito de união, a grandeza do tempo fica descrita em unidades de espaço como o produto  $ct$ .

É possível utilizar as novas grandezas (1.5) para criar o que é designado por um invariante, uma grandeza que não se altera perante uma mudança de referencial. A primeira é:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.7a)$$

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (1.7b)$$

$$s^2 = s'^2 \quad (1.8)$$

Este invariante, como muitos outros na Relatividade Restrita tem uma forma hiperbólica em contraste com uma forma esférica ( $s^2 = (ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ ). Caso fosse esférica, esta grandeza poderia ser descrita como o quadrado da norma de um vector:

$$s^2 = \vec{s} \cdot \vec{s}; \text{ com } \vec{s} = (ct, x, y, z) \quad (1.9)$$

No entanto, é possível definir o vector, ou mais correctamente, o tetravector posição  $\vec{x}$ :

$$\vec{x} = x^\mu = (ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z) = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

É possível replicar o invariante (1.7) se considerar o produto do tetravector  $\vec{x}$  com um tetravector  $\vec{x}'$ :

$$\vec{x}' = x'_\mu = (ct, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z) = \begin{bmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Usando a notação de Einstein, que subentende um somatório num determinado índice, quando, num produto de dois factores, estes têm esse mesmo índice em comum. Designa-se por contracção de índices, já que a grandeza resultante não os contém:

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' = \sum_{\mu=0}^4 x^\mu x'_\mu \equiv x^\mu x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \quad (1.12)$$

Grandezas vectoriais, como o primeiro tetravector (1.10), caracterizam-se por ter índices contravariantes, enquanto que as grandezas como o segundo tetravector (1.11) se caracterizam por ter índices covariantes.

É possível converter covariantes em contravariantes e vice-versa através da matriz de métrica da seguinte forma [1]:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

No entanto, se as coordenadas não forem cartesianas, a matriz de métrica adquire uma forma diferente. Por exemplo, para coordenadas esféricas, muito usadas em Relatividade Geral, e cujos vectores são:

$$\vec{x} = x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ r \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

A matriz de métrica adquire a forma:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2(\sin \theta)^2 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Portanto, é possível escrever o invariante (1.7) juntando (1.10) e (1.14):

$$s^2 = x_\nu x^\nu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.17)$$

Esta quantidade  $s$  (ou  $\sigma$ ) é, normalmente, designada por tempo próprio. O tempo próprio é o tempo medido no próprio referencial, ou seja no ponto 0 espacial, pegando em (1.7) obtém-se:

$$s^2 = s'^2 = (ct')^2 = (c\sigma)^2; \text{ com } x' = y' = z' = 0 \quad (1.18)$$

Enquanto que, para um referencial externo, tem-se:

$$(c\sigma)^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \gamma^{-2}(ct)^2; \text{ com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1.19)$$

Deve-se, ainda, considerar um diferencial de tempo próprio para adquirir as grandezas seguintes, mais uma vez usando (1.7):

$$c^2 d\sigma^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.20)$$

Quando o valor é positivo, designa-se por uma variação ou intervalo do tipo tempo. Quando a diferença entre dois pontos, ou eventos, é do tipo tempo, estes dois eventos podem estar dentro da mesma linha de causalidade, ou seja, um dos eventos pode ser causa ou efeito do outro. Pode ainda afirmar-se que um deles se situa dentro do cone de luz do outro, já que este limita as linhas de causalidade.

Quando o valor do tempo próprio é negativo, o intervalo designa-se por ser do tipo espaço, sendo que dois eventos separados por um intervalo do tipo espaço não podem ser causa-efeito um do outro.

Finalmente, quando o valor do intervalo é 0, designa-se por ser um intervalo do tipo nulo, ou luz, pois um dos eventos assenta sobre o cone de luz do outro.

O vector seguinte é o vector de velocidade, este tetravector calcula-se diferenciando o tetravector posição pelo tempo próprio [1]:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\sigma} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \quad (1.21)$$

$$u^\mu = (\gamma ct, \gamma \vec{v}) = \gamma(c, v^x, v^y, v^z) \quad (1.22)$$

A norma hiperbólica deste tetravector, daqui em diante designada por norma, é também um invariante:

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{(c^2 - v^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 \quad (1.23)$$

Continuando é possível criar o tetravector aceleração a partir do tetravector velocidade [1]:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\sigma} \quad (1.24)$$

Finalmente um dos invariantes mais importantes é a norma do tetravector momento [1]:

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left( \frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z \right) \quad (1.25)$$

$$p^\mu p_\mu = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = m^2 c^2 \quad (1.26)$$

Relatividade implica que é possível mudar de referencial sem que as suas grandezas invariantes se alterem. Estas mudanças são atingidas matematicamente através de matrizes de Lorentz [1], usando as transformações (1.5) que representam “boosts” (1.28), e a estas podem ser aplicadas rotações para obter matrizes de Lorentz:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.27)$$

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v^x}{c} & -\gamma \frac{v^y}{c} & -\gamma \frac{v^z}{c} \\ -\gamma \frac{v^x}{c} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v^{x2}}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v^x v^y}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v^x v^z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v^y}{c} & (\gamma - 1) \frac{v^x v^y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v^{y2}}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v^y v^z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v^z}{c} & (\gamma - 1) \frac{v^x v^z}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v^y v^z}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v^{z2}}{v^2} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Convém notar que, este tipo de transformações, é sempre feita entre dois referenciais inerciais. Uma transformação dupla, ou seja, uma mudança do referencial A para o B seguida de outra mudança de referencial do B para o C não equivale necessariamente a uma mudança de referencial de A para C. É preciso ter em atenção que a adição de velocidades não é aplicada neste tipo de operações:

$$L^C_A(v_1 + v_2) \neq L^C_B(v_1)L^B_A(v_2) \quad (1.29)$$

É importante ainda conhecer um último tetravector, o tetravector gradiente, que é definido como:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{c\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{c\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Estes tetravectores permitem o aparecimento de propriedades interessantes. Definindo um tetravector densidade (de matéria ou carga), com  $J^i$  sendo as componentes do vector fluxo (de matéria ou corrente):

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) = \begin{bmatrix} c\rho \\ J^x \\ J^y \\ J^z \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Aplicando o gradiente relativístico a este tetravector e igualando-o a 0, adquire-se a equação de continuidade:

$$\partial^\mu J_\mu = \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \quad (1.33)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (1.34)$$

Em relatividade Geral, muitas vezes esta derivada aparece com uma notação especial, com uma vírgula em índice. Assim, rescrevendo (1.33) nessa notação, tem-se:

$$J^\mu{}_{,\mu} = 0$$

O EM, que despoletou a pesquisa pela Relatividade Restrita é ele próprio intrinsecamente relativístico. Assim, é possível construir um tensor EM, cujo produto interno é um invariante. Neste caso, não se tratará de um tetravector, mas de uma matriz, ou tensor de 2ª ordem. O Tensor de Faraday deve conter as 6 componentes dos Campos Eléctrico e Magnético. No entanto, para construir este tensor, inicia-se de uma forma mais simples. Os campos Eléctrico e Magnético são derivados de potenciais (o potencial eléctrico e potencial vector), que podem ser encontrados com as equações (1.2) [2,3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot V = \vec{E} \quad (1.35a)$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (1.35b)$$

Com um escalar e um vector de natureza semelhante, tal com o espaço e o tempo, a energia e o momento, organiza-se o tetravector potencial:

$$A^\mu = (cV, \vec{A}) = (cV, A^x, A^y, A^z) \quad (1.36)$$

Como os potenciais são definidos a menos de uma constante, um produto interno de (1.31) com (1.36) pode ser calibrado para qualquer valor à escolha do leitor:

$$\partial_\mu A^\mu = ? \quad (1.37)$$

Por exemplo, designa-se por calibre de Lorentz quando este último é 0.

Contudo, definindo o produto de modo a não contrair os índices o resultado é o Tensor de Faraday ou tensor EM [2, 3]:

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu} \quad (1.38)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E^x}{c} & -\frac{E^y}{c} & -\frac{E^z}{c} \\ \frac{E^x}{c} & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{E^y}{c} & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{E^z}{c} & -B^y & B^x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Ou:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ -\frac{E^x}{c} & 0 & -B^z & B^y \\ -\frac{E^y}{c} & B^z & 0 & -B^x \\ -\frac{E^z}{c} & -B^y & B^x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Como se pode ver, o tensor de Faraday, é um tensor anti-simétrico  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

O produto interno deste tensor é também um invariante:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2 \left( B^2 - \left( \frac{E}{c} \right)^2 \right) \quad (1.41)$$

Com os campos sob a forma de tensor, é possível escrever duas das equações de Maxwell, nomeadamente a geração de campos Eléctricos e a indução de campos Magnéticos, da seguinte forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (1.42)$$

Para escrever as equações que restam pode-se usar a seguinte fórmula:

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (1.43)$$

Todavia com esta forma, pode ser muito complicado obter-se as equações. Uma forma mais simples implica apenas que se defina um tensor, cujas componentes Eléctricas são trocadas pelas Magnéticas, e afirmar que não existem mono-pólos magnéticos. Assim, as equações restantes adquirem a forma de (1.42).

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(\vec{B}, \vec{E}) = F^{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (1.44)$$

$$J_m^\mu = 0 \quad (1.45)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.46)$$

O leitor poderá perguntar o porquê de se dar tanta importância ao EM em relatividade restrita. Muitos dos efeitos da relatividade restrita não são visíveis no quotidiano. Até a cerca de 1% da velocidade da luz os efeitos são praticamente desprezáveis, e mesmo assim não existem objectos no quotidiano que se movam a  $10,8 \times 10^6 \text{ km/h}$ .

No entanto, é possível verificar que os efeitos relativísticos convertem Campos Eléctricos em Campos Magnéticos. Supondo um Campo Eléctrico de uma carga no seu referencial, ou seja, num referencial estacionário, ao observar essa carga em movimento num referencial externo, verifica-se o aparecimento de um Campo Magnético. Pode-se verificar que aplicando um conjunto de transformadas de Lorentz a um Tensor de Faraday puramente Eléctrico neste surgem Campos Magnéticos. Aplicam-se duas transformadas pois trata-se de um tensor de segunda ordem:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E^x}{c} & -\frac{E^y}{c} & -\frac{E^z}{c} \\ \frac{E^x}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^y}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^z}{c} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

$$F^{\alpha\beta} = F^{\mu\nu} L_{\mu}^{\alpha} L_{\nu}^{\beta} \quad (1.48)$$

Estes efeitos são passíveis de ser interpretados como sendo o Magnetismo uma correcção relativística da Electrodinâmica.

## Capítulo 2

### Da Relatividade Geral

A Relatividade Geral, apesar do nome, não é tão simples como generalizar a Relatividade Restrita (RR). De facto, a Relatividade Geral (RG) generaliza a RR para admitir referenciais acelerados. Ao fazer-lo a força de gravidade torna-se apenas uma força inercial (semelhante à força centrífuga ou de Coriolis).

Mas comecemos pelo início. No fim do séc. XVII, Isaac Newton unificou as forças da queda, estudadas anteriormente por Galileu, com a sua lei dos corpos em queda, e as forças que mantinham os astros em movimento pelo céu, estudados por muitos outros curiosos e culminado com as leis de Kepler.

A lei da Atracção Universal foi, para a época, um avanço espantoso na compreensão da natureza, esta lei obtinha os resultados das leis de Kepler quando aplicado aos astros. Quando aplicado a uma escala mais pequena, como a humana, adquiria a forma da lei dos corpos em queda de Galileu:

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (2.1)$$

A própria força é coerente com a 3ª lei de Newton. Analisando a equação é fácil ver que um corpo que atraia um segundo corpo irá sofrer uma força de atracção igual mas em sentido oposto. Na RG isto surge de forma menos directa.

A RG inicia-se com o tensor de métrica (1.13) pois este representa a forma do espaço-tempo e portanto de extensões entre dois pontos deste.

O tensor de métrica ainda se define como  $g^{\mu\nu}$ , mas o tensor de Minkowski, cujos valores são (1.13), define-se como  $\eta^{\mu\nu}$ , e qualquer alteração  $h^{\mu\nu}$  na métrica pode ser descrita como [4]:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Quando o tensor de métrica, ou apenas métrica, tem a forma (1.13), o tensor designa-se por ter a métrica de Minkowski e o espaço é Euclidiano. Isto é, um espaço(-tempo) Euclidiano ou plano, obedece a todos os Axiomas ou Postulados de Euclides.

Estes postulados permitem o chamado paralelismo de Euclides:

Para uma recta, dado um ponto, é possível definir uma e uma só recta que, passando por esse ponto com a mesma direcção que a recta inicial seja paralela à recta inicial.

Este paralelismo implica que, para duas rectas paralelas, a distância entre as estas não varia ao longo das rectas. Implica também que a soma dos ângulos internos de um triângulo seja  $180^\circ$ .

Contudo, quando a geometria não é plana, este paralelismo já não se verifica.

Num espaço de curvatura positiva, como numa superfície esférica, duas rectas não colineares, com a mesma direcção, convergem num ponto com um ângulo diferente de 0, a soma interna dos ângulos de um triângulo é superior a  $180^\circ$  e a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro é inferior a  $\pi$ . Por outro lado, num espaço de curvatura negativa ou hiperbólica, duas rectas não colineares, com a mesma direcção, divergem, a soma interna dos ângulos de um triângulo é inferior a  $180^\circ$  e a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro é superior a  $\pi$ .

Para este tipo de espaços, não faz muito sentido falar em rectas, a distância mínima entre dois pontos deixa de ser uma recta para ser denominada por geodésica. Uma geodésica, é a linha mais curta entre dois pontos num espaço curvo, mesmo que esse espaço tenha curvatura 0.

É possível calcular as equações de uma geodésica a partir de um princípio variacional.

A linha mundo de uma partícula do tipo tempo entre dois pontos minimiza o tempo próprio entre eles.

O tempo próprio entre dois pontos é dado por [4]:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (2.3)$$

Descrevendo parametricamente as coordenadas  $x^\mu$  como função de uma variável  $\gamma$  que varie entre 0 no ponto A e 1 no ponto B o tempo próprio entre os dois pontos é:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\gamma \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\gamma} \frac{dx^\beta}{d\gamma}} \quad (2.4)$$

As linhas mundo que minimizam o tempo próprio para esta equação são as que satisfazem as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{d\gamma} \left( \frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\gamma)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad (2.5)$$

$$L \left( \frac{dx^\alpha}{d\gamma}, x^\alpha \right) = \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\gamma} \frac{dx^\beta}{d\gamma}} \quad (2.6)$$

Resolvendo o Lagrangiano obtêm-se as equações do movimento, ou equação da Geodésica:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \text{ com } \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \text{ e } \ddot{x}^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \quad (2.7)$$

Ou:

$$\dot{u}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0 \quad (2.8)$$

Onde os coeficientes  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , chamados de símbolos de Christoffel [4,5,6], são construídos a partir da métrica e das suas primeiras derivadas.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\alpha\gamma}}{2} \left( \frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \right) \quad (2.9)$$

Estas entidades têm propriedades de simetria:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \quad (2.10)$$

Observando as equações (2.7) ou (2.8), é possível ver o aparecimento de acelerações devido a componentes de velocidade, semelhante a acelerações devido a forças de inércia.

Isto pode ser interpretado como o princípio de equivalência, que afirma que não é possível diferenciar um referencial acelerado de um referencial gravítico.

Estas são as equações que determinam o movimento dos corpos devido a espaços-tempo curvos. São estas as equações que mostram os efeitos da gravidade sobre os corpos. Os corpos movem-se sobre geodésicas pelo espaço-tempo.

No entanto, para encontrar as equações que originam a curvatura do espaço-tempo, é necessário continuar a desenvolver as equações.

Se se imaginar dois corpos em geodésicas diferentes, entre elas existe uma “distância” que se vai alterando ao longo das linhas.

Para se saber o quanto esta distância se altera é preciso definir uma derivada covariante com uma geodésica.

Quando se faz uma derivada parcial de uma grandeza, em ordem a uma variável, deve-se ter em atenção à forma como esta variável varia de ponto para ponto. Como se está a lidar com um espaço-tempo que não é plano, a derivada ou gradiente ao longo de uma geodésica varia, não só porque os valores das grandezas são diferentes de ponto para ponto mas também porque próprio espaço-tempo, a base do gradiente, é diferente de ponto para ponto.

Define-se então a derivada covariante de um vector  $v$  na base de coordenadas  $\alpha$  como [4]:

$$\nabla_{\alpha} v^{\beta} = \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\theta}^{\beta} v^{\theta} \quad (2.11a)$$

$$\nabla_{\alpha} v_{\beta} = \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} v_{\theta} \quad (2.11b)$$

No caso de se derivar um escalar, não aparece uma componente com  $\Gamma_{\alpha\theta}^{\beta}$ .

Fazendo a derivada covariante de um tensor obtém-se [4]:

$$\nabla_{\alpha} v^{\beta}_{\gamma} = \frac{\partial v^{\beta}_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\theta}^{\beta} v^{\theta}_{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\theta} v^{\beta}_{\theta} \quad (2.12)$$

Pode-se ver que o vector velocidade  $u^{\alpha}$  tangente a uma geodésica obedece à equação:

$$\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = 0 \quad (2.13)$$

Definindo agora um vector  $w^{\beta}$  perpendicular a  $u^{\alpha}$  de uma geodésica de tal modo que:

$$w \cdot u = w^{\beta} g_{\beta\alpha} u^{\alpha} = 0 \quad (2.14)$$

Pode-se definir a aceleração de  $w$  com a equação do desvio da geodésica [4]:

$$(\nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} w_{\delta})^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma} u^{\beta} w^{\delta} u^{\gamma} \quad (2.15)$$

O tensor  $R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma}$ , [4,5,6] conhecido como o tensor de Riemann ou curvatura de Riemann, é descrito pela equação:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\alpha}_{\delta\theta} \Gamma^{\theta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\theta} \Gamma^{\theta}_{\beta\delta} \quad (2.16)$$

Pontualmente, o tensor de Riemann pode aparecer completamente contravariante [4]:

$$g_{\alpha\theta} R^{\theta}{}_{\beta\delta\gamma} = R_{\alpha\beta\delta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right) \quad (2.17)$$

Um tensor de quarta ordem e dimensão 4 terá  $4^4=256$  componentes, no entanto, devido a certas propriedades simétricas e anti-simétricas do tensor, estas são reduzidas a 20:

$$R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\delta\gamma} \quad (2.18a)$$

$$R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.18b)$$

$$R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\delta\gamma\alpha\beta} \quad (2.18c)$$

$$R_{\alpha\beta\delta\gamma} + R_{\alpha\delta\gamma\beta} + R_{\alpha\gamma\beta\delta} = 0 \quad (2.18d)$$

Com este tensor é possível agora determinar quão curvo é o espaço-tempo.

O tensor de Ricci [4], ou tensor de curvatura, adquire-se pela contracção do primeiro e terceiro índices do tensor de Riemann, obtendo-se:

$$R_{\beta\gamma} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma} \quad (2.19)$$

Este tensor contém as características da curvatura do espaço-tempo.

Agora com este tensor, é possível, a partir de um princípio variacional, chegar às equações de campo de Einstein. No entanto, num Lagrangiano não podem existir grandezas tensoriais isoladas. Para este caso, pode-se obter o escalar de curvatura, ou escalar de Ricci, que se obtém contraindo mais uma vez os índices do último tensor:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

Apesar dos vários tensores aqui referidos, assume-se que o Lagrangiano dependa apenas de uma métrica  $g^{\mu\nu}$  e das suas derivadas:

$$S = \int \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \partial_{\alpha} g^{\mu\nu}, \partial_{\alpha} \partial_{\beta} g^{\mu\nu}, \dots) d^4x \quad (2.21)$$

O Lagrangiano de Einstein é  $\sqrt{-g}R$  [6], onde o escalar  $\sqrt{-g}$  [6] está relacionado com as variáveis de integração e equivale a  $\sqrt{-|g^{\mu\nu}|}$ .

É possível verificar que este Lagrangiano contém os valores da métrica e apenas os valores das suas primeiras e segundas derivadas, já que o tensor de Riemann contém as segundas derivadas da métrica e este não é mais derivado.

Portanto, com a acção da seguinte forma [6]:

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.22)$$

E escrevendo as equações de Euler-Lagrange para este Lagrangiano, tendo em atenção que este contém uma segunda derivada da métrica, obtém-se [6]:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}, \alpha} \right)_{,\alpha} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}, \alpha\beta} \right)_{,\alpha\beta} \quad (2.23)$$

Mas voltando à acção, o princípio da acção mínima ou estacionária diz-nos que, para uma variação local da métrica, a variação da acção é 0. Considerando que a contribuição dos extremos é 0 [6], chega-se a:

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x \Leftrightarrow \quad (2.24)$$

$$0 = \int \delta(\sqrt{-g} R) d^4x \Leftrightarrow \quad (2.25)$$

O escalar  $\sqrt{-g}$ , que estaria acoplado a  $d^4x$ , por depender de  $g^{\mu\nu}$ , também é derivado:

$$0 = \int \delta(\sqrt{-g})R + \delta(R)\sqrt{-g} d^4x \Leftrightarrow \quad (2.26)$$

$$0 = \int \left( \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} R + \frac{\delta(R)}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \Leftrightarrow \quad (2.27)$$

Para o escalar de R usa-se a relação (2.20), enquanto que para o escalar da métrica é tratado como um diferencial normal  $\delta(-g)^{1/2} = -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2} \delta g$  [6]:

$$0 = \int \left( -\frac{\delta(g)}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{R}{2\sqrt{-g}} + \frac{\delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \Leftrightarrow \quad (2.28)$$

Para o determinante g usa-se a fórmula de Jacobi [6] e conclui-se que  $\delta(g) = g g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu})$  ou  $\delta(g) = -g g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})$ :

$$0 = \int \left( -\frac{g g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{R}{2\sqrt{-g}} + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \Leftrightarrow \quad (2.29)$$

$$0 = \int \left( g g_{\mu\nu} \frac{R}{2\sqrt{-g}} + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \Leftrightarrow \quad (2.30)$$

$$0 = \int \sqrt{-g} \left( -g_{\mu\nu} \frac{R}{2} + R_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \Leftrightarrow \quad (2.31)$$

Obtém-se assim um tensor de segunda ordem conhecido como tensor de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \frac{R}{2} = G_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Pode-se ainda constatar que usando o diferencial  $\delta g_{\mu\nu}$ , em vez de  $\delta g^{\mu\nu}$ , se obtém:

$$R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \frac{R}{2} = G^{\mu\nu} \quad (2.33)$$

Verifica-se então que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} G^{\mu\nu} \quad (2.34a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \quad (2.34a)$$

Também se pode verificar que:

$$\nabla_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.35)$$

Então, a conclusão é que as equações de movimento são:

$$G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.36)$$

No entanto este resultado está errado, ou melhor, incompleto.

O tensor contém certas características das dobras do espaço-tempo, mas afirma que estas são 0. Isto apenas é verdade no vácuo. O Lagrangiano considerado admitia apenas que a acção se devia às dobras do espaço-tempo. Todavia, os efeitos da matéria (e energia) não foram considerados.

Portanto, o novo Lagrangiano deve conter também a contribuição da matéria  $\mathcal{L}_M$  para além da contribuição do espaço-tempo  $\mathcal{L}_G$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + k\mathcal{L}_M \quad (2.37)$$

O Lagrangiano da contribuição de matéria é muito complicado, não só de se definir, mas também de desenvolver na acção, por isso mesmo, este não será definido explicitamente aqui. Ainda assim, usando uma relação semelhante a (2.34) [6] tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g}G^{\mu\nu} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}T^{\mu\nu} \end{cases} \quad (2.38)$$

Aqui, o tensor de segunda ordem  $T^{\mu\nu}$  é o tensor Energia-Momento.

Este tensor contém muitas características da matéria. Antes de mais, é um tensor simétrico, o que quer dizer que  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ ; de seguida as componentes deste tensor têm todas unidades de pressão ou densidade de energia, o que fará ainda mais sentido quando se deparando com a componente 00, que é efectivamente a densidade de energia (relativística)  $T^{00} = \rho$ . As outras componentes da diagonal são as componentes de pressão ou deformação  $T^{11} = P_x$ ,  $T^{22} = P_y$ ,  $T^{33} = P_z$ . As componentes  $T^{0i} \equiv T^{i0}$ , com  $i = 1,2,3$  representam a densidade de momento ou fluxo de energia. Finalmente, as componentes que sobram representam a torção ou a rotação.

O tensor energia-momento pode ser escrito, na mecânica de campos [15] como:

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \quad (2.39)$$

Onde  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangiana do conjunto de campos e interacções a serem analisadas.

Em cosmologia o tensor tem a seguinte forma, que será usada mais tarde:

$$T^{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta (\rho + P) - g^{\alpha\beta} P \quad (2.40)$$

Onde  $\rho$  é a densidade energética de matéria (e radiação) e  $P$  a pressão.

Tendo agora o tensor Energia-Momento as equações do movimento adquirem a seguinte forma:

$$G^{\mu\nu} = 2kT^{\mu\nu} \quad (2.41)$$

Com  $k = \frac{4\pi G}{c^4}$  as equações finalmente tornam-se:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (2.42)$$

Estas são as equações de campo de Einstein. É nestas equações que a Gravidade é gerada, pois são estas que mostram os efeitos da matéria no espaço-tempo.

# Capítulo 3

## Da Cosmologia

Em 1917, dois anos após a formulação da Relatividade Geral, Albert Einstein, tendo verificado que as suas equações (2.40) previam um universo dinâmico, e convencido que este seria estático, acrescentou uma componente que seria coerente com os postulados da RG, de modo a manter o universo estável, denominada de constante Cosmológica [5]:

$$G^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

No mesmo ano, Willem de Sitter aplicou as equações de campo de Einstein ao Universo, extraindo toda a matéria contida nele e verificou que, mesmo sem matéria, o universo seria dinâmico.

$$G^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Lambda = 0 \quad (3.2)$$

No entanto, só em 1922 é que, contando com as contribuições de vários físicos, estas equações foram utilizadas para descrever o universo.

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) ou métrica de Robertson-Walker é consistente com um universo Homogêneo e Isotrópico, o que é exactamente o necessário para o trabalho aqui desenvolvido. Esta métrica [5,7] costuma aparecer em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2(\theta) \quad (3.3a)$$

Ou reescrita na forma matricial:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q(t)r^2(\sin\theta)^2 \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

Para além do que já é conhecido, aparecem nesta métrica dois parâmetros novos. O primeiro  $Q(t)$  é chamado factor de escala e é o parâmetro que está relacionado com o tamanho do universo. O segundo é  $k$  e é o parâmetro de curvatura do universo.

É possível ver que para um valor de  $k = 0$  a métrica torna-se a métrica de Minkowski, e portanto o espaço-tempo torna-se plano.

Para um valor de  $k = 1$  o que se verifica é que o universo torna-se esférico, ou elíptico, e fechado:

$$ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \cdot \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.4a)$$

Substituindo  $r$  por  $\sin(\chi)$ , obtém-se:

$$ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \cdot \left( \frac{\cos^2(\chi)d\chi^2}{1-\sin^2(\chi)} + \sin^2(\chi)d\Omega^2 \right) \Leftrightarrow \quad (3.4b)$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \cdot (d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega^2) \quad (3.4c)$$

Tendo como base estas equações, nota-se que o universo é curvo e fechado, pois de forma análoga a  $d\Omega^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2(\theta)$ , duas coordenadas que representam uma superfície esférica, tem-se  $d\chi^2 + d\Omega^2 \sin^2(\chi)$  o que implica que a coordenada  $\chi$  tem um carácter curvilíneo e forma o equivalente a uma superfície esférica tridimensional.

Para além disso, para um valor de  $k = -1$  é fácil notar que o espaço-tempo torna-se hiperbólico, fazendo uma transformação semelhante:

$$ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \cdot \left( \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.5a)$$

$$ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \cdot \left( \frac{\cosh^2(\chi)d\chi^2}{1+\sinh^2(\chi)} + \sinh^2(\chi)d\Omega^2 \right) \Leftrightarrow \quad (3.5b)$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = (cdt)^2 - Q(t) \cdot (d\chi^2 + \sinh^2(\chi)d\Omega^2) \quad (3.5c)$$

Usando esta métrica e desenvolvendo-a usando as equações (2.7), (2.17), (2.19), (2.20), obtendo um tensor de Einstein (2.33) e aplicando-o às equações de campo (2.42), o conjunto de equações obtidas são conhecidas como as equações de Friedmann.

Para cada uma das 16 componentes (10, pois o tensor de Einstein e de Energia-Momento são ambos simétricos) tem-se uma equação diferente. No entanto, usando-se uma aproximação de um fluido perfeito, não só não existe fluxo de energia, como também não existem componentes de rotação de matéria. Assim, apenas as componentes da diagonal são diferentes de 0. O tensor (2.40) é perfeito para estas equações, pois a larga escala as entidades do universo podem ser consideradas como fluidos perfeitos.

A componente 00 é a seguinte [7]:

$$\frac{\ddot{Q}}{Q} - \frac{c^2\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3c^4}(\rho + 3P) \quad (3.6)$$

A outras componentes da diagonal reduzem-se a [7]:

$$2\frac{\ddot{Q}}{Q} + \left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 + \frac{kc^2}{Q^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}P \quad (3.7)$$

Estas equações de 2ª ordem, estando acopladas, podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 + \frac{kc^2}{Q^2} + \frac{c^2\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho \quad (3.8)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{Q}}{Q}(\rho + P) \quad (3.9)$$

Estas são conhecidas como as equações de Friedmann ou Friedmann-Lemaître e são muito mais simples, pois são equações de 1ª ordem.

O valor  $\frac{\dot{Q}}{Q} = H$  é o parâmetro de Hubble e tem unidades de  $tempo^{-1}$ .

Com efeito, a primeira equação (3.8) descreve a evolução do universo enquanto que a segunda equação descreve a evolução das componentes, ou melhor, de cada entidade do universo:

$$\dot{\rho}_i = -3 \frac{\dot{Q}}{Q} (\rho_i + P_i) \quad (3.10)$$

As entidades mais conhecidas podem dividir-se em três tipos de comportamento: a radiação, a matéria não relativística e a energia negra. Apesar de existirem muito mais tipos de comportamento mais complexos, neste trabalho só serão considerados estes três e um comportamento de transição.

Enquanto que para um universo de poeira, em que não se consideram as interacções entre os constituintes das entidades, a única equação relevante é (3.8) e as entidades comportam-se de forma simples  $\rho \equiv \rho(Q)$ , para este caso, a equação (3.9) fica:

$$\dot{\rho}_i = -3 \frac{\dot{Q}}{Q} k_i \rho_i, \quad k_i = \text{constante} \quad (3.11)$$

No caso de um universo de fluidos, a equação (3.10) torna-se mais relevante para a evolução do universo.

Enquanto que o cálculo da densidade de cada entidade se obtém da própria equação (3.10), acoplada à equação (3.8), a pressão de cada entidade é calculada por um processo, que será clarificado no capítulo seguinte.

Mesmo sem se conhecer qual é o processo, é possível observar as consequências do comportamento de cada entidade na evolução do universo.

Começando pelo caso mais simples, a matéria não relativística tem um comportamento bastante intuitivo. Sabe-se que para uma determinada quantidade de gás (não relativístico) duplicado o volume desse mesmo gás a sua densidade passa para metade. Da mesma forma, ao duplicar o tamanho ou o factor de escala do contentor, dado que o volume octuplica, a densidade torna-se oito vezes menor. Assim, chega-se a uma simples lei (3.11) para este tipo de comportamento:

$$\rho_{mat} \propto Q^{-3} \quad (3.12)$$

Desta forma comportam-se tipicamente a matéria visível do universo, como prótons, electrões, neutrões etc., e a matéria negra fria.

Se em vez de um gás de matéria não relativística, este for constituído por radiação (matéria ultra-relativística), o comportamento é ligeiramente diferente. Com um gás de radiação, ao aumentar o factor de escala para o dobro, este gás também se espalha pelo espaço, diminuindo a densidade em oito. No entanto, deve-se considerar que, ao esticar o espaço, os comprimentos de onda da radiação também são esticados e a densidade (energética) desce em mais um factor de dois. Assim, a lei (3.11) para radiação torna-se:

$$\rho_{rad} \propto Q_V^{-3} \times Q_\lambda^{-1} = Q^{-4} \quad (3.13)$$

Assim se comporta a radiação de fundo cósmica, constituída por fotões e neutrinos.

Finalmente, a última entidade, a energia negra, pode ser considerada uma entidade fazendo apenas a seguinte modificação na equação (3.1):

$$G^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \Leftrightarrow G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\Lambda \quad (3.14)$$

E, dado que se comporta como uma constante:

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0 \quad (3.15)$$

Dado que a densidade total é a soma das densidades de cada entidade, a evolução do universo, descrita pela equação (3.8), é determinada pela entidade dominante e pela curvatura do universo.

Considerando que o universo é plano ( $k=0$ ), quando a entidade dominante é a matéria não relativística, a evolução do universo torna-se:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \left(\frac{\sigma}{Q^3}\right) \Leftrightarrow, \text{ com } \sigma = \text{const.} \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \frac{\sigma}{Q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}\sqrt{Q} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4}}\sigma \Leftrightarrow$$

$$Q = \left( \sqrt{\frac{6\pi G}{c^4}}\sigma t + Q_0^{3/2} \right)^{2/3} \quad (3.17)$$

Com um universo dominado pela radiação, obtém-se:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \left(\frac{\sigma}{Q^4}\right) \Leftrightarrow, \text{ com } \sigma = \text{const.} \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \frac{\sigma}{Q^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}Q = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4}}\sigma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q = \sqrt{2\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4}}\sigma t + Q_0^2} \quad (3.19)$$

Finalmente, para um universo dominado pela energia negra, o tipo de evolução verificado é:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\sigma \Leftrightarrow, \text{ com } \sigma = \text{const.} \quad (3.20)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\dot{Q})^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\sigma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(Q) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4}}\sigma t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q = Q_0 e^{t \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4} \sigma}} \quad (3.21)$$

Não obstante, saber qual é a entidade dominante no universo não é necessariamente suficiente para conhecer a evolução deste. O parâmetro  $k$ , de curvatura do universo, assemelha-se a uma constante do movimento nas equações de Friedmann. O universo ser elíptico (ou esférico), plano ou hiperbólico reflecte-se na evolução deste:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 + \frac{kc^2}{Q^2} = \frac{8\pi G}{3c^4} \rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \rho Q^2 - kc^2 \Leftrightarrow \quad (3.22)$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q} = \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4} \rho Q^2 - kc^2} \quad (3.23)$$

Para um  $k$  positivo, o universo pára a sua expansão e colapsa; para um valor de  $k=0$ , o universo apenas pára quando a densidade da entidade dominante chega a 0, o que, para uma dominância de matéria não relativista ou radiação, ocorre para  $Q=\infty$ , ou seja, o universo expande-se eternamente tendendo para uma expansão nula. Já para  $k$  negativo nota-se que o universo tende para uma expansão constante.

A figura seguinte mostra a equação (3.22) para os três possíveis valores de  $k$  e para um universo dominado pela matéria não relativística:

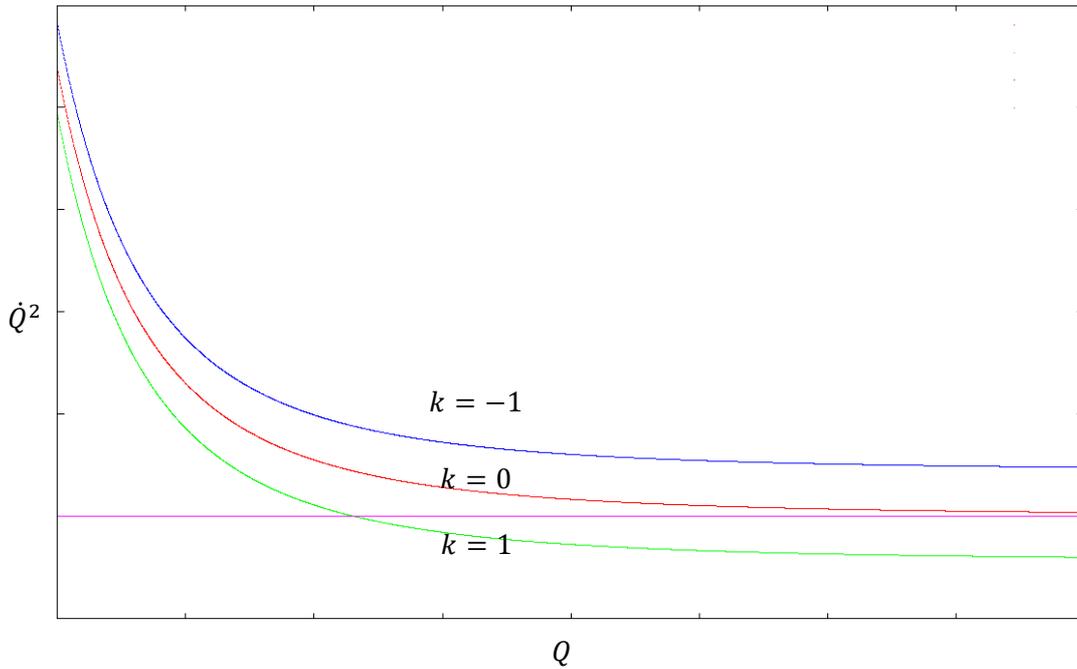


Fig. 3.1 -  $\dot{Q}^2(Q)$  para o caso de  $k=1$ ,  $k=0$  e  $k=-1$ . A linha horizontal representa  $\dot{Q}^2 = 0$ .

A evolução de cada um destes universos é apresentada na figura 3.2. Observa-se que, para um universo elíptico (ou esférico), este colapsa após um limiar calculado em (3.23), para o caso de um universo plano este tende para uma expansão nula e, finalmente, para um universo hiperbólico este tende para uma expansão constante.

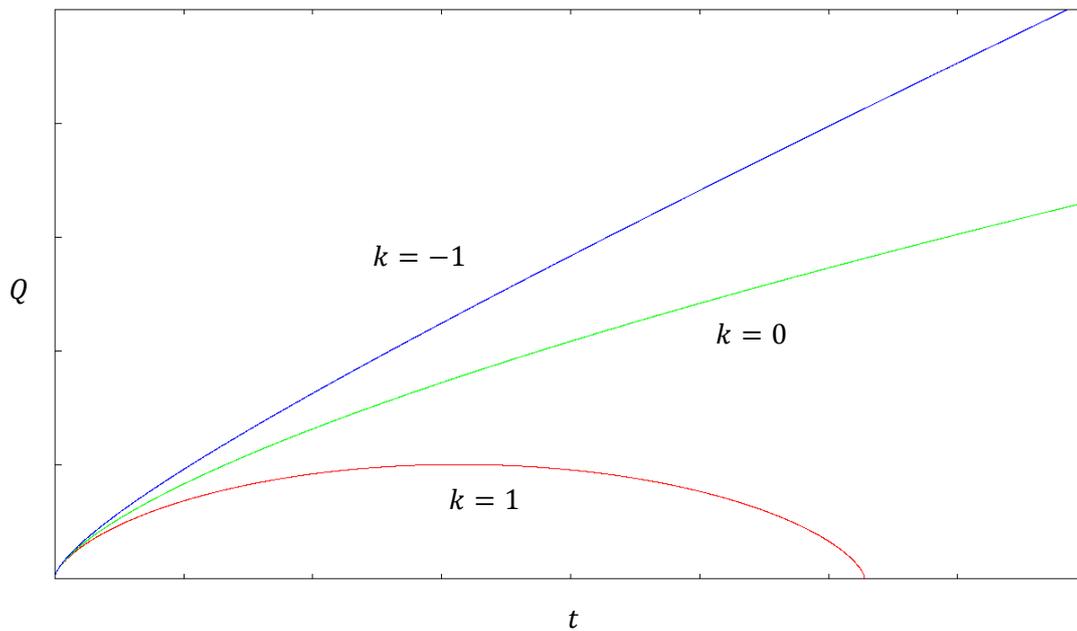


Fig. 3.2 -  $Q(t)$ , para os três tipos de curvatura. Os dois eixos iniciam no 0.

No entanto, hoje em dia, cada vez mais os dados apontam não só para que o universo seja verdadeiramente plano ( $k \cong 0$ ), mas também para que existe uma contribuição considerável de energia negra nas equações de Friedmann. Portanto, a partir de certo ponto, a dominância do universo é passada da matéria (não relativística) para a energia negra, este efeito é observado como uma aceleração na figura 3.3.

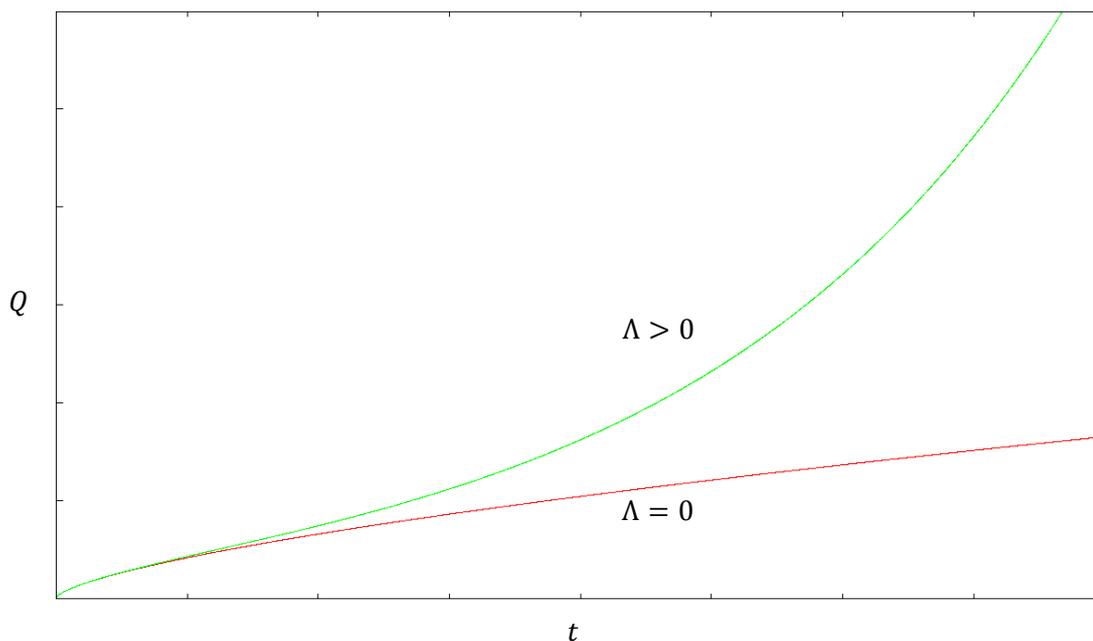


Fig 3.3 -  $Q(t)$ , para  $k=0$ , para universos com e sem energia negra ( $\Lambda > 0$ ). Os dois eixos iniciam no 0.



# Capítulo 4

## Da Termodinâmica

É preciso notar que os exemplos do capítulo anterior foram simulados para uma aproximação de um universo de poeira. No entanto as simulações tratadas neste trabalho foram feitas considerando uma aproximação de fluido. Para este tipo de aproximação, é preciso considerar a equação de estado das entidades do universo.

Uma equação de estado relaciona as diferentes variáveis de estado e indica o estado do sistema apenas com o valor destas, não requerendo o caminho percorrido por elas.

Em termodinâmica, as variáveis de estado relevantes costumam ser a temperatura, o volume, a pressão, o número de partículas, o potencial químico, mas em cosmologia a equação de estado é dada pela relação da pressão com a densidade (energética), ficando apenas implicitamente dependentes das outras variáveis:

$$P = P(\rho) \tag{4.1}$$

A equação de estado, em cosmologia é dada pelo quociente entre a pressão e a densidade:

$$\omega = \frac{P}{\rho} \tag{4.2}$$

A equação de estado permite usar valores que não são previstos classicamente para as equações de Friedmann.

As equações (3.10) tornam-se:

$$\dot{\rho}_i = -3 \frac{\dot{Q}}{Q} \rho_i (1 + \omega_i) \tag{4.3}$$

Observando os casos extremos obtém-se as fórmulas apresentadas no capítulo anterior.

Para um gás ideal, a equação de estado termodinâmica é:

$$PV = NkT \quad (4.4)$$

A energia média das partículas de um gás não relativístico é:

$$U = N \times mc^2 \quad (4.5)$$

Portanto o valor da equação de estado é:

$$PV = \frac{U}{mc^2} kT \Leftrightarrow \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{kT}{mc^2} \cong 0 \quad (4.7)$$

Este último considera-se 0, pois para um gás não relativístico a temperatura não pode ser muito elevada, caso contrário a energia das partículas será suficiente para que estas se comportassem de forma relativística. Assim, aplicando este valor a (4.3), obtém-se a equação (3.12).

Para um gás ultra-relativístico, a energia de cada partícula é diferente, alterando a mecânica do gás, a energia média do gás surge de maneira diferente. A energia de cada partícula é:

$$E = pc = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} c \quad (4.8)$$

$$U = \langle E \rangle = N \langle |p| \rangle c \Leftrightarrow \quad (4.9)$$

$$\Leftrightarrow Nc \left\langle \left| \frac{p^2}{p} \right| \right\rangle = Nc \left\langle \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right\rangle \quad (4.10)$$

Recorrendo agora ao princípio da equipartição, cuja forma é:

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \langle q_i \left( \frac{\partial E}{\partial q_i} \right) \rangle = \alpha kT \quad (4.11)$$

Aplicando à equação, considerando que  $q = p$  e  $i = 1,2,3$  obtém-se:

$$U = N \sum_{i=1}^3 c \left\langle p_i \left( \frac{p_i}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right) \right\rangle = N \sum_{i=1}^3 \langle p_i \left( \frac{\partial E}{\partial p_i} \right) \rangle = 3NkT \quad (4.12)$$

Juntando esta solução à equação (4.4) obtém-se que:

$$\omega = \frac{1}{3} \quad (4.13)$$

Com este valor na equação (4.3), o resultado é a equação (3.13).

É assim possível observar que a equação de estado é um óptimo indicador do carácter relativístico de uma entidade do universo e, portanto, do seu comportamento. É curioso notar ainda que a pressão, a característica que distingue um fluido de poeira, surge nestas entidades cosmológicas devido a efeitos relativísticos.

Enquanto que não tem um comportamento previsto classicamente, pode-se ver como se comporta a Energia negra pelo lado direito da equação (3.14):

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \Lambda \equiv \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu'} \quad (4.14)$$

Analisando a componente da constante cosmológica como uma entidade no tensor energia-momento, observa-se que, num referencial comovente ( $u^\alpha = (1,0,0,0)$ ), esta entidade cosmológica tem os valores de energia e pressão simétricos. Representado o tensor energia-momento desta entidade em coordenadas esféricas, a componente 00, puramente temporal, e a 11, puramente radial indicam a densidade e a pressão, respectivamente:

$$-\Lambda g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda r^2 (\sin \theta)^2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Assim o valor da equação de estado é

$$\omega = -1 \quad (4.16)$$

E aplicado à equação (4.3), obtém-se a (3.15).

Esta modificação permite dinamizar a equação (3.10). É verdade que, enquanto que a equação de estado depende apenas explicitamente da densidade e da pressão  $\omega(\rho, P)$ , esta depende implicitamente de outras variáveis como a temperatura e o potencial químico  $\omega(T, \mu)$ , que, por sua vez, dependerão do volume e do número de partículas  $\omega(Q, N)$  e do tipo de partículas que estão a ser consideradas.

Chega-se então aos integrais termodinâmicos. Começando para uma distribuição de partículas considera-se inicialmente o que é conhecido como o espaço de fase, pois é neste espaço que se distribuem os estados das partículas:

$$\int d\Gamma = \int \frac{d^3x d^3p}{h^3} \quad (4.17)$$

A constante  $h$  é a constante de Planck, cujo valor é  $6.626068 \times 10^{-34}$  Js, que indica o tamanho dos estados e permite que o valor do integral não tenha unidades.

As partículas não se distribuem igualmente pelo espaço de fase. Os estados mais baixos de energia têm maior probabilidade de estarem ocupados e quanto maior for a temperatura maior é a probabilidade de os estados de energia mais elevados serem ocupados. Portanto considera-se assim uma distribuição de Maxwell-Boltzmann:

$$f_{MB}(E, T, \mu) = e^{-\frac{E-\mu}{kT}} \quad (4.18)$$

Onde  $E$  é a energia de cada partícula em cada estado,  $T$  a temperatura das partículas,  $\mu$  o potencial químico e  $k$  é a constante de Boltzmann, cujo valor é de  $1,3806503 \times 10^{-23}$  J/K. O potencial químico indica o valor de energia que um sistema ganha ao se acrescentar partículas a esse.

Assim, o número de partículas pode ser definido como o integral em todo o espaço de fase para uma distribuição de partículas:

$$N = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E-\mu}{kT}} d\Gamma \quad (4.19)$$

Como se pode ver, pela figura seguinte, alterando a temperatura, e mantendo o número de partículas, a distribuição muda, mantendo, no entanto, a forma de uma exponencial:

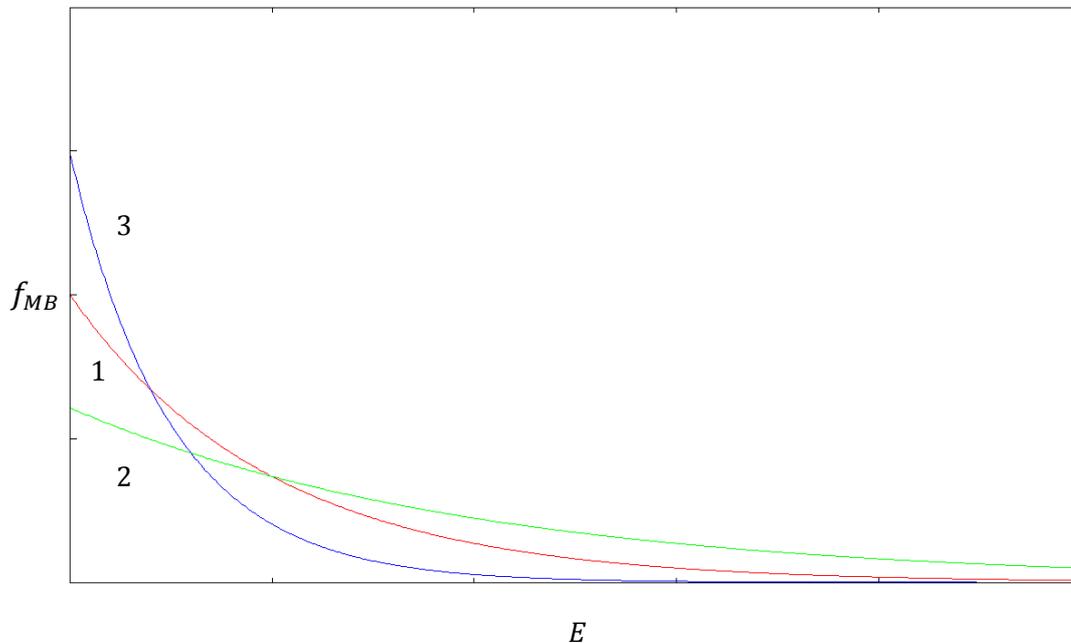


Fig 4.1 -  $f_{MB}(E)$ . A linha 1 representa a distribuição genérica das partículas pelos estados. As outras duas representam a distribuição do mesmo nº de partículas para uma temperatura superior (linha 2) e inferior (linha 3).

No entanto, há partículas que podem ocupar mais que um estado com a mesma energia. Essa quantidade chamada de degenerescência é colocada no integral como um valor  $g$ :

$$N = g \int_0^{\infty} e^{-\frac{E-\mu}{kT}} d\Gamma \quad (4.20)$$

Resolvendo parte do integral obtém-se a densidade de partículas:

$$N = g \int_0^{\infty} e^{-\frac{E-\mu}{kT}} d\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow N &= \frac{g}{h^3} \int_0^\infty e^{-\frac{E-\mu}{kT}} d^3x d^3p \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow N &= \frac{g}{h^3} V \int_0^\infty e^{-\frac{E-\mu}{kT}} d^3p \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{N}{V} &= \frac{g}{h^3} \int_0^\infty e^{-\frac{E-\mu}{kT}} 4\pi p^2 dp \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow n &= \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{E-\mu}{kT}} dp \quad (4.21)
\end{aligned}$$

O integral corre os valores de momento das partículas e portanto de energia, pois esta depende do momento. Assim, resta a temperatura e o potencial químico. A temperatura indica como é que as partículas se distribuem pelos estados e o potencial químico terá o valor necessário para que o integral obtenha o valor de densidade de partículas observado.

Tendo agora a forma de como estão distribuídas as partículas, pode-se integrar o produto desta distribuição com o valor de energia de cada estado, obtendo-se a energia do conjunto das partículas. Uma vez que a integração (4.21) dá a densidade de partículas, do integral obter-se-á a densidade energética, usando os mesmos valores de temperatura e do potencial químico:

$$\rho = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty E \times p^2 e^{-\frac{E-\mu}{kT}} dp \quad (4.22)$$

O integral final é o que proporciona o valor de pressão para a distribuição [7]:

$$P = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 c^2}{3E} \times p^2 e^{-\frac{E-\mu}{kT}} dp \quad (4.23)$$

Estes integrais não são, apesar de muito próximos, apropriados às entidades do universo, dado que a função (4.18) representa uma distribuição de partículas clássicas, e este tipo de distribuição aproxima-se de uma distribuição real para temperaturas elevadas e densidades baixas. As partículas na realidade comportam-se de forma diferente, dividindo-se em dois tipos: os fermiões, que obedecem ao princípio de

exclusão de Pauli, e os bósons, que não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Segundo este princípio, duas partículas, ou dois férmions, não podem ocupar o mesmo estado.

Os férmions, como quaisquer outras partículas, tendem a ocupar estados mais baixos de energia, ocupando estados de maior energia com temperaturas elevadas. Todavia, para temperaturas muito baixas, os férmions não podem cair todos para o estado mais baixo de energia, sendo que tendem, por isso, a ficar distribuídos de forma compacta.

A função de distribuição é assim ligeiramente diferente. Para férmions, usa-se uma distribuição de Fermi-Dirac [7]:

$$f_{FD}(E, T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} \quad (4.24)$$

Neste tipo de distribuição, o potencial químico tem um significado extra. Para temperaturas muito baixas  $T \cong 0$ :

$$\begin{aligned} f_{FD} &\cong 1, \text{ para } E < \mu \\ f_{FD} &\cong 0, \text{ para } E > \mu \end{aligned}$$

Portanto, os férmions, para temperaturas baixas, compactam-se todos nos estados com energia inferior ao potencial químico, deixando os estados superiores isentos de partículas. Como se pode ver na figura seguinte, para temperaturas mais baixas, a forma da distribuição é bastante compacta e para temperaturas mais elevadas o potencial químico desce e a distribuição tende para (4.18):

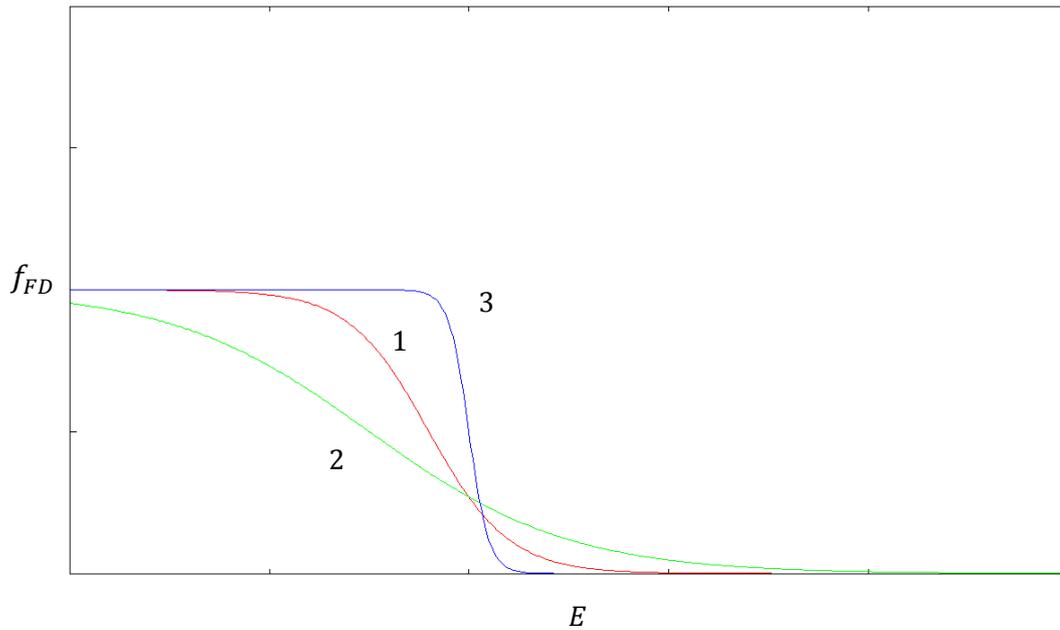


Fig 4.2 -  $f_{FD}(E)$ . A linha 1 representa uma distribuição de fermiões pelos estados. As outras duas representam a distribuição do mesmo nº de partículas para uma temperatura superior (linha 2) e inferior (linha 3).

O outro tipo de partículas, os bosões, tendem, como outras partículas, a ocupar os estados mais baixos, ocupando os mais energéticos com temperaturas mais elevadas. Contudo, quando as temperaturas baixam, os bosões tendem todos a ocupar não os estados mais baixos mas o estado mais baixo de energia, o que faz com que o estado 0 acumule muito mais partículas numa distribuição de bosões do que numa distribuição de partículas clássicas ou fermiões.

Uma distribuição de Bose-Einstein difere das outras duas distribuições (4.18) (4.24) por uma pequena diferença [7]:

$$f_{BE}(E, T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} - 1} \quad (4.25)$$

O que se observa é que quando  $E$  tende para  $\mu$  o valor da distribuição tende para infinito, portanto o valor do potencial químico para os bosões nunca pode ser maior que 0. Na verdade, é que o facto do potencial químico não poder subir mais do que 0 que dá origem a efeitos como o condensado de Bose-Einstein, que surge quando através da integração (4.20) com (4.25), para temperaturas muito baixas, não se consegue obter a totalidade das partículas no sistema. Isto faz com que uma quantidade finita, e não

infinitesimal, de partículas esteja no estado de energia mínima. Mas este tipo de efeito não será tratado aqui. Por exemplo, os fótons, que são bósons, têm o  $\mu=0$ , permitindo que sejam criados e destruídos livremente.

A figura seguinte permite observar as distribuições para valores de temperatura diferentes:

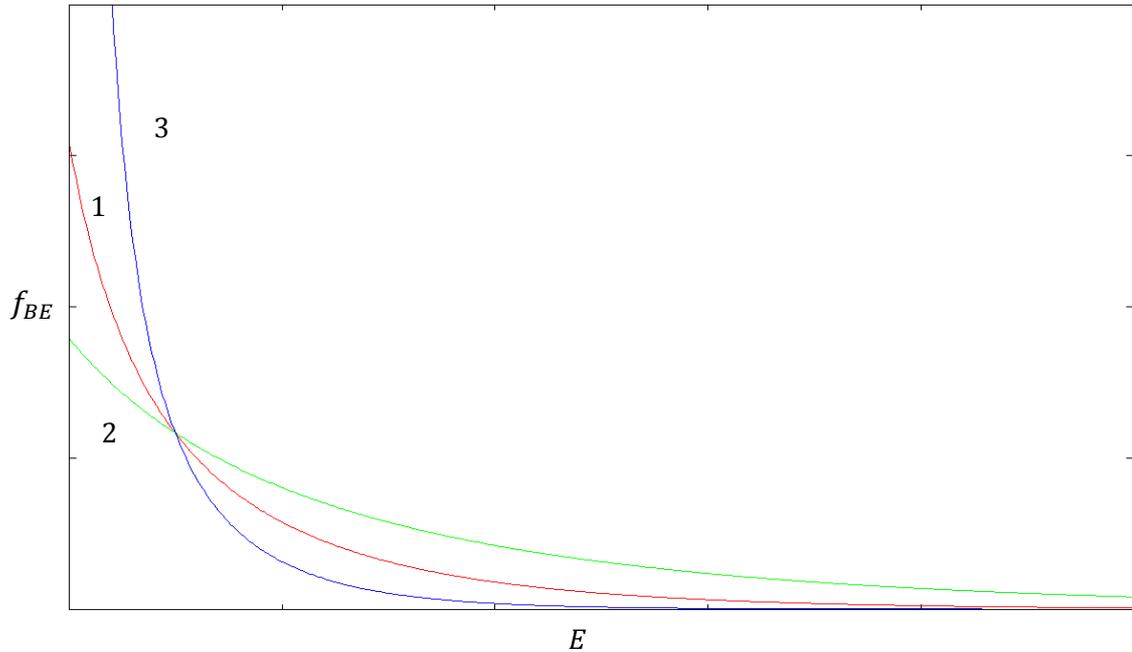


Fig 4.3 -  $f_{BE}(E)$ . A linha 1 representa uma distribuição de bósons pelos estados. As outras duas representam a distribuição do mesmo nº de partículas para uma temperatura superior (linha 2) e inferior (linha 3).

As distribuições são então:

$$f(E, T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT} + \alpha}} \begin{cases} \alpha = +1, \text{fermiões} \\ \alpha = 0, \text{clássico} \\ \alpha = -1, \text{bosões} \end{cases} \quad (4.26)$$

E os integrais são:

$$n = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty f(E, T, \mu) \times p^2 dp \quad (4.27)$$

$$\rho = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty E \times f(E, T, \mu) \times p^2 dp \quad (4.28)$$

$$P = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 c^2}{3E} \times f(E, T, \mu) \times p^2 dp \quad (4.29)$$

A radiação mantém sempre o mesmo carácter relativístico até às temperaturas de hoje. Os fótons têm uma temperatura de fundo do universo de 2,725 K [8] mas são sempre relativísticos independentemente desta. Os neutrinos têm uma temperatura mais baixa, de 1,91 K [7] mas a essa temperatura os neutrinos ainda têm uma energia cinética muito superior à massa. A Energia negra ainda se considera como uma constante.

A matéria só se comporta de forma não relativística para temperaturas baixas, um aumento elevado da temperatura leva estas entidades a comportarem-se cada vez mais como a radiação. Portanto, os integrais (4.27), (4.28) e particularmente o (4.29) são importantes para determinar os valores para a equação (3.10), mas não são suficientes.

Para determinar o comportamento de cada entidade é preciso determinar quatro variáveis. A densidade  $\rho$  é determinada pela equação (3.10), a pressão  $P$  para esta equação, é determinada pelo integral (4.29). Para este integral, é necessário determinar o potencial químico  $\mu$  calculando o integral (4.28), sendo que apenas o valor correcto de  $\mu$  obtém o valor determinado de  $\rho$ . Para cada um destes integrais é necessário determinar a temperatura  $T$ .

Para determinar  $T$  considera-se uma expansão adiabática. Para um gás a equação da expansão adiabática é:

$$PV^\gamma = const. \quad (4.30)$$

O valor  $\gamma$  é o coeficiente adiabático e

$$PQ^{3\gamma} = const \quad (4.31)$$

E com (4.4) a equação torna-se:

$$TQ^{3\gamma-3} = const \quad (4.32)$$

$$T \propto Q^{3-3\gamma} \quad (4.33)$$

Para um gás não relativístico o coeficiente adiabático é  $5/3$  e para uma gás ultra relativístico o valor é  $4/3$  [13]. Os casos extremos são então:

$$\begin{cases} T \propto \frac{1}{Q^2}, \text{ não relativístico} \\ T \propto \frac{1}{Q}, \text{ ultra relativístico} \end{cases} \quad (4.34)$$

Determinar a temperatura das entidades é bastante complicado quando se considera que estas não se mantêm não relativísticas durante todas as épocas do universo. Portanto, para este trabalho, usou-se um modelo para determinar a temperatura que utiliza o valor da equação de estado e da sua capacidade de determinar o carácter relativístico de um gás:

$$T \propto \frac{1}{Q^{2-3\omega}} \quad (4.35)$$

Estes integrais e equações permitem analisar o comportamento do universo de hoje até à época da inflação.

À medida que este se expande a temperatura diminui, o que permite concluir que, para um universo mais jovem a temperatura terá sido mais elevada. A partir de uma determinada temperatura, os fotões podem começar a produzir partículas como electrões e piões e inclusivé, desconfinar os quarks nos nucleões. Assim dependendo da temperatura dos gases o comportamento do universo ainda jovem pode ser alterado.

Usando a equação seguinte pode-se determinar a densidade da matéria que depende apenas da temperatura e das energias de massa e desconfinamento das partículas [9]:

$$\rho = \left( \sum_{\text{Bosões}} g_B + \frac{7}{8} \sum_{\text{Fermiões}} g_F \right) \frac{\pi^2}{30} T^4 = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4 \quad (4.36)$$

Onde  $g_B$  e  $g_F$  são as degenerescências de cada tipo de bosões e fermiões disponíveis.  $N(T)$ , a degenerescência efectiva, é dado pelo pela tabela seguinte [9]:

Temperatura	Partículas	4N(T)
$T < m_e$	$\gamma, \nu$	29
$m_e < T < m_\mu$	$e^\pm$	43
$m_\mu < T < m_\pi$	$\mu^\pm$	57
$m_\pi < T < T_c$	$\pi^\pm$	69
$T_c < T < m_s$	$-\pi^\pm + u, \bar{u}, d, \bar{d} + gl.$	205
$m_s < T < m_c$	$s, \bar{s}$	247
$m_c < T < m_\tau$	$c, \bar{c}$	289
$m_\tau < T < m_b$	$\tau^\pm$	303
$m_b < T < m_{W,Z}$	$b, \bar{b}$	345
$m_{W,Z} < T < m_{Higgs}$	$W^\pm, Z^0$	381
$m_{Higgs} < T < m_t$	$H^0$	385
$m_t < T$	$t, \bar{t}$	427

Tabela 4.1 – A 1ª coluna contém os intervalos de temperatura em que se formam partículas. As massas estão multiplicadas por um factor de  $\frac{c^2}{k}$ .  $T_c$  é a temperatura necessária para o desconfinamento dos quarks. A 2ª coluna contém as novas partículas. A 3ª coluna contém o valor do quádruplo da degenerescência efectiva.

# Capítulo 5

## Simulação e Resultados

Tendo agora as equações necessárias é possível criar uma simulação mais precisa.

A simulação é feita em python e encontra-se em anexo [anexo – 1].

Começando pelos valores actuais de temperatura de fundo e densidades, providenciados pelos dados mais actuais da sonda WMAP, os valores da WMAP de densidade estão adaptados de modo a que o parâmetro de Hubble e factor de escala de hoje tenham o valor de 1:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho - \frac{kc^2}{Q^2} \Leftrightarrow \quad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}(\rho_b + \rho_r + \rho_c + \Lambda\frac{c^6}{8\pi G}) - \frac{kc^2}{Q^2} \Leftrightarrow \quad (5.2)$$

$$\Leftrightarrow H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}(\rho_{b0} + \rho_{r0} + \rho_{c0} + \Lambda\frac{c^6}{8\pi G}) - kc^2 \Leftrightarrow \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \sqrt{\Omega_{b0} + \Omega_{r0} + \Omega_{c0} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{k0}} \quad (5.4)$$

Onde os valores  $\Omega_{b0}, \Omega_{r0}, \Omega_{c0}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_{k0}$  são as contribuições de matéria bariónica, radiação, matéria negra fria, energia negra e curvatura do universo respectivamente [8].

Estes valores são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{b0} = 0,0456 \pm 0,0015 \\ \Omega_{r0} = 4,966 \times 10^{-5} (1 + 0,2271 \times (4,4 \pm 1,5)) \\ \Omega_{c0} = 0,228 \pm 0,013 \\ \Omega_{\Lambda} = 0,726 \pm 0,015 \\ \Omega_{k0} = -0,0049 \pm 0,013 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Dado que o maior contributo, na radiação de fundo, é o dos fotões e a temperatura dos fotões é de 2,725 K [8], este serão considerados como a componente dominante desta e a temperatura desta será a dos fotões. Os neutrinos também participam na radiação e a sua contribuição é a  $(0,2271 \times (4,4 \pm 1,5))$  mas considera-se que a sua temperatura é a dos fotões e não 1,91 K [7].

A variável base da simulação é o tempo e este é corrido no sentido inverso. O tempo vem adaptado ao parâmetro de Hubble ( $H_0 = t_0^{-1} = 1$ ). Nota-se assim que o tempo é mau parâmetro para determinar o fim da simulação pois este é corrido linearmente em vez de se tender para 0. O parâmetro usado para terminar a simulação torna-se então, o factor de escala.

A primeira parte do programa define apenas constantes universais e equações matemáticas como a exponencial que se irá usar [9].

De seguida, o programa define um conjunto de funções que serão usadas: (4.24), (4.25) e (4.36).

O programa, depois, define os valores iniciais das variáveis usadas. Nota-se que o tempo tem um factor acrescentado. Este factor serve para calibrar o valor inicial do tempo de modo a que o valor final seja o mais próximo de 0 para que se obtenham valores analisáveis às pequenas escalas de tempo. Este valor não interfere com a simulação. O ponto 0 do tempo não tem significado físico nas equações diferenciais.

Ainda antes de se iniciar a simulação, o programa abre os ficheiros de texto onde irá guardar os dados e define o tamanho dos saltos de tempo iniciais entre iterações e a precisão do programa.

A simulação inicia com um ciclo que apenas termina quando o universo alcança o tamanho aproximado aquando o fim da inflação. Este valor calculado vem da seguinte equação:

$$\begin{aligned} T_{infl} &\sim 10^{28} K \\ T_0 &\sim 10^0 K \\ T_{rad} &\propto Q^{-1} \\ Q_{infl} &\sim 10^{-28} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Estes valores de temperatura e escala correspondem a um tempo na ordem dos  $10^{-50} H_0^{-1}$ .

Dado que os valores de densidade, e temperatura na primeira interacção já são conhecidos, a única grandeza que necessita ser calculada é a pressão, e para isso também se calcula o potencial químico. Do ciclo principal surge um conjunto de sub-ciclos para calcular a pressão.

Os valores de temperatura (e a constante de Boltzmann), massa das partículas e potencial químico encontram-se adaptados à escala das densidades e de  $c = h = 1$  pela constante “a” definida antes da simulação:

$$a = \left( \frac{3h^3 c^5 H_0^2}{32\pi^2 G} \right)^{-1/4} = \sqrt[4]{\frac{32\pi^2 G}{3h^3 c^5 H_0^2}} \quad (5.7)$$

Usando a equação (4.28) chega-se a este valor:

$$\rho = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty E \times f(E, T, \mu) \times p^2 dp$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\frac{8\pi G}{3c^2} H_0^2} = \frac{4\pi g}{\frac{8\pi G}{3c^2} H_0^2 h^3} \int_0^\infty \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \times f\left(\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \mu}{kT}\right) \times p^2 dp$$

$$\Omega = g \frac{\frac{8\pi G}{3c^2} 4\pi}{H_0^2 h^3} \int_0^\infty \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \times f\left(\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \mu}{kT}\right) \times p^2 dp$$

$$\Omega = g \frac{\frac{8\pi G}{3c^2} 4\pi}{H_0^2 h^3} \int_0^\infty \frac{1}{c^3} \sqrt{p'^2 + m^2 c^4} \times f\left(\frac{\sqrt{p'^2 + m^2 c^4} - \mu}{kT}\right) \times p'^2 dp'$$

$$\Omega = g \int_0^\infty \sqrt[4]{\frac{32\pi^2 G}{3c^5 H_0^2 h^3}} \sqrt{p'^2 + m^2 c^4} \times f\left(\frac{\sqrt{p'^2 + m^2 c^4} - \mu}{kT}\right) \left(\sqrt[4]{\frac{32\pi^2 G}{3c^5 H_0^2 h^3}}\right)^3 p'^2 dp'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \sqrt[4]{\frac{32\pi^2 G}{3c^5 H_0^2 h^3}} pc = apc \\ m \rightarrow \sqrt[4]{\frac{32\pi^2 G}{3c^5 H_0^2 h^3}} mc^2 = amc^2 \\ T \rightarrow \sqrt[4]{\frac{32\pi^2 G}{3c^5 H_0^2 h^3}} Tk = akT \end{array} \right.$$

O programa inicia com um valor de potencial químico igual ao das massas das partículas para minimizar o tempo perdido na primeira iteração e apenas termina o primeiro sub-ciclo quando o valor obtido pelo integral (4.28) iguala o da densidade.

O sub-ciclo procura os valores de potencial químico integrando numericamente, pela definição de Riemann, o valor de densidade e depois incrementa o valor do potencial usando o método de Newton, usado para determinar zeros, usando a seguinte equação:

$$\mu_{x+1} = \mu_x - \frac{\int E f(\mu) d^3 p - \Omega}{\int E \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu} d^3 p} \quad (5.8)$$

Quando o valor é próximo o suficiente este ciclo termina e o valor de pressão é então integrado numericamente, também pela definição de Riemann. O resultado é que a pressão vem nas mesmas unidades da densidade:

$$\dot{\Omega}_i = -3 \frac{\dot{Q}}{Q} (\Omega_i + Y_i) \quad (5.9)$$

Este processo é feito primeiro para a matéria bariônica e as partículas consideradas são os prótons que são as partículas mais massivas e comuns desta entidade cosmológica. E em seguida o processo é repetido para a matéria negra, e para esta considera-se a partícula teórica supersimétrica mais leve, um fermião [9], com uma massa de entre  $10 \text{ GeV}/c^2$  e  $10 \text{ TeV}/c^2$  [9,17,18,19], conhecido como o neutralino, que consiste na mistura mais leve de higgsinos e Winos, as partículas supersimétricas dos fracões  $W^\pm$  e  $H_0$ . Finalmente o potencial químico é guardado para a próxima iteração, poupando assim tempo de integração.

Tendo as pressões a fase seguinte é fazer o cálculo da variação do factor de escala usando a equação (5.4). De seguida, usando o valor obtido de  $H = \frac{\dot{Q}}{Q}$  calcula-se a evolução de cada entidade usando as equações (3.13) para a radiação e a (5.9) para a matéria bariónica e para a matéria negra.

A matéria negra tem o seu valor de temperatura que é inicializado por tentativas de modo a que os valores de temperatura da radiação e da matéria negra após a inflação estejam em equilíbrio térmico, pois pode considerar-se que toda a matéria e radiação se tenham formado através da e após a inflação. Para matéria bariónica considera-se a temperatura da radiação por duas razões. A primeira é que antes do tempo de recombinação, o ponto de tempo em que a densidade de radiação se torna mais baixa que a de matéria e o universo se torna transparente, a temperatura da radiação é forçada na matéria bariónica e a segunda que após este ponto a temperatura da matéria é difícil de determinar devido a processos de condensação de matéria estelar. No presente trabalho calcula-se a temperatura utilizando a equação (4.34) para o caso ultra-relativístico.

A simulação para se adaptar às novas escalas de tamanho e tempo a cada intervalo ou iteração calcula ao mesmo tempo valores de densidade em um e em dois passos pelo método de Euler, e, no fim de cada iteração, caso a diferença relativa entre os dois valores de escala obtidos em um e em dois passos, for maior que o definido inicialmente, na precisão, o cálculo é repetido com os valores anteriores e passos de tempo mais finos, sem que haja incremento de tempo.

Quando a diferença de valores é pequena o suficiente o tempo é incrementado, as temperaturas são alteradas de acordo com a equação (4.35) e os valores são guardados nos vários ficheiros de texto e o ciclo principal recomeça com os novos valores.

O esquema, na página seguinte, simplifica o já explicado.

Os dados da simulação estão organizados em dois tipos. No primeiro tipo os dados estão organizados em função do tempo. No segundo conjunto os dados estão organizados em função da temperatura.

A razão pelo qual alguns dos dados se apresentam em função da temperatura tem a ver com o facto de a simulação ter um limite de precisão até uma escala de  $10^{-32}$  no tempo. O resultado é que ainda que se possam adquirir os outros valores não é possível encontrar um valor de calibração para o tempo que permita que os valores de tempo

finais se aproximem mais a zero que um valor da escala  $10^{-32}H_0^{-1}$ . Isto porque é necessário que os valores de tempo tendam para 0 para se obter valores em escala logarítmica. Dado que o tempo a atingir é  $10^{-50}H_0^{-1}$ , certo dados estão apresentados em função da temperatura.

Os valores de temperatura, no entanto, não precisam de ser calibrados, excepto a temperatura inicial da matéria negra fria cuja explicação já foi dada. Os valores de temperatura da radiação crescem com o decorrer da simulação e o resultado é que como as escalas vão aumentando, qualquer pequeno desvio torna-se fútil com o aumento das escalas.

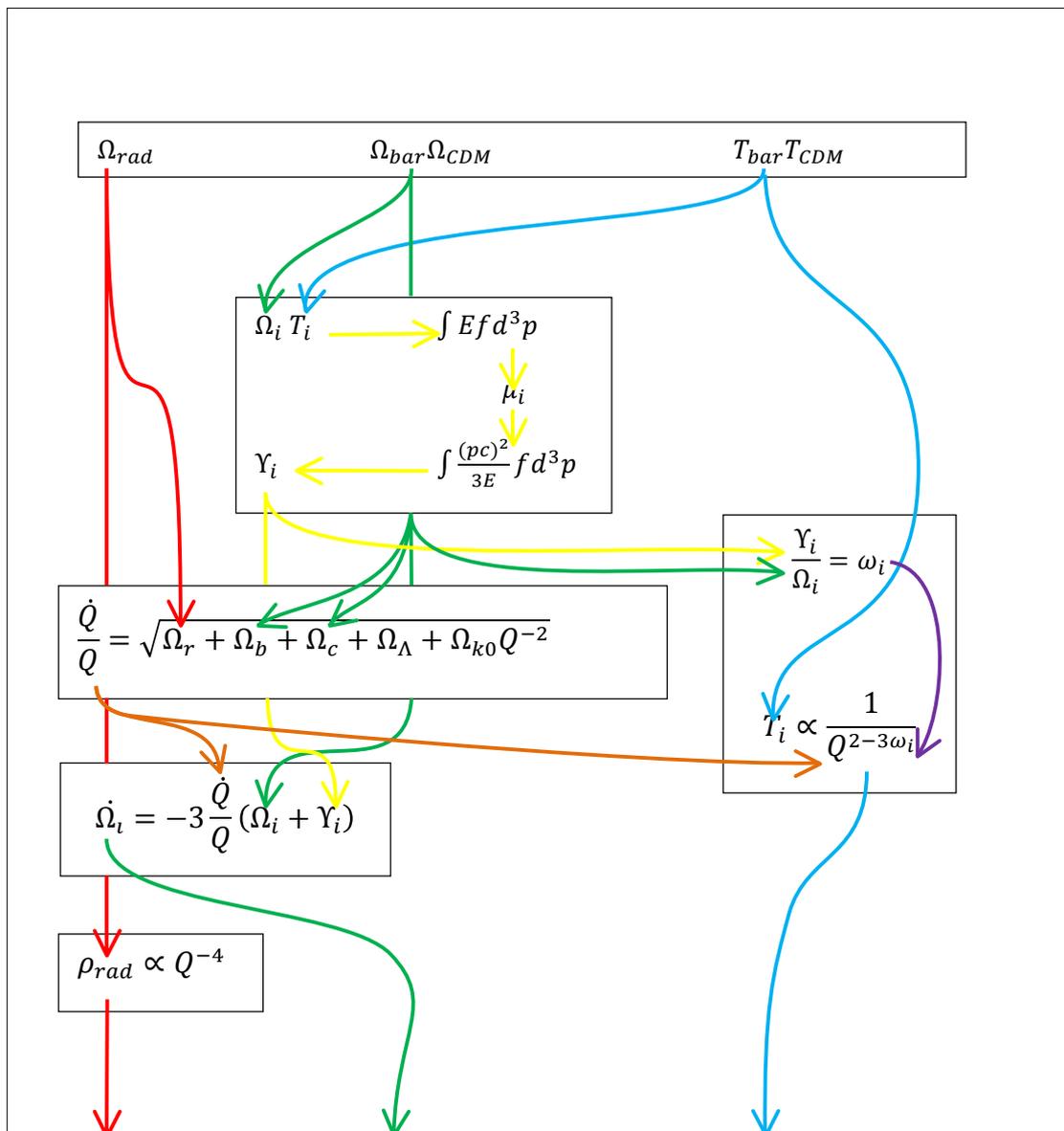


Fig 5.1 – Esquematização do programa.

O primeiro conjunto de resultados representa o factor de escala do universo em função de do tempo.

A maior parte dos dados são apresentados em escalas bi-logarítmicas pois os valores correm um largo espectro de escalas.

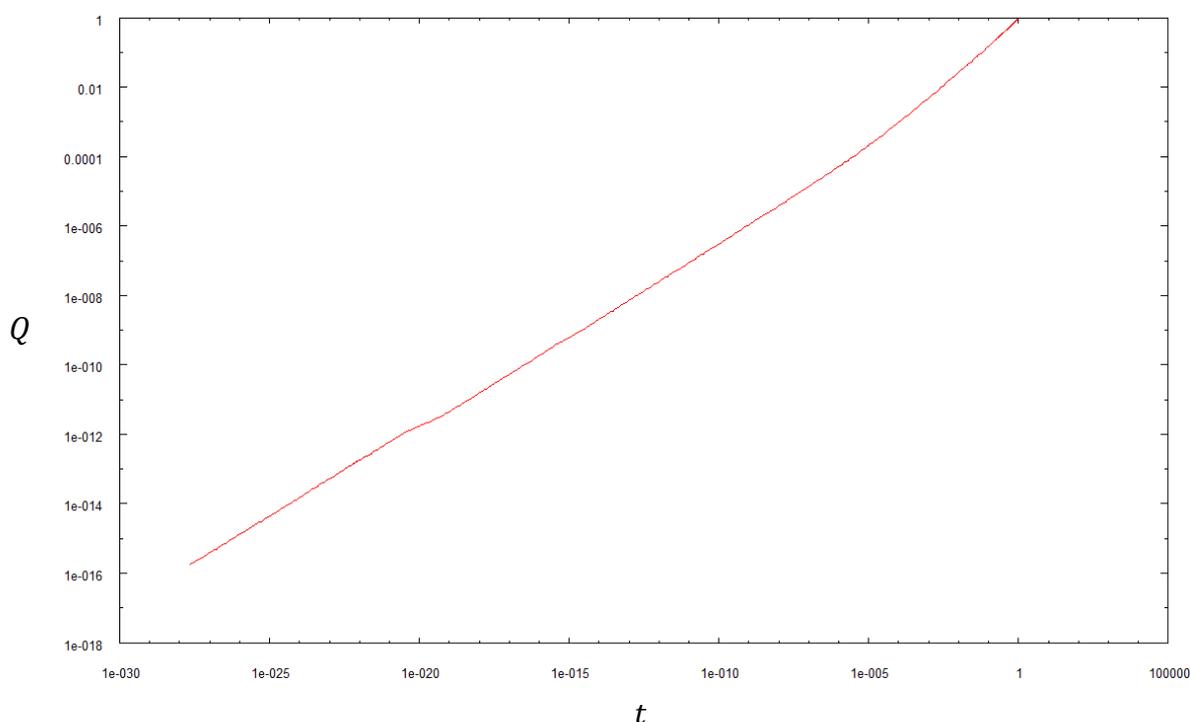


Fig 5.2 -  $Q(t)$  em escala bi-logarítmica.

A primeira característica a notar-se no gráfico é que entre o tempo 1 e  $10^{-5}$  os dados se aproximam a uma recta com um declive mais acentuado que os dados antes de  $10^{-5}$ . Esta alteração do declive torna-se mais clara com os dados da densidade mas deve-se à transição entre um universo dominado pela matéria (após  $10^{-5}$ ) e um universo dominado pela radiação (antes de  $10^{-5}$ ).

A outra característica notável é a pequena variação na regularidade da recta que ocorrer próxima de  $t = 10^{-20}$ . Este efeito deve-se ao aparecimento de novas partículas e principalmente ao desconfinamento dos quarks que ocorre nesta época. Torna-se mais óbvio observando um gráficos com os dados de temperatura.

O seguinte conjunto de dados, mais uma vez em escala bi-logarítmica, corresponde aos valores de densidades, mais concretamente os valores de  $\Omega_r$ ,  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$  e  $\Omega_\Lambda$ :

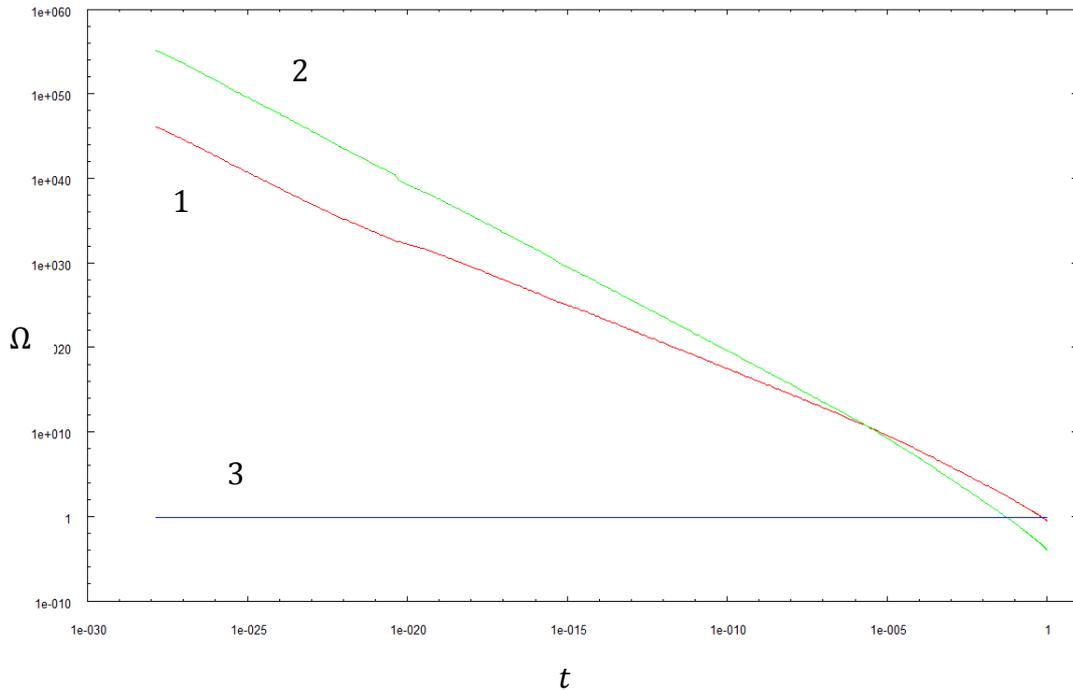


Fig 5.3 -  $\Omega_i(t)$  em escala bi-logaritmica. A linha 1 representa densidade de matéria (bariônica e negra). A linha 2 representa a densidade de radiação e a linha 3 representa a densidade de energia negra.

Neste gráfico nota-se, próxima do tempo  $10^{-6}$ , a transição entre a época da radiação e a época de matéria do universo. Nota-se também, ainda que levemente, que os declives das rectas da radiação e da matéria são menores antes deste ponto. Isto deve-se a que o universo evolui de forma diferente em diferentes épocas.

Torna-se mais claro observando os valores de densidade modificados. Este valores são equivalentes aos valores de  $\Omega$  mas em vez de estarem adaptados ao parâmetro de hoje, estão adaptados aos valores do parâmetro em cada ponto do tempo:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3c^4} \frac{\rho}{H_0^2}$$

$$\Omega' = \frac{8\pi G}{3c^4} \frac{\rho}{H^2}$$

Assim os seguintes dados oferecem um visão mais detalhada das transições das épocas modernas:

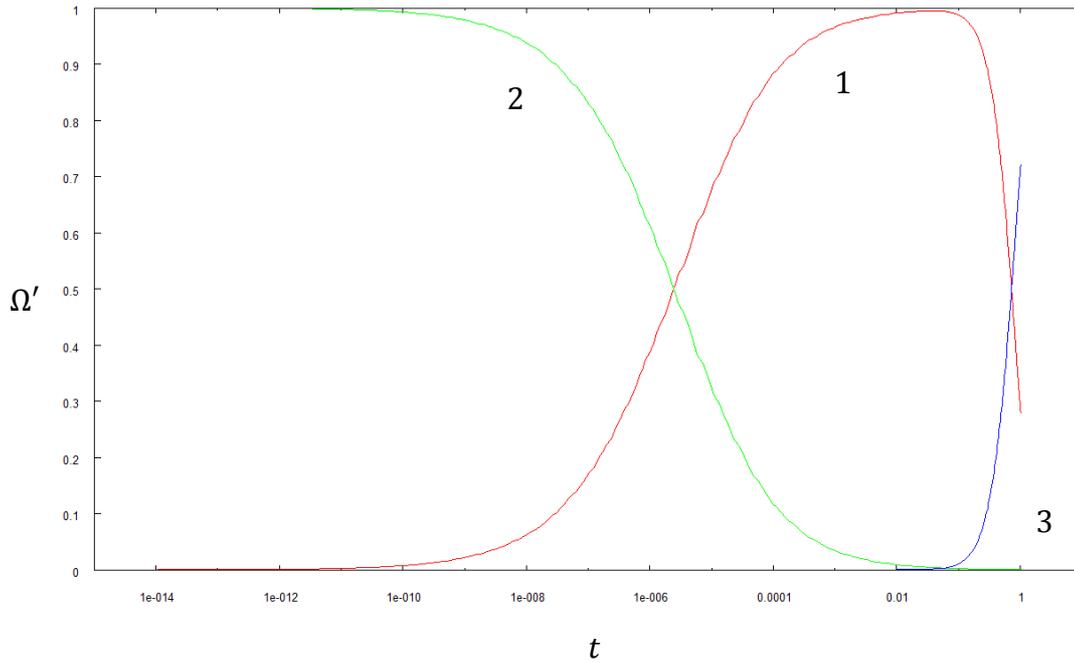


Fig 5.4 -  $\Omega'(t)$  em escala logarítmica no tempo. A linha 1 representa densidade modificada de matéria (bariônica e negra). A linha 2 representa a densidade modificada de radiação e a linha 3 representa a densidade modificada de energia negra.

Nestas curvas notam-se duas transições. A transição já esperada, radiação-matéria, ocorre próximo do tempo  $10^{-6}$ . A mais recente transição é a da matéria-energia. Esta transição, para a nova época, implica que o universo de hoje está numa fase de crescimento exponencial como o calculado em (3.21).

É importante ainda referir mais um pormenor curioso. Para isso tem-se os dados dos pontos de transição de dominância mais próximos que a simulação adquiriu, estão indicados na tabela seguinte:

Transição	$\Omega'_{mat}$	$\Omega'_{rad}$	$\Omega'_{\Lambda}$	$T$ (K)	$t$ ( $H_0^{-1}$ )
$\Lambda - mat$	0,497	0,000248	0,501	3,74000	0,727
$mat - rad$	0,494	0,505	$8,21 \times 10^{-12}$	31700	$2,37 \times 10^{-06}$

Tabela 5.1 – O primeiro conjunto de dados refere-se à transição energia-matéria e o segundo conjunto à transição radiação-matéria

As pequenas transições relacionadas com o aparecimento de novas partículas são mais difíceis de se notar. Para isso certos dados estão apresentados em função da temperatura.

Antes de mais, para auxiliar a análise de dados em função da temperatura, cria-se um mapa temperatura (de radiação)-tempo:

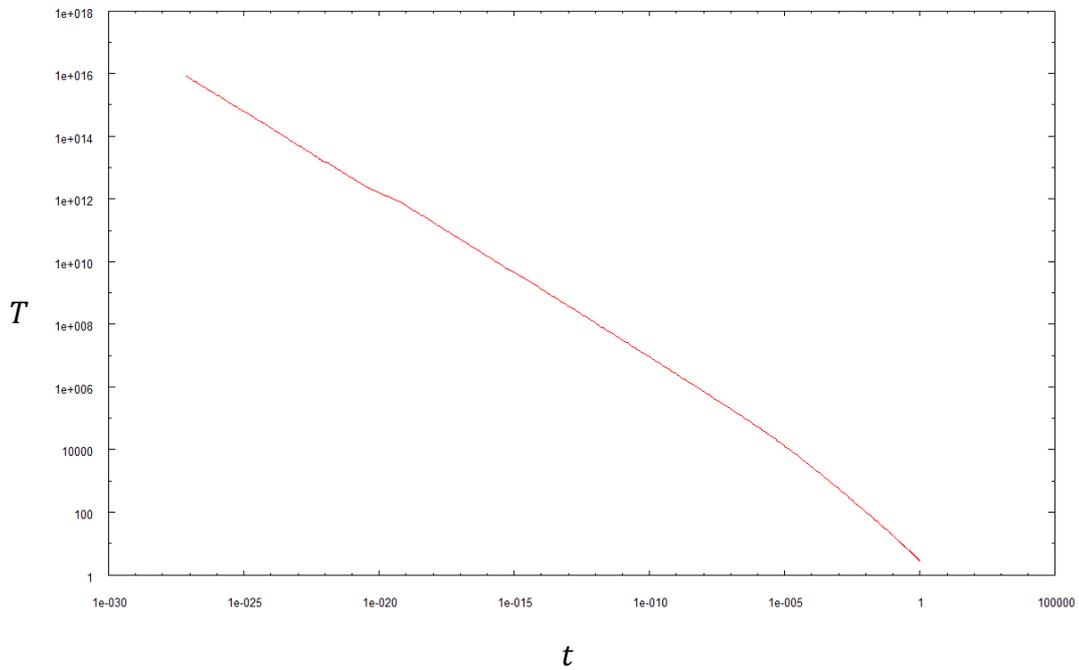


Fig 5.5 -  $T_{red}(t)$  em escala bi-logarítmica.

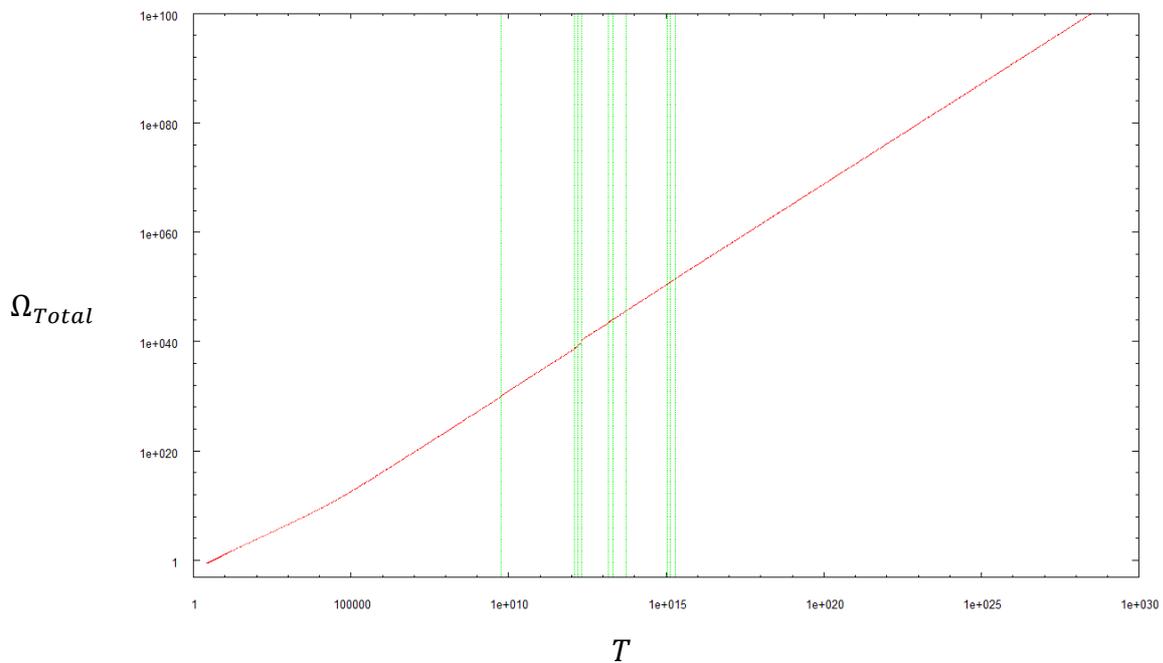


Fig 5.6 -  $\Omega_{Total}(T)$  em escala bi-logarítmica. As linhas verticais representam as temperaturas para formação de novas partículas. Da esquerda para a direita, tem-se as temperaturas de formação de:  $e^\pm, \mu^\pm, \pi^\pm, desconfinamento + s \bar{s}, c \bar{c}, \tau^\pm, b \bar{b}, W^\pm + Z^0, H^0$  e  $t \bar{t}$ .

De todas as transições, a mais notável é a que ocorre com o desconfinamento dos quarks. Pois pode ver-se na (tabela 3.1) que na transição para o desconfinamento o N tem a maior variação.

Os dados seguintes contêm os valores das equações de estado para a matéria bariônica e para a matéria negra fria com uma massa de  $100 \text{ GeV}/c^2$

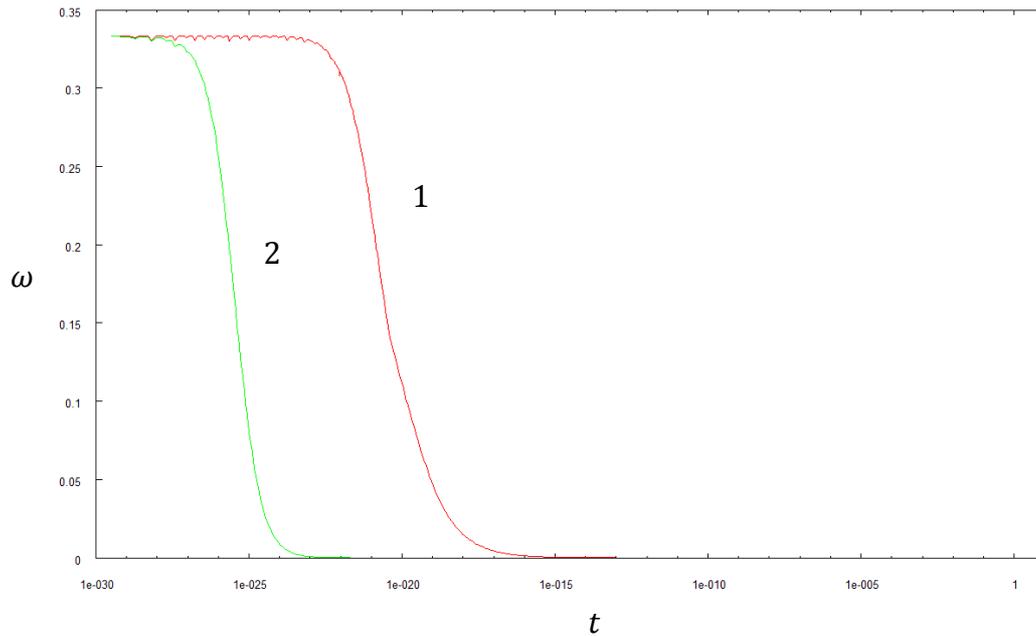


Fig 5.7 -  $\omega(t)$  em escala logarítmica no tempo. A linha 1 representa os valores da equação de estado para a matéria bariônica e linha 2 representa os valores da equação de estado da matéria negra com  $100 \text{ GeV}/c^2$

Para mostrar os efeitos da massa das partículas da matéria negra sobre o universo modificou-se a massa destas:

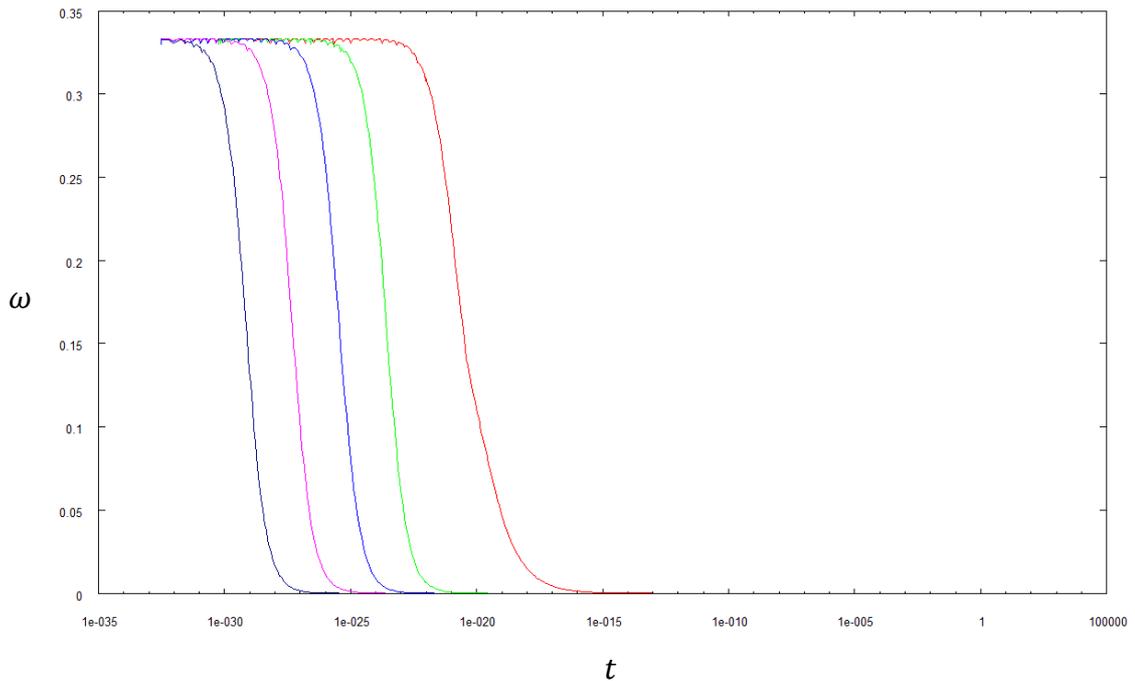


Fig 5.8 -  $\omega(t)$  em escala logarítmica no tempo. Da esquerda para a direita cada linha representa, respectivamente, o valor da equação de estado para partículas negras de massas  $10 \text{ TeV}/c^2$ ,  $1 \text{ TeV}/c^2$ ,  $100 \text{ GeV}/c^2$ ,  $10 \text{ GeV}/c^2$  e prótons

Observa-se que o espaçamento entra cada curva, de matéria negra, é de cerca de duas ordens de grandeza. Isto deve-se a que, para uma ordem de grandeza de massa maior, as partículas tornam-se relativísticas a uma ordem de grandeza superior, na temperatura. A outra ordem de grandeza vem do facto de que a temperatura das partículas no estado final tem de ser uma ordem inferior devido às equações (4.34). Observa-se por estas equações que, para um aumento de uma ordem na massa das partículas negras, a temperatura de hoje dessas partículas desce em uma ordem.

As diferenças entre os valores de massa é notável apenas na equação de estado. As alterações no comportamento do universo são tempos de ordens de fracções do segundo, em larga escala, ou seja, demasiado pequenas para serem relevantes.

Quando se altera a massa das partículas sem que se recalibre o valor do tempo, os últimos valores de tempo que a simulação obtém são:

Massa das partículas	Tempo final da simulação (sem recalibração)
$10 \text{ GeV}/c^2$	$5,762 \times 10^{-31}$
$100 \text{ GeV}/c^2$	$-4,212 \times 10^{-29}$
$1 \text{ TeV}/c^2$	$-4,864 \times 10^{-41}$
$10 \text{ TeV}/c^2$	$-4,864 \times 10^{-41}$

Tabela 5.2 – Tempo final da simulação em dependência da massa da partícula de matéria negra.

Com os dados, de  $\Omega'_{dark}$ , para os casos extremos de massas de  $10 \text{ TeV}/c^2$  e  $10 \text{ GeV}/c^2$  observa-se quão pouco a massa interfere com o universo em larga escala.

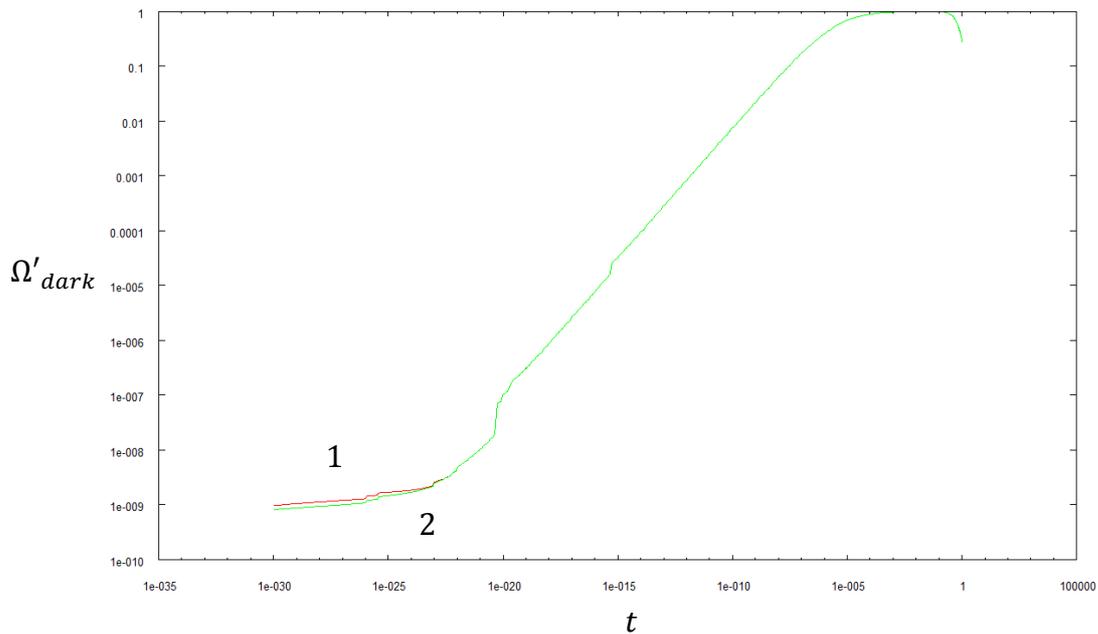


Fig 5.9 -  $\Omega'_{dark}(t)$  em escala bi-logarítmica. A linha 1 contém os valores de  $\Omega'_{dark}$  para uma massa, das partículas de matéria negra, de  $10 \text{ GeV}/c^2$  e linha 2 para uma massa de  $10 \text{ TeV}/c^2$ .

Nota-se um conjunto de degraus no gráfico. Observando o mapa de temperatura/tempo (Fig 5.5) e o gráfico (Fig 5.6), que contém os pontos de formação de

novas partículas, nota-se que cada degrau corresponde ao aparecimento de partículas novas na radiação e conseqüente diminuição do contributo da matéria no universo.

## Conclusões

A maior parte do trabalho realizado resumiu-se à optimização da simulação. A implementação das equações de Friedmann num processo iterativo foi a primeira parte do trabalho. A segunda parte consistiu em melhorar a precisão da simulação. A terceira parte correspondeu à implementação um bom método para calcular a pressão, e portanto o potencial químico, para que o programa simulasse fluidos. Finalmente, usando os dados da WMAP foram obtidos os resultados e fez-se a análise.

Nota-se que os modelos usados, são boas aproximações da realidade. O universo é apenas uniforme a larga escala e, a uma escala mais pequena, a matéria organiza-se em estruturas complexas. No entanto estas estruturas formaram-se entre  $10^{-5}H_0^{-1}$  (*tempo de recombinação*) e  $10^{-3}H_0^{-1}$  (*primeiras estrelas*) o que faz com que, numa escala logarítmica, a matéria se comporte como um fluido “ideal” para a maior parte do tempo do universo.

As três épocas modernas do universo, de radiação, de matéria e de energia, são caracterizadas pela sua entidade dominante no universo. Na tabela 5.1 nota-se que a transição energia-matéria ocorre muito antes da temperatura destas entidades baixar até ao ponto da recombinação atómica.

A recombinação ocorre por volta dos 3700 K, mas, nos dados obtidos observa-se que a transição radiação-matéria ocorre com uma diferença de temperatura de uma ordem de grandeza, a cerca de 31700 K.

Enquanto que a massa das partículas afecta, consideravelmente, o comportamento da matéria negra fria, esta não interfere o suficiente no comportamento do universo para que se obtenham alterações visíveis a larga escala. As partículas de matéria negra podem então tomar praticamente qualquer valor de massa, dentro dos parâmetros estudados, pois este não altera os valores, já estabelecidos, de idade para o universo, em larga escala.

Deve-se referir que a simulação é feita no sentido retrógrado do tempo o que explica o limite da precisão neste. Os erros acumulados tornam-se mais dominantes à medida que as escalas diminuem. Este problema poderia ter sido resolvido facilmente

apenas simulando no sentido normal do tempo, mas, os valores conhecidos com precisão são os valores do presente.

Deve-se ainda referir que, de acordo com os dados da WMAP, o valor da equação de estado da energia negra é  $\omega = -1,06^{+0,13}_{-0,08}$ . O valor da equação de estado da energia negra usado, na presente simulação, foi de  $\omega = -1$ , mantendo-se dentro dos valores medidos.

## Bibliografia

- [1] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley publishing, (2002)
- [2] L. Brito, M. Fiolhais, C. Providência, *Campo Electromagnético*, McGraw-Hill, Amadora (1999)
- [3] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, (1999)
- [4] J. B. Hartle, *Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley publishing, (2003)
- [5] J. A. Peacock, *Cosmology Physics*, Cambridge university press, Cambridge, (2005)
- [6] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford, (1998)
- [7] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley publishing, (1988)
- [8] E. Komatsu et al, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (Wmap1) Observations: Cosmological Interpretation*, [arXiv:0803.0547v2] (2008)
- [9] Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, (2010)
- [10] F. Zuricky, *Helvetica Physica Acta* 6 (1933) 110
- [11] G. F. Smoot et al, *Astophys. J.* 396, L1-L5 (1992)
- [12] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astophys. J.* 142, 419-421 (1965)
- [13] P. T. Landsberg, W. C. Saslaw, A. J. Haggett, *On The Adiabatic Expanscion of a Relativistic Gas*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 154, p.7P-8P, (1971)
- [14] D. N. Spergel et al, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, (2006)
- [15] Matt DePies, *Survey of Dark Energy and Quintessence*, University of Washington, Seattle
- [16] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, Dover Publications, (1964)

- [17] S. P. Martin, *A Supersymmetry Primer*, arXiv:hep-ph/9709356v5 (2008)
- [18] R. C. Gilmore, *Mass Limits on Neutralino Dark Matter*, Phys Rev. D76, 043520 (2007)
- [19] G. Bélanger et al, *Lower limit on the neutralino mass in the general MSSM*, JHEP 0403:012, (2004)

## Anexo – 1

```

from math import *

#constantes

k=1.3806504*10**-23          #constante de Boltzmann          (J/K)
G=6.67428*10**-11          # de Newton          (m**3/kg s**2)
h=6.62606896*10**-34      # de Plank          (Js)
c=299792458                #velocidade da luz          (m/s)
C=1.60217646*10**-19      #carga do electrão          (C)
sb=5.6704*10**-8          #constande de Stefan–Boltzmann          (W/m**2 K**4)
mb=1.672621637*10**-27   #massa tipica de bariões          (Kg)
md=(100*10**9)*C/(c**2)  # das partículas de matéria negra
H0=2.33e-18               #H real

a=3*(h**3)*(c**5)*(H0**2)/(32*(pi**2)*G)
a=a**(-1/4)

#funções

def fer(x,u,T):
    if (x-u)/(T)>400:
        return exp(-(x-u)/(T))
    else:
        return 1/(exp((x-u)/(T))+1)

def bos(x,u,T):
    if (x-u)/(T)>400:
        return exp(-(x-u)/(T))
    else:
        return 1/(exp((x-u)/(T))-1)

def deri(x,u,T):
    if (x-u)/(T)>400:
        return exp(-(x-u)/(T))*4
    else:
        return cosh((x-u)/(2*T))**-1

def raden(T):
    #a é o valor que calibra ro para T de modo a obter os valores iniciais
    k=1.3806504*10**-23
    C=1.60217646*10**-19
    c=297000000

    G=29
    # massas
    m1=C*0.511e6#electrao
    m2=C*105.66e6#muao
    m3=C*139.6e6#piao
    m4=C*175e6#desconfinamento
    m5=C*483e6#stranho
    m6=C*1.27e9#chame
    m7=C*177e6#tau
    m8=C*4.67e9#bottom
    m9=C*91.8e9#fracoes W+/- Z
    m10=C*114.4e9#higgs
    m11=C*172e9#top

    m=[m1,m2,m3,m4,m6,m7,m8,m9,m10,m11]

```

```

g=[14,14,12,178,42,14,42,36,4,42]

for i in range(10):
    if T*k>=m[i]:
        G+=g[i]
    return G

#valores iniciais

ty=1

ti=1+0.0170104291315+4.02163043244e-14

Q=1

Or=9.92823e-5
OL=0.726
Ob=0.0456
Od=0.228
Om=Ob+Od
Ok=1-Or-Om-OL

G=(8/3)*G*pi
K=(H0**2)*(c**2)/G

kep=open("univ1.txt",'w')
temp=open("temp.txt","w")
W=open("w.txt","w")
W1=open("w1.txt","w")
matéria=open("mat.txt","w")
radiacao=open("rad.txt","w")
nrj=open("ene.txt","w")
odet=open("rot.txt","w")
matéria2=open("mat2.txt","w")
radiacao2=open("rad2.txt","w")
nrj2=open("ene2.txt","w")
qdet=open("QT.txt","w")

dt=-0.01*ty
pre=0.002

t=ti
Qx=Q
T0=2.7
T1=2.7*(10**(-15))

g=2
m=a*mb*(c**2)
m1=a*md*(c**2)
u=m
ud=m1
ud1=0

Tr=T0
Td=T1

f=1/raden(Tr)

```

```

while Q>10**-28:
    tk=t
    Qk=Q
    Qk2=Q

#Calc de Pressão
#.calc de u
N=0
n=Ob
dp=0.01
du=dp
p=0
T=a*k*Tr

while abs(N-n)/n>0.01:
    p=0

    e=sqrt(p**2+m**2)
    dp=sqrt(((200*T+u)**2-((m)**2))*0.0001)
    du=dp/100000
    N=0
    n1=0
    n2=0
    while (e-u)/T<200:
        N+=g*(p**2)*dp*fer(e,u,T)*e
        n1+=g*(p**2)*dp*fer(e,u-du/2,T)*e
        n2+=g*(p**2)*dp*fer(e,u+du/2,T)*e
        p+=dp
        e=sqrt(p**2+m**2)

    dn=(n2-n1)/du
    u=u-(N-n)/dn
    #print(u,dn,N,n1,n2)
    print("beep")
    p=0
    P=0
    e=sqrt(p**2+m**2)
    while (e-u)/T<200:
        e=sqrt(p**2+m**2)
        P+=g*(p**4)*dp*fer(e,u,T)/(3*e)
        p+=dp
    print(P,P/N)

    if Td<5600:
        Pd=0
        Nd=Od
    else:
        p=0
        Nd=0
        nd=Od
        T=a*k*Td

    while abs(Nd-nd)/nd>0.01:
        p=0
        ut=ud+ud1

        e=sqrt(p**2+m1**2)

```

```

dp=sqrt(((200*T+ut)**2-((m1)**2))*0.0001
du=dp/10000
Nd=0
nd1=0
nd2=0
while (e-ut)/T<200:
    Nd+=g*(p**2)*dp*fer(e,ut,T)*e
    nd1+=g*(p**2)*dp*fer(e,ut-du/2,T)*e
    nd2+=g*(p**2)*dp*fer(e,ut+du/2,T)*e
    p+=dp
    e=sqrt(p**2+m1**2)

    dn=(nd2-nd1)/du
    ud1=ud1-(Nd-nd)/dn
    #print(ud1,dn,Nd,(Nd-nd)/dn)
print("burp")
p=0
Pd=0
e=sqrt(p**2+m1**2)

ut=ud+ud1

while (e-ut)/T<200:
    e=sqrt(p**2+m1**2)
    Pd+=g*(p**4)*dp*fer(e,ut,T)/(3*e)
    p+=dp
print(Pd,Pd/Nd)

#fim de calc de Pressão

Pb=P
Pr=(1/3)*Or
O=Ob+Or*f*raden(Tr)+Od

Q1=sqrt((O+OL)*(Q**2)+Ok)
Ob1=-3*(Ob+Pb)*Q1/Q
Od1=-3*(Od+Pd)*Q1/Q
Or1=-3*(Or+Pr)*Q1/Q

#ok

Qk+=Q1*dt
Qk2+=Q1*dt/2

Tr2=Tr*(Q/Qk2)

Ob2=Ob+(Ob1*dt/2)
Od2=Od+(Od1*dt/2)
Or2=Or+(Or1*dt/2)
Pb2=Pb
Pd2=Pd
Pr2=(1/3)*Or2
O2=Ob2+Or2*f*raden(Tr2)+Od2

Q1=sqrt((O2+OL)*(Qk2**2)+Ok)
Ob1=-3*(Ob2+Pb2)*Q1/Qk2
Od1=-3*(Od2+Pd2)*Q1/Qk2

```

$$Or1 = -3 * (Or2 + Pr2) * Q1 / Qk2$$

$$Qk2 += Q1 * dt / 2$$

$$Ob2 = Ob1 + (Ob1 * dt / 2)$$

$$Od2 = Od1 + (Od1 * dt / 2)$$

$$Or2 = Or1 + (Or1 * dt / 2)$$

$$err = \text{abs}((Qk - Qk2) / Qk2)$$

if err < pre:

$$Tr = Tr * (Q / Qk2)$$

$$Td = Td * ((Q / Qk2) ** (2 - 3 * (Pd / Nd)))$$

$$Qx = Q$$

$$Q = Qk2$$

$$Ob = Ob2$$

$$Od = Od2$$

$$Or = Or2$$

$$Om = Ob + Od$$

$$O = Om + Or * f * \text{raden}(Tr)$$

$$q = ((O + OL) + Ok * (Q ** 2)) ** -1$$

$$T = Tr$$

$$ta = t + 2.6230833014e-17$$

print (Q, Q1, Om, Or \* f \* raden(T), ta, T, Td, raden(T), log(Q, 10) / (-0.28))

print (Om \* q, Or \* q \* f \* raden(T), OL \* q)

kep.write(str(ta) + '\t' + str(Q) + '\n')

temp.write(str(ta) + '\t' + str(Tr) + '\n')

W.write(str(ta) + '\t' + str(P/N) + '\n')

W1.write(str(ta) + '\t' + str(Pd/Nd) + '\n')

matéria.write(str(ta) + '\t' + str(Om \* q) + '\n')

radiacao.write(str(ta) + '\t' + str(Or \* q \* f \* raden(T)) + '\n')

nrj.write(str(ta) + '\t' + str(OL \* q) + '\n')

matéria2.write(str(ta) + '\t' + str(Om) + '\n')

radiacao2.write(str(ta) + '\t' + str(Or \* f \* raden(T)) + '\n')

nrj2.write(str(ta) + '\t' + str(OL) + '\n')

odet.write(str(T) + '\t' + str(O) + '\n')

qdet.write(str(T) + '\t' + str(Q) + '\n')

t += dt

else:

$$Qx = Q$$

$$dt = dt / 2$$

kep.close()

temp.close()

W.close()

W1.close()

matéria.close()

```
radiacao.close()
nrj.close()
odet.close()
matéria2.close()
radiacao2.close()
nrj2.close()
qdet.close()
```