



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *18/10/2016* par :

GIOVANNI MARCELLO MIROUH

**Rôle de la rotation différentielle sur le spectre basse
fréquence des étoiles en rotation rapide**

JURY

JÉRÔME BALLOT	Chargé de Recherche	Co-directeur de thèse
ISABELLE BARAFFE	Directrice de Recherche	Rapportrice
MARC-ANTOINE DUPRET	Professeur	Rapporteur
BENOÎT MOSSER	Professeur	Examineur
DANIEL REESE	Astronome adjoint	Examineur
MICHEL RIEUTORD	Professeur	Directeur de thèse
SYLVIE VAUCLAIR	Professeure émérite	Présidente du jury

École doctorale et spécialité :

SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur(s) de Thèse :

Michel RIEUTORD et Jérôme BALLOT

Rapporteurs :

Isabelle BARAFFE et Marc-Antoine DUPRET



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *18/10/2016* par :

GIOVANNI MARCELLO MIROUH

**Rôle de la rotation différentielle sur le spectre basse
fréquence des étoiles en rotation rapide**

JURY

JÉRÔME BALLOT	Chargé de Recherche	Co-directeur de thèse
ISABELLE BARAFFE	Directrice de Recherche	Rapportrice
MARC-ANTOINE DUPRET	Professeur	Rapporteur
BENOÎT MOSSER	Professeur	Examineur
DANIEL REESE	Astronome adjoint	Examineur
MICHEL RIEUTORD	Professeur	Directeur de thèse
SYLVIE VAUCLAIR	Professeure émérite	Présidente du jury

École doctorale et spécialité :

SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur(s) de Thèse :

Michel RIEUTORD et Jérôme BALLOT

Rapporteurs :

Isabelle BARAFFE et Marc-Antoine DUPRET

Sommaire

Introduction générale	1
1 Observations	5
1.1 Mesures de la rotation	5
1.1.1 Mesure du $v \sin i$	5
1.1.2 Modulation rotationnelle et taches stellaires	10
1.1.3 Mesure de l'aplatissement centrifuge et de l'assombrissement gravitationnel	12
1.2 Oscillations des étoiles	13
1.2.1 Photométrie	13
1.2.2 Spectroscopie	15
1.2.3 Pulsateurs de type précoce	16
2 Structure et sismologie des étoiles	19
2.1 Évolution des étoiles en rotation	19
2.2 Structure des étoiles en rotation rapide	24
2.2.1 Modèle de Roche	24
2.2.2 Assombrissement gravitationnel	28
2.2.3 Circulation méridienne	29
2.3 Sismologie des étoiles en rotation	31
2.3.1 Formalisme	31
2.3.2 Domaines et propriétés de propagation	32
2.3.3 Mécanismes d'excitation	37
2.3.4 Pulsateurs de type précoce	39
2.3.5 Régularités dans le spectre	41
3 Modes gravito-inertiels : étude théorique avec un modèle simplifié	49
3.1 Formalisme	50
3.1.1 Description de l'état d'équilibre	50
3.1.2 Domaine de paramètres	53
3.1.3 Étude non-dissipative	54
3.1.4 Étude dissipative	56
3.2 Géométrie des modes	58
3.2.1 Classification des modes	58
3.2.2 Effet de la stratification	60
3.2.3 Illustration des diverses géométries	64
3.3 Instabilités possibles	64
3.3.1 Instabilités baroclines	66
3.3.2 Instabilités de cisaillement	67

3.3.3	Intégrales de travail	68
3.4	Exemples de modes	69
3.4.1	Attracteurs	69
3.4.2	Latitudes critiques	74
3.4.3	Piégeage en coin	75
3.4.4	Résonances de corotation	77
3.4.5	Modes réguliers	81
3.5	Améliorations possibles	81
4	Modélisation directe des étoiles en rotation rapide	85
4.1	Modélisation directe	85
4.2	Association ESTER - TOP	86
4.2.1	Géométrie des étoiles en rotation rapide	86
4.2.2	Le code ESTER	88
4.2.3	Les oscillations TOP	90
4.3	Traitement des modes obtenus	92
4.3.1	Visibilité d'un mode	92
4.3.2	Calcul du taux d'amortissement	93
4.4	L'exemple de Rasalhague	94
4.4.1	Rasalhague : caractéristiques	94
4.4.2	Rasalhague : études antérieures	97
4.4.3	Nouveau calcul	98
4.5	Conclusion et améliorations possibles	102
	Conclusions et perspectives	105
	Annexes	121
A	Outils mathématiques	123
A.1	Harmoniques sphériques	123
A.1.1	Définition	123
A.1.2	Formulaire	125
A.2	Polynômes de Tchebychev	125
A.2.1	Définition	125
A.2.2	Propriétés	126
A.2.3	Exemples	126
B	Calculs dans la limite non-dissipative	127
B.1	Calcul de l'opérateur de Poincaré généralisé	127
B.2	Relation de dispersion, vitesses de groupe et de phase	128
B.3	Classification des modes gravito-inertiels	129
B.3.1	Modes axisymétriques	129
B.3.2	Modes non-axisymétriques	130
B.4	Exposants de Lyapunov	131

C	Proposition de cibles pour la mission TESS	133
C.1	La mission TESS	133
C.2	Résumé de notre proposition	133
D	Publications et communications	137
D.1	Publications	137
D.1.1	Dans des revues à comité de lecture	137
D.1.2	Actes de conférence	137
D.2	Communications	141
D.2.1	Présentations orales	141
D.2.2	Posters	141
D.2.3	Séminaires	141

Remerciements

Cette thèse est le recueil de trois années de travail à l’Observatoire Midi-Pyrénées. Ces trois années furent jalonnées de triomphe et de défaites, deux menteurs qu’il faut savoir accueillir du même front dit le poème. C’est surtout la représentation concrète d’une passion pour l’astronomie qui remonte à mon enfance. J’ai toujours en tête cette nuit où nous regardions blottis avec mes parents le passage de la comète Hale-Bopp. Ou bien encore, cette fascinante courte nuit au milieu du jour, que nous avons observée depuis les collines du Tarn, le 11 août 1999. Ces événements ont probablement planté une graine, un intérêt pour ce ciel étoilé, et j’aimerais remercier ici tous ceux qui ont su faire germer cette graine.

Évidemment je remercie tous ceux qui m’ont accompagné pendant la thèse, à commencer par mes encadrants Michel et Jérôme. Leur culture, leur attention et leur méticulosité sont des exemples pour tout chercheur en herbe. Un grand merci aux membres du jury également pour leurs commentaires avisés ; à Isabelle et Marc-Antoine, venus de loin pour écouter mon exposé, à Daniel pour sa disponibilité tout au long de mes années toulousaines (et malgré les commentaires sibyllins dans TOP), à Sylvie pour sa bienveillance permanente, et Benoît pour sa compassion et ses conseils littéraires. À ce jury, il convient d’ajouter les membres de mon comité de thèse, qui m’ont suivi au long de ces trois années : Gérard, et Éric, lequel a su trouver les mots pour dissiper mes doutes et me remotiver une après-midi de juillet au Danemark.

Je suis aussi très heureux d’avoir rencontré Torsten, qui sous un air grivois cache surtout une oreille attentive et un grand sens de l’amitié ; Thierry, dont les mots toujours optimistes et bienveillants m’ont parfois exaspéré mais souvent remonté le moral ; Bertrand, le cycliste le plus compétent derrière un écran au monde (ou bien le meilleur informaticien à pédales). Et je suis fier de pouvoir qualifier tant de gens d’amis, pèle-mêle : ce bon vieux Bill, Camille, Annick, Cyril, Jessie, Damien, Vincent, Morgan, Philou, Armelle, Delphine, Élodie, Mathieu, Antoine, Weikai, Domenico, Noemi, Ilane, Tonio, David et tant d’autres qui vont me manquer. Merci à tous ceux qui sont venus assister à mon exposé.

J’aimerais également exprimer ma gratitude envers ceux qui ont cultivé mon intérêt pour les sciences bien avant le doctorat, quand j’étais encore (plus) jeune et niais : en l’occurrence mes professeurs du secondaire et de prépa, dont les efforts et la vocation méritent d’être salués. Je pense tout particulièrement à messieurs Barrière, Mario, Caylet, Keller et Lavernhe, en espérant qu’ils aient un jour cette thèse entre les mains.

Gardant le meilleur pour la fin, je ne remercierai jamais assez mes parents Giovanni et Ornella. Eux qui se sont privés pour me donner une enfance où j’avais tout ce dont j’avais besoin, qui m’ont appris à marcher, lire et repasser, mais surtout à rester curieux, à me faire respecter tout en restant humble. J’espère les rendre fier, et j’espère pouvoir continuer encore longtemps.

Introduction générale

Dans l'Univers qui nous entoure, les étoiles représentent l'immense majorité de la masse visible. Celles-ci se forment par la condensation d'un nuage de gaz moléculaire, initialement en rotation très lente. En se concentrant, il se met à tourner plus vite sur lui-même par conservation du moment cinétique. L'étoile ainsi formée transforme progressivement les éléments de son cœur en éléments plus lourds, qu'elle expulse de nouveau vers le milieu interstellaire dans une fin de vie plus ou moins cataclysmique.

Les étoiles les plus légères ont des durées de vie très longues et n'ont pas encore terminé leur évolution depuis le Big Bang. En revanche, les étoiles massives ont des évolutions beaucoup plus rapides et des fins de vie brutales : elles ont eu le temps d'enrichir le milieu interstellaire, menant à une nouvelle génération d'étoiles plus métalliques, voire plusieurs. Ce sont donc ces étoiles massives qui enrichissent le milieu interstellaire en métaux, leur rôle primordial dans le cycle de la matière menant à la diversité d'éléments chimiques de l'Univers. En effet, pratiquement tout ce qui nous entoure est constitué d'éléments formés lors des réactions de fusion nucléaire dans les étoiles, pour la plupart dans les étoiles massives ou les supernovæ qui concluent leur évolution.

Environ 90% des étoiles sont détectées dans la phase thermiquement stable où l'hydrogène au cœur est transformé l'hydrogène en hélium par fusion : la séquence principale. On s'intéresse dans cette thèse aux étoiles de masse intermédiaire ou massives de la séquence principale. Elles ont un cœur convectif et une enveloppe radiative très épaisse. Par ailleurs, on mesure pour celle-ci des vitesses de rotation élevées, et ce par diverses méthodes : un élargissement par effet Doppler des raies d'absorption est observé par spectroscopie, la modulation rotationnelle induite par des taches à leur surface fait varier leur luminosité, et les changements de géométrie ou de température de surface induits par la rotation sont détectés par interférométrie.

Or, une rotation rapide modifie substantiellement la structure de l'étoile : celle-ci est aplatie par la force centrifuge. Cet aplatissement a de nombreuses conséquences sur la structure de l'étoile : d'abord il la rend intrinsèquement bidimensionnelle. La gravité et la température effectives ne sont plus constantes sur la surface : elles dépendent de la latitude, rendant les mesures évoquées ci-dessus dépendantes de l'inclinaison de l'axe de rotation de l'étoile par rapport à la ligne de visée. Enfin, l'interaction entre la stratification de la zone radiative et la rotation de l'étoile implique un écoulement barocline : l'écart entre les surfaces équipotentielles et isothermes crée une rotation différentielle et une circulation méridienne. Par le biais de la viscosité, cet écoulement va induire un transport de moment cinétique qui va directement jouer sur l'évolution de la circulation et la rotation différentielle elle-même. Par ailleurs, la circulation à grande échelle peut ainsi transporter les éléments lourds du cœur vers l'enveloppe tout en rapportant du combustible nucléaire dans l'autre sens : ceci peut donc modifier la taille du cœur, la durée de vie de l'étoile et le profil de température à sa surface. Ainsi ces étoiles doivent être étudiées avec des modèles de structure bidimensionnels, pour décrire ces effets de façon précise.

Malheureusement, les profils de rotation ou de stratification à travers l'étoile, et leur évolution, sont mal contraints : si la théorie qui les prédit est poussée, les observations les contraignant manquent car il est difficile de sonder l'intérieur d'une étoile sous la photosphère.

Le meilleur moyen de parvenir à des contraintes sur les couches profondes de l'étoile est l'astérosismologie. En effet, nombre des étoiles de masse intermédiaire à élevée de la séquence principale abritent des oscillations, qui traversent l'étoile et peuvent moduler la température et la luminosité de surface. Dès lors, les fréquences des variations que nous mesurons à la surface peuvent être exploitées pour remonter à la structure des couches qu'elles ont traversées. Nous sommes dans l'âge d'or de cette discipline : depuis que les missions spatiales CoRoT et Kepler ont permis d'obtenir des quantités phénoménales de données, et à la veille des missions TESS ou PLATO, des milliers de spectres d'oscillations d'une grande qualité ont été mesurés. En revanche, des progrès théoriques sont nécessaires pour tirer le plein potentiel de ces données. En effet, celles-ci imposent des contraintes fortes, à condition d'avoir des modèles suffisamment proches de la réalité, et une bonne connaissance des mécanismes gouvernant les oscillations. Aussi, l'identification des modes (c'est-à-dire l'association d'une fréquence mesurée à un mode d'oscillation calculé) est la condition nécessaire à l'interprétation des données astérosismologiques. Cette identification est encore très difficile dans le spectre d'une étoile en rotation rapide, les effets de la force de Coriolis et de l'aplatissement centrifuge sur les oscillations étant importants et mal contraints.

On s'intéresse dans ce travail aux modes à basse fréquence, et plus précisément aux modes gravito-inertiels. Ceux-ci se propagent dans la zone radiative de l'étoile, ils peuvent donc en sonder les couches profondes. Ils sont entretenus par la poussée d'Archimède et la force de Coriolis, ce qui les rend sensibles aux variations de densité et de vitesse de rotation. Ils fournissent donc un outil tout à fait adapté à l'étude de la structure des étoiles massives, et qui permettra d'imposer des contraintes fortes sur les modèles, notamment à l'interface entre le cœur et l'enveloppe. Malheureusement, les propriétés des modes propres sont encore mal connues dans les étoiles en rotation rapide, en particulier dans le cadre des modèles bidimensionnels évoqués ci-dessus.

La raison pour laquelle l'étude des modes gravito-inertiels dans les étoiles en rotation rapide pose encore de nombreux problèmes est assez simple : le problème idéal où tous les effets de diffusion sont négligés est mathématiquement mal posé, car il est gouverné par une équation de type hyperbolique ou mixte à laquelle on impose des conditions aux limites. Dès lors, nombre de ces modes sont singuliers alors que d'autres semblent réguliers. De nombreuses questions se posent à leur sujet, notamment celle de leur régularisation par la seule diffusivité thermique. Cependant la rotation différentielle qui affecte toutes les étoiles a un effet encore complètement inconnu sur ce type de mode : peut-elle accentuer leur singularité ? ou au contraire régulariser les modes ? peut-elle faire apparaître d'autres classes de modes ?

L'étude de son influence sur le spectre d'oscillation s'impose pour donner un cadre fiable à l'interprétation des données d'astérosismologie en provenance d'étoiles massives où la rotation est rapide.

Cette thèse a donc pour but de comprendre le rôle de la rotation différentielle sur le spectre basse fréquence des étoiles en rotation rapide.

Dans un premier temps, nous avons analysé les modes gravito-inertiels d'un modèle d'étoile sphérique et homogène dans l'approximation de Boussinesq. Ce modèle très simplifié permet de déterminer les propriétés de l'écoulement barocline affectant les régions radiatives d'une étoile massive en rotation. Les oscillations ont été étudiées de façon semi-analytique dans le

cas sans viscosité, et de manière numérique dans le cas dissipatif. La comparaison de ces deux méthodes d'analyse a permis d'obtenir un panorama des propriétés fondamentales des modes gravito-inertiels en présence de rotation différentielle.

Ensuite, nous avons cherché à revenir à des configurations plus réalistes, incluant notamment l'aplatissement centrifuge, grâce aux modèles bidimensionnels ESTER. Ces modèles de structure prennent en compte de manière autocohérente les effets de la rotation décrits ci-dessus. Ils ont été associés au calcul d'oscillations par le programme TOP, dans sa version adiabatique. TOP est le premier code à implémenter un calcul linéaire non-perturbatif des oscillations en géométrie sphéroïdale et atteignant une précision comparable à celle des codes monodimensionnels. Pour cela, les perturbations tridimensionnelles du profil d'équilibre bidimensionnel sont décomposées sur une grille spectrale en rayon, et projetées sur la base des harmoniques sphériques en latitude et en azimut. Nous avons choisi comme premier cas d'étude l'étoile proche Rasalhague (α Oph), un rotateur rapide dont les paramètres fondamentaux ont été obtenus par interférométrie, et pour lequel de nombreuses fréquences de pulsation (incluant des modes gravito-inertiels) ont été mesurées.

Ces résultats sont présentés sur quatre chapitres. Le préliminaire à tout notre travail de théorie étant évidemment l'observation, je présenterai au chapitre 1 les diverses méthodes d'observation directe de la rotation des étoiles, la détection des pulsations et les missions spatiales récentes d'astérosismologie. Je décrirai ensuite brièvement la structure de ces étoiles, ainsi que les méthodes et résultats de l'astérosismologie avec une emphase particulière sur les effets de la rotation dans le chapitre 2. Le chapitre 3 présente l'étude théorique des modes gravito-inertiels, avec un modèle simplifié et les résultats obtenus. Enfin, le chapitre 4 développe une application concrète d'étude astérosismologique du rotateur rapide de type précoce Rasalhague. Ces travaux, dont j'évoquerai la portée et les limitations, permettent de proposer des pistes pour de futurs travaux de recherche dans ce domaine.

1

Observations

Sommaire

1.1 Mesures de la rotation	5
1.1.1 Mesure du $v \sin i$	5
1.1.2 Modulation rotationnelle et taches stellaires	10
1.1.3 Mesure de l'aplatissement centrifuge et de l'assombrissement gravitationnel	12
1.2 Oscillations des étoiles	13
1.2.1 Photométrie	13
1.2.2 Spectroscopie	15
1.2.3 Pulsateurs de type précoce	16

La détermination des paramètres fondamentaux des étoiles (masse, rayon, température effective ou vitesse de rotation) est un défi qui a vu naître de nombreuses méthodes complémentaires d'observation. En effet, hormis pour le Soleil, il n'est pas possible de résoudre la surface stellaire de façon simple : il a donc été nécessaire de développer des méthodes pour interpréter la lumière émise par ce qui apparaît comme un point lumineux dans le ciel. De plus, cette lumière provient de la photosphère, une couche très peu profonde dans l'étoile qui en écrante totalement l'intérieur. L'objet de cette thèse étant l'étude des étoiles en rotation rapide par l'astérosismologie, je présenterai dans cette section les diverses observations permettant de déduire la vitesse de rotation moyenne des étoiles, mais aussi la rotation différentielle en latitude à la surface comme en profondeur, et aborderai ensuite les moyens de détection des pulsations stellaires.

1.1 Mesures de la rotation

1.1.1 Mesure du $v \sin i$

La lumière reçue des étoiles a un spectre continu très proche d'un rayonnement de corps noir, auquel s'ajoutent des raies d'absorption correspondant à des transitions électroniques dans les atomes et les ions de l'atmosphère stellaire. En plus de donner de nombreuses informations sur la température effective, la gravité et les abondances de surface, l'analyse spectrale des raies photosphériques permet de mesurer la rotation de la surface stellaire. Lorsque l'étoile tourne sur elle-même, une moitié du disque visible s'approche de l'observateur pendant que l'autre moitié s'en éloigne : par effet Doppler, ce mouvement induit un décalage des longueurs d'onde apparentes de la lumière émise par l'étoile

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{\text{rel}}}{c} \quad (1.1)$$

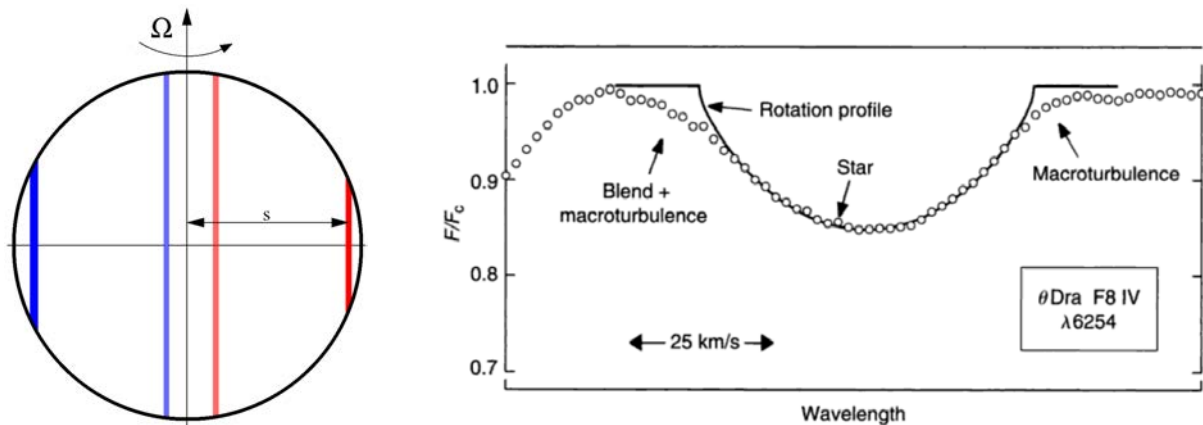


FIGURE 1.1 – Élargissement des raies par effet Doppler. La figure de gauche illustre le décalage de la lumière vers le rouge ou le bleu, proportionnel à la distance à l’axe s . À droite, le profil de raie résultant de la rotation (en trait plein) et un exemple de mesure (cercles), pour l’étoile θ Dra. On voit que le profil de rotation se connecte au continuum via deux points anguleux, lesquels sont lissés par d’autres phénomènes physiques. Figure de droite tirée de GRAY (2008).

où λ_0 est la longueur d’onde de la raie d’absorption au repos et λ celle de la raie en mouvement, v_{rel} est la vitesse relative de la source du photon par rapport à l’observateur et c la vitesse de la lumière dans le vide. Apparaît donc un décalage vers le bleu de la partie de la lumière émise par la partie de l’étoile qui s’approche de l’observateur, et un décalage vers le rouge pour la partie qui s’en éloigne. Quand la rotation domine les autres mouvements du fluide à la surface de l’étoile (convection, oscillations,...), la vitesse relative du fluide dépend de la distance à l’axe de rotation s via $v_{\text{rel}} = \Omega s \sin i$, où Ω est la vitesse de rotation de la surface et i l’inclinaison de l’étoile (c’est-à-dire l’angle entre l’axe de rotation de l’étoile et la direction de l’observateur), si bien que la fraction de lumière émise est décalée en conséquence. La raie apparaît alors élargie, la valeur maximale du décalage Doppler correspondant au limbe, c’est à dire à la vitesse équatoriale projetée $\Omega R \sin i = v_{\text{eq}} \sin i$.

La figure 1.1 fournit un schéma expliquant le phénomène d’élargissement des raies. La contribution due à la rotation est isolée : il est important de remarquer que celle-ci rejoint le continuum en formant des points anguleux. L’ajustement peut ensuite être réalisé sur le profil moyen dans l’espace direct, soit sur la transformée de Fourier de celui-ci. Comme le montre la figure 1.2, les points anguleux à la limite du profil de raie en cloche font apparaître des lobes secondaires dans l’espace spectral. Ces lobes ont une taille caractéristique directement liée à l’inverse de $v \sin i$. Il existe de plus des techniques pour améliorer le rapport signal sur bruit des observations : le profil de raie utilisé est généralement un profil moyen, obtenu par exemple par la méthode de déconvolution par moindres carrés (DONATI et al. 1997). Ainsi les effets affectant toutes les raies de la même manière (rotation, assombrissement gravitationnel vu par le pôle) apparaissent nettement, tandis que les autres (macroturbulence, mélange de raies proches) sont lissés.

Il est également possible de détecter une rotation différentielle en latitude à la surface de

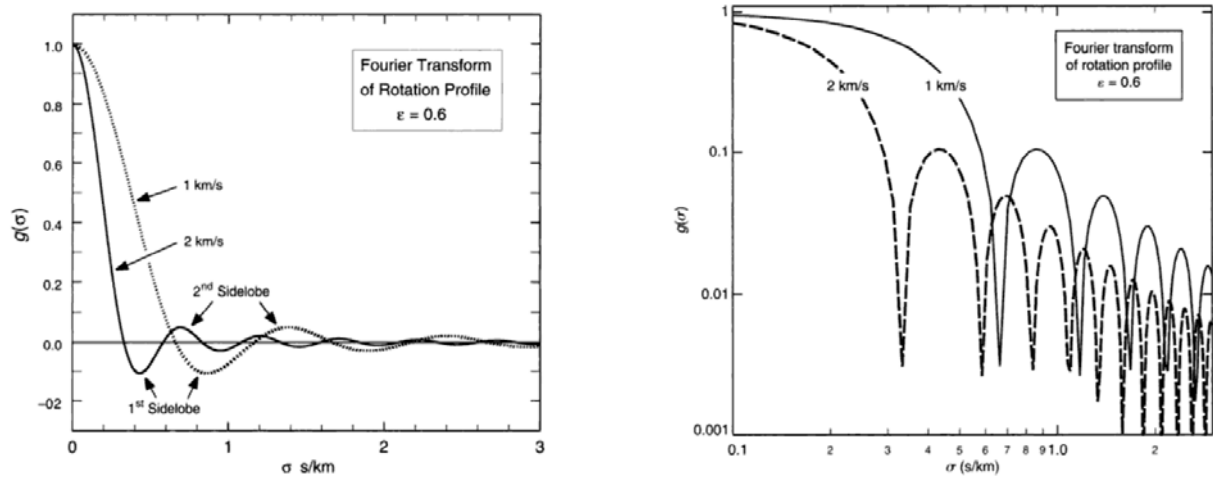


FIGURE 1.2 – Transformée de Fourier d’un profil de raie élargi par rotation, en échelle linéaire (à gauche) et log-log (à droite), pour des vitesses de rotation de 1 et 2 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. La largeur spectrale des lobes dépend grandement de la vitesse de rotation. Figures tirées de GRAY (2008).

certaines étoiles lors de la mesure du $v \sin i$. En effet, le profil de raie moyen qu’il est possible de déduire des mesures d’élargissement rotationnel est modifié dès lors que la rotation de surface n’est pas solide. Cet effet est particulièrement visible lorsqu’on étudie la transformée de Fourier du profil moyen de raie (voir REINERS et SCHMITT 2002). Comme l’illustre la figure 1.3 pour l’étoile ψ Cap, les points de données sont mieux ajustés si l’on suppose un profil de vitesse angulaire Ω du type $\Omega(\theta) \propto (1 - \alpha \sin^2 \theta)$ où θ est la latitude et α quantifie la rotation différentielle. La valeur $\alpha = 0,2$ est ici le meilleur ajustement, la rotation solide ($\alpha = 0$) n’expliquant pas tous les points de données dans l’espace de Fourier.

Ce travail de spectroscopie, contrairement aux autres méthodes que nous allons discuter, permet d’obtenir des informations sur tout type d’étoile. Ainsi, de nombreuses campagnes d’observation ont été menées et ont permis d’évaluer la vitesse de rotation d’étoiles de toutes masses et températures. Il est toutefois moins précis sur les étoiles chaudes, celles-ci ayant moins de raies photométriques mesurables. Pour des vitesses très élevées, les raies sont déformées, et le profil de raie dépend de l’abondance relative de chaque élément (comme l’ont montré TAKEDA, KAWANOMOTO et OHISHI 2008, pour Vega).

Aussi, l’abondance de chaque élément ionisé dans l’atmosphère stellaire ne dépend pas de la vitesse de rotation, l’aire des raies d’absorption est donc en première approximation constante, ce qui pose des problèmes pour les rotations lentes comme pour les rotations très rapides. En effet, une raie donnée d’un rotateur lent sera très piquée, mais les points anguleux ne seront plus visibles dans les spectres ; en revanche, la même raie très élargie par la rotation aura une profondeur faible, ce qui peut compliquer la détermination de la vitesse de rotation projetée.

Enfin, la vitesse mesurée est pondérée par $\sin i$: elle est égale à la vitesse propre de la surface stellaire lorsque l’étoile est vue par l’équateur ($i = 90^\circ$), mais s’annule pour une étoile vue par le

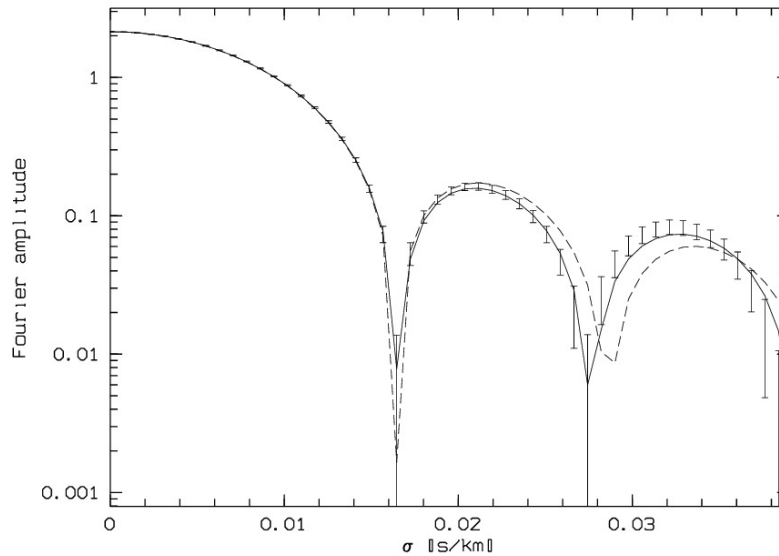


FIGURE 1.3 – Profil de rotation des raies dans l’espace de Fourier, pour ψ Cap. On voit que les points de mesure (représentés par les barres d’erreur) sont mieux ajustés par un profil avec rotation différentielle (trait plein) qu’avec un profil de rotation solide (trait interrompu). Figure tirée de REINERS, SCHMITT et KÜRSTER (2001).

pôle ($i = 0^\circ$). La mesure de l’inclinaison d’une étoile est complexe, les vitesses projetées mesurées sont donc des limites inférieures sur la vitesse de rotation propre. Même lorsque l’inclinaison d’un rotateur rapide est déterminée, la vitesse équatoriale peut être sous-estimée : en effet, à cause de l’effet d’assombrissement gravitationnel, l’équateur est moins brillant et la contribution des raies d’absorption correspondantes est moindre (COLLINS et TRUAX 1995). Il faudra prendre en compte ces effets aussi bien lors de l’étude des étoiles individuelles que lors d’études statistiques (ZOREC et ROYER 2012).

La spectroscopie a permis de mesurer la vitesse de rotation de surface de nombreuses étoiles à travers la séquence principale. Ces résultats ont été compilés dans ROYER (2009) et ZOREC et ROYER (2012), la figure 1.4 présente leurs résultats. La figure du haut montre les vitesses équatoriales projetées sur la ligne de visée $v \sin i$ pour chaque étoile de l’échantillon, en fonction de sa classe spectrale (a), ainsi que la densité d’étoiles sur ce même graphe (b). Il apparaît que les étoiles de la séquence principale se divisent en deux domaines : d’une part les étoiles de masse faible ou très faible qui tournent lentement, d’autre part les étoiles plus massives qui ont une vitesse projetée moyenne un ordre de grandeur plus élevée. La figure du bas montre la distribution de la vitesse de rotation à l’équateur v , une fois l’effet de l’inclinaison éliminé statistiquement, pour les étoiles de types A9 à B9. On y voit que toutes les étoiles de masse intermédiaire ou élevée ne sont pas des rotateurs rapides ($v \sim 200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$), les 20% étant des rotateurs lents ($v \sim 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$). La raison de cette dichotomie n’est pas encore très claire, mais il apparaît cependant déjà que la rotation est un élément essentiel de la physique de ces étoiles de type précoce.

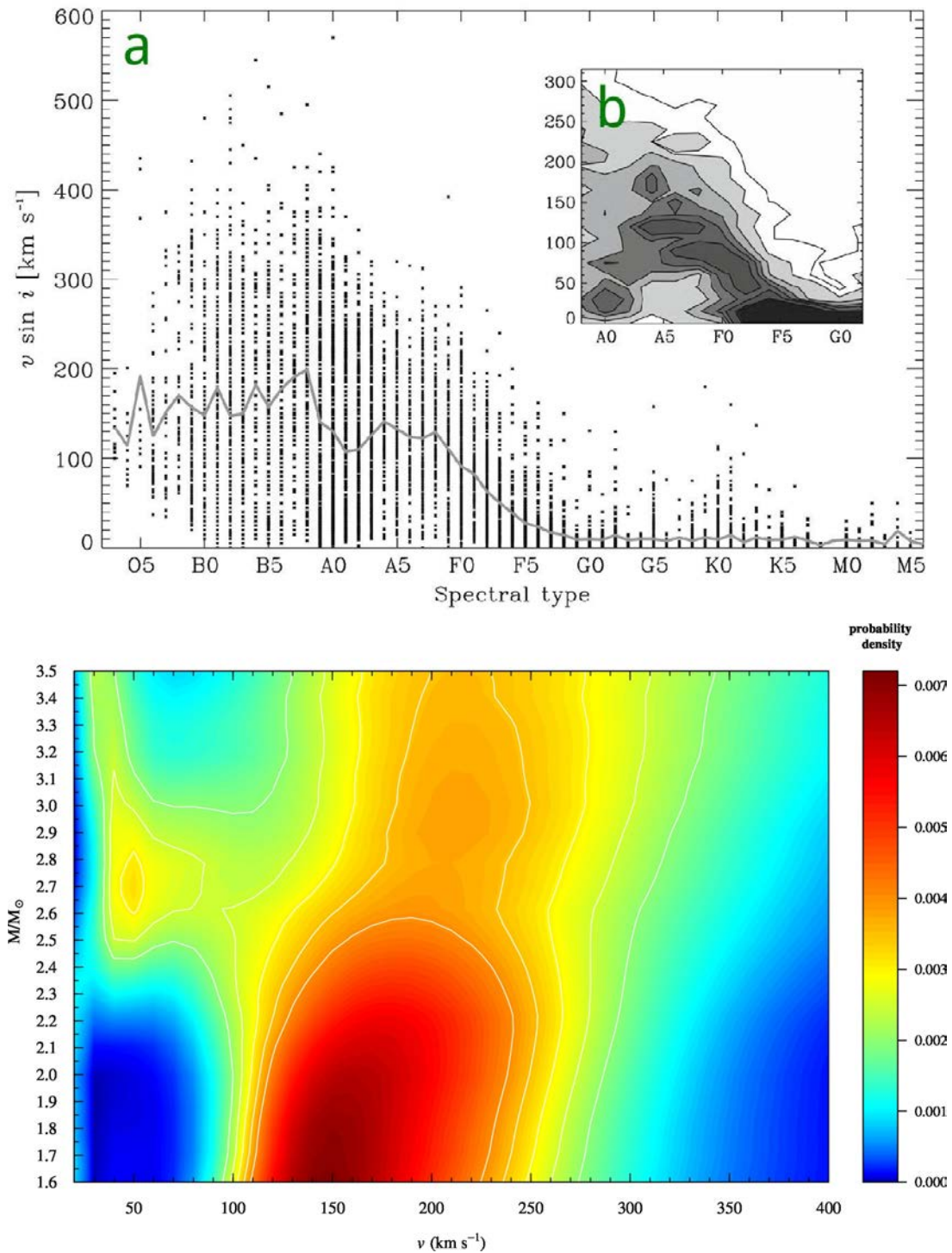


FIGURE 1.4 – Vitesses de rotation dans les étoiles de séquence principale. En haut : distribution des vitesses équatoriales projetées sur la ligne de visée $v \sin i$ en fonction de la classe spectrale. (a) : chaque point correspond à une étoile individuelle, la courbe grise reliant les moyennes pour chaque classe spectrale, (b) densité d'étoiles dans le même graphe, les couleurs foncées correspondant à la plus forte densité. En bas : densité d'étoiles dans le plan masse-vitesse équatoriale (l'effet de l'inclinaison a été déconvolué). On remarque une distribution bimodale pour les étoiles de masse $M > 2,5M_{\odot}$. Figures tirées de ROYER (2009) ; ZOREC et ROYER (2012).

1.1.2 Modulation rotationnelle et taches stellaires

La présence de taches (c'est-à-dire de structures en corotation avec la surface et moins chaudes que le fluide environnant) à la surface d'une étoile en rotation induit une modulation de sa luminosité de surface pouvant être mesurée. C'est aussi le cas en présence d'une facule, structure plus chaude que son environnement. La première étude scientifique sur le sujet est FABRICIUS (1611), qui utilisa un sténopé pour observer la surface du Soleil. Il en déduisit que ce dernier tournait sur lui-même. Afin de déterminer la période de cette rotation, SCHEINER (1630) suivit les taches solaires dans le temps. Il ne fallut pas longtemps pour se rendre compte que ces taches ne tournent pas toutes à la même vitesse : le profil de rotation à la surface du Soleil dépend de la latitude et l'équateur tourne plus rapidement que les pôles (avec des périodes de 25 et 29 jours environ, respectivement). Depuis le XVII^e siècle, les techniques d'observation se sont évidemment améliorées et permettent de mesurer les variations de luminosité induites par de beaucoup plus petites structures, à la surface d'étoiles beaucoup plus éloignées.

Une analyse fréquentielle des courbes de lumière fait alors apparaître la fréquence de rotation et ses harmoniques. Cette méthode a notamment été utilisée pour mesurer la fréquence de rotation des étoiles pulsantes α Ap ("rapidly oscillating Ap", KURTZ 1982). Il est même possible d'utiliser la répartition de ces petites taches, et sa variation en latitude au cours du temps pour déduire un profil de rotation différentielle. Par exemple, lors de la phase ascendante du cycle de onze ans du Soleil, les taches sont de plus en plus nombreuses et se répartissent de plus en plus près de l'équateur (on représente généralement cet effet sur le diagramme « papillon » du Soleil) : la rotation dépendant de la latitude, la répartition variable des taches induira une mesure de la période de rotation variant au cours du temps. On peut supposer qu'il en est de même dans des étoiles de structure similaire : dès lors on peut déduire un profil de rotation différentielle de surface à partir de mesures photométriques (MESSINA et GUINAN 2003).

Il est également possible d'étudier l'effet Doppler induit par la présence d'une tache : en effet, cette structure étant plus froide que son environnement, elle émet moins de lumière. Ainsi, si les raies sont suffisamment élargies par la rotation, on voit apparaître au fond de celles-ci une « bosse », dont le déplacement au fond du profil de raie suit celui de l'anomalie de température autour de l'axe de rotation. Ici encore, si plusieurs taches sont présentes, il est possible de les suivre de sorte à quantifier une éventuelle rotation différentielle. La figure 1.5 montre cet effet, avec l'exemple de deux grandes taches tournant à des vitesses différentes et induisant deux signatures différentes dans les profils de raie, révélant ainsi une rotation différentielle en latitude. Un tel suivi n'est pas possible lorsque la surface est constellée de petites taches, leurs signatures ne se distinguant pas assez clairement.

Un processus d'imagerie plus poussé est l'imagerie Zeeman-Doppler (SEMEL 1989). Celle-ci permet de détecter la signature des structures magnétiques à la surface d'une étoile via une mesure de la polarisation de la lumière (par analogie, on parle de « taches magnétiques »). Lorsque deux taches magnétiques apparaissent à des longitudes différentes, l'effet Doppler va séparer leurs contributions à la polarisation circulaire de la lumière émise. Une analyse de celle-ci en fonction de la longueur d'onde révèle la présence des taches dont on peut alors suivre le déplacement à la surface de l'étoile : on a là un moyen supplémentaire de déduire la période de rotation de la surface stellaire. L'effet Zeeman-Doppler permet aussi de dériver des cartes de la luminosité ou du champ magnétique au cours du temps (DONATI et al. 2000 ; ROETTENBACHER et al. 2016) et en déduire des profils de rotation en fonction de la latitude.

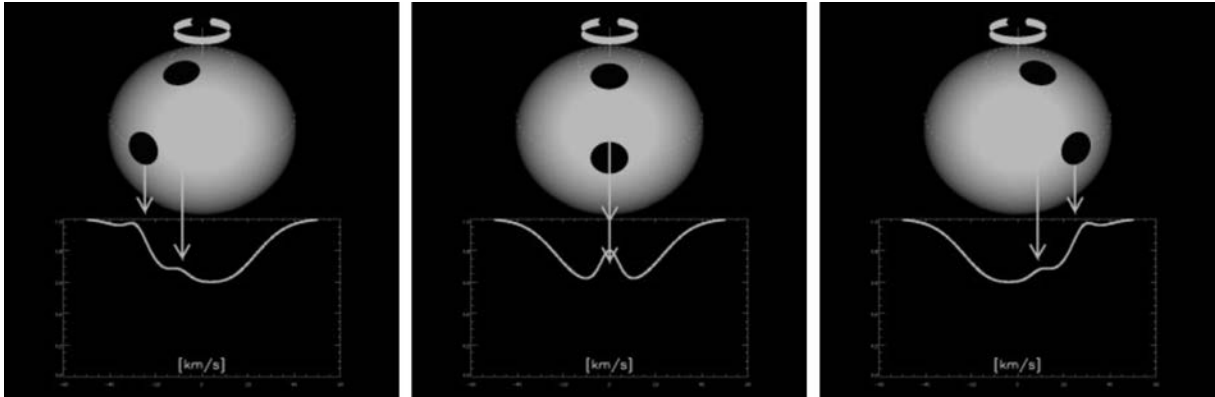


FIGURE 1.5 – Variation du profil de raie créée par deux taches : on voit que l’impact sur le profil de raie diffère selon la longitude de la tache, permettant ainsi de la suivre au cours de sa rotation. Comme on peut remarquer, on « traduit » l’élargissement par effet Doppler en termes de vitesse en traçant $c(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$. Figure tirée de RICE (2002).

En comparant les vitesses de rotation obtenues par le suivi des taches sombres par mesures Doppler, et celles obtenues lors du suivi des taches magnétiques par imagerie Zeeman-Doppler, une différence significative a été remarquée de nombreuses fois. Un tel écart provient en fait d’une différence dans la profondeur à laquelle les techniques d’imagerie sondent l’étoile : en effet, bien que les taches en brillance et les taches magnétiques soient détectées en surface, elles émergent de phénomènes physiques trouvant leur origine à des profondeurs différentes, mettant ainsi en évidence une rotation différentielle radiale sous la surface de l’étoile qu’il est possible de modéliser (voir DONATI, COLLIER CAMERON et PETIT 2003).

Néanmoins, ce genre de mesure est lui aussi limité par l’effet géométrique de l’inclinaison de l’étoile : la lumière émise par une étoile vue presque par le pôle ne présentera qu’une très faible modulation causée par une tache par exemple. Il est également nécessaire de tenir compte des pulsations, de la présence de planètes ou de matière circumstellaire, dont les effets peuvent faire varier le profil des raies spectrales à d’autres fréquences que celle de rotation (voir BÖHM et al. 2015, , par exemple). Par ailleurs, les étoiles de type précoce sont peu propices à la génération de taches à leur surface : hormis quelques travaux récents attribuant la détection de fréquences ne correspondant pas à des oscillations dans les spectres de certaines étoiles A (BALONA 2011, à partir de données Kepler) ou B (DEGROOTE et al. 2009, à partir de données CoRoT), les seules étoiles pour lesquelles une modulation rotationnelle a permis de déduire des vitesses de rotation sont les étoiles de type roAp déjà évoquées. Très récemment, BÖHM et al. (2015) ont toutefois réussi pour la première fois à détecter de petites taches à la surface de l’étoile A0 Vega, malgré une masse assez importante ($2,135M_{\odot}$, YOON et al. 2010) et une faible inclinaison (5 à 7°, PETERSON et al. 2006b).

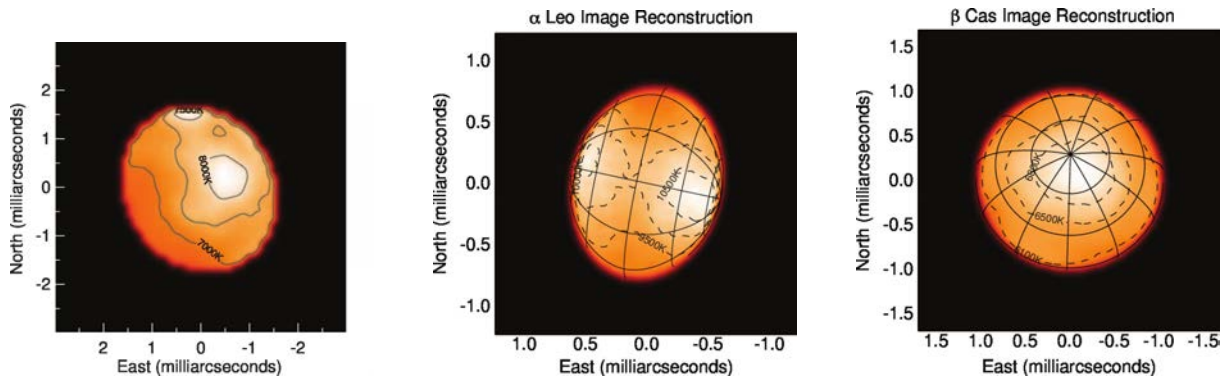


FIGURE 1.6 – Exemples de rotateurs rapides, observés en interférométrie infrarouge, permettant de visualiser l’aplatissement centrifuge et l’assombrissement gravitationnel. De gauche à droite : Altair (α Aql), Regulus (α Leo), Caph (β Cas). Figures tirées de MONNIER et al. (2007) ; CHE et al. (2011).

1.1.3 Mesure de l’aplatissement centrifuge et de l’assombrissement gravitationnel

En plus de modifier les profils de raies d’absorption ou de moduler la luminosité de surface, la rotation a des effets sur la structure stellaire qui peuvent être quantifiés. En effet, la rotation de l’étoile fait apparaître une force centrifuge, qui s’ajoute à la gravité de l’étoile : cette force est dirigée perpendiculairement à l’axe de rotation, vers l’extérieur, et est en général maximale à l’équateur. La géométrie de l’astre en est modifiée : on appelle cet effet l’aplatissement centrifuge. Un corollaire de l’aplatissement centrifuge est l’assombrissement gravitationnel : l’équateur étant plus éloigné que les pôles du cœur de l’étoile où est générée l’énergie, la température décroît des pôles vers l’équateur.

Si la rotation est suffisamment rapide, pour des étoiles suffisamment proches et brillantes, ces phénomènes d’aplatissement et d’assombrissement peuvent être mesurés en résolvant la photosphère des étoiles par interférométrie infrarouge ou visible entre des télescopes séparés de quelques centaines de mètres. Il est ainsi possible de relier la visibilité des franges d’interférence à la taille angulaire de la source : en répétant la mesure selon plusieurs axes on obtient une cartographie de la surface, permettant de décrire la forme et l’assombrissement de l’étoile (pour une revue des techniques mises en jeu, voir par exemple VAN BELLE 2012). L’estimation de la forme de l’étoile et du profil de température de surface permettent alors la détermination des paramètres fondamentaux. La figure 1.6 montre un exemple de telles mesures interférométriques pour différents rotateurs. Encore une fois, l’efficacité de cette mesure par interférométrie varie avec l’inclinaison de l’étoile : les effets évoqués ici sont plus évidents pour une étoile vue par l’équateur que pour une étoile vue par le pôle.

On peut également utiliser les clôtures de phase (JENNISON 1958). Il s’agit d’observables accessibles dès que trois antennes sont utilisées : dans le triangle ainsi formé, la somme des déphasages entre les antennes (qu’on appelle clôture de phase) s’annule si et seulement si l’image de l’astre projeté sur la sphère céleste a une symétrie centrale. Ceci peut correspondre à une étoile sans

rotation (sphérique), ou un rotateur rapide vu par le pôle par exemple. En revanche, si cette somme ne s'annule pas, c'est que l'astre a une géométrie différente, par exemple un sphéroïde non-homogène, ce qui correspondrait à un rotateur rapide avec une inclinaison modérée (MONNIER 2000). En utilisant différents triangles d'antennes, il est possible d'évaluer la déviation de la photosphère par rapport à la symétrie sphérique, et de positionner les pôles brillants pour déterminer l'inclinaison de l'étoile. Cette méthode permet d'annuler de nombreuses erreurs systématiques sur la mesure de la phase, mais est plus coûteuse puisque trois mesures de phase sont nécessaires pour une seule observable.

Comme nous l'avons mentionné, ces méthodes d'interférométrie sont applicables uniquement à des étoiles proches et suffisamment brillantes, lesquelles sont rares. Aussi, l'aplatissement centrifuge est négligeable pour les rotateurs lents. Cette méthode n'est donc adaptée que pour obtenir des caractéristiques précises d'un échantillon réduit d'étoiles.

1.2 Oscillations des étoiles

Avant d'entrer en détails sur les liens entre structure interne des étoiles et astérosismologie dans le chapitre 2.3, il est utile de détailler la nature des observations des pulsations stellaires : je décris donc dans cette section les méthodes de détection utilisées.

La première détection documentée d'une variabilité intrinsèque à une étoile date de 1596, où David Fabricius remarqua à l'œil nu la présence, la disparition puis la réapparition dans le ciel de l'étoile géante rouge Mira (*o Ceti*). Depuis, des pulsations ont été mesurées dans de nombreuses étoiles, à différents stades d'évolution.

1.2.1 Photométrie

Une méthode simple de détection des oscillations consiste à mesurer l'intensité lumineuse émise par une étoile, dans différentes bandes de longueur d'onde ou intégrée sur toutes les longueurs d'onde. Les modulations dans les courbes de lumière ainsi obtenues permettent, via une analyse de Fourier, d'obtenir les fréquences de chaque oscillation parcourant l'étoile.

La figure 1.7 donne l'exemple d'une courbe de lumière et du spectre de puissance associé pour l'étoile HD51756, observée par le satellite CoRoT (PÁPICS et al. 2011). En ce qui concerne le spectre d'oscillations, la largeur du domaine de fréquence pouvant être étudié est l'inverse de la cadence d'échantillonnage, alors que la résolution en fréquence est l'inverse de la durée totale d'observation. Les périodes de temps sans mesures (les « trous » dans les observations) amoindrissent la qualité des données, en introduisant des fréquences parasites qui peuvent être interprétées par erreur comme correspondant à des oscillations stellaires.

Par ailleurs, il ne faut pas oublier qu'à part pour le Soleil, il est impossible de résoudre la surface des étoiles par photométrie. Les observations sont des intégrales sur la totalité de la photosphère de l'étoile, et dès lors, des contributions de différentes zones de la surface stellaire peuvent se compenser. Ainsi, des modes présentant des variations à grande échelle sur la surface induiront une variation visible de l'intensité lumineuse, alors que les effets de nombreuses variations de surface à petite échelle s'annuleront. Le calcul des visibilités de surface des modes sera donc un enjeu de l'identification des modes observés (voir BUTA et SMITH 1979 ; REESE et al. 2013) pour les rotateurs rapides, et ma section 4.3.1). Enfin, lorsque les observations sont effectuées depuis le sol, il faut compenser les effets de l'atmosphère terrestre en utilisant une étoile non variable proche de la cible comme étalon. Les mesures n'étant possibles que de nuit, elles sont

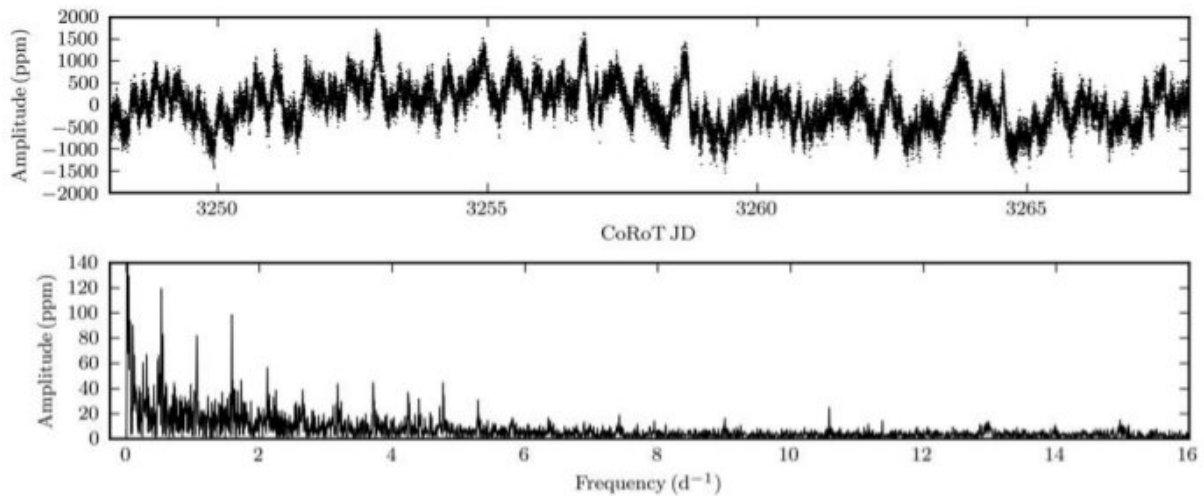


FIGURE 1.7 – En haut : Courbes de lumière de l'étoile B0.5IV HD51756 obtenues avec le satellite CoRoT. En bas : spectre de puissance associé. Figure tirée de PÁPICS et al. (2011).

très lacunaires, à moins d'un réseau de plusieurs télescopes.

C'est pour s'affranchir de ces contraintes que plusieurs missions spatiales de photométrie dans l'optique ont observé des étoiles variables, fournissant des spectres d'oscillation toujours plus nombreux, à la sensibilité et stabilité toujours accrues.

Les débuts de l'astérosismologie spatiale sont représentés par la mission WIRE, un satellite initialement prévu pour des observations dans l'infrarouge dont le viseur d'étoiles a été reconverti en satellite d'astérosismologie après une défaillance de son instrument principal dès l'arrivée en orbite. Le satellite MOST, lui aussi consacré à l'astérosismologie, observe des étoiles individuelles pour des durées allant jusqu'à 60 jours.

Face au succès de ces missions, et suite aux premières détections d'exoplanètes depuis le sol, des missions ambitieuses d'astérosismologie couplées à des missions de détection d'exoplanètes, ont radicalement changé le paysage. C'est le cas de CoRoT, qui a observé plus de 160 000 étoiles dans différentes zones du ciel, pour des durées typiques de quelques mois, permettant ainsi d'obtenir une quantité d'informations et une précision inédites. La mission Kepler lui a emboîté le pas et observé un champ fixe à haute cadence de façon quasi-ininterrompue pendant quatre ans, permettant d'obtenir une résolution en fréquence hors-norme. Malgré la défaillance de plusieurs de ses stabilisateurs, le satellite est toujours fonctionnel et observe différents champs dans le plan de l'écliptique pour des durées de trois mois (il s'agit de la mission K2). La mission PLATO 2.0, en cours de développement, a l'ambition de continuer ce travail en observant plusieurs champs beaucoup plus grands.

Face à ces grands projets, il faut souligner l'existence de deux autres missions : d'abord, la constellation de nanosatellites BRITe, permettant d'observer des étoiles en plusieurs couleurs, pour quelques mois. À cause de la technologie utilisée et des dimensions des satellites, ces observations sont limitées aux étoiles les plus brillantes du ciel : cette mission est toutefois

Mission	Dates	Agence	Référence
WIRE Wide field InfraRed Explorer	1999-2010	États-Unis	BUZASI et al. (2000)
MOST Microvariability and Oscillations of Stars	2003-	Canada	WALKER et al. (2003)
CoRoT COnvection ROtation et Transits planétaires	2006-2013	France	BAGLIN et al. (2009)
Kepler	2009-2013	États-Unis	GILLILAND et al. (2010)
K2	2013-	États-Unis	HOWELL et al. (2014)
BRITE BRiGht Target Explorer	2013-	Canada Autriche Pologne	WEISS et al. (2014)
TESS Transiting Exoplanet Survey Satellite	2017-2019	États-Unis	RICKER (2014)
PLATO 2.0 PLANetary Transits and Oscillations of stars	2024-2030	Europe	RAUER et al. (2014)

TABLE 1.1 – Historique des missions spatiales d’astérosismologie passées, présentes et futures.

intéressante car beaucoup de ces cibles sont des étoiles de type précoce, dont on a vu qu’il s’agit généralement de rotateurs rapides. Enfin, la mission TESS, en cours de développement, est elle aussi consacrée à l’étude des étoiles les plus brillantes du ciel, et balayera la presque totalité de la sphère céleste avec des observations de durées allant d’un mois à un an (voir l’annexe C).

Les spécificités de chacune de ces missions, et les références associées, sont données en table 1.1.

1.2.2 Spectroscopie

Il existe plusieurs techniques de spectroscopie afin de mesurer les oscillations se propageant dans une étoile. Pour cela, on observe les variations des raies d’absorption de l’atmosphère au cours de temps.

La première méthode d’analyse consiste à suivre l’évolution de la position du centre de la raie, ce qui permet de détecter une variation de la vitesse radiale. Une telle modification peut être induite par la présence d’une étoile compagnon ou d’une planète, ou bien d’un mouvement du gaz en surface induit par une pulsation stellaire. Cette méthode perdant toutefois en précision lorsque la raie est élargie, elle semble réservée aux rotateurs lents (BEDDING et KJELDSSEN 2003). La variation de température de surface causée par les oscillations peut induire directement une variation de l’élargissement de certaines raies du spectre de l’étoile. Par exemple, la largeur des raies de Balmer de l’hydrogène est très sensible à la température de surface, pouvant ainsi indiquer la présence d’une oscillation périodique.

Il est également possible d’étudier plus en détail les variations du profil de la raie pour y observer des oscillations. De la même manière qu’une tache peut modifier le profil de la raie, les pulsations entraînent l’apparition de zones plus ou moins brillantes à la surface de l’étoile, qui induisent une signature se déplaçant au cours du temps à travers le profil de raie (BRIQUET et AERTS 2003 ;

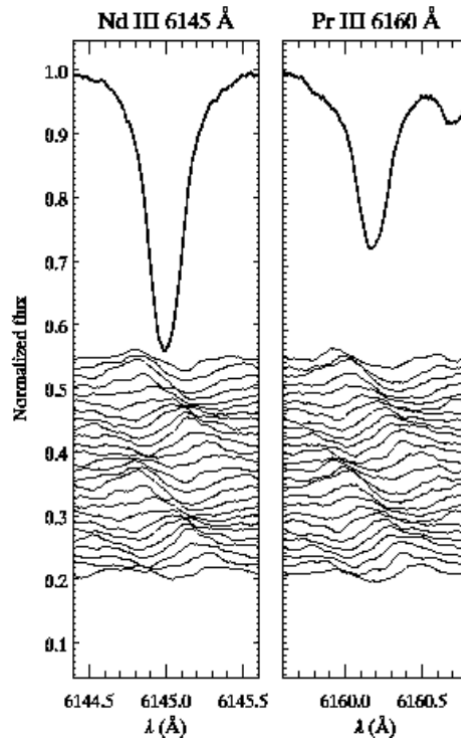


FIGURE 1.8 – Variations du profil de raie causées par une oscillation. Les courbes montrent le profil moyen des raies de NdIII à 6145 Å et PrIII à 6160 Å dans l'étoile γ Equ. Les traits plus fins en dessous montrent une série temporelle de la variation à intervalles réguliers, obtenue en soustrayant le profil moyen au profil mesuré à chaque temps. Figure adaptée de KOCHUKHOV et al. (2007).

ZIMA 2006). La figure 1.8 montre un exemple de variation du profil de raie caractéristique des oscillations. Il est à noter que cette signature est différente de celle d'une tache car sa périodicité est différente de celle de la rotation de la surface de l'étoile, et qu'une rotation rapide facilite sa détection en élargissant le profil de la raie. Au prix d'une analyse plus compliquée que pour un signal photométrique, la spectroscopie permet donc d'accéder à une cartographie en longitude de la moitié visible de l'étoile. Ainsi, il est possible de détecter des structures à plus petite échelle azimutale, en s'affranchissant partiellement de certains effets de moyenne présents lors de la mesure de vitesse radiale ou photométrique.

1.2.3 Pulsateurs de type précoce

Maintenant que nous avons donc décrit les différentes méthodes de détection des oscillations dans une étoile, il convient de souligner que des pulsations ont été détectées dans presque tous les types d'étoiles, des étapes de pré-séquence aux naines blanches, sur la séquence principale des naines rouges aux étoiles les plus massives. Nombre des étoiles de type précoce de la séquence

principale oscillent, et plusieurs classes de ces pulsateurs ont été définis.

Notre étude sera principalement focalisée sur cinq classes de ces étoiles :

- parmi les étoiles de masse intermédiaire, on trouve les étoiles γ Doradus de classes spectrales A tardif ou F,
- un peu plus massives, viennent ensuite les étoiles de type δ Scuti de classe A ou F précoce,
- à cheval sur les types spectraux B et A ont été récemment détectées des étoiles pulsantes dites de type Maia, mais leur appartenance à une nouvelle classe de pulsateurs spécifique fait toujours débat,
- les étoiles SPB (pour “Slowly Pulsating B stars”), de classes spectrales B3 à B9, se distinguent via leurs basses fréquences d’oscillations,
- enfin les plus massives de ces étoiles pulsantes, de classe spectrale B0 à B2, forment la classe des β Cephei.

Comment l’étude sismologique de ces étoiles peut nous permettre d’en décrire la structure interne plus en détails est la problématique du chapitre suivant. Les questions principales vont être celles de l’entretien des ondes, et l’influence sur celles-ci d’une rotation, notamment différentielle.

2

Structure et sismologie des étoiles

Sommaire

2.1	Évolution des étoiles en rotation	19
2.2	Structure des étoiles en rotation rapide	24
2.2.1	Modèle de Roche	24
2.2.2	Assombrissement gravitationnel	28
2.2.3	Circulation méridienne	29
2.3	Sismologie des étoiles en rotation	31
2.3.1	Formalisme	31
2.3.2	Domaines et propriétés de propagation	32
2.3.3	Mécanismes d'excitation	37
2.3.4	Pulsateurs de type précoce	39
2.3.5	Régularités dans le spectre	41

2.1 Évolution des étoiles en rotation

Nous avons vu au chapitre précédent que la plupart des étoiles de type précoce de la séquence principale sont en rotation rapide sur elles-mêmes. Je décris donc dans cette section l'évolution de la rotation au cours de la vie de l'étoile, en s'intéressant à l'évolution du moment cinétique.

Avant la séquence principale

Les étoiles se forment au sein de nuages denses du milieu interstellaire : une fois qu'ils atteignent une masse (ou une taille) critique, ceux-ci s'effondrent sous l'effet de l'instabilité gravitationnelle (JEANS 1902). Chaque nuage se fragmente alors, chaque fragment condensant en un cœur protostellaire initialement convectif entouré d'un disque d'accrétion. La cellule de gaz interstellaire à partir de laquelle l'étoile se forme voit alors ses dimensions caractéristiques passer de $\sim 10^4$ à ~ 20 unités astronomiques au cours de son effondrement (CASELLI et CECCARELLI 2012). On définit le moment cinétique L total à partir de la vitesse de rotation Ω par

$$L = \int_V s^2 \Omega dV, \quad (2.1)$$

où s est la distance à l'axe de rotation. Si l'on suppose que le moment cinétique est conservé au cours de la formation, alors $\Omega \propto R^{-2}$ et l'objet protostellaire atteint alors une vitesse de rotation $\sim 10^5$ fois supérieure à celle du nuage initial. Cette concentration intense du moment

cinétique montre que la rotation joue un rôle essentiel dans la formation et l'évolution stellaire. Par ailleurs, si la rotation est trop rapide, la force centrifuge peut éjecter de la matière, qui emporte donc avec elle une partie du moment cinétique du nuage initial.

Les étoiles n'étant pas toutes des rotateurs rapides, il est nécessaire de ralentir l'objet protostellaire avant qu'il n'atteigne la séquence principale, et plusieurs mécanismes ont été suggérés à cette fin. Le plus plausible est le freinage magnétique : l'étoile en formation est entourée d'un disque qui tourne plus lentement que l'étoile, un couplage magnétique entre l'étoile et la zone interne du disque permet alors de transférer du moment cinétique de l'étoile au disque. Ce transfert tend à homogénéiser leurs vitesses de rotation, et donc à ralentir l'étoile.

L'accrétion sur ce cœur préstellaire continue, celui-ci s'échauffe jusqu'à entraîner la fusion du deutérium : c'est la naissance de l'étoile. Hormis dans les naines brunes, l'hydrogène est ensuite transformé en hélium, lorsque l'étoile atteint la séquence principale.

Vie sur la séquence principale

Pour comprendre l'origine de ce nom, il convient d'introduire le diagramme de Hertzsprung-Russell. On place chaque étoile sur celui-ci en fonction de sa magnitude absolue et de sa couleur (on parle de diagramme H-R observationnel), ou de manière équivalente de sa luminosité intrinsèque et de sa température ou sa classe spectrale (on parle de diagramme H-R théorique). La figure 2.1 donne un exemple d'un tel diagramme, avec les deux types d'axes. La plupart des étoiles (environ 90%) se rangent sur une diagonale où température et luminosité sont (approximativement) reliées par une loi d'échelle : c'est elle qu'on appelle la séquence principale. Cette séquence correspond aux étoiles fusionnant leur hydrogène en hélium : on désigne donc par extension la phase correspondante « phase de séquence principale ». Les réactions dans les étoiles les plus légères passent principalement par la chaîne proton-proton. Les étoiles dont le cœur atteint une température de 18 millions de Kelvin (c'est-à-dire à $M \gtrsim 1,5M_{\odot}$) fusionnent en revanche l'hydrogène en hélium en passant plutôt par le cycle CNO.

Si la plupart des étoiles sont observées sur la séquence principale, c'est parce qu'elles passent la majeure partie de leur vie dans cette phase. L'évolution des paramètres fondamentaux y est très lente : les étoiles perdent très lentement de la masse au travers de vents stellaires, et au fur et à mesure que l'hydrogène au cœur est fusionné en hélium, le cœur se densifie et l'enveloppe s'étend, faisant ainsi légèrement augmenter le rayon stellaire. La durée de vie sur la séquence principale τ_{MS} dépend de la masse via la relation

$$\tau_{\text{MS}} \sim 10^{10} \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^{-5/2} \text{ années.} \quad (2.2)$$

Le long de la séquence principale, les étoiles voient leur vitesse de rotation diminuer à cause des processus de perte de masse : les vents stellaires emportent avec eux une partie de la matière. Le fait d'éloigner cette masse de l'axe de rotation fait diminuer le moment cinétique propre à l'étoile et la ralentit. Cet effet a été quantifié par SKUMANICH (1972), qui proposa une loi d'échelle reliant la vitesse angulaire de l'étoile à son âge :

$$\Omega \propto t^{1/2}. \quad (2.3)$$

En utilisant cette relation, qui s'applique aux étoiles magnétisées (et donc plutôt de type tardif), on peut chercher à déterminer l'âge d'une étoile à partir de sa vitesse de rotation : on parle alors

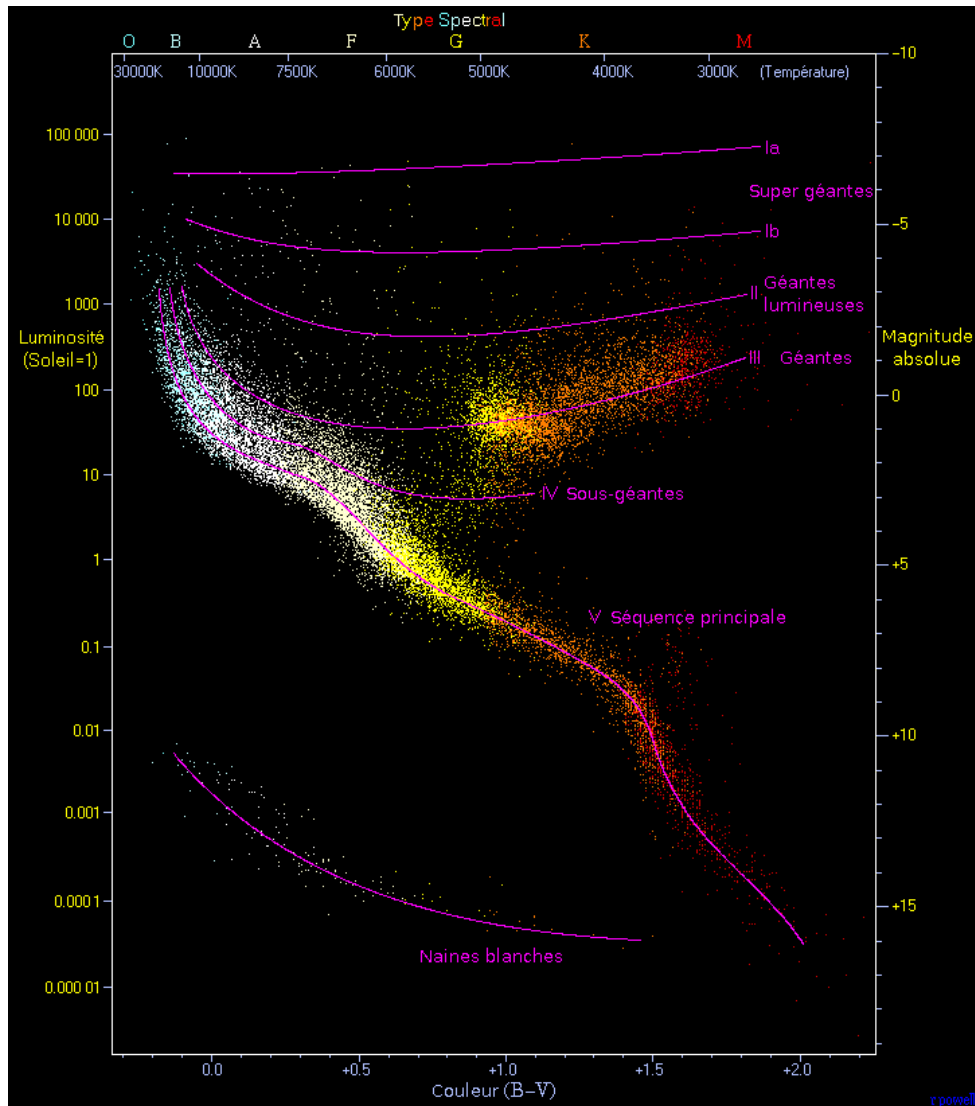


FIGURE 2.1 – Diagramme de Hertzsprung-Russell des étoiles appartenant aux catalogues Hipparcos et Gliese. Les axes en bas et à droite indiquent les quantités « observationnelles », et les axes en haut et à gauche les quantités « théoriques ». Chaque point coloré est une étoile de la même couleur apparente. Le plus grand nombre des étoiles se situent sur la séquence principale (V) : le long de cette séquence, la masse décroît de gauche à droite. Figure par POWELL (CC-BY-SA).

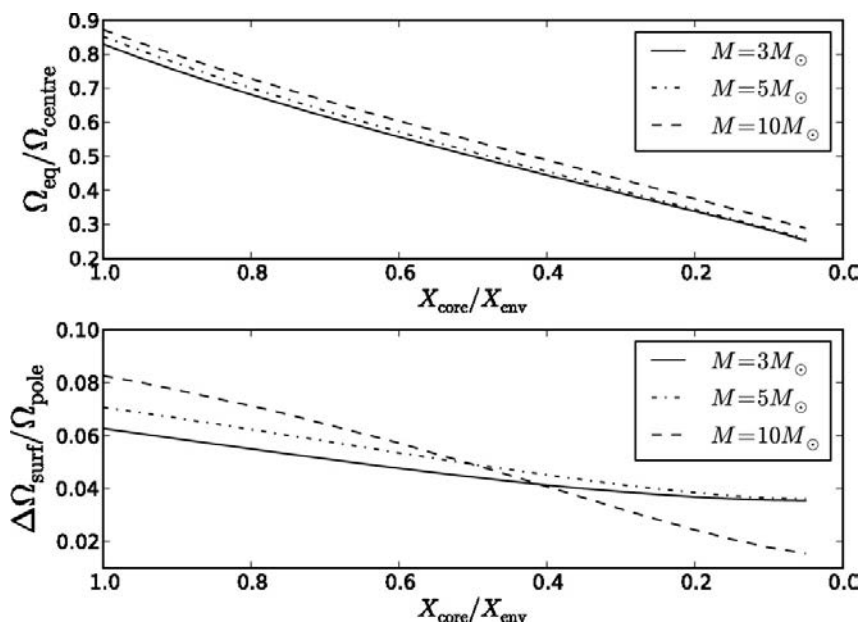


FIGURE 2.2 – Évolution de la rotation différentielle le long de la séquence principale. En haut : rotation différentielle entre centre et surface. En bas : écart entre la rotation maximale et minimale à la surface, rapportée à la rotation du pôle. L’abondance relative d’hydrogène au cœur X_c est un indicateur de l’âge de l’étoile. Résultats obtenus par ESPINOSA LARA et RIEUTORD (2013), à partir de modèles de structure ESTER.

de gyrochronologie (BARNES 2007). Plusieurs travaux ont cherché à améliorer cette relation, en y intégrant d’autres variables directement observables : MEIBOM et al. (2015) proposent une relation masse-âge-rotation pour les étoiles plus jeunes que 5 milliards d’années. Mais l’existence même d’une telle relation est remise en question : BARNES et al. (2016) annoncent une précision des âges obtenus par gyrochronologie de 17% dans l’amas M67, tandis que MAXTED, SERENELLI et SOUTHWORTH (2015) ne trouvent aucune corrélation entre les âges obtenus par gyrochronologie et ceux obtenus en considérant des isochrones pour des étoiles hôtes de systèmes planétaires.

De plus, la gyrochronologie considère uniquement des étoiles en rotation solide, et néglige la rotation différentielle pendant les phases de séquence principale : on voit pourtant dans les modèles que le profil de rotation n’est pas constant dans l’étoile, et que celui-ci varie avec la masse et l’âge de l’étoile. Comme le montre la figure 2.2, ESPINOSA LARA et RIEUTORD (2013) montrent que :

- plus une étoile est massive, plus la rotation différentielle est faible le long du rayon mais importante en latitude à la surface,
- plus une étoile est évoluée le long de la séquence principale, plus le gradient de rotation entre cœur et enveloppe est important, et plus la rotation différentielle en latitude à la surface est faible.

Cette rotation différentielle génère du cisaillement dans le fluide stellaire : apparaissent alors des

phénomènes de transport de chaleur, d'éléments chimiques et de moment cinétique qui devront être pris en compte lors de l'étude de la structure des étoiles en rotation (voir ESPINOSA LARA et RIEUTORD 2013 ; RIEUTORD, ESPINOSA LARA et PUTIGNY 2016). Ainsi, l'origine d'une telle rotation différentielle, son entretien, son évolution et son interaction avec les gradients de poids moléculaire moyen dans les couches profondes de l'étoile sont autant de points sur lesquelles des contraintes manquent et que je préciserai au paragraphe 2.2.

Parmi les autres effets susceptibles de transférer du moment cinétique, il faut considérer les effets de marée causés par d'éventuels compagnons, comme d'autres étoiles ou des systèmes planétaires en orbite autour de l'étoile en rotation. Les marées ainsi induites peuvent alors avoir deux effets : influencer l'évolution des planètes autour de l'étoile en en modifiant les paramètres orbitaux, ou ralentir la rotation propre de l'étoile (DARWIN 1880 ; OGILVIE 2014). Les oscillations à l'intérieur de l'étoile dissipent également de l'énergie et du moment cinétique, un effet qui est souvent négligé mais qui se doit d'être quantifié. L'interaction de ces oscillations avec une rotation différentielle sera l'objet de la section 3.

Après la séquence principale

Une fois leur évolution sur la séquence principale terminée, les étoiles deviennent des géantes rouges, et les étoiles de type précoce enclenchent la fusion de l'hélium en carbone en leur cœur, parcourant des "boucles bleues" dans le diagramme H-R. Ensuite, selon leur masse, elles peuvent produire tous les éléments jusqu'au fer. À chaque fois que l'abondance d'un réactif est épuisée au cœur, celui-ci se contracte pour atteindre la température nécessaire à la fusion de l'élément suivant. Comme lors des phases de pré-séquence principale, cette contraction concentre le moment cinétique dans le cœur et ce dernier accélère. En parallèle, la fusion en couche de l'élément précédent commence dans l'enveloppe et celle-ci s'étend et ralentit donc. Enfin, les pertes de masse s'intensifient, contribuant encore à extraire du moment cinétique des couches superficielles de l'étoile.

La fin de vie des étoiles de masse intermédiaire à élevée est plus ou moins cataclysmique : celles dont la masse est comprise entre 1 et $6M_{\odot}$ éjectent la plupart de leur masse dans une nébuleuse planétaire, au centre de laquelle subsiste une naine blanche. Les couches externes ainsi expulsées entraînent avec elles le plus gros du moment cinétique, et les naines blanches sont généralement des rotateurs lents.

En revanche, les étoiles plus massives développent un cœur de silicium ou de fer sur lequel les couches extérieures finissent par s'effondrer et rebondir : on appelle ce phénomène une supernova à effondrement de cœur (ou de type II). Cette fin de vie libère une énergie gigantesque, et il s'agit du principal moyen de former tous les éléments plus lourds que le fer. Ainsi, les étoiles massives sont les principaux contributeurs de l'enrichissement du milieu interstellaire. Lors d'une supernova, reste un objet compact : une étoile à neutrons ou un trou noir. Même si les couches extérieures ont été expulsées avec la majeure partie du moment cinétique, celui qui reste est concentré dans un très petit volume : ainsi les étoiles à neutrons sont des rotateurs extrêmement rapides (jusqu'à plusieurs centaines de tours par seconde, voir par exemple HESSELS et al. 2006) et un trou noir a même été mesuré avec une rotation égale à 98,7% de la rotation maximum possible selon la relativité générale (le trou noir GRS 1915+105, McCLINTOCK et al. 2006).

2.2 Structure des étoiles en rotation rapide

Au sein de cette histoire évolutive, nous allons nous concentrer sur les étoiles de type précoce de la séquence principale. Il est important de mentionner ici que « précoce » est une réminiscence d'une précédente théorie de l'évolution stellaire qui concevait les étoiles massives et bleues comme les précurseurs des étoiles moins massives, jaunes ou rouges. Même si cette théorie est aujourd'hui caduque, les termes sont restés. On qualifie ainsi les étoiles O, A, B et F0-F5 d'étoiles de type précoce, et celles de classes F5-F9, G, K, M d'étoiles de type tardif. Ces dénominations n'ont pas de lien direct avec l'âge de l'étoile.

Ainsi, les étoiles de type précoce sont, en moyenne, des rotateurs rapides : on l'a vu au chapitre 1 et la figure 1.4 le résume assez bien. Pour leur part, les étoiles de type tardif tournent beaucoup plus lentement. On se concentrera donc sur la première catégorie : il s'agit d'étoiles de masse intermédiaire à élevée, dotées d'un cœur convectif, entouré d'une épaisse zone radiative. Les étoiles de masse intermédiaire ($1,3M_{\odot} < M < 1,8M_{\odot}$) ont également une zone convective de surface, laquelle disparaît pour des masses plus importantes. Elles sont pratiquement à l'équilibre hydrostatique : le seul écart à celui-ci est dû au changement de composition induit par les réactions nucléaires, qui a lieu sur des échelles de temps très longues (de l'ordre de τ_{MS} défini à l'équation 2.2).

Sans rotation ni champ magnétique, les étoiles respectent une symétrie sphérique : les champs physiques dans l'étoile (masse volumique ρ , pression P , température T , potentiel gravitationnel ψ) ne dépendent que de la distance au centre de l'étoile. Lorsque l'étoile est en rotation, en revanche, la force centrifuge s'ajoute à la gravité en tout point hors de l'axe de rotation de l'étoile, pour un effet maximal à l'équateur. L'équilibre hydrostatique s'écrit alors

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \psi + \Omega^2 s e_s \quad (2.4)$$

où Ω est la vitesse angulaire locale et s la distance à l'axe de rotation. Le vecteur e_s est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques. On voit donc que la contribution de la force centrifuge, en faisant apparaître un axe privilégié, rompt la symétrie sphérique.

À cause de la force centrifuge, l'étoile se retrouve aplatie. En plus d'avoir un effet sur la température de surface, que nous allons décrire, cet aplatissement crée une zone de densité relativement faible au niveau de l'équateur. Pour les étoiles précoces les moins chaudes, cette zone équatoriale peut devenir convective, modifiant drastiquement les conditions de surface et donc les mesures (MAEDER, GEORGY et MEYNET 2008).

Pour certaines étoiles de classe spectrale B, des raies d'émission sont parfois mesurées : elles sont générées par de la matière circumstellaire et on parle alors d'étoile Be. L'origine de cette matière en orbite se trouve dans la rotation de l'étoile, presque critique : ainsi, la moindre perturbation comme une oscillation par exemple, suffit à expulser du gaz au niveau de l'équateur de l'étoile. Ce gaz met ensuite quelque temps à retomber sur l'étoile, temps pendant lequel il est possible de mesurer les raies d'émission (voir la revue par RIVINIUS, CARCIOFI et MARTAYAN 2013).

2.2.1 Modèle de Roche

Puisque l'étoile n'est plus à symétrie sphérique, il faut décrire sa géométrie de surface. Ceci est possible analytiquement dans deux cas limites : en supposant que l'étoile a une densité uniforme, ou en supposant à l'inverse que toute la masse est concentrée au centre de l'étoile.

La première dérivation mène à la description des ellipsoïdes de Maclaurin : lorsque l'étoile tourne, même lentement, sa géométrie devient un ellipsoïde de révolution. Pour des rotations plus intenses, en revanche, la dérivation ne correspond à aucune étoile observée (le modèle prédit une forme de poire, puis une instabilité et la fragmentation de l'étoile, voir la figure 43.1 de LEDOUX 1958).

La seconde dérivation ressemble beaucoup plus aux conditions dans une étoile de type précoce, où le cœur est compact et où la densité décroît brutalement jusqu'à la surface. Nous allons donc décrire cette seconde approche, que l'on appelle le modèle de Roche (voir KIPPENHAHN, WEIGERT et WEISS 2012, chapitre 43)).

Géométrie de la surface stellaire

Dans le cas où la masse de l'étoile M_\star est ponctuelle et placée au centre, le potentiel gravitationnel s'écrit

$$\psi = -\frac{GM_\star}{r}. \quad (2.5)$$

où G la constante gravitationnelle et r est la distance au centre de l'étoile. On remarque que ce potentiel ne dépend pas de la vitesse de rotation.

À la gravité s'ajoute la force centrifuge. Dans le cas d'une rotation dépendant uniquement de la distance à l'axe s , la force centrifuge dérive elle aussi d'un potentiel, si bien que les deux termes du membre de droite de l'équation (2.4) s'additionnent pour former

$$\psi_{\text{eff}} = -\frac{GM_\star}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 s^2. \quad (2.6)$$

En supposant une rotation solide on obtient l'expression de la gravité effective \mathbf{g}_{eff} , qui dérive du potentiel effectif et dépend de la colatitude θ :

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\psi_{\text{eff}} = \left(\frac{GM_\star}{r} + \Omega^2 r \sin^2\theta\right) \mathbf{e}_r + \left(\Omega^2 r \sin\theta \cos\theta\right) \mathbf{e}_\theta. \quad (2.7)$$

On sait que la surface de l'étoile est définie comme une équipotentielle, dès lors le potentiel à toute colatitude θ est le même qu'au pôle, et le rayon de surface $R_s(\theta)$ vérifie

$$\frac{GM_\star}{R_s} + \frac{1}{2}\Omega^2 R_s^2 \sin^2\theta = \frac{GM_\star}{R_p} \quad (2.8)$$

où l'on utilise $s = r \sin\theta$ et où R_p est le rayon polaire qui ne dépend pas de la vitesse de rotation. La relation (2.8) permet d'obtenir l'expression du taux d'aplatissement ε , qui met en regard rayon polaire R_p et équatorial R_{eq} via

$$\varepsilon = 1 - \frac{R_p}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_p R_{\text{eq}}^2 \Omega^2}{2GM_\star}. \quad (2.9)$$

Cette valeur est intéressante, car les observations interférométriques permettent généralement d'obtenir une mesure de ε plutôt que des rayons directement.

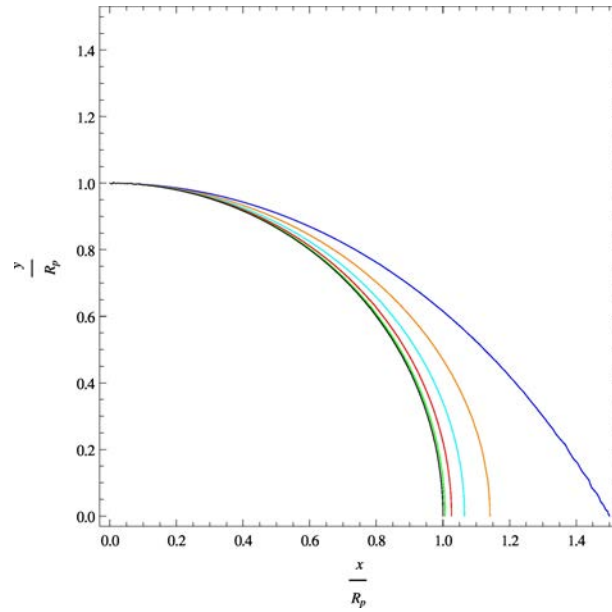


FIGURE 2.3 – Géométries de la surface stellaire pour des vitesses de rotation solide $\Omega/\Omega_{\text{crit}}$ de 0 (noir) ; 0,2 (vert) ; 0,4 (rouge) ; 0,6 (turquoise) ; 0,8 (orange) et 1 (bleu). Voir texte pour la définition de Ω_{crit} . Figure tirée de POTTER (2012).

Vitesses critiques

Une fois le contour de la surface décrit, s'intéresse au cas limite où $\mathbf{g}_{\text{eff}}(\theta = \pi/2) = 0$, qui correspond à la limite de l'éjection de matière à l'équateur des suites de la force centrifuge. On définit deux échelles de fréquence à partir de l'équation 2.7. La première est la vitesse angulaire à laquelle la gravité effective s'annulerait sur une orbite de rayon R_{eq} ,

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{GM_\star}{R_{\text{eq}}^3}}. \quad (2.10)$$

On appelle Ω_K la vitesse képlérienne. Le rayon équatorial dépend lui-même de la vitesse de rotation, et plus une étoile tourne vite plus R_{eq} est grand.

L'autre échelle de fréquence utilisée provient du modèle de Roche : si l'on considère une étoile à sa vitesse critique, en utilisant la définition de Ω_K dans l'équation (2.8), il vient $R_{\text{eq,crit}} = 3/2R_{\text{p,crit}}$. L'indice « crit » correspond au cas critique, on rappelle que le rayon polaire ne varie pas avec la rotation dans le modèle de Roche et $R_{\text{p,crit}} = R_p(\Omega = 0)$. Ainsi, en utilisant cette relation dans l'expression de la vitesse képlérienne on obtient

$$\Omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{8GM_\star}{27R_p^3}}. \quad (2.11)$$

Cette échelle de fréquence Ω_{crit} est appelée vitesse critique.

Les quantités Ω_K et Ω_{crit} sont égales lorsque l'étoile tourne à la vitesse maximale, mais pas autrement : si l'étoile tourne à une vitesse Ω inférieure à Ω_K et Ω_{crit} alors $R_{\text{eq}} < R_{\text{eq,crit}} = 3/2R_p$, et donc $\Omega_K > \Omega_{\text{crit}}$. Ceci peut susciter des confusions : par exemple, l'étoile Rasalhague tourne à $\Omega = 0,62\Omega_K = 0,88\Omega_{\text{crit}}$ (MIROUH et al. 2013). La figure 2.3 représente la forme de la surface stellaire pour différentes fractions de la rotation critique, obtenus par le modèle de Roche.

Limites du modèle de Roche

Le modèle de Roche présenté ici n'entend pas décrire une structure d'étoile réaliste : même si les rotateurs rapides de type précoce ont un cœur compact et dense, ce modèle ne tient absolument pas compte de la composition chimique de l'étoile, ou de son âge. De plus, il ne tient pas compte de la rotation différentielle : des améliorations ont été suggérées en ce sens (KOPAL 1959 ; MEYNET et MAEDER 1997), mais les progrès des modèles numériques ont dépassé le modèle de Roche, même ainsi enrichi. En effet, la géométrie que nous avons dérivée ci-dessus souffre donc quelques limitations, au-delà de la rotation différentielle.

En effet, les coordonnées de la surface d'une étoile réaliste ne sont pas dérivables analytiquement : la rotation fait varier les coordonnées de la surface, et ainsi la répartition de masse. Le potentiel gravitationnel varie alors, et la surface (définie par une équipotentielle) varie à nouveau. Les hypothèses sous-jacentes au modèle de Roche (rayon polaire et potentiel gravitationnel indépendants de la rotation) ne sont donc pas nécessairement réalistes, et la surface doit être calculée par une méthode itérative.

L'étoile satisfait le théorème du viriel, conséquence de l'application du principe fondamental de la dynamique aux ions du milieu stellaire,

$$I\Omega^2 + W + 3P = 0, \quad (2.12)$$

où l'on définit

$$I = \int_V r^2 \sin^2 \theta \rho dV, \quad W = \frac{1}{2} \int_V \rho \psi dV, \quad P = \int_V p dV. \quad (2.13)$$

Les termes dans l'équation (2.12) correspondent à l'énergie cinétique de rotation (avec I le moment d'inertie), l'énergie gravitationnelle, et l'énergie interne (pour un gaz parfait monoatomique), respectivement. Cette équation, qui relie plusieurs quantités de structure, est souvent utilisée pour tester la convergence de la méthode itérative.

Le graphe de gauche de la figure 2.4 donne la variation du rayon polaire avec la vitesse de rotation pour des modèles de Genève : on voit que le rayon polaire diminue avec la rotation, sauf dans les étoiles les plus massives où la pression de radiation contribue significativement à l'équilibre. Ainsi, on a deux situations :

- pour les étoiles de masse « raisonnable », le véritable rayon polaire R_p est inférieur à $R_{p,\text{crit}}$, et alors la vitesse de rotation de l'étoile peut dépasser la valeur de Ω_{crit} donnée par le modèle de Roche (equation 2.11) ;
- à l'inverse, pour les étoiles les plus massives, $R_p > R_{p,\text{crit}}$: la vitesse critique diminue, et l'étoile peut éjecter de la matière par l'équateur pour des vitesses de rotation inférieures à la valeur prédite par le domaine de Roche.

Le graphe de droite de la figure 2.4 donne également la valeur de la vitesse maximale atteignable en incluant cette variation du rayon polaire pour des étoiles de diverses masses.

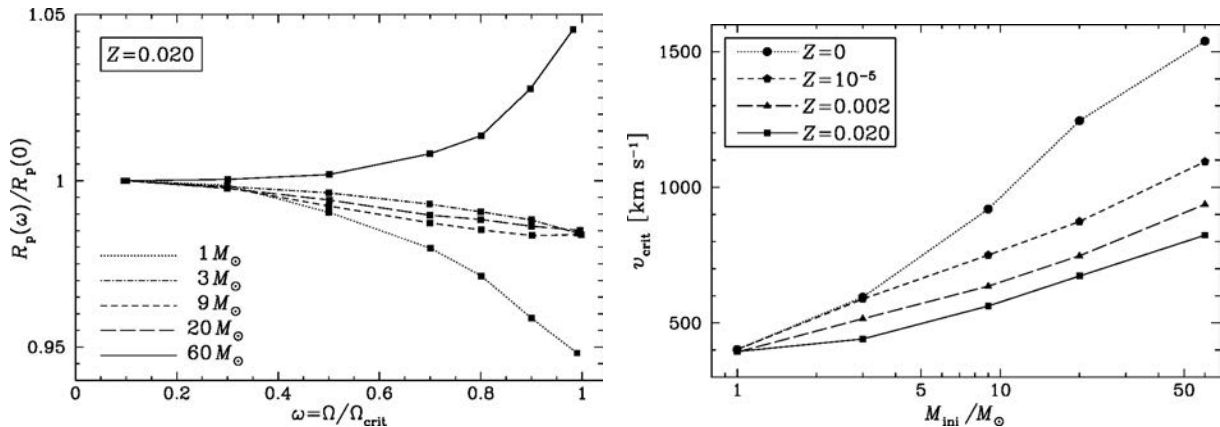


FIGURE 2.4 – À gauche : Variation du rayon polaire avec la vitesse de rotation, divisé par celui à rotation nulle. Il est à noter que leur définition de ω est différente de celle de notre travail. À droite : Vitesse équatoriale maximale atteignable en fonction de la masse. Résultats obtenus par EKSTRÖM et al. (2008), avec le code d'évolution de Genève.

2.2.2 Assombrissement gravitationnel

L'aplatissement centrifuge que nous avons décrit ci-dessus donne lieu au phénomène d'assombrissement gravitationnel : lorsqu'une étoile tourne suffisamment rapidement, la température effective à l'équateur est inférieure à celle des pôles.

La modélisation de cet effet se base sur une loi d'échelle reliant la gravité effective g_{eff} à la température de surface T_{eff} par une équation du type

$$T_{\text{eff}} = g_{\text{eff}}^{\beta}. \quad (2.14)$$

Un calcul analytique simple réalisé par VON ZEIPPEL (1924b) donne la valeur $\beta = 0,25$. Il a été démontré depuis par ESPINOSA LARA et RIEUTORD (2011) que la relation entre T_{eff} et g_{eff} n'est pas à proprement parler une loi d'échelle, et que même en l'approximant ainsi, la valeur de β dépend de la vitesse de rotation de l'astre. Notamment, $\beta = 0,25$ uniquement dans la limite d'une vitesse de rotation asymptotiquement nulle (c'est-à-dire quand il n'y a pas d'assombrissement gravitationnel), et $\beta < 0,1$ pour les rotateurs les plus rapides. Ce résultat est montré en figure 2.5. Du fait de cet effet d'assombrissement gravitationnel, le flux émis par l'étoile dépend de la co-latitude, ou bien la luminosité reçue dépend de l'inclinaison de l'étoile. Ainsi, il est possible de mésévaluer la température effective ou la masse si l'effet n'est pas pris en compte correctement.

Les interférométristes généralement utilisent une loi d'échelle avec $\beta = 0,25$ pour ajuster leurs données, surestimant ainsi l'écart de température entre équateur et pôles (voir l'exemple de Rasalhague, ZHAO et al. 2009), ou utilisent β comme un paramètre libre de leurs ajustements (voir MONNIER et al. 2007, dans le cas d'Altaïr) mais avec un modèle simplifié comme le modèle de Roche.

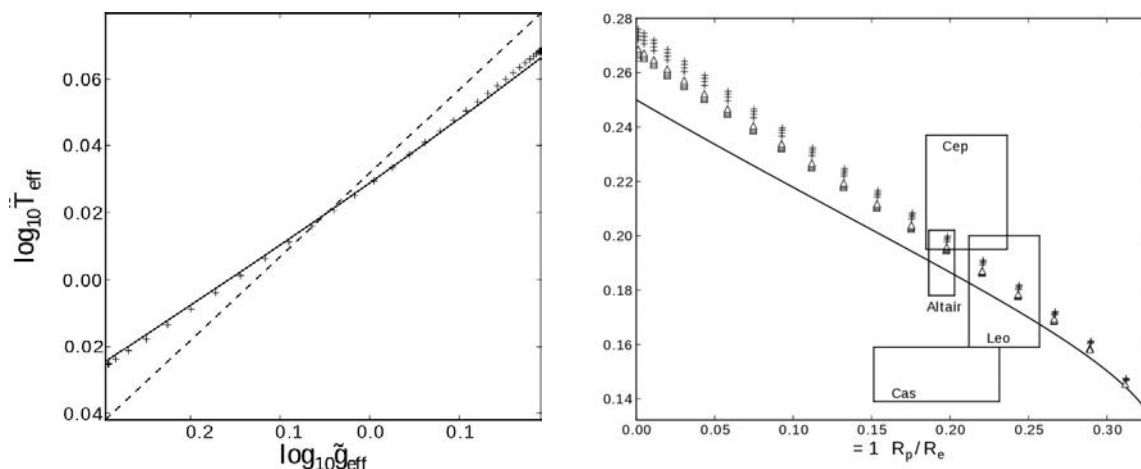


FIGURE 2.5 – À gauche : Relation $T_{\text{eff}} - g_{\text{eff}}$ pour une étoile de $3M_{\odot}$, avec $\Omega/\Omega_K = 0,7$ et ayant consommé 50% de son hydrogène central, obtenue par les modèles ESTER (croix), par la prédiction analytique de ESPINOSA LARA et RIEUTORD (2011) (trait continu) et la loi de VON ZEIPEL (1924b) (trait tireté). À droite : Exposant β en fonction de l’aplatissement ϵ , où les croix et triangles correspondent à deux séries différentes de modèles ESTER. Les boîtes rectangulaires dénotent l’emplacement d’étoiles connues, avec les incertitudes associées.

2.2.3 Circulation méridienne

Après avoir mis en évidence l’écart de température entre pôles et équateur, VON ZEIPEL (1924a) s’est posé la question de l’équilibre thermodynamique d’une étoile en rotation. En effet, si l’équilibre hydrostatique est réalisé, alors les surfaces isobares, isopycnes et isothermes sont confondues, et l’équilibre thermique est donné par l’équation

$$\nabla \cdot (\chi \nabla T) + \rho \epsilon = 0, \quad (2.15)$$

où χ désigne la diffusivité thermique, T la température, ρ la masse volumique et ϵ le taux de production d’énergie volumique. Or, le terme de gauche dans cette équation n’est pas constant sur une surface isopycne : l’équilibre thermique n’est alors réalisé que si le taux de production d’énergie au cœur dépend de la vitesse de rotation de l’étoile.

Ce résultat, bien que mathématiquement correct, est cependant physiquement assez peu plausible, la production d’énergie au cœur des étoiles étant d’origine microscopique. La solution serait alors dynamique : il est impossible d’avoir un fluide à l’équilibre thermodynamique en rotation. EDDINGTON (1925) et VOGT (1925) proposèrent alors un modèle où le déséquilibre thermique crée un déplacement du fluide à grande échelle dans l’étoile. Un tel écoulement, cependant, violerait la conservation du moment cinétique en l’absence de force extérieure.

Cette vision resta prédominante jusqu’à BUSSE et CLEVER (1981), mais c’est en réalité le mécanisme inverse qui se produit : la rotation de l’étoile introduit une baroclinicité (c’est-à-dire

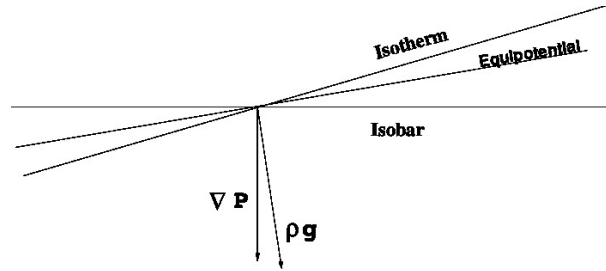


FIGURE 2.6 – Schéma décrivant les positions respectives des courbes isotherme, isobare et isopotentielle en un point d'une étoile en rotation.

un décalage entre les surfaces isobares et isopycnes), comme illustré en figure 2.6. Dès lors, il apparaît une rotation différentielle, qui peut exister même dans le cas sans viscosité, appelée « vent thermique » en géophysique. Le profil de rotation peut être déduit de la baroclinicité par l'équation de vorticité

$$-\frac{\nabla\rho \times \nabla P}{\rho^2} = \nabla\Omega^2 \times s\mathbf{e}_s. \quad (2.16)$$

Cette rotation différentielle génère un cisaillement, et si l'on tient compte de la viscosité (faible, mais non nulle) du plasma stellaire, une dissipation de moment cinétique. Dès lors, une circulation méridienne apparaît pour contrebalancer ce flux de moment cinétique. Une prescription de ce transfert de moment cinétique a été proposée par ZAHN (1992), et a depuis été introduite dans de nombreux modèles à une dimension. On suppose que la turbulence est essentiellement horizontale dans l'étoile, correspondant à une stratification horizontale stable : ainsi, la rotation différentielle développée est principalement radiale. Enfin, la température est obtenue via l'équation (2.15) comme conséquence de la rotation différentielle et de la circulation méridienne, et non l'inverse comme l'avaient imaginé Eddington ou Vogt.

Afin de savoir si ce processus a lieu dans les étoiles, il convient d'établir l'échelle de temps nécessaire à l'établissement de cette circulation méridienne dans l'étoile. Celle-ci est donnée par le temps d'Eddington-Sweet, défini par

$$t_{\text{ES}} = \frac{4\Omega^2 R^2}{N^2 \kappa} = \frac{4\Omega^2}{N^2} t_{\text{KH}}, \quad (2.17)$$

où t_{KH} est le temps de Kelvin-Helmholtz, c'est-à-dire l'échelle de temps de diffusion thermique. Dans les rotateurs rapides, $4\Omega^2 \sim N^2$ et la circulation méridienne s'installe rapidement. La transition vers ce régime permanent est beaucoup plus lente pour les rotateurs plus lents, pour lesquels $N^2 \gg 4\Omega^2$ et $t_{\text{ES}} \gg t_{\text{KH}}$: leur physique interne est donc contrainte par les conditions initiales.

Le raisonnement présenté ci-dessus met en regard la stratification thermique et la rotation, mais il est important de remarquer que les gradients de poids moléculaire moyen μ dans l'étoile peuvent également influencer rotation différentielle et circulation méridienne. Comme le montrent les travaux de RICHARD, THÉADO et VAUCLAIR (2004), ces gradients peuvent induire des courants compensant la circulation méridienne, notamment au niveau de l'interface entre le

cœur (enrichi en éléments lourds) et l'enveloppe (principalement constituée d'hydrogène). Par ailleurs, dans une étoile isolée, une dissipation de moment cinétique est nécessaire à l'entretien d'une circulation méridienne, comme le montrent MAEDER et ZAHN (1998). Dans le développement présenté ici, cette dissipation provient de la viscosité, mais d'autres phénomènes pourraient tenir ce rôle, comme un champ magnétique ou des pertes de masse à la surface de l'étoile (MAEDER 1999). Bien que ces effets puissent être non-négligeables (voir RIEUTORD et BETH 2014), nous les laissons de côté dans nos modèles de structure stellaire.

2.3 Sismologie des étoiles en rotation

Beaucoup des étoiles de type précoce hébergent des oscillations radiales et non-radiales. Dans cette section, j'aborderai l'étude de ces oscillations, en partant du cas simple d'une étoile sans rotation, puis en pointant les différences que celle-ci introduit.

Comme je l'ai mentionné dans l'introduction de cette thèse, l'intérêt de l'astérosismologie est de sonder les couches internes de l'étoile : il sera ainsi possible de déduire des spectres d'oscillation des informations sur la rotation différentielle et la circulation méridienne.

2.3.1 Formalisme

Cas des étoiles sans rotation

Avant d'évoquer le calcul complexe des modes d'une étoile en rotation, il convient de décrire les réussites de la sismologie des étoiles sans rotation.

Les modes d'oscillation que nous utilisons pour décrire les pulsations des étoiles sont les vecteurs propres du problème des équations de la mécanique des fluides perturbées. Pour cet exposé, on se place dans l'approximation adiabatique, en négligeant viscosité et diffusivité thermique. Afin d'écrire ce système d'équations, on décompose chaque quantité en sa valeur d'équilibre et une petite perturbation : $x = x_0 + x_1$ avec $x_1 \ll x_0$ et l'on linéarise le système : les termes d'ordre zéro correspondent à l'état d'équilibre et donc s'annulent, les termes d'ordre deux sont négligés. Le système se compose des équations d'Euler, de la conservation de la masse, de la conservation de l'énergie et de Poisson. On obtient alors un système d'équations dont les variables sont ρ, ψ, p et \mathbf{v} , à savoir les perturbations de densité, potentiel gravitationnel, pression et vitesse, respectivement.

On cherche des solutions oscillantes, sous la forme $x(r, \theta, \phi, t) = x(r)Y_\ell^m(\theta, \phi) \exp(i\omega t + im\phi)$ où ω est la fréquence de l'oscillation et Y_ℓ^m l'harmonique sphérique de degré ℓ et d'ordre azimutal m . Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions mathématiques qui forment une base orthogonale, décrites dans l'annexe A.1.

Ainsi le système des équations des perturbations évoqué ci-dessus devient un système aux valeurs propres (en remplaçant $\partial/\partial t \equiv i\omega$), dont les valeurs propres sont donc les fréquences d'oscillation et les fonctions propres les modes d'oscillations. La séparation des variables est rendue possible en utilisant le produit d'une fonction sinusoïdale du rayon, et d'une unique harmonique sphérique pour les composantes horizontales. Ainsi, les quantités dans l'étoile sont décrites, de façon univoque pour chaque mode, en utilisant trois entiers :

- le degré $\ell \geq 0$ de l'harmonique sphérique, qui représente le nombre de lignes nodales à la surface de l'étoile ; les modes $\ell = 0$ étant les modes radiaux.

- l'ordre azimutal m ($-\ell \leq m \leq \ell$), qui donne le nombre de ces lignes nodales passant par les pôles de l'étoile.
- l'ordre radial n qui est le nombre de nœuds le long d'un rayon de l'étoile. Par convention n est positif pour les modes de pression et négatif pour les modes de gravité (voir plus bas).

En l'absence de rotation ($\Omega = 0$), les fréquences des oscillations sont indépendantes de l'ordre azimutal m et les modes sont alors des ondes stationnaires axisymétriques.

Cas des étoiles en rotation

Le principal effet de la rotation sur les modes est l'apparition de la force de Coriolis. L'autre effet, pour les rotations rapides, est la déformation de la géométrie des modes consécutive à l'aplatissement centrifuge.

Ces deux effets couplent les différentes harmoniques sphériques ensemble dans les équations, si bien que les modes ne peuvent plus être décrits par une seule harmonique. Il est donc impossible d'attribuer de façon univoque une valeur du degré ℓ , de l'ordre radial n à ces modes. Les modes sont alors décrits comme une somme d'harmoniques sphériques de différents degrés ℓ , faute d'une meilleure base. En effet, les harmoniques sphériques décrivent exactement les modes dans le cas sans rotation, et dans le cas simplifié de l'approximation traditionnelle de la rotation (qui consiste à négliger la composante horizontale de la vitesse angulaire, voir GERKEMA et al. 2008) par exemple, il existe une base de fonctions permettant la séparation des variables (à savoir les polynômes de Hough, voir LEE et SAIO 1997). En revanche, nous n'avons pas trouvé une telle base pour décrire nos modes, nous devons donc nous contenter d'utiliser une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques. Dès lors, l'identification des modes, c'est-à-dire l'attribution d'une géométrie à une fréquence mesurée est extrêmement complexe. Par ailleurs, la symétrie axiale étant préservée, il est toutefois possible de séparer la variable m (l'ordre azimutal), dont la valeur pour un mode est alors unique. Ensuite, le sens de rotation fait que la propagation des modes dépend du signe de m : au vu de notre définition, si $m < 0$, l'onde se propage dans le sens de la rotation, on parle de mode prograde, sinon elle se propage dans le sens opposé et on parle de mode rétrograde.

À noter que la présence d'un champ magnétique ou d'autres effets physiques peut briser la symétrie axiale et nécessitent alors un traitement tridimensionnel. Ils peuvent de plus introduire d'autres mécanismes de rappel, et donc d'autres classes de modes. Je ne considérerai pas ces situations dans cet exposé.

2.3.2 Domaines et propriétés de propagation

Les oscillations dans les étoiles peuvent être entretenues par différents mécanismes, il existe ainsi plusieurs classes de modes. En l'absence de rotation, celles-ci ont été définies en fonction de leurs propriétés physiques par COWLING (1941).

Afin de comprendre les effets physiques à l'origine des oscillations, Cowling se place dans l'approximation qui prendra plus tard son nom, qui consiste à négliger les variations du potentiel gravitationnel causées par les pulsations. Cette approximation est valable lorsque les échelles des modes sont petites devant le rayon de l'étoile (c'est-à-dire pour un ordre radial n élevé). On suppose également que la longueur d'onde des modes est petite devant l'échelle de hauteur de pression, ce qui constitue une approximation grossière pour les modes sondant les couches plus

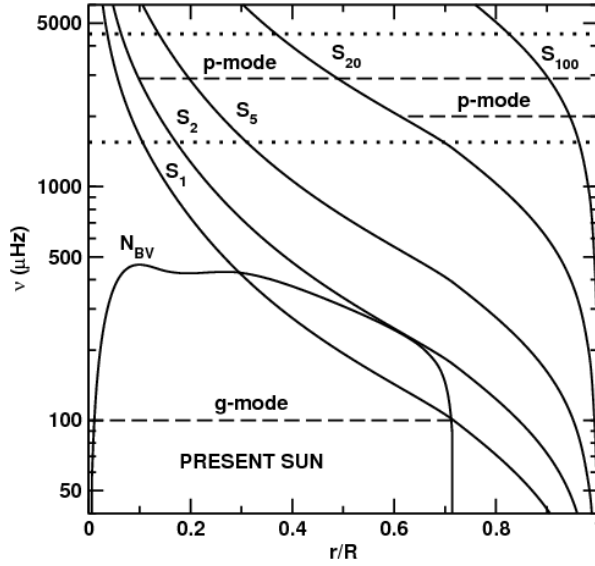


FIGURE 2.7 – Diagramme de propagation dans le Soleil mettant en regard le rayon accessible (en abscisse) à une fréquence donnée (en ordonnée). Sont représentés les domaines sondés par un mode g à $\nu = 100\mu\text{Hz}$, un mode p à $\ell = 20$ et $\nu = 400\mu\text{Hz}$, un mode p à $\ell = 2$ et $\nu = 500\mu\text{Hz}$. Figure tirée de LEBRETON et MONTALBÁN (2009).

denses de l'étoile (où la pression varie brutalement). Ces deux approximations permettent toute fois de simplifier le système aux valeurs propres en une seule équation différentielle du second degré

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{dr^2} = K(r)\mathbf{v} \quad \text{avec} \quad K(r) = \frac{1}{c_s^2} (\omega^2 - N^2) (S_\ell^2 - \omega^2) \quad (2.18)$$

où l'on définit deux fréquences caractéristiques : celles de Brunt-Väisälä N et de Lamb S_ℓ :

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right), \quad \text{et} \quad S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c_s^2}{r^2}, \quad (2.19)$$

où Γ_1 est l'indice adiabatique et $c_s = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$ est la vitesse du son dans l'étoile, g , p et ρ étant la gravité, la densité et la pression du modèle d'équilibre.

Pour que la solution de cette équation soit une onde, il faut $K(r) < 0$ (sans quoi la solution est simplement amortie dans toute l'étoile). Cette condition est réalisée dans deux régimes de paramètres :

- soit $\omega > N$ et $\omega > S_\ell$: on a alors affaire à un mode de pression,
- soit $\omega < N$ et $\omega < S_\ell$: on a alors affaire à un mode de gravité.

Le diagramme de propagation présenté en figure 2.7 montre le domaine où ces deux types de modes sont entretenus dans le Soleil.

Cette description, fort simplifiée, suffit à la description des modes dans des étoiles sans rotation. Nous allons donc décrire ces types de modes brièvement, en portant une attention particulière aux effets de la rotation sur leur structure.

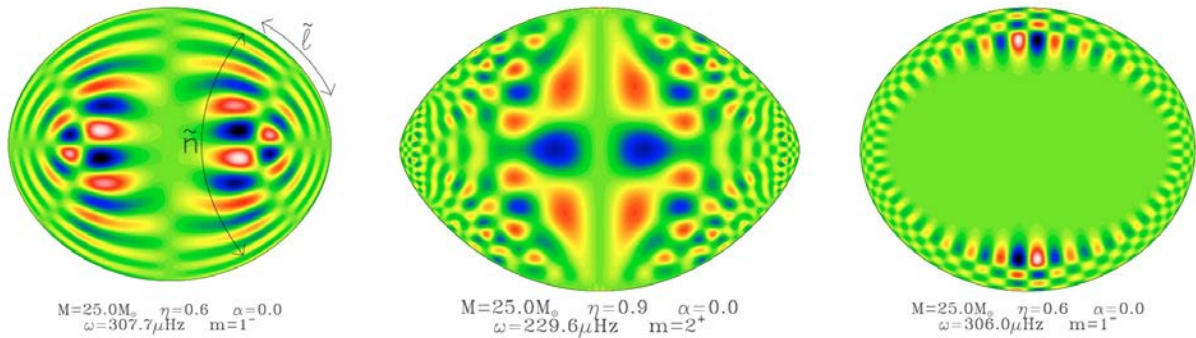


FIGURE 2.8 – Modes p en rotation rapide. De gauche à droite : un mode îlot, un mode chaotique et un mode de type « galerie des murmures ». On représente $p/\sqrt{\rho_0}$ sur une échelle de couleur allant du bleu (négatif) au rouge (positif) en passant par le vert (pas de perturbation, ou un nœud de celle-ci). Figure tirée de REESE et al. (2009).

Les modes de pression

Les modes dont la force de rappel est la résultante des forces de pression sont appelés modes de pression ou encore **modes p** . Il s'agit de modes acoustiques, c'est-à-dire d'ondes sonores stationnaires. Les modes p ont une fréquence augmentant avec n et ℓ . Ils peuvent se propager dans l'étoile à la condition que leur fréquence soit supérieure à la fréquence de Brunt-Väisälä et à la fréquence de Lamb. Comme le montre le diagramme de la figure 2.7 le domaine de ces modes dans le Soleil est localisé vers la surface, et c'est aussi le cas dans les étoiles de type précoce.

Le domaine que ces modes sont susceptibles de sonder en l'absence de rotation dépend de la fréquence de l'oscillation ω et du degré ℓ : il existe un point de retournement interne pour lequel la fréquence de l'onde égale la fréquence de Lamb donnée par l'équation (2.19). Ainsi, plus le degré ℓ est élevé, plus le mode est confiné en surface, plus la fréquence est élevée et plus l'onde peut sonder des couches profondes. Le point de retournement externe r_e est quant à lui défini par la chute brutale de la pression à la surface de l'étoile, qui cause une réflexion de l'onde. Cette condition se traduit par la présence d'une fréquence limite $\omega_c \approx c_s/(2H_p)$, imposant ainsi une fréquence maximale au-delà de laquelle les ondes ne sont plus réfléchies, et les modes disparaissent.

Les modes de pression sont relativement peu affectés par une rotation lente. En revanche, l'aplatissement centrifuge causé par une rotation rapide fait apparaître trois classes de modes p différentes : les modes d'îlot, les modes en « galerie des murmures » (de l'anglais “*whispering gallery*”), et les modes chaotiques. Ces trois types de modes sont illustrés dans la figure 2.8.

Les modes d'îlots sont des modes dont l'énergie se répartit près de l'équateur. Pour ces modes, il a été possible de définir de nouveaux nombres quantiques similaires à n et ℓ . Ces nouveaux nombres, \tilde{n} et $\tilde{\ell}$ sont définis sur la figure 2.8 (m restant inchangé, voir REESE et al. 2009) et permettent de trouver des régularités dans les spectres des étoiles en rotation rapide (REESE, LIGNIÈRES et RIEUTORD 2008). Les modes de type galerie des murmures se propagent uniquement dans les

couches supérieures de l'étoile et ne sondent pas le cœur. Enfin, les modes chaotiques sont des modes de pression se propageant dans toute l'étoile, et dont la distribution des lignes de nœuds est irrégulière.

Les modes de gravité

Les modes de gravité, aussi appelés **modes g**, sont entretenus par la poussée d'Archimède, et à ce titre ne peuvent exister que dans une zone radiative. En effet, dans une zone radiative, le gradient de température est inférieur au gradient adiabatique. Si une particule fluide est perturbée et déplacée vers le haut, sa température est telle qu'elle revient à sa position initiale transformant l'énergie potentielle apportée par la perturbation en énergie cinétique. Cette énergie va ainsi lui permettre d'osciller autour de sa position initiale et, ce faisant, de générer une onde de gravité. En revanche, si le gradient est supérieur au gradient adiabatique, comme c'est le cas dans une zone convective, la particule fluide déplacée vers le haut continuerait son déplacement : ainsi les ondes de gravité n'existent pas dans les milieux convectifs.

Ces modes sondent des couches profondes de l'étoile, et sont donc très sensibles aux conditions près du cœur où ont lieu les réactions nucléaires, et présentent donc un intérêt majeur pour caractériser la structure et l'évolution stellaires. Mais ils sont généralement évanescents lorsqu'ils approchent de la surface des étoiles massives : on s'attend donc à ce qu'ils n'entraînent : que des oscillations de faible amplitude à la surface. Par ailleurs, ces modes ont des fréquences plus basses que les modes acoustiques : ils requièrent des séries d'observations plus longues. Ces deux effets contribuent à rendre ces modes plus difficiles à détecter et à caractériser. Ce point sera discuté plus précisément dans les chapitres 3 et 4.4.

Il convient de préciser qu'il n'existe pas de mode de gravité radial (en effet, ceux-ci requièrent un mouvement du fluide horizontal, qui ne saurait exister à $\ell = 0$, pour être entretenus) et que la fréquence de ces modes décroît avec $|n|$ (la convention étant d'attribuer un signe $-$ à n pour les modes g).

Les modes inertiels et gravito-inertiels

La force de Coriolis, en plus de modifier les équations, a pour effet physique d'agir comme force de rappel. Les modes ainsi entretenus forment la classe des modes inertiels (GREENSPAN 1969 ; RIEUTORD et VALDETTARO 1997 ; FAVIER et al. 2014). Ces modes existent à des fréquences inférieures à 2Ω (Ω étant la vitesse angulaire du fluide stellaire) dans les zones convectives d'étoiles.

Dans les zones radiatives, la force de Coriolis s'ajoute à la poussée d'Archimède pour créer la classe des modes gravito-inertiels. Le domaine de fréquence couvert par ces modes est plus large que celui des modes inertiels ou des modes de gravité considérés isolément (FRIEDLANDER et SIEGMANN 1982b ; DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999). L'impact d'une rotation différentielle sur la propagation de ces derniers est étudiée en profondeur dans tout le chapitre 3. Une géométrie de mode gravito-inertiel particulière a été mise en évidence dans des calculs numériques d'oscillations dans un modèle polytropique par BALLOT et al. (2012) : il s'agit des modes en rosace, dont un exemple est fourni en figure 2.9. Ces modes à la géométrie particulière existent à des fréquences supérieures à 2Ω , et résultent de l'interaction de deux modes de fréquence très proches sous l'effet de la force de Coriolis (voir la série d'articles initiée par

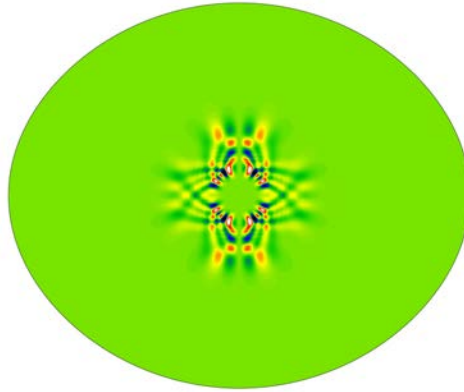


FIGURE 2.9 – Mode gravito-inertiel en rosace, dans un modèle bidimensionnel de l'étoile Rasalhague. On utilise la même légende de couleur que dans la figure 2.8. On remarque la géométrie particulière du mode, qui n'atteint pas la surface.

TAKATA et SAIO 2013). Néanmoins, puisqu'ils sondent l'intérieur de l'étoile et que leur signature en surface (si elle existe) n'est pas connue, ils n'ont pas encore été détectés.

Le mode fondamental

Pour chaque degré $\ell \geq 2$, il existe un mode particulier que l'on appelle le mode fondamental, ou **mode f**. Ces modes sont les seuls présents dans le cas limite d'une sphère incompressible sans rotation. Il s'agit de modes de gravité se propageant en surface, de la même manière que la houle à la surface des mers et océans terrestres. Leur domaine de propagation a en effet une profondeur de l'ordre de R/ℓ (R étant le rayon de l'étoile), ils n'ont pas de nœuds radiaux ($n = 0$) et marquent la transition entre les modes g et les modes p. Ces modes sont équivalents à des ronds dans l'eau à la surface d'un lac, et ne peuvent pas être de degré $\ell = 0$ (ce sont des modes de gravité) ni de degré $\ell = 1$ (car ils induiraient alors un déplacement du centre de masse).

Les modes mixtes

Il est possible que le domaine de propagation des modes g soit relativement proche de celui des modes p, pour certaines fréquences. Dès lors, les deux cavités résonantes peuvent se coupler : la poussée d'Archimède peut alors entretenir le mode dans une partie de la coquille, la pression dans une autre, et la zone évanescence qui les sépare ne suffit pas à détruire le mode. Dès lors, ces modes sondent des couches profondes de l'étoile, mais ne sont pas amortis en approchant de la surface : ils sont donc d'un intérêt significatif pour l'étude des étoiles. C'est le cas dans le mode présenté en figure 2.10. On remarque que le mode a un aspect de mode p vers la surface, et celui d'un mode g près du cœur. Ce genre de mode est un candidat idéal pour obtenir des contraintes sur les couches profondes de l'étoile, et notamment sur la rotation différentielle. Leur étude dans les étoiles sous-géantes et géantes a été très fructueuse à cet égard (MOSSER et al. 2014 ; DEHEUVELS et al. 2014).

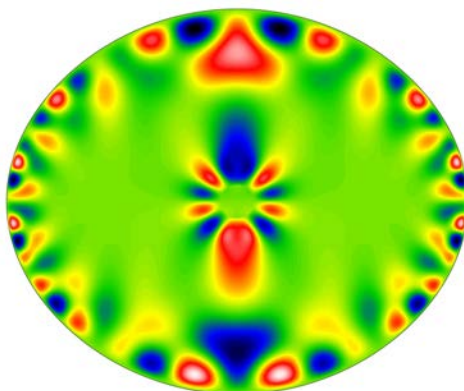


FIGURE 2.10 – Mode mixte ou gravito-acoustique, dans un modèle bidimensionnel de l'étoile Rasalhague. On utilise la même légende de couleur que dans la figure 2.8. On remarque que le mode sonde d'une part les couches profondes de l'étoile, et atteint d'autre part la surface.

2.3.3 Mécanismes d'excitation

Dès la découverte des premières oscillations stellaires, la question de leur origine physique s'est posée. En effet, la plus grande partie du domaine stellaire est dissipative pour ces oscillations : leur détection est la preuve qu'il existe des mécanismes afin de les entretenir. EDDINGTON (1930) est le premier à proposer un mécanisme d'excitation dans l'étoile de sorte que les oscillations ne soient pas rapidement amorties : il proposa un mécanisme de valve, qui agirait comme un moteur en entretenant un cycle de compression et dilatation de l'étoile. Il proposa donc deux mécanismes, les mécanismes ε et κ (ZHEVAKIN 1963). D'autres mécanismes possibles ont depuis été proposés, comme le blocage convectif, ou l'excitation stochastique par la convection turbulente. Je vais les passer rapidement en revue ici.

Mécanisme ε

La première intuition d'Eddington a été d'attribuer l'excitation des oscillations à une modulation du taux de production d'énergie au cœur, communément désigné par la lettre ε . Si une perturbation comprime le cœur de l'étoile, siège des réactions de fusion nucléaire, alors la température et ε augmentent. Cette augmentation tend à dilater la couche, diminuant ainsi température et production d'énergie. Alors un nouveau cycle commence, créant des oscillations auto-entretenues.

Néanmoins, ce mécanisme semble peu plausible : le cœur des étoiles, où se produisent les réactions nucléaires, a en effet une température extrêmement stable. De plus, des études postérieures montrent que ce mécanisme n'est pas suffisant dans les étoiles pour contrecarrer l'amortissement dans les couches externes des étoiles (COWLING 1934 ; COWLING 1935), excepté peut-être dans les étoiles les plus massives, à $M \gtrsim 60M_{\odot}$ (APPENZELLER 1970).

Mécanisme κ

Si le mécanisme ε est à écarter, l'autre idée d'Eddington concernait une modulation de la capacité de la lumière à quitter l'étoile, c'est-à-dire de son opacité κ . Un tel mécanisme peut exister dans les étoiles, dans des couches bien précises, à savoir les couches d'ionisation où l'opacité augmente avec la température. Si une telle couche est comprimée par une perturbation, sa température et son opacité augmentent, jusqu'à ce que l'énergie thermique compense celle de la compression. La température augmente moins vite que dans une autre couche de l'étoile, car une partie de l'énergie permet d'ioniser le plasma stellaire. Quand la température le permet, la compression s'arrête et la couche s'étend. Le degré d'ionisation du gaz diminue et l'énergie ainsi emmagasinée lors de la compression est relâchée avec un déphasage. En créant ainsi un cycle de Carnot, l'oscillation est alimentée en énergie.

Il y a toutefois plusieurs conditions à l'efficacité du mécanisme κ dans l'étoile : il doit s'agir de la couche d'ionisation d'un élément assez abondant (généralement l'hydrogène, ou le fer), que la couche soit localisée suffisamment en surface pour que les oscillations ne soient pas amorties par les couches externes, tout en ayant une masse suffisante pour influencer significativement le bilan d'énergie au cours du cycle.

ZHEVAKIN (1963) précise ce critère : il faut que la profondeur de la couche d'ionisation soit telle que le rapport entre l'énergie thermique accumulée entre la couche d'ionisation et la surface soit commensurable à l'énergie transportée par radiation durant une période d'oscillation. Les étoiles de la séquence principale dans lesquelles les oscillations sont entretenues par le mécanisme κ sont nommés « pulsateurs classiques ». Comme nous le verrons au chapitre suivant, c'est sur eux que notre étude se concentrera.

Blocage convectif

Dans les étoiles présentant une enveloppe convective suffisamment profonde, un autre mécanisme d'excitation peut apparaître : le blocage convectif (PESNELL 1987 ; GUZIK et al. 2000). Ce mécanisme contribue à entretenir les oscillations si l'échelle de temps caractéristique de la convection est comparable à la période d'oscillation, auquel cas la convection n'est pas « capable » de transporter l'énergie supplémentaire générée lors de la contraction de l'étoile. La variation cyclique du flux radiatif à la base de la zone convective alimente alors le mécanisme de valve.

Excitation stochastique

La convection turbulente dans l'enveloppe des étoiles de masse $M \lesssim 2M_{\odot}$ peut également exciter des modes d'oscillation. Bien que les modes soient amortis en traversant l'étoile, l'excitation à la surface alimente continuellement les oscillations. C'est le cas dans le Soleil, où une variabilité de période ~ 5 minutes a été détectée (LEIGHTON, NOYES et SIMON 1962), à l'origine de l'héliosismologie, dont les résultats remarquables (voir par exemple CHRISTENSEN-DALSGAARD 2002) ont entraîné l'essor de l'astérosismologie.

Néanmoins, ce mécanisme n'existe que dans les étoiles ayant une épaisse zone convective turbulente en surface : il n'intervient donc pas dans les étoiles de type précoce et je le laisserai de côté par la suite.

Forçage par effets de marée

Il convient de souligner que dans les systèmes multiples, la présence d'un compagnon peut entraîner l'apparition d'oscillations forcées. Ce peut être le cas dans un système de deux étoiles, d'une étoile et d'une planète massive et très proche, ou d'une planète géante et ses satellites. Les modes sont entretenus par les effets de marée ainsi induits et l'énergie dissipée par les oscillations va alors conditionner l'évolution à long terme du système (voir par exemple OGILVIE et LIN 2004), ou faire apparaître des résonances entre orbite et oscillations (FULLER, LUAN et QUATAERT 2016).

2.3.4 Pulsateurs de type précoce

Dans cette section, je décris les différentes classes d'étoiles pulsantes mises en évidence par les observations, et qui rentrent dans ce cadre de cette étude. Chaque classe de pulsateurs est définie par son emplacement dans le diagramme de Hertzsprung-Russell, et se différencie des autres selon le type de modes qui s'y propagent et le mécanisme qui les excite.

La figure 2.11 présente les différentes classes d'étoiles pulsantes à travers le diagramme de Hertzsprung-Russell. Sont mises en évidence les classes de pulsateurs de masse intermédiaire avérées, nous allons présenter leurs caractéristiques propres.

Étoiles de type γ Doradus et δ Scuti

Les étoiles de type δ Scuti sont des étoiles de classes spectrales A ou F, dont les pulsations sont principalement des modes p. Les pulsations de ces étoiles ont des périodes s'échelonnant de 20 minutes à 8 heures, et ont été détectées par WRIGHT en 1900. Elles sont entretenues par le mécanisme κ dans la zone d'ionisation de HeII. Certaines de ces étoiles ont des vitesses de rotation élevées, pouvant dépasser $200 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui implique un aplatissement conséquent et une influence significative de la force de Coriolis sur les modes d'oscillation.

Les oscillations dans l'étoile γ Doradus ont été observées par COUSINS et WARREN (1963). Depuis, la classe éponyme englobe des étoiles de classe F ou A tardif, qui pulsent quant à elles selon des modes g non-radiaux mais à ℓ faible. Les pulsations ont typiquement une période de 8 à 80 heures, une période comparable à celle de leur rotation. Au vu de leurs masses, les étoiles γ Dor sont composées d'un cœur convectif, d'une zone radiative et d'une enveloppe convective externe suffisamment importante pour permettre aux modes d'être excités par blocage convectif.

Cependant, le mécanisme κ et le blocage convectif ne s'excluent pas mutuellement, si bien qu'il existe des hybrides δ Sct/ γ Dor, dans lesquels des modes p et g coexistent (DUPRET et al. 2005). Les étoiles δ Sct présentant des oscillations basse fréquence sont si communes que le terme d'hybride est en passe de devenir obsolète (BALONA, DASZYŃSKA-DASZKIEWICZ et PAMYAT-NYKH 2015). Quoi qu'il en soit, au vu des domaines de propagation respectifs de ces modes (les modes p étant en surface et les modes g sondant les couches profondes), de nombreuses contraintes sur la structure interne de ces étoiles pourraient être déduites d'une étude sismique.

Néanmoins, les difficultés posées par ces étoiles sont multiples. La principale est que leur rotation rapide complique drastiquement l'identification des modes, condition *sine qua non* de l'exploitation des données astérosismiques. Néanmoins, des régularités ont également été observées dans le spectre de ces étoiles, permettant de caractériser leur rotation (VAN REETH

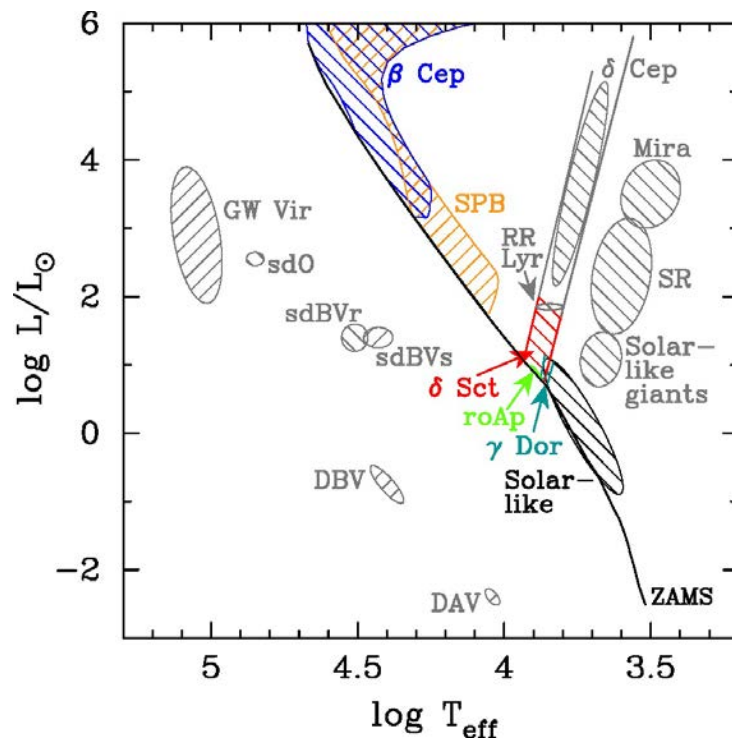


FIGURE 2.11 – Diagramme de Hertzsprung-Russell pulsationnel. Le trait plein parcourant la diagonale du graphe est la séquence principale d’âge zéro, sur laquelle on a mis en évidence les différentes classes de pulsateurs de type précoce en couleurs. En noir, les pulsateurs de type solaire appartiennent à la séquence principale, tandis que les classes de pulsateurs post-séquence principale sont grisées. Figure adaptée de HANDLER (2009).

et al. 2015) ou leur densité moyenne (GARCÍA HERNÁNDEZ et al. 2015). Une compréhension exhaustive du spectre d’oscillations de ces étoiles semble néanmoins nécessiter une modélisation complète (MIROUH et al. 2013, voir également le chapitre 4.4).

Étoiles de type β Cephei et SPB

Un peu plus haut sur la séquence principale, on trouve les étoiles massives β Cephei et SPB (pour “Slowly Pulsating B”). Les étoiles de type β Cephei sont des étoiles de type spectral B0 à B2, découvertes par FROST (1902) et exhibant des modes p d’ordre radial faible de périodes de l’ordre de quelques heures. En revanche, les étoiles SPB, de type spectral B3 à B9, abritent des modes g dont les périodes vont de 0,5 à 5 jours. La première détection de cette classe a eu lieu dans α Ori, et est à mettre au crédit de SMITH (1977). Pour ces deux classes d’étoiles, l’excitation des modes est causée par le mécanisme κ des éléments du groupe du fer (et non de l’hydrogène ou l’hélium). Ici également, il est intéressant de remarquer qu’il existe des hybrides β Cep/SPB.

La rotation joue un rôle extrêmement important dans ces étoiles également : la plupart sont

des rotateurs très rapides, avec un cœur très dense et une enveloppe très étendue. Leur évolution est très rapide, si bien qu'il est nécessaire de contraindre leurs modèles et notamment l'impact de la rotation sur le transport d'éléments chimiques au cœur (et par suite, l'impact de la rotation sur leur durée de vie).

Parmi ces pulsateurs, par exemple, certains sont également des étoiles Be, c'est-à-dire des étoiles de classe spectrale B présentant des raies d'émission de l'hydrogène. En fait, ces étoiles tournent extrêmement vite sur elles-mêmes, si bien que la gravité est compensée par la force centrifuge à l'équateur et leur aplatissement frôle les 33%. Dès lors, une perturbation même faible, comme une oscillation dilatant l'étoile, permet d'éjecter une partie du gaz stellaire. Se forme alors un disque circumstellaire, principalement formé d'hydrogène, dont on retrouve la signature spectrale et qui retombe petit à petit sur l'étoile.

Étoiles de type Maia

Parmi les étoiles de masse intermédiaire, une nouvelle classe de pulsateurs a été détectée récemment par MOWLAVI et al. (2013). Celle-ci se situerait entre les étoiles SPB et δ Scuti dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (elle ne figure pas sur le graphe 2.11 tant son introduction est récente).

Les modes γ ont des périodes mesurées entre 0,1 et 0,7 jours et semblent être des modes de gravité. SALMON et al. (2014) ont avancé l'hypothèse qu'il s'agisse d'étoiles SPB dont la rotation rapide change la luminosité et la température effective, les déplaçant plus bas sur la séquence principale. D'autres études avancent une anomalie dans les opacités du fer pour justifier leur excitation par le κ -mécanisme (MORAVVEJI 2016, DASZYŃSKA-DASZKIEWICZ et al. *in prep.*). Cette classe a été récemment nommée à partir de l'étoile Maia qui, paradoxalement, n'en fait pas partie.

Étoiles de type roAp

Les étoiles roAp (pour "rapidly oscillating Ap stars") est une classe d'étoiles découverte par KURTZ (1978) avec l'étoile de Przybylski. Elles se situent dans une zone du diagramme H-R incluse dans le domaine des étoiles δ Sct, mais ont une physique très différente. Il s'agit toujours d'étoiles A présentant des sous- et surabondances de certains éléments chimiques, et généralement en rotation lente.

Elles oscillent avec des modes de pression d'ordre radial élevé, de degré faible et de périodes très courtes (de 5 à 20 minutes). L'excitation des modes semble provenir du mécanisme κ dans la zone d'ionisation de l'hélium, rendu possible près des pôles, où un champ magnétique dipolaire intense supprime la convection (BALMFORTH et al. 2001). Parce que le champ magnétique y a un effet plus important que la rotation, ces étoiles débordent du cadre de l'étude proposée dans cette thèse.

2.3.5 Régularités dans le spectre

Avec la quantité phénoménale d'étoiles observées par les missions spatiales CoRoT et Kepler, il a été nécessaire de développer des méthodes d'interprétation des fréquences mesurées. Une première approche passe par l'exploitation des régularités dans les spectres d'oscillation. En effet, les fréquences des modes p présentent des écarts réguliers qui peuvent être reliés aux

paramètres fondamentaux de l'étoile. Quant aux modes g, ce sont les périodes des modes qui se répartissent régulièrement et qui permettent ce travail.

Grande séparation dans les étoiles sans rotation

Le premier cas pour lequel ces régularités ont été exploitées est le Soleil, ainsi que les pulsateurs dits de type solaire, dans lesquels les oscillations sont entretenues de façon stochastique. Dans une étoile sans rotation, les fréquences des modes de pression se répartissent selon un peigne régulier, en fonction du degré ℓ et de l'ordre radial n du mode. En effectuant un développement au premier ordre, les fréquences suivent la relation dérivée des équations (65) à (74) de TASSOUL (1980) :

$$\nu_{n,\ell} \approx \left(n + \frac{\ell}{2} + \epsilon \right) \Delta\nu \quad (2.20)$$

où on définit la grande séparation $\Delta\nu$

$$\Delta\nu = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c_s} \right)^{-1}, \quad (2.21)$$

et ϵ retranscrit un déphasage dans la régularité de la structure, causé par les réflexions à la surface de l'étoile. Cette relation, dite asymptotique, est valable pour des valeurs de l'ordre radial n élevées (généralement $n \gtrsim 5$ au moins).

Dans les pulsateurs de type solaire, on peut relier $\Delta\nu$ et la fréquence correspondant à l'amplitude maximale ν_{\max} à la masse et au rayon de l'étoile via des lois d'échelle, à condition d'avoir une estimation de la température de l'étoile (voir par exemple MOSSER et al. 2010).

Ces lois d'échelle ont permis d'obtenir une précision sur les rayons et les masses des étoiles bien supérieure aux estimations antérieures. La force de cette estimation est sa simplicité : à partir de trois observables, elle permet d'obtenir masse et rayon de l'étoile avec des relations simples. Il a ainsi été possible de procéder à une analyse automatisée des spectres d'oscillation pour déduire masse et rayon de 13 000 géantes rouges observées par Kepler (STELLO et al. 2013). Ces mesures permettent alors d'obtenir des masses et des rayons ainsi que des contraintes sur le stade évolutif de ces étoiles, des données exploitables en gyrochronologie ou des statistiques utiles à l'étude de notre galaxie. Comme je le détaillerai plus loin dans l'exposé, à cause des difficultés d'identification des modes, un tel traitement n'est malheureusement pas encore possible pour les étoiles en rotation rapide.

Splittings rotationnels

Pour les étoiles en rotation lente, il est possible d'obtenir des contraintes sur le profil de rotation dans l'étoile à partir des différences avec le spectre sans rotation. En effet, on a vu qu'en l'absence de rotation, l'ordre azimutal des modes n'intervient pas : chaque mode à un ℓ donné est dégénéré $2\ell + 1$ fois.

Lorsque l'étoile est en rotation, cette dégénérescence est levée et il convient de tenir compte de l'influence de l'ordre azimutal m : ce dernier prend toutes les valeurs entières entre $-\ell$ et ℓ . Les modes à $\ell \neq 0$ sont alors divisés en multiplets, dont chaque pic correspond à une valeur de m , et les fréquences de ces pics sont séparées d'une valeur qui dépend de la rotation dans l'étoile :

on appelle cet écart le splitting rotationnel.

Ces splittings sont exploitables dans les étoiles en rotation lente, où il reste possible d'utiliser les nombres quantiques n, ℓ et m définis pour le cas sans rotation. En effet, dans le cas d'une étoile en rotation solide, LEDOUX (1951) a montré que la fréquence des modes s'obtient, au premier ordre, via

$$\nu_{n,\ell,m} = \nu_{n,\ell} + \frac{m\Omega}{2\pi} (1 - \mathcal{C}_{n,\ell}) \quad (2.22)$$

où $\mathcal{C}_{n,\ell}$ est la constante de Ledoux, qui dépend de la géométrie du mode mais pas directement de la rotation dans l'étoile. Dans le régime des ordres radiaux n asymptotiquement grands, cette constante vaut $\mathcal{C}_{n,\ell} \approx 1/(\ell(\ell+1))$ pour les modes g et tend vers 0 pour les modes p.

Il est néanmoins nécessaire de préciser que la présence des modes à différents m dans les spectres observés dépend de l'inclinaison de l'étoile. En effet, comme le montrent les géométries des harmoniques sphériques décrites en annexe A.1, la disposition des lignes nodales d'un mode sur la surface visible d'une étoile dépend de l'inclinaison de celle-ci. Par exemple, les modes à $m = 0$ seront facilement détectables pour une étoile vue par le pôle (le déplacement et la perturbation de température sont en effet maximales au pôle) mais pas nécessairement pour une étoile vue par l'équateur (la modulation d'intensité intégrée sur la surface visible est même nulle pour $m = 0$ et ℓ impair). En revanche, les modes à $|m| = \ell$ induiront une modulation de l'intensité lumineuse visible pour une étoile vue par l'équateur mais pas pour une étoile vue par le pôle. Plus généralement, ceci a pour effet de pondérer l'amplitude apparente des modes, voire de rendre certains pics absents des multiplets détectés, comme le montre la figure 2.12.

Lorsque la rotation dans l'étoile est différentielle, les splittings rotationnels ne sont pas exactement constants et portent une signature qu'il est possible d'exploiter. BECK et al. (2012) ont par exemple mis en évidence une série de modes mixtes (une combinaison de modes g près du cœur et p près de la surface) dans des géantes rouges, dont les splittings rotationnels sont incompatibles avec une rotation solide mais correspondent plutôt à une vitesse angulaire des couches profondes dix fois plus élevée que celle de la surface, comme le montre la figure 2.13. Pour prendre en compte la rotation différentielle à travers l'étoile, on relie les splittings rotationnels à la géométrie du mode par l'intermédiaire de fonctions, nommées noyaux et notées $K_{n,\ell}$ (de l'allemand *Kern*) :

$$\delta\nu_{n,\ell,m} = \nu_{n,\ell,m} - \nu_{n,\ell,0} = \frac{m\beta_{n,\ell}}{2\pi} \int_0^R K_{n,\ell}(r)\Omega(r)dr, \quad (2.23)$$

où $\beta_{n,\ell}$ et $K_{n,\ell}$ sont des intégrales complexes dépendant de la géométrie du mode. L'amplitude de ces noyaux en fonction de la coordonnée radiale donne une idée des zones sondées par chaque mode : il est ainsi possible, en étudiant le splitting rotationnel entre différents modes de sonder différentes profondeurs de la coquille.

Le problème inverse consistant à retrouver $\Omega(r)$ à partir de $\delta\nu_{n,\ell,m}$ étant mal posé, diverses méthodes de régularisation ont été proposées, donnant naissance à différents codes d'inversion comme les codes SOLA (JACKIEWICZ et al. 2012) ou InversionKit (D.R. REESE) par exemple. Ces méthodes d'inversion ont permis de dériver le profil de rotation interne du Soleil avec une précision toujours meilleure (voir, par exemple, SCHOU et al. 1998 ; KORZENNIK et EFF-DARWICH 2011) . Elles ont également permis de mettre en évidence une rotation différentielle

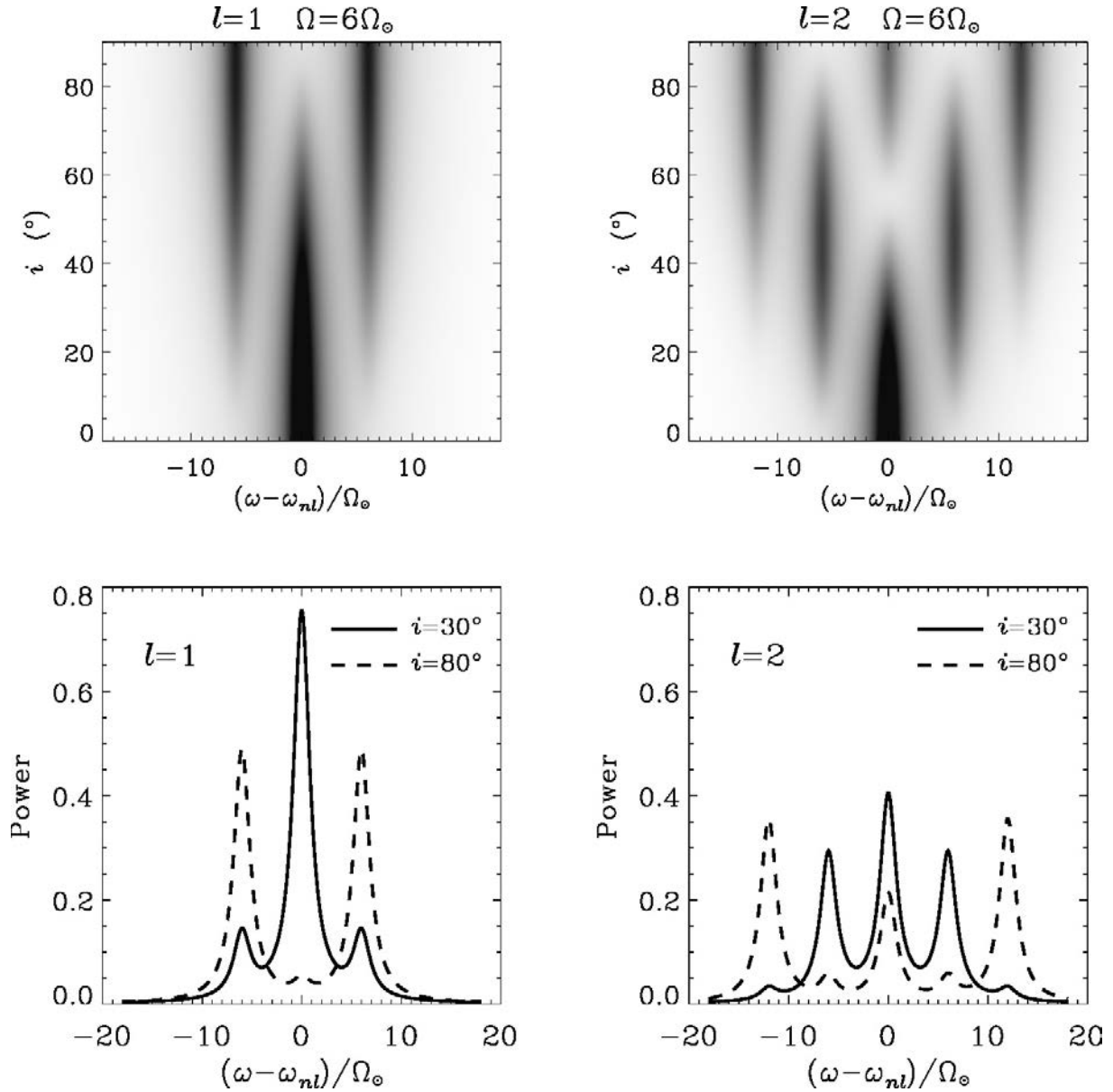


FIGURE 2.12 – Effet de l’inclinaison sur la visibilité des multiplets pour une étoile en rotation assez lente ($6\Omega_\odot$). En haut : carte de l’intensité en fonction de l’inclinaison et de l’inclinaison de l’étoile et du splitting. En bas : Amplitude apparente pour deux valeurs de l’inclinaison, pour les exemples d’un triplet $l = 1$ et d’un quintuplet $l = 2$. Figure tirée de GIZON et SOLANKI (2003).

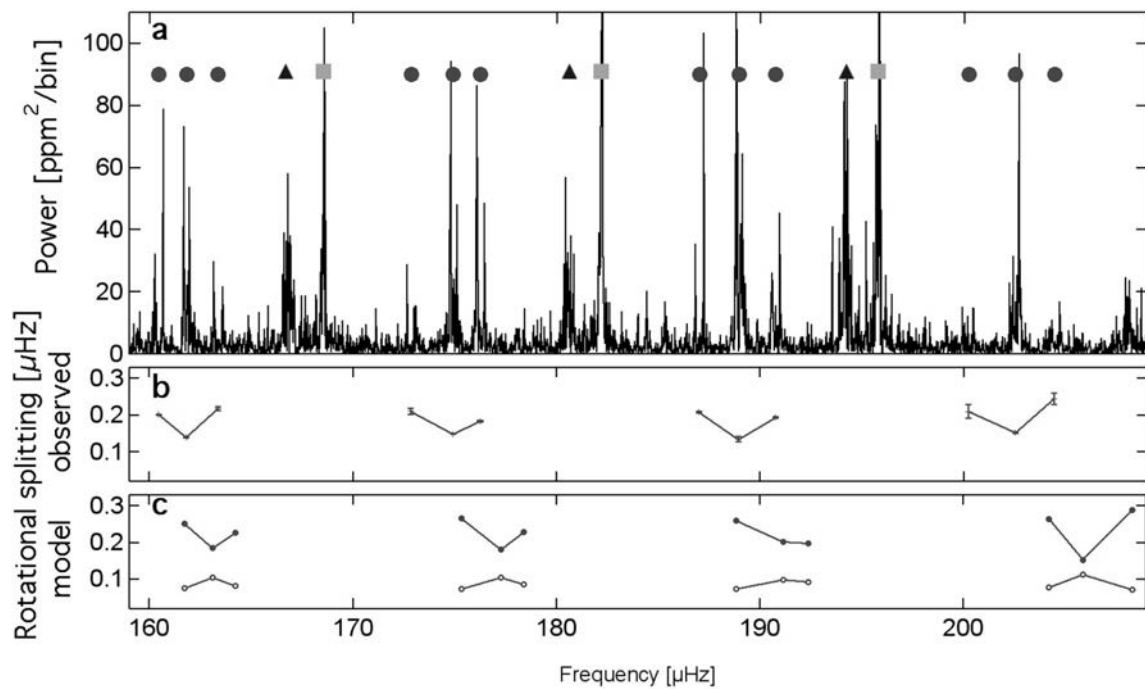


FIGURE 2.13 – Splittings rotationnels en rotation différentielle. (a) : Spectre d'oscillations observé dans l'étoile KIC 8366239, où chaque symbole indique un multiplet de modes mixtes identifié (carré : mode $\ell = 0$; ronds : triplets $\ell = 1$; triangle : quintuplet $\ell = 2$). (b) : Splittings rotationnels moyens mesurés pour chacun des triplets $\ell = 1$. (c) : Mêmes splittings calculés. La comparaison entre (b) et (c) montre que les splittings calculés dans un modèle avec rotation différentielle (symboles noirs) interpolent mieux les données qu'un modèle en rotation solide (symboles blancs). Figure tirée de BECK et al. (2012).

dans des sous-géantes (DEHEUVELS et al. 2012) ou des étoiles de type précoce. En effet, KURTZ et al. (2014) ou SAIO et al. (2015) trouvent une faible rotation différentielle dans les hybrides δ Sct/ γ Dor en rotation lente KIC11145123 ou KIC9244992. Le cœur de la première tourne plus lentement que sa surface (de quelques %), tandis que la situation est inversée dans la seconde.

Rotation rapide et régularités

Au vu du succès des méthodes utilisant les relations asymptotiques sur les spectres des pulsateurs stochastiques, certains chercheurs ont cherché des régularités similaires dans les pulsateurs classiques de la séquence principale. Il existe principalement deux obstacles à cette analyse : d'abord, les modes étant excités par le κ -mécanisme ou par blocage convectif, les processus de sélection des modes apparaissant dans le spectre mesuré ne sont pas clairement compris. Ensuite, la rotation modifie la répartition régulière des fréquences. En effet, lorsque la rotation est trop rapide, les multiplets ne sont plus visibles : ils deviennent d'abord asymétriques, avant de se mélanger et de perdre la trace de la rotation qui les a créés (REESE, LIGNIÈRES et RIEUTORD 2006 ; BALLOT et al. 2010). Néanmoins, des progrès ont été réalisés dans les étoiles de type γ Doradus et δ Scuti.

Les γ Doradus ($M \sim 1,2 - 2M_{\odot}$, $v \sin i \sim 40 - 130 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ en moyenne) abritent des modes g qui permettent de sonder les couches profondes de l'étoile, près du cœur convectif, où la pénétration convective donne lieu à des phénomènes de mélange et des discontinuités dans la composition chimique. Dans le cas sans rotation, on s'attend à ce que les modes g se répartissent de façon quasi-régulière en termes de période, l'étude de cette régularité permettant en particulier de contraindre les phénomènes de mélange (MIGLIO et al. 2008). Le graphe de gauche de la figure 2.14 montre un exemple des écarts en période, modulés par les effets du mélange autour du cœur, pour les modes g d'un modèle d'étoile γ Dor sans rotation. Lorsque l'étoile est en rotation, les écarts en période ΔP sont à nouveau modifiés, et varient de façon monotone avec la période P (BOUABID et al. 2013 ; VAN REETH et al. 2015). OUAZZANI et al. (2017) suggèrent l'utilisation d'une nouvelle observable Σ , à savoir la pente obtenue en plaçant les modes mesurés dans le plan $\Delta P - P$. Celle-ci est alors directement reliée à la vitesse de rotation du domaine de propagation des modes, pondérée par l'ordre azimutal m du mode. La pente dépend en revanche peu des paramètres fondamentaux ou des phénomènes de mélange dans l'étoile. Il est alors possible de déduire la vitesse de rotation interne de l'étoile, comme le permettent les splittings dans le cas à rotation lente. Le graphe de droite de la figure 2.14 montre la dépendance de cette pente Σ vis-à-vis de la vitesse de rotation de l'étoile pour les modes $\ell = 1$.

Des régularités dans les spectres des étoiles de type δ Scuti ($M \sim 1,5 - 2,5M_{\odot}$, $v \sin i \sim 100 - 150 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ en moyenne) ont également été exploitées. Pour ce domaine de masse, la rotation est suffisamment intense pour aplatir l'étoile, et modifier la géométrie des modes p. Ceux-ci se répartissent en différentes familles (modes îlots, galerie des murmures ou chaotiques) explicitées au paragraphe 2.3.2. Pour les modes d'îlots ou galerie des murmures, LIGNIÈRES et GEORGEOT (2009) et REESE, LIGNIÈRES et RIEUTORD (2008) ont mis en évidence des régularités propres. Le graphe de gauche de la figure 2.15, tiré de OUAZZANI, ROXBURGH et DUPRET (2015), présente un diagramme échelle pour un modèle d'étoile en rotation rapide. Ce diagramme est obtenu en découpant le spectre en bandes de fréquences de largeur donnée et en superposant les bandes ainsi obtenues. Si le découpage est fait à une fréquence pour laquelle le spectre présente

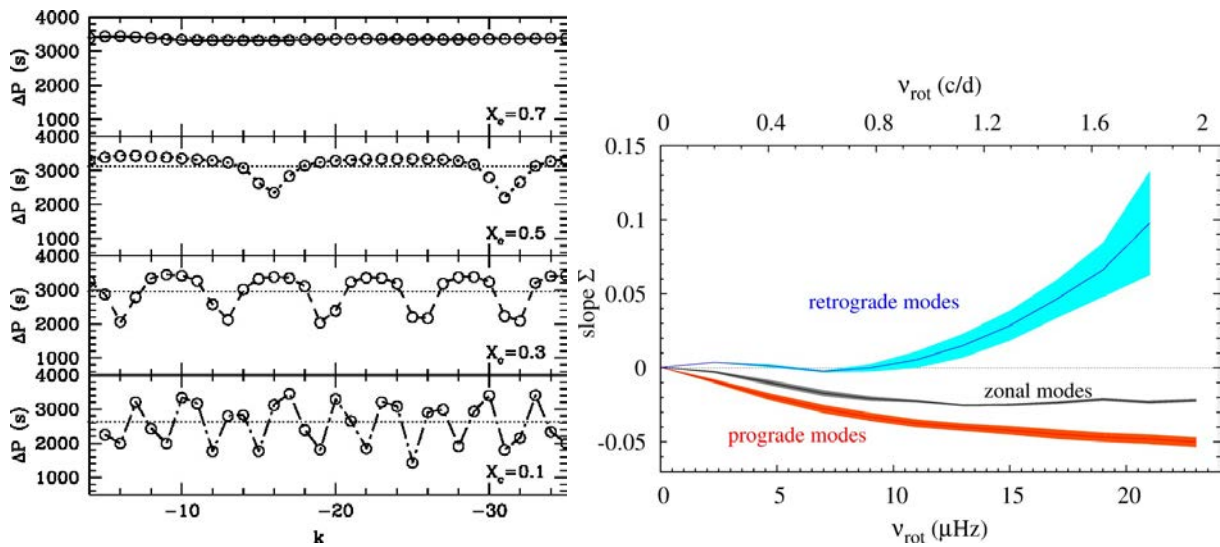


FIGURE 2.14 – Régularités dans les spectres des étoiles γ Doradus. À gauche : écarts en période entre deux modes consécutifs de même degré, en fonction de l'ordre radial desdits modes, dans une étoile de $1,6M_{\odot}$ sans rotation. La modulation des écarts en fréquence augmente avec l'écart de composition entre cœur et enveloppe. Étant donnée la répartition régulière des modes g en période, le diagramme $\Delta P - P$ aurait le même aspect. Figure tirée de MIGLIO et al. (2008). À droite : pente Σ dans le diagramme $\Delta P - P$ en fonction de la vitesse de rotation de l'étoile pour des modes à $\ell = 1$, et $m = 1$ (rouge), $m = 0$ (noir) et $m = -1$ (bleu). Figure tirée de OUAZZANI et al. (2017).

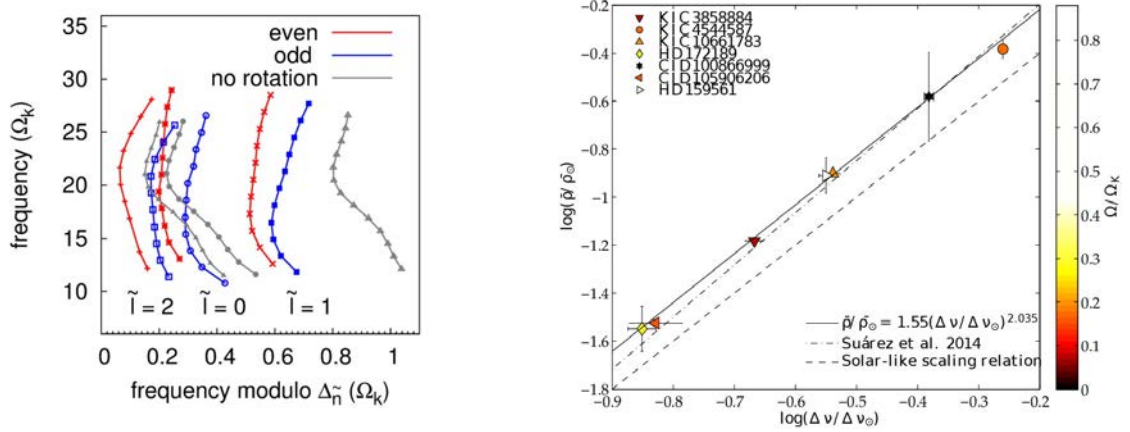


FIGURE 2.15 – À gauche : Diagramme échelle des modes îlots axisymétriques dans un modèle de $2M_{\odot}$ en rotation coquillaire $\Omega = \Omega(R)$ ayant consommé 65% de son hydrogène central. Figure tirée de OUAZZANI, ROXBURGH et DUPRET (2015). À droite : Loi d'échelle reliant densité moyenne et grande séparation pour six étoiles de type δ Sct. Figure tirée de GARCÍA HERNÁNDEZ et al. (2015).

une régularité, les points de données s'alignent sur des séquences verticales nettes. On retrouve ici une structure similaire au cas en rotation lente, si l'on utilise les nombres quantiques $\tilde{n}, \tilde{\ell}$ définis en figure 2.8.

Les modes galerie des murmures semblent avoir des amplitudes trop faibles pour être détectables, mais la régularité des modes d'îlots a pu être exploitée par GARCÍA HERNÁNDEZ et al. (2015). Bien qu'il soit impossible de déterminer directement à partir des observations la géométrie des modes à travers l'étoile (et donc de savoir s'il s'agit de modes îlots), il a été possible de trouver une séparation régulière parmi certains des modes de pression détectés : on obtient ainsi une identification partielle de certains modes. Par ailleurs, les étoiles de l'échantillon étudié par GARCÍA HERNÁNDEZ et al. (2015) étant dans des systèmes binaires, il a été possible de relier cette « grande séparation » à la densité moyenne des étoiles via une loi d'échelle. Le graphe de droite de la figure 2.15 présente la relation empirique qui relie ces deux quantités, sous la forme d'une loi d'échelle. Il est aussi intéressant de constater que la relation entre ces deux quantités est indépendante de la vitesse de rotation mesurée, conformément à ce que prédisent les modèles. Ce travail, très récent, mérite d'être transposé à d'autres étoiles, notamment des étoiles simples du champ, pour voir si la loi d'échelle présentée reste valable. À cette fin, nous avons proposé avec Antonio García Hernández une liste d'étoiles du champ à diverses vitesses de rotation à observer avec le satellite TESS (dont le lancement est prévu en 2018). La proposition est résumée en annexe C. Le calcul d'une grande séparation dans ces étoiles, associé aux modèles bidimensionnels ESTER (voir chapitre 4.2.2) permettra de mieux contraindre le lien entre structure interne de l'étoile et régularités dans le spectre d'oscillations.

3

Modes gravito-inertiels : étude théorique avec un modèle simplifié

Sommaire

3.1	Formalisme	50
3.1.1	Description de l'état d'équilibre	50
3.1.2	Domaine de paramètres	53
3.1.3	Étude non-dissipative	54
3.1.4	Étude dissipative	56
3.2	Géométrie des modes	58
3.2.1	Classification des modes	58
3.2.2	Effet de la stratification	60
3.2.3	Illustration des diverses géométries	64
3.3	Instabilités possibles	64
3.3.1	Instabilités baroclines	66
3.3.2	Instabilités de cisaillement	67
3.3.3	Intégrales de travail	68
3.4	Exemples de modes	69
3.4.1	Attracteurs	69
3.4.2	Latitudes critiques	74
3.4.3	Piégeage en coin	75
3.4.4	Résonances de corotation	77
3.4.5	Modes réguliers	81
3.5	Améliorations possibles	81

La modélisation des intérieurs stellaires nécessite une connaissance pointue à la fois de la microphysique et de la dynamique à l'œuvre. Afin d'étudier cette dernière plus avant, nous décidons de simplifier le modèle utilisé. Dans ce chapitre, nous présentons un modèle d'une enveloppe radiative d'étoile de type précoce en rotation différentielle.

Des modes à basse fréquence sont détectés dans ces étoiles, ceux-ci sondant des couches profondes près du cœur convectif et formant un spectre d'oscillations complexe. Comme j'ai pu l'indiquer dans le chapitre 2.3, parmi ces oscillations, on trouve des modes gravito-inertiels. La physique régissant le comportement de ces modes est mal connue, et améliorer leur description est une étape nécessaire à leur identification.

3.1 Formalisme

Alors que les modes de gravité (dans les fluides stratifiés sans rotation) sont étudiés depuis longtemps et bien connus (voir par exemple AERTS, CHRISTENSEN-DALSGAARD et KURTZ 2010), les modes inertiels (en rotation sans stratification) ont notamment été étudiés avec force détails dans une série d'articles de RIEUTORD et VALDETTARO (1997) à BACKUS et RIEUTORD (2016). Parmi ces études, BARUTEAU et RIEUTORD (2013) s'intéressent aux modes inertiels en rotation différentielle. Les modes gravito-inertiels ont été quant à eux étudiés par DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999), mais uniquement en rotation solide. L'étude présentée dans ce chapitre reprend donc le cadre posé par ces deux derniers travaux, en proposant une étude des modes gravito-inertiels mêlant stratification et rotation différentielle.

Dans cette section, nous décrivons le modèle sphérique dans l'approximation de Boussinesq, le fluide étant stratifié et en rotation. En tenant compte de l'interaction de ces deux phénomènes, qui génère une baroclinicité et par suite une rotation différentielle, ce modèle permet d'améliorer notre compréhension des modes eux-mêmes, plus que d'obtenir des contraintes directement applicables aux étoiles. La majorité des points abordés dans ce chapitre ont donné lieu à la publication de l'article MIROUH et al. (2016).

3.1.1 Description de l'état d'équilibre

Nous modélisons la zone radiative externe d'une étoile de type précoce comme une coquille sphérique comprise entre les rayons ηR et R , où le rapport d'aspect $\eta < 1$. Nous négligeons l'aplatissement introduit par la force centrifuge : en effet, celle-ci n'agit pas directement sur les modes mais sur la structure de l'étoile. L'effet sur la géométrie des modes est alors $\mathcal{O}(\Omega^2)$. Dans cette étude, on se limitera aux effets de la force de Coriolis (qui sont $\mathcal{O}(\Omega)$).

On considère dans cette coquille un fluide de viscosité ν et de diffusivité thermique κ constantes. Il est homogène en composition mais stratifié en température, et on décrit les écoulements dans l'approximation de Boussinesq. Celle-ci consiste à considérer le fluide comme incompressible mais stratifié. On néglige donc les variations de la densité, hormis dans le terme de poussée d'Archimède. Pour ce terme, on utilise la relation affine reliant la masse volumique ρ à la température T :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (3.1)$$

où ρ_0 est la masse volumique à la température T_0 , et α le coefficient de dilatation thermique, où $\alpha(T - T_0) \ll 1$. Néanmoins, on utilise $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, et on suppose $\rho = \rho_0$ dans les autres équations. Par ailleurs, l'équation de Poisson décrit le potentiel gravitationnel ψ : de $\Delta\psi = 4\pi G\rho$, on obtient

$$\psi(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2, \quad (3.2)$$

ce qui donne, pour la gravité \mathbf{g} ,

$$\mathbf{g}(r) = -\nabla\psi = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r \mathbf{e}_r. \quad (3.3)$$

Sa norme est proportionnelle au rayon, on écrira donc $\mathbf{g}(r) = g_0 \mathbf{r}/R$, avec g_0 la gravité à la surface.

Le profil de température est quant à lui obtenu en supposant que la coquille sphérique est une distribution homogène des puits de chaleur. Cette hypothèse correspond à une zone sans génération

d'énergie, et permet de d'obtenir un profil de température linéaire et croissant vers l'extérieur, d'où la stabilité vis-à-vis de la convection (voir le calcul complet dans CHANDRASEKHAR 1961). On exprime donc le gradient de température $\nabla T = \beta \mathbf{r}/R$ avec $\beta > 0$, et on peut désormais définir la fréquence de Brunt-Väisälä $\mathcal{N}(r)$ par

$$\mathcal{N}^2(r) = -\frac{g(r)}{\rho_0} \frac{d\rho}{dr} = \alpha g(r) \frac{dT}{dr} = \alpha \beta g_0 \frac{r^2}{R^2}. \quad (3.4)$$

Enfin, il faut établir le profil de rotation différentielle. Celle-ci est imposée et dépend de la coordonnée radiale r seulement, ce qu'on appelle un profil « coquillaire » (de l'anglais *shellular*).

Conditions aux limites et profil de rotation

Afin de déterminer le profil de rotation différentielle résultant de l'interaction de la rotation et de la stratification (c'est-à-dire la baroclinicité), on reprend l'approche de RIEUTORD (2006). Celui-ci a étudié l'équation de la vorticité, c'est-à-dire le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et en négligeant la viscosité. On obtient alors une solution bien connue en géophysique : le vent thermique. Celle-ci correspond à un écoulement isotherme, où la vitesse du fluide s'écrit

$$\mathbf{v}_0 = \left(\frac{\mathcal{N}^2(r')}{r'} dr' + F(s) \right) \mathbf{e}_\phi \quad (3.5)$$

où la fonction scalaire $F(s)$ est déterminée par les conditions aux limites pour un fluide visqueux. Ainsi, la vitesse valant $s\Omega \mathbf{e}_\phi$, à une fréquence de Brunt-Väisälä $\mathcal{N}(r)$ donnée correspond une rotation différentielle qui a le profil suivant :

$$\delta\Omega = \int_r^R \frac{\mathcal{N}^2(r')}{r'} dr' + F(s), \quad (3.6)$$

auquel il faut ajouter la rotation moyenne.

En utilisant des conditions aux limites rigides (où l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement, la vitesse valant $s\Omega \mathbf{e}_\phi$), à la fois sur le bord interne et le bord externe de la coquille, le terme $F(s)$ s'annule lorsque la viscosité tend vers 0. Dans cette limite, HYPOLITE et RIEUTORD (2014) ont démontré que le profil de rotation différentielle est purement radial, et se déduit aisément du profil de fréquence de Brunt-Väisälä à travers la coquille. En associant les équations (3.6) et (3.4), on obtient

$$\Omega_0(r) = \Omega_0(R) \left[1 + \frac{\alpha \beta g_0}{2R^2} (1 - r^2) \right], \quad (3.7)$$

où Ω_0 la vitesse angulaire à l'équilibre, dont la valeur à la surface $\Omega_0(R)$ est imposée. On voit alors que la rotation dépend uniquement de la distance au centre de l'étoile, et décroît du centre de l'étoile à sa surface de façon monotone.

Ces conditions aux limites rigides peuvent être utilisées dans des modèles stellaires pour tenir compte des interfaces avec des couches turbulentes, par exemple à l'interface entre cœur et enveloppe où un fort gradient de poids moléculaire moyen peut arrêter la propagation des ondes (KNOBLOCH et SPRUIT 1983), ou près de la surface où une perte de masse peut créer une

couche turbulente (RIEUTORD et BETH 2014). Les interfaces entre zones convectives et radiatives peuvent aussi agir comme des « murs » qui limitent le domaine de propagation des ondes. De telles conditions aux limites peuvent également être utilisées dans un contexte planétaire, par exemple dans certaines lunes joviennes ou saturniennes, où les modèles prédisent un océan liquide piégé entre un cœur solide et une couche superficielle de glace (CARR et al. 1998).

Équations des perturbations

Une fois l'état d'équilibre décrit, il convient d'écrire les équations de la mécanique en termes de leurs perturbations eulériennes, dans lesquelles nous conserverons les termes linéaires, avant de les adimensionner.

L'équation de Navier-Stokes dans un référentiel inertiel s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (3.8)$$

où \mathbf{v} est la vitesse du fluide, P sa pression et ρ sa masse volumique. Les quantités x sont décomposées en un terme d'équilibre x_0 et une perturbation associée x_1 , de sorte que $x = x_0 + x_1$ avec $|x_1| \ll |x_0|$. En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , le profil de rotation du fluide à l'équilibre s'écrit $\mathbf{v}_0 = r \sin \theta \Omega_0(r) \mathbf{e}_\phi$, où $\Omega_0(r)$ est sa vitesse angulaire. La perturbation de masse volumique s'exprime, dans l'approximation de Boussinesq, $\rho_1 \mathbf{g}_0 = \rho_0 \alpha g_0 T_1 \mathbf{r} / R$ (comme on l'a vu au paragraphe précédent).

En ne conservant que les termes linéaires, l'équation de Navier-Stokes devient alors

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \phi} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_1 + r \sin \theta (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_1 + \alpha g_0 T_1 \mathbf{r}, \quad (3.9)$$

L'équation de conservation de la masse se résume à celle du cas incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (3.10)$$

Il est à noter que dans le cas d'un fluide incompressible, il ne peut y avoir d'ondes de pression, puisque celles-ci se propagent par une série de compressions et dilatations du fluide. Les seules perturbations que nous pourrions calculer sont donc les ondes gravito-inertielles.

L'équation de la chaleur devient, en supposant un gradient de température linéaire,

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial T_1}{\partial \phi} + \frac{\beta}{R} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} = \kappa \nabla^2 T_1. \quad (3.11)$$

On cherche des solutions harmoniques aux équations (3.9)–(3.11), c'est-à-dire proportionnelles à $\exp(\lambda t + im\phi)$. On décompose $\lambda = i\omega + \tau$, ω étant la fréquence de l'onde dans le référentiel inertiel et τ le taux de croissance de l'oscillation (ainsi $\tau < 0$ correspond à une solution amortie et $\tau > 0$ à une solution amplifiée). On a vu par ailleurs que notre stratification induit un profil de rotation coquillaire $\Omega_0(r)$. Il est alors possible d'utiliser la rotation à la surface $\Omega_0(R)$ comme fréquence de référence. On adimensionne les équations des perturbations en utilisant

- R , le rayon externe de la coquille, comme échelle de longueur,
- $\Omega_0(R)^{-1}$ comme échelle de temps,
- βR comme échelle de température, où β est la valeur du gradient de température à travers la coquille.

En éliminant les indices 0 et 1, on obtient le système aux valeurs propres des oscillations

$$(\lambda + im\Omega)\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + r \sin \theta (\mathbf{v} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\phi = -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{v} + N^2 T \mathbf{r}, \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.13)$$

$$(\lambda + im\Omega)T + rv_r = \frac{E}{\mathcal{P}} \nabla^2 T. \quad (3.14)$$

où l'on a utilisé $p = P_1/\rho_0$, la perturbation adimensionnée de la pression réduite, notation que je conserverai dans la suite de l'exposé.

Apparaissent alors dans ces équations trois paramètres sans dimension :

$$N^2 = \frac{\alpha\beta g_0}{\Omega_0(R)^2}, \quad \mathcal{P} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad E = \frac{\nu}{\Omega_0(R)R^2}, \quad (3.15)$$

qui sont respectivement le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä adimensionnée à la surface, le nombre de Prandtl et le nombre d'Ekman. Au vu de la définition de ces deux paramètres dissipatifs, on remarque que varier \mathcal{P} à E constant revient à changer la diffusivité thermique κ , et varier E à \mathcal{P} fixé modifie κ et ν dans les mêmes proportions. La définition de la fréquence de Brunt-Väisälä adimensionnée montre également que le profil de rotation défini en équation (3.7) peut se réécrire

$$\Omega_0(r) = 1 + \frac{N^2}{2} (1 - r^2). \quad (3.16)$$

Conditions aux limites

Nous avons utilisé, pour l'écoulement d'équilibre, des conditions aux limites rigides, et les oscillations sont censées répondre aux mêmes conditions aux limites. Néanmoins, FOTHERINGHAM et HOLLERBACH (1998) ont montré que l'impact des conditions aux limites sur les modes propres purement inertiels est limité. Nous confirmons ce résultat pour le cas des modes gravito-inertiels, comme le montre la table 3.1 : on y compare des conditions aux limites rigides (où le fluide adhère à la paroi, et les perturbations de vitesse s'annulent sur les deux surfaces délimitant le domaine), à des conditions sans frottement (où le fluide ne traverse pas les interfaces mais se déplace librement dans la direction horizontale). L'utilisation de conditions aux limites sans frottement implique, sans surprise, une dissipation légèrement moindre, et facilite donc l'apparition d'éventuelles instabilités. Puisqu'elles sont aussi moins contraignantes numériquement, nous utilisons ces conditions sans frottement pour compléter le système d'équations (3.12)–(3.14). Enfin, nous choisissons des conditions aux limites sur la température afin de la fixer sur chaque limite : la perturbation s'annule donc aux limites du domaine et on a $T(\eta R) = T(R) = 0$.

3.1.2 Domaine de paramètres

Dans les étoiles en rotation, les forces visqueuses sont faibles, si bien que les nombres d'Ekman et de Prandtl se trouvent dans les fourchettes suivantes (RIEUTORD 2008 ; RIEUTORD et ESPINOSA LARA 2013).

$$\mathcal{P} \sim 10^{-5}, \quad E \sim 10^{-15} - 10^{-9}. \quad (3.17)$$

Cependant, il est numériquement difficile de résoudre des couches de cisaillement pour de faibles diffusivités, et les valeurs les plus basses du nombre d'Ekman sont hors de portée. En effet, la taille caractéristique des structures qu'il faut résoudre numériquement varie avec une puissance

	Conditions sans frottement	Conditions rigides
$m = 4; N^2 = 1,5$	$\tau = -2,623 \cdot 10^{-3}; \omega = -2,67162$	$\tau = -2,705 \cdot 10^{-3}; \omega = -2,67155$
$m = 0; N^2 = 0,45$	$\tau = -1,777 \cdot 10^{-3}; \omega = 1,75431$	$\tau = -1,833 \cdot 10^{-3}; \omega = 1,75433$
$m = 0; N^2 = 2,6$	$\tau = -1,572 \cdot 10^{-3}; \omega = 0,80413$	$\tau = -2,226 \cdot 10^{-3}; \omega = 0,80434$
$m = 0; N^2 = 2,3$	$\tau = -8,884 \cdot 10^{-4}; \omega = 0,30613$	$\tau = -1,393 \cdot 10^{-3}; \omega = 0,30730$

TABLE 3.1 – Valeurs propres calculées pour deux jeux de conditions aux limites, à $\mathcal{P} = 10^{-2}$ et $E = 10^{-9}$, hormis pour le dernier calcul qui utilise $E = 10^{-10}$.

positive du nombre d'Ekman : ces échelles demandent de grandes résolutions, donc des calculs plus coûteux et plus sensibles aux erreurs d'arrondi. Les solutions du système complet, incluant les termes dissipatifs, qui sont présentées dans cette thèse ont été obtenues pour les valeurs suivantes

$$\mathcal{P} \sim 10^{-2} - 1, \quad E \sim 10^{-10} - 10^{-6}. \quad (3.18)$$

On choisit aussi $N^2 < 9$ afin de limiter la rotation différentielle à un ratio $\Omega_{\text{coeur}}/\Omega_{\text{surface}} < 5$, comme c'est le cas dans les étoiles de séquence principale (voir figure 2.2, ou ESPINOSA LARA et RIEUTORD 2013).

3.1.3 Étude non-dissipative

Avant de résoudre les équations complètes (3.12)–(3.14), on étudie le système dans la limite non-dissipative, en imposant $\nu = \kappa = 0$. Il est alors possible de réduire le système à une unique équation aux dérivées partielles, dont l'étude se fait via la dynamique des caractéristiques.

Les caractéristiques sont une propriété mathématique de l'équation aux dérivées partielles obtenue dans le cas sans dissipation : il s'agit de courbes le long desquelles cette équation se résume à deux équations différentielles ordinaires (ZWILLINGER 1992). Il est alors possible de tracer les courbes caractéristiques en résolvant ces équations différentielles, et celles-ci permettent de déterminer de nombreuses propriétés de propagation des ondes gravito-inertielles. En effet, les caractéristiques jouent un rôle essentiel dans la forme des solutions aux équations complètes : elles permettent de délimiter le domaine de propagation des modes, peuvent converger vers un cycle de courte période le long duquel les couches de cisaillement peuvent apparaître (comme le montrent, par exemple, DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999), etc. Nous présentons donc ici leur calcul.

Opérateur de Poincaré, surfaces de retournement et caractéristiques

On réécrit les équations (3.12)–(3.14) en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) . On combine leurs composantes afin de réduire le système à une unique équation aux dérivées partielles de la perturbation de pression réduite p . La dérivation détaillée de cette équation est donnée dans

l'annexe B.1. En ne conservant que les termes du second ordre dans cette équation, on obtient

$$(\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2) \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + (2N^2 s z + A_z) \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial z} + (\tilde{\omega}^2 - A_s - N^2 s^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (3.19)$$

où A_s et A_z sont liés aux dérivées selon s et z du moment cinétique spécifique, par

$$A_s = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 \Omega), \quad A_z = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial}{\partial z} (s^2 \Omega). \quad (3.20)$$

Dans notre configuration, ces termes valent

$$A_s = 4\Omega^2 - 2\Omega N^2 s^2, \quad A_z = -2\Omega N^2 s z. \quad (3.21)$$

On note $\tilde{\omega} = \omega + m\Omega$ la fréquence de l'onde modulée par l'effet Doppler, c'est-à-dire la fréquence de l'onde exprimée dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire du fluide à la surface de l'étoile. N est la fréquence de Brunt-Väisälä à la surface de la coquille.

L'équation (3.19) est la généralisation de l'équation de la perturbation de pression obtenue dans le cas de modes gravito-inertiels en rotation solide (FRIEDLANDER et SIEGMANN 1982b; DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999), et de celle obtenue pour des modes inertiels en rotation différentielle (BARUTEAU et RIEUTORD 2013). Dans le cas d'une rotation solide ($A_s = 4\Omega^2$; $A_z = 0$) sans stratification, cette équation se réduit à la célèbre équation de Poincaré. On appellera donc « opérateur de Poincaré généralisé » le membre de gauche de l'équation (3.19).

Cette équation est une équation de type mixte : les coefficients n'étant pas constants à travers l'étoile, la nature de l'équation peut être hyperbolique dans une partie de la coquille et elliptique dans une autre. Or, l'équation 3.19, et donc le système complet, n'admettent de solutions oscillatoires que dans le domaine hyperbolique, celles-ci étant évanescentes dans le domaine elliptique. Il est donc essentiel de calculer le déterminant du système Δ :

$$\Delta = A_z (A_z/4 + N^2 s z) - A_s (N^2 z^2 - \tilde{\omega}^2) - \tilde{\omega}^2 (\tilde{\omega}^2 - N^2 (s^2 + z^2)), \quad (3.22)$$

Cette quantité peut changer de signe dans la coquille, la divisant ainsi en un domaine hyperbolique ($\Delta > 0$) et un domaine elliptique ($\Delta < 0$). Ces deux domaines sont séparés par une surface de retournement sur laquelle les ondes se réverbèrent. L'équation $\Delta = 0$ nous permet donc de prédire le domaine de propagation des ondes gravito-inertiels au sein de la coquille.

Dans le domaine de propagation, les caractéristiques sont des courbes le long desquelles les ondes se propagent. De l'équation (3.19), on obtient les équations différentielles ordinaires régissant les caractéristiques

$$\frac{dz}{ds} = \frac{N^2 s z + A_z/2 \pm \sqrt{\Delta}}{\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2}, \quad (3.23)$$

$$\frac{ds}{dz} = \frac{N^2 s z + A_z/2 \mp \sqrt{\Delta}}{\tilde{\omega}^2 - A_s - N^2 s^2}, \quad (3.24)$$

où l'on réutilise $\tilde{\omega} = \omega + m\Omega$, et les termes introduits dans les équations (3.21) et (3.22).

Notre configuration est axisymétrique, et les modes sont soit symétriques, soit antisymétriques par rapport à l'équateur. Ces équations sont alors résolues dans un quart de plan méridien de

l'hémisphère nord, délimité par l'équateur, l'axe de rotation, les surfaces interne et externe de la coquille. On y intègre numériquement les équations (3.23) ou (3.24) avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5, à partir d'un point arbitraire dans le domaine de propagation du mode. Au contact d'une des frontières, le chemin de caractéristiques est réfléchi dans la coquille en changeant le signe \pm dans les équations (3.23) ou (3.24). Même si les deux équations sont équivalentes, leur dénominateur s'annule pour des valeurs de s et z différentes. Afin de s'affranchir de possibles problèmes numériques causés lorsque la pente des caractéristiques devient trop importante, on bascule donc d'une équation à l'autre de sorte à utiliser partout dans la coquille la dérivée ds/dz ou dz/ds qui a la plus petite valeur absolue.

La résolution des équations ci-dessus va donc nous permettre d'obtenir de précieuses informations sur la propagation des ondes, et d'établir des lois de comportement sans nécessairement recourir au calcul complet, dissipatif, des modes en deux dimensions. Cette étude nous permettra notamment de mettre en évidence de nombreuses singularités, présentées en section 3.4 : latitudes critiques, corotations, attracteurs, etc.

Cette description est similaire à celle utilisée par BARUTEAU et RIEUTORD (2013) pour les modes inertiels en rotation différentielle, par DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999) pour les modes gravito-inertiels en rotation solide, ou bien par FRIEDLANDER (1989) dans le cas des ondes magnéto-inertielles.

3.1.4 Étude dissipative

Après l'étude des propriétés des modes propres dans la limite non-dissipative, nous nous intéressons maintenant au rôle des processus dissipatifs sur la structure et l'amortissement (ou l'amplification) des modes gravito-inertiels. Cette section vise à décrire la méthode numérique utilisée, présenter des exemples représentatifs de modes axisymétriques et non-axisymétriques, et discuter les implications physiques des résultats obtenus.

Méthode numérique

Afin d'étudier le problème aux valeurs propres en tenant compte des termes dissipatifs, nous résolvons le système consistant en les équations (3.12)–(3.14) et les conditions aux limites associées avec une méthode spectrale similaire à celle utilisée dans BARUTEAU et RIEUTORD (2013). Les équations sont discrétisées dans la direction radiale sur une grille de Gauss-Lobatto, définie à partir des polynômes de Tchebychev, et les composantes horizontales sont projetées sur les harmoniques sphériques (voir l'annexe A.1 ou RIEUTORD 1987). La projection des équations est tronquée à l'ordre L sur la base des harmoniques sphériques, et à l'ordre N_r sur la grille de Tchebychev. Les valeurs appropriées de N_r et L dépendent des propriétés des modes étudiés, ainsi que des nombres d'Ekman et de Prandtl. On utilise l'algorithme d'Arnoldi-Tchebychev décrit en section 4.2.3 pour calculer les modes et leurs fréquences ω . Encore une fois, on veillera à éviter erreurs d'arrondi et on veillera à la convergence spectrale des calculs. Tous les modes sont calculés en supposant une symétrie par rapport au plan équatorial. Pour plus de détails sur la méthode numérique, lire VALDETTARO et al. (2007).

Pour le calcul des valeurs propres, on utilise l'algorithme d'Arnoldi-Tchebychev. Cette méthode permet de calculer quelques solutions d'un grand système d'équations aux valeurs propres généralisé de la forme $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$.

En effet, dans notre cas, la taille de la matrice A est égale au produit du nombre de variables, de la résolution radiale et de la résolution horizontale (typiquement, quelques 10^4), et B est le second membre : il est numériquement impossible de résoudre un tel système par la méthode QZ habituellement utilisée. Cette méthode consiste à trouver pour une matrice complexe A une matrice triangulaire M telle que $A = UMU^{-1}$. M étant triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale et sont les mêmes que celles de A . Une telle décomposition existe toujours mais un tel calcul n'est pas toujours abordable numériquement pour les grandes dimensions.

L'algorithme d'Arnoldi-Tchebychev que nous utilisons cherche des valeurs propres autour d'une valeur donnée en entrée. Il crée ensuite un vecteur de départ aléatoire \mathbf{v}_0 , et projette la matrice A sur une base choisie en fonction du vecteur \mathbf{v}_0 . On obtient alors une autre matrice, plus petite, dont certaines valeurs propres sont proches de celles de A : on cherche alors les valeurs propres de cette petite matrice par la méthode QZ. Enfin, un critère de convergence permet d'établir si les valeurs et vecteurs propres obtenus sont satisfaisants, ou s'il faut recommencer avec un autre vecteur de départ. Si tel est le cas, on choisit comme vecteur de départ pour l'itération suivante une combinaison linéaire des vecteurs propres obtenus lors du calcul, jusqu'à obtenir des valeurs propres proches de la valeur d'entrée qui soient satisfaisantes.

On veillera à éviter erreurs d'arrondi et à vérifier la convergence spectrale des calculs. Pour plus de détails sur la méthode numérique, lire VALDETTARO et al. (2007).

Équations utilisées

On effectue un calcul complet des oscillations non-adiabatiques s'ajoutant à l'état d'équilibre décrit précédemment. Il est important que les mécanismes d'excitation habituellement invoqués dans les étoiles (mécanisme κ , excitations dues à la convection, voir chapitre 2.3) sont absents de notre modèle. En revanche, les dissipations visqueuse et thermique sont prises en compte, si bien qu'on ne s'attend pas, *a priori*, à trouver de mode instable dans une telle configuration.

On projette l'équation de Navier-Stokes (3.12) sur les harmoniques sphériques vectorielles \mathbf{R}_ℓ^m et \mathbf{T}_ℓ^m , et l'équation de la chaleur (3.14) sur Y_ℓ^m . Les perturbations de vitesse et de chaleur se décomposent en (voir annexe A.1)

$$\mathbf{v} = \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[u_m^\ell \mathbf{R}_\ell^m + v_m^\ell \mathbf{S}_\ell^m + w_m^\ell \mathbf{T}_\ell^m \right], \quad T = \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} t_m^\ell Y_\ell^m. \quad (3.25)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} E\Delta_\ell w_m^\ell &+ \left[\frac{2im\Omega}{\ell(\ell+1)} - i\tilde{\omega} \right] w_m^\ell \\ &= -2\Omega \left[A(\ell, m)r^{\ell-1}\partial_r \left(r^{-\ell+2}u_m^{\ell-1} \right) + A(\ell+1, m)r^{-\ell-2}\partial_r \left(r^{\ell+3}u_m^{\ell+1} \right) \right] \\ &+ r\partial_r\Omega \left[-(\ell+1)A(\ell+1, m)u_m^{\ell+1} + \ell A(\ell, m)u_m^{\ell-1} \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} E\Delta_\ell\Delta_\ell(ru_m^\ell) &+ \left[\frac{2im\Omega}{\ell(\ell+1)} - i\tilde{\omega} \right] \Delta_\ell(ru_m^\ell) = -2im\partial_r\Omega \left(u_m^\ell + v_m^\ell \right) - imr\partial_{rr}^2\Omega u_m^\ell \\ &+ 2\Omega \left[B(\ell, m)r^{\ell-1}\partial_r \left(r^{1-\ell}w_m^{\ell-1} \right) + B(\ell+1, m)r^{-\ell-2}\partial_r \left(r^{\ell+2}w_m^{\ell+1} \right) \right] \\ &+ 2\partial_r\Omega \left[B(\ell, m)w_m^{\ell-1} + B(\ell+1, m)w_m^{\ell+1} \right] - N^2\ell(\ell+1)t_m^\ell, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$i\tilde{\omega}t_m^\ell - ru_m^\ell = \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta_\ell t_m^\ell, \quad (3.28)$$

où l'on a défini les quantités suivantes

$$\Delta_\ell = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \quad (3.29)$$

$$A(\ell, m) = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad B(\ell, m) = \ell^2(\ell^2 - 1)A(\ell, m). \quad (3.30)$$

Dans les équations (3.26)–(3.27), on a utilisé la conservation de la masse (3.13) qui permet d'écrire

$$v_m^\ell = \frac{1}{\ell(\ell+1)r} \frac{\partial r^2 u_m^\ell}{\partial r}. \quad (3.31)$$

On clôt le système d'équations en implémentant des conditions aux limites sans frottement aux frontières interne et externe de la coquille.

On remarque qu'en imposant une stratification nulle, la rotation différentielle s'annulant également, on se ramène au système d'équations (2.2) de RIEUTORD et VALDETTARO (1997) pour des modes inertiels en rotation solide. En ne retirant que la stratification, ces équations correspondent au système (4.2) de BARUTEAU et RIEUTORD (2013). Enfin, en prenant la stratification en compte (mais pas la rotation différentielle), on retrouve les équations (2.5) de DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999) pour les modes gravito-inertiels en rotation solide.

3.2 Géométrie des modes

On a défini deux approches différentes d'un même problème : le calcul non-dissipatif, relativement simple et semi-analytique d'une part, et le calcul complet, dissipatif et numériquement plus coûteux d'autre part. Nous allons commencer par présenter la classification des modes qui découle de l'analyse non-dissipative.

3.2.1 Classification des modes

On a vu qu'il était possible, grâce au signe de la quantité Δ définie en équation (3.22), de déterminer l'étendue du domaine de propagation des ondes dans la coquille sphérique. On répartit donc les modes en deux catégories, en suivant la classification proposée par BARUTEAU et RIEUTORD (2013) :

- On nomme modes H les modes gravito-inertiels qui peuvent se propager dans toute la coquille (H pour “Hyperbolic domain”, car Δ y est partout strictement positif).
- On nomme modes HT les modes qui peuvent se propager seulement dans une partie de la coquille et présentant une ou plusieurs surfaces de retournement définies par $\Delta = 0$ (HT pour “Hyperbolic domain with Turning surfaces”).

On peut déduire des équations (3.23) et (3.24) que, pour un ordre azimutal m donné, l'espace des paramètres se limite à deux paramètres sans dimension, à savoir la fréquence de Brunt-Väisälä à la surface N et la fréquence du mode dans le référentiel tournant ω . On délimite ainsi les régions occupées par les modes H et les modes HT dans cet espace des paramètres en cherchant si l'équation $\Delta = 0$ a des solutions dans la coquille sphérique, pour des valeurs de N^2 et ω fixées.

L'annexe B.3 explicite les détails de ce calcul, qui permet de déterminer l'occurrence des modes HT, ainsi que les différentes géométries possibles pour leur domaine de propagation. Je ne présente dans cette section que les résultats, et leur interprétation physique, d'abord pour les modes axisymétriques, puis pour ceux à m non nul.

Modes axisymétriques

La figure 3.1 montre les différentes régions de l'espace des paramètres pour des modes axisymétriques ($m = 0$), pour un rapport d'aspect de la coquille $\eta = 0,35$ (la valeur $\eta = 0,35$ est le rapport d'aspect du cœur liquide de la Terre, mais aussi celui du cœur convectif d'une étoile jeune d'environ 40 masses solaires). Le domaine indiqué en jaune contient tous les modes H. Il n'y a pas de mode gravito-inertiels dans le domaine noir (le domaine elliptique recouvre toute la coquille). Le domaine blanc correspond aux modes HT. On remarque que le domaine accessible aux modes HT s'agrandit lorsque N^2 et la rotation différentielle qui en résulte augmentent. En effet, puisqu'il y a des zones de l'étoile tournant plus vite que la vitesse angulaire moyenne, des modes gravito-inertiels existent à des fréquences supérieures à celles attendues dans le cas en rotation solide. Aussi, quand N^2 augmente, le domaine des modes H rétrécit jusqu'à disparaître totalement pour $N^2 > 2$.

Pour les modes HT, le domaine de propagation peut avoir différentes géométries. Celles-ci sont présentées dans les miniatures. Les courbes pointillées violettes sur le graphe (N^2, ω) , obtenues en imposant $m = 0$ dans les équations (B.15)–(B.18) marquent la transition entre ces différentes géométries.

On trouve ainsi huit géométries possibles pour les modes HT axisymétriques, présentant des propriétés influençant les caractéristiques dans la coquille. Notamment,

- les géométries (a) et (b) confinent les modes vers l'équateur, tandis que la géométrie (c) confine les modes plutôt vers le pôle,
- les modes dans les géométries (g) et (h), à plus haute fréquence, ne se propagent pas jusqu'à la surface,
- les géométries (d), (e) et (f) contiennent deux surfaces de retournement distinctes dans la coquille,
- les géométries (a), (d), (e) et (f) présentent un angle aigu entre une surface de retournement et une frontière de la coquille, lequel peut mener au phénomène de « piégeage en coin » des caractéristiques (DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999 ; GERKEMA et al. 2008, voir paragraphe 3.4.3).

Le domaine (h) n'est pas étudié plus en détails, étant donné le petit volume qu'il représente dans l'espace des paramètres et la taille du domaine de propagation correspondant dans la coquille de l'étoile. Il est aussi intéressant de remarquer qu'alors que les frontières entre les différentes géométries de modes HT dépendent généralement du rapport d'aspect de la coquille η , ce n'est pas le cas des frontières du domaine des modes H. Ceci est confirmé par l'annexe B.3, qui présente en figure B.1 les géométries possibles à $\eta = 0$ et $\eta = 0,95$.

Enfin, on déduit que le domaine de fréquence accessible aux modes axisymétriques est $[0; 2\Omega(\eta R)]$, qui peut atteindre $[0; \frac{1}{\Omega_s} (2\Omega_s^2 + N^2)]$ dans notre modèle, pour la sphère pleine $\eta = 0$. Ce domaine est significativement plus grand que celui prédit dans le cas des modes gravito-inertiels dans une sphère stratifiée en rotation uniforme, $[0; \sqrt{4\Omega_s^2 + N^2}]$ (FRIEDLANDER

et SIEGMANN 1982a; DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999).

Modes non-axisymétriques

La figure 3.2 propose trois cartes, pour $m = 1, 2$ et 4. On voit alors l'évolution des domaines respectifs des modes H et HT dans l'espace des paramètres. Les fréquences accessibles aux modes H et HT sont décalées autour de $\omega = -m$ pour les modes d'ordre azimutal m . Le domaine des fréquences accessibles n'est plus symétrique : le domaine s'élargit vers les fréquences inférieures à $-m$. En comparant les figures 3.1 et 3.2, il apparaît que lorsque m augmente :

- à partir de $m = 1$, le domaine des modes H à $\omega < -m$ diminue, les modes H deviennent HT,
- à partir de $m = 2$, le domaine des modes H à $\omega > -m$ diminue également,
- à partir de $m = 2$, la limite à haute fréquence des modes HT devient indépendante de m car le domaine des modes HT est limité par $\max(2\Omega_s; N)$, tandis que le domaine des modes HT à $\omega < -m$ s'élargit lorsque m augmente.

On trouve que le domaine de fréquence accessible aux modes HT pour $m \geq 2$ est

$$[-(m+2)\Omega(\eta R) : -m\Omega_s + \max(2\Omega_s; N)]. \quad (3.32)$$

Cette limite supérieure $\max(2\Omega_s, N)$ ne dépend pas de m , le domaine de fréquence des modes HT ne s'élargit alors que vers les basses fréquences. L'annexe B.3 présente les étapes et subtilités de ce calcul.

3.2.2 Effet de la stratification

Pour offrir un premier aperçu de l'impact de la stratification et la rotation différentielle qui en découle, on suit un mode purement inertiel en augmentant la fréquence de Brunt-Väisälä. Pour ce faire, on utilise un processus itératif, qui consiste à augmenter légèrement N^2 et à recalculer le mode à chaque petit incrément, en utilisant à chaque étape la fréquence propre obtenue comme valeur initiale du calcul suivant.

A partir de la figure 3.3, nous présenterons des modes sous la forme d'un quart de plan, en coupe méridienne. L'énergie cinétique est représentée sur une échelle logarithmique, normalisée à sa valeur maximale. Sont superposés à ces cartes d'énergie, le cas échéant, les attracteurs de caractéristiques en vert et les surfaces de retournement en rouge. Les attracteurs de caractéristiques sont des cycles de courte période vers lesquels les caractéristiques peuvent converger. Le critère d'une telle convergence est expliqué plus en détails au paragraphe 3.4.1. On rappelle que les modes calculés sont axisymétriques, et ceux présentés sont également symétriques par rapport à l'équateur.

La figure 3.3 montre donc des coupes méridiennes d'énergie cinétique d'un même mode pour des valeurs croissantes de la fréquence de Brunt-Väisälä à la surface. Lorsque la fréquence de Brunt-Väisälä à la surface augmente, son gradient linéaire ainsi que le taux de rotation différentielle augmentent également. Dans chaque graphe, on voit une couche de cisaillement singulière qui suit l'attracteur des caractéristiques.

Le graphe en haut à gauche correspond à $N^2 = 0$, et donc à un mode inertiel en rotation solide. Les caractéristiques et les couches de cisaillement décrivent des droites dans la coquille. Le

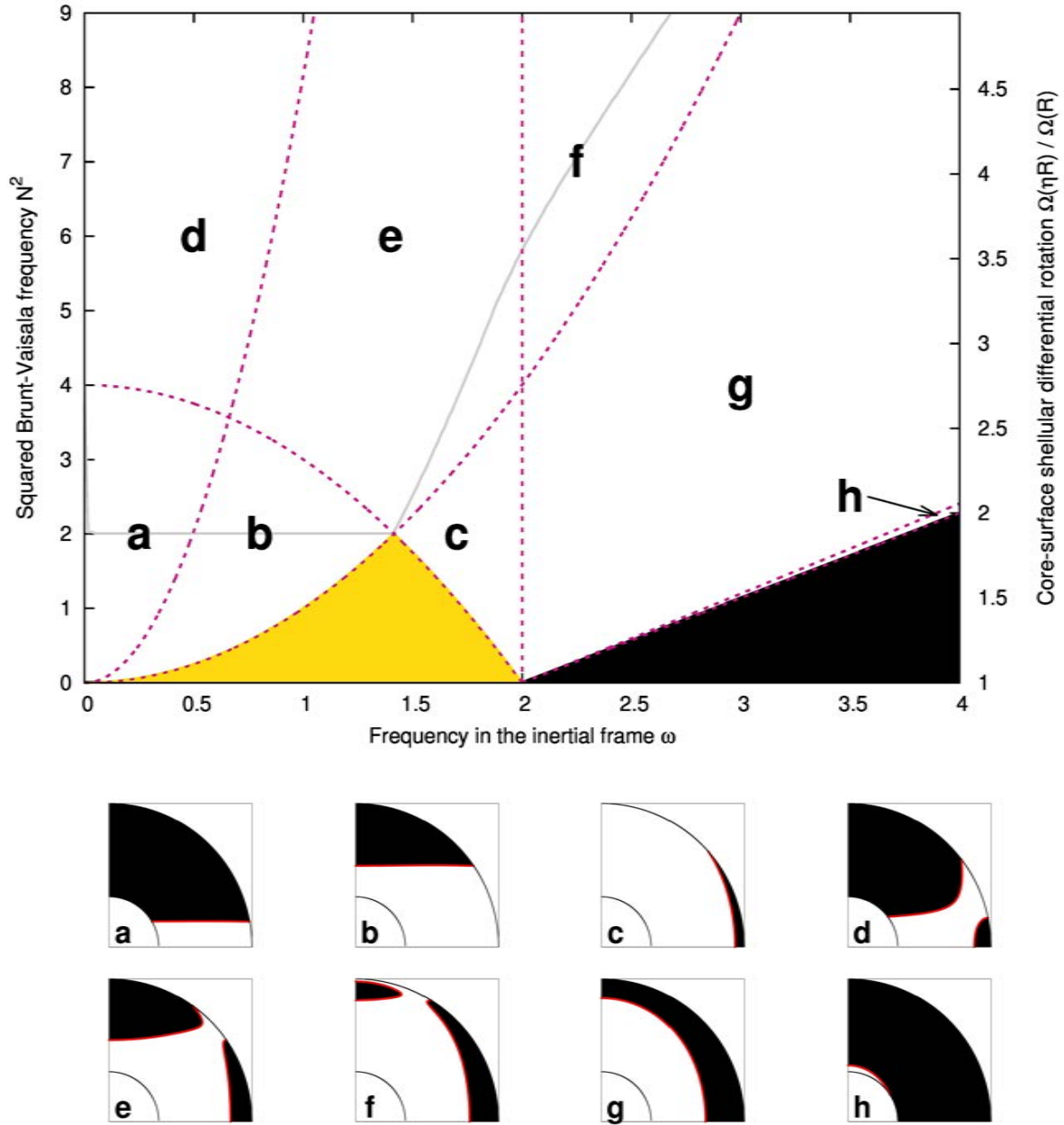


FIGURE 3.1 – Le graphe du haut présente une carte des différentes catégories de modes axisymétriques dans l'espace de paramètres (N^2, ω) , pour une coquille de rapport d'aspect $\eta = 0,35$. Le domaine jaune contient les modes H (se propageant dans toute la coquille), alors que les aires blanches correspondent aux modes HT (se propageant dans une partie de la coquille seulement, et présentant donc des surfaces de retournement). La zone noircie correspond aux configurations où aucun mode ne se propage. Les courbes pointillées violettes correspondent à l'apparition d'une surface de retournement à $r = \eta$ ou 1, et $\sin^2 \theta = 0$ ou 1, et délimitent les différentes géométries des domaines de propagation dans la coquille pour les modes HT. Pour chaque sous-domaine, une lettre indique la géométrie présentée dans la miniature correspondante. Dans ces miniatures, le domaine où les ondes peuvent se propager est indiqué en blanc, celui où les ondes sont évanescentes en noir, la ligne rouge correspondant à la surface de retournement $\Delta = 0$ sur laquelle les caractéristiques se réfléchissent. Au-dessus de la courbe grise, les modes sont potentiellement déstabilisés par l'instabilité ABCD pour $\mathcal{P} = 10^{-5}$ (voir section 3.3 et équation 3.33).

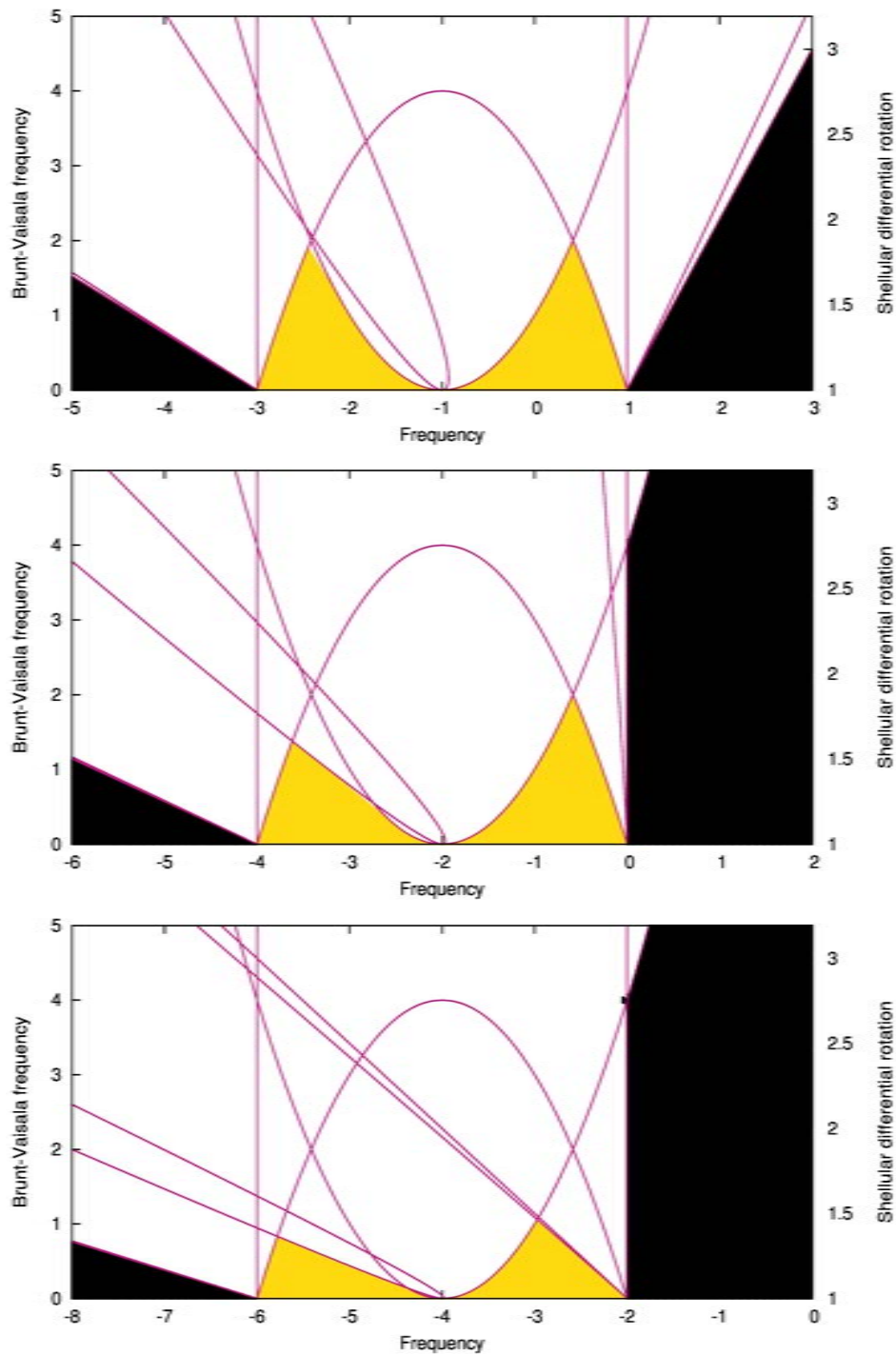


FIGURE 3.2 – De haut en bas : Même graphe que dans la figure 3.1 à $m = 1, 2$ et 4 . On voit dans le graphe à $m = 1$ un petit domaine de modes HT (blanc) là où on attendrait des modes H (vers $\omega \approx -2,4$ et $N^2 \approx 2$). Ceci est dû à une limitation de notre calcul des frontières entre les géométries, explicitée en annexe B

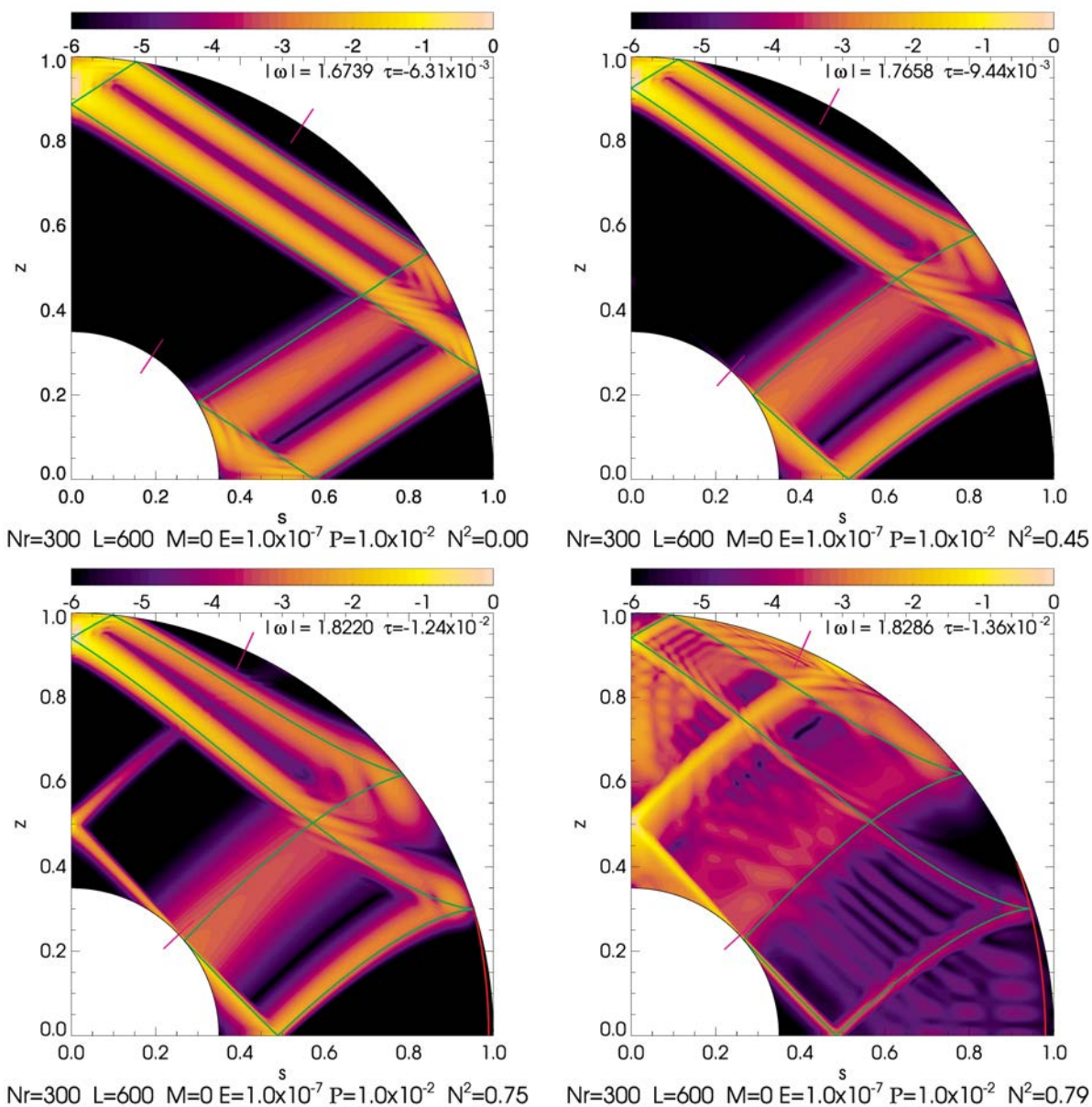


FIGURE 3.3 – Profils d'énergie cinétique (en coupe méridienne, normalisée à la valeur maximale, en échelle logarithmique) obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres incluant la dissipation. Les attracteurs sont superposés en vert, les surfaces de retournement en rouge. Les tirets roses sur les limites intérieure et extérieure de la coquille indiquent les latitudes critiques. À partir d'en haut à gauche, la fréquence de Brunt-Väisälä est augmentée pour un même mode ($\eta = 0,35$; $E = 10^{-7}$; $P = 10^{-2}$, partant de $\omega = 1,67$; $N^2 = 0$). La géométrie du mode est déformée, jusqu'à ce que la structure change brutalement quand la couche de cisaillement traverse la latitude critique interne (voir explications détaillées dans le texte).

graphe en haut à droite ($N^2 = 0,45$) met en évidence la distorsion introduite par la stratification et la rotation différentielle : les caractéristiques sont désormais des courbes, mais la forme générale de l'attracteur est conservée. En augmentant encore la stratification (en bas à droite, $N^2 = 0,75$), la caractéristique devient presque tangente au cœur. À cause de la viscosité du fluide, une partie de l'énergie frôle le cœur et se propage vers l'axe de rotation plutôt que sur le cycle courte-période : cette singularité s'appelle une latitude critique. Ce mode est, par ailleurs, devenu un mode HT puisqu'une surface de retournement apparaît près de l'équateur. Enfin, comme le démontre le graphe en bas à droite de la figure 3.3, lorsque la stratification est encore augmentée ($N^2 = 0,79$), la couche de cisaillement émise à latitude critique domine complètement la distribution de l'énergie cinétique dans la coquille.

3.2.3 Illustration des diverses géométries

La figure 3.4 démontre la diversité des modes H et HT prédits dans notre modèle.

La rangée du haut présente deux modes H. Celui de gauche est obtenu en suivant le mode présenté en haut à droite de la figure 3.3 lorsqu'on diminue le nombre d'Ekman du fluide. L'énergie est nettement concentrée autour d'une couche de cisaillement dont l'emplacement est correctement prédit par les caractéristiques. Dans certaines situations, comme c'est le cas ici, les caractéristiques atteignent un cycle limite qui décrit la position des couches de cisaillement dans la coquille. On appelle ces cycles limite des attracteurs, que je discute plus en détails au paragraphe 3.4.1. Le mode présenté en haut à droite est associé à une trajectoire de caractéristiques quasi-périodique. Il s'agit en fait du cas opposé à la présence d'un attracteur de caractéristiques. L'énergie est alors distribuée de façon quasi-uniforme dans la coquille.

Le mode présenté en bas à gauche est un mode HT, qui appartient au sous-domaine (b) de la figure 3.1. La surface de retournement prédite (courbe rouge) délimite bien le domaine de propagation, même si une partie de l'énergie cinétique pénètre la région évanescence. Le volume occupé par l'énergie cinétique dans le domaine elliptique est directement relié aux coefficients de diffusion ν et κ . Ce mode voit son énergie principalement focalisée sur un attracteur qui rebondit sur les surfaces de retournement, tout en excitant la singularité de latitude critique (voir paragraphe 3.4.2). Ainsi une petite partie de l'énergie cinétique du mode est déposée sur la couche de cisaillement émise tangentiellement au cœur, et se propage vers l'axe de rotation. Enfin, les surfaces de retournement peuvent elles aussi introduire des singularités telles que le piégeage en coin, qui est illustré par le mode en bas à droite. Ici une surface de retournement et la surface externe forment un angle aigu : les caractéristiques y convergent, et l'énergie s'y concentre. Cette singularité est étudiée plus en détails au paragraphe 3.4.3.

3.3 Instabilités possibles

Après ce rapide survol, et avant de rentrer dans les détails de la géométrie des modes, il convient de détailler les différentes instabilités qui peuvent apparaître dans un fluide stratifié en rotation différentielle. Celles-ci se répartissent en deux catégories : les instabilités baroclines, et les instabilités de cisaillement.

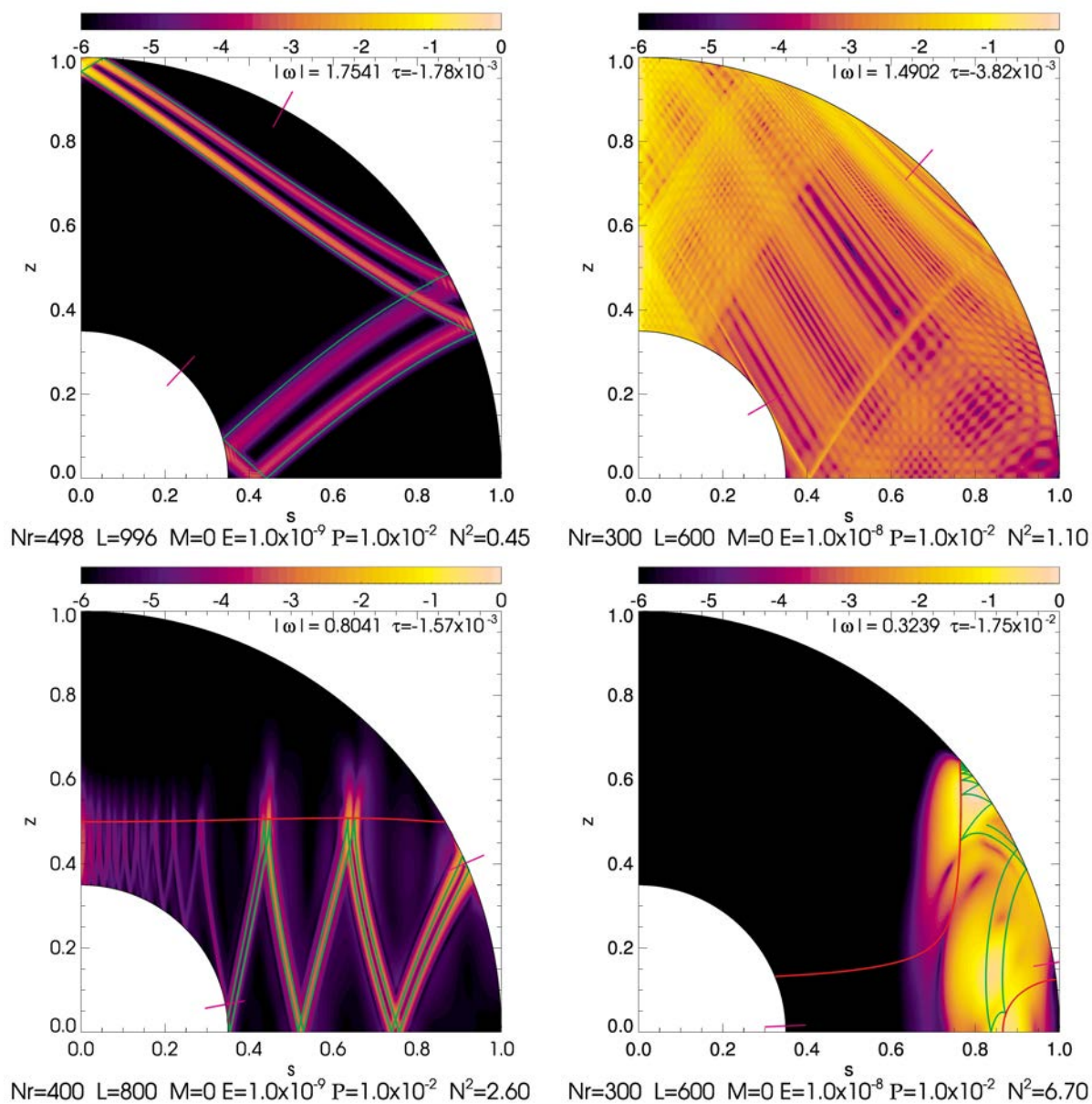


FIGURE 3.4 – Profils d'énergie cinétique (en coupe méridienne, normalisée à la valeur maximale, en échelle logarithmique). Sont superposés les attracteurs (en vert), les surfaces de retournement (en rouge) et les latitudes critiques (en rose). La rangée du haut présente deux modes H, celle du bas deux modes HT. Les différentes géométries sont discutées dans le corps du texte.

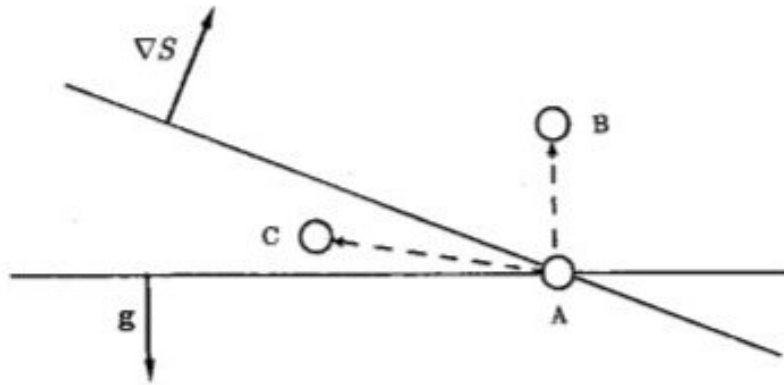


FIGURE 3.5 – Schéma de principe de l'instabilité barocline. Une particule déplacée de A en B reviendra à son point d'origine. En revanche, une particule déplacée de A en C verra son mouvement amplifié par la poussée d'Archimède. Figure tirée de ZAHN, cours des Houches 1987.

3.3.1 Instabilités baroclines

Dans un fluide en rotation, sans stratification, viscosité ou diffusion thermique, l'instabilité centrifuge peut déstabiliser la configuration d'équilibre. Le profil de rotation est instable si $\partial_s(s^2\Omega)$, ou bien $A_s < 0$ (DRAZIN et REID 1981). Ce critère, dit critère de Rayleigh, deviendrait pour notre profil de rotation $N^2 \geq \frac{2}{1-\eta^2}$.

Mais notre configuration est également stratifiée. Ceci va avoir pour effet de stabiliser l'écoulement, mais également d'introduire une baroclinicité, qui peut être à l'origine d'autres instabilités. En effet, les surfaces de même entropie ne sont plus horizontales (donc orthogonales à la gravité effective). Dès lors, à un endroit donné dans le fluide, ces surfaces forment un petit angle avec l'horizontale, comme l'illustre la figure 3.5. Dans ce schéma, si on déplace une particule fluide de A en B, celle-ci étant plus dense et froide que son environnement, elle reviendra au point A. En revanche, si la particule est déplacée de A en C, dans l'angle compris entre l'isobare et l'horizontale, celle-ci est plus chaude que son environnement, et la poussée d'Archimède va encore l'écartier du point A, vers la gauche ici. Pour plus de détails, voir la revue de ZAHN (1993). L'occurrence de cette instabilité est toutefois limitée par le fait qu'il faut que les mouvements à l'intérieur de l'angle décrit ici conservent le moment cinétique. Elle est également limitée par les dissipations visqueuse et thermique.

Ces cas ont été étudiés par différents groupes, et dans le cas axisymétrique, deux instabilités ont été identifiées : l'instabilité Goldreich-Schubert-Fricke (GSF, GOLDREICH et SCHUBERT 1967), et l'instabilité barocline-diffusive axisymétrique (ABCD, de l'anglais *Axisymmetric Baroclinic Diffusive* KNOBLOCH et SPRUIT 1983). Dans le cas d'un fluide en rotation différentielle, chimiquement homogène et stratifié de façon stable, toutes deux sont régies par le même critère d'instabilité local à savoir

$$-\frac{1}{4}A_s(A_s^2 + A_z^2) > \mathcal{P}N^2, \quad (3.33)$$

où A_s et A_z sont reliés aux dérivées partielles du moment cinétique spécifique $s^2\Omega$ par l'équation (3.21). La relation (3.33) se résume en fait à un critère de Rayleigh généralisé portant sur la distribution de moment cinétique. La viscosité, quant à elle, tend à stabiliser l'écoulement. Celui-ci se résume, pour un fluide non-visqueux au critère classique de Rayleigh pour l'instabilité centrifuge $A_s < 0$ (Drazin & Reid 81), qui devient $N^2 \geq \frac{2}{1-\eta^2}$ dans notre modèle.

Pour déterminer si cette instabilité barocline est à même de déstabiliser l'écoulement, on balaie le domaine de paramètres (N^2, ω) pour identifier les configurations où le critère (3.33) est vérifié dans au moins une partie du domaine de propagation des ondes (voir section 3.1.3). Dans la figure 3.1, cette région de l'espace des paramètres où les modes sont susceptibles d'être déstabilisés d'après le critère (3.33) est située au-dessus de la courbe grise pour une valeur réaliste du nombre de Prandtl.

En dehors de ce domaine, soit la coquille ne comprend aucun domaine instable d'après (3.33), soit celui-ci est intégralement contenu dans la partie où les ondes sont évanescences, indiquant une configuration stable *a priori*. Les modes axisymétriques ayant une amplitude non-nulle dans les domaines instables au sens de l'équation (3.33) peuvent en revanche avoir un taux de croissance positif, comme la section 3.4 le montrera (par exemple, la figure 3.10).

Les instabilités baroclines non-axisymétriques sont, pour leur part, bien étudiées en géophysique (ZAHN 1993), et sont régies par un critère d'instabilité local indépendant de l'ordre azimutal m :

$$\cos^2 \theta \frac{r}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega^2}{N^2} \rho r \frac{\partial \Omega^2}{\partial r} \right) > \Omega^2, \quad (3.34)$$

qui se simplifie, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, et en utilisant l'équation (3.16), en

$$z^2 > \frac{1}{6N^2}. \quad (3.35)$$

Ainsi, une instabilité barocline non-axisymétrique est possible pour $N^2 > 1/6$, et les modes peuvent être déstabilisés dans une région de la coquille, autour du pôle, délimitée par une ligne horizontale. Il ne faut néanmoins pas oublier que ce critère ne tient pas compte des dissipations visqueuse et thermique, dont l'effet attendu est de stabiliser l'écoulement, comme c'était le cas pour l'instabilité ABCD.

Il est aussi important de remarquer que les critères (3.33) et (3.35) sont locaux et ne sont pas sensibles aux conditions aux limites. En effet, non seulement les conditions aux limites peuvent bloquer l'instabilité, mais les zones délimitées par l'équation (3.35) peuvent tomber dans la région évanescence de la coquille et n'avoir alors aucun impact sur la propagation du mode.

3.3.2 Instabilités de cisaillement

Les instabilités de cisaillement peuvent rendre turbulentes des parties de la zone radiative des étoiles. La poussée d'Archimède a un effet stabilisant, et le critère d'instabilité local est

$$Ri = \frac{N^2}{(dv/dr)^2} < \frac{1}{4}, \quad (3.36)$$

où Ri est le nombre de Richardson, qui compare la stratification au cisaillement dans l'écoulement d'équilibre, v étant la vitesse moyenne de l'écoulement (DRAZIN et REID 1981).

En présence d'une forte dissipation thermique, ce critère est à pondérer par le nombre de Péclet (ZAHN 1974 ; LIGNIÈRES, CALIFANO et MANGENEY 1999). Le nombre de Péclet, est un nombre sans dimension défini par $Pe = vL/\kappa$ où L est une longueur caractéristique de l'écoulement. Le critère d'instabilité devient

$$RiPe = \frac{N^2}{(dv/dr)^2} \times \frac{vL}{\kappa} < \frac{1}{4}, \quad (3.37)$$

En considérant $v = r \sin \theta \Omega(r)$, une instabilité de cisaillement peut apparaître si

$$\frac{\mathcal{P}}{E} \frac{\Omega N^2 r^3 L}{\sin \theta (\Omega - N^2 r^2)^2} < \frac{1}{4}. \quad (3.38)$$

Ce critère nous permet de déterminer la dimension caractéristique des couches turbulentes que peuvent créer les instabilités de cisaillement. Dans une zone radiative stellaire, le rapport \mathcal{P}/E est d'ordre 10^4 à 10^{10} (voir section 3.1.2), alors que le rapport $\Omega N^2 r^3 / (\Omega - N^2 r^2)^2$ est d'ordre 1. Dès lors, si $L = \mathcal{O}(1)$, c'est-à-dire si l'écoulement est global dans l'étoile, le critère d'instabilité n'est jamais valide. Pour qu'il le soit, il faut $L = \mathcal{O}\left(\frac{E}{\mathcal{P}}\right)$, ce qui indique que seules les couches d'épaisseur $L \sim 10^{-10} - 10^{-4}$ (en unités du rayon stellaire) peuvent être déstabilisées. Il s'agit clairement d'épaisseurs faibles, induisant uniquement de la turbulence à petite échelle. Ceci laisse supposer que les instabilités de cisaillement sont à écarter pour expliquer les taux de croissance positifs d'éventuels modes instables. En revanche, elles peuvent induire des phénomènes turbulents à petite échelle, et donc mener à des coefficients de diffusion plus importants que prévu et potentiellement anisotropes, et par ce biais influencer la propagation des modes à grande échelle.

3.3.3 Intégrales de travail

Les critères d'instabilité que nous avons décrit dans le paragraphe précédent dépendent des paramètres dissipatifs. On s'intéresse donc au comportement des modes gravito-inertiels lorsque l'on fait varier ces paramètres. La dépendance des taux d'amortissement vis-à-vis des nombres d'Ekman ou de Prandtl peut être interprétée tout en évitant toutefois une analyse détaillée des couches limites qui dépasserait largement du cadre de cette étude. Pour cela, on utilise plutôt la forme intégrale du taux d'amortissement qui s'écrit

$$\tau = -\mathcal{D}_v - \mathcal{D}_t + \mathcal{D}_r, \quad (3.39)$$

c'est-à-dire comme la somme des dissipations visqueuse, thermique, et celle introduite par la rotation différentielle (UNNO et al. 1989). Les termes dans l'équation (3.39) sont donnés par

$$\mathcal{D}_v = \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{E}{2} \int_V s_{ij}^2 dV, \quad \mathcal{D}_t = \frac{1}{\mathcal{E}} N^2 \frac{E}{\mathcal{P}} \int_V |\nabla T|^2 dV, \quad \mathcal{D}_r = \frac{1}{\mathcal{E}} \int_V s\mathcal{R}\{v_r \partial_r \Omega v_\phi^*\} dV, \quad (3.40)$$

$$\text{où } \mathcal{E} = \int_V \mathbf{v}^2 dV + N^2 \int_V |T|^2 dV,$$

où s_{ij} est le tenseur des contraintes, alors que $\mathcal{R}\{z\}$ et z^* désignent la partie réelle et le conjugué du complexe z , respectivement. On a suivi la méthode présentée dans l'annexe B de DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999) pour dériver les équations (3.39) et (3.40).

Ce calcul a alors deux utilités. D'abord, il permet de confirmer le taux de croissance obtenu par la méthode numérique : en effet, si le mode propre est mal résolu, la valeur de τ prédite par l'équation (3.39) sera différente de la partie réelle de la valeur propre du système. Ensuite, ce calcul permet de diviser τ en ses composantes : il est alors possible de d'attribuer à chaque mode l'origine physique de son amortissement ($\tau < 0$) ou de son amplification ($\tau > 0$), ce qui sera d'une grande utilité pour confirmer la présence de l'instabilité ABCD dans nos calculs numériques. Puisque les contributions \mathcal{D}_v et \mathcal{D}_t au taux de croissance τ sont nécessairement négatives, on remarque que \mathcal{D}_r est le seul terme qui puisse contribuer positivement au taux de croissance et déstabiliser les modes gravito-inertiels.

3.4 Exemples de modes

Dans cette section, je présente un échantillon représentatif de modes axisymétriques et non-axisymétriques, obtenus pour différentes valeurs de la stratification et de la rotation différentielle associée. J'y illustre les diverses géométries des modes H et HT en comparant les solutions du problème dissipatif complet à leurs contreparties sans dissipation, et détaille les différentes singularités pouvant apparaître dans notre écoulement. L'occurrence de chacune des singularités présentées est évaluée en utilisant les résultats de l'analyse non-dissipative, la résolution complète des équations permettant de mettre en évidence instabilités et processus dissipatifs en variant les paramètres dissipatifs \mathcal{P} et E . À la lumière de ces deux analyses, je discuterai la portée astrophysique de chacun de ces phénomènes.

3.4.1 Attracteurs

Phénomène physique

Les caractéristiques que nous calculons dans la coquille à partir des équations (3.23)–(3.24) peuvent converger sur des cycles à courte période, que nous appelons des attracteurs. Cette dynamique a une contrepartie sur la distribution d'énergie du mode : en effet, l'énergie cinétique du mode se retrouve généralement concentrée dans des couches de cisaillement dont le tracé suit celui de l'attracteur. Néanmoins, ces attracteurs n'existent pas toujours, si bien que les caractéristiques peuvent parfois balayer la coquille de façon quasi-ergodique. La rangée du haut de la figure 3.4 illustre ces deux cas : à gauche, on voit clairement la concentration de l'énergie dans le cas où un attracteur est présent, alors qu'à droite les caractéristiques n'atteignent pas de cycle limite et l'énergie est répartie dans la coquille.

Le caractère singulier des attracteurs induit une dissipation élevée à travers la coquille. En revanche, lorsque l'énergie n'est pas ainsi concentrée, on s'attend à ce que le taux d'amortissement soit moindre. On voit par exemple que les modes du haut en figure 3.4 ont un taux d'amortissement comparable, malgré un nombre d'Ekman dix fois plus faible pour le mode de gauche, lequel présente un attracteur.

Les deux possibilités sont intéressantes d'un point de vue astrophysique. Les modes sans attracteur peuvent être plus facilement déstabilisés une fois les mécanismes d'excitation possibles pris en compte, tandis que les modes avec attracteurs, plus amortis, peuvent jouer un rôle dans le bilan d'énergie d'un système binaire (ou un système planétaire) et y influencer l'évolution à long terme des orbites.

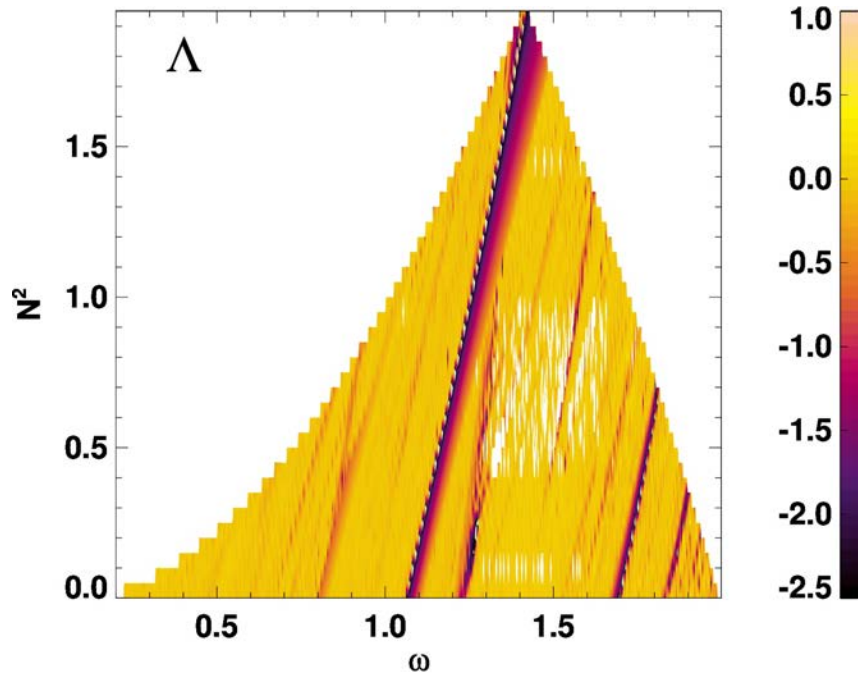


FIGURE 3.6 – Exposant de Lyapunov pour les modes H à $\eta = 0,35$. Les stries sombres à $\Lambda < 0$ correspondent à des modes focalisés sur un attracteur de courte période.

Exposants de Lyapunov

Afin d'estimer la présence d'attracteurs et la force de la convergence vers ces structures à partir du calcul non-dissipatif, nous calculons l'exposant de Lyapunov des caractéristiques.

On considère la distance δ_k entre le k -ième et le $(k + 1)$ -ième rebond sur l'axe de rotation ou le plan équatorial. On modélise cet écart par la relation de récurrence

$$\delta_{k+1} = \delta_k \exp \Lambda \quad (3.41)$$

où Λ est l'exposant de Lyapunov, dont le calcul est présenté dans l'annexe B.4. Cette quantité permet d'évaluer la convergence des caractéristiques vers un cycle limite : en effet, une valeur négative de Λ correspond à des rebonds qui se rapprochent progressivement les uns des autres, et donc à une convergence sur un attracteur. Plus l'exposant est négatif, plus la convergence est rapide. S'il n'y a pas de convergence, l'exposant doit tendre vers zéro dans notre calcul.

La figure 3.6 représente l'exposant de Lyapunov dans le plan (N^2, ω) , pour les modes H axisymétriques pour un rapport d'aspect $\eta = 0,35$. On distingue des stries où l'exposant a une valeur très négative, ce qui implique la présence d'un attracteur fort dans la coquille. Chacune de ces stries d'exposant de Lyapunov négatif correspond à un même mode progressivement déformé par la rotation différentielle : quand N^2 et la rotation différentielle qui en découle augmentent, la fréquence du mode varie mais sa forme générale est conservée, comme on l'a vu avec la figure 3.3. On remarque que la force d'un attracteur est constante suivant une de ces stries à $\Lambda < 0$. Cependant, la majeure partie du plan (N^2, ω) correspond à une absence d'attracteurs, ou

des attracteurs à longue période. On remarque également qu'en prenant une coupe horizontale dans la figure 3.6 à $N^2 = 0$, on retrouve les exposants de Lyapunov calculés pour des modes inertiels en rotation solide par RIEUTORD, GEORGEOT et VALDETTARO (2000), ou RIEUTORD, GEORGEOT et VALDETTARO (2001).

Pour des raisons de convergence du calcul détaillées dans l'annexe B.4, il arrive que les exposants ne s'annulent pas exactement, voire donnent des valeurs légèrement positives. Pour certaines valeurs (correspondant aux zones blanches dans le graphe de la figure 3.6), le calcul n'a pas convergé, mais les exposants de Lyapunov y sont probablement faibles en valeur absolue.

On a ainsi cartographié le domaine des modes se propageant dans toute la coquille sphérique. On a distingué les modes avec attracteur (dont l'énergie est concentrée sur des structures fines et donc probablement amortis par des processus dissipatifs) des modes avec des attracteurs à longue période ou sans d'attracteur. Peu amortis, ces derniers sont alors susceptibles de correspondre à des pulsations stellaires observables.

La carte présentée en figure (3.6) est à considérer avec précaution cependant. En effet, l'énergie cinétique des modes propres n'est pas nécessairement distribuée autour de l'attracteur prédit : il existe en effet, d'autres types de singularités, comme les latitudes critiques ou les résonances de corotation évoquées ci-après, qui peuvent affecter la distribution de l'énergie dans la coquille.

Suivi de modes

Pour suivre l'évolution d'un mode lorsque les nombres d'Ekman ou de Prandtl varient, on utilise la méthode déjà décrite au paragraphe 3.2.2 : on calcule le mode à une valeur du nombre d'Ekman donnée, la valeur propre obtenue servant de valeur initiale au calcul à un nombre d'Ekman un peu plus faible, et l'on itère ce processus. La figure 3.7 montre un suivi de mode pour un mode HT avec deux surfaces de retournement et un attracteur de courte période. Le graphe en haut à droite montre l'évolution du taux d'amortissement $|\tau|$ lorsqu'on fait décroître le nombre d'Ekman de 10^{-6} à 10^{-9} , pour $\mathcal{P} = 10^{-2}$ et 1. On trouve que $|\tau|$ suit approximativement une loi d'échelle en $E^{0,47}$ à faible nombre d'Ekman et à nombre de Prandtl constant. De la même manière, en diminuant le nombre de Prandtl de 1 à 10^{-3} , pour un nombre d'Ekman constant de $E = 10^{-7}$, on trouve $|\tau| \propto \mathcal{P}^{-0,5}$ pour $\mathcal{P} \rightarrow 0$ à E constant.

On mesure par ailleurs la largeur des couches de cisaillement en fonction du nombre d'Ekman, et on trouve que le meilleur ajustement correspond à une largeur proportionnelle à $E^{0,22}$ à \mathcal{P} fixé. Le graphe en bas à droite de la figure 3.7 présente les profils mesurés pour les couches de cisaillement, rééchelonnées par $E^{0,22}$: on voit une superposition assez nette des courbes (ce graphe est similaire à la figure 13(b) de DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999). D'ailleurs, la loi d'échelle obtenue est similaire à la loi en $E^{1/4}$ obtenue par DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999). En utilisant cette loi d'échelle pour la dimension caractéristique de l'écoulement dans l'équation (3.39), on s'attend à trouver $\tau \propto E^{1/2}$. En effet, comme on peut le déduire de l'équation des termes dissipatifs (3.40), dans laquelle la largeur des couches de cisaillement apparaît via les gradients de la vitesse et de la température. Dès lors, si la dissipation due à la rotation différentielle est négligeable devant les autres termes, une loi d'échelle en E^α sur la dimension des couches de cisaillement mène à une loi en $E^{1-2\alpha}$ pour le taux de dissipation τ (voir l'annexe B de DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO 1999).

Via ces suivis de modes, il est possible de déterminer les contributions relatives des différentes

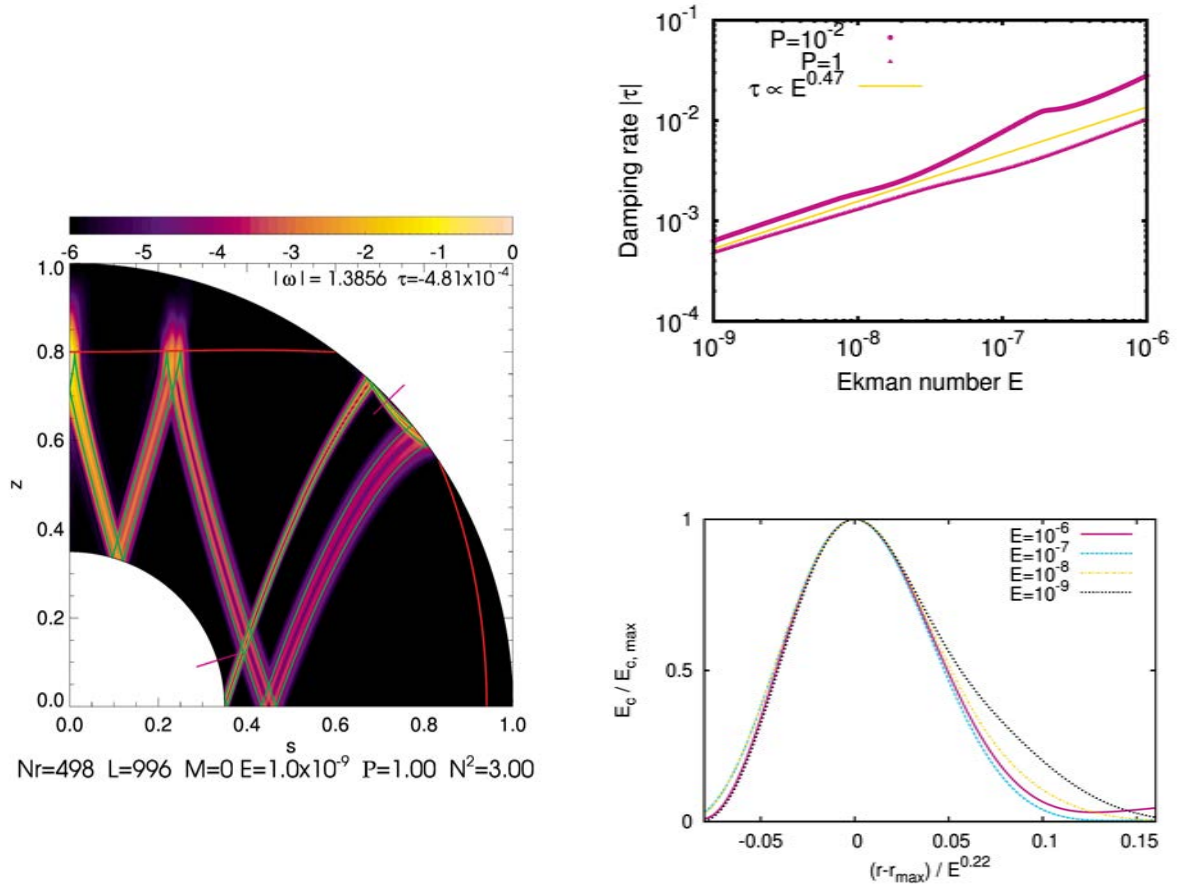


FIGURE 3.7 – Gauche : Énergie cinétique (normalisée par le maximum, en échelle logarithmique) pour un mode HT contenant deux surfaces de retournement, à $\omega = 1,39$; $\eta = 0,35$; $E = 10^{-9}$; $\mathcal{P} = 1$ et $N^2 = 3$. En haut à droite : Taux d’amortissement en fonction du nombre d’Ekman. Les points sont obtenus en suivant le mode en diminuant E pour $\mathcal{P} = 10^{-2}$ (cercles) et $\mathcal{P} = 1$ (croix), alors que la ligne continue représente la meilleure tendance à $E \rightarrow 0$. En bas à droite : Profil d’énergie cinétique le long d’un segment perpendiculaire à une couche de cisaillement pour quatre valeurs du nombre d’Ekman. La largeur du profil a été rééchantillonnée par le meilleur ajustement obtenu (voir texte).

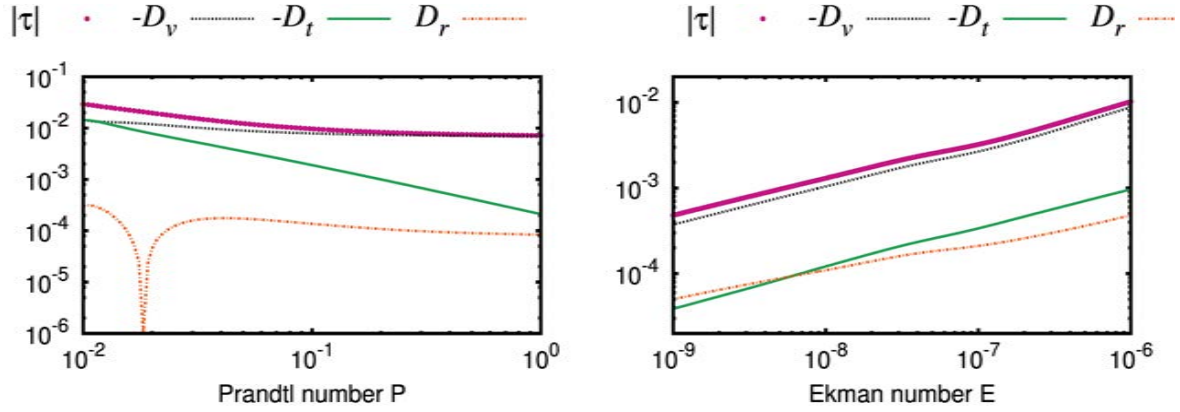


FIGURE 3.8 – Variation du taux d’amortissement τ et de ses composantes visqueuse \mathcal{D}_v , thermique \mathcal{D}_t et due à la rotation différentielle \mathcal{D}_r . À gauche : suivi du mode H en haut à droite de la figure 3.4 en fonction du nombre de Prandtl, à $E = 10^{-7}$. À droite : suivi du mode HT de la figure 3.7 en fonction du nombre d’Ekman, à $\mathcal{P} = 1$.

dissipations au taux d’amortissement, et les lois d’échelle qu’elles suivent, à partir des champs de vitesse et température obtenus dans nos simulations, en utilisant l’équation (3.39). Tant que la convergence spectrale du calcul du mode propre est correcte, le taux d’amortissement ainsi obtenu correspond à la valeur propre calculée numériquement.

Ainsi, la figure 3.8 montre le taux d’amortissement et les contributions visqueuse, thermique, et due à la rotation différentielle, pour deux modes axisymétriques : le mode H du graphe en haut à droite de la figure 3.4 pour lequel on varie \mathcal{P} , et le mode HT de la figure 3.7 pour lequel on varie E . On remarque que l’impact de la rotation différentielle est minime pour ces deux modes. En effet, comme le montre le graphe de gauche, la dissipation thermique domine à bas nombre de Prandtl, alors que la dissipation visqueuse domine pour de plus hautes valeurs. La dissipation thermique suit une loi en \mathcal{P}^{-1} , mais les deux autres termes ne suivent pas une telle loi d’échelle. On remarque également que le signe du terme provenant de la rotation différentielle change de signe lorsque \mathcal{P} varie. Cependant, comme son amplitude est bien inférieure à celle des dissipations thermique et visqueuse, son effet sur le taux d’amortissement total est négligeable. Le graphe de droite de la figure 3.8 reprend le suivi du mode à $\mathcal{P} = 1$ présenté en figure 3.7. On y voit que la dissipation visqueuse domine, $\mathcal{P} = 1$ étant une valeur élevée. Les dissipations thermique et visqueuse suivent la même loi d’échelle $\mathcal{D}_v, \mathcal{D}_t \sim E^{1/2}$. On confirme ainsi le caractère négligeable de \mathcal{D}_r et le lien entre largeur des couches de cisaillement et taux d’amortissement proposé plus haut.

Par ailleurs, en suivant la démarche de DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999), et en développant les perturbations de vitesse et de température en séries de puissances de $E^{1/2}$, il apparaît que $v_\phi = iv_r$ au premier ordre (RIEUTORD, GEORGEOT et VALDETTARO 2001). Cette relation de phase implique que l’intégrale liée à la rotation différentielle \mathcal{D}_r disparaît au premier ordre. De ce fait, on s’attend à ce que le terme \mathcal{D}_r soit négligeable et ne suive pas la même

loi d'échelle de E ou \mathcal{P} que les autres termes. Néanmoins, la loi suivie par \mathcal{D}_r ne saurait être déterminée précisément sans une étude complète des couches limites.

Ces résultats sont confirmés par le calcul : la largeur des couches de cisaillement mesurée en diminuant E est proportionnelle à $E^{0,22}$ à \mathcal{P} constant. Ainsi, la loi en $E^{0,22}$ obtenue rappelle la loi d'échelle en $E^{1/4}$ dérivée par DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999). Une telle loi donnerait un taux d'amortissement et des dissipations visqueuse et thermique suivant une loi en $E^{1/2}$, très proche de la loi en $E^{0,47}$ que nous mesurons. De plus, la dissipation due à la rotation différentielle est effectivement négligeable.

3.4.2 Latitudes critiques

Les latitudes critiques constituent un autre exemple de singularité susceptible d'affecter la propagation des ondes dans une coquille sphérique (comme le montrent RIEUTORD, GEORGEOT et VALDETTARO 2001). Comme toutes les singularités, elles génèrent des structures fortement dissipatives et sont donc importantes pour l'étude de la dynamique des systèmes en interaction de marée (GOODMAN et LACKNER 2009 ; OGILVIE 2009 ; RIEUTORD et VALDETTARO 2010 ; FAVIER et al. 2014).

Une latitude critique ϑ_c est une latitude ϑ sur la sphère externe ou interne à la coquille à laquelle les caractéristiques sont tangentes à la frontière. On en voit apparaître lorsque

$$\sin \vartheta_c = \frac{\tilde{\omega}(r)}{2\Omega(r)}, \quad \text{avec} \quad r = \eta \quad \text{ou} \quad r = 1, \quad (3.42)$$

c'est-à-dire lorsque $|\tilde{\omega}(r)| \leq 2\Omega(r)$. Les latitudes critiques interne ϑ_i et externe ϑ_o sont données par

$$\sin \vartheta_i = \frac{\omega}{2\Omega(\eta)} + \frac{m}{2} \quad \sin \vartheta_o = \frac{\omega + m}{2}. \quad (3.43)$$

Il y a une latitude critique sur la frontière interne si $0 < \sin \vartheta_i < 1$, c'est-à-dire lorsque

$$-m\Omega(\eta) < \omega < (-m + 2)\Omega(\eta), \quad (3.44)$$

et de la même manière, il y a une latitude critique sur la frontière externe lorsque

$$-m < \omega < -m + 2. \quad (3.45)$$

Dans les domaines de fréquence où des latitudes critiques existent, certains modes sont associés à des couches de cisaillement émises à ces latitudes (RIEUTORD et VALDETTARO 2010). Des exemples de modes où l'on voit des latitudes critiques sont donnés en figure 3.3, où les latitudes critiques sont indiquées par des tirets roses sur les limites interne et externe de la coquille. On voit pour les graphes du bas (à $N^2 \geq 0,75$), que l'énergie se concentre le long d'une couche de cisaillement tangente au cœur de l'étoile, au lieu de suivre l'attracteur prédit par les caractéristiques. En revanche, pour les graphes du haut, la latitude critique existe mais n'est pas excitée.

Alors que ce n'est pas nécessairement le cas pour les modes libres d'oscillations, il apparaît que les écoulements forcés par des effets de marées dans une sphère excitent systématiquement les couches de cisaillement associées aux latitudes critiques internes, quand celles-ci existent (comme le montrent OGILVIE 2009 ; GOODMAN et LACKNER 2009).

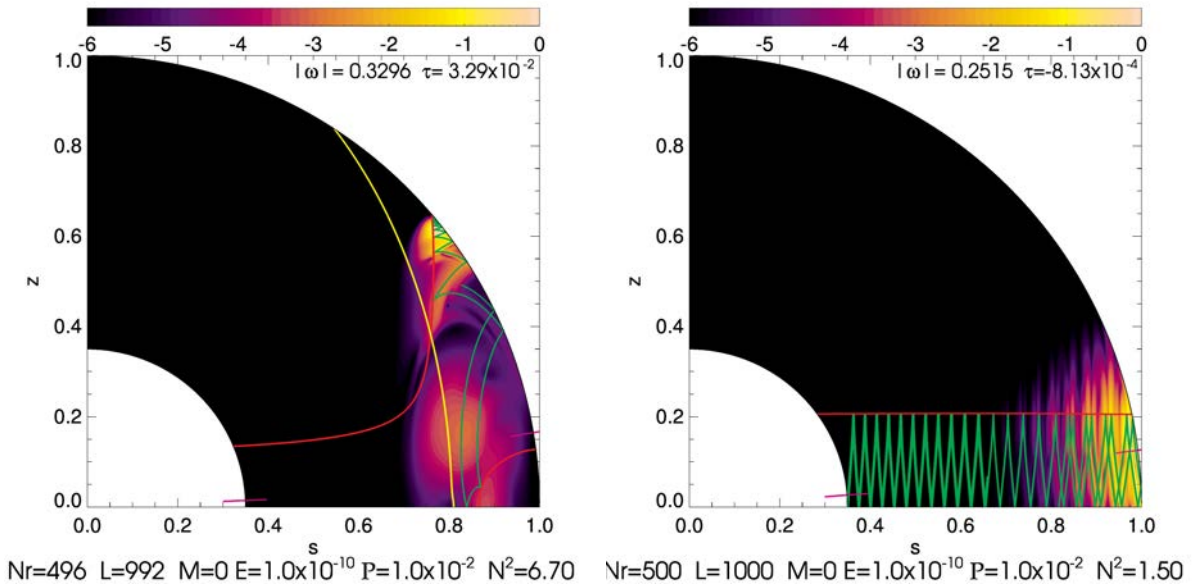


FIGURE 3.9 – Énergie cinétique (normalisée par le maximum, en échelle logarithmique) de deux modes HT présentant un coin. Les surfaces de retournement sont représentées en rouge, les caractéristiques en vert. À gauche : $\omega = 0,33$; $\eta = 0,35$; $E = 10^{-10}$; $\mathcal{P} = 10^{-2}$ et $N^2 = 6,7$. Le mode est effectivement piégé dans le coin. L'aire à l'extérieur de la courbe jaune est sujette à l'instabilité ABCD (voir section 3.3). À droite : $\omega = 0,25$; $\eta = 0,35$; $E = 10^{-10}$; $\mathcal{P} = 10^{-2}$ et $N^2 = 1,5$. Malgré la présence d'un coin, l'énergie cinétique n'y est pas concentrée.

3.4.3 Piégeage en coin

Exemples

Comme on l'a vu sur la carte des géométries de modes axisymétriques présentée en figure 3.1, il existe des géométries pour lesquelles les surfaces de retournement forment un angle aigu avec les surfaces interne ou externe. L'espace des paramètres correspondant à cette singularité correspond aux domaines (a), (d), (e) et (f). Ce genre de configuration peut mener au phénomène de piégeage en coin : les chemins de caractéristiques convergent vers l'angle ainsi formé. Lorsqu'un tel coin existe, au moins une partie des caractéristiques calculées y convergent, et cette concentration existe également, dans certains cas, dans la répartition de l'énergie cinétique.

La figure 3.9 présente deux exemples de modes HT. Pour celui à gauche, il y a deux surfaces de retournement, et celle à plus haute latitude forme un angle aigu avec la surface externe. On voit que l'énergie cinétique se concentre effectivement dans le coin où convergent les caractéristiques, sous la surface. Pour le mode de droite, l'unique surface de retournement confine le mode près du plan équatorial et forme avec la coquille interne un angle aigu, mais l'énergie cinétique ne s'y concentre pas. Ceci s'explique par la présence d'une latitude critique : les caractéristiques touchant le cœur à une latitude $\theta > \theta_c$ convergent effectivement dans le coin, alors que les caractéristiques touchant le cœur à $\theta < \theta_c$ forment un attracteur périodique. Dans ce second

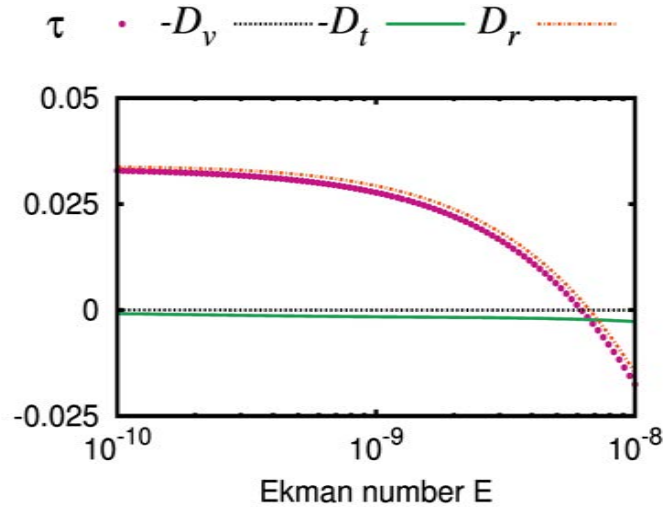


FIGURE 3.10 – Suivi de mode en variant le nombre d’Ekman, à $\mathcal{P} = 10^{-2}$ pour le mode de gauche de la figure 3.9. Par rapport à la figure 3.8, on trace cette fois en ordonnée τ et non sa valeur absolue, celui-ci changeant de signe à cause d’une instabilité barocline.

cas, l’énergie semble se concentrer systématiquement sur l’attracteur, et la présence d’un coin n’impacte pas la forme du mode propre, comme c’est le cas ici.

Suivi dissipatif

On remarque, par ailleurs, que le mode à gauche de la figure 3.9 est instable ($\tau > 0$) : se pose alors la question de la nature de l’instabilité.

On commence par chercher pour quelles valeurs du nombre d’Ekman l’instabilité apparaît via un suivi de mode similaire à celui réalisé pour les modes avec attracteur. La figure 3.10 montre qu’en suivant le mode en décroissant le nombre d’Ekman, ce mode devient instable et son taux d’accroissement τ devient indépendant de E . Le nombre d’Ekman critique, en-dessous duquel l’instabilité apparaît, est $E_c \sim 7 \times 10^{-9}$. La figure 3.10 montre également les diverses contributions au taux de croissance. On montre que la contribution du terme de rotation différentielle est de loin la plus importante, et qu’elle change de signe dans ce cas précis. Ainsi, c’est elle qui est à l’origine de l’instabilité du mode, pointant vers la présence de l’instabilité ABCD (introduite au paragraphe 3.3). Par ailleurs, on voit en figure 3.9 que le volume où l’énergie cinétique se concentre s’inscrit dans la zone de la coquille où le critère d’instabilité ABCD donné par l’équation (3.33) est vérifié (entre la courbe jaune et la surface). La frontière de cette zone instable par le mécanisme ABCD est à peine modifiée près de l’équateur lorsque l’on considère des valeurs astrophysiques du nombre de Prandtl comme $\mathcal{P} = 10^{-5}$. Par souci de vérification, on évalue le domaine où peuvent se développer les instabilités de cisaillement, dont le critère est donné par l’équation (3.38). Ce critère n’est satisfait que dans une petite zone près de la coquille interne (pour $\theta > 40^\circ$, $r < 0,45$) et peut donc être écarté.

Un tel mode, avec un taux de croissance positif, peut déstabiliser tout l'écoulement d'équilibre, défini en section 3.1.1, si aucun processus ne conduit à sa saturation. Une étude non-linéaire serait alors nécessaire à déterminer s'il existe une telle saturation. Si c'est le cas, on voit ici l'existence d'un mécanisme d'excitation de modes jusque là négligé dans les étoiles, où la baroclinicité alimente l'oscillation via l'instabilité ABCD.

3.4.4 Résonances de corotation

Les modes que nous avons présenté jusqu'ici étaient axisymétriques ($m = 0$). Il existe au moins une singularité propre aux modes non-axisymétriques sur un écoulement en rotation différentielle. En effet, des résonances dites de corotation apparaissent là où la fréquence du mode modulée par l'effet Doppler et sa vitesse de phase s'annulent, c'est-à-dire là où $\tilde{\omega} = \omega + m\Omega(r) = 0$. Ce type de résonance est aussi appelé une couche critique.

Géométrie

La définition du profil de rotation, en équation (3.16), nous montre que le domaine de l'espace des paramètres (N^2, ω) où une telle résonance peut exister correspond à

$$-m \left(1 + \frac{N^2}{2} (1 - \eta^2) \right) \leq \omega \leq -m. \quad (3.46)$$

On remarque à partir de l'équation (3.46) que le domaine de fréquence pour lequel une résonance de corotation existe dans la coquille s'élargit au fur et à mesure que m augmente. À m donné, on voit aussi que ce domaine s'élargit quand N^2 augmente. Lorsqu'une telle couche de corotation existe, son emplacement dans la coquille, appelé rayon de corotation r_c est donné par

$$r_c = \sqrt{1 + \frac{2}{N^2} \left(1 + \frac{\omega}{m} \right)}. \quad (3.47)$$

Pour évaluer l'impact de la résonance de corotation sur la propagation des modes, il est nécessaire de déterminer si le rayon de corotation traverse le domaine hyperbolique, c'est-à-dire si $\Delta(r_c) > 0$, Δ étant définie par l'équation (3.22). En imposant $r = r_c$ et $\tilde{\omega} = 0$ dans l'équation (3.22), on trouve que $\Delta(r_c)$ est positif si et seulement si $Nr_c > 2$, qu'on peut réécrire en utilisant l'équation (3.47) comme

$$\omega > m \left(1 - \frac{N^2}{2} \right). \quad (3.48)$$

On distingue deux cas :

- (a) si ω vérifie l'équation (3.46) mais pas (3.48), le rayon de corotation est intégralement inclus dans le domaine elliptique de la coquille, et on s'attend à un impact mineur de la résonance sur la propagation du mode,
- (b) si ω vérifie les deux équations (3.46) et (3.48), alors la couche critique traverse le domaine hyperbolique, on s'attend à ce que l'impact sur la géométrie du mode soit plus important.

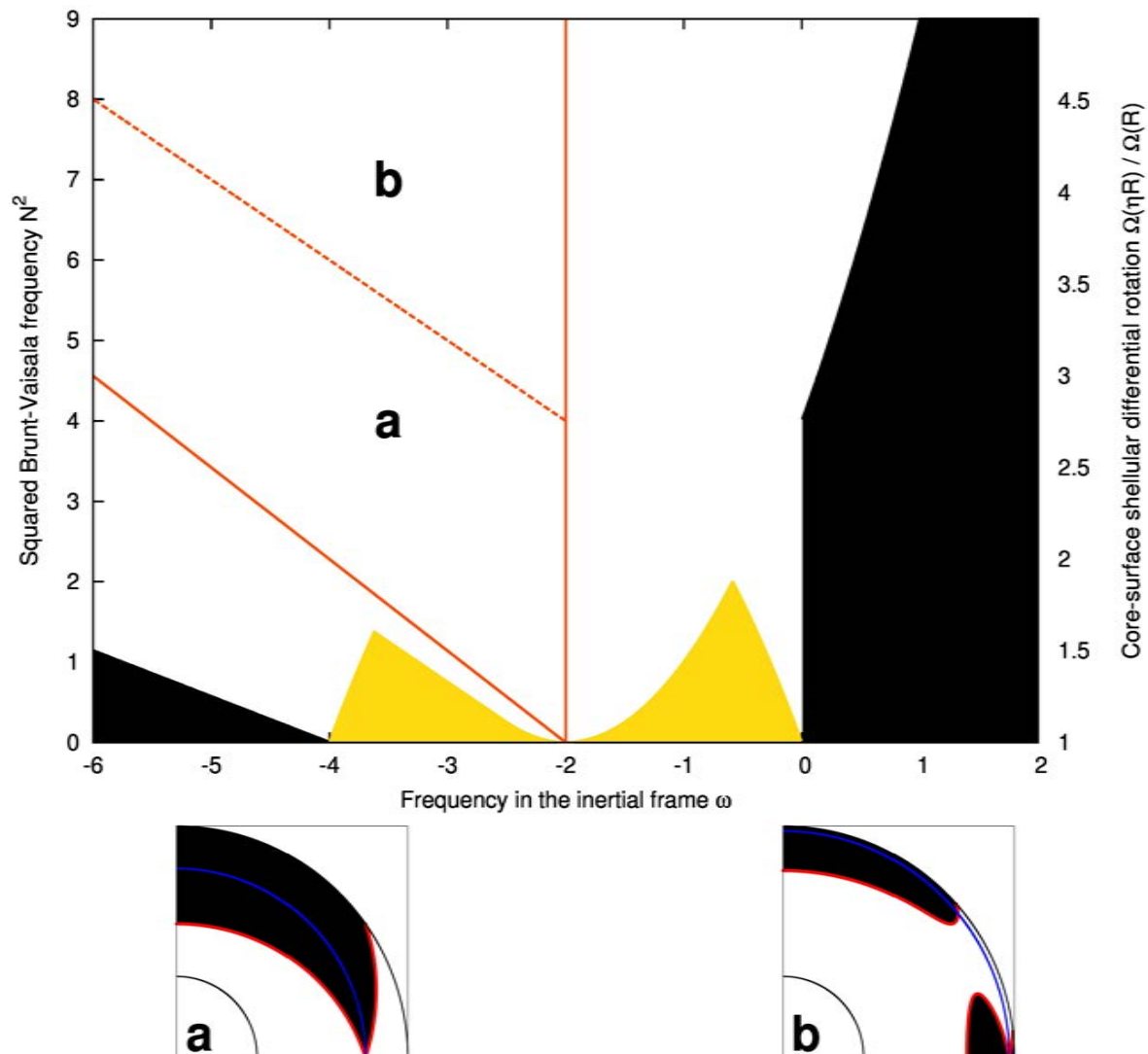


FIGURE 3.11 – Le graphe du haut montre l’occurrence des résonances de corotation dans l’espace des paramètres (N^2, ω) , pour une coquille sphérique de rapport d’aspect $\eta = 0,35$, et pour un ordre azimutal $m = 2$. Les couleurs correspondent aux domaines des modes H (jaune), HT (blanc), ou à une absence de modes (noir). Les résonances de corotation dans la coquille pour les configurations incluses entre les deux droites rouges. La ligne pointillée sépare les modes pour lesquels la corotation est intégralement incluse dans le domaine elliptique de la coquille (domaine a) et ceux pour lesquels la corotation traverse le domaine hyperbolique (domaine b). Les sous-figures, désignées par la lettre du domaine auquel elles correspondent, montrent comment les couches critiques (courbe bleue) sont susceptibles de traverser le domaine de propagation (en blanc). Les zones en noir sont les domaines elliptiques et les lignes rouges les surfaces de retournement.

La figure 3.11 montre l'étendue de l'espace de paramètres où une résonance de corotation existe dans la coquille pour $m = 2$. Le domaine où les couches critiques existent est compris entre les deux lignes rouges pleines. On remarque que les résonances de corotation n'existent que pour des modes HT, car $\tilde{\omega} = 0$ implique d'office $\Delta = 0$ sur l'équateur (voir équation B.14). On trouve que le domaine de paramètres présentant une telle résonance s'élargit quand m augmente, au point d'inclure la plupart des modes à $\omega < -m$. La ligne tiretée sépare les deux cas (a) et (b) dans l'espace des paramètres, et les miniatures montrent l'intersection entre le domaine de propagation (en blanc, délimité par les surfaces de retournement en rouge) et le rayon de corotation (en bleu). Dans le cas (a), pour les paramètres sous la ligne tiretée, les oscillations ne se propagent pas jusqu'à la résonance, l'impact de la corotation est minime, sauf sur l'équateur. Là, $\tilde{\omega} = 0$ et $z = 0$ dans l'équation (3.22) donnent $\Delta = 0$: la surface de retournement et le rayon de corotation s'intersectent uniquement sur le plan équatorial et l'effet sur la propagation est similaire à celui d'un piégeage en coin. Ceci est illustré sur le graphe de gauche de la figure 3.12, qui montre une coupe méridienne d'un mode présentant une corotation (tracée en bleu). On voit que l'énergie se concentre au point $s = r_c$, sur l'équateur, là où les caractéristiques deviennent verticales et restent piégées. Il faut néanmoins souligner la difficulté à calculer ce genre de modes : par exemple, le mode présenté ici est certes convergé spectralement, mais souffre d'erreurs d'arrondi (il s'agit d'un problème numérique de conditionnement de la matrice à résoudre). La miniature (b) donne un exemple où la couche critique traverse le domaine de propagation du mode (en blanc). Le calcul montre que cette superposition a lieu pour des latitudes ϑ telles que

$$\sin \vartheta < \frac{2}{Nr_c}. \quad (3.49)$$

On remarque que l'énergie est concentrée autour de la corotation à $r = r_c$. Pour ce second exemple, il a été possible de réaliser un calcul libre d'erreurs d'arrondi, à la condition de se limiter à une résolution modérée. Pour que la convergence spectrale soit satisfaisante, il a fallu éviter des structures à trop petite échelle et donc considérer un nombre d'Ekman relativement grand. À cause de ces difficultés numériques, il n'a pas été possible de suivre ces modes sur une gamme de paramètres E et \mathcal{P} .

Afin de déterminer l'interaction entre les caractéristiques et les résonances de corotation, on dérive de l'opérateur de Poincaré généralisé (3.19) la relation de dispersion de l'onde, ainsi que les expressions de la vitesse de phase et de groupe. Ce calcul assez technique est reporté en annexe B.2. Il nous montre que la vitesse de phase s'annule à la corotation, mais que la vitesse de groupe peut toutefois rester non-nulle. En effet, on distingue principalement deux cas :

- soit les vitesses de phase et de groupe tendent toutes deux vers zéro à la corotation, et les ondes gravito-inertielles ne peuvent pas traverser la résonance. C'est ce qui se produit lorsque la corotation est dans le domaine elliptique mais touche la surface de retournement à l'équateur en $z = 0$. On retrouve que les caractéristiques deviennent de plus en plus verticales (parallèles à l'axe de rotation) à l'approche de la corotation, mais cette dernière n'est jamais atteinte. L'onde est vraisemblablement dissipée à cet endroit.
- soit la vitesse de groupe reste non-nulle et les ondes peuvent traverser la résonance de corotation dans le domaine hyperbolique. On s'attend alors à ce que les effets non-linéaires soient importants à la résonance (BARKER et OGILVIE 2010). Lorsque la corotation intersecte le domaine hyperbolique, les modes propres que l'on calcule peuvent systématiquement la traverser.

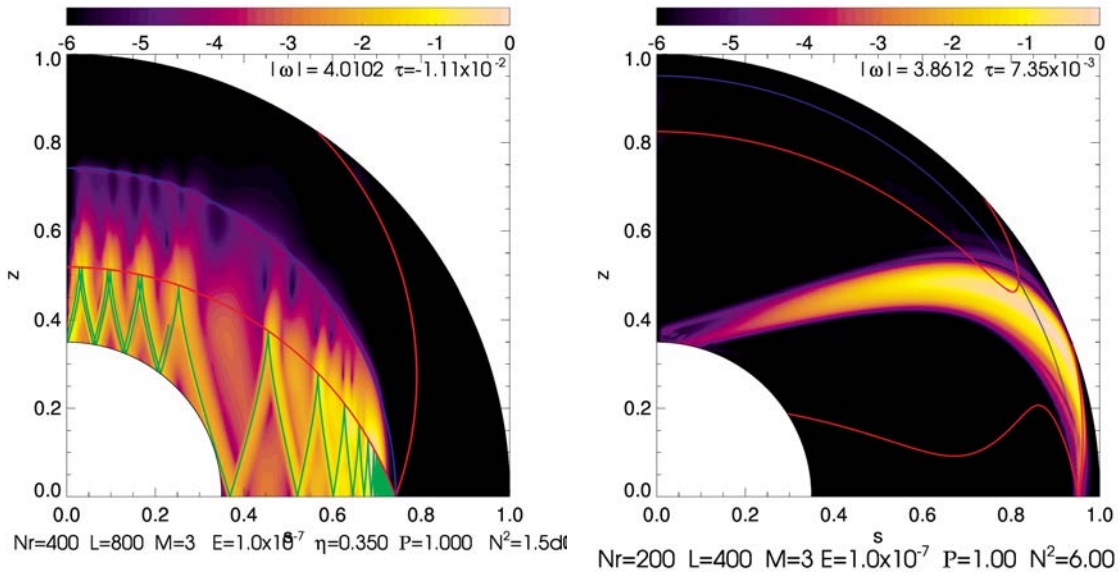


FIGURE 3.12 – Énergie cinétique (normalisée par le maximum, en échelle logarithmique) pour deux modes HT présentant une résonance de corotation. À gauche : la résonance est confinée au domaine elliptique. Ce mode appartient au sous-domaine (a) de la figure 3.11. À droite : la résonance de corotation coupe le domaine hyperbolique, à $\omega = -3,86$, $m = 3$, $\eta = 0,35$, $E = 10^{-7}$, $\mathcal{P} = 1$ et $N^2 = 6$. Ce mode appartient au sous-domaine (b) de la figure 3.11.

Chacune de ces deux situations est représentée en figure 3.12, le premier cas correspondant au graphe de gauche et le second au graphe de droite.

Ainsi ce calcul des vitesses de phase et de groupe confirme les comportements observés pour les modes dans les deux cas de résonance de corotation.

On constate par ailleurs que le mode présenté sur le graphe de droite de la figure 3.12 est instable. Son taux de croissance positif peut s'expliquer soit par une instabilité barocline, soit par une instabilité de cisaillement. Cette dernière possibilité peut être exclue car le critère d'instabilité local (3.38) n'est vérifié que dans deux petites zones de la coquille (près de la coquille interne à $\theta > 40^\circ$, $r < 0,45$, et sur l'équateur à $\theta > 65^\circ$, $r > 0,97$). Le critère de l'instabilité barocline non-axisymétrique (3.35) est en revanche vérifié dans la plus grande partie de la coquille ($z > 1/6$), et semble être à l'origine du taux d'accroissement positif du mode.

En localisant toute l'énergie du mode dans un si petit volume, ces résonances de corotation déclencheraient probablement des effets non-linéaires (voir MASLOWE 1986) qui mériteraient une étude dédiée. Comme pour le mode instable présenté au paragraphe 3.4.3, ces effets non-linéaires peuvent contribuer à la saturation de l'oscillation, laissant supposer un mécanisme d'excitation de modes non-axisymétriques via une instabilité barocline, qui serait une alternative aux mécanismes présentés en section 2.3.3.

3.4.5 Modes réguliers

Géométrie

Le problème aux valeurs propres que l'on résout admet, en plus des solutions singulières présentées jusqu'à présent, des solutions régulières comme montré par exemple par DINTRANS, RIEUTORD et VALDETTARO (1999) dans le cas d'une coquille en rotation solide. L'énergie cinétique des modes réguliers a une répartition dans la coquille indépendante de E et \mathcal{P} , ces modes peuvent ainsi exister dans la limite d'une viscosité et d'une dissipation thermique nulles. Aussi, de tels modes ne sont pas concentrés sur une couche de cisaillement singulière, et de ce fait, dissipent moins d'énergie et sont moins amortis.

Étant donné que notre méthode numérique calcule les modes les moins amortis pour des fréquences réparties autour d'une valeur donnée en entrée (voir section 3.1.4), on s'attend à trouver des modes réguliers aisément partout où ceux-ci existent. Nous n'avons découvert de tels modes que pour $m \neq 0$, ce qui laisse à penser qu'il n'existe pas de modes réguliers axisymétriques dans notre configuration. La figure 3.13 illustre les propriétés d'un mode régulier. Ici, la convergence spectrale est facilement atteinte en comparaison avec les modes présentés auparavant.

Plus vraisemblablement, ces modes sont quasi-réguliers. Leur comportement de mode régulier, dont la structure est indépendante de la structure, n'est probablement vérifiée que sur un intervalle de E et \mathcal{P} . S'il était possible de descendre numériquement à des valeurs très basses du nombre d'Ekman, nous trouverions vraisemblablement des couches de cisaillement très fines, et singulières, autour d'attracteurs.

Suivi dissipatif

Comme les graphes du bas de la figure 3.13 le montrent, nous avons suivi ce mode régulier en variant les nombres d'Ekman et de Prandtl de façon indépendante (c'est à dire en variant soit la viscosité et la diffusivité thermique en même temps, soit uniquement cette dernière, voir le paragraphe 3.1.2). Ces modes ont bel et bien une structure presque indépendante des paramètres dissipatifs E ou \mathcal{P} . On obtient de plus des lois d'échelle asymptotiques pour le taux d'amortissement $|\tau|$ en fonction de E ou \mathcal{P} :

- $|\tau| \propto E$ pour $E \rightarrow 0$ à \mathcal{P} constant,
- $|\tau| \propto \mathcal{P}^{-0,9}$ à $\mathcal{P} \rightarrow 0$ et E fixé.

Pour un mode régulier tel que ce lui présenté en figure 3.13, pour lequel l'énergie cinétique ne dépend que très légèrement des nombres d'Ekman et de Prandtl, l'équation (3.39) prédit que le taux d'amortissement est une combinaison linéaire de la viscosité ν et de la diffusivité thermique κ . Les lois d'échelle trouvées sont en accord avec cette prédiction et semblent confirmer la nature régulière des modes dans le domaine de paramètres que nous avons exploré. Il est probable que cette propriété reste vraie pour des valeurs réalistes dans un cadre astrophysique.

3.5 Améliorations possibles

Dans ce chapitre, j'ai présenté les différentes géométries de modes gravito-inertiels dans un modèle fortement simplifié (approximation de Boussinesq, gradient linéaire de température et rotation coquillaire). Par l'analyse dans la limite non-dissipative, nous avons balayé l'espace des paramètres pour définir le domaine de fréquence accessible aux modes, leurs géométries et les

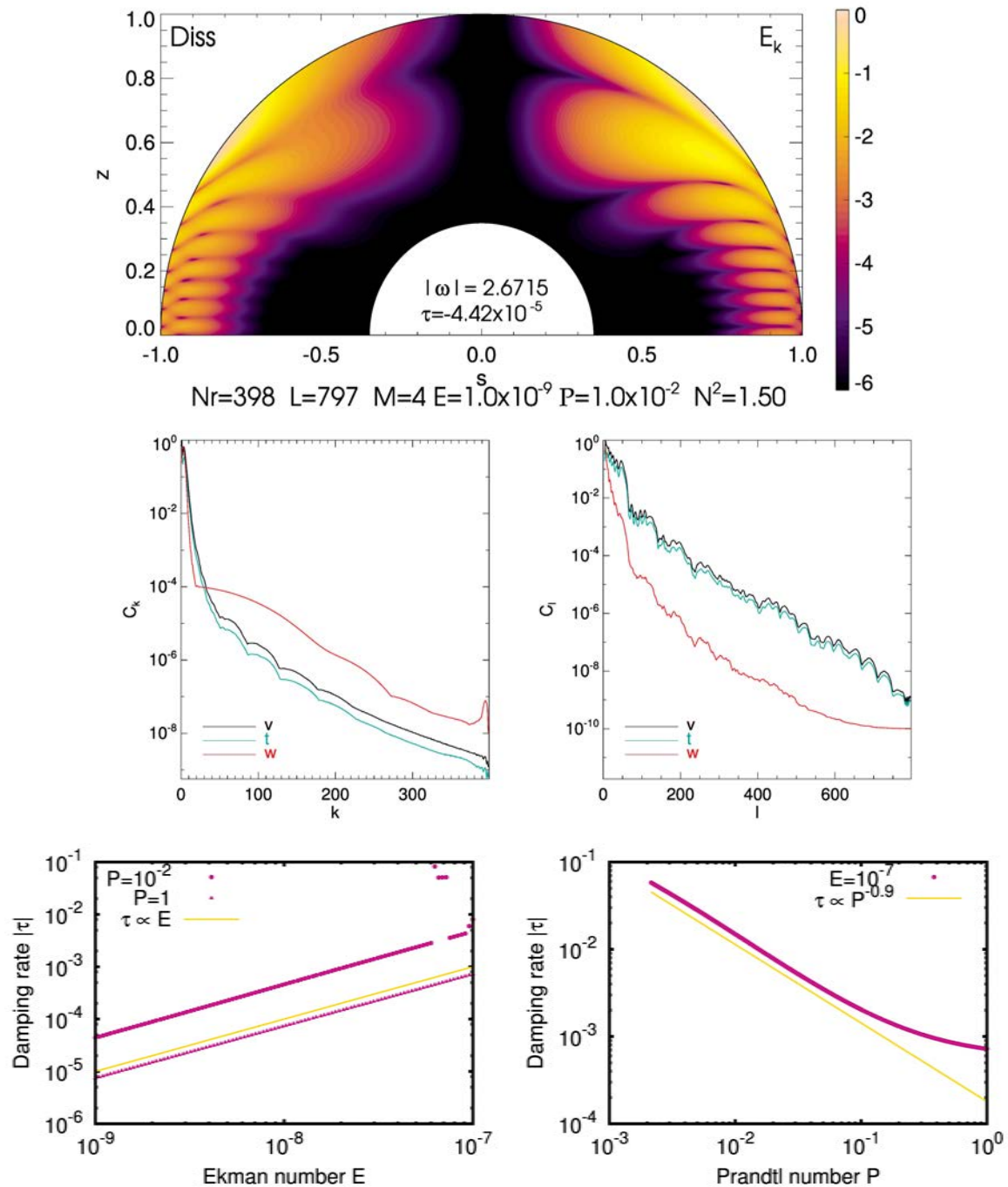


FIGURE 3.13 – Mode régulier, à $\omega = -2,67$, $m = 4$, $\eta = 0,35$, $E = 10^{-9}$, $P = 10^{-2}$ et $N^2 = 1,5$. En haut : Dissipation visqueuse à gauche, et énergie cinétique à droite (toutes deux normalisées par le maximum, en échelle logarithmique) Au milieu : Décomposition spectrale sur les bases de Tchebychev (à gauche) et des harmoniques sphériques (à droite). En bas : Taux d’amortissement en fonction du nombre d’Ekman pour $P = 10^{-2}$ et 1 (à gauche) et en fonction du nombre de Prandtl pour $E = 10^{-7}$ (à droite).

structures singulières qu'ils peuvent présenter. Le calcul numérique à haute résolution a permis de découvrir un potentiel mécanisme d'excitation intégralement dû à la rotation différentielle.

Cette étude doit maintenant être étendue à des modèles plus réalistes d'intérieurs stellaires, utilisant des profils de température et de densité plus réalistes. Le caractère intrinsèquement bidimensionnel des rotateurs rapides (dans lesquels la géométrie est aplatie, et où la rotation différentielle dépend du rayon et de la latitude) devra également être pris en compte. Il serait également intéressant de confirmer les lois d'échelle proposées pour les taux d'amortissement des modes en effectuant des calculs à plus petits nombres d'Ekman et de Prandtl, un domaine de paramètres où l'on attend plus de modes instables.

Enfin, le comportement des modes que j'ai décrit ici pourra être étudié dans le cadre d'une analyse non-linéaire : il sera ainsi possible de décrire la dissipation d'énergie au cours du temps induite par les modes amortis, ou l'amplitude des modes excités par l'instabilité ABCD. Pour cette dernière, une étude non-linéaire est nécessaire afin de déterminer si l'excitation des modes est possible, ou si ceux-ci sont dissipés par des phénomènes turbulents à petite échelle.

Une application voisine de ces travaux concerne les modes forcés dans les systèmes multiples, tels que les étoiles binaires ou les planètes gazeuses proches de leur étoile (les « Jupiters chauds »). Dans ces systèmes, les modes forcés par les marées permettent d'extraire du moment cinétique de l'orbite du système, modifiant ainsi les paramètres orbitaux (voir la revue par OGILVIE 2014). Par exemple, des oscillations ont été détectées dans les anneaux de Saturne (HEDMAN et NICHOLSON 2013). Ces oscillations, trouvant leur origine dans la planète, peuvent être reliées aux orbites de ses nombreux satellites, et ainsi contraindre l'intérieur méconnu de Saturne (GAULME et al. 2014). FULLER (2014) suggèrent que l'intérieur de la planète géante puisse contenir une zone stratifiée de façon stable : un tel résultat pourrait être affiné en modélisant l'intérieur de la planète en plusieurs zones (de gaz polytropique d'indices différents par exemple) et en utilisant les méthodes décrites dans ce chapitre afin d'identifier les modes mesurés dans les anneaux.

4

Modélisation directe des étoiles en rotation rapide

Sommaire

4.1	Modélisation directe	85
4.2	Association ESTER - TOP	86
4.2.1	Géométrie des étoiles en rotation rapide	86
4.2.2	Le code ESTER	88
4.2.3	Les oscillations TOP	90
4.3	Traitement des modes obtenus	92
4.3.1	Visibilité d'un mode	92
4.3.2	Calcul du taux d'amortissement	93
4.4	L'exemple de Rasalhague	94
4.4.1	Rasalhague : caractéristiques	94
4.4.2	Rasalhague : études antérieures	97
4.4.3	Nouveau calcul	98
4.5	Conclusion et améliorations possibles	102

4.1 Modélisation directe

Principe général

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode que nous avons développée à Toulouse afin de modéliser l'intérieur des étoiles en rotation rapide de façon directe. J'ai évoqué au chapitre 2.3.5 des méthodes permettant d'exploiter les régularités dans les spectres d'oscillation des étoiles. Ces structures permettent d'en déduire des paramètres globaux, guidant ainsi le travail de modélisation. Malheureusement, dans les rotateurs rapides, les structures en question sont beaucoup plus difficiles à exploiter, si bien qu'un travail de modélisation directe a été entrepris. Celle-ci consiste à modifier les paramètres d'entrée d'un modèle afin de reproduire les quantités mesurées sur l'étoile. L'astérosismologie apporte alors de nombreuses observables supplémentaires. Ainsi, la démarche que nous adoptons consiste à :

- calculer un modèle bidimensionnel de l'étoile choisie, en tenant compte des effets de la rotation, tels que la rotation différentielle, l'aplatissement centrifuge et l'assombrissement gravitationnel,
- calculer les modes d'oscillation dans ce modèle, via un calcul complet à haute résolution,

- sélectionner parmi les modes ainsi obtenus les meilleurs candidats à l'identification des modes observés dans le spectre synthétique en calculant leurs taux d'amortissement et visibilité,
- comparer les candidats ainsi déterminés avec les observations, et régler les paramètres d'entrée du modèle pour améliorer la correspondance.

Il est essentiel ici de souligner que les spectres synthétiques calculés numériquement sont beaucoup plus denses que les spectres observés. Ainsi l'étape de sélection des modes susceptibles de correspondre aux observations est cruciale.

Exemple de modélisation directe : HD129929

Un exemple pouvant servir de référence à notre travail est la modélisation de l'étoile HD129929 par DUPRET et al. (2004). Cette étoile est un pulsateur de type β Cephei, de classe spectrale B3V, dont la rotation est très lente et différentielle ($v = 2\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ à l'équateur AERTS et al. 2003). Six fréquences d'oscillation ont été détectées depuis le sol (depuis l'observatoire de la Silla, AERTS et al. 2004).

La rotation lente permet d'utiliser des modèles à symétrie sphérique et de décrire chaque mode calculé en utilisant une seule harmonique sphérique. Ceci a permis à DUPRET et al. (2004) de calculer les oscillations non-adiabatiques d'une gamme de modèles mono-dimensionnels afin d'identifier les modes d'oscillation. En faisant varier les paramètres d'entrée de leurs modèles, ils ont pu obtenir des paramètres fondamentaux précis (quelques % d'incertitude sur la masse et l'âge de l'étoile), mais aussi caractériser la pénétration convective du cœur dans l'enveloppe, et ajuster un profil simple sur la rotation interne de l'étoile.

Ainsi, cette étude est un exemple du travail que nous envisageons d'étendre aux rotateurs rapides. Mais plusieurs difficultés sont posées par la rotation, que nous avons déjà abordées dans les chapitres précédents : la rotation impose une géométrie complexe, l'influence de la force de Coriolis et de l'aplatissement centrifuge sur les modes est mal connue, et le couplage entre harmoniques sphériques imposé par la rotation rend l'identification des modes bien plus complexe que dans le cas sans rotation.

4.2 Association ESTER - TOP

Pour accomplir un tel travail de modélisation directe, nous avons associé pour la première fois deux codes de pointe : le code de structure d'étoiles en rotation rapide ESTER (ESPINOSA LARA et RIEUTORD 2013 ; RIEUTORD, ESPINOSA LARA et PUTIGNY 2016), et le code de calcul complet des oscillations TOP (REESE et al. 2009). Nous en décrirons le fonctionnement dans cette section. Ces codes se distinguent par la description bidimensionnelle des étoiles et de leurs pulsations, dans une géométrie complexe adaptée à l'étude des rotateurs rapides : il convient donc de commencer par décrire cette géométrie.

4.2.1 Géométrie des étoiles en rotation rapide

Quand la vitesse de rotation est suffisante, la géométrie des étoiles en rotation rapide s'éloigne de façon significative de la sphère qui décrit habituellement les étoiles sans rotation. Il est donc nécessaire de tenir compte de cette déformation.

La géométrie de surface de l'étoile est complexe : en effet, un point anguleux apparaît à l'équateur pour des vitesses de rotation élevées. Or, pour mener le calcul numérique, il est nécessaire de s'assurer que la surface de l'étoile correspond à une surface de coordonnée : on utilise alors une géométrie sphéroïdale, inspirée de BONAZZOLA, GOURGOULHON et MARCK (1998). Cette paramétrisation se base sur la définition d'une nouvelle coordonnée radiale ζ (RIEUTORD et al. 2005 ; LIGNIÈRES, RIEUTORD et REESE 2006) définie implicitement en fonction du rayon r et de la colatitude θ par

$$r(\zeta, \theta) = (1 - \varepsilon)\zeta + \frac{5\zeta^3 - 3\zeta^5}{2}(R_s(\theta) - 1 + \varepsilon). \quad (4.1)$$

où ε est l'aplatissement de l'étoile, et R_s le rayon de la surface à l'équilibre, variant avec la colatitude θ de manière symétrique par rapport à l'équateur. L'étoile est de plus axisymétrique autour de l'axe de rotation. Ainsi, le centre $r = 0$ correspond à $\zeta = 0$, et à chaque latitude la surface $r = R_s$ correspond à $\zeta = 1$.

Néanmoins, les conditions aux limites nécessaires à la modélisation (voir section 4.2.2) sont difficiles à implémenter sur une surface non-sphérique : on choisit alors d'ajouter un second domaine. Il s'agit d'une couche extérieure dont la surface interne suit celle de l'étoile et dont la surface extérieure est une sphère, sur laquelle il sera alors aisé de définir la condition aux limites. Pour cela, on définit ζ dans ce nouveau domaine par

$$r(\zeta, \theta) = 2\varepsilon + (1 - \varepsilon)\zeta + (2\zeta^3 - 9\zeta^2 + 12\zeta - 4)(R_s(\theta) - 1 - \varepsilon). \quad (4.2)$$

Avec cette définition, r est continue en 1 (on retrouve $r(\zeta = 1) = R_s$) et la surface $\zeta = 2$ est une sphère. Les deux domaines définis par les équations (4.1) et (4.2) sont explicités dans la figure 4.2.1.

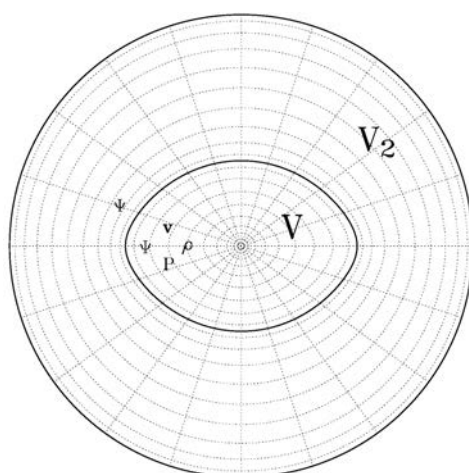


FIGURE 4.1 – Domaines de calcul et variables utilisés. Les « ellipses » sont les courbes de niveau de ζ , les droites radiales étant des courbes de même θ . Le domaine V correspond à l'intérieur stellaire, et le domaine V_2 au vide circumstellaire nécessaire à l'implémentation des conditions aux limites.

4.2.2 Le code ESTER

Physique du modèle

Contrairement aux codes d'évolution en une dimension, ESTER calcule la structure des étoiles en tenant compte de la rotation différentielle de façon auto-cohérente : ainsi, l'aplatissement centrifuge, l'assombrissement gravitationnel, les écoulements à grande échelle et la rotation différentielle ne sont pas imposés mais sont solutions des équations de la mécanique des fluides.

On suppose que l'étoile est à l'état stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$), et on réécrit les équations de la mécanique des fluides dans ces conditions. D'abord, l'équation de la continuité donne

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.3)$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{v} sa vitesse.

On a l'équation de conservation de l'entropie :

$$\rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s = \nabla \cdot (\chi_R \nabla T) + \nabla \cdot \left(\frac{\chi_T T}{\mathcal{R}/\mathcal{M}} \nabla s \right) + \varepsilon_N, \quad (4.4)$$

avec T la température, s l'entropie. Les termes du membre de droite correspondent respectivement au flux radiatif, au flux convectif turbulent, et à la production d'énergie au cœur. Interviennent χ_R et χ_T les conductivités thermiques radiative et turbulente, \mathcal{R}/\mathcal{M} le rapport entre la constante des gaz parfaits et le poids moléculaire moyen du fluide, et ε_N le taux d'énergie créée par les réactions nucléaires.

On considère, pour l'état stationnaire, que le fluide est visqueux et régi par l'équation de Navier-Stokes

$$\rho (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla P - \rho \nabla \left(\psi - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right) + \mu \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right). \quad (4.5)$$

où Ω , P et ψ sont respectivement la vitesse angulaire du fluide, la pression et le potentiel gravitationnel à travers le fluide, s la distance à l'axe de rotation et μ la viscosité dynamique. Dans le membre de gauche de l'équation, on reconnaît les termes de Coriolis et d'advection, à droite les forces de pression, la gravité effective et les forces de viscosité. On rappelle que la gravité effective est la somme de l'attraction gravitationnelle et de la force centrifuge. Dans les équations de structure, Ω est exprimé en unités de $\Omega_K = \sqrt{GM/R_{\text{eq}}^3}$ où G est la constante gravitationnelle (voir section 2.2).

Enfin, on ajoute au système l'équation de Poisson

$$\Delta \psi = 4\pi G \rho, \quad (4.6)$$

En plus de ces quatre équations, il faut fermer le système d'équations avec l'équation d'état du plasma et la détermination des opacités des éléments présents : nous utilisons les équations d'état et opacités tabulées OPAL (ROGERS, SWENSON et IGLESIAS 1996).

Par ailleurs, quatre conditions aux limites déterminent le modèle stellaire. D'abord, on suppose que le fluide ne peut pas traverser la surface et qu'il n'y a pas de contrainte horizontale, ce qui revient à écrire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ où \mathbf{n} est la normale à la surface, et $([\sigma]n) \times \mathbf{n} = 0$ où $[\sigma]$ désigne le tenseur des contraintes.

On suppose également que l'étoile rayonne comme un corps noir, et donc que $-\chi_R \nabla T \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\text{SB}} T^4$ où σ_{SB} est la constante de Stefan-Boltzmann.

Enfin, il faut fixer la pression de surface. On utilise pour cela l'approximation d'Eddington, en fixant

$$P = \frac{2}{3} \frac{g_p}{\kappa_p}, \quad (4.7)$$

où g_p et κ_p sont les valeurs aux pôles de la gravité et de l'opacité. Il faut en outre assurer la continuité à la surface entre le potentiel dans l'étoile et celui à l'extérieur, qui tend vers 0 à une distance infinie. L'implémentation de cette condition aux limites n'est pas possible à la surface de l'étoile en raison de sa géométrie complexe. Ceci est à l'origine de l'utilisation d'un domaine extérieur à l'étoile (voir section 4.2.1) : c'est sur la sphère qui délimite ce second domaine qu'est appliquée la condition aux limites $\psi \rightarrow 0$ à $r \rightarrow \infty$.

Implémentation numérique

Dans ce paragraphe, nous donnons un bref aperçu des méthodes utilisées et des enjeux posés par les aspects numériques de la modélisation bidimensionnelle. De plus amples détails peuvent être trouvés dans RIEUTORD et ESPINOSA LARA (2013) et RIEUTORD, ESPINOSA LARA et PUTIGNY (2016).

Le code ESTER calcule la structure des étoiles de la séquence principale en utilisant une décomposition spectrale : les quantités y sont décomposées sur une grille de Gauss-Lobatto pour la coordonnée radiale, et sur la base des harmoniques sphériques pour ce qui concerne la composante horizontale. L'utilisation de ces méthodes spectrales permet d'atteindre une plus grande précision qu'un calcul en différences finies, par exemple. Ces modèles sont axisymétriques mais aussi symétriques par rapport à l'équateur : la structure peut donc être projetée sur les harmoniques sphériques paires, divisant ainsi par deux leur nombre lors du calcul.

Une des difficultés de la modélisation présentée ici est la gestion des variations de la densité (jusqu'à huit ordres de grandeur entre le cœur et la surface de l'étoile), ou des éventuelles discontinuités (notamment dans la composition chimique à l'interface entre le cœur et l'enveloppe). La solution adoptée est de découper l'intérieur de l'étoile en plusieurs sous-domaines, en plaçant les discontinuités aux interfaces, avec des conditions de continuité adéquates. À l'intérieur de chacun de ces sous-domaines, ζ est discrétisé sur une grille de Tchebychev, présentée en annexe A.2.

Les modèles ESTER sont calculés en utilisant la méthode itérative de Newton, laquelle doit satisfaire deux critères de convergence : le potentiel gravitationnel doit avoir atteint une valeur stable sur deux itérations successives, et le théorème du viriel doit être satisfait (voir équation 2.12). Il faut remarquer que le code recalcule non seulement les quantités physiques, mais aussi la grille à chaque itération. La convergence n'est pas nécessairement aisée, notamment pour des vitesses de rotation élevées qui font apparaître une singularité à l'équateur.

Limitations du modèle

Bien que très avancés, les modèles ESTER souffrent de quelques limitations. Alors qu'il est possible de modéliser les cœurs convectifs d'étoiles comme des zones à entropie constante, il est beaucoup plus difficile de traiter des zones convectives de surface : les codes 1D utilisent une prescription simplifiée de la convection, comme par exemple la théorie de la longueur de

mélange, laquelle n'a pas de pendant 2D réellement établi. On est ainsi limité au calcul de structure d'étoiles suffisamment massives, n'ayant pas de zone convective de surface, ou alors une enveloppe convective suffisamment peu profonde pour ne pas influencer leur structure (à noter que la rotation peut encourager la formation d'un « boudin » équatorial convectif, comme mentionné au chapitre 2.2).

Par ailleurs, le traitement du transport d'éléments chimiques du cœur convectif dans l'enveloppe radiative n'est pas modélisé, et la fraction de masse des différents éléments subit un saut à l'interface cœur-enveloppe. Pourtant, ce transport chimique est crucial afin de déterminer l'évolution de l'étoile et son âge. Cette simplification est nécessaire pour des raisons de convergence numérique : trouver la méthode numérique permettant de calculer l'évolution de l'étoile reste une question ouverte.

Enfin, ESTER n'intègre pas de champ magnétique, qui aurait pour effet de briser la symétrie axiale et nécessiterait un traitement tridimensionnel.

4.2.3 Les oscillations TOP

Calcul complet des oscillations

Pour la première fois, nous avons écrit plusieurs routines d'interfaçage afin d'associer ESTER au code de calcul des oscillations TOP (Two-dimensional Oscillation Program, REESE et al. 2009). Ce dernier, développé par Daniel Reese à Toulouse, calcule le spectre d'oscillations d'un modèle d'étoile à partir des équations perturbées de la mécanique des fluides. Contrairement aux codes précédents qui calculent les oscillations d'un modèle à symétrie sphérique, puis traitent la rotation comme une perturbation des fréquences ainsi obtenues (de SAIO 1981 jusqu'à SUÁREZ, BRUNTT et BUZASI 2005), TOP effectue un calcul complet en se basant sur un modèle de structure bidimensionnel. En effet, à partir d'une certaine vitesse de rotation de l'état d'équilibre ($\Omega \sim 0,2\Omega_K$), le traitement perturbatif ne permet plus de calculer les fréquences d'oscillation de façon satisfaisante, et un traitement complet incluant la rotation s'impose (REESE, LIGNIÈRES et RIEUTORD 2006 ; BALLOT et al. 2010)

Équations des perturbations

Comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul des oscillations d'une étoile est en fait la résolution d'un système d'équations aux valeurs propres. Le système d'équations que nous cherchons à résoudre se compose des équations de Navier-Stokes, de la conservation de l'entropie, de la conservation de la masse et de Poisson. Comme dans le chapitre 3, on considère les perturbations eulériennes X_1 autour d'un état d'équilibre X_0 .

On cherche des solutions de la forme $X(r, \theta, \phi, t) = X(r, \theta, \phi) \exp(\lambda t)$ avec $\lambda = i\omega + \tau$. On adimensionne ensuite les équations en utilisant

- R_{eq} le rayon de l'étoile à l'équateur, comme échelle de longueur ;
- T_c la température centrale, comme échelle de température ;
- $\rho_{eq} = M/R_{eq}^3$ où M est la masse de l'étoile, comme échelle de masse volumique ;
- $\Omega_K^{-1} = \sqrt{R_{eq}^3/GM}$, l'inverse de la vitesse képlérienne à l'équateur, comme échelle de temps.

Enfin, on linéarise les équations, et on abandonne les indices 1 pour les perturbations. Les

équations des modes axisymétriques deviennent alors

$$\lambda\rho = -\mathbf{v}\cdot\nabla\rho_0 - \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}, \quad (4.8)$$

$$\lambda\rho_0 T_0 s = -\rho_0 T_0 \mathbf{v}\cdot\nabla s_0 + \nabla\cdot(K_0\nabla T) + \nabla\cdot(K\nabla T_0), \quad (4.9)$$

$$0 = \Delta\psi - 4\pi\rho, \quad (4.10)$$

$$\lambda\rho_0\mathbf{v} = -\nabla P - \nabla\psi_0\rho - \rho_0\nabla\psi - 2\Omega\rho_0\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \Omega^2 r \sin\theta\rho\mathbf{e}_\sigma - \rho_0 r \sin\theta\mathbf{v}\cdot\nabla\Omega\mathbf{e}_\phi. \quad (4.11)$$

Nous avons décidé dans un premier temps de négliger la viscosité dans l'équation 4.11 et de nous limiter au cas adiabatique, et l'équation (4.9) devient alors l'équation de l'énergie

$$\lambda(P + c_{s0}^2\rho) = -\mathbf{v}\cdot\nabla(P_0 + c_{s0}^2\rho_0). \quad (4.12)$$

Le calcul adiabatique ne tenant pas compte des mécanismes d'excitation et des effets de surface, on obtiendra naturellement $\tau = 0$ et $\lambda = i\omega$.

Ces équations sont ensuite projetées sur les harmoniques sphériques, où chaque quantité est décomposée en une combinaison linéaire de plusieurs harmoniques, et sur une grille radiale composée de plusieurs domaines, chacun étant discrétisée sur une grille de collocation de Gauss-Lobatto, comme pour les modèles ESTER.

Implémentation numérique

En plus d'utiliser les mêmes projections que le code de structure ESTER (harmoniques sphériques, découpage en plusieurs grilles de Tchebychev). Les modèles sont axisymétriques et symétriques par rapport à l'équateur : l'effet sur les modes est qu'on peut séparer m des autres variables (chaque mode a une valeur de m unique), et distinguer les modes symétriques par rapport au plan équatorial des modes antisymétriques, divisant ainsi par deux le nombre d'harmoniques sphériques nécessaires au calcul. Les résolutions que nous adopterons avec TOP sont généralement de l'ordre de quelques centaines de points sur la grille radiale de Tchebychev, et de vingt à quarante harmoniques sphériques.

Néanmoins, à cause de la géométrie sphéroïdale et du fait de la projection sur plusieurs harmoniques, le couplage entre les différentes harmoniques impose un calcul de termes géométriques élaborés (REESE 2006).

On résout le problème aux valeurs propres ainsi projeté par la méthode d'Arnoldi-Tchebychev présentée au paragraphe 3.1.4. En effet, TOP utilise la même méthode de résolution que le problème simplifié exposé en section 3. On obtient ainsi des valeurs propres autour de différentes valeurs données en entrée de l'algorithme. En répétant ce calcul pour différentes valeurs d'entrée, il est possible de balayer un intervalle de fréquence. On trouve de nombreuses valeurs et vecteurs propres, les valeurs propres correspondant aux fréquences d'oscillation et les vecteurs propres permettant d'obtenir la géométrie des modes d'oscillation dans l'étoile. On utilise ainsi le code TOP pour couvrir tout le spectre de l'étoile, et l'on obtient un nombre de modes d'oscillation directement lié à la taille de la matrice.

Limitations du calcul

Comme pour le calcul des modes dans une coquille sphérique détaillé au chapitre 3, un compromis doit donc être trouvé à propos du nombre d'harmoniques sphériques à adopter pour le calcul. Une résolution élevée est parfois nécessaire pour décrire les modes précisément, et nous veillerons à vérifier la convergence spectrale de tous nos calculs. Mais une résolution élevée encourage l'apparition d'erreurs d'arrondi, dont on peut se prémunir en répétant les calculs avec une valeur donnée en entrée de l'algorithme d'Arnoldi-Tchebychev légèrement différente : si les valeurs propres obtenues sont identiques, alors le calcul n'est pas entaché d'erreurs d'arrondi. Augmenter la résolution a également pour effet d'augmenter le nombre de modes obtenus par le calcul : plus de modes présentant des structures à petite échelle apparaissent, et ces petites structures induisent une dissipation importante si bien que ces modes sont souvent fortement amortis. Il est donc nécessaire d'adjoindre au calcul des modes des critères de sélection permettant d'identifier ceux susceptibles de correspondre aux observations.

4.3 Traitement des modes obtenus

Au vu des résolutions employées, on obtient un nombre important de modes d'oscillation dans le domaine analysé. Afin de restreindre le nombre de candidats à l'identification des modes observés, nous nous servirons pour cela de la visibilité et le taux d'amortissement des modes. Les modes visibles et linéairement instables seront nos candidats à l'identification des oscillations observées.

4.3.1 Visibilité d'un mode

On calcule les visibilités des modes propres que nous avons calculés avec TOP, en suivant la démarche développée par REESE et al. (2013). Il s'agit de déterminer si la variation d'intensité lumineuse à la surface est suffisante pour être détectée par les missions spatiales de photométrie. La visibilité d'un mode est déterminée en calculant la perturbation de l'énergie rayonnée causée par le mode propre, intégrée sur la surface visible. Le mode perturbe en effet l'aire de la surface visible, mais aussi la température de surface de l'étoile, ainsi que l'élément de surface sur lequel l'intégration est effectuée, chacun de ces effets influençant la visibilité du mode. Ainsi, celle-ci dépend de l'inclinaison de l'étoile. L'énergie rayonnée \mathcal{E} et sa perturbation $\Delta\mathcal{E}$, reçues par un instrument de surface réceptrice S à une distance d de l'étoile, valent respectivement

$$\mathcal{E} = \frac{S}{2\pi d^2} \iint_{\text{surf. vis.}} I(\mu, g_{\text{eff}}, T_{\text{eff}}) \mathbf{e}_{\text{obs}} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}(t) = \frac{S}{2\pi d^2} \mathcal{R} \left(\iint_{\Delta\text{surf. vis.}} I(\mu, g_{\text{eff}}, T_{\text{eff}}) \mathbf{e}_{\text{obs}} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{surf. vis.}} \delta I(\mu, g_{\text{eff}}, T_{\text{eff}}) \mathbf{e}_{\text{obs}} \cdot d\mathbf{S} \right. \\ \left. + \iint_{\text{surf. vis.}} I(\mu, g_{\text{eff}}, T_{\text{eff}}) \mathbf{e}_{\text{obs}} \cdot \delta d\mathbf{S} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

\mathcal{R} étant l'opérateur partie réelle ; I est l'intensité rayonnée et δI sa perturbation lagrangienne. Toutes deux dépendent de μ , le cosinus de l'angle entre la normale à la surface $d\mathbf{S}$ et la ligne de visée \mathbf{e}_{obs} , de g_{eff} et de T_{eff} , les gravité et température effectives à chaque point de la surface visible.

Comme on l'a vu en section 2.2, T_{eff} et g_{eff} ne sont pas constantes sur la surface d'une étoile en rotation. On écrit l'intensité sous l'expression

$$\delta I = I \left(\frac{\partial \ln I}{\partial \ln T_{\text{eff}}} \frac{\delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} + \frac{\partial \ln I}{\partial \ln g_{\text{eff}}} \frac{\delta g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}} \right) + \frac{\partial I}{\partial \mu} \delta \mu. \quad (4.15)$$

On utilise une grille de modèles d'atmosphères stellaires (CLARET 2000) pour obtenir, en chaque point de l'étoile, la valeur des dérivées dans l'équation (4.15). Cette grille tient compte de l'assombrissement centre-bord de façon non-linéaire, et est interpolée en fonction des températures et gravités de surface perturbées.

Alors que les valeurs de T_{eff} et de ses perturbations peuvent être directement obtenues par le calcul non-adiabatique, ce n'est pas le cas dans le cadre d'un calcul adiabatique des oscillations. On utilise dans ce cas $\delta T/T_0$ à la place (on remplace la perturbation de la température du rayonnement par celle de la température du fluide), cette dernière quantité étant estimée grâce à l'approximation quasi-adiabatique :

$$\frac{\delta T}{T_0} = \left. \frac{\delta \ln T}{\delta \ln P} \right|_S \frac{\delta P}{P_0}. \quad (4.16)$$

4.3.2 Calcul du taux d'amortissement

Pour être observés à la surface d'une étoile, les modes doivent être excités. Dans le cas des étoiles isolées de la séquence principale de type précoce, cette excitation a lieu par le biais du κ -mécanisme. On souhaite évaluer la stabilité linéaire des modes obtenus avec TOP, c'est-à-dire évaluer leur taux d'amortissement τ .

Dans le cas du calcul non-adiabatique, τ est prédit par les équations, et n'est autre que la partie réelle des valeurs propres du système (celles-ci valant $\lambda = i\omega + \tau$).

En revanche, le calcul adiabatique ne fournit pas la valeur de τ : il faut, pour l'obtenir, suivre la démarche de UNNO et al. (1989). On décompose la valeur propre sous la forme $i\omega + \tau$, où ω est la fréquence obtenue par le calcul adiabatique décrit en section 4.2.3, et τ correspond au taux d'amortissement. Au vu des échelles de temps thermique et dynamique, on attend $|\tau| \ll \omega$.

Dans le cadre de l'approximation quasi-adiabatique explicitée en équation (4.16), la conservation de l'énergie donne pour une oscillation strictement périodique

$$\tau = -\frac{1}{2\pi\omega} W \left[\int_0^M |\xi|^2 dM_r \right]^{-1}, \quad (4.17)$$

où W est l'intégrale de travail, définie par

$$W = \oint dt \left[\int_V \rho \frac{\delta T}{T} \delta \left(\varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) dV - \int_{\tau=R} (p + \rho\psi) \mathbf{v}' \cdot d\mathbf{S} \right], \quad (4.18)$$

où ε_N est le taux de réactions nucléaires au cœur de l'étoile et \mathbf{F} le flux radiatif sortant de l'étoile. On suppose que les perturbations du taux de réactions nucléaires dans le cœur $\delta\varepsilon_N$ sont négligeables, et il apparaît que l'intégrale de surface (second terme) disparaît en raison du déphasage entre p et ψ d'une part, et \mathbf{v} d'autre part.

L'expression (4.17) devient alors

$$\tau = -\frac{1}{2\pi\omega} \left[\oint dt \int_V \rho \frac{\delta T}{T} \delta \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) dV \right] \left[\int_0^M |\xi|^2 dM_r \right]^{-1} \quad (4.19)$$

Il est alors possible de prédire, à partir de chaque mode propre et de la structure de l'étoile, si le mode sera excité ou amorti. Nous ne souhaitons conserver que les modes excités pour la comparaison aux observations.

4.4 L'exemple de Rasalhague

Maintenant que nous avons détaillé les méthodes utilisées pour modéliser les étoiles en rotation rapide de la séquence principale, nous présentons ici un premier cas d'étude pour tester cette méthode.

Il s'agit de l'étoile Rasalhague, une étoile brillante (et à ce titre régulièrement observée), en rotation rapide et pulsante. Nous présenterons donc dans cette section les observations et paramètres fondamentaux qui en ont été déduits, avant d'évoquer les études sismologiques antérieures, et finalement la nôtre.

4.4.1 Rasalhague : caractéristiques

Rasalhague (ou bien α Ophiuchi, HD159561) est l'étoile la plus brillante de la constellation du Serpentaire avec une magnitude apparente de 2,08. Il s'agit en fait d'un système binaire, composé de deux étoiles de séquence principale, une étoile blanche de classe A5III et une naine rouge K6V (COWLEY et al. 1969; HINKLEY et al. 2011). L'étoile principale est un rotateur rapide, et c'est elle que j'appellerai dans un souci de simplicité « Rasalhague » dans la suite de ce travail.

Observations et paramètres fondamentaux

Rasalhague a été observée par interférométrie par ZHAO et al. (2009) avec l'interféromètre CHARA, ce qui a permis de mesurer son aplatissement centrifuge en ajustant un ellipsoïde aux observations, la mesure donne $\varepsilon = 16,4\%$. Comme le montre la figure 4.2, l'assombrissement centrifuge est évident : ainsi il apparaît que Rasalhague est presque vue par l'équateur : l'inclinaison a été évaluée à $87,5 \pm 0,6^\circ$. La luminosité a quant à elle été mesurée à $31,3L_\odot$.

Afin de déterminer les paramètres fondamentaux, ZHAO et al. (2009) utilisent un modèle simple : la masse est obtenue via le modèle de Roche (où la masse est supposée concentrée au centre de l'étoile). La masse et la vitesse de rotation du modèle sont ensuite ajustées de sorte à ce que la luminosité et l'aplatissement de l'étoile correspondent à ceux observés. Le modèle de Roche donne alors une masse de $2,18 \pm 0,02M_\odot$ et une vitesse équatoriale de $239 \pm 12 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Enfin, l'assombrissement est modélisé en utilisant la loi de VON ZEIPPEL (1924a) (qui relie température et gravité effectives par $T_{\text{eff}} = g_{\text{eff}}^{1/4}$). La gravité effective est obtenue via le modèle de Roche, donnant ainsi une température allant de $9384 \pm 154\text{K}$ au pôle à $7569 \pm 124\text{K}$ à l'équateur. Des travaux récents (ESPINOSA LARA et RIEUTORD 2011; CHE et al. 2011) ont cependant montré que la loi de Von Zeipel surestimait généralement l'écart de température entre pôles et équateur, on peut s'attendre à ce que soit le cas ici aussi.

Élément	C	O	Na	Mg	Si	S	Ca	Sc
$[X/H]$	-0,04	0,15	0,90	0,08	0,02	0,14	-0,04	0,48
Élément	Ti	Cr	Mn	Fe	Ni	Sr	Y	Zr
$[X/H]$	-0,17	-0,17	-0,35	-0,16	-0,45	-0,40		-0,67

TABLE 4.1 – Composition chimique de Rasalhague, déterminée par spectroscopie par ERSPAMER et NORTH (2003). On rappelle la définition $[X/H] = \log_{10}(N_X/N_H)_* - \log_{10}(N_X/N_H)_\odot$, où N désigne le nombre d’atomes de l’élément considéré par unité de volume.

D’autres observations intéressantes ont été effectuées, cette fois afin de caractériser le système α Oph A+B. Ainsi, la description astrométrique de l’orbite du système binaire a permis de déterminer une masse de $2,40^{+0,23}_{-0,37} M_\odot$ pour l’étoile primaire (Rasalhague) et de $0,85^{+0,06}_{-0,04} M_\odot$ pour son compagnon (HINKLEY et al. 2011). Ces deux masses sont plus importantes que les masses prédites par les modèles Yonsei-Yale ajustant le flux des étoiles, à savoir $2,18 \pm 0,02 M_\odot$ et $0,77 \pm 0,05 M_\odot$, respectivement. Un autre effort de modélisation a mené à utiliser une masse encore différente pour Rasalhague : ainsi, DEUPREE (2011) utilise $M = 2,25 M_\odot$. La distance à laquelle Rasalhague est située a été évaluée à 14,68 parsecs (GATEWOOD 2005), et sa composition a été décrite par ERSPAMER et NORTH (2003) et est résumée dans le tableau 4.1. Néanmoins, pour une première approche et dans un souci de simplicité, nous adopterons les valeurs « canoniques » pour la composition initiale de Rasalhague, à savoir des fractions massiques de 70% en hydrogène, 28% en hélium et 2% en métaux, ainsi que des abondances relatives de métaux tirées de GREVESSE et NOELS (1993).

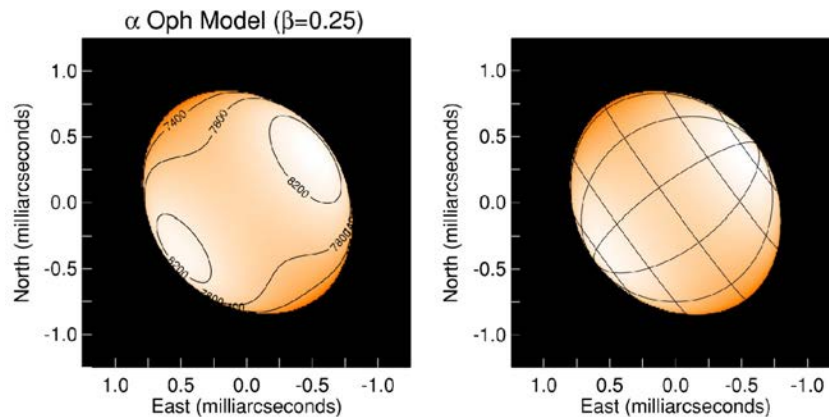


FIGURE 4.2 – Meilleur modèle d’assombriement gravitationnel pour Rasalhague. À gauche, les contours indiquent les niveaux de température de surface, à droite sont tracés méridiens et parallèles. Figure tirée de ZHAO et al. (2009).

Fréquence (c/d)	Fréquence (μ Hz)	Amplitude (mmag)	Fréquence (c/d)	Fréquence (μ Hz)	Amplitude (mmag)
★ 1,768	20,463	0,188 \pm 0,035	19,936	230,741	0,109 \pm 0,026
1,835	21,238	0,135 \pm 0,035	20,228	234,120	0,093 \pm 0,028
1,902	22,014	0,152 \pm 0,033	20,286	234,792	0,151 \pm 0,027
3,428	39,676	0,080 \pm 0,024	20,420	236,343	0,120 \pm 0,027
★ 3,495	40,451	0,160 \pm 0,025	20,512	237,407	0,210 \pm 0,027
3,545	41,030	0,108 \pm 0,024	21,713	251,308	0,282 \pm 0,032
★3,695	42,766	0,268 \pm 0,024	22,155	256,424	0,117 \pm 0,035
★5,439	62,951	0,140 \pm 0,028	22,205	257,002	0,299 \pm 0,034
★6,923	72,836	0,175 \pm 0,029	22,480	260,185	0,146 \pm 0,037
7,024	81,296	0,101 \pm 0,029	23,631	273,507	0,223 \pm 0,027
★7,182	83,125	0,207 \pm 0,029	23,807	275,544	0,092 \pm 0,027
8,075	93,461	0,183 \pm 0,033	24,582	284,514	0,136 \pm 0,027
8,508	98,472	0,292 \pm 0,030	25,166	291,273	0,144 \pm 0,026
★8,617	99,734	0,115 \pm 0,028	25,250	292,245	0,114 \pm 0,027
8,825	102,141	0,224 \pm 0,028	25,416	294,167	0,272 \pm 0,027
10,227	118,368	0,091 \pm 0,023	25,633	296,678	0,111 \pm 0,027
10,469	121,169	0,104 \pm 0,025	27,001	312,512	0,112 \pm 0,030
10,619	122,905	0,243 \pm 0,028	29,120	337,037	0,105 \pm 0,029
11,720	135,648	0,405 \pm 0,033	29,304	339,167	0,172 \pm 0,030
★12,028	141,296	0,228 \pm 0,037	30,980	358,565	0,072 \pm 0,022
★12,412	143,657	0,312 \pm 0,039	31,130	360,301	0,089 \pm 0,022
13,096	151,574	0,144 \pm 0,035	32,949	381,354	0,060 \pm 0,014
16,124	186,620	0,349 \pm 0,039	34,392	398,056	0,049 \pm 0,015
16,174	187,199	0,411 \pm 0,039	35,718	413,403	0,149 \pm 0,015
17,183	198,877	0,115 \pm 0,027	35,877	415,243	0,113 \pm 0,015
18,209	210,752	0,091 \pm 0,025	39,597	458,299	0,149 \pm 0,014
18,668	216,065	0,655 \pm 0,026	43,292	501,065	0,157 \pm 0,022
18,818	217,801	0,109 \pm 0,026	48,347	559,572	0,036 \pm 0,010
19,252	222,824	0,111 \pm 0,026			

TABLE 4.2 – Fréquences et amplitudes des oscillations de Rasalhague mesurées par MONNIER et al. (2010). Les symboles ★ indiquent les modes gravito-inertiels mis en avant par l'article. L'incertitude sur les fréquences mesurées est constante et vaut 0,017 c/d, soit 0,197 μ Hz.

En sus de ces observations, MONNIER et al. (2010) ont mesuré 57 fréquences d'oscillations par photométrie avec le satellite MOST. Ces fréquences sont présentées, avec leurs amplitudes respectives, dans la table 4.2. Certains modes à $f \lesssim 175 \mu\text{Hz}$ ont été identifiés comme des modes gravito-inertiels (lesquels sont indiqués par un symbole \star dans la table 4.2). On pourrait alors classifier Rasalhague parmi les hybrides $\delta\text{Sct}/\gamma\text{Dor}$, mais ces hybrides possèdent généralement un domaine de fréquence sans aucun mode entre modes p et g, que Rasalhague n'a pas. En effet, la rotation rapide de l'étoile modifie les fréquences des modes gravito-inertiels, si bien que leur domaine de fréquence se superpose à celui des modes acoustiques (voir section 4.4.3).

4.4.2 Rasalhague : études antérieures

DEUPREE (2011) a mené une étude de Rasalhague, basée sur ces observations. Malheureusement, au lieu d'apporter des contraintes fortes sur la structure de l'étoile, cette étude souligne les difficultés auxquelles nous devons faire face.

Deupree utilise dix modèles de l'étoile, calculés en deux dimensions avec le code ROTORC (DEUPREE 1990 ; DEUPREE 1995), de caractéristiques légèrement différentes. La plupart de ces modèles sont en rotation solide, hormis un modèle pour lequel une légère rotation différentielle est imposée (le cœur tourne légèrement plus vite que la surface). Dans chacun de ces modèles, Deupree calcule les oscillations possibles dans ces modèles en utilisant une décomposition sur six ou huit harmoniques sphériques.

Il ne lui a pas été possible d'obtenir des contraintes sur les modèles à partir du calcul des oscillations dans les étoiles, notamment lorsqu'une rotation différentielle est incluse. En effet, le calcul des spectres synthétiques dans des modèles à différentes vitesses équatoriales ne montre que de très légères différences en termes de fréquences obtenues : une différence de $5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ de vitesse équatoriale induit une différence moyenne dans les fréquences de seulement 2–3%, pour une incertitude sur les fréquences elles-mêmes atteignant 0,9%. De plus, le modèle en rotation différentielle utilisé possède un spectre d'oscillation statistiquement identique à celui d'un modèle en rotation solide mais légèrement plus rapide : l'écart moyen en fréquence n'est que de 0,19%. Comme nous l'avons établi dans le paragraphe 2.3.1, l'identification des modes en utilisant les nombres n, ℓ n'est pas possible ici. La première raison à cela est qu'il n'est plus possible d'attribuer de façon simple une valeur de n ou de ℓ à ces modes, à cause de l'utilisation de la décomposition sur plusieurs harmoniques. L'autre raison est que le nombre de modes obtenus par un calcul utilisant plusieurs harmoniques sphériques est très élevé. On voit par exemple, en figure 4.3, la répartition des fréquences observées (cercles noirs gras) comparée aux modes obtenus par le calcul numérique de Robert Deupree (chaque symbole correspond à un m donné). Il apparaît que, lorsque les modes non-axisymétriques sont considérés (pour $-4 \leq m \leq 4$), la densité du spectre calculé est telle que l'écart entre deux fréquences voisines est plus faible que l'incertitude sur les observations : la correspondance simplement basée sur un faible écart en fréquence n'est donc pas satisfaisante.

Néanmoins, cette étude pointe un autre écueil : six ou huit harmoniques ne suffisent pas à décrire correctement les modes : même si les fréquences changent peu, Deupree concède que la géométrie des modes obtenus à six ou huit harmoniques est différente. Ceci est clairement révélateur d'une résolution insuffisante. Il est alors nécessaire d'utiliser un plus grand nombre d'harmoniques sphériques, menant à un spectre synthétique encore plus dense.

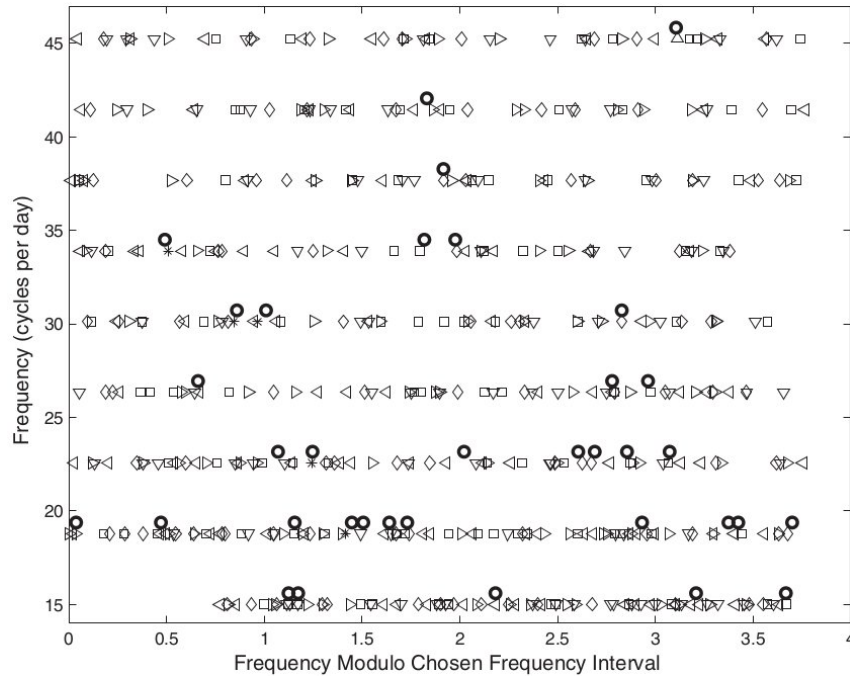


FIGURE 4.3 – Diagramme échelle tiré de DEUPREE (2011). Les ronds noirs épais indiquent les fréquences mesurées, tandis que les différents symboles représentent les fréquences des modes calculés pour diverses valeurs de m .

GARCÍA HERNÁNDEZ et al. (2015) ont trouvé des régularités dans le spectre d'oscillation de Rasalhague, du type de celles décrites en section 2.3.5. Ainsi, il apparaît que le spectre a une grande séparation de $38 \pm 1 \mu\text{Hz}$, pour les modes de fréquence supérieure à $116 \mu\text{Hz}$. Cette fréquence a été identifiée comme fréquence du mode acoustique radial de plus bas ordre par MONNIER et al. (2010), il s'agit donc de la « fréquence minimale » pour les modes p. Seuls certains des modes observés suivent cette régularité : ceci suggère qu'il s'agit de modes de pression de type îlot, puisque ceux-ci sont les seuls à avoir été identifiés par REESE, LIGNIÈRES et RIEUTORD (2008) comme suivant une régularité décelable dans les rotateurs rapides. Si cette identification est correcte, connaître en amont la nature des modes associés à certaines des fréquences peut faciliter grandement leur identification de ces modes, et par suite, celle des autres oscillations observées, et donc de contraindre les modèles de Rasalhague plus précisément.

4.4.3 Nouveau calcul

Afin d'essayer d'améliorer notre compréhension de cette étoile, nous avons utilisé le code ESTER décrit dans la section 4.2.2 pour calculer divers modèles de Rasalhague. Il est nécessaire pour cela de suivre quelques étapes :

- il faut d'abord calculer un modèle 1D, à rotation nulle. On fixe également les paramètres de la grille (nombre de domaines radiaux, de points par domaine, d'harmoniques sphériques). La convergence est très rapide, il convient donc de fixer la masse et la composition chimique

Masse tirée de	MONNIER et al. (2010)	DEUPREE (2011)	HINKLEY et al. (2011)	ce travail
M/M_{\odot}	2,18	2,25	2,4	2,22
Ω/Ω_K	0,624	0,63	0,624	0,624
X_c/X	0,346	0,384	0,455	0,3685
$T_{\text{eff,p}}$ (K)	9009	9299	9910	9177
$T_{\text{eff,eq}}$ (K)	7585	7834	8346	7731
R_p/R_{\odot}	2,388	2,388	2,388	2,388
R_{eq}/R_{\odot}	2,858	2,858	2,858	2,858
V_{eq} (km·s ⁻¹)	238	241	249	240
P_{rot} (jours)	0,608 – 0,626	0,249 – 0,616	0,580 – 0,6	0,603 – 0,620
L/L_{\odot}	28,9	32,9	42,4	31,1

TABLE 4.3 – Modèles ESTER de Rasalhague pour différentes masses tirées de la littérature.

de l'étoile lors de ce calcul préliminaire.

- on incorpore ensuite la rotation, en utilisant le modèle 1D comme point de départ des itérations. Pour optimiser le temps de calcul, on procède par paliers, pour des vitesses angulaires moyennes de plus en plus élevées jusqu'à atteindre la valeur visée,
- enfin, on peut régler finement les paramètres du modèle final.

Nous avons calculé différents modèles pour les masses suggérées par les travaux antérieurs sur Rasalhague, en mettant l'accent sur l'accord des rayons avec les résultats de ZHAO et al. (2009) : il nous a été possible quantifier l'effet de la masse sur les autres paramètres fondamentaux, notamment sur la luminosité de l'étoile. Comme nous l'avions anticipé, aucun des modèles ESTER n'a pu reproduire un écart de température entre pôle et équateur aussi grand que celui obtenu avec la loi de VON ZEIPPEL (1924a), en raison de l'exposant qu'elle utilise.

Nous avons ensuite calculé un "meilleur" modèle ajustant de façon convenable rayons polaire et équatorial, vitesse équatoriale et luminosité, en utilisant comme paramètres la masse de l'étoile, sa vitesse de rotation moyenne et la fraction massique d'hydrogène au cœur (qui correspond au temps passé sur la séquence principale). Bien que nous n'ayons pas utilisé d'outil statistique afin de valider le modèle, l'accord avec les paramètres donnés par la littérature est satisfaisant, comme l'indique le tableau 4.3. Dans toutes ces modélisations, on considère que une métallicité de $Z = 0.02$, la fraction d'hydrogène restante dans le cœur partiellement déplété étant donnée par X_c/X .

Dans la suite de cette analyse, nous avons considéré uniquement le modèle à $M = 2,22M_{\odot}$. La figure 4.4 représente la période de rotation de l'étoile, selon une coupe méridienne : on y voit que le cœur tourne de façon presque solide et beaucoup plus vite que l'enveloppe. Dans cette dernière, la rotation est différentielle : la vitesse de rotation est notamment plus faible dans le cylindre tangent au cœur.

Une fois un modèle aux caractéristiques suffisamment proches de celles observées trouvé, il a alors été possible d'en calculer les oscillations adiabatiques avec le code TOP. Nous avons effectué ce calcul pour des valeurs de l'ordre azimutal m allant de -4 à 4 . Un échantillon des modes

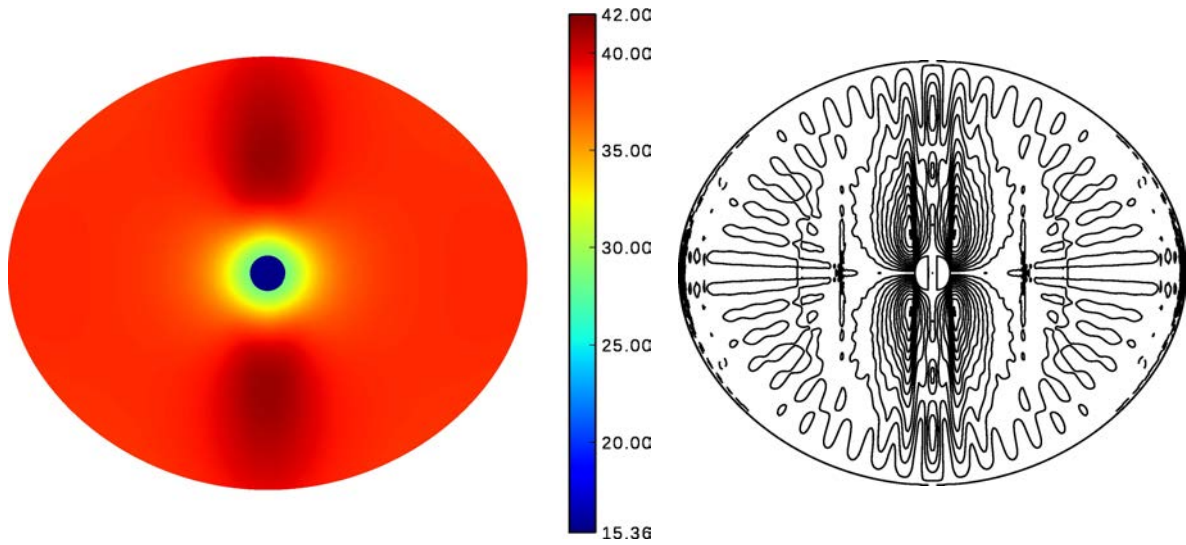


FIGURE 4.4 – Coupe méridienne du modèle de Rasalhague à $M = 2,22M_{\odot}$. À gauche : période de rotation en heures ; à droite : lignes de courant de la circulation méridienne.

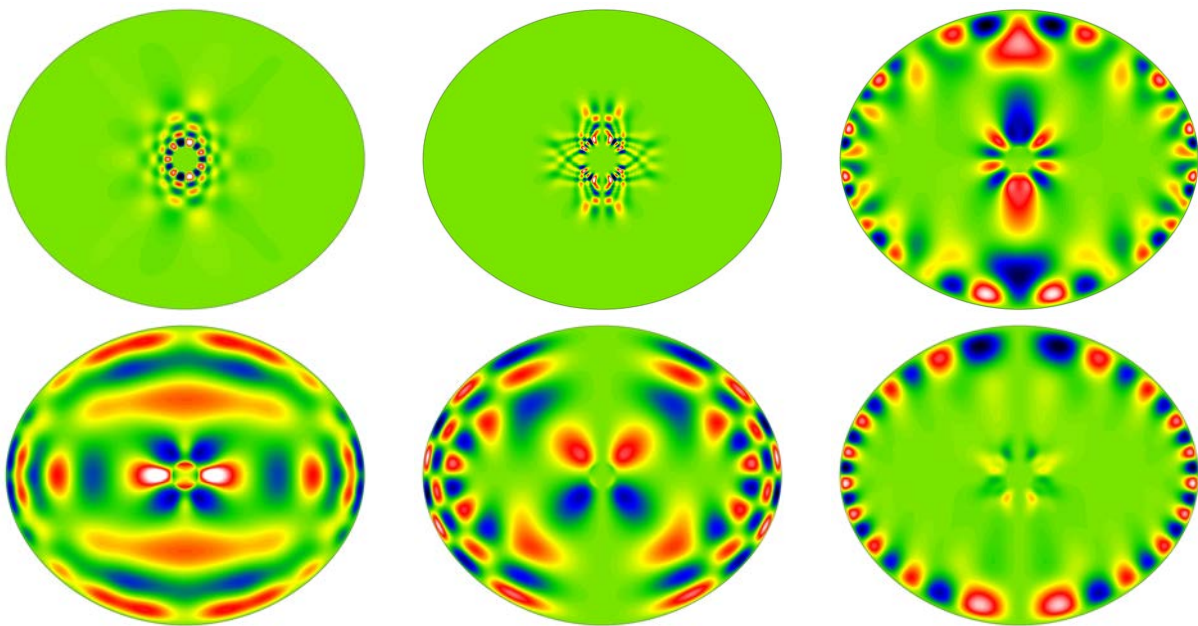


FIGURE 4.5 – Coupe méridienne d'un échantillon de modes calculés avec TOP. La quantité représentée est $P/\sqrt{\rho_0}$. On rappelle que bleu et rouge sont les extrêmes positifs et négatifs de la perturbation, le vert représentant une perturbation localement nulle. En haut, de gauche à droite : un mode g $m = -1$ peu modifié par la rotation, un mode en rosace $m = 2$, et un mode gravito-acoustique pg à $m = 0$. En bas, de gauche à droite : Un mode p îlot à $m = 4$, un mode p chaotique à $m = 1$, et un mode p galerie chuchotante à $m = 0$.

obtenus par le code TOP dans Rasalhague est présenté en figure 4.5, où la quantité représentée est la perturbation eulérienne de pression, divisée par la racine carrée de la masse volumique d'équilibre, soit $P/\sqrt{\rho_0}$. On reconnaît les classes de modes présentés dans la section 2.3.2.

Comme attendu, un grand nombre de modes est obtenu, si bien que plusieurs fréquences sont susceptibles de correspondre à chacun des modes observés. Contrairement à l'étude proposée par DEUPREE (2011), les calculs des modes présentés ici ont convergé correctement, grâce au nombre important d'harmoniques sphériques utilisé pour les décrire (20, contre 6 ou 8).

Identifier les fréquences observées en leur associant les fréquences synthétiques les plus proches ne suffit pas. Il est nécessaire de repérer les modes susceptibles d'être mesurés depuis la Terre afin d'établir une liste de candidats à l'identification. Pour cela, nous avons utilisé les deux diagnostics détaillés en section 4.3, à savoir les visibilité des modes, ainsi que leur dissipation thermique dans le cadre de l'approximation quasi-adiabatique.

La figure 4.6 montre le calcul des visibilité pour les oscillations adiabatiques calculées avec le code TOP. On distingue deux populations : les modes de pression, qui couvrent tout l'intervalle de fréquence étudié et les modes de gravité, qui sont eux localisés à basse fréquence (ceux-ci disparaissent dès que $\omega > \sqrt{N^2 + 4\Omega^2}$ partout dans l'étoile). On constate immédiatement que les modes de pression sont plus visibles que les modes gravito-inertiels : cette différence en termes de visibilité s'explique du fait que les modes g ont une amplitude maximale près de l'interface entre le cœur et l'enveloppe, et sont évanescents à la surface de l'étoile, alors que les modes p se propagent beaucoup plus près de la surface de l'étoile.

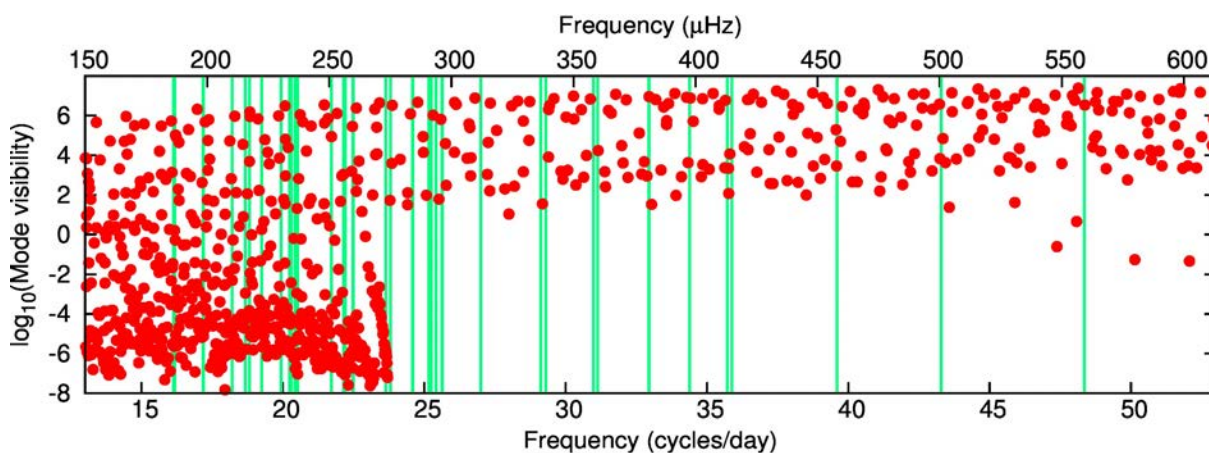


FIGURE 4.6 – Visibilité des modes à $m = 0$, en unités arbitraires. Chaque trait vert vertical correspond à une fréquence observée par MONNIER et al. (2010), chaque point à un mode calculé.

Les dissipations thermiques des modes, calculées à partir des modes adiabatiques, sont données en figure 4.7. Il apparaît qu'aucun mode n'est instable dans l'étoile, malgré la possibilité d'exciter le κ -mécanisme incluse dans notre modèle. On constate également que les modes g sont les moins amortis, là où les modes de pression sont fortement amortis.

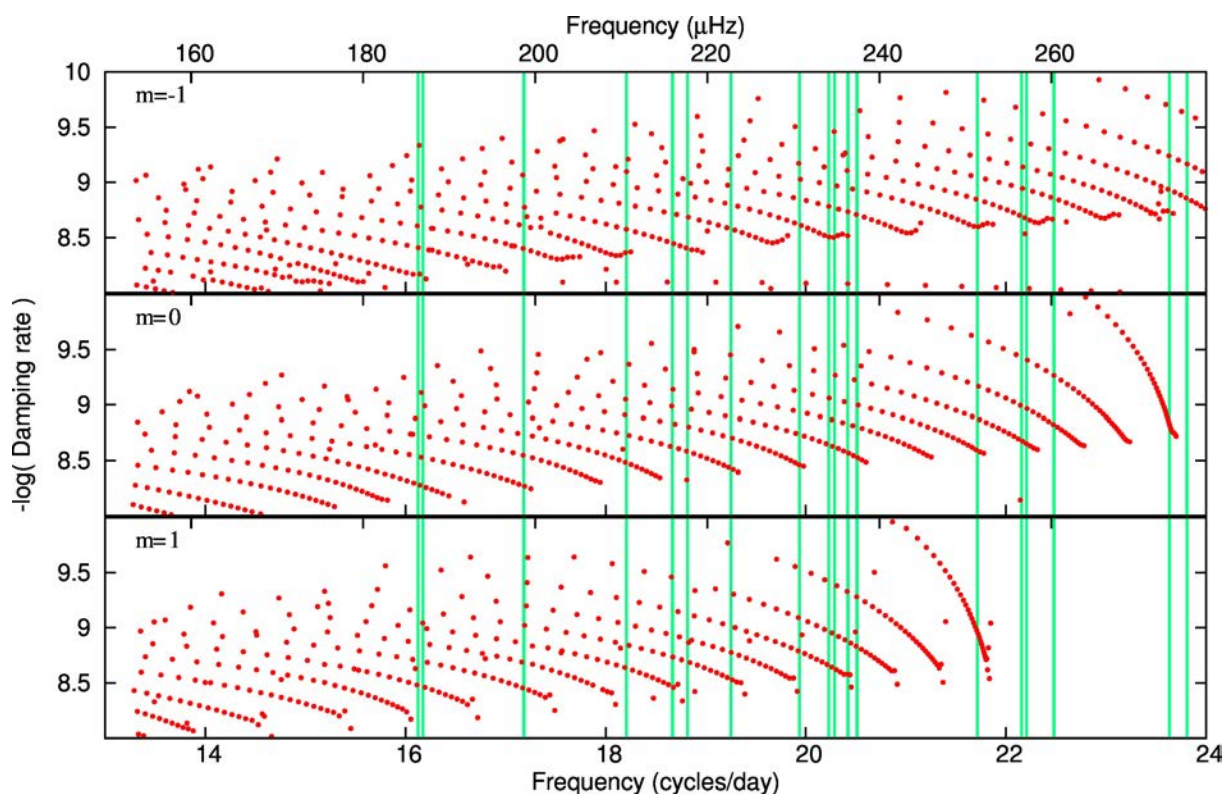


FIGURE 4.7 – Dissipations thermiques calculées à partir de l’approximation quasi-adiabatique. On représente $-\log(\tau)$, ainsi les modes instables seraient tout en haut de chacun des panneaux. Chaque trait vert vertical correspond à une fréquence observée par MONNIER et al. (2010), chaque point à un mode calculé.

Ces deux diagnostics vont dans des directions opposées : les modes de gravité sont ceux qui dissipent le moins d’énergie mais aussi ceux qui sont les moins visibles, alors que les modes de pression sont plus visibles mais plus difficiles à déstabiliser. En l’état, notre étude de Rasalhague ne permet donc pas de déterminer quels modes sont observables depuis la Terre. Heureusement, il existe quelques perspectives intéressantes pour réaliser le tri qui s’impose et rendre l’association ESTER et TOP opérationnelle pour la modélisation directe des étoiles en rotation rapide.

4.5 Conclusion et améliorations possibles

Dans ce chapitre, nous avons montré un premier exemple d’utilisation de l’association ESTER et TOP pour la modélisation directe d’une étoile en rotation rapide. Nous avons choisi l’étoile Rasalhague en raison de ses nombreux modes d’oscillation détectés, son appartenance à un système double (qui permet de contraindre sa masse) et de son inclinaison (elle est vue par

l'équateur). Nous avons d'abord modélisé l'étoile en deux dimensions avec le code ESTER et calculé les oscillations adiabatiques correspondantes avec le code TOP, puis tenté de sélectionner les modes potentiellement mesurables grâce à un calcul des visibilitées et des taux d'amortissement quasi-adiabatiques. Malheureusement, cette première tentative n'a pas été fructueuse : de nombreux modes ont été calculés, parmi lesquels aucun n'apparaît excité.

Cependant des pistes de réflexion sont ouvertes et des améliorations semblent possibles. Tout d'abord, dans ce travail, nous étions limités au calcul adiabatique : une nouvelle version de TOP intégrant la non-adiabaticité a été finalisée au cours de l'année 2016. Elle permettra de calculer des taux d'amortissement en s'affranchissant des approximations jusque là utilisées, comme l'approximation quasi-adiabatique (au prix d'un calcul plus complexe, voir le paragraphe 4.3.2). Il s'agit d'un progrès essentiel, qui doit évidemment être mis à profit.

Notre connaissance du comportement des modes dans une structure réaliste d'étoile en rotation rapide est encore assez parcellaire. L'étude théorique des propriétés des modes gravito-inertiels dans un modèle simplifié, présentée au chapitre 3, suggère de nouveaux critères permettant de sélectionner les modes : déterminer la présence de structures singulières dans les oscillations calculées avec TOP peut permettre d'écarter certains modes *a priori* fortement amortis. Aussi, il n'existe pas encore de méthode de caractérisation systématique de la nature des modes (modes g , p , îlots ou chaotiques, etc.). Le développement d'un tel algorithme pourrait permettre d'exploiter plus facilement les spectres synthétiques et d'utiliser des contraintes comme celles imposées par les régularités des spectres des étoiles δ Sct.

La dernière source d'erreur est le modèle lui-même : malgré l'amélioration que représente le calcul d'une structure stellaire en deux dimensions, les limitations du code ESTER sont peut-être encore trop importantes pour un projet aussi ambitieux que d'identifier les modes individuellement à partir de spectres d'oscillation synthétiques. Il faudra par exemple modéliser la diffusion des éléments chimiques dans l'enveloppe, ou la convection en surface (voir section 4.2.2).

L'objectif de ce premier travail, outre l'étude de Rasalhague, est la validation de notre méthode de modélisation directe. Ainsi, peut-être l'étoile que nous avons choisie n'est pas le candidat idéal. Un rotateur modéré, où l'effet de la rotation n'est ni négligeable ni prépondérant, permettrait une modélisation plus aisée. Aussi, Rasalhague semble avoir consommé une bonne partie de l'hydrogène en son cœur : une étoile plus jeune serait par exemple plus adaptée au code ESTER. Enfin, Rasalhague est vue par l'équateur, une caractéristique qui tend à privilégier les modes non-axisymétriques dans son spectre d'oscillations ; l'assombrissement gravitationnel a lui aussi un impact significatif sur la visibilité relative des modes. Pour un rotateur modéré ou rapide vu par le pôle (avec un v élevé mais un $v \sin i$ faible, à cause des effets géométriques) la situation serait peut-être plus simple : les modes axisymétriques seraient privilégiés, et les effets de l'équateur minimisés.

Une fois la démarche de modélisation validée, il faudra développer des outils statistiques pour évaluer la correspondance entre les spectres observé et calculé. Celle-ci pourra alors être améliorée, en utilisant des algorithmes d'optimisation pour modifier les paramètres du modèle en entrée. Ceci permettrait d'exploiter efficacement les données acquises par les différentes missions de photométrie consacrées à l'astérosismologie (telles que Kepler, PLATO), notamment des étoiles brillantes (BRITTE, TESS).

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié les étoiles de masse intermédiaire ou massives de la séquence principale, qu'on qualifie d'étoiles de type précoce. Comme les observations (par spectroscopie, photométrie ou interférométrie) le montrent, ces étoiles sont majoritairement des rotateurs rapides. Leurs épaisses zones radiatives sont également stratifiées, ce qui génère une rotation différentielle. Par ailleurs, les missions d'astérosismologie récentes ont mesuré de nombreuses fréquences d'oscillations dans ces étoiles. Parmi ces oscillations, celles à basse fréquence sondent les couches les plus profondes de l'étoile. Il s'agit de modes entretenus par la poussée d'Archimède et la force de Coriolis, ils sont donc sensibles à la fois à la stratification et à la rotation, mais sont mal décrits.

Le but de cette thèse était donc d'obtenir une meilleure compréhension de l'interaction entre la rotation différentielle interne de l'étoile et les modes à basse fréquence la traversant, afin d'apporter de nouvelles contraintes sur les modèles bidimensionnels développés à Toulouse.

Afin d'améliorer cette compréhension, nous avons commencé par étudier les modes gravito-inertiels dans un modèle très simplifié. Le fluide est confiné dans une coquille sphérique dont les conditions aux limites sont rigides. Il est considéré est homogène, stratifié linéairement en température, à viscosité et diffusivité thermique non nulles mais constantes. On se place dans l'approximation de Boussinesq. L'état d'équilibre est en rotation différentielle coquillaire, laquelle est directement reliée à la stratification en température. Il n'existe a priori pas de mécanisme d'excitation des modes dans ce modèle simplifié.

Dans cette configuration, nous avons étudié le problème aux valeurs propres des oscillations de deux manières, de façon semi-analytique dans la limite non-dissipative, et numériquement dans le cas complet. Supposer des dissipations nulles permet de dériver la dynamique des caractéristiques du système qu'on utilise pour décrire les diverses géométries des modes dans l'espace des paramètres. Il a également été possible de mettre en évidence diverses singularités : les modes peuvent exciter des attracteurs de courte période, des singularités de latitudes critiques, des résonances de corotation ou être piégés en coin. Comme l'étude dissipative le montre, ces singularités concentrent l'énergie des modes en des couches ou des points particuliers de la coquille dont l'épaisseur dépend de la viscosité ou la diffusivité thermique. À cause de cette concentration, la plupart de ces modes sont amortis et dissipent de l'énergie. Certains de ces modes voient leur énergie concentrée dans des zones où peuvent être excitées des instabilités linéaires baroclines et l'on trouve des modes avec un taux d'accroissement positif. Si un processus (non-linéaire) de saturation agit sur ces modes, leur permettant d'atteindre une amplitude finie, alors nous avons trouvé ici un mécanisme d'excitation reposant entièrement sur la rotation différentielle et alternatif au mécanisme κ habituellement considéré à l'origine des pulsations dans les étoiles de type précoce. Nous avons également trouvé des modes réguliers dans l'intervalle de diffusivités considéré, lesquels sont peu amortis.

Ce travail peut être prolongé dans de nombreuses directions, d'un point de vue théorique, comme dans ses applications.

D'abord, l'analyse à dissipation nulle peut être appliquée au cas de la sphère pleine. Si la coquille n'a pas de cœur (et donc que les caractéristiques n'ont pas de rebonds sur une frontière interne), la question de la présence d'attracteurs se pose. En effet, toutes les configurations ne font pas apparaître d'attracteurs, si bien que leur présence dans un cas plus réaliste n'est pas certaine. Au-delà d'une coquille entièrement radiative, il est possible d'étudier une zone radiative autour d'un cœur convectif, et d'étudier le couplage entre les modes inertiels dans le cœur et gravito-inertiels dans l'enveloppe.

Le mécanisme d'excitation des modes par l'instabilité ABCD peut s'avérer très intéressant pour l'étude des oscillations des étoiles en rotation rapide et différentielle. Il souffre néanmoins de deux limitations : le calcul que nous avons mené est linéaire, et le modèle que nous avons utilisé est très simplifié. Ainsi, l'occurrence d'un tel mécanisme dans des modèles plus réalistes d'étoiles doit être évaluée. En effet, la configuration que nous avons étudiée dans cette thèse, où le profil est dérivé de l'écoulement barocline en fonction de la seule stratification, mène à une rotation différentielle très marquée. Comme le montre le modèle de Rasalhague que nous avons étudié, le contraste de rotation ne semble pas si important pour des modèles réalistes. Il faudrait alors reprendre le calcul des critères d'instabilité pour les modèles ESTER et les oscillations TOP, par exemple. Si l'instabilité ABCD existe dans ces configurations, deux situations s'offrent à nous : soit l'instabilité sature à une amplitude raisonnable, soit elle déstabilise complètement l'écoulement d'équilibre. Dans le premier cas, les modes pourraient être excités par ce nouveau mécanisme dans des étoiles, mais dans le second cas notre étude est compromise car l'écoulement barocline ne serait plus un état d'équilibre viable. Cette ambiguïté peut être levée en effectuant des calculs non-linéaires, en ajoutant des termes dans nos équations et en traitant le système aux valeurs initiales et son évolution dans le temps.

Enfin, nous n'avons considéré dans cette étude que le cas des modes gravito-inertiels libres, alors qu'il est aisément possible d'étendre le raisonnement aux modes forcés : dans les systèmes multiples (plusieurs étoiles, une étoile et des planètes, voire une planète et ses satellites), des modes peuvent être excités dans le corps principal par les effets de marée induits par les compagnons. Ces modes excitent les singularités de latitude critique, dissipent de l'énergie et transportent du moment cinétique : leur étude permettrait de contraindre l'évolution à long terme des orbites, ou la structure interne de ces astres.

En parallèle de cette analyse théorique, nous avons modélisé Rasalhague. Cette étoile proche de masse intermédiaire est en rotation rapide et sa structure nettement déformée par l'aplatissement centrifuge. Elle a été observée à de nombreuses reprises avec différents moyens, abrite des oscillations gravito-inertielles et acoustiques, et son compagnon peu brillant apporte des contraintes importantes sur sa masse.

Il s'agit donc là du candidat idéal pour le processus de modélisation que nous voulons tester : modéliser l'étoile avec le code ESTER, calculer ses oscillations avec le code TOP, calculer leur taux d'amortissement et leur visibilité à la surface afin de conserver les modes instables les plus visibles, et finalement varier les paramètres d'entrée des modèles pour avoir la meilleure identification des modes observés à ceux calculés.

Nous avons donc interfacé les codes ESTER et TOP, et écrit les équations des oscillations en rotation, projetées dans la géométrie sphéroïdale. Ces équations couplant les différentes harmoniques sphériques requièrent une résolution élevée, qui à son tour mène à de nombreuses

solutions au problème des oscillations. Il est alors nécessaire de ne conserver que les modes qui peuvent être observés. Nous avons donc calculé leurs visibilitées et leurs taux d'amortissement dans l'approximation quasi-adiabatique, mais il n'a pas été possible d'obtenir une identification univoque des modes : en effet, aucun des modes que nous avons calculés n'apparaît excité, et les modes de pression sont les plus visibles mais aussi les plus amortis.

Cette apparente contradiction entre les modes observés et calculés peut être due à plusieurs facteurs. D'abord, nous avons utilisé pour ces calculs des équations des perturbations adiabatiques, auxquelles nous avons adjoint un calcul quasi-adiabatique des taux d'amortissement. Une évolution naturelle serait d'utiliser un calcul non-adiabatique des oscillations, qui fournirait intrinsèquement un taux d'amortissement. Une version non-adiabatique de TOP a été développée par Daniel Reese, et nous avons commencé des calculs qui s'avèrent encourageants.

Par ailleurs, le tri des modes calculés par TOP en fonction de leur nature (gravito-inertiels, îlots, galeries des murmures, mixtes, etc.) n'a pas encore été réalisé de façon automatique mais permettrait d'exploiter les régularités trouvées dans le spectre. En effet, les modes acoustiques de type îlot observés suivent une répartition régulière dans le spectre d'oscillations de l'étoile. Il serait alors intéressant d'identifier de tels modes dans le spectre synthétique, et de chercher à les identifier aux fréquences régulièrement espacées dans le spectre observé.

Une fois un tel "pipeline" validé, il sera nécessaire d'étudier d'autres pulsateurs de type précoce, qui ont été observés par interférométrie ou spectroscopie. De tels candidats existent (Alderamin, Altaïr, Caph, parmi d'autres) et sont appelés à se multiplier grâce aux missions de photométrie consacrées aux étoiles brillantes comme BRIDE ou TESS, ou des missions explorant un grand champ comme PLATO.

Une autre piste est à exploiter : peut-être Rasalhague n'est-elle pas, finalement, la candidate idéale à cette analyse, et ce pour deux raisons. Premièrement, il s'agit d'une étoile très aplatie : peut-être des rotateurs modérés (c'est-à-dire aplatis de quelques % de sorte que le calcul bidimensionnel soit utile mais que les effets de la rotation ne soient pas extrêmes) pourraient être visés dans un premier temps, et servir d'étape intermédiaire avant l'étude de rotateurs plus extrêmes. Aussi Rasalhague est vue par l'équateur, où les effets de la rotation rapide (aplatissement centrifuge et surtout assombrissement gravitationnel) sont maximaux. Peut-être une étoile vue par le pôle serait également plus simple à modéliser. En second lieu, son évolution déjà bien entamée sur la séquence principale met peut-être en exergue les limitations du programme ESTER, qui ne tient pas compte du transport d'éléments chimiques et de moment cinétique au cours du temps.

Ainsi, l'étape la plus complexe, mais qui sera certainement la plus profitable, sera l'amélioration du code de structure ESTER. Pour atteindre son plein potentiel, il faut en faire un code d'évolution stellaire. Cela nécessite implémenter la cinétique des réactions nucléaires au cœur de l'étoile, mais aussi la diffusion des éléments chimiques dans l'enveloppe et le transport de moment cinétique. La difficulté est de faire converger la méthode numérique itérative permettant à ESTER de calculer les modèles avec les variations simultanées de la rotation, des quantités de structure, de la grille sphéroïdale. Néanmoins, l'intégration de la variable temps est le projet de Michel Rieutord, Daniel Reese et Armando Domiciano de Souza, qui vient d'obtenir un financement de l'Agence Nationale de la Recherche, mais aussi celui de mon prochain travail de recherche, avec Alessandro Bressan à la SISSA de Trieste. En effet, son équipe est à l'origine du code d'évolution stellaire en une dimension PARSEC : il s'agira donc de coupler leur description très précise

de la nucléosynthèse et des phénomènes de transport associés à la géométrie bidimensionnelle d'ESTER.

En conclusion, la sismologie des étoiles de type précoce abordée dans cette thèse est motivée par des observations en progrès constant, aussi bien en termes de quantité que de qualité. En effet, plusieurs missions ambitieuses continueront à mesurer des pulsations dans des étoiles dans les décennies à venir. L'opulence actuelle de données et les progrès théoriques dans l'étude des étoiles de type solaire (de la séquence principale ou au-delà) posent naturellement la question des étoiles plus massives de la séquence principale, pour lesquelles les aspects théoriques sont malheureusement en retard. Ce retard est principalement dû à la complexité de la physique de ces étoiles, qui mêle rotation rapide et différentielle et stratification, dans une géométrie qui dévie significativement de la géométrie sphérique.

Cette thèse nous a permis de développer quelques-uns de ces aspects théoriques cruciaux, en investiguant les relations entre rotation différentielle et pulsations, mais aussi en proposant la première étude sismique d'un rotateur rapide à haute résolution, en associant les codes ESTER et TOP. Pourtant, cette thèse ouvre beaucoup de pistes qui devront d'être étudiées plus avant pour permettre l'identification des modes observés par les missions à venir, afin d'apporter de fortes contraintes sur les modèles d'étoiles en rotation rapide.

Bibliographie

- [1] C. AERTS, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD et D. W. KURTZ. *Asteroseismology*. 2010.
- [2] C. AERTS et al. “Asteroseismology of HD 129929 : Core Overshooting and Nonrigid Rotation”. Dans : *Science* 300 (juin 2003), p. 1926–1928.
- [3] C. AERTS et al. “Asteroseismology of the β Cep star HD 129929. I. Observations, oscillation frequencies and stellar parameters”. Dans : *A&A* 415 (fév. 2004), p. 241–249.
- [4] I. APPENZELLER. “Mass Loss Rates for Vibrationally Unstable Very Massive Main-sequence Stars”. Dans : *A&A* 9 (déc. 1970), p. 216.
- [5] G. BACKUS et M. RIEUTORD. “Completeness of Inertial Modes of an Incompressible Non-Viscous Fluid in a Corotating Ellipsoid”. Dans : *ArXiv e-prints* (juin 2016).
- [6] A. BAGLIN et al. “CoRoT : Description of the Mission and Early Results”. Dans : *Transiting Planets*. Sous la dir. de F. PONT, D. SASSELOV et M. J. HOLMAN. T. 253. IAU Symposium. Fév. 2009, p. 71–81.
- [7] J. BALLOT et al. “2D Computations of g-modes in Fast Rotating Stars”. Dans : *Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*. Sous la dir. de H. SHIBAHASHI, M. TAKATA et A. E. LYNAS-GRAY. T. 462. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. Sept. 2012, p. 389.
- [8] J. BALLOT et al. “Gravity modes in rapidly rotating stars. Limits of perturbative methods”. Dans : *A&A* 518 (juil. 2010), A30.
- [9] N. J. BALMFORTH et al. “On the excitation mechanism in roAp stars”. Dans : *MNRAS* 323 (mai 2001), p. 362–372.
- [10] L. A. BALONA. “Rotational light variations in Kepler observations of A-type stars”. Dans : *MNRAS* 415 (août 2011), p. 1691–1702.
- [11] L. A. BALONA, J. DASZYŃSKA-DASZKIEWICZ et A. A. PAMYATNYKH. “Pulsation frequency distribution in δ Scuti stars”. Dans : *MNRAS* 452 (sept. 2015), p. 3073–3084.
- [12] A. J. BARKER et G. I. OGILVIE. “On internal wave breaking and tidal dissipation near the centre of a solar-type star”. Dans : *MNRAS* 404 (juin 2010), p. 1849–1868.
- [13] S. A. BARNES. “Ages for Illustrative Field Stars Using Gyrochronology : Viability, Limitations, and Errors”. Dans : *ApJ* 669 (nov. 2007), p. 1167–1189.
- [14] S. A. BARNES et al. “Rotation Periods for Cool Stars in the 4 Gyr old Open Cluster M67, The Solar-Stellar Connection, and the Applicability of Gyrochronology to at least Solar Age”. Dans : *ApJ* 823 (mai 2016), p. 16.
- [15] C. BARUTEAU et M. RIEUTORD. “Inertial waves in a differentially rotating spherical shell - I. Free modes of oscillation”. Dans : *J. Fluid Mech.* 719 (2013), p. 47–81.

- [16] P. G. BECK et al. “Fast core rotation in red-giant stars as revealed by gravity-dominated mixed modes”. Dans : *Nature* 481 (jan. 2012), p. 55–57.
- [17] T. R. BEDDING et H. KJELDSEN. “Solar-like Oscillations”. Dans : *Publications of the Astronomical Society of Australia* 20 (2003), p. 203–212.
- [18] T. BÖHM et al. “Discovery of starspots on Vega. First spectroscopic detection of surface structures on a normal A-type star”. Dans : *A&A* 577 (mai 2015), A64.
- [19] S. BONAZZOLA, E. GOURGOULHON et J.-A. MARCK. “Numerical approach for high precision 3D relativistic star models”. Dans : *Phys. Rev. D* 58.10 (nov. 1998), p. 104020.
- [20] M.-P. BOUABID et al. “Effects of the Coriolis force on high-order g modes in γ Doradus stars”. Dans : *MNRAS* 429 (mar. 2013), p. 2500–2514.
- [21] M. BRIQUET et C. AERTS. “A new version of the moment method, optimized for mode identification in multiperiodic stars”. Dans : *A&A* 398 (fév. 2003), p. 687–696.
- [22] F. H. BUSSE et R. M. CLEVER. “An asymptotic model of two-dimensional convection in the limit of low Prandtl number.” Dans : *J. Fluid Mech.* 102 (1981), p. 75.
- [23] R. J. BUTA et M. A. SMITH. “The light variations of nonradial pulsators - Theory and application to the line profile variable 53 Persei”. Dans : *ApJ* 232 (août 1979), p. 213–235.
- [24] D. BUZASI et al. “The Detection of Multimodal Oscillations on α Ursae Majoris”. Dans : *ApJ Lett.* 532 (avr. 2000), p. L133–L136.
- [25] M. H. CARR et al. “Evidence for a subsurface ocean on Europa”. Dans : *Nature* 391 (jan. 1998), p. 363.
- [26] P. CASELLI et C. CECCARELLI. “Our astrochemical heritage”. Dans : *Astron. & Astrophys. Rev.* 20 (oct. 2012), p. 56.
- [27] S. CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, Oxford, 1961.
- [28] X. CHE et al. “Colder and Hotter : Interferometric Imaging of β Cassiopeiae and α Leonis”. Dans : *ApJ* 732 (mai 2011), p. 68.
- [29] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD. “Helioseismology”. Dans : *Reviews of Modern Physics* 74 (nov. 2002), p. 1073–1129.
- [30] A. CLARET. “A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models. Calculations for $-5.0 \leq \log[M/H] \leq +1$, $2000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50000 \text{ K}$ at several surface gravities”. Dans : *A&A* 363 (nov. 2000), p. 1081–1190.
- [31] G. W. COLLINS II et R. J. TRUAX. “Classical rotational broadening of spectral lines”. Dans : *ApJ* 439 (fév. 1995), p. 860–874.
- [32] A. W. J. COUSINS et P. R. WARREN. “Variable Stars Observed During the Cape Bright Star Programme”. Dans : *Monthly Notes of the Astronomical Society of South Africa* 22 (1963), p. 65.
- [33] A. COWLEY et al. “A study of the bright A stars. I. A catalogue of spectral classifications.” Dans : *Astron. J.* 74 (avr. 1969), p. 375–406.
- [34] T. G. COWLING. “The non-radial oscillations of polytropic stars”. Dans : *MNRAS* 101 (1941), p. 367.

- [35] T. G. COWLING. “The stability of gaseous stars”. Dans : *MNRAS* 94 (juin 1934), p. 768–782.
- [36] T. G. COWLING. “The stability of gaseous stars (Second paper)”. Dans : *MNRAS* 96 (nov. 1935), p. 42.
- [37] G. H. DARWIN. “On the Secular Changes in the Elements of the Orbit of a Satellite Revolving About a Planet Distorted by Tides”. Dans : *Nature* 21 (jan. 1880), p. 235–237.
- [38] P. DEGROOTE et al. “CoRoT’s view of newly discovered B-star pulsators : results for 358 candidate B pulsators from the initial run’s exoplanet field data”. Dans : *A&A* 506 (oct. 2009), p. 471–489.
- [39] S. DEHEUVELS et al. “Seismic constraints on the radial dependence of the internal rotation profiles of six Kepler subgiants and young red giants”. Dans : *A&A* 564 (avr. 2014), A27.
- [40] S. DEHEUVELS et al. “Seismic Evidence for a Rapidly Rotating Core in a Lower-giant-branch Star Observed with Kepler”. Dans : *ApJ* 756 (sept. 2012), p. 19.
- [41] R. G. DEUPREE. “Stellar evolution with arbitrary rotation laws. I - Mathematical techniques and test cases”. Dans : *ApJ* 357 (1990), p. 175–187.
- [42] R. G. DEUPREE. “Stellar evolution with arbitrary rotation laws. II - Massive star evolution to core hydrogen exhaustion”. Dans : *ApJ* 439 (1995), p. 357–364.
- [43] R. G. DEUPREE. “Theoretical p-Mode Oscillation Frequencies for the Rapidly Rotating δ Scuti Star α Ophiuchi”. Dans : *ApJ* 742 (nov. 2011), p. 9.
- [44] B. DINTRANS, M. RIEUTORD et L. VALDETTARO. “Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell”. Dans : *J. Fluid Mech.* 398 (1999), p. 271–297.
- [45] J.-F. DONATI, A. COLLIER CAMERON et P. PETIT. “Temporal fluctuations in the differential rotation of cool active stars”. Dans : *MNRAS* 345 (nov. 2003), p. 1187–1199.
- [46] J.-F. DONATI et al. “Spectropolarimetric observations of active stars”. Dans : *MNRAS* 291 (nov. 1997), p. 658.
- [47] J.-F. DONATI et al. “Surface differential rotation and prominences of the Lupus post T Tauri star RX J1508.6-4423”. Dans : *MNRAS* 316 (août 2000), p. 699–715.
- [48] P. DRAZIN et W. REID. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [49] M.-A. DUPRET et al. “Asteroseismology of the β Cep star HD 129929. II. Seismic constraints on core overshooting, internal rotation and stellar parameters”. Dans : *A&A* 415 (fév. 2004), p. 251–257.
- [50] M.-A. DUPRET et al. “Convection-pulsation coupling. II. Excitation and stabilization mechanisms in δ Sct and γ Dor stars”. Dans : *A&A* 435 (juin 2005), p. 927–939.
- [51] A. S. EDDINGTON. “Circulating currents in rotating stars”. Dans : *The Observatory* 48 (mar. 1925), p. 73–75.
- [52] A. S. EDDINGTON. “The opacity of extended stellar envelopes”. Dans : *MNRAS* 91 (nov. 1930), p. 109.
- [53] S. EKSTRÖM et al. “Evolution towards the critical limit and the origin of Be stars”. Dans : *A&A* 478 (fév. 2008), p. 467–485.

- [54] D. ERSPAMER et P. NORTH. “Automated spectroscopic abundances of A and F-type stars using echelle spectrographs. II. Abundances of 140 A-F stars from ELODIE”. Dans : *A&A* 398 (fév. 2003), p. 1121–1135.
- [55] F. ESPINOSA LARA et M. RIEUTORD. “Gravity darkening in rotating stars”. Dans : *A&A* 533 (sept. 2011), A43.
- [56] F. ESPINOSA LARA et M. RIEUTORD. “Self-consistent 2D models of fast rotating early-type stars”. Dans : *A&A* 552 (2013), A35.
- [57] J. FABRICIUS. *De maculis in sole observatis narratio*. 1611.
- [58] B. FAVIER et al. “Non-linear evolution of tidally forced inertial waves in rotating fluid bodies”. Dans : *MNRAS* 439 (mar. 2014), p. 845–860.
- [59] P. FOTHERINGHAM et R. HOLLERBACH. “Inertial oscillations in a spherical shell”. Dans : *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 89 (1998), p. 23–43.
- [60] S. FRIEDLANDER. “Hydromagnetic waves in a differentially rotating, stratified spherical shell”. Dans : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 48 (1989), p. 53–67.
- [61] S. FRIEDLANDER et W. SIEGMANN. “Internal waves in a contained rotating stratified fluid”. Dans : *J. Fluid Mech.* 114 (1982), p. 123–156.
- [62] S. FRIEDLANDER et W. SIEGMANN. “Internal waves in a rotating stratified fluid in an arbitrary gravitational field”. Dans : *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 19 (1982), p. 267–291.
- [63] E. B. FROST. “The spectroscopic binary beta Cephei.” Dans : *ApJ* 15 (juin 1902), p. 340.
- [64] J. FULLER. “Saturn ring seismology : Evidence for stable stratification in the deep interior of Saturn”. Dans : *Icarus* 242 (nov. 2014), p. 283–296.
- [65] J. FULLER, J. LUAN et E. QUATAERT. “Resonance locking as the source of rapid tidal migration in the Jupiter and Saturn moon systems”. Dans : *MNRAS* 458 (juin 2016), p. 3867–3879.
- [66] A. GARCÍA HERNÁNDEZ et al. “Observational $\Delta\nu$ - $\bar{\rho}$ Relation for δ Sct Stars using Eclipsing Binaries and Space Photometry”. Dans : *ApJ Lett.* 811 (oct. 2015), p. L29.
- [67] G. GATEWOOD. “An Astrometric Study of the Binary Star α Ophiuchi”. Dans : *Astron. J.* 130 (août 2005), p. 809–814.
- [68] P. GAULME et al. “Seismology of Giant Planets”. Dans : *ArXiv e-prints* (nov. 2014).
- [69] T. GERKEMA et al. “Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation”. Dans : *Reviews of Geophysics* 46 (mai 2008), p. 2004.
- [70] R. L. GILLILAND et al. “Kepler Asteroseismology Program : Introduction and First Results”. Dans : *Pub. Astron. Soc. Pacific* 122 (fév. 2010), p. 131–143.
- [71] L. GIZON et S. K. SOLANKI. “Determining the Inclination of the Rotation Axis of a Sun-like Star”. Dans : *ApJ* 589 (juin 2003), p. 1009–1019.
- [72] R. GŁĘBOCKI et P. GNACIŃSKI. “VizieR Online Data Catalog : Catalog of Stellar Rotational Velocities (Glebocki+ 2005)”. Dans : *VizieR Online Data Catalog* 3244 (mar. 2005).

- [73] P. GOLDREICH et G. SCHUBERT. “Differential rotation in stars”. Dans : *ApJ* 150 (1967), p. 571.
- [74] J. GOODMAN et C. LACKNER. “Dynamical Tides in Rotating Planets and Stars”. Dans : *ApJ* 696 (mai 2009), p. 2054–2067.
- [75] D. F. GRAY. *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*. Juin 2008.
- [76] H. P. GREENSPAN. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, 1969.
- [77] N. GREVESSE et A. NOELS. “The solar composition”. Dans : *Origin and evolution of the elements*. Sous la dir. de N. PRANTZOS, E. VANGIONI-FLAM et M. CASSÉ. Cambridge Univ. Press, 1993, p. 15–25.
- [78] J. A. GUZIK et al. “Driving the gravity mode pulsations in γ Doradus variables”. Dans : *Preprint 1* (2000), p. 593–615.
- [79] G. HANDLER. “Confirmation of simultaneous p and g mode excitation in HD 8801 and γ Peg from time-resolved multicolour photometry of six candidate ‘hybrid’ pulsators”. Dans : *MNRAS* 398 (sept. 2009), p. 1339–1351.
- [80] M. M. HEDMAN et P. D. NICHOLSON. “Kronoseismology : Using Density Waves in Saturn’s C Ring to Probe the Planet’s Interior”. Dans : *Astron. J.* 146 (juil. 2013), p. 12.
- [81] J. W. T. HESSELS et al. “A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz”. Dans : *Science* 311 (mar. 2006), p. 1901–1904.
- [82] S. HINKLEY et al. “Establishing α Oph as a Prototype Rotator : Improved Astrometric Orbit”. Dans : *ApJ* 726 (jan. 2011), p. 104.
- [83] S. B. HOWELL et al. “The K2 Mission : Characterization and Early Results”. Dans : *Pub. Astron. Soc. Pacific* 126 (avr. 2014), p. 398–408.
- [84] D. HYPOLITE et M. RIEUTORD. “Dynamics of the envelope of a rapidly rotating star or giant planet in gravitational contraction”. Dans : *A&A* 572 (déc. 2014), A15.
- [85] J. JACKIEWICZ et al. “Multichannel Three-Dimensional SOLA Inversion for Local Helioseismology”. Dans : *Solar Phys.* 276 (fév. 2012), p. 19–33.
- [86] J. H. JEANS. “The Stability of a Spherical Nebula”. Dans : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 199 (1902), p. 1–53.
- [87] R. C. JENNISON. “A phase sensitive interferometer technique for the measurement of the Fourier transforms of spatial brightness distributions of small angular extent”. Dans : *MNRAS* 118 (1958), p. 276.
- [88] R. KIPPENHAHN, A. WEIGERT et A. WEISS. *Stellar Structure and Evolution*. Springer, 2012.
- [89] E. KNOBLOCH et H. C. SPRUIT. “The molecular weight barrier and angular momentum transport in radiative stellar interiors”. Dans : *A&A* 125 (août 1983), p. 59–68.
- [90] O. KOCHUKHOV et al. “Line profile variations in rapidly oscillating Ap stars : resolution of the enigma”. Dans : *MNRAS* 376 (avr. 2007), p. 651–672.
- [91] Z. KOPAL. *Close binary systems*. 1959.
- [92] S. G. KORZENNIK et A. EFF-DARWICH. “The rotation rate and its evolution derived from improved mode fitting and inversion methodology”. Dans : *Journal of Physics Conference Series*. T. 271. Journal of Physics Conference Series. Jan. 2011, p. 012067.

- [93] D. KURTZ. “Rapidly oscillating Ap stars”. Dans : *MNRAS* 200 (1982), p. 807.
- [94] D. W. KURTZ. “12.15 Minute Light Variations in Przybylski’s Star, HD 101065”. Dans : *Information Bulletin on Variable Stars* 1436 (juin 1978).
- [95] D. W. KURTZ et al. “Asteroseismic measurement of surface-to-core rotation in a main-sequence A star, KIC 11145123”. Dans : *MNRAS* 444 (oct. 2014), p. 102–116.
- [96] Y. LEBRETON et J. MONTALBÁN. “Stellar ages from asteroseismology”. Dans : *The Ages of Stars*. Sous la dir. d’E. E. MAMAJEK, D. R. SODERBLOM et R. F. G. WYSE. T. 258. IAU Symposium. Juin 2009, p. 419–430.
- [97] P. LEDOUX. “Stellar Stability.” Dans : *Handbuch der Physik* 51 (1958), p. 605.
- [98] P. LEDOUX. “The Nonradial Oscillations of Gaseous Stars and the Problem of Beta Canis Majoris.” Dans : *ApJ* 114 (nov. 1951), p. 373.
- [99] U. LEE et H. SAIO. “Low-Frequency Nonradial Oscillations in Rotating Stars. I. Angular Dependence”. Dans : *ApJ* 491 (déc. 1997), p. 839–845.
- [100] R. B. LEIGHTON, R. W. NOYES et G. W. SIMON. “Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.” Dans : *ApJ* 135 (mar. 1962), p. 474.
- [101] F. LIGNIÈRES, F. CALIFANO et A. MANGENY. “Shear layer instability in a highly diffusive stably stratified atmosphere”. Dans : *A&A* 349 (1999), p. 1027–1036.
- [102] F. LIGNIÈRES et B. GEORGEOT. “Asymptotic analysis of high-frequency acoustic modes in rapidly rotating stars”. Dans : *A&A* 500 (juin 2009), p. 1173–1192.
- [103] F. LIGNIÈRES, M. RIEUTORD et D. REESE. “Acoustic oscillations of rapidly rotating polytropic stars. I. Effects of the centrifugal distortion”. Dans : *A&A* 455 (août 2006), p. 607–620.
- [104] A. MAEDER. “Stellar evolution with rotation IV : von Zeipel’s theorem and anisotropic losses of mass and angular momentum”. Dans : *A&A* 347 (juil. 1999), p. 185–193.
- [105] A. MAEDER, C. GEORGY et G. MEYNET. “Convective envelopes in rotating OB stars”. Dans : *A&A* 479 (fév. 2008), p. L37–L40.
- [106] A. MAEDER et J. P. ZAHN. “Stellar evolution with rotation. III. Meridional circulation with μ -gradients and non-stationarity”. Dans : *A&A* 334 (1998), p. 1000–1006.
- [107] S. A. MASLOWE. “Critical layers in shear flows”. Dans : *Annual Review of Fluid Mechanics* 18 (1986), p. 405–432.
- [108] P. F. L. MAXTED, A. M. SERENELLI et J. SOUTHWORTH. “Comparison of gyrochronological and isochronal age estimates for transiting exoplanet host stars”. Dans : *A&A* 577 (mai 2015), A90.
- [109] J. E. MCCLINTOCK et al. “The Spin of the Near-Extreme Kerr Black Hole GRS 1915+105”. Dans : *ApJ* 652 (nov. 2006), p. 518–539.
- [110] S. MEIBOM et al. “A spin-down clock for cool stars from observations of a 2.5-billion-year-old cluster”. Dans : *Nature* 517 (jan. 2015), p. 589–591.
- [111] S. MESSINA et E. F. GUINAN. “Magnetic activity of six young solar analogues II. Surface Differential Rotation from long-term photometry”. Dans : *A&A* 409 (oct. 2003), p. 1017–1030.

- [112] G. MEYNET et A. MAEDER. “Stellar evolution with rotation. I. The computational method and the inhibiting effect of the μ -gradient.” Dans : *A&A* 321 (mai 1997), p. 465–476.
- [113] A. MIGLIO et al. “Probing the properties of convective cores through g modes : high-order g modes in SPB and γ Doradus stars”. Dans : *MNRAS* 386 (mai 2008), p. 1487–1502.
- [114] G. MIROUH et al. “Asteroseismology of fast-rotating stars : the example of α Ophiuchi”. Dans : *Precision Asteroseismology*. Sous la dir. de W. CHAPLIN et al. T. 865. IAU Symposium 301. 2013, 1, astro-ph/.
- [115] G. M. MIROUH et al. “Gravito-inertial waves in a differentially rotating spherical shell”. Dans : *J. Fluid Mech.* 800 (août 2016), p. 213–247.
- [116] J. D. MONNIER. “An Introduction to Closure Phases”. Dans : *Principles of Long Baseline Stellar Interferometry*. Sous la dir. de P. R. LAWSON. 2000, p. 203.
- [117] J. D. MONNIER et al. “Imaging the Surface of Altair”. Dans : *Science* 317 (juil. 2007), p. 342.
- [118] J. D. MONNIER et al. “Rotationally Modulated g-modes in the Rapidly Rotating δ Scuti Star Rasalhague (α Ophiuchi)”. Dans : *ApJ* 725 (déc. 2010), p. 1192–1201.
- [119] E. MORAVVEJL. “The impact of enhanced iron opacity on massive star pulsations : updated instability strips”. Dans : *MNRAS* 455 (jan. 2016), p. L67–L71.
- [120] B. MOSSER et al. “Mixed modes in red giants : a window on stellar evolution”. Dans : *A&A* 572 (déc. 2014), p. L5.
- [121] B. MOSSER et al. “Red-giant seismic properties analyzed with CoRoT”. Dans : *A&A* 517 (juil. 2010), A22.
- [122] N. MOWLAVI et al. “Stellar variability in open clusters. I. A new class of variable stars in NGC 3766”. Dans : *A&A* 554 (juin 2013), A108.
- [123] G. OGILVIE. “Tidal dissipation in rotating fluid bodies : a simplified model”. Dans : *MNRAS* 396 (2009), p. 794–806.
- [124] G. I. OGILVIE. “Tidal Dissipation in Stars and Giant Planets”. Dans : *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 52 (août 2014), p. 171–210.
- [125] G. I. OGILVIE et D. N. C. LIN. “Tidal Dissipation in Rotating Giant Planets”. Dans : *ApJ* 610 (juil. 2004), p. 477–509.
- [126] R.-M. OUAZZANI, I. W. ROXBURGH et M.-A. DUPRET. “Pulsations of rapidly rotating stars. II. Realistic modelling for intermediate-mass stars”. Dans : *A&A* 579 (juil. 2015), A116.
- [127] R.-M. OUAZZANI et al. “A new asteroseismic diagnostic for internal rotation in γ Doradus stars”. Dans : *MNRAS* 465 (fév. 2017), p. 2294–2309.
- [128] P. I. PÁPICS et al. “CoRoT high-precision photometry of the B0.5 IV star HD 51756”. Dans : *A&A* 528 (avr. 2011), A123.
- [129] W. D. PESNELL. “A new driving mechanism for stellar pulsations”. Dans : *ApJ* 314 (1987), p. 598–604.
- [130] D. M. PETERSON et al. “Vega is a rapidly rotating star”. Dans : *Nature* 440 (avr. 2006b), p. 896–899.

- [131] A. T. POTTER. “Rotation and magnetism in massive stars”. Thèse de doct. University of Cambridge, mai 2012.
- [132] H. RAUER et al. “The PLATO 2.0 mission”. Dans : *Experimental Astronomy* 38 (nov. 2014), p. 249–330.
- [133] D. REESE. “La modélisation des oscillations d’étoiles en rotation rapide”. Thèse de doct. Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2006.
- [134] D. REESE, F. LIGNIÈRES et M. RIEUTORD. “Acoustic oscillations in rapidly rotating polytropic stars; II. Effects of the Coriolis and centrifugal accelerations”. Dans : *A&A* 455 (2006), p. 621–637.
- [135] D. REESE, F. LIGNIÈRES et M. RIEUTORD. “Regular patterns in the acoustic spectrum of rapidly rotating stars”. Dans : *A&A* 481 (avr. 2008), p. 449–452.
- [136] D. R. REESE et al. “Mode visibilities in rapidly rotating stars”. Dans : *A&A* 550 (fév. 2013), A77.
- [137] D. R. REESE et al. “Pulsation modes in rapidly rotating stellar models based on the self-consistent field method”. Dans : *A&A* 506 (oct. 2009), p. 189–201.
- [138] A. REINERS et J. H. M. M. SCHMITT. “On the feasibility of the detection of differential rotation in stellar absorption profiles”. Dans : *A&A* 384 (mar. 2002), p. 155–162.
- [139] A. REINERS, J. H. M. M. SCHMITT et M. KÜRSTER. “Detection of differential rotation in psi Cap with profile analysis”. Dans : *A&A* 376 (sept. 2001), p. L13–L16.
- [140] J. B. RICE. “Doppler imaging of stellar surfaces - techniques and issues”. Dans : *Astron. Nachr.* 323 (juil. 2002), p. 220–235.
- [141] O. RICHARD, S. THÉADO et S. VAUCLAIR. “Updated Toulouse solar models including the diffusion-circulation coupling and the effect of μ -gradients”. Dans : *Solar Phys.* 220 (avr. 2004), p. 243–259.
- [142] G. R. RICKER. “The Transiting Exoplanet Survey Satellite Mission”. Dans : *Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)* 42 (juin 2014), p. 234.
- [143] M. RIEUTORD. “Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. I. Steady flows”. Dans : *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 39 (1987), p. 163.
- [144] M. RIEUTORD. “The dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars. I. A spherical Boussinesq model”. Dans : *A&A* 451 (2006), p. 1025–1036.
- [145] M. RIEUTORD. “The solar dynamo”. Dans : *C. R. Physique* 9 (2008), p. 757–765.
- [146] M. RIEUTORD et A. BETH. “Dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars : Effects of spin-down driven by mass loss”. Dans : *A&A* 570 (oct. 2014), A42.
- [147] M. RIEUTORD et F. ESPINOSA LARA. “Ab Initio Modelling of Steady Rotating Stars”. Dans : *Studying Stellar Rotation and Convection*. Sous la dir. de M. GOUPIL et al. T. 865. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag. 2013, p. 49–73.
- [148] M. RIEUTORD, F. ESPINOSA LARA et B. PUTIGNY. “An algorithm for computing the 2D structure of fast rotating stars”. Dans : *Journal of Computational Physics* 318 (août 2016), p. 277–304.

- [149] M. RIEUTORD, B. GEORGEOT et L. VALDETTARO. “Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum”. Dans : *J. Fluid Mech.* 435 (2001), p. 103–144.
- [150] M. RIEUTORD, B. GEORGEOT et L. VALDETTARO. “Waves attractors in rotating fluids : a paradigm for ill-posed Cauchy problems”. Dans : *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), p. 4277–4280.
- [151] M. RIEUTORD et L. VALDETTARO. “Inertial waves in a rotating spherical shell”. Dans : *J. Fluid Mech.* 341 (1997), p. 77–99.
- [152] M. RIEUTORD et L. VALDETTARO. “Viscous dissipation by tidally forced inertial modes in a rotating spherical shell”. Dans : *J. Fluid Mech.* 643 (2010), p. 363–394.
- [153] M. RIEUTORD et al. “The ESTER project”. Dans : *SF2A-2005 : Semaine de l’Astrophysique Française*. Sous la dir. de F. CASOLI et al. Déc. 2005, p. 759.
- [154] T. RIVINIUS, A. C. CARCIOFI et C. MARTAYAN. “Classical Be stars. Rapidly rotating B stars with viscous Keplerian decretion disks”. Dans : *"Astron. & Astrophys. Rev."* 21 (oct. 2013), p. 69.
- [155] E. RODRÍGUEZ, M. J. LÓPEZ-GONZÁLEZ et P. LÓPEZ DE COCA. “A revised catalogue of delta Sct stars”. Dans : *A & A Suppl. Ser.* 144 (juin 2000), p. 469–474.
- [156] R. M. ROETTENBACHER et al. “No Sun-like dynamo on the active star ζ Andromedae from starspot asymmetry”. Dans : *Nature* 533 (mai 2016), p. 217–220.
- [157] F. J. ROGERS, F. J. SWENSON et C. A. IGLESIAS. “OPAL Equation-of-State Tables for Astrophysical Applications”. Dans : *ApJ* 456 (jan. 1996), p. 902.
- [158] F. ROYER. “On the Rotation of A-Type Stars”. Dans : *The Rotation of Sun and Stars*. Sous la dir. de J.-P. ROZELOT et C. NEINER. T. 765. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag. 2009, p. 207–230.
- [159] H. SAIO. “Rotational and tidal perturbations of nonradial oscillations in a polytropic star”. Dans : *ApJ* 244 (fév. 1981), p. 299–315.
- [160] H. SAIO et al. “Asteroseismic measurement of slow, nearly uniform surface-to-core rotation in the main-sequence F star KIC 9244992”. Dans : *MNRAS* 447 (mar. 2015), p. 3264–3277.
- [161] S. J. A. J. SALMON et al. “The puzzling new class of variable stars in NGC 3766 : old friend pulsators?” Dans : *A&A* 569 (sept. 2014), A18.
- [162] C. SCHEINER. *Rosa Ursina*. 1630.
- [163] J. SCHOUB et al. “Helioseismic Studies of Differential Rotation in the Solar Envelope by the Solar Oscillations Investigation Using the Michelson Doppler Imager”. Dans : *ApJ* 505 (sept. 1998), p. 390–417.
- [164] M. SEMEL. “Zeeman-Doppler imaging of active stars. I - Basic principles”. Dans : *A&A* 225 (nov. 1989), p. 456–466.
- [165] A. SKUMANICH. “Time Scales for CA II Emission Decay, Rotational Braking, and Lithium Depletion”. Dans : *ApJ* 171 (fév. 1972), p. 565.
- [166] M. A. SMITH. “Nonradial pulsations in early to mid-B stars”. Dans : *ApJ* 215 (juil. 1977), p. 574–583.

- [167] D. STELLO et al. “Asteroseismic Classification of Stellar Populations among 13,000 Red Giants Observed by Kepler”. Dans : *ApJ Lett.* 765 (mar. 2013), p. L41.
- [168] J. C. SUÁREZ, H. BRUNTT et D. BUZASI. “Modelling of the fast rotating δ Scuti star Altair”. Dans : *A&A* 438 (août 2005), p. 633–641.
- [169] M. TAKATA et H. SAIO. “Rosette Modes of Oscillations of Rotating Stars Caused by Close Degeneracies. I. Axisymmetric Modes”. Dans : *Pub. Astron. Soc. Jap.* 65 (juin 2013).
- [170] Y. TAKEDA, S. KAWANOMOTO et N. OHISHI. “Rotational Feature of Vega Revealed from Spectral Line Profiles”. Dans : *ApJ* 678 (mai 2008), p. 446–462.
- [171] M. TASSOUL. “Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations”. Dans : *Astrophys. J. Supp. Ser.* 43 (1980), p. 469–490.
- [172] W. UNNO et al. *Nonradial oscillations of stars*. University of Tokyo Press, 1989.
- [173] L. VALDETTARO et al. “Convergence and round-off errors in a two-dimensional eigenvalue problem using spectral methods and Arnoldi-Chebyshev algorithm”. Dans : *J. Comput. and Applied Math.* 205 (2007), p. 382–393.
- [174] G. T. VAN BELLE. “Interferometric observations of rapidly rotating stars”. Dans : *The Astronomy and Astrophysics Review* 20 (mar. 2012), p. 51.
- [175] T. VAN REETH et al. “Gravity-mode Period Spacings as a Seismic Diagnostic for a Sample of γ Doradus Stars from Kepler Space Photometry and High-resolution Ground-based Spectroscopy”. Dans : *Astrophys. J. Supp. Ser.* 218 (juin 2015), p. 27.
- [176] H. VOGT. “Zum Strahlungsgleichgewicht der Sterne”. Dans : *Astronomische Nachrichten* 223 (jan. 1925), p. 229.
- [177] H. VON ZEIPEL. “The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses”. Dans : *MNRAS* 84 (juin 1924), p. 665–683.
- [178] H. VON ZEIPEL. “Zum Strahlungsgleichgewicht der Sterne”. Dans : *Probleme der Astronomie (Festschrift für H. von Seeliger)*. Springer, 1924, p. 144–152.
- [179] G. WALKER et al. “The MOST Asteroseismology Mission : Ultraprecise Photometry from Space”. Dans : *Pub. Astron. Soc. Pacific* 115 (sept. 2003), p. 1023–1035.
- [180] W. W. WEISS et al. “BRITTE-Constellation : Nanosatellites for Precision Photometry of Bright Stars”. Dans : *Pub. Astron. Soc. Pacific* 126 (juin 2014), p. 573–585.
- [181] J. YOON et al. “A New View of Vega’s Composition, Mass, and Age”. Dans : *ApJ* 708 (jan. 2010), p. 71–79.
- [182] J.-P. ZAHN. “Circulation and turbulence in rotating stars”. Dans : *A&A* 265 (1992), p. 115.
- [183] J.-P. ZAHN. “Instabilities and turbulence in rotating stars.” Dans : *Astrophysical Fluid Dynamics - Les Houches 1987*. Sous la dir. de J.-P. ZAHN et J. ZINN-JUSTIN. 1993, p. 561–615.
- [184] J.-P. ZAHN. “Rotational instabilities and stellar evolution”. Dans : *IAU Symp. 59 : Stellar Instability and Evolution*. 1974, p. 185–194.
- [185] M. ZHAO et al. “Imaging and Modeling Rapidly Rotating Stars : α Cephei and α Ophiuchi”. Dans : *ApJ* 701 (août 2009), p. 209–224.

-
- [186] S. A. ZHEVAKIN. “Physical Basis of the Pulsation Theory of Variable Stars”. Dans : *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1 (1963), p. 367.
- [187] W. ZIMA. “A new method for the spectroscopic identification of stellar non-radial pulsation modes. I. The method and numerical tests”. Dans : *A&A* 455 (août 2006), p. 227–234.
- [188] J. ZOREC et F. ROYER. “Rotational velocities of A-type stars. IV. Evolution of rotational velocities”. Dans : *A&A* 537 (jan. 2012), A120.
- [189] D. ZWILLINGER. *Handbook of differential equations*. Academic Press, 1992.

Annexes

A

Outils mathématiques

A.1 Harmoniques sphériques

Cette annexe présente les outils mathématiques de base utilisés pour l'étude des oscillations stellaires, et tout au long de notre exposé. Il s'agit des harmoniques sphériques et les polynômes de Tchebyshev.

A.1.1 Définition

Les harmoniques sphériques sont des fonctions de la colatitude θ et de l'azimut ϕ , indexées par deux entiers ℓ et m , respectivement appelés degré de l'harmonique et ordre azimutal, lesquels vérifient $\ell \geq 0$ et $-\ell \leq m \leq \ell$.

Les harmoniques sphériques servent à représenter les champs scalaires sous la forme

$$\rho(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \rho_m^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.1})$$

où Y_{ℓ}^m sont les harmoniques sphériques normalisées. Ces quantités sont définies à partir des polynômes de Legendre comme suit :

$$Y_{\ell}^m = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.2})$$

où l'on rappelle la définition des fonctions $P_{\ell}^{|m|}$,

$$P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_{\ell}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \quad \text{avec} \quad P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}(x^2 - 1)}{dx^{\ell}}. \quad (\text{A.3})$$

Les harmoniques sphériques forment une base orthonormale et vérifient donc

$$\int_{4\pi} Y_{\ell}^m \{Y_{\ell'}^{m'}\}^* d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta^{mm'}, \quad (\text{A.4})$$

où $\delta_{\ell\ell'}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si $\ell = \ell'$ et 0 sinon. Elles peuvent être représentées sur la sphère unité, comme dans la figure A.1. On remarque alors que :

- le nombre ℓ correspond au nombre total de lignes nodales ;
- le nombre $|m|$ au nombre de ces lignes nodales passant par les pôles : ainsi, $|m|$ est le nombre de méridiens définis par l'harmonique sphérique (le nombre de nœuds pour $0 \leq \phi < \pi$ le long d'un parallèle) ;

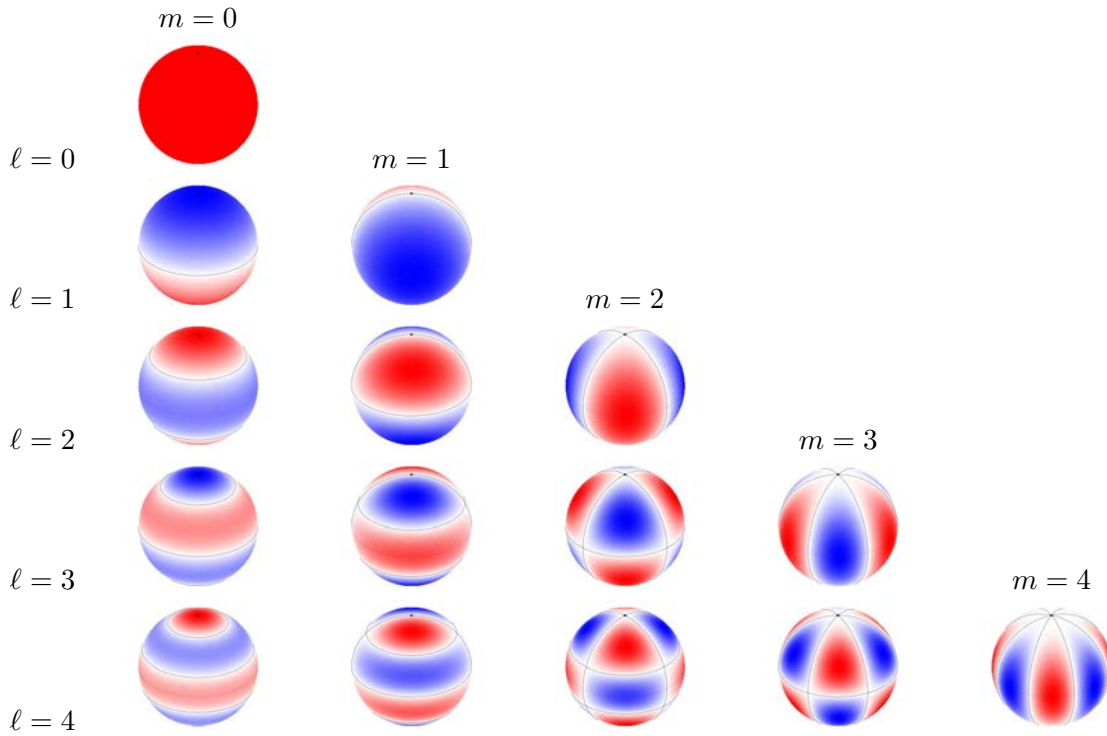


FIGURE A.1 – Partie réelle des premières harmoniques sphériques Y_ℓ^m à $\ell \leq 4$, sur la sphère unité, pour une inclinaison de 60° . Sur chaque miniature, le pôle est indiqué par un point noir, l'équateur par une ligne pointillée, et les lignes nodales par des lignes continues. Les zones rouges et bleues correspondent aux valeurs positives et négatives, respectivement.

- $\ell - |m|$ est le nombre de parallèles (le nombre de nœuds pour $0 \leq \theta < \pi$ le long d'un méridien) ;
- le signe de m définit quant à lui la direction de propagation de l'onde autour de l'axe de rotation.

Les champs vectoriels sont quant à eux exprimés comme

$$\mathbf{v}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(u_m^\ell \mathbf{R}_\ell^m + v_m^\ell \mathbf{S}_\ell^m + w_m^\ell \mathbf{T}_\ell^m \right), \quad (\text{A.5})$$

où l'on définit les harmoniques sphériques dites vectorielles

$$\mathbf{R}_\ell^m = Y_\ell^m \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_\ell^m = \nabla Y_\ell^m, \quad \mathbf{T}_\ell^m = \nabla \times \mathbf{R}_\ell^m. \quad (\text{A.6})$$

Ces quantités vérifient des propriétés d'orthogonalité

$$\int_{4\pi} \mathbf{R}_\ell^m \{ \mathbf{R}_{\ell'}^{m'} \}^* d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta^{mm'}, \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{4\pi} \mathbf{S}_\ell^m \{ \mathbf{S}_{\ell'}^{m'} \}^* d\Omega = \int_{4\pi} \mathbf{T}_\ell^m \{ \mathbf{T}_{\ell'}^{m'} \}^* d\Omega = \ell(\ell+1) \delta_{\ell\ell'} \delta^{mm'}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int_{4\pi} \mathbf{R}_\ell^m \{ \mathbf{S}_{\ell'}^{m'} \}^* d\Omega = \int_{4\pi} \mathbf{S}_\ell^m \{ \mathbf{T}_{\ell'}^{m'} \}^* d\Omega = \int_{4\pi} \mathbf{T}_\ell^m \{ \mathbf{R}_{\ell'}^{m'} \}^* d\Omega = 0. \quad (\text{A.9})$$

A.1.2 Formulaire

Les harmoniques sphériques vérifient plusieurs équations que l'on utilise pour simplifier les équations de la mécanique des fluides. Notamment, les harmoniques sphériques Y_ℓ^m vérifient les équations

$$\partial_{\theta\theta}^2 Y_\ell^m + \cot\theta \partial_\theta Y_\ell^m + D_\phi^2 Y_\ell^m = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m, \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_\theta D_\phi Y_\ell^m + \cot\theta D_\phi Y_\ell^m - D_\phi \partial_\theta Y_\ell^m = 0, \quad (\text{A.11})$$

où l'on définit l'opérateur $D_\phi = \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi$.

En explicitant la définition des harmoniques sphériques vectorielles, il vient

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\ell^m = Y_\ell^m \mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_\ell^m = \partial_\theta Y_\ell^m \mathbf{e}_\theta + D_\phi Y_\ell^m \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{T}_\ell^m = D_\phi Y_\ell^m \mathbf{e}_\theta - \partial_\theta Y_\ell^m \mathbf{e}_\phi, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_m^\ell Y_\ell^m \\ v_m^\ell \partial_\theta Y_\ell^m + w_m^\ell D_\phi Y_\ell^m \\ v_m^\ell D_\phi Y_\ell^m - w_m^\ell \partial_\theta Y_\ell^m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Il existe aussi des relations de composition introduisant des couplages entre harmoniques de différents degrés dans nos équations. Ainsi,

$$\cos\theta Y_\ell^m = \ell^2 A(\ell, m) Y_{\ell-1}^m + (\ell+1)^2 A(\ell+1, m) Y_{\ell+1}^m, \quad (\text{A.13})$$

$$\sin\theta \partial_\theta Y_\ell^m = \frac{B(\ell, m)}{\ell+1} Y_{\ell-1}^m + \frac{B(\ell+1, m)}{\ell} Y_{\ell+1}^m, \quad (\text{A.14})$$

où les coefficients de couplage sont donnés par

$$A(\ell, m) = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad B(\ell, m) = \ell^2 (\ell^2 - 1) A(\ell, m). \quad (\text{A.15})$$

A.2 Polynômes de Tchebychev

A.2.1 Définition

Les polynômes de Tchebychev T_n sont définis tels que

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta) \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.16})$$

Chaque polynôme T_n est de degré n . Il est par ailleurs solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \quad (\text{A.17})$$

On peut construire ces polynômes par récurrence à l'aide de la relation

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) & (A.18) \\ \text{avec } T_0(x) &= 1 \\ \text{et } T_1(x) &= x. \end{aligned}$$

A.2.2 Propriétés

Les polynômes de Tchebychev ont de nombreuses propriétés mathématiques, dont les plus importantes ici sont les suivantes :

- l'ensemble des polynômes $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$;
- les n racines x_k du polynôme T_n sont réelles, distinctes et appartiennent à l'intervalle $] -1, 1[$, à savoir $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ avec $k = 1, \dots, n$;
- le polynôme T_n est de même parité que n .

A.2.3 Exemples

Par récurrence, on construit aisément les premiers polynômes de Tchebychev (listés ci-après). Une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 1]$ des premiers polynômes est donné figure A.2.

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, & T_1 &= x, & T_2 &= 2x^2 - 1 \\ T_3 &= 4x^3 - 3x, & T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

On remarque que lorsque l'ordre du polynôme augmente, les racines se concentrent aux extrémités de l'intervalle de définition. Ainsi, lorsque l'on projette les quantités de structure sur une grille de collocation de Gauss-Lobatto-Tchebychev, la résolution est concentrée près des interfaces entre domaines, où l'on attend les variations les plus significatives.

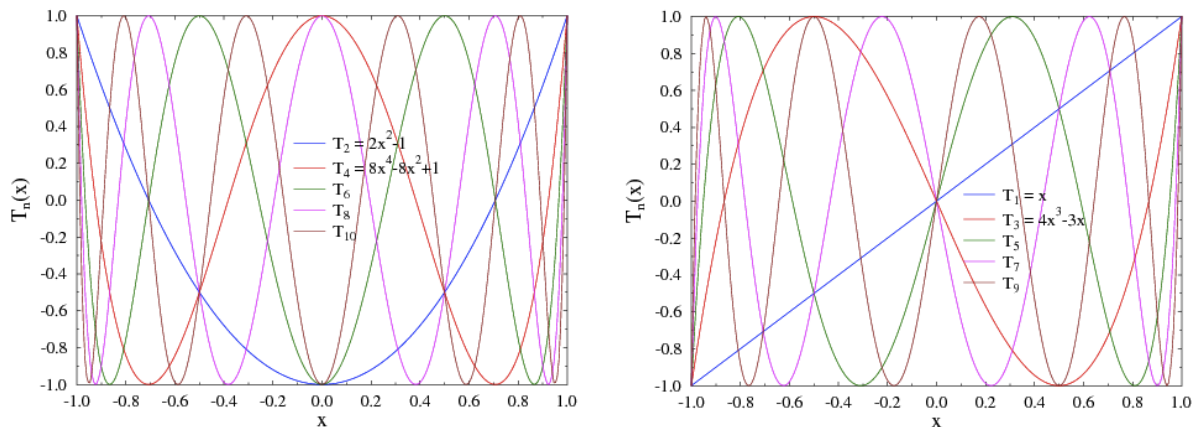


FIGURE A.2 – Premiers polynômes de Tchebychev, d'ordre pair à gauche, impair à droite.

B

Calculs dans la limite non-dissipative

Dans cette annexe, je décris certains calculs techniques, laissés hors du texte principal par souci de clarté de l'exposé.

B.1 Calcul de l'opérateur de Poincaré généralisé

On commence par le calcul complet de l'opérateur de Poincaré généralisé défini en section 3.1.3.

L'équation du mouvement, sans viscosité ni diffusivité thermique, s'écrit

$$\partial_t \mathbf{v} + \Omega \partial_\phi \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + s(\mathbf{v} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + N^2 T r \mathbf{e}_r. \quad (\text{B.1})$$

où l'on utilise les coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) et les vecteurs unitaires associés, mais aussi le rayon $r = \sqrt{s^2 + z^2}$ et $\mathbf{e}_r = \sin \theta \mathbf{e}_s + \cos \theta \mathbf{e}_z$. Ω est la vitesse angulaire du fluide, ρ_0 sa densité et N^2 la fréquence de Brunt-Väisälä. Les quantités \mathbf{v} , P et T sont les perturbations de vitesse, pression et température, respectivement.

On remplace les dérivées temporelles dans l'équation $\partial_t = i\omega$, et l'on définit $\tilde{\omega} = \omega + m\Omega$. L'équation de la chaleur devient alors

$$T = -\frac{ru_r}{i\tilde{\omega}}. \quad (\text{B.2})$$

En projetant (B.1) sur la base $(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$, en utilisant $\mathbf{e}_r = \sin \theta \mathbf{e}_s + \cos \theta \mathbf{e}_z$, et $r \cos \theta = z$, $r \sin \theta = s$, on obtient

$$i\tilde{\omega}u_s - 2\Omega u_\phi = -\partial_s p - \frac{N^2}{i\tilde{\omega}} (s^2 u_s + sz u_z), \quad (\text{B.3})$$

$$i\tilde{\omega}u_\phi + 2\Omega u_s + s\partial_s \Omega u_s + s\partial_z \Omega u_z = -\frac{imp}{s}, \quad (\text{B.4})$$

$$i\tilde{\omega}u_z = -\partial_z p - \frac{N^2}{i\tilde{\omega}} (sz u_s + z^2 u_z). \quad (\text{B.5})$$

On combine les équations (B.3) et (B.5) afin d'obtenir

$$u_z = \frac{i\tilde{\omega} \partial_z p + N^2 sz u_s}{\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$u_\phi = \frac{1}{2\Omega} \left[\frac{i\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 - N^2 r^2)}{\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2} u_s + \frac{N^2 sz}{\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2} \partial_z p + \partial_s p \right]. \quad (\text{B.7})$$

On remplace u_z et u_ϕ dans (B.4), il vient

$$u_s = - \frac{i\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2)}{A_s(\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2) - \tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - N^2 r^2) + A_z N^2 s z} \times \left[\frac{N^2 s z + A_z}{\tilde{\omega}^2 - N^2 z^2} \partial_z p + \partial_s p - \frac{2im\Omega}{i\tilde{\omega}_s} p \right], \quad (\text{B.8})$$

avec

$$A_s = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 \Omega) \quad \text{and} \quad A_z = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial}{\partial z} (s^2 \Omega). \quad (\text{B.9})$$

En injectant les composantes de la vitesse dans l'équation de conservation de la masse $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, et en gardant uniquement les termes du second ordre, on obtient enfin l'équation (3.19) :

$$(N^2 z^2 - \tilde{\omega}^2) \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} - (2N^2 s z + A_z) \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial z} + (A_s + N^2 s^2 - \tilde{\omega}^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{B.10})$$

B.2 Relation de dispersion, vitesses de groupe et de phase

À partir de l'opérateur de Poincaré généralisé (3.19), il est possible de déduire la relation de dispersion suivante pour les modes gravito-inertiels :

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\mathcal{B}^2}{k^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{B} = \left[N^2 (k_s z - k_z s)^2 + k_z^2 A_s - k_s k_z A_z \right]^{1/2}, \quad (\text{B.11})$$

où $\mathbf{k} = k_s \mathbf{e}_s + k_z \mathbf{e}_z$ est le vecteur d'onde, et $k = \sqrt{k_s^2 + k_z^2}$ sa norme. L'équation (B.11) se réduit à l'équation (A.7) de BARUTEAU et RIEUTORD (2013) dans le cas sans stratification ($N^2 = 0$). De cette équation découlent les expressions des vitesses de phase \mathbf{v}_p et de groupe \mathbf{v}_g dans le référentiel tournant, respectivement

$$\mathbf{v}_p = \pm \frac{\mathcal{B} \mathbf{k}}{k^3}, \quad (\text{B.12})$$

et

$$\mathbf{v}_g = \pm \frac{1}{k^3} \left[\left(k^2 \frac{d\mathcal{B}}{dk_s} - k_s \mathcal{B} \right) \mathbf{e}_s + \left(k^2 \frac{d\mathcal{B}}{dk_z} - k_z \mathcal{B} \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (\text{B.13})$$

La relation de dispersion indique également le comportement d'une onde près de la couche critique. Par définition, à l'approche de la résonance de corotation, $\tilde{\omega} \rightarrow 0$: ceci est possible si $k \rightarrow \infty$, ou bien si $\mathcal{B} \rightarrow 0$.

- si $k \rightarrow \infty$ pour des valeurs finies de k_z , alors $\mathbf{v}_p = 0$ et $\mathbf{v}_g = 0$, et les ondes gravito-inertielles ne traversent pas le rayon de corotation. Ceci est le cas quand la corotation ne traverse pas le domaine hyperbolique : dans ce cas la corotation rejoint tout de même la surface de retournement sur l'équateur et influence les modes. Les caractéristiques s'approchent de la corotation en devenant de plus en plus verticales ($k_s \rightarrow 0$) mais ne l'atteignent donc jamais rigoureusement, et l'onde est dissipée.
- si $\mathcal{B} \rightarrow 0$, alors $\mathbf{v}_p \rightarrow 0$ mais $\mathbf{v}_g \neq 0$ dans le cas général. Il est en effet difficile de vérifier où \mathbf{v}_g s'annule à partir de son expression (B.13), puisque celle-ci fait intervenir s, z, k_s, k_z, N^2 et leurs dérivées. Cependant, les modes propres que l'on calcule peuvent systématiquement la traverser la corotation, indiquant que le domaine de paramètre étudié correspond bien au cas $\mathbf{v}_g \neq 0$.

Comme on l'explique dans le chapitre 3.4.4, on s'attend à des effets non-linéaires dans les deux cas présentés ici.

B.3 Classification des modes gravito-inertiels

On a défini les modes H et HT au chapitre 3.2.1 comme étant les modes pouvant se propager dans toute la coquille sphérique, ou ceux étant confinés à un sous-domaine de celle-ci, respectivement.

Afin de juger de leur répartition dans l'espace des paramètres à deux dimensions (N^2, ω) , on cherche à savoir si le discriminant de l'opérateur de Poincaré Δ s'annule quelque part dans la coquille, pour des valeurs de N^2 et ω fixées. Nous procédons de deux manières. D'abord, par l'approche « brutale » consistant à discrétiser l'espace des paramètres, et pour chaque valeur de (N^2, ω) calculer le signe de Δ sur une grille à l'intérieur de la coquille.

Nous comparons cette approche au résultat donné à une résolution analytique de l'équation $\Delta = 0$. On reprend l'expression de (3.22), en faisant explicitement apparaître le rayon r et la colatitude θ . L'équation $\Delta = 0$ devient alors, dans le repère en corotation avec l'étoile

$$\tilde{\omega}^4 - (4\Omega^2 + N^2 r^2)\tilde{\omega}^2 + 4\Omega^2 N^2 r^2 = 2\Omega N^2 r^2 (2\Omega - \tilde{\omega}^2) \sin^2 \theta - 5\Omega N^4 r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (\text{B.14})$$

Cette équation non-linéaire implicite permet de décrire la forme des surfaces de retournement projetées sur le plan méridien. La solution générale est difficile à obtenir, mais il est possible d'obtenir une description assez précise en résolvant l'équation (B.14) à certains endroits de la coquille. Pour ce faire, nous choisissons les pôles et l'équateur sur les limites interne et externe de la coquille, c'est-à-dire les points à $r = 1$ ou $r = \eta$, et $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$. Ce faisant, nous obtenons les relations suivantes reliant ω dans le repère fixe et N :

- à $\sin^2 \theta(1) = 0$: $\omega = -m \pm 2$ ou $\omega = -m \pm N$, (B.15)

- à $\sin^2 \theta(\eta) = 0$: $\omega = -m\Omega(\eta) \pm N\eta$ ou $\omega = (-m \pm 2)\Omega(\eta)$, (B.16)

- à $\sin^2 \theta(1) = 1$: $\omega = -m \pm \sqrt{4 - N^2}$, (B.17)

- à $\sin^2 \theta(\eta) = 1$: $\omega = -m\Omega(\eta) \pm \sqrt{N^2 \eta^2 (1 - 2\Omega(\eta)) + 4\Omega(\eta)^2}$. (B.18)

Nous avons utilisé le repère fixe ici, afin de faire explicitement apparaître l'ordre azimutal du mode, m . Nous allons donc discuter ces résultats selon les valeurs de cet ordre azimutal.

B.3.1 Modes axisymétriques

Pour les modes axisymétriques, les différentes géométries sont présentées en figure 3.1 et discutées dans le texte principal. La figure montre les différentes régions de l'espace des paramètres pour $m = 0$ et $\eta = 0,35$. Les frontières tracées en violet sont alors obtenues via les équations

- à $\sin^2 \theta(1) = 0$: $\omega = 2$ ou $\omega = N$, (B.19)

- à $\sin^2 \theta(\eta) = 0$: $\omega = N\eta$ ou $\omega = 2\Omega(\eta) = 2 - N^2(1 - \eta^2)$, (B.20)

- à $\sin^2 \theta(1) = 1$: $\omega = \sqrt{4 - N^2}$, (B.21)

- à $\sin^2 \theta(\eta) = 1$: $\omega = \sqrt{N^2 \eta^2 (1 - 2\Omega(\eta)) + 4\Omega(\eta)^2}$. (B.22)

On remarque qu'à $m = 0$, il n'y a aucune différence entre les modes à $\omega > 0$ ou $\omega < 0$, si bien que la carte présentée est symétrique par rapport à $\omega = 0$.

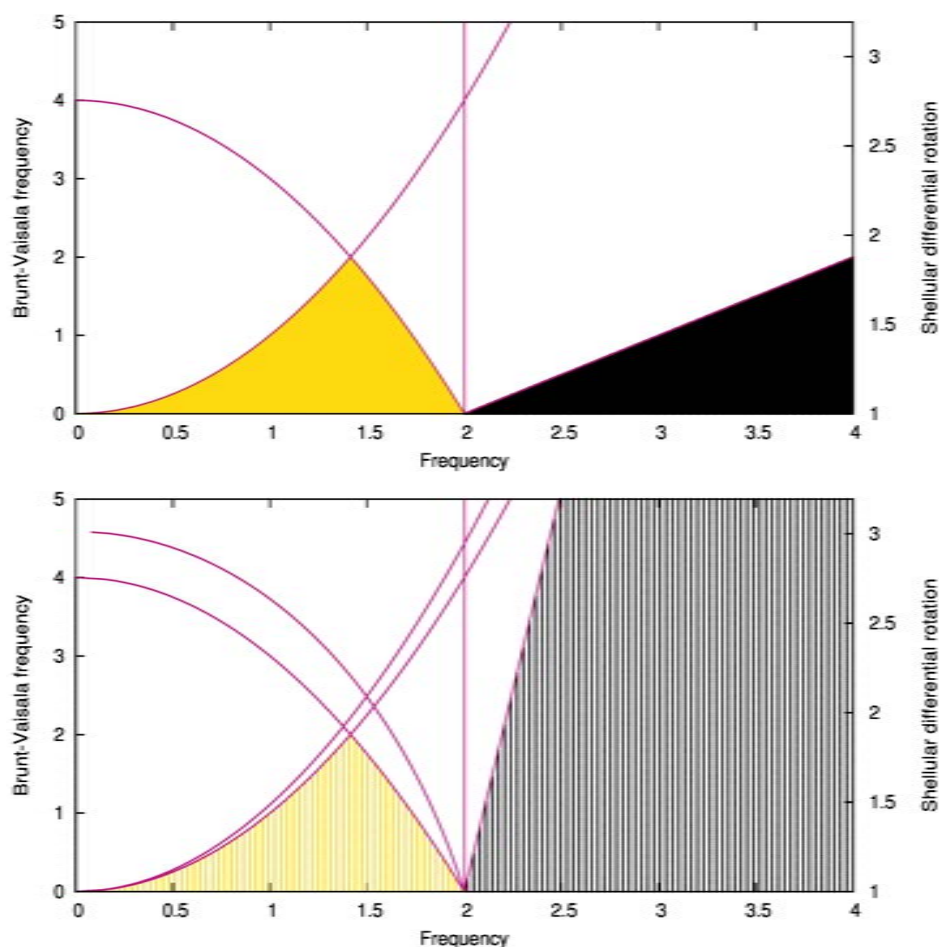


FIGURE B.1 – Même graphe que dans la figure 3.1 à $\eta = 0$ (c'est-à-dire la sphère pleine, en haut) et $\eta = 0,95$ (en bas).

Influence du rapport d'aspect

Il est possible de faire varier le rapport d'aspect η afin de voir comment la carte est modifiée : les résultats sont montrés pour $\eta = 0$ et $\eta = 0,95$ en figure B.1. Ces deux valeurs du rapport d'aspect sont extrêmes. Le premier cas correspond à la sphère pleine, sans conditions rigides à l'intérieur : on voit que les géométries sont moins nombreuses, puisque les équations (B.16) et (B.18) deviennent inutiles. Le second cas, à $\eta = 0,95$ montre de nombreuses géométries supplémentaires mais correspond au cas d'une couche radiative très fine à la surface d'une étoile, et ne correspond en rien au cas que nous étudions dans cette thèse.

B.3.2 Modes non-axisymétriques

Une partie des propriétés de propagation des modes non-axisymétriques est donnée dans le texte principal. Néanmoins, il est important de souligner que le calcul s'avère un peu plus complexe.

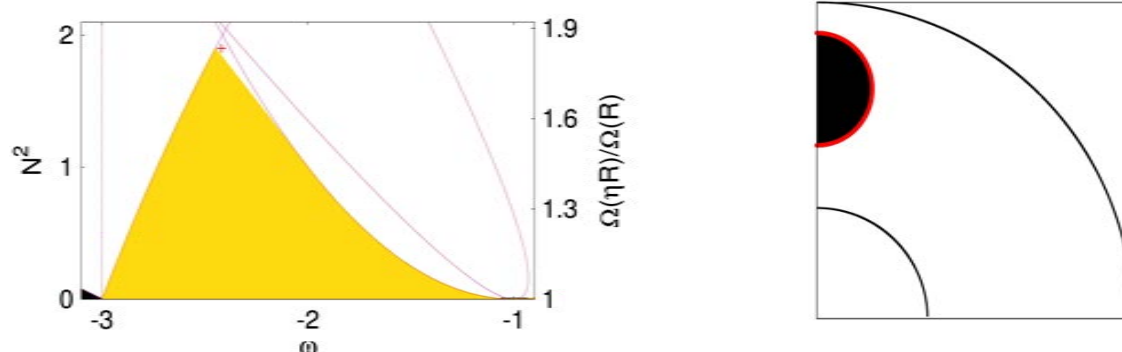


FIGURE B.2 – À gauche : Étendue du domaine des modes H (jaune) pour des modes rétrogrades à $m = 1$. Les courbes violettes marquent la transition attendue entre modes H et HT (en blanc). À droite : domaines elliptique et hyperbolique à travers la coquille pour le mode à $m = 1, N^2 = 1,9, \omega = -2,42$, indiqué par une croix rouge sur le graphe de gauche.

Les résultats présentés en figure 3.1 montrent que les surfaces de retournement ont des géométries complexes, et mettent en exergue de nombreuses configurations pour le domaine hyperbolique. Comme indiqué plus tôt, il s'agit d'être prudent car notre méthode de résolution de l'équation (B.14) ne capture pas toutes les propriétés des solutions. Certaines surfaces de retournement ne peuvent être calculées en utilisant les équations (B.15)–(B.18). En effet, notre profil de rotation rend possible l'apparition de domaines elliptiques le long de l'axe de rotation, tout en laissant le pôle et le cœur dans le domaine hyperbolique. Ceci est illustré dans les deux graphes de la figure B.2, dont le graphe de gauche montre la distribution des modes H et HT à $m = 1$ pour de faibles stratifications (il s'agit en fait d'un agrandissement du graphe du haut de la figure B.1). La petite zone blanche comprise entre le domaine des modes H (en jaune) et la frontière théorique de ce domaine (courbe violette) comprend en fait des modes HT. Pour ces modes précis, la surface de retournement n'englobe aucun des « coins » de la coquille considérés pour l'établissement des critères (B.15)–(B.18) mais apparaît sur l'axe de rotation. Le schéma à droite de la figure B.2 illustre ce cas. Même si seule une petite partie de l'espace des paramètres est concernée par cette mise en garde, on en déduit que les frontières entre les domaines des modes H et des modes HT ne pourrait être déterminée analytiquement pour des profils de rotation plus complexes.

B.4 Exposants de Lyapunov

Comme indiqué dans la section 3.4.1, les trajectoires des caractéristiques peuvent converger vers des cycles de courte période, autrement dit des attracteurs de caractéristiques. À partir du calcul complet des trajectoires de caractéristiques à partir d'un point dans la coquille, obtenu en résolvant de manière itérative les équations (3.23) et (3.24), on calcule l'exposant de Lyapunov. Ce nombre permet de quantifier le rythme auquel les caractéristiques se rapprochent les unes des autres après de multiples réflexions sur les limites du domaine hyperbolique ou les frontières de

la coquille. Vu que notre problème peut aisément être étudié dans un quart de plan méridien, il convient d'utiliser les rebonds sur l'axe de rotation ou l'axe équatorial. Dans un premier temps, on calcule l'exposant de Lyapunov à partir des rebonds sur l'axe de rotation d'une part (Λ_z), et sur le plan équatorial d'autre part (Λ_s). Ainsi, on considère la distance entre le k -ième et le $(k+1)$ -ième rebond sur l'axe équatorial et sur l'axe de rotation, δs_k ou δz_k respectivement. On modélise ces écarts par la relation de récurrence

$$\delta s_{k+1} = \delta s_k \exp \Lambda_s, \quad \delta z_{k+1} = \delta z_k \exp \Lambda_z \quad (\text{B.23})$$

et on dérive deux exposants de Lyapunov, Λ_s ou Λ_z respectivement :

$$\Lambda_s = \lim_{N_s \rightarrow \infty} \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \ln \left| \frac{\delta s_{k+1}}{\delta s_k} \right| \quad \text{and} \quad \Lambda_z = \lim_{N_z \rightarrow \infty} \frac{1}{N_z} \sum_{k=1}^{N_z} \ln \left| \frac{\delta z_{k+1}}{\delta z_k} \right|. \quad (\text{B.24})$$

Ce calcul présente cependant deux difficultés que nous avons dû gérer. D'abord, il apparaît des cas où un attracteur peut avoir plusieurs rebonds distincts sur un axe donné qui doivent être pris en compte dans le calcul de l'exposant de Lyapunov. Notre procédure numérique trouve alors les coordonnées de chaque point de convergence des caractéristiques pour chaque axe, et calcule l'exposant de Lyapunov uniquement à partir des rebonds qui y convergent.

Ensuite, bien que les exposants pour chacun des deux axes devraient avoir formellement la même valeur, ce n'est pas toujours évident. Pour s'assurer des valeurs obtenues, on calcule l'exposant à partir de plusieurs paires de caractéristiques démarrant en différents endroits de la coquille. On retient alors pour chaque axe la valeur médiane obtenue sur les différentes caractéristiques avant de retenir leur valeur moyenne $\Lambda = \langle \Lambda_s, \Lambda_z \rangle$.

Comme on peut le voir sur la figure 3.6, une grande part de l'espace des paramètres correspond à des exposants de valeur positive. Ceci est dû au fait que les sommes présentées dans l'équation (B.24) n'ont pas été nécessairement faites sur un nombre de rebonds suffisant : il est certes impossible d'estimer ces sommes sur une infinité de points, mais il arrive que la convergence soit suffisamment rapide pour que l'écart entre deux caractéristiques atteigne la précision machine en quelques rebonds. Inversement, quand il n'y a pas de convergence et que les rebonds sont répartis sur tout l'axe, les sommes ne s'annulent pas exactement et peuvent même parfois donner des valeurs légèrement positives. Pour certaines valeurs (correspondant aux zones blanches dans le graphe de la figure 3.6), le calcul n'a pas convergé du fait de ces difficultés numériques. Pour toutes ces raisons, nous n'avons interprété cette carte qu'en termes qualitatifs, car il serait hasardeux de trop se fier aux valeurs numériques.

Lorsqu'on considère les modes HT (c'est-à-dire les modes qui ont une surface de retournement), le calcul devient beaucoup plus complexe. Les surfaces de retournement sont définies implicitement par l'équation $\Delta = 0$ (via l'équation 3.22), ainsi la détermination de l'emplacement précis du rebond est complexe, rajoutant ainsi une difficulté au calcul des exposants de Lyapunov. Les phénomènes de piégeage en coin introduisent aussi des singularités difficiles à traiter numériquement.

C

Proposition de cibles pour la mission TESS

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2.3.5, exploiter les régularités que présentent les modes îlots dans les étoiles en rotation rapide fournit une identification partielle. Celle-ci peut être reliée à des paramètres fondamentaux de l'étoile, mais aussi donner des indices pour la modélisation directe. Afin de profiter de la nouvelle mission spatiale de la NASA TESS (*Transiting Exoplanet Survey Satellite*, RICKER 2014), dont le lancement est prévu entre mars et juin 2018, j'ai proposé avec Antonio García Hernández (chercheur postdoctoral à l'université de Grenade, Espagne) une liste d'étoiles à observer. Après un bref résumé des propriétés du satellite, je présente la liste d'étoiles proposée.

C.1 La mission TESS

Le satellite TESS doit observer la quasi-totalité de la sphère céleste, à l'aide de quatre caméras CCD. Le satellite observera chaque hémisphère du ciel pendant un an environ : l'année est divisée en treize créneaux de 27 jours, entre lesquels le satellite est pivoté autour de l'axe des pôles de l'écliptique. En résulte une division du ciel en différentes zones, observées pour différentes durées (voir figure C.1). Globalement, le pôle de l'écliptique sera observé pendant près d'un an tandis que le plan de l'écliptique est exclus des observations. Ensuite, un renversement du satellite sera opéré pour des observations équivalentes dans l'hémisphère sud. Il est à noter que la longitude écliptique à laquelle le satellite commencera ses observations n'est pas connue à l'avance et sera contrainte par la mise en orbite.

Les mesures seront effectuées à des intervalles d'une minute pour les 100 000 étoiles les plus brillantes du champ de vue, des prises de vue de tout le champ étant effectuées toutes les trente minutes. Il est à noter que la cadence de 30 minutes convient pour les étoiles de notre échantillon, puisque la majorité des fréquences d'oscillation se trouve en dessous de la fréquence limite de 24 cycles par jour.

C.2 Résumé de notre proposition

Certaines étoiles de classe spectrale A sont des pulsateurs classiques en rotation rapide, pour lesquelles l'identification des modes n'est pas chose aisée. La théorie prédit une répartition régulière de certains de ces modes (les modes îlots, voir le chapitre 2.3.2, ou REESE, LIGNIÈRES et RIEUTORD 2008).

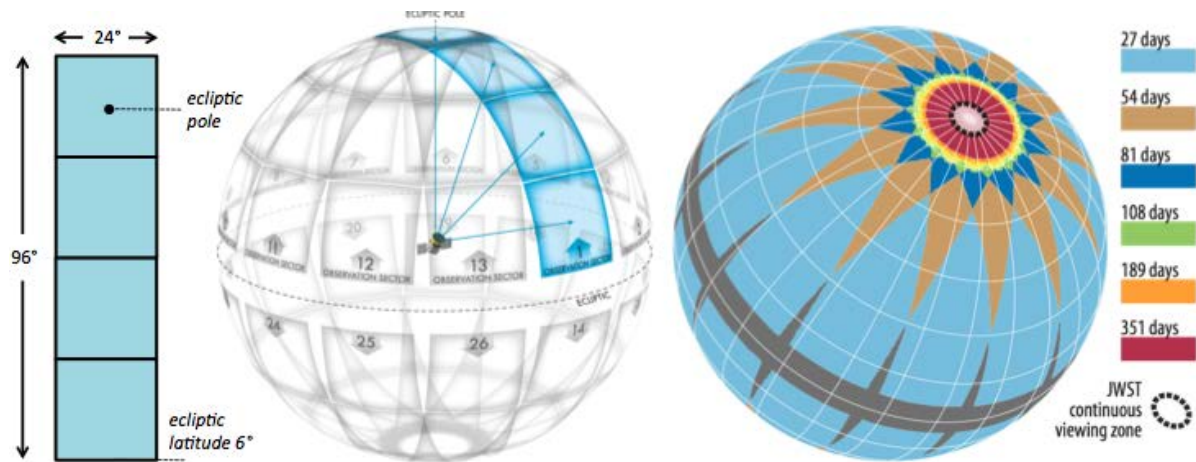


FIGURE C.1 – Couverture du ciel par le satellite TESS. Le satellite se compose de quatre caméras CCD carrées (gauche) qui balaient le ciel à différentes latitudes écliptiques (centre), formant un schéma de couverture divisé en plusieurs zones observées pour des durées différentes (droite).

Après les nombreuses études de ces régularités dans les spectres d'oscillations mesurés présentées au chapitre 2.3.5, GARCÍA HERNÁNDEZ et al. (2015) ont étudié un petit échantillon d'étoiles binaires et mis en évidence une relation entre la séparation des modes îlots $\Delta\nu$ et la densité moyenne $\langle\rho\rangle$ de l'étoile. Cette relation est de plus indépendante du taux de rotation de l'étoile.

Notre proposition vise à améliorer notre compréhension de l'influence de la rotation sur les modes d'oscillations dans des étoiles de type A ou F, et notamment vérifier si les relations d'échelle obtenues pour les six étoiles binaires préalablement étudiées reste valable pour un plus grand nombre d'étoiles, et notamment des étoiles simples. Nous avons ainsi sélectionné une liste d'étoiles de même classe spectrale et de même étape évolutive : en l'occurrence, nous avons choisi des étoiles de type A7 sur la séquence principale. Ces étoiles ont néanmoins des vitesses de rotation projetées allant de 10 à 300 km·s⁻¹. Les paramètres de ces étoiles sont tirés des catalogues de RODRÍGUEZ, LÓPEZ-GONZÁLEZ et LÓPEZ DE COCA (2000) et GŁĘBOCKI et GNACIŃSKI (2005). La liste proposée pour l'hémisphère sud est présentée en table C.1, tandis que la liste pour l'hémisphère nord est en cours d'élaboration.

L'utilisation des modèles bidimensionnels ESTER permettra de déterminer de façon précise les paramètres fondamentaux des étoiles. Puisque la rotation change la densité de l'étoile (les rotateurs rapides étant plus volumineux et donc moins denses), il sera possible de vérifier, voire d'améliorer, la loi d'échelle $\Delta\nu-\bar{\rho}$ proposée par GARCÍA HERNÁNDEZ et al. (2015) (ce travail utilisant le modèle simplifié de Roche, décrit au paragraphe 2.2). Le calcul des fréquences d'oscillation avec TOP pourra en outre permettre de confirmer l'identification des modes îlots voire d'identifier les autres modes détectés, mettant ainsi à profit les régularités dans les spectres d'oscillation pour la modélisation directe des étoiles en rotation.

Identifiant HD	Identifiant TIC	Classe spectrale	Classe pulsateur	V mag	$v \sin i$ $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$
★ 23607	405484188	A7V	δSct	8,26	10
	157861023	A8	δSct	9,85	13
218549	218046347	A6	δSct	10,36	24
★ 23156	405483817	A7V	δSct	8,24	46
213534	150650653	A5m	δSct	6,33	46
	34512862	A6-9	δSct	9,88	46
20919	252829836	A8V	δSct	9	50
124713	141331113	A7V		6,4	73
180868	131057709	A7V		5,3	78
177332	177672630	A7V		6,7	78
★ 192640	10988057	A7Vp	δSct	5	80
157728	43338030	A7V		5,7	81
★ 6961	331391396	A7V	δSct	4,3	91
125161	310381204	A6V	δSct	4,75	130
199124	248768639	A9Vn	δSct	6,55	132
182475	415118382	A9V	δSct	6,5	135
220061	243107445	A5V	δSct	4,58	135
★ 219586	427651165	A7V	δSct	5,56	145
79439	137648019	A5V	δSct	4,8	145
155514	257456864	A8V	δSct	6,2	191
★ 142500	337256401	A7Vn	δSct	6,28	210
127726	157934515	A7Vn		6	215
★ 187642	471012052	A7V	δSct	0,8	225-240
98673	302757439	A7Vn		6,4	225
205924	353103358	A8Vn		5,7	230
109980	389786845	A7Vn		6,4	235
★ 203280	417604820	A7V	δSct	2,5	245
111893	92128571	A7V		6,3	255
49949	191966413	A8Vn		6,2	260
★ 33296	148573837	A7Vn	δSct	6,5	290
191423	185455878	A9V		8	392

TABLE C.1 – Liste des étoiles proposées à l’observation par le satellite TESS pour l’hémisphère sud. Les symboles ★ correspondent aux cibles absolument nécessaires à notre travail sur la rotation.

D

Publications et communications

Le travail présenté dans cette thèse a donné lieu à diverses publications et présentations lors de conférences nationales et internationales, que je liste ici. Les premières pages des articles les plus significatifs sont présentées dans les pages suivantes.

D.1 Publications

D.1.1 Dans des revues à comité de lecture

- MIROUH, G. M. ; BARUTEAU, C ; RIEUTORD, M. & BALLOT, J., 2016
“Gravito-inertial waves in a differentially rotating spherical shell”
Journal of Fluid Mechanics, Volume 800, pp 213-247
- BÖHM, T. ; HOLSCHNEIDER, M. ; LIGNIÈRES, F. ; PETIT, P. ; RAINER, M. ; PALETOU, F. ; WADE, G. ; ALECIAN, E. ; CARFANTAN, H. ; BLAZÈRE, A. & MIROUH, G. M., 2015
“Discovery of starspots on Vega. First spectroscopic detection of surface structures on a normal A-type star”
Astronomy & Astrophysics, Volume 577, id. A64

D.1.2 Actes de conférence

- MIROUH, G. M. ; BARUTEAU, C ; RIEUTORD, M. & BALLOT, J., 2015
“Gravito-inertial modes in a differentially rotating spherical shell”
The Space Photometry Revolution - CoRoT Symposium 3, Kepler KASC-7 Joint Meeting ; EPJ Web of Conferences, Volume 101, id.06046 (2 pages)
- MIROUH, G. M. ; BARUTEAU, C ; RIEUTORD, M. & BALLOT, J., 2014
“Gravito-inertial waves in a differentially rotating spherical shell”
SF2A Proceedings (4 pages)
- MIROUH, G. M. ; REESE, D. R. ; ESPINOSA LARA, F. ; BALLOT, J. & RIEUTORD, M., 2014
“Asteroseismology of fast-rotating stars : the example of α Ophiuchi”
Precision Asteroseismology, Proceedings of the IAU Symposium, Volume 301 (2 pages)



J. Fluid Mech. (2016), vol. 800, pp. 213–247. © Cambridge University Press 2016
doi:10.1017/jfm.2016.382

213

Gravito-inertial waves in a differentially rotating spherical shell

G. M. Mirouh^{1,2,†}, C. Baruteau^{1,2}, M. Rieutord^{1,2} and J. Ballot^{1,2}

¹Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, 31400 Toulouse, France

²CNRS, IRAP, 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

(Received 18 November 2015; revised 19 March 2016; accepted 31 May 2016)

The gravito-inertial waves propagating over a shellular baroclinic flow inside a rotating spherical shell are analysed using the Boussinesq approximation. The wave properties are examined by computing paths of characteristics in the non-dissipative limit, and by solving the full dissipative eigenvalue problem using a high-resolution spectral method. Gravito-inertial waves are found to obey a mixed-type second-order operator and to be often focused around short-period attractors of characteristics or trapped in a wedge formed by turning surfaces and boundaries. We also find eigenmodes that show a weak dependence with respect to viscosity and heat diffusion just like truly regular modes. Some axisymmetric modes are found unstable and likely destabilized by baroclinic instabilities. Similarly, some non-axisymmetric modes that meet a critical layer (or corotation resonance) can turn unstable at sufficiently low diffusivities. In all cases, the instability is driven by the differential rotation. For many modes of the spectrum, neat power laws are found for the dependence of the damping rates with diffusion coefficients, but the theoretical explanation for the exponent values remains elusive in general. The eigenvalue spectrum turns out to be very rich and complex, which lets us suppose an even richer and more complex spectrum for rotating stars or planets that own a differential rotation driven by baroclinicity.

Key words: geophysical and geological flows, internal waves, rotating flows

1. Introduction

Stars of mass above 2.5 solar masses ($2.5M_{\odot}$), also known as early type stars, are basically made of a central convective core (where nuclear reactions take place) and a radiative envelope. When the star is rapidly rotating, as it is often the case for this type of stars, the radiative envelope is differentially rotating as a result of the baroclinic torque that comes from the stable stratification in the envelope (Zahn 1992; Rieutord 2006). Besides, the envelope is the seat of oscillations driven by the so-called κ -mechanism (Zhevakin 1963; Unno *et al.* 1989). This mechanism is a consequence of the variations of heat conductivity with temperature that make, in some places, hotter material less conductive (see Gastine & Dintrans 2008). Heat conduction in stars being due to the diffusion of photons, it is therefore controlled by the opacity of the medium. Opacity varies rapidly with temperature in regions

† Email address for correspondence: giovanni.mirouh@irap.omp.eu

A&A 577, A64 (2015)
 DOI: 10.1051/0004-6361/201425425
 © ESO 2015

**Astronomy
&
Astrophysics**

Discovery of starspots on Vega^{*}

First spectroscopic detection of surface structures on a normal A-type star

T. Böhm^{1,2}, M. Holschneider³, F. Lignières^{1,2}, P. Petit^{1,2}, M. Rainer⁴, F. Paletou^{1,2}, G. Wade⁶, E. Alecian⁵,
 H. Carfantan^{1,2}, A. Blazère^{1,2}, and G. M. Mirouh^{1,2}

¹ Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, Toulouse, France
 e-mail: torsten.boehm@irap.omp.eu

² CNRS; IRAP; 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

³ Institut für Mathematik, Universität Potsdam, DYCOS, 14469 Potsdam, Germany

⁴ INAF-Osservatorio Astronomico di Brera, via E. Bianchi 46, 23807 Merate, Italy

⁵ Observatoire de Grenoble, Université Joseph Fourier, IPAG, 38041 Grenoble, France

⁶ Dept. of Physics, Royal Military College of Canada, PO Box 17000, Stn Forces, Kingston, Canada K7K 7B4

Received 27 November 2014 / Accepted 20 March 2015

ABSTRACT

Context. The theoretically studied impact of rapid rotation on stellar evolution needs to be compared with these results of high-resolution spectroscopy-velocimetry observations. Early-type stars present a perfect laboratory for these studies. The prototype A0 star Vega has been extensively monitored in recent years in spectropolarimetry. A weak surface magnetic field was detected, implying that there might be a (still undetected) structured surface. First indications of the presence of small amplitude stellar radial velocity variations have been reported recently, but the confirmation and in-depth study with the highly stabilized spectrograph SOPHIE/OHP was required.

Aims. The goal of this article is to present a thorough analysis of the line profile variations and associated estimators in the early-type standard star Vega (A0) in order to reveal potential activity tracers, exoplanet companions, and stellar oscillations.

Methods. Vega was monitored in quasi-continuous high-resolution echelle spectroscopy with the highly stabilized velocimeter SOPHIE/OHP. A total of 2588 high signal-to-noise spectra was obtained during 34.7 h on five nights (2 to 6 of August 2012) in high-resolution mode at $R = 75\,000$ and covering the visible domain from 3895–6270 Å. For each reduced spectrum, least square deconvolved equivalent photospheric profiles were calculated with a $T_{\text{eff}} = 9500$ and $\log g = 4.0$ spectral line mask. Several methods were applied to study the dynamic behaviour of the profile variations (evolution of radial velocity, bisectors, vspar, 2D profiles, amongst others).

Results. We present the discovery of a spotted stellar surface on an A-type standard star (Vega) with very faint spot amplitudes $\Delta F/F_c \sim 5 \times 10^{-4}$. A rotational modulation of spectral lines with a period of rotation $P = 0.68$ d has clearly been exhibited, unambiguously confirming the results of previous spectropolarimetric studies. Most of these brightness inhomogeneities seem to be located in lower equatorial latitudes. Either a very thin convective layer can be responsible for magnetic field generation at small amplitudes, or a new mechanism has to be invoked to explain the existence of activity tracing starspots. At this stage it is difficult to disentangle a rotational from a stellar pulsational origin for the existing higher frequency periodic variations.

Conclusions. This first strong evidence that standard A-type stars can show surface structures opens a new field of research and ask about a potential link with the recently discovered weak magnetic field discoveries in this category of stars.

Key words. starspots – stars: early-type – stars: rotation – stars: oscillations – stars: individual: Vega – asteroseismology

1. Introduction

The role rapid rotation plays on the stellar interior and its evolution represents a very challenging research topic as of today. Rapidly rotating stars reveal many unanswered questions in the domain of observations, theory, and modelling. The only known way to study stellar interiors is through asteroseismology and its associated observational techniques, which are based either on photometry or high-resolution spectroscopy. In addition, the detection and observation of activity tracing structured stellar surfaces can also contribute significant constraints on stellar evolution models.

^{*} Based on observations obtained with the SOPHIE spectrograph at the 2 m OHP telescope operated by the Institut National des Sciences de l'Univers (INSU) of the Centre National de la Recherche Scientifique of France (CNRS).

The recent detection of a very weak magnetic field in Vega was reported in Lignières et al. (2009). The -0.6 ± 0.3 G disk-averaged line-of-sight component of the surface magnetic field can reach peak values of 7 G (Petit et al. 2014). Lignières et al. (2009) and later Petit et al. (2010) have concluded that a previously unknown type of magnetic star exists in the intermediate-mass domain and that Vega may well be the first confirmed member of a much larger, as yet unexplored, class of weakly-magnetic stars. The Zeeman-Doppler imaging of the magnetic field topology (Petit et al. 2010, 2014) shows that apart from a prominent polar magnetic region, a few other magnetic spots are reconstructed at lower latitude. Petit et al. (2010) conclude that an important help for distinguishing between a potential fossil or dynamo origin of the magnetic field would be to investigate the long-term stability of the observed field geometry, because

Asteroseismology of fast-rotating stars: the example of α Ophiuchi

Giovanni M. Mirouh^{1,2}, Daniel R. Reese³, Francisco Espinosa Lara^{1,2},
Jérôme Ballot^{1,2} and Michel Rieutord^{1,2}

¹ Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, Toulouse, France

² CNRS, IRAP, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

³ Institut d'Astrophysique et Géophysique de l'Université de Liège, Allée du 6 Août 17,
4000 Liège, Belgium

Abstract. Many early-type stars have been measured with high angular velocities. In such stars, mode identification is difficult as the effects of fast and differential rotation are not well known. Using fundamental parameters measured by interferometry, the ESTER structure code and the TOP oscillation code, we investigate the oscillation spectrum of α Ophiuchi, for which observations by the *MOST* satellite found 57 oscillations frequencies. Results do not show a clear identification of the modes and highlight the difficulties of asteroseismology for such stars with a very complex oscillation spectrum.

Keywords. stars: oscillations, stars: rotation, stars: individual: α Oph, Rasalhague

1. Introduction

Intermediate- and high-mass stars are usually fast rotators. In some of these A-, B- and O-type stars, the κ mechanism excites eigenmodes. Because of the centrifugal flattening of the star and the strength of the Coriolis acceleration, the oscillation spectrum is much more complex than that of non-rotating stars. Interpretation of observed frequencies of these stars requires two-dimensional models and their oscillation spectrum computed in a non-perturbative way. Following the pioneering work of Deupree *et al.* (2012), we want to identify the observed modes of the fast-rotating star α Ophiuchi in order to better constrain its fundamental parameters. Compared to the previous work of Deupree, we improve the numerical resolution and get spectrally converged eigenfunctions that allow a reliable computation of visibilities and damping rates of the modes.

2. Models

We compute 2D models for the fast-rotating A-type star Rasalhague (α Ophiuchi) with the ESTER code (Rieutord & Espinosa Lara 2013), in which differential rotation is calculated self-consistently. Its surface equatorial rotation velocity of 240 km s^{-1} imposes a flatness of 0.168. Its equatorial and polar radii have been derived from interferometry (Zhao *et al.* 2009) and the stellar mass is constrained by an orbiting companion (Hinkley *et al.* 2011). Besides this, 57 oscillation frequencies have been measured by photometry (Monnier *et al.* 2010). To reproduce the fitted radii, luminosity, polar and equatorial temperatures, our model uses $M = 2.22 M_{\odot}$, $\Omega = 0.62 \Omega_{\kappa} = 1.65 \text{ d}^{-1}$, mass fractions $Z = 0.02$ and $X = 0.7$ in the envelope, $X_{\text{c}} = 0.26$ in the core (see Espinosa Lara & Rieutord 2013). The eigenvalue problem of adiabatic oscillations is solved with the TOP code (Reese *et al.* 2009) for modes with azimuthal orders $-4 \leq m \leq 4$, in the range of frequencies in which the p modes are thought to be observed (see Fig. 1).

D.2 Communications

D.2.1 Présentations orales

- “Seismology of the Sun and the Distant Stars 2016 : Using Today’s Successes to Prepare the Future”, Atelier TASC 2 & KASC 9 et conférence SPACEINN & HELAS8, Angra do Heroismo (Portugal), juillet 2016.
- « Journées de la sf2a », Atelier PNPS, Toulouse (France), juin 2015.
- « Journées de la sf2a », Atelier PNPS, Paris (France), juillet 2014.

D.2.2 Posters

- “Space asteroseismology : the next generation”, Atelier TASC 1 & KASC 8, Aarhus (Danemark), juillet 2015.
- “The space photometry revolution”, Atelier CoRoT 3 & KASC7, Toulouse (France), juillet 2014.
- “Precision asteroseismology”, Symposium de l’Union Astronomique Internationale n°301, Wrocław (Pologne).

D.2.3 Séminaires

- « Modes gravito-inertiels dans les étoiles en rotation rapide »
IRPHE (Marseille, 2016), MPA (Garching, Allemagne, 2016), SISSA (Trieste, Italie, 2016), DAMTP (Cambridge, Royaume-Uni, 2016), LESIA (Meudon, 2015), Atelier IRAP-LUPM (Banyuls, 2014)
- « Sismologie des étoiles en rotation rapide : l’exemple de Rasalhague »
Atelier IRAP (Arcachon, 2014)

Résumé

Les étoiles massives sont les principaux contributeurs à l'enrichissement du milieu interstellaire. Ce sont généralement des rotateurs rapides, dotés d'une enveloppe radiative dans laquelle l'interaction de la stratification et la rotation génère une rotation différentielle. Celle-ci peut alimenter divers phénomènes de transport et affecter l'évolution rapide de l'étoile. Nombre de ces étoiles sont par ailleurs des pulsateurs classiques.

Cette thèse s'intéresse en premier lieu à l'interaction entre la rotation différentielle et les pulsations à basse fréquence dans l'étoile : celles-ci sont des modes gravito-inertiels dont la force de rappel est une combinaison de la force de Coriolis et de la poussée d'Archimède. Ils sondent les couches profondes de l'étoile, et sont étudiés suivant deux méthodes : dans la limite non-dissipative par la méthode des caractéristiques, et dans le cas dissipatif par la résolution du problème complet par une méthode spectrale. Nous mettons en évidence différentes singularités (attracteurs, latitudes critiques, résonances de corotation, piègeage en coin) et des modes réguliers. Certains modes sont excités par des instabilités baroclines, qui, si des effets non-linéaires provoquent leur saturation, permettent l'existence d'un mécanisme d'excitation nouveau dû à la rotation différentielle.

Dans un second temps, nous avons associé le code de structure ESTER au code de calcul d'oscillations TOP. Ces deux codes calculent les quantités dans une étoile en deux dimensions et les modes associés en tenant compte des effets de la rotation de façon complète. Nous utilisons visibilités et taux d'amortissement des modes pour sélectionner dans le spectre synthétique les meilleurs candidats à l'identification des modes observés. Nous présentons une application au rotateur rapide Rasalhague (α Oph), pour lequel de nombreuses observations sont disponibles. Nous n'avons pas obtenu une identification des modes univoque, mais le problème est maintenant mieux cerné et diverses pistes de progrès ont été identifiées.

Abstract

Massive stars are the main contributors of the interstellar medium enrichment. These stars are usually fast rotators, with a radiative envelope in which the interaction between stratification and rotation gives rise to a differential rotation. This can trigger transport phenomena in the star, and affect its fast evolution. Besides, many of these stars are classical pulsators.

This work focuses first on the impact of a differential rotation on the low-frequency oscillation spectrum which contains gravito-inertial modes. These modes are restored by the combination of buoyancy and Coriolis force and probe deep layers of stars. Our study is twofold: we compute the paths of characteristics in the non-dissipative limit, and solve the fully-dissipative eigenvalue problem numerically using a spectral decomposition. We find various singularities (attractors, critical latitudes, corotation resonances, wedge-trapping) and regular modes. Some of these modes are excited by baroclinic instabilities that may saturate through non-linear effects. If so, we have discovered a new excitation mechanism for these modes, driven by differential rotation. Aside of this theoretical work; we have considered the case of Rasalhague (α Oph), which is a well-known fast rotator. We studied this star by associating the ESTER structure code with the TOP oscillation code. Both of these codes use a two-dimensional structure, taking rotation effects fully into account. We use the mode damping rates and visibilities to filter the best candidates for observed modes identification out of the synthetic spectra. Even though we could not reach a satisfactory identification of the observed frequencies, we improved our understanding of the problem and identified the next steps to be taken.