Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Т. І. Жиленко, О. А. Білоус

ОБЧИСЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ І КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2017

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я73
Ж72

Рецензенти:

І. О. Шуда – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету (м. Суми, Україна);

К. Г. Малютін – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Південно-Західного державного університету (м. Курськ, Росія)

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 8 від 9 лютого 2017 року)

Жиленко Т. І.

Ж72 Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

ISBN 978-966-657-657-9

У навчальному посібнику наведені теоретичні положення та практичні рекомендації щодо розв’язання основних типів задач із розділу вищої математики – «Кратні та криволінійні інтеграли». Розглянуті питання практичного застосування інтегралів під час розв’язування геометричних та фізичних задач. Подано багато розв’язків типових задач цього розділу математики. Посібник містить матеріали для аудиторної роботи, контрольні завдання та питання для самоперевірки. Для організації самостійної роботи студентів наведені індивідуальні варіанти задач.

Навчальний посібник рекомендований студентам інженерно-технічних спеціальностей університетів та інститутів, які вивчають курси «Вища математика» і «Математичний аналіз». Матеріал також буде цікавим аспірантам, викладачам ВНЗ та науковцям.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-966-657-657-9

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Більшість сучасних технічних проектів вимагає від фахівця інженерного профілю якісної математичної освіти, зокрема вміння працювати з функціями декількох змінних, якими описуються багато процесів у динаміці, автоматиці, електротехніці, наноелектрониці тощо. Великого поширення набуває інтегральне числення функцій кількох змінних під час вирішення технічних завдань у багатьох профільних інженерних дисциплінах. Уміння обчислити, «взяти», як кажуть математики, кратний інтеграл, абсолютно необхідне для вирішення цілого ряду завдань, поставлених природознавством і технікою. Сторінки книг із фізики, математики, професійних дисциплін буквально рясніють подвійними й потрійними інтегралами. Часто доводиться мати справу з інтегралами і більшої кратності. За допомогою кратних інтегралів обчислюють площі складних фігур, об'єми, обмежені хитромудрими поверхнями, моменти інерції обертових тіл, розраховують взаємодію електричних зарядів і струмів, рух потоків рідини і т. п.

У цьому посібнику викладені основи інтегрального числення функцій кількох змінних – кратні і криволінійні інтеграли. Відмітимо, що кратні й криволінійні інтеграли належать до основних понять математичного аналізу. До цих понять приводять численні завдання на обчислення межі інтегральних сум функцій двох, трьох і більшої кількості змінних.

Посібник складається із шістьох розділів, у кожному з яких наведені визначення, властивості, методи обчислення інтегралів, пояснюється їх геометричний і фізичний зміст. До кожного розділу додається перелік питань та задач для самоперевірки, що дозволяє студентові самостійно оцінити рівень засвоєння матеріалу, відпрацювати навички розв’язування типових задач.

Особливе місце відведене геометричному та фізичному змісту кратних і криволінійних інтегралів. Подана велика кількість прикладів застосування цих інтегралів під час розв’язування практичних задач.

Потрібно відзначити, що наведені матеріали ефективно розвивають понятійний апарат інтегрального числення студентів. Так, навчальний посібник забезпечений великою кількістю детально розібраних і проілюстрованих прикладів, що надає можливість сформувати взаємозв’язок між абстрактно-наочним (рисунок, креслення, графічна ілюстрація) та абстрактно-логічним (формула, співвідношення, аналітичний розв'язок) образами подання основних понятійних об’єктів як теоретичного матеріалу, так і змісту математичних задач.

Матеріали посібника дозволяють вирішити питання організації роботи студента під час аудиторних занять за допомогою задач, поданих у кінці кожного розділу.

У розділі «Варіанти контрольної роботи» наведені 10 варіантів завдань. Ці матеріали можуть бути цікавими студентам під час підготовки до підсумкового контрольного заходу, а також викладачам у процессі самостійної роботи студентів заочної форми навчання.

У кінці посібника подані тридцять варіантів завдань для індивідуальної роботи студентів, виконання яких дозволяє відпрацювати та закріпити одержані знання під час вивчення теоретичного матеріалу.

Автори висловлюють щиру вдячність доцентові кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка Мартиненко Олені Вікторівні за надану допомогу під час складання цього посібника.

РОЗДІЛ 1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ
1.1. Основні поняття та означення

Розглянемо задачу про знаходження об'єму V просторового тіла (V), обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – невід'ємна і неперервна в деякій замкненій області (D) функція, з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі Oz, знизу – плоскою квадровною однозв'язною областю (D). Таке просторове тіло (рис. 1.1) називають ***циліндричним тілом,*** або ***циліндричним бруском***.

Розіб'ємо довільно область (D) кривими на n областей $(D_1), (D_2), ..., (D_n)$ і розглянемо сукупність циліндричних тіл (брусків), основами яких є відповідно

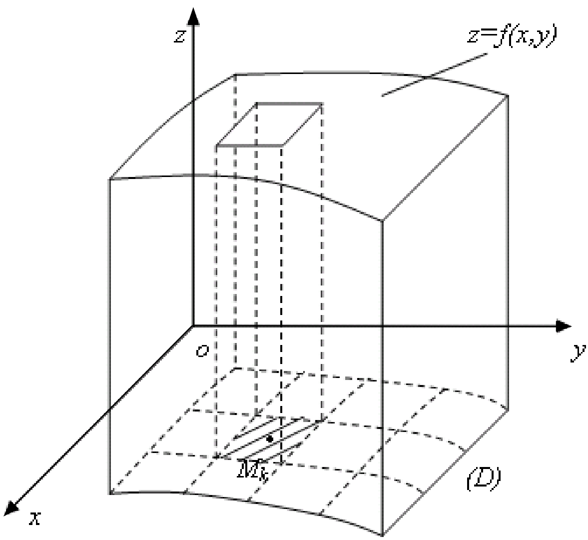


Рисунок 1.1 – Циліндричне тіло

області (D_k), $k=1,2,...,n$, і які утворюють тіло (V). У кожній області (D_k), $k=\overline{1,n}$ візьмемо довільну точку $M_k(\zeta_k,\eta_k)$ і знайдемо значення функції $f(\zeta_k,\eta_k)$. Об'єм k-го циліндричного тіла обчислимо за формулою $V_k = f(\zeta_k,\eta_k)\cdot \Delta S_k$, $k=1,2,...,n$, де ΔS_k – площа відповідної області (D_k). Додавши всі ці рівності, одержимо наближену формулу для знаходження об'єму заданого циліндричного тіла:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k . \qquad (1.1)$$

Ця наближена рівність залежить від способу розбиття області (D) на частини та від вибору точок M_k і буде тим точнішою, чим меншими будуть області (D_k), $k=\overline{1,n}$. Позначимо через d_k діаметр області (D_k), тобто найбільшу відстань між двома довільними точками цієї області. Якщо існує границя $\lim\limits_{\max d_k\to 1}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k)\cdot\Delta S_k$, то саме її беруть за об'єм циліндричного тіла:

$$V = \lim_{\max d_k\to 1}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k . \qquad (1.2)$$

Приклад про об'єм циліндричного тіла та ряд інших задач, у яких з'являються границі такого типу, приводять до введення поняття подвійного інтеграла.

Нехай у плоскій обмеженій квадровній області (D) задана функція $z=f(x,y)$. Сіткою (T) кривих довільним чином розіб'ємо область (D) на частини (D_k), $k=1,2,...,n$ (рис. 1.2).

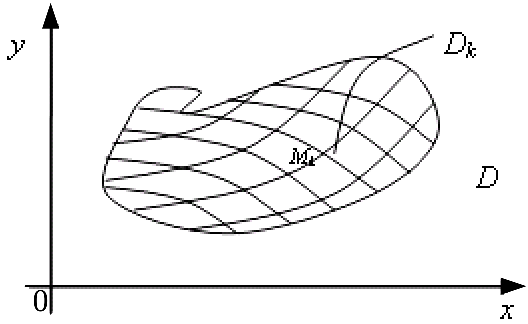


Рисунок 1.2 – Область інтегрування

Позначимо через ΔS_k площу частини (D_k), через $d_k = diam\,(D_k)$ (довжина найбільшої з хорд, що сполучає дві довільні точки частини (D_k)), і $d(T) = \max\limits_k d_k$. У кожній області (D_k) довільним чином візьмемо відповідно по одній точці $M_k(\zeta_k, \eta_k)$ і складемо суму $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$, яку називають ***інтегральною.*** Вона залежить від (T)-розбиття області (D) на частини (D_k) та від вибору точок $M_k(\zeta_k, \eta_k)$ на кожній з них.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$ при $d(T) \to 0$, що не залежить ні від способу розбиття області (D) на частини, ні від вибору точок $M_k(\zeta_k, \eta_k)$, то цю границю називають ***подвійним інтегралом функції*** $f(x, y)$ ***по області*** (D) і позначають символом

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy, \tag{1.3}$$

а функція $f(x,y)$ в цьому випадку називається ***інтегровною*** в області (D).

Повертаючись до задачі про обчислення об'єму циліндричного тіла, дістанемо

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)ds. \tag{1.4}$$

Цю рівність можна розглядати як ***геометричний зміст подвійного інтеграла***, якщо підінтегральна функція невід'ємна в області (D).

Розглядаючи умови інтегрованості функції $z = f(x,y)$ в області (D), припустимо, що вона в цій області обмежена. Проте умова обмеженості функції в (D) ще не забезпечує її інтегровність у цій області, тобто існують обмежені в (D) функції, які не є інтегровними. Прикладом такої функції є функція $f(x,y) = \begin{cases} 1, x \in Q, y \in Q \\ 0, x \in I \vee y \in I \end{cases}$, задана в деякій обмеженій квадровній області (D).

Дійсно, задана функція є обмеженою, оскільки $|f(x,y)| \le 1$ для довільних точок $(x;y) \in (D)$. Покажемо, що ця функція не є інтегровною в цій області.

Розглянемо (T)-розбиття області (D) на частини (D_k), $k = \overline{1, n}$. У кожній такій частині існують точки $(x;y)$, де x та y – раціональні числа, і точки $(x;y)$, в яких хоча б одна з координат є ірраціональною.

Складемо інтегральну суму $S(T)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$. Якщо точки $P_k(x_k, y_k)\in(D_k)$, $k=1,2,...,n$ вибрати так, щоб числа x_k та y_k були раціональними, то $S(T)=\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = S$, де S – площа плоскої квадровної області (D). Якщо хоча б одне із чисел x_k або y_k ірраціональне, то $S(T)=0$. Отже, сума $S(T)$ при $d(T)\to 0$ границі не має, тому задана функція $f(x;y)$ не є інтегровною в області (D).

Наведений приклад дозволяє стверджувати, що умова обмеженості функції в замкненій обмеженій квадровній області (D) є необхідною, але недостатньою для її інтегровності.

Під час вивчення подвійних інтегралів важливу роль відіграють нижня і верхня суми Дарбу

$$\underline{S}=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta S_k\ ,\ \overline{S}=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta S_k\ , \tag{1.5}$$

де m_k та M_k – відповідно нижня та верхня грані множини значень функції $f(x,y)$ в області (D_k), $k=1,2,...,n$. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), то m_k та M_k є відповідно її найменшим та найбільшим значеннями в області (D_k). Оскільки

$$m_k \le f(x_k, y_k) \le M_k,\ k=1,2,...,n,$$

то

$$\underline{S}\le S(T)\le \overline{S}.$$

Властивості сум Дарбу аналогічні відповідним властивостям сум Дарбу для одновимірного випадку. За допомогою цих сум можна встановити критерій *інтегровною* функції $f(x,y)$ в області (D).

Теорема (критерій інтегрованості функції). *Для того, щоб обмежена в області* (D) *функція* $f(x,y)$ *була в ній інтегровною, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\lim_{d(T)\to 0}\left(\underline{S}-\overline{S}\right)=0. \qquad (1.6)$$

Сформулюємо достатню умову інтегровності функції $z=f(x,y)$.

Теорема. *Кожна функція* $z=f(x,y)$, *неперервна в замкненій обмеженій квадровній області* (D), *інтегровна в цій області.*

Зауважимо, що, як і в одновимірному випадку, клас інтегровних функцій не вичерпується лише неперервними функціями. Є ще й інші достатні умови існування подвійного інтеграла, але в подальшому ми обмежимося лише використанням сформульованої умови.

1.2. Основні властивості подвійних інтегралів

1. $\iint\limits_{(D)} CdS = C\cdot S(D)$, *де* $C=const$, $S(D)$ – *площа області* D.

Доведення. Дійсно, за означенням подвійного інтеграла маємо

$$\iint\limits_{(D)} CdS=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} C\cdot\Delta S_k = C\cdot\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = C\cdot S(D).$$

Наслідок. *При C=0 та C=1 одержимо* $\iint\limits_D 0dS = 0$ *та* $\iint\limits_D 1dS = \iint\limits_D dS = S(D)$.

2. *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна в області* (D), *то в цій області інтегровна також і функція* $Cf(x,y)$, *де* C *– деяка стала, причому*

$$\iint\limits_{(D)} CdS = C\cdot\iint\limits_{(D)} dS .$$

Доведення. Для довільного (T)-розбиття області (D) і довільного вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)\in(D_k)$, $k=1,...,n$, маємо

$$\iint\limits_{(D)} CdS = C\cdot\iint\limits_{(D)} dS .$$

$$\iint\limits_{(D)} Cf(x,y)dxdy = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} Cf(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k =$$

$$= C\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k = C\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy .$$

3. *Якщо функції* $f_1(x,y)$ *та* $f_2(x,y)$ *інтегровні в області* (D), *то в цій області інтегровна також функція* $f_1(x,y)\pm f_2(x,y)$, *причому*

$$\iint\limits_D (f_1(x,y)\pm f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy \cdot$$

Доведення. Для довільного (T)-розбиття області (D) і для довільного вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)\in(D_k)$, $k=0,\ldots,n$, маємо

$$\iint\limits_{(D)} (f_1(x,y)\pm f_2(x,y))dxdy = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(f_1(\zeta_k,\eta_k)\pm f_2(\zeta_k,\eta_k))\Delta S_k =$$

$$= \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k \pm \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k =$$

$$= \iint f_1(x, y)dxdy + \iint f_2(x, y)dxdy.$$

Доведену властивість можна поширити на будь-яку скінченну кількість інтегровних в області (D) функцій.

4. *Якщо функція* $f(x, y)$ *інтегровна в кожній з областей* (D_1) *і* (D_2)*, таких що* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$*, то вона також інтегровна і в області* $D = D_1 \cup D_2$*, причому* $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y)dxdy$.

Доведення. При довільному (T)-розбитті області $(D) = \bigcup\limits_{k=0}^{n}(D_k)$ інтегральну суму $S(T)$, складену для функції $f(x, y)$ в цій області, можна подати у вигляді

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k = \sum_{k:(D_k)\subset(D_1)} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k + \sum_{k:(D_k)\subset(D_2)} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$$

причому доданки в правій частині рівності є інтегральними сумами для функції $f(x, y)$ в областях (D_1) і (D_2) відповідно. Оскільки функція $f(x, y)$ інтегровна в кожній з областей (D_1) і (D_2), то існує границя правої частини останньої рівності при $d(T) \to 0$ і дорівнює $\iint\limits_{(D_1)} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y)dxdy$.

За цієї умови існує й границя лівої частини цієї рівності, яка дорівнює $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy$, що й потрібно було довести.

5. *Якщо* $f(x,y)\ge 0$ *є інтегровна в області* (D)*, то* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge 0$.

При доведенні цієї властивості розглядаються інтегральні суми, які є невід'ємними з умови $f(x,y)\ge 0$.

6. *Якщо* $f_1(x,y)\ge f_2(x,y)$ *і кожна з функцій* $f_1(x,y), f_2(x,y)$ *інтегровна в області* (D)*, то* $\iint\limits_{(D)} f_1(x,y)dxdy \ge \iint\limits_{(D)} f_2(x,y)dxdy$.

Для доведення досить розглянути різницю $f_1(x,y)-f_2(x,y)\ge 0$ і скористатися попередньою властивістю.

Наслідок. *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна в області* (D)*, то функція* $|f(x,y)|$ *інтегровна в цій області і* $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dxdy$.

Зауваження. *У прямокутній системі координат ми вважаємо, що* $dS = dxdy$.

7. ***Теорема (про середнє значення).*** *Якщо* $f(x,y)$ *неперервна в обмеженій замкненій квадровній області* D*, то існує точка* $M_0(x_0,y_0)\in D$ *така, що* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S(D)$.

Доведення. Оскільки функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області (D), то вона в цій області набуває своїх найменшого m та найбільшого M значень, тобто $m\le f(x,y)\le M$, $\forall (x,y)\in(D)$. Проінтегруємо почленно цю нерівність:

$$\iint\limits_{(D)} m dxdy \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(D)} M dxdy,$$

або

$$m\iint\limits_{(D)} dxdy \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M\iint\limits_{(D)} dxdy.$$

Оскільки $\iint\limits_{(D)} dxdy = S(D)$, то

$m \cdot S(D) \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M \cdot S(D)$, або

$$m \le \frac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S(D)} \le M \quad . \tag{1.7}$$

Позначивши $\dfrac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S(D)} = \mu$, нерівність (1.7) запишемо у вигляді $m \le \mu \le M$. За теоремою Больцано–Коші про проміжне значення функції існує точка $(x_0, y_0) \in (D)$ така, що $\mu = f(x_0, y_0)$, отже, $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S(D)\cdot$

1.3. Обчислення подвійних інтегралів

Подвійний інтеграл можна обчислювати безпосередньо користуючись означенням, тобто знаходити границю інтегральних сум:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k .$$

Проте такий спосіб досить громіздкий, тому застосовують інший спосіб, що зводить обчислення подвійного інтеграла до повторного інтегрування, тобто до послідовного обчислення двох одновимірних інтегралів. При цьому розглядають два випадки області інтегрування: прямокутну область та криволінійну область.

1.3.1 Випадок прямокутної області

Нехай областю інтегрування є прямокутник (P): $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, де a, b, c, d – довільні дійсні числа зі сторонами, паралельними координатним осям. Також нехай у цьому прямокутнику задана деяка неперервна функція $f(x, y)$ (рис. 1.3).

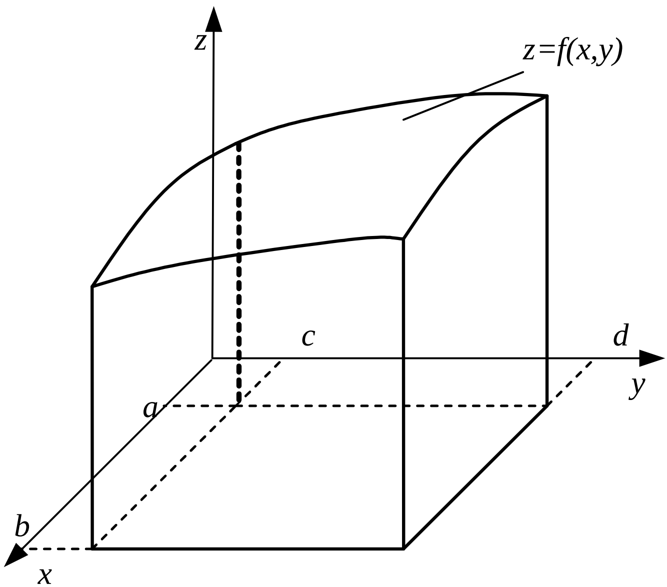


Рисунок 1.3 – Графік функції в прямокутній області

Теорема. *Якщо для функції* $f(x,y)$*, визначеної та неперервної на прямокутнику* (P)*, існує подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$ *і при кожному фіксованому значенні* $x\in[a;b]$ *існує інтеграл* $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$*, то існує також повторний інтеграл* $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$*, при цьому виконується рівність*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{1.8}$$

Доведення. Розіб'ємо відрізки $[a;b]$ і $[c;d]$, що визначають прямокутник (P), на частини довільним чином:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$
$$c=y_0<y_1<\ldots<y_k<y_{k+1}<\ldots<y_{m-1}<y_m=d.$$

Тоді прямокутник (P) розіб'ється на прямокутники $(P_{ik})=[x_i,x_{i+1};y_k,y_{k+1}]$ ($i=0,1,\ldots,n-1;\ k=0,1,\ldots,m-1$).

Позначимо через m_{ik} і M_{ik} відповідно точні нижню і верхню грані функції $f(x,y)$ у прямокутнику (P_{ik}), причому справедливі нерівності

$$m_{ik}\le f(x,y)\le M_{ik} \tag{1.9}$$

для $\forall i,k,$ де $i=\overline{0,n-1},\ k=\overline{0,m-1}$.

Виберемо довільно точки $\zeta_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,n-1$ і зафіксуємо їх. Проінтегрувавши нерівності (1.9) по змінній y на кожному з відрізків розбиття

$[y_k; y_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, одержимо

$$m_{ik}\Delta y_k \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\zeta_i, y)dy \le M_{ik}\Delta y_k \quad , \tag{1.10}$$

де $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. (Ці інтеграли існують для $\forall k = \overline{0, m-1}$ за умовою теореми.)

Додавши нерівності (1.10) за $k = 0,1,..,m-1$, одержимо

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \le I(\zeta_i) = \int_c^d f(\zeta_i, y)dy \le \sum_{k=0}^{n-1} M_{ik}\Delta y_k \quad . \tag{1.11}$$

Усі частини нерівності (1.11) помножимо на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ та знайдемо суму за всіма i, де $i = 0,1,\ldots,n-1$. Одержимо

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \le \sum_{i=0}^{n-1} I(\zeta_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{n-1} M_{ik}\Delta y_k \ .$$

Посередині одержали інтегральну суму для функції $I(x)$, а крайні члени нерівності становлять нижню та верхню суми Дарбу для подвійного інтеграла $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$. За одночасного виконання умов $\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_k \to 0$, одержимо

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} I(\zeta_i)\Delta x_i = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \quad , \qquad \text{або}$$

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \ .$$

1.3.2. Випадок криволінійної області

Означення. Квадровна область (D) називається ***криволінійною першого роду*** *(елементарною відносно осі* Ox*)*, якщо вона обмежена знизу і зверху графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=y_1(x)$, та $y=y_2(x)$ відповідно, ($y_1(x)\le y_2(x)$ для $\forall x\in[a,b]$) зліва і справа відрізками прямих $x=a,\ x=b$ (рис. 1.4).

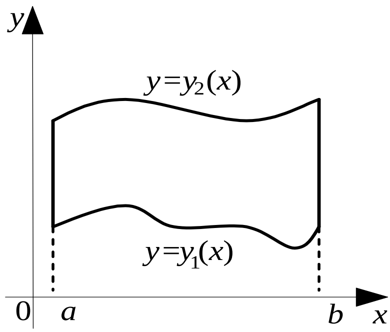


Рисунок 1.4 – Криволінійна область першого роду

Зокрема, відрізки вертикальних прямих $x=a,\ x=b$ можуть вироджуватись у точки перетину ліній $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$.

Теорема. *Якщо для функції* $f(x,y)$, *визначеної та неперервної в криволінійній області* (D) *першого роду, існує подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ *і при кожному фіксованому значенні* $x\in[a;b]$ *існує інтеграл* $I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, *то існує також повторний інтеграл*

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \text{, причому}$$

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \,.$$

Доведення випадку криволінійної області зводиться до випадку прямокутної області.

Криволінійну область (D) внесемо в прямокутник $(P)=[a,b;c,d]$, поклавши

$$c = \min_{a\le x\le b} y_1(x), \;\; d = \max_{a\le x\le b} y_2(x),$$

та задамо в ньому функцію:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{якщо } (x,y) \text{ належить області } (D) \\ 0, & \text{в інших точках прямокутника } (P). \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови попередньої теореми: вона інтегровна в прямокутнику (P), оскільки в ньому збігається з з інтегровною за умовою функцією $f(x,y)$ і

$$\iint_{(P)} f^*(x,y)dxdy = \iint_{(P)} f(x,y)dxdy \,.$$

З іншого боку, $f^*(x,y)=0$ за межами області (D), і її інтеграл дорівнює нулю. Тому функція $f^*(x,y)$ є інтегровною в усьому прямокутнику (P) і

$$\iint_{(P)} f^*(x,y)dxdy = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy \,.$$

За фіксованого значення $x\in[a,b]$ існує інтеграл

$$\int_c^d f^*dy = \int_c^{y_1(x)} f^*dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*dy + \int_{y_2(x)}^{d} f^*dy \,. \tag{1.12}$$

оскільки існує кожен із інтегралів справа. Але для $c \le y \le y_1(x)$ та $y_2(x) \le y \le d$ функція $f^*(x,y)=0$, тоді перший і третій інтеграли існують і дорівнюють нулю, а отже,

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad . \tag{1.13}$$

Із (1.12) та (1.13) маємо

$$\int_{c}^{d} f^*(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad . \tag{1.14}$$

За попередньою теоремою для функції $f^*(x,y)$ існує подвійний інтеграл, якщо дорівнює повторному,

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \cdot$$

Беручи до уваги рівності (1.13), (1.14), одержуємо рівність

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \, . \tag{1.15}$$

Теорему доведено.

Приклад. Обчислити $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де область D обмежена лініями $x=2,\ y=x,\ xy=1.$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують задану область інтегрування. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x, \\ xy = 1, \end{cases}$ і одержимо точку B (1, 1). Точка

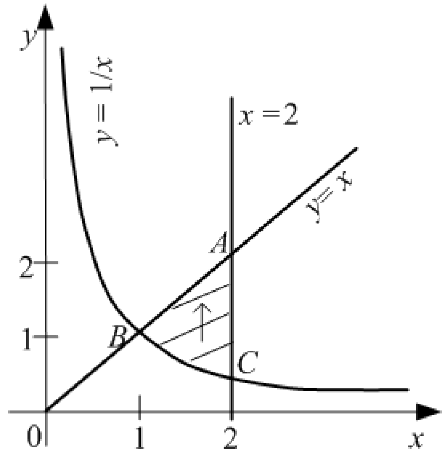


Рисунок 1.5

$A(2,\,2)$ є точкою перетину графіків функцій $x=2$ та $y=x$, а точка $C\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ – $x=2$ і $yx=1$. Тоді область D можна аналітично описати системою нерівностей так: $1\le x\le 2,\ \dfrac{1}{x}\le y\le x$ (рис. 1.5).

Отже,

$$\iint\limits_{(D)}\frac{x^2}{y^2}\,dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=\int\limits_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x}dx=\int\limits_1^2\left(-x+x^3\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{4}.$$

Означення. Квадровна область (D) називається ***криволінійною другого роду*** *(елементарною відносно осі*

Oy), якщо вона є обмеженою зліва і справа графіками функцій $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, знизу та зверху відрізками прямих $y = c$, $y = d$ відповідно, де функції $x_1(y)$ та $x_1(y)$ неперервні на відрізку $[c, d]$ і $x_1(y) \le x_2(y)$ для довільного $y \in [c, d]$ (рис. 1.6).

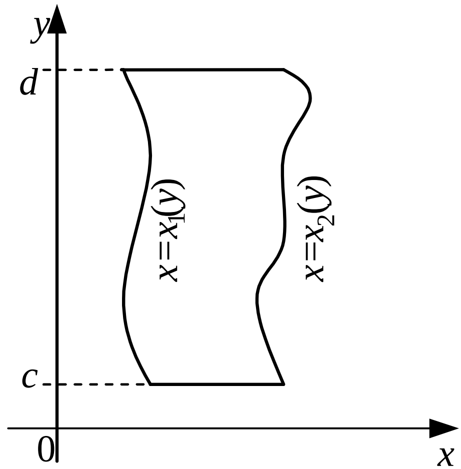


Рисунок 1. 6 – Криволінійна область другого роду

Зокрема, відрізки горизонтальних прямих $y = c$, $y = d$ можуть вироджуватись у точки перетину ліній $x = x_1(y), x = x_2(y)$.

Щодо останньої теореми аналогічними міркуваннями одержимо формулу для інтегрування подвійного інтеграла по криволінійній області другого роду:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx\,. \qquad (1.16)$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{D} (x + y)dxdy$, якщо область D

обмежена лініями: $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

Розв'язання. Область D (рис. 1.7) можна описати системою нерівностей так: $0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - y$.

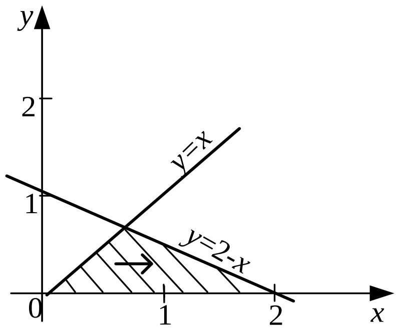


Рисунок 1.7

Переходимо до повторного інтеграла

$$\iint\limits_{(D)} (x + y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} (x + y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_y^{2-y} dy = \int\limits_0^1 \left(2 - 2y^2\right) dy = \left(2y - \frac{2}{3} y^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Зауваження. У випадку більш складних контурів область (D) розбивають на скінченне число частин криволінійних трапецій першого або другого роду прямими, паралельними осям координат, обчислюють інтеграли в кожній із цих частин, а потім результати додають.

1.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Під час обчислення подвійних інтегралів досить часто доводиться користуватися методом заміни змінних (метод підстановок). Розглянемо деякі допоміжні твердження, необхідні для виведення відповідних формул плоскої області.

1.4.1. Площа в криволінійних координатах

Нехай у площині xOy задано деяку область (D), а в площині uOv – область (E), причому $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ – деякі неперервні та інтегровні в області (E) функції. Нехай $B_1(u,v)\in(E)$, а відповідна їй $A_1(x,y)\in(D)$. Візьмемо в області (E) досить малу область (E_1), яка містить точку B_1, і нехай (D_1) – образ цієї області в площині Oxy. Нехай також S_{xy} і S_{uv} – площі областей (D_1) та (E_1) відповідно. Відношення $\dfrac{S_{xy}}{S_{uv}}$ показує, як змінюється площа в околі точки B_1 при відображенні області (E) на область (D). Оскільки це відношення залежить від вибору області (E_1), введемо величину $|I| = \lim\limits_{d\to 0}\dfrac{S_{xy}}{S_{uv}}$, де d – діаметр області (E_1).

Для знаходження $|I|$ за (E_1) візьмемо прямокутний трикутник із вершинами $B_1(u;v)$, $B_2(u+\Delta u;v)$, $B_3(u;v+\Delta v)$, площа якого $S_{xy} = \dfrac{1}{2}\Delta u\Delta v$. Перетворення $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ переводить точки B_1, B_2, B_3 відповідно у точки $A_1(x(u,v);y(u,v))$, $A_2(x(u+\Delta u,v);y(u+\Delta u,v))$, $A_3(x(u,v+\Delta v);y(u,v+\Delta v))$,

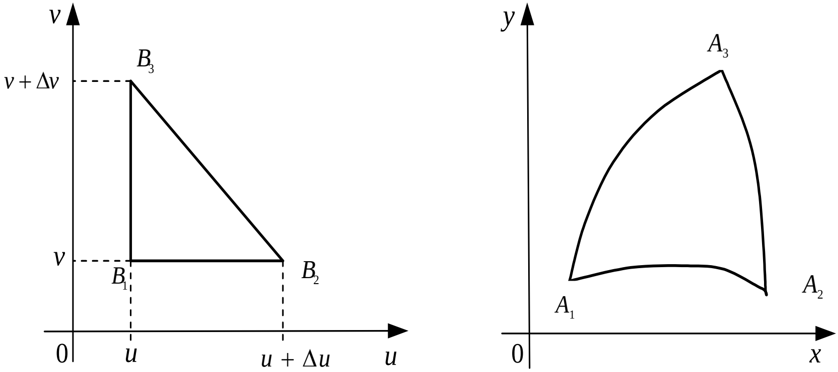


Рисунок 1.8

а прямолінійні відрізки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 – у дуги A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 (рис. 1.8).

Знайдемо площу S_{xy} одержаного криволінійного трикутника $A_1A_2A_3$.

При $\Delta u \to 0$ та $\Delta v \to 0$ дуги A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 також є досить малими й тому їх можна вважати прямолінійними відрізками, а прирости функцій $x(u,v)$ та $y(u,v)$ з досить великою точністю можна замінити відповідними диференціалами $x(u+\Delta u,v)-x(u,v)\approx x'_u\Delta u$, звідки

$$x(u+\Delta u,v)\approx x'_u\Delta u + x(u,v).$$

Аналогічно

$$x(u,v+\Delta v)\approx x'_v\Delta v + x(u,v),$$
$$y(u+\Delta u,v)\approx y'_u\Delta u + y(u,v),$$
$$y(u,v+\Delta v)\approx y'_v\Delta v + y(u,v).$$

Отже, маємо наближені значення координат вершин A_1, A_2, A_3, а площа S_{xy} криволінійного трикутника $A_1A_2A_3$ наближено визначається за формулою

$$S_{xy} \approx \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x'_u\Delta u & y'_u\Delta u \\ x'_v\Delta v & y'_v\Delta v \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|I(u,v)\right|\Delta u\Delta v,$$

де $I(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$ – ***визначник Остроградського – Якобі,*** або ***якобіан відображення***. Якщо $I(u,v)\neq 0$, одержимо $S_{xy} \approx \left|I(u,v)\right| \cdot S_{u,v}$. Величину $|I|$ називають ***коефіцієнтом викривлення площ***.

1.4.2. Перехід до нових змінних у подвійному інтегралі

Нехай маємо подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, де функція $f(x,y)$ неперервна в деякій однозв'язній області (D). Введемо замість x та y нові змінні u та v за допомогою співвідношень $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$, де функції $x(u,v),\ y(u,v)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку за змінними u і v в області (E), що є образом заданої області (D) у площині uOv, та $I(u,v)\neq 0$ в області (E). Розглянемо деяке (T)-розбиття області (E) на частини (E_k), $(k=1,...,n)$. При цьому область (D) також розіб'ється на частини $(D_k),\ k=1,\ldots,n$, причому довільній точці $B_k(u_k, v_k)\in(E_k), k=1,\ldots,n$ за формулами $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$ відповідає точка $P_k(x_k, y_k) \in (D_k)$ для $\forall\ k = 1,...,n$.

За доведеним вище площі $\Delta S(D_k)$ і $\Delta S(E_k)$ областей (D_k) і (E_k) відповідно зв'язані наближеною рівністю $S(D_k) \approx |I(u_k, v_k)| \cdot S(E_k)$, $k = 1,\ldots,n$, і спостерігається наближена рівність

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S(D_k) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k, v_k); y(u_k, v_k)) \cdot |I(u_k, v_k)| \cdot \Delta S(E_k) \qquad (1.17)$$

Перейдемо в (1.17) до границі при $d = \max\limits_{1 \le k \le n} diam(D_k) \to 0$ і $\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} diam(E_k) \to 0$:

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S(D_k) \approx$$

$$\approx \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k, v_k); y(u_k, v_k)) \cdot |I(u_k, v_k)| \cdot \Delta S(E_k).$$

У правій частині маємо інтегральну суму для функції $f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |I(u,v)|$ в області (E), що є неперервною в цій області і тому інтегровній у ній. Отже, ми одержали *формулу заміни змінних*

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(E)} f(x(u,v),\ y(u,v)) \cdot |I(u,v)| dudv. \qquad (1.18)$$

Зауважимо, що визначник $I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$

називається ***визначником Остроградського – Якобі,*** або ***якобіаном переходу***.

Потрібно зазначити, що, як і в одновимірному випадку, заміна змінних у подвійному інтегралі є важливим методом зведення інтеграла до вигляду, більш зручного для обчислення. Але для більш раціонального обчислення інтеграла цим методом іноді доцільно спростити не лише підінтегральну функцію, а й область інтегрування.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$, якщо область D – квадрат, обмежений прямими

$$x+y=1,\; x-y=1,\; x+y=3,\; x-y=-1.$$

Розв'язання. Покладемо $x+y=u,\; x-y=v$, тоді $x=\frac{1}{2}(u+v),\;\; y=\frac{1}{2}(u-v)$. Обчислимо якобіан переходу

$$I=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,\; |I|=\frac{1}{2}\cdot$$

Область (E) можна описати системою нерівностей $E=\{(u,v)|1\le u\le 3,-1\le v\le 1\}$. За формулою заміни змінних маємо

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_E u^3v^2\,dudv=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3du\int\limits_{-1}^1 v^2dv=\frac{20}{3}\cdot$$

1.4.3. Обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах

Відомо, що перехід від декартових координат x, y до полярних координат $\rho,\,\theta$ задається формулами

$$x=\rho\cos\theta,\;\; y=\rho\sin\theta. \qquad (1.19)$$

Це відображення не є однозначним. Виділимо з площини $O\theta\rho$ півсмугу, що визначається нерівностями $0 \le \rho < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi$.

Формули (1.19) відображають цю півсмугу на всю площину Oxy. Зокрема, будь-яка область (E), що міститься в цій півсмузі, відображається на деяку область (D) площини Oxy. Якщо область (E) не містить точок прямих $\theta = 2\pi$ або $\theta = 0$, а також прямої $\rho = 0$ (або містить тільки одну таку точку), то відображення (E) на (D) буде взаємно однозначним.

Припустимо, що область (E) площини $O\theta\rho$ лежить всередині смуги і відображається на область (D) Oxy.

Знайдемо якобіан переходу від декартової до полярної системи координат

$$|I(\rho,\varphi)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$$

Використовуючи загальну формулу заміни змінних у подвійному інтегралі, запишемо формулу для обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(E)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cdot\rho\, d\rho\, d\theta. \quad (1.20)$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область (D) – частина круга $x^2+y^2 \le a^2$, розміщена в першій чверті.

Розв'язання. При переході до полярних координат одержимо прямокутну область (E), що задається системою нерівностей $0 \le \rho \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Тому

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{(E)} \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^a \rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^a \right) d\theta = \frac{1}{3} a^3\, \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ за областю *D*, що обмежена лініями: $x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=2.$

Розв'язання. Якщо область *D* обмежена зліва і справа вертикальними прямими *x* = *a*, *x* = *b*, а знизу та зверху – кривими $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)$, причому функції $\varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x)$ – неперервні і $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ на проміжку $[a,b]$, тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \cdot$$

Заданий інтеграл має вигляд

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x+y)dy \cdot$$

Спочатку обчислимо інтеграл за змінною *y* (*x* – параметр):

$$\int\limits_0^2 (x+y)dy = x\left(y\Big|_0^2 \right) + \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_0^2 \right) = 2x+2 \cdot$$

Остаточно маємо

$$\int_0^1 dx\int_0^2 (x+y)\,dy=\int_0^1 (2x+2)dx=\left(x^2\Big|_0^1\right)+2\left(x\Big|_0^1\right)=1+2=3.$$

Приклад 2. Обчислити $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, якщо D – прямокутник $G=\{\,x|\ \ 1\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$.

Розв'язання. Відносно змінних x і y інтеграли $\int\frac{dx}{(x+y+1)^2}$ і $\int\frac{dy}{(x+y+1)^2}$ є табличними, тому подвійний інтеграл можна подати у вигляді

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}=\int_1^2 dx\int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2}=\int_1^2 dx\int_0^1 \frac{d(x+y+1)}{(x+y+1)^2}=$$

$$=\int_1^2\left(\left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^1\right)dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\left(-\ln(x+2)+\ln(x+1)\right)\Big|_1^2=-\ln 4+\ln 3+\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\ln\frac{9}{8}\cdot$$

Приклад 2. Перейти до полярних координат та обчислити інтеграл: $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$ за областю D, що обмежена лініями: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1.$

Розв'язання. Формули переходу такі:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}$$

Оскільки $x^2+y^2=\rho^2$, тоді

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\rho^2}\rho d\rho d\varphi\cdot$$

Областю інтегрування заданого інтеграла є чверть круга радіуса $R = 1$ із центром у початку координат. Тому в

області D_1 змінна ρ змінюється від 0 до 1 і $\varphi \in \left[0, \pi/2\right]$.
Таким чином, маємо

$$\iint\limits_{D_1} e^{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(e^{\rho^2}\Big|_0^1\right) d\varphi = \frac{e-1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{(e-1)\pi}{4}.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де

область D обмежена заданими кривими:

а) $\iint\limits_D x^2 y\, dxdy, \quad y = x^2, \quad y = 2x^2 - 1$;

б) $\iint\limits_D x^2 y^{-2}\, dxdy, \quad xy = 1, \quad x = 2, \quad y = 2\ (xy \geq 1)$;

в) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy}, \quad xy = 1, \quad y = x^3, \quad x = 2$;

г) $\iint\limits_D \frac{x^2\, dxdy}{1+y^2}, \quad y = tgx, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}$.

2. Змінити порядок інтегрування:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$;.

г) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3. Перейти до полярних координат і обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,\ D$ – круг $x^2+y^2 \leq 1$;

б) $\iint\limits_D (\tilde{o}^2 + \acute{o}^2)dxdy,\ D$ – круг $x^2 + y^2 \leq 2ax$;

в) $\iint\limits_D \acute{o}d\tilde{o}d\acute{o},\ D$ – верхній півкруг радіусом R із центром у точці (R; 0);

г) $\iint\limits_D arctg\,\dfrac{y}{x}\,dxdy,\ \ D$ – частина кільця,

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}.$

Задачі для самоперевірки

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

Відповідь: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \left(x + y^3\right)dxdy$, де $D = \left\{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\right\}$.

Відповідь: 7.

3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \left(x + y\right)dxdy$, якщо D обмежена параболою $y^2 = 2x$ та прямими $x + y = 4$ і $x + y = 12$.

Відповідь: $543\dfrac{11}{15}$.

4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, якщо D обмежена колом $x^2+y^2=1$. Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-4}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\frac{2y-3x}{x^2+y^2}dy$, виконавши перехід від прямокутних координат до полярних.
Відповідь: 24.

Питання для самоперевірки

1. Що називають циліндричним тілом, або циліндричним бруском? Проілюструйте цей об’єкт графічно.
2. У чому зміст задачі, що приводить до поняття подвійного інтеграла? (Задача про об’єм k-го циліндричного тіла).
3. Що називають подвійним інтегралом функції $f(x,y)$ за областю (D)? У чому міститься геометричний зміст подвійного інтеграла?
4. Які властивості має подвійний інтеграл? Сформулюйте їх та наведіть приклади. У чому зміст теореми про середнє значення функції $f(x,y)$ в замкненій області D?
5. Наведіть формулу, яка дозволяє обчислити подвійний інтеграл у прямокутній області.
6. Яка область (D) називається криволінійною першого (другого) роду, або елементарною відносно осі Ox (Oy)?
7. Як відбувається перехід до нових змінних у подвійному інтегралі? Що таке якобіан переходу?
8. Наведіть формулу для обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

2.1. Обчислення об’ємів тіл та площ плоских фігур

Розглядаючи задачу про знаходження об’єму циліндричного тіла, ми прийшли до поняття подвійного інтеграла й одержали формулу для його обчислення

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy, \tag{2.1}$$

де циліндричне тіло має твірні, паралельні осі Oz, обмежене знизу плоскою квадровною областю (D) площини Oxy, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ – неперервна та невід’ємна в області (D).

Приклад. Обчислити об’єм тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і $z = 0$, $x + z = 6$.

Розв’язання. Тіло, про яке йде мова, зверху обмежене площиною $x + z = 6$, знизу – площиною Oxy $(z = 0)$, а також поверхнями циліндрів $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 2.1).

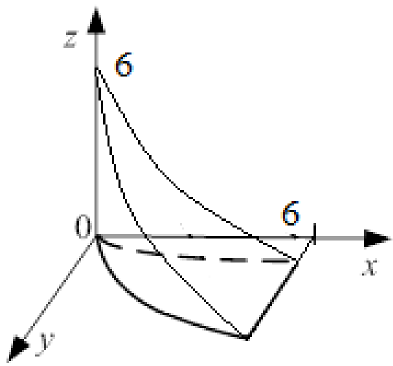


Рисунок 2.1

Основою цього тіла є область (D), обмежена прямими $x=0$ $x=6$ і параболами $y=\sqrt{x}$ і $y=2\sqrt{x}$ (рис. 2.2), або $0 \le x \le 6$, $\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}$.

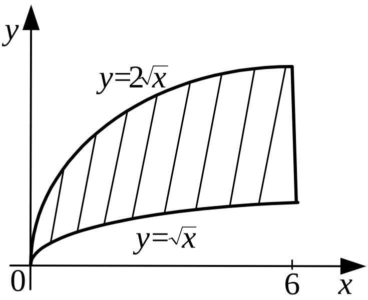


Рисунок 2.2

Оскільки геометричним зображенням функції $x+z=6$ є площина, що покриває зверху дане тіло, то ця функція і буде підінтегральною. Отже, шуканий об'єм знаходимо як

$$V=\iint\limits_{D}(6-x)\,dxdy$$

Оскільки область (D) є криволінійною трапецією першого типу, то дане тіло

$$V=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\int_0^6 \left(6y-xy\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=\int_0^6\left(6\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=4x^{3/2}\Big|_0^6-\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^6=\frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

Отже, $V=\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$ куб. од.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ і площиною $z = 0$.

Розв'язання. З'ясуємо вигляд і розміщення поверхні $z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$. Для цього застосуємо метод перерізів, тобто побудуємо перерізи даної поверхні координатними площинами й площинами їм паралельними.

1. Переріз площиною $xOy\,(z = 0)$ – еліпс із осями $a' = a,\, b' = \dfrac{a}{2}$.

2. Перерізи площинами, паралельними площині $Oxy,\ z = h$, – еліпси $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a(a-h)} + \dfrac{y^2}{(a(a-h)/4)} = 1 \\ z = h \end{cases}$.

3. Переріз площиною $Oxz\ (y = 0)$ – парабола з віссю симетрії Oz і вершиною $A(0,0,a)$ (гілки напрямлені вниз).

4. Переріз площиною $Oyz\ (x = 0)$ – парабола з віссю симетрії Oz і вершиною $A(0,0,a)$ (гілки напрямлені вниз).

Точки $B_1(a,0,0)$ і $B_2(-a,0,0)$ є точками перетину поверхні з віссю Ox; точки $C_1\left(0,\dfrac{a}{2},0\right)$ і $C_2\left(0,-\dfrac{a}{2},0\right)$ – точки перетину з віссю Oy; точка $A(0,0,a)$ – точка перетину з віссю Oz. Побудувавши дану поверхню і площину $z = 0$, одержимо шукане тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Очевидно, що функція

$z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$, є парною відносно змінних x та y, а тіло симетричне відносно координатних площин Oxz та Oyz. Тому досить обмежитись обчисленням об’єму його четвертої частини, розміщеної в першому октанті (рис. 2.3).

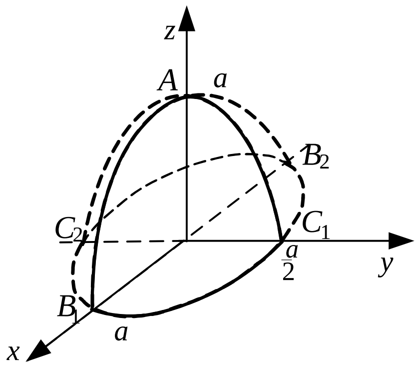


Рисунок 2.3

У нашому випадку підінтегральною функцією є $z = \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$, а областю інтегрування – частина еліпса з осями $a' = a,\ b' = \dfrac{a}{2}$, розміщена в першій чверті площини Oxy: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Тоді $\dfrac{1}{4}V = \iint\limits_{D} \dfrac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a} dxdy =$

$$=\int_0^a dx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a^2-x^2-4y^2}{a}\,dxdy = \int_0^a \left(ay - \frac{x^2 y}{a} - \frac{4y^3}{3a} \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2\sqrt{a^2-x^2}}{2a} - \frac{4\sqrt{a^2-x^2}^{\,3}}{24a} \right) dx =$$

$$= \frac{a}{3}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx - \frac{1}{3a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = a,\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt -$$

$$- \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt - \frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^3}{6}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{\pi a^3}{12} - \frac{a^3}{24}\left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{12} - \frac{\pi a^3}{48} = \frac{\pi a^3}{16}.$$

Отже, $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$ куб. од.

Зауваження. *З очевидної рівності* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta S_k = S(D)$, *де* $S(D)$ *– площа плоскої квадровної області* (D), *безпосередньо випливає й існування* $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta S_k = S(D)$, *тобто*

$$S(D)=\iint_D dxdy\,. \tag{2.2}$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases} x=4y-y^2 \\ x+y=6 \end{cases}$. Маємо $A(4{,}2)$, $B(3{,}3)$, область D (рис. 2.4) можна описати нерівностями $2\le y\le 3$, $6-y\le x\le 4y-y^2$.

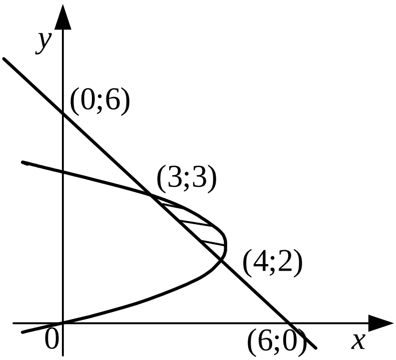


Рисунок 2.4

Одержимо

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2} dx=$$

$$=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy=\int_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\frac{1}{6} \quad \text{(кв.од.).}$$

2.2. Застосування подвійних інтегралів під час обчислення площ поверхонь

Як відомо, площі поверхонь за допомогою кратних інтегралів знаходили ще наприкінці XVIII століття.

Нехай поверхня *(S)* задана явним рівнянням $z = f(x,y)$, її проекція на площину *Oxy* є квадровною областю *(P)* (рис. 2.3), і в цій області функція $f(x,y)$ визначена однозначно, є неперервною і має неперервні частинні похідні першого порядку за змінними x та y. Потрібно знайти площу поверхні *(S)*.

Насамперед визначимо саме поняття площі поверхні. Розіб'ємо область *(P)* сіткою кусково-гладких кривих на n довільних частин: $(P_1),(P_2),...,(P_n)$. Через P_i позначимо площу фігури (P_i). Циліндричні стовпці, побудовані на кожній із них як на основі, розіб'ють поверхню *(S)* також на n частин: $(S_1),(S_2),...,(S_n)$. Візьмемо в кожній частині (P_i) (i = 1, 2,..., n) довільну точку $N_i(\xi_i,\eta_i)$, якій на частині поверхні (S_i) відповідатиме точка $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, де $\zeta_i = f(\xi_i,\eta_i)$. У кожній точці M_i $(i=\overline{1, n})$ побудуємо дотичну площину (T_i) і нормаль $\overline{n_i}$ до цієї поверхні. Якщо через γ_i позначити гострий кут між цією нормаллю і віссю *OZ*, то, як відомо, косинус цього кута виразиться формулою

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad (2.3)$$

де $p = f'_x(\xi_i,\eta_i)$, $q = f'_y(\xi_i,\eta_i)$, i = 1, 2,..., n.

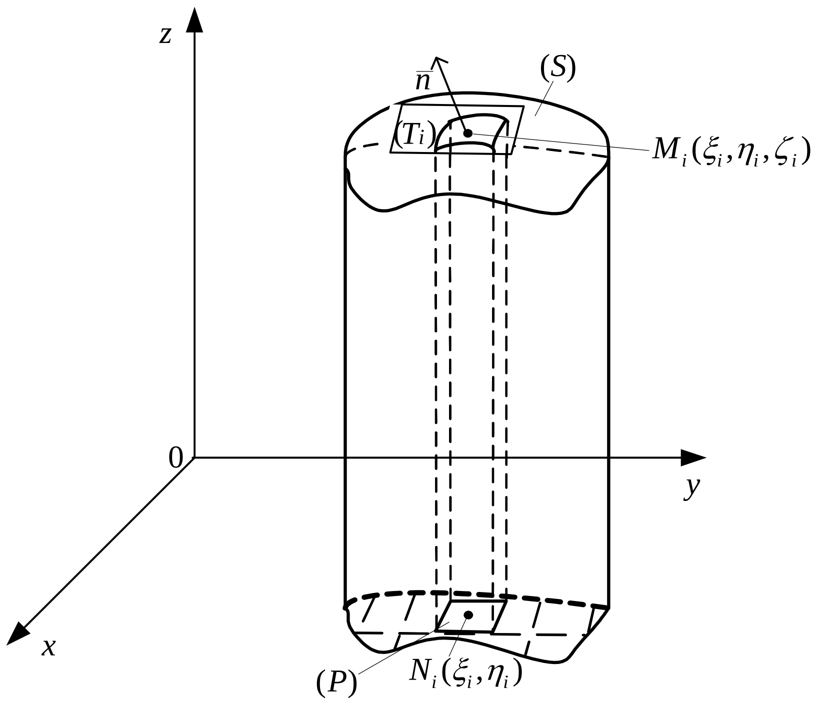


Рисунок 2.3

Кожний із циліндричних стовпців з основою (P_i) виріже на дотичній площині (T_i) плоску фігуру, яку також позначимо через (T_i), а її площу через T_i.

Якщо частини (P_i) розбиття області *(P)* стають усе меншими й меншими (при цьому враховуємо, що поверхня *(S)* гладка), то плоскі фігури (T_i) будуть усе ближче прилягати до відповідної частини поверхні *(S)*. Отже, можна вважати площу плоскої фігури (T_i) наближеною мірою площі частини (S_i) даної поверхні, а суму всіх таких площ

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i \tag{2.4}$$

наближеним значенням площі всієї поверхні *(S)*.

Під площею даної поверхні *(S)* будемо розуміти границю суми $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ за умови, що $\lambda \to 0$, де λ – довжина найбільшого з діаметрів областей (P_i).

Однак у 1883 році німецький математик Герман Шварц показав некоректність такого означення площі поверхні. Він побудував поверхню, для якої такої границі не існує. Ця поверхня була названа циліндром Шварца (рис. 2.4).

Рисунок 2.4

Вона є циліндром, висота якого ділиться площинами, паралельними до основи циліндра, на n рівних частин. У коло, що є перетином площини і циліндра, вписують *k*-кутники, причому сусідні *k* - кутники повернуті відносно один одного на кут $\dfrac{180^\circ}{k}$ $(k \geq 3, k \in N)$.

Вершини *k*-кутників з'єднують так, щоб утворилася поверхня з 2*nk* трикутників; якщо *n, k* $\to \infty$, то розміри цих трикутників є нескінченно малими. Зрозуміло, що за збільшення k побудована поверхня все менше відрізняється від циліндра і можна очікувати, що при n, $k \to \infty$ її площа (тобто сума площ усіх трикутних граней) наближається до площі бокової поверхні циліндра. Проте це не так.

Проекція кожної грані k-кутника на основу циліндра є трикутником, утвореним стороною цього k-кутника та серединою дуги кола, що стягується цією стороною (рис. 2.5).

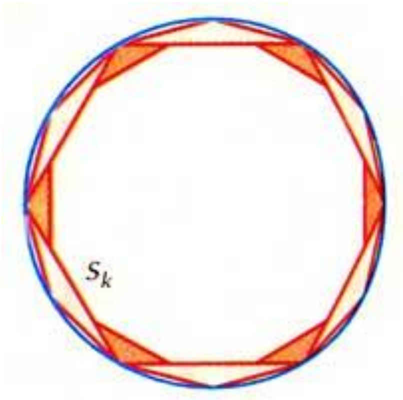


Рисунок 2.5

Площа кожного такого трикутника залежить лише від k, позначимо її через S_k. Оскільки площа проекції може лише зменшитися, то повна поверхня циліндра Шварца S є не меншою за $2nkS_k$. Тепер для кожного k візьмемо $n = n(k)$, яке залежить від k, що $n(k) \cdot S_k > 1$. За такого вибору $n(k)$ маємо $S > 2k$, а це означає, що площа S необмежено зростає при $k \to \infty$.

Отже, приклад поверхні Шварца показує, що визначення площі поверхні через наближення многогранниками може бути некоректним.

Покажемо, що у випадку кусково-гладкої поверхні границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ існує і не залежить ні від способу розбиття області *(P)* на частини, ні від вибору точок $N_i(\xi_i, \eta_i)$ на кожній з них. Площа такої поверхні виражається так:

$$S = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dxdy \,. \qquad (2.5)$$

Дійсно, кут γ_i, між нормаллю n_i і віссю *Oz* дорівнює куту між дотичною площиною до поверхні в точці M_i і площиною *Oxy*. Тому для площ плоских фігур (T_i) і (P_i) (з яких друга є ортогональною проекцією першої на площину Oxy) матимемо:

$P_i = T_i \cos\gamma_i$, звідки $T_i = \dfrac{P_i}{\cos\gamma_i}$,

де $T_i = \sqrt{1 + p^2 + q^2} P_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Нагадаємо, що площа проекції плоскої фігури на деяку площину дорівнює добутку площі проектованої фігури та косинусу кута між площинами, в яких знаходяться ці фігури. Підставляючи це значення T_i в суму (2.4), одержимо:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} P_i \,.$$

Ця сума є інтегральною для функції $\phi(x, y) = \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$.

Оскільки функція $\varphi(x, y)$ неперервна в області *(P)* (частинні похідні неперервні за умовою), то границя цієї суми при $\lambda \to 0$ існує і дорівнює подвійному інтегралу (2.5).

Зауваження. *Якщо поверхня S задана як* $x = \varphi(y, z)$ *або* $y = \varphi(x, z)$, *то для площі S цієї поверхні існують аналогічні формули:*

$$S = \iint\limits_{(B)} \sqrt{1 + \varphi_y'^2(y,z) + \varphi_z'^2(y,z)}\,dydz\,,$$

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x,z) + \varphi_z'^2(x,z)}\,dxdz\,,$$

де (B) і (D) – проекції поверхні (S) відповідно на площини Oyz і Oxz.

Розглянемо приклади обчислення площі поверхні через подвійний інтеграл.

Приклад. Знайти площу частини поверхні $x^2 + y^2 = a^2$, вирізану площинами $x + z = 0$, $x - z = 0$ ($x > 0,\ y > 0$).

Розв'язання. Ця поверхня є еліптичним циліндром. Побудуємо його, використовуючи метод перерізів.

1. Ця поверхня симетрична відносно всіх координатних площин.
2. а) З віссю *Ox* поверхня перетинається у точках $A_1(a,0,0)$ та $A_2(-a,0,0)$;

   б) з віссю *Oy* поверхня перетинається у точках $B_1(0,a,0)$ та $B_2(0,-a,0)$.
3. Знаходимо лінії перетину з координатними площинами:

   а) $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

   Перерізом є точки кола $x^2 + y^2 = a^2$. Це коло одержуємо і при перерізі поверхні будь-якою іншою площиною, що паралельна площині *Oxy*.

б) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

Перерізом є прямі $y = \pm a$.

в) $\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

Перерізом є прямі $x = \pm a$.

Побудувавши площини, одержуємо тіло, площу поверхні якого потрібно знайти (рис. 2.6).

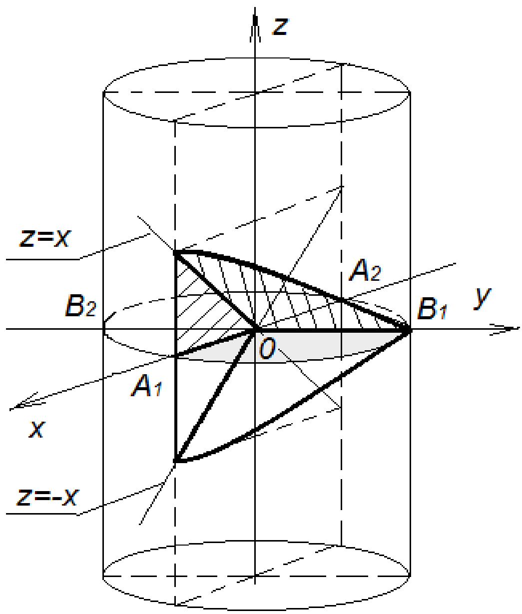


Рисунок 2.6

Площу цієї поверхні обчислимо за формулою

$S = \iint\limits_{(E)} \sqrt{1 + f_x'^2(x,z) + f_z'^2(x,z)}dxdz$, де E – область інтегрування. У цьому разі областю інтегрування буде $E = \{(x,z) : -x \le z \le 0,\ 0 \le z \le x,\ 0 \le x \le a\}$.

Знайдемо частинні похідні функції $y = \sqrt{a^2 - x^2}$:
$y_z' = 0, \quad y_x' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, їх квадрати відповідно:

$(y_z')^2 = 0,\ (y_x')^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$.

Отже, $S = \iint\limits_E \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}}dzdx$.

Ураховуючи, що область інтегрування є симетричною відносно осі Ox, маємо

$$S = 2\int_0^a dx \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dz = 2a\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 2a^2.$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює $2a^2$ (кв. од.).

Приклад. Знайти площу поверхні P, якщо P – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ вирізана циліндрами $x^2 + y^2 = \pm 2x$, які розміщені усередині сфери

Розв'язання. Знайдемо область інтегрування E. Покладемо $z = 0$, одержимо: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4$ або $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 2.7).

Це два круги R = 1 всередині одного круга з радіусом R = 2.

Розглянемо один із них: $E = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$. Знайдемо частинні похідні підінтегральної функції

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$: $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

квадрати похідних відповідно

дорівнюють $(z_x')^2=\dfrac{x^2}{4-x^2-y^2}$ та $(z_y')^2=\dfrac{y^2}{4-x^2-y^2}$.

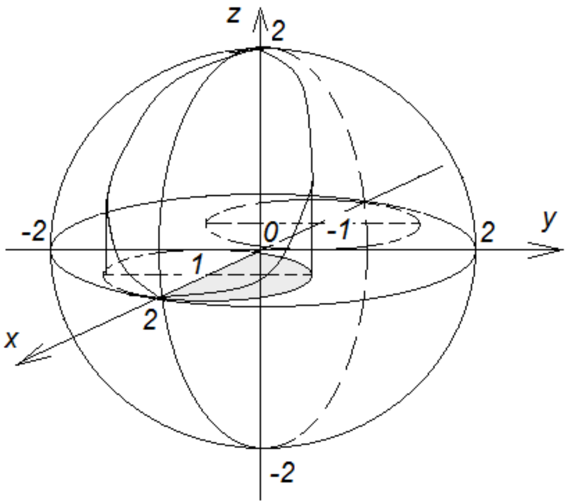


Рисунок 2.7

Підставляючи одержані дані у формулу для обчислення площі поверхні, маємо $S=4\iint\limits_E\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{4-(x^2+y^2)}}dxdy$. (Ми врахували симетрію області інтегрування).

Оскільки маємо многочлен вигляду (x^2+y^2), то більш зручно перейти до полярної системи координат: $x=\rho\cos\Theta,\ y=\rho\sin\Theta$. Тоді задана область інтегрування у полярних координатах є такою: $E=\left\{(\rho,\Theta):\rho=2\cos\Theta, 0\le\Theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$, а площа поверхні буде обчислюватися таким чином:

$$S = 8\iint\limits_E \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{4-\rho^2}}\rho d\Theta d\rho = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int\limits_0^{2\cos\Theta} \rho\sqrt{\frac{4}{4-\rho^2}}d\rho =$$

$$= 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int\limits_0^{2\cos\Theta} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho,$$

де внутрішній інтеграл

$$\int\limits_0^{2\cos\Theta} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho = \left| \begin{array}{ll} 4-\rho^2 = t & \\ -2\rho d\rho = dt & \\ \rho_1 = 2\cos\Theta, & t_1 = 4\sin^2\Theta \\ \rho_2 = 0, & t_2 = 4 \end{array} \right| =$$

$$= -\int\limits_4^{4\sin^2\Theta} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}\Big|_4^{4\sin^2\Theta} = 4\left(1-\sin\Theta\right),$$

а зовнішній $8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(1-\sin\Theta\right)d\Theta = 32(\frac{\pi}{2}-1)\left(\textit{кв. од.}\right).$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює $32\ (\frac{\pi}{2}-1)$ (кв. од.).

Приклад. Знайти площу частини поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, вирізану циліндром $x^2+y^2=1$ та площинами $z=0,\quad y=0$. ($z\geq 0,\quad y\geq 0$)

Розв'язання. Методом перерізів установлюємо вигляд і властивості заданих поверхонь у декартовій системі координат. Даний конус є симетричним відносно всіх координатних площин.

1. Із координатними осями поверхня перетинається в єдиній точці $O(0,0,0)$.

2. а) $\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$ Перерізом є точка *O(0, 0, 0).*

б) $\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 = z^2. \end{cases}$

Перерізом є дві прямі $z = \pm x$, що перетинаються на початку координат;

в) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 = z^2. \end{cases}$

Перерізом є дві прямі $z = \pm y$, що перетинаються на початку координат.

Перерізом конуса і циліндра є коло $x^2 + y^2 = 1$, що знаходиться у площинах $z = 1$ та $z = -1$ (рис. 2.8).

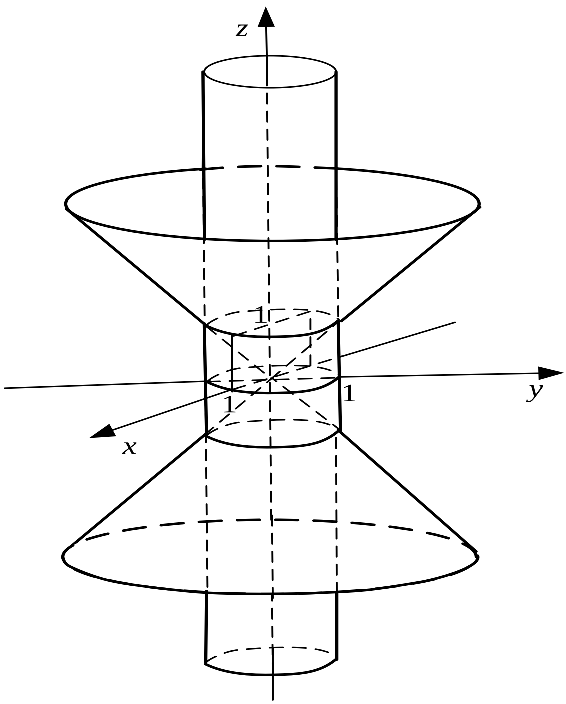


Рисунок 2.8

Розглянемо детальніше ту частину конуса, поверхню якої будемо знаходити (рис. 2.9).

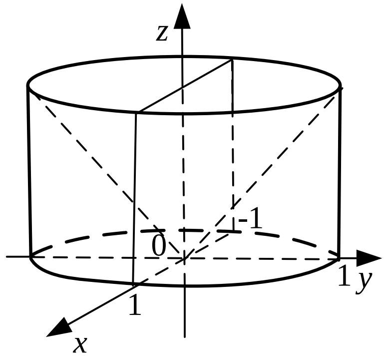


Рисунок 2.9

E – область інтегрування і $E = \left\{ (x, y):\ x^2 + y^2 \le 1,\ \ \mathrm{y} \ge 0 \right\}$.

Знайдемо частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, їх квадрати відповідно

$(z_x')^2 = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ та $(z_y')^2 = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$.

За формулою для обчислення площі поверхні маємо

$$S = \iint_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} \iint_E dxdy .$$

За умови цієї задачі доцільніше перейти до полярної системи координат. Тоді область інтегрування має вигляд $E' = \left\{ (\rho, \Theta) : \rho \le 1, 0 \le \Theta \le \pi \right\}$, а площа поверхні дорівнює

$$S = \sqrt{2} \iint_{E'} \rho d\rho d\Theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} d\Theta \int_0^1 \rho d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi} d\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi .$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pi$ (кв. од.).

Приклад. Знайти площу поверхні $(x+y)^2+2z=1$, якщо $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

Розв'язання. Розглянемо задану поверхню у першому октанті. Методом перерізів встановлюємо вигляд поверхні.

1. Знайдемо точки перетину даної поверхні з координатними осями у першому октанті:

а) точкою перетину поверхні з віссю *Oz* є точка $C(0,0,\frac{1}{2})$;

б) точкою перетину поверхні з віссю *Oy* є точка *D(0,1,0)*;

в) точкою перетину поверхні з віссю *Ox* є точка *D(1,0,0)*.

2. Знайдемо лінії перерізу з координатними площинами:

а) $\begin{cases} z=0 \\ (x+y)^2+2z=1, \end{cases}$ перерізом є пряма $y=1-x$;

б) $\begin{cases} y=0 \\ (x+y)^2+2z=1, \end{cases}$ перерізом є парабола $z=\dfrac{1-x^2}{2}$;

в) $\begin{cases} x=0 \\ (x+y)^2+2z=1, \end{cases}$ перерізом є парабола $z=\dfrac{1-y^2}{2}$.

Поверхню $(x+y)^2+2z=1$, обмежену площинами $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, зображено на рис. 2.10.

Область інтегрування у декартових координатах $E=\{(x,y):\ y\le 1-x, x\ge 0, y\ge 0\}$.

Знайдемо частинні похідні функції $z=\dfrac{1-(x+y)^2}{2}$:

$z'_x=-(x+y)$ та $z'_y=-(x+y)$, їх квадрати відповідно дорівнюють: $z'^2_x=(x+y)^2$ і $z'^2_y=(x+y)^2$.

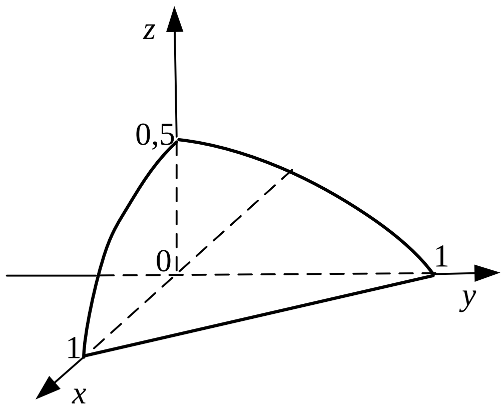


Рисунок 2.10

Формула для знаходження площі поверхні, має вигляд $S=\iint\limits_{E}\sqrt{1+2(x+y)^2}\,dxdy$. Очевидно, що для зручності обчислень потрібно перейти до узагальнених полярних координат: $x=\rho\cos^2\Theta, y=\rho\sin^2\Theta$, при цьому областю інтегрування є область $E'=\left\{(\rho,\Theta):\rho=1, 0\le\Theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

Обчислимо якобіан:

$$I(\rho,\Theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\Theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^2\Theta & -2\rho\cos\Theta\sin\Theta \\ \sin^2\Theta & 2\rho\sin\Theta\cos\Theta \end{vmatrix}=$$

$$=2\rho\sin\Theta\cos^3\Theta+2\rho\cos\Theta\sin^3\Theta=\rho\sin 2\Theta.$$

Отже

$$S=\iint\limits_{E'}\sqrt{1+2\rho^2}\,\rho\sin 2\Theta d\rho d\Theta=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\Theta d\Theta\int\limits_0^1\rho\sqrt{1+2\rho^2}\,d\rho=\frac{1}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\Theta d\Theta=\frac{1}{6}.$$ Шукана

площа заданої поверхні дорівнює $\frac{1}{6}$ (кв. од.).

Приклад. Знайти площу поверхні P, де P – частина поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$.

Розв'язання. Очевидно, що областю інтегрування є область, обмежена контуром $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$. У цьому разі для зручності обчислення площі поверхні доцільно перейти до полярної системи координат, тоді областю інтегрування буде область

$$(D') = \left\{(\rho, \varphi) : \rho = \sqrt{\sin 2\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Побудуємо її, встановивши відповідність між ρ та φ за допомогою таблиці:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	0	0,93	1	0,93	0	0	0,93	1	0,93	0

Дана крива зображена на рис. 2.11.

Частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ дорівнюють $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ та $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Знайдемо

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\,dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_{(D)} dxdy.$$

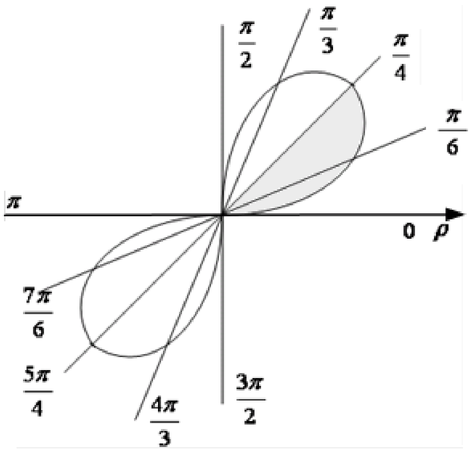


Рисунок 2.11

Для зручності обчислень перейдемо до полярної системи координат та одержимо:

$$S=\sqrt{2}\iint\limits_{D}\rho d\rho d\varphi=4\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho d\rho=2\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi d\varphi=\sqrt{2}$$

.Отже, площа фігури S = $\sqrt{2}$ (кв. од.).

2.3. Обчислення фізичних величин

2.3.1. Маса плоскої пластини

Нехай маємо плоску фігуру (P), по якій неперервно розподілена з поверхневою густиною $\rho=\rho(x,y)$, де $\rho(x,y)$ – неперервна функція. На плоскій фігурі (P) виберемо довільну точку $M(x,y)$ і нехай (D) – довільний окіл цієї точки, що повністю належить (P). Позначимо через $m(D)$ – масу плоского околу (D), а через $S(D)$ – його площу. Розглянемо границю відношення $m(D)$ до

$S(D)$ за умови, що $S(D)\to 0$. Саме її ми і будемо називати поверхневою густиною маси в точці $M(x,y)$ фігури (*P*), тобто $\rho(x,y)=\lim\limits_{S(D)\to 0}\dfrac{m(D)}{S(D)}$.

Якщо маса розподілена рівномірно по області, то її поверхнева густина є сталою, тобто $\rho(x,y)=const$. Розглянемо випадок, коли маса розподілена нерівномірно.

Нехай m – маса плоскої фігури (*P*). Розіб'ємо цю фігуру сіткою кусково-гладких кривих на n довільних частин: $(P_1),(P_2),...,(P_n)$. Позначимо через $S(P_1),S(P_2),...,S(P_n)$ їх площі відповідно, а через $m_1,m_2,...,m_n$ – маси. У кожній частині (P_k), $k=1,2,...,n$, візьмемо довільно точку $M(\xi_k,\eta_k)$ і обчислимо в ній густину $\rho(\xi_k,\eta_k)$. Якщо частини розбиття є досить малими, то внаслідок неперервності функції $\rho(x,y)$ можна вважати, що маса m_k фігури (P_k) наближено дорівнює $\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot S(P_k)$, а маса m усієї фігури (*P*) наближено дорівнює

$$m=\sum_{k=1}^{n}m_k=\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot S(P_k). \qquad (2.6)$$

Тоді $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot S(P_k)$, де $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\lambda_k$ (λ_k – діаметри частинних областей (P_k), $k=1,2,...,n$).

Оскільки ми маємо границю інтегральної суми, складеної для неперервної функції $\rho(x,y)$ в області (*P*), то ця границя існує і дорівнює $\iint\limits_{(P)}\rho(x,y)dxdy$, тобто

$$m = \iint\limits_{(P)} \rho(x, y)\, dxdy\,. \qquad (2.7)$$

Приклад.Знайти масу пластини D густини

$\gamma = yx^3$, якщо $D:\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 2.12). Тоді за формулою (2.7) одержимо:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} yx^3dy = \int\limits_0^2 x^3dx \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^3(4 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

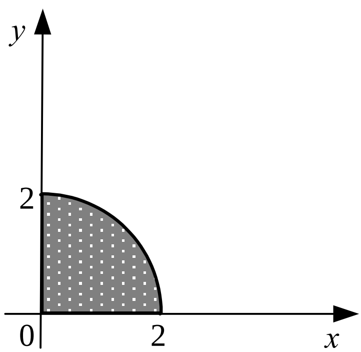


Рисунок 2.12

2.3.2. Моменти інерції, статичні моменти, координати центра тяжіння плоскої пластини

Статичні моменти пластини. Статичні моменти пластини відносно осей Ох та Оу знаходять за формулами

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy\,,\;\; M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy \qquad (2.8)$$

Координати центра мас. Нехай $((x_c, y_c)$ – координати центра мас пластини, тоді

$$x_c = \frac{M_y}{m},\; y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (2.9)$$

де m, M_x, M_y відповідно обчислюються за (2.7), (2.8).

Для однорідної пластини ($\gamma(x,y) = const$) формули для координат центра мас набирають вигляду

$$x_c = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{S},\;\; y_c = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S}\;, \qquad (2.10)$$

де S – площа пластини.

Моменти інерції відносно осей координат. Моменти інерції пластини I_{ox}, I_{oy} відносно осей Ох та Оу відповідно та момент інерції I_0 відносно початку координат знаходять за формулами

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)dxdy\,,\; I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)dxdy\,,\; I_0 = I_x + I_y. \quad (2.11)$$

Приклад. Знайти момент інерції однорідної круглої пластини $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 4b^2$ відносно початку координат.

Розв'язання. Внаслідок однорідності пластини покладемо її густину $\gamma(x,y) = 1$.

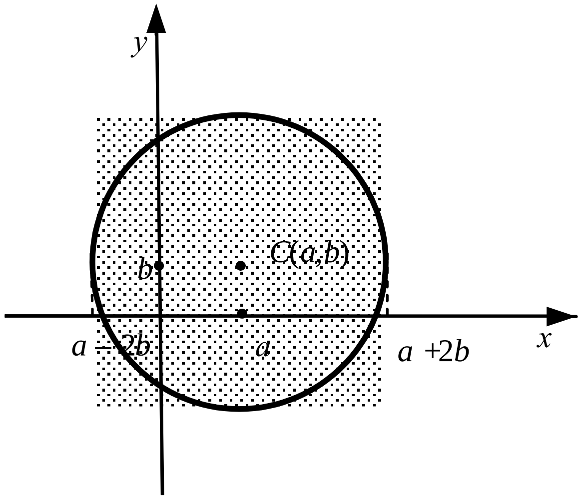


Рисунок 2.13

Центр круглої пластини розміщений у точці $C\,(a, b)$, а її радіус дорівнює $2b$. Рівняння меж пластини мають вигляд:

$$y = b \pm \sqrt{4b^2 - (x-a)^2}.$$

$$I_0 = \iint_D \gamma(x,y)(x^2+y^2)dxdy = \int_{a-2b}^{a+2b} dx \int_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_{a-2b}^{a+2b} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} =$$

$$= \int_{a-2b}^{a+2b} x^2 \left(b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} - b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right) dx +$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{a-2b}^{a+2b}\left(\left(b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\right)^3-\left(b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\right)^3\right)dx=$$

$$=I_1+I_2.$$

Обчислимо кожен з одержаних інтегралів окремо. Для обчислення інтеграла I_1 зробимо заміну: $x-a=2b\sin t,\ x=a+2b\sin t,\ dx=2b\cos t dt,$ якщо $x = a$-$2b$, тоді $t=-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = a$+$2b$ – тоді $t=\frac{\pi}{2}$.

$$I_1=2\int\limits_{a-2b}^{a+2b}x^2\sqrt{4b^2-(x-a)^2}dx=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(a+2b\sin t\right)^2 4b^2\cos^2 t dt=$$

$$=8a^2b^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt+32ab^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt+32b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt=$$

$$=4a^2b^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt-32ab^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t d\cos t+8b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=$$

$$=4\pi a^2b^2-0+4b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=4\pi a^2b^2+4\pi b^4.$$ Для обчислення інтеграла I_2 перетворимо підінтегральну функцію за формулою різниці кубів:

$$\left(b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\right)^3-\left(b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\right)^3=$$

$$=2\sqrt{4b^2-(x-a)^2}(7b^2-(x-a)^2).$$

Тоді

$$I_2 = \frac{2}{3}\int\limits_{a-2b}^{a+2b} \sqrt{4b^2 - (x-a)^2}\left(7b^2 - (x-a)^2\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4b^2\cos^2 t\left(7b^2 - 4b^2\sin^2 t\right)dt =$$

$$= \frac{56}{3}b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \frac{32}{3}b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{28}{3}\pi b^4 - \frac{4}{3}\pi b^4 = 8\pi b^4.$$

Відповідно $I_0 = I_1 + I_2 = 4\pi b^2\left(a^2 + 3b^2\right).$

Приклад. Знайти центр тяжіння однорідної пластини D, обмеженої кривими $y^2 = ax$ і $y = 2\sqrt{2}a^2x^2$, $y \ge 0$.

Розв'язання. Оскільки пластина однорідна, тобто її густина стала, то можна взяти її за одиницю.

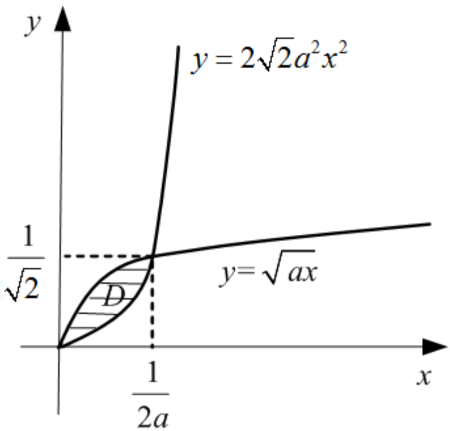


Рисунок 2.14

Тоді $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}, \quad y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}.$

Знайдемо масу пластини, а для цього визначимо абсцису точки перетину ліній (рис. 2.14), що її обмежують:

$$\sqrt{ax} = 2\sqrt{2}a^2x^2, \quad ax = 8a^4x^4,$$

$$ax\left(8a^3x^3 - 1\right) = 0, \quad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2a}.$$

$$m = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} dx \int\limits_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} \left(\sqrt{ax} - 2\sqrt{2}a^2x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{\sqrt{2}}{12a};$$

$$M_y = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} x\,dx \int\limits_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} \left(\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}a^2x^3\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{a}}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2x^4\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{3\sqrt{2}}{160a^2};\, x_c = \frac{3\sqrt{2}}{160a^2} : \frac{\sqrt{2}}{12a} = \frac{9}{40a}.$$

$$M_x = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} dx \int\limits_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} y\,dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} \left(\frac{ax}{2} - 4a^4x^4\right)dx =$$

$$= \left(\frac{a}{4}x^2 - \frac{4a^4}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{3}{80a},\, y_c = \frac{3}{80a} : \frac{\sqrt{2}}{12a} = \frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

Розв’язування типових задач

Розглянемо на прикладах розв’язування основних типів задач на застосування подвійного інтеграла.

Приклад 1. Записати подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ в області D, обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = x^2$, у вигляді повторних інтегралів двома способами (рис. 2.15).

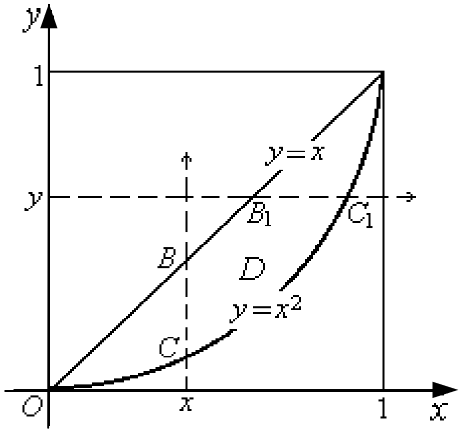


Рисунок 2.15

Розв'язання. На рис. 2.15 зображена область інтегрування D. Знайдемо точки перетину ліній $y = x$ і $y = x^2$: $O(0;\ 0),\ A(1;\ 1)$.

Спочатку застосуємо формулу, за якою внутрішній інтеграл беремо за y, вважаючи x сталою, а зовнішній інтеграл – за x. Область D знаходиться у смузі між прямими $x = 0$ і $x = 1$, відповідно, $0 \le x \le 1$. Щоб знайти межі зміни для y, візьмемо на осі Ox довільну точку $x \in (0,1)$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі Oy у додатному напрямку. Вона перетинає межу області D спочатку в точці C, потім у точці B (рис. 2.15). У точці C ордината $y = x^2$, у точці B ордината $y = x$, тобто $x^2 \le y \le x$.

Отже, $D = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$. Тоді за формулою (1.15) маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

Застосуємо до обчислення подвійного інтеграла формулу (1.16). У цьому разі внутрішній інтеграл беремо за змінною x, вважаючи y сталою, а зовнішній – за y. Область D знаходиться у смузі між прямими $y = 0$ і $y = 1$, відповідно $0 \le y \le 1$. Для того щоб установити межі зміни змінної x, візьмемо на осі Oy довільну точку $y \in (0,1)$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі Ox у додатному напрямку. Оскільки точка B_1, що знаходиться на межі області D, має абсцису $x = y$, а точка C_1 – межі області D, де пряма виходить з області, має абсцису $x = \sqrt{y}$, то змінна x змінюється від y до $\sqrt{y}$. Отже, $D = \{(x, y)\colon 0 \le y \le 1, y \le x \le \sqrt{y}\}$. Тоді маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx.$$

Розв'язання. На відміну від першого завдання, тут не задана явна область інтегрування D, ми повинні з'ясувати її вигляд за відомими межами інтегрування у повторних інтегралах. Позначимо через D_1 область інтегрування першого повторного інтеграла, D_2 – другого. Враховуючи верхні й нижні межі інтегрування, маємо, що область D_1 задається нерівностями $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le \sqrt{y}$, тобто $D_1 = \{(x, y)\colon 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{y}\}$, а область D_2 –

$1 \le y \le e$, $\ln y \le x \le 1$, тобто $D_2 = \{(x, y)\colon 1 \le y \le e, \ln y \le x \le 1\}$. Очевидно, $D = D_1 \cup D_2$ (рис. 2.16).

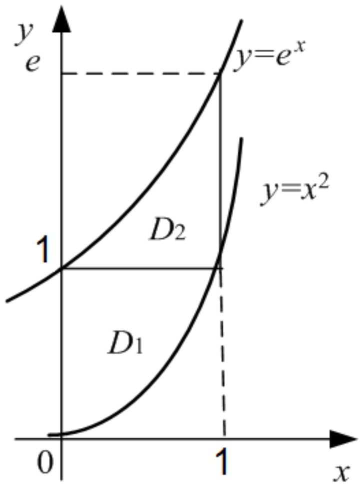


Рисунок 2.16

Область D розміщена у вертикальній смузі між прямими $x = 0$, $x = 1$ та між лініями $y = x^2$, $y = e^x$. Це означає, що $D = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le e^x\}$. Тоді за формулою (1.15) одержимо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{e^x} f(x,y)\, dy.$$

Приклад 3. Обчислити $I = \int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\, dy$.

Розв'язання

$$\int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}dy = \begin{vmatrix} 4+x+y=t \\ dy=dt \\ y=0, \quad t=4+x \\ y=5-x, t=9 \end{vmatrix} =$$

$$=\int_0^5 dx\int_{4+x}^{9}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\int_0^5\left(t^{3/2}\Big|_{4+x}^{9}\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^5\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{(4+x)^3}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left(27x\Big|_0^5-\frac{2}{5}(4+x)^{5/2}\Big|_0^5\right)=\frac{2}{3}\left(27\cdot 5-\frac{2}{5}\left(3^5-2^5\right)\right)=\frac{506}{15}.$$

Приклад 4. Обчислити $I=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx\int\limits_0^{a} ydy$.

Розв'язання

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx\int_0^{a} y\,dy=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\cdot\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^a\right)dx=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot\pi.$$

Приклад 5. Обчислити: $I=\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, де область D обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 2$ і гіперболою $xy = 1$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 2.17). Розв'язуючи систему, що складається з рівнянь прямої $y = x$ і гіперболи $xy = 1$, одержимо координати точки їх перетину $A(1, 1)$. Для обчислення інтеграла за областю D зручно розбити область на дві частини D_1 та D_2 і скористатися формулою (1.15). Якщо $0 \le x \le 1$, то y буде змінюватися від 0 до x, а якщо $1 \le x \le 2$, то y буде змінюватися від 0 до $1/x$ відповідно.

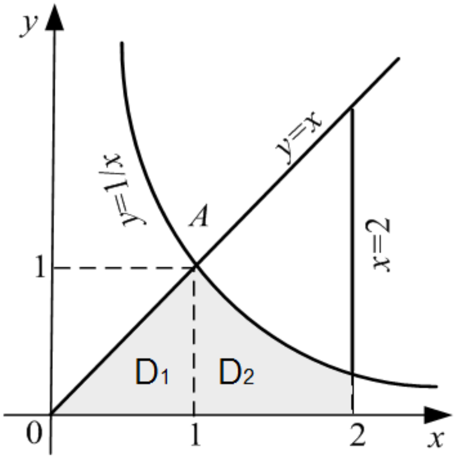


Рисунок 2.17

Отже, $D_1 = \{ (x; y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \}$, $D_2 = \{ (x; y): 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1/x \}$.

Тоді

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y^2 dy + \int_1^2 dx \int_0^{1/x} x^2 y^2 dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^x y^2 dy + \int_1^2 x^2 dx \int_0^{1/x} y^2 dy =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \left(\frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^x + \int_1^2 x^2 dx \left(\frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{1/x} = \frac{1}{3} \int_0^1 x^5 dx + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{x^6}{18} \Bigg|_0^1 + \frac{\ln x}{3} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} \ln 2 .$$

Якщо для знаходження інтеграла застосувати формулу(1.16), то обчислення будуть більш громіздкими.

Приклад 6. Обчислити $I = \iint\limits_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 0$, $y = \sqrt{2\pi}$, $y = 2x$.

Розв'язання. Знайдемо абсцису точки перетину прямих y=2x і $y=\sqrt{2\pi}$: $\sqrt{2\pi}$ =2x $\Rightarrow$ x = $\sqrt{\pi/2}$. Область D зображена на рис. 2.18. $D = \{(x;y)\colon\ 0 \le y \le \sqrt{2\pi},\ 0 \le x \le y/2\}$.

За формулою (1.16) маємо

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 dy \int_0^{\frac{y}{2}} \cos\frac{xy}{2} dx = \int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 \frac{2}{y} \sin\frac{xy}{2}\bigg|_0^{y/2} dy = 2\int_0^{\sqrt{2\pi}} y \sin\frac{y^2}{4} dy =$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin\frac{y^2}{4} d\left(\frac{y^2}{4}\right) = -4\cos\frac{y^2}{4}\bigg|_0^{\sqrt{2\pi}} = -4\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 4.$$

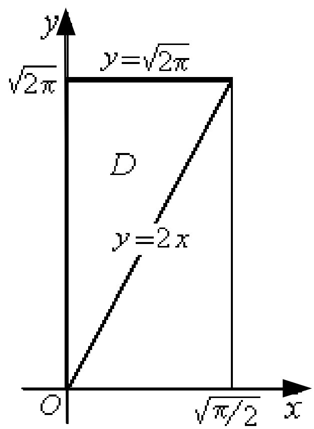


Рисунок 2.18

Приклад 7. Обчислити: $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де D – область, обмежена лініями x = 0, y = 0, x + y = 3.

Розв'язання. Пропонуємо самостійно побудувати область інтегрування. Вона має вигляд $D = \{(x;\ y)\colon\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 - x\}$. За формулою (1.15) одержимо:

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^3 \left(x \int_0^{3-x} dy + \int_0^{3-x} ydy \right) dx = \int_0^3 \left(x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(3x - x^2 + \frac{9}{2} - 3x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{9}{2}x - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{6} = \frac{18}{2} = 9.$$

Зауваження. У випадках, коли областю інтегрування D є круг, або частина круга, або коли підінтегральна функція містить у собі двочлен вигляду (x^2+y^2), обчислення подвійного інтеграла спрощується підчас переходу до полярних координат (див. формули (1.19), (1.20). У цьому разі двочлен (x^2+y^2) перетворюється на r^2.

Приклад 8. Обчислити $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$,

де $D = \{(x,y): x^2+y^2 \le 4, y \ge 0\}$.

Розв'язання. Перейдемо у рівнянні кола $x^2+y^2 = 4$ до полярних координат: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Маємо $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4$ або $r^2 = 4$, звідси $r = 2$.

Областю інтегрування є частина круга, розміщена у півплощині $y \ge 0$ (рис. 2.19*а*).

Отже, кут φ змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. Маємо, що при $0 \le \varphi \le \pi$, полярний радіус r буде змінюватися від 0 до 2: $D = \{(r, \varphi): 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le 2\}$. За формулами (1.19), (1.20) одержимо

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-r^2}\, r\,dr = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(4-r^2\right)^{1/2} d\left(4-r^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{2\left(4-r^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^2 d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(0 - \frac{16}{3}\right) d\varphi = \frac{8}{3}\varphi\Bigg|_0^\pi = \frac{8}{3}\pi\,.$$

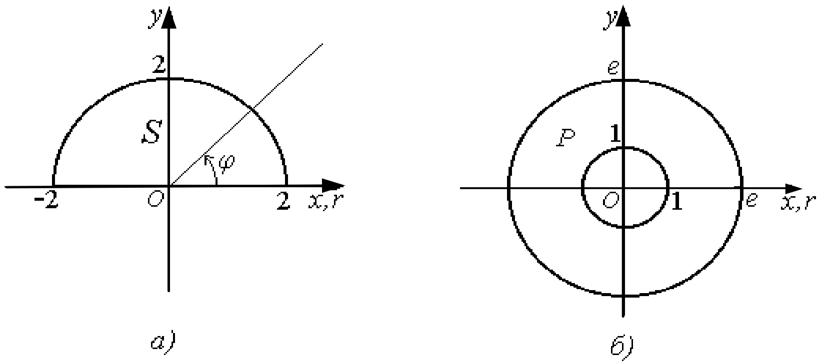


Рисунок 2.19

Приклад 9. Обчислити $\iint\limits_P \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$, де P – кільце між колами радіусів e і 1 із центром на початку координат.

Розв'язання. На рис. 2.19*б* зображена область P. Рівняння заданих кіл у декартових координатах мають вигляд $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=e^2$, а в полярних ці кола задаються формулами $r=1$ і $r=e$. Відповідно $P=\{(r,\varphi): 0\le\varphi\le 2\pi, 1\le r\le e\}$. За формулами (1.19), (1.20) знаходимо

$$\iint\limits_P \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^e\frac{\ln r^2}{r^2}\cdot r\cdot dr=\left|\begin{array}{l}\ln r^2=t\\ \frac{1}{r^2}\cdot 2rdr=dt\\ r=1,\ t=0\\ r=e,\ t=2\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 tdt=\int\limits_0^{2\pi}\frac{t^2}{4}\Bigg|_0^2 d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi\,.$$

Приклад 10. Обчислити площу фігури D, обмеженої лініями $y^2=4x+4$, $y=2-x$.

Розв'язання. Дана фігура зображена на рис. 2.20.

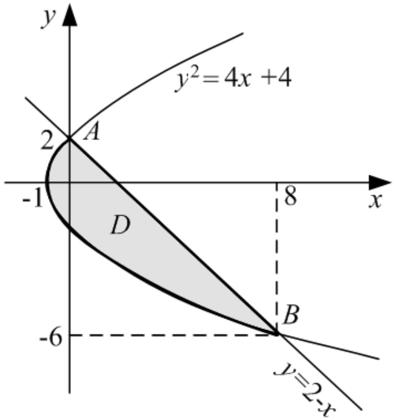


Рисунок 2.20

Розв’язуючи системою рівнянь $\begin{cases} y^2 = 4x + 4, \\ y = 2 - x, \end{cases}$

знайдемо точки перетину ліній: $(2-x)^2 = 4x + 4$, $x^2 - 8x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $y_1 = 2$, $y_2 = -6$. Отже, лінії перетинаються в точках $A(0, 2)$, $B(8, -6)$, а область D є такою: $-6 \le y \le 2$, $\frac{y^2-4}{4} \le x \le 2 - y$. За формулою (2.2) знайдемо площу заданої фігури D:

$$S(D) = \int_{-6}^{2} dy \int_{(y^2-4)/4}^{2-y} dx = \int_{-6}^{2} \left(x \Big|_{(y^2-4)/4}^{2-y} \right) dy =$$

$$= \int_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2-4}{4} \right) dy = \int_{-6}^{2} \left(3 - y - \frac{y^2}{4} \right) dy =$$

$$= \left(3y - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{12} y^3 \right) \Bigg|_{-6}^{2} = \frac{64}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Приклад 11. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^2 = a^2(4x^2+y^2)$, де $a > 0$.

Розв'язання. Очевидно, що задана крива є симетричною відносно осі Ox, осі Oy та початку координат. Перейдемо до полярних координат:

$r^4 = a^2r^2\left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$, $\quad r^2 = a^2\left(3\cos^2\varphi + 1\right)$ або $r = a\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}$.

Графік кривої подано на рис. 2.21.

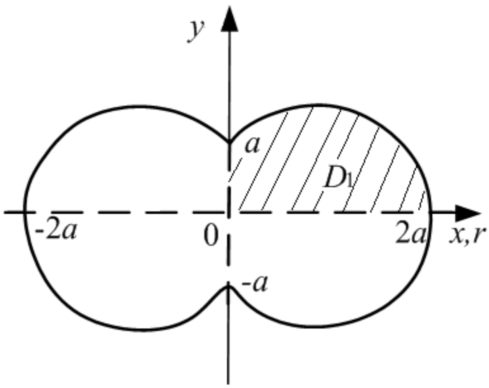


Рисунок 2.21

Унаслідок симетрії вся площа заданої фігури $S = 4S_1$, де $S_1 = S(D_1)$, $D_1=\{(r,\varphi)$: $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le r \le a\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}\}$. Отже,

$$S(D) = 4\iint\limits_{D_1} dxdy = 4\iint\limits_{D_1} rdrd\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{3\cos^2\phi+1}} rdr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{3\cos^2\phi+1}} d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\varphi+1\right)d\varphi = 2a^2\cdot 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi +$$

$$+2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi + 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= 5a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi d\varphi = 5a^2\varphi\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3a^2}{2}\sin 2\varphi\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\pi\, a^2\left(\textit{кв. од.}\right).$$

Перш ніж перейти до розв’язання прикладів на знаходження об'ємів, зауважимо, що під час обчислення об’єму будь-якого тіла корисно зробити просторовий рисунок, який давав би уявлення про форму даного тіла. Якщо ж побудова такого рисунка є складною, то можна обмежитися зображенням області інтегрування на площині *Oxy*. Однак і в цьому разы необхідно уявляти собі, хоча б у найзагальніших обрисах, те тіло, об'єм якого знаходимо.

Приклад 12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2+y^2$, координатними площинами і площиною $x+y = 1$.

Розв’язання. Поверхня параболоїда обертання $z = x^2+y^2$ утворюється обертанням навколо осі *Oz* параболи $z = x^2$. Рівняння $x + y = 1$ у просторі визначає площину, паралельну осі *Oz*, перерізом якої з площиною *Oxy* є пряма $x+y = 1$. Тіло, об’єм якого необхідно обчислити, зображене на рис. 2.22. Зверху воно обмежене ввігнутою поверхнею параболоїда $z = x^2 + y^2$, знизу – площиною *Oxy*, спереду – площиною $x+y = 1$, зліва – площиною *Oxz* ($y = 0$), позаду – площиною *Oyz* ($x = 0$). Дане тіло можна вважати циліндричним, отже для обчислення його об’єму можна використати формулу $V = \iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right)dxdy$.

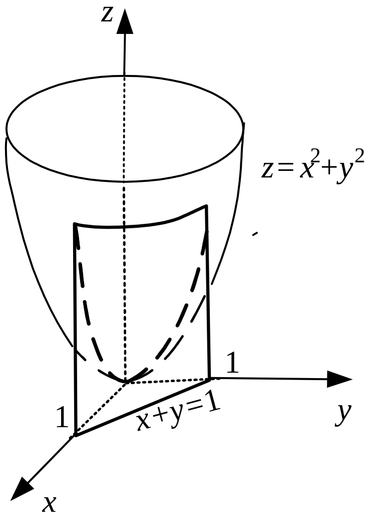


Рисунок 2.22

$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, де $D = \{(x,y)\text{: } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ – прямокутний трикутник.

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2\left(1-x\right)+\frac{1}{3}\left(1-x\right)^3\right)dx=\frac{1}{6}\left(\textit{куб. од.}\right).$$

Приклад 13. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 2 - x - y$, $y = x^2$, $y = x$, $z = 0$.

Розв'язання. Поверхня $y = x^2$ є параболічним циліндром з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною параболою $y = x^2$ у площині Oxy. Похила площина $z = 2 - x - y$ відтинає на осях координат рівні відрізки (по дві одиниці довжини). Площина $y = x$ проходить через вісь Oz і пряму $y = x$ у площині Oxy, $z = 0$ – рівняння площини Oxy. Тіло, обмежене цими поверхнями, зображене на рис. 2.23).

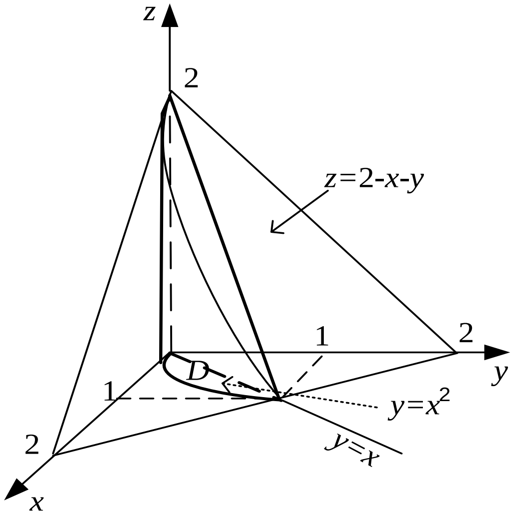


Рисунок 2.23

Дане тіло циліндричне, воно обмежене поверхнею $z = 2 - x - y$, отже його об'єм знайдемо як

$V = \iint\limits_D (2 - x - y)dxdy$, де $D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$.

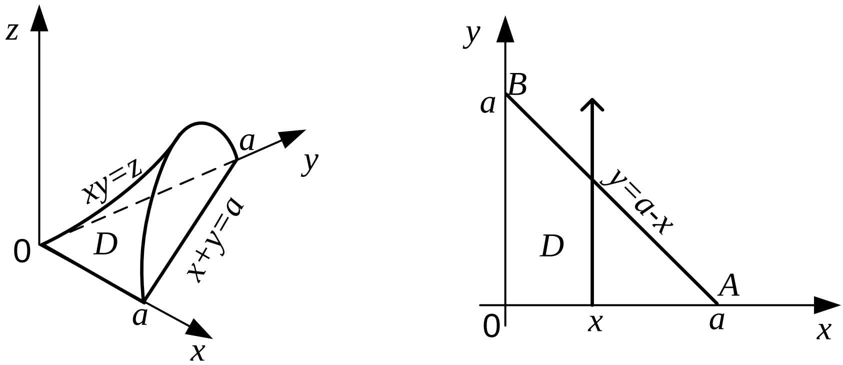
$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(2 - x - y\right) dy = \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4\right) dx = \frac{11}{60}\left(куб.\ \ од.\right).$$

Ми пропонуємо самостійно з'ясувати, чому саме так визначені межі інтегрування у внутрішньому і зовнішньому інтегралах.

Приклад 14. Обчислити об'єм тіла, обмеженого гіперболічним параболоїдом $z = xy$ і площинами $x + y = a$, $z = 0$.

Розв'язання. Задане тіло зображене на рис. 2.24 *а*, на рисунку 2.24 *б* подана проекція цього тіла на площину *Oxy*.



а) *б*)

Рисунок 2.24

$$V=\iint\limits_{D} xydxdy=\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{a-x} ydy=\int\limits_0^a xdx\,\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{a-x}=\frac{1}{2}\int\limits_0^a x\left(a-x\right)^2 dx=\frac{a^4}{24}.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчислити інтеграли і побудувати область інтегрування:

а) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \sin x dy$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{1} y^4 dy$; г) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.

2. Перейти до полярних координат та обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$; в) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$;

б) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$; г) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$.

3. Знайти площу фігури, що обмежена параболами: $y^2=10x+25$ та $y^2=-6x+9$.

4. Знайти площу фігури, що обмежена лінією

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}.$$

5. Обчислити такі повторні інтеграли:

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 \left(x^2+2y\right)dx$; в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$; г) $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4y}^{5} (x+2y)dx$.

6. Написати рівняння ліній, що обмежують області, на які поширені нижчезазначені подвійні інтеграли, і зобразити ці області:

а) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$; в) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_y^{10-y} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$; г) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy$.

7. Змінити порядок інтегрування в наступних подвійних інтегралах:

а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$; в) $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$; г) $\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$.

8. Обчислити такі подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_{(S)} xdxdy$, де S – трикутник із вершинами O (0; 0), A (1; 1), B (0; 1);

б) $\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, де S – частина круга радіуса *a* із центром у точці O (0; 0), що знаходиться у першій чверті;

в) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}dxdy$, де S – трикутник із вершинами O (0; 0), A (1; -1), B (1; 1);

г) $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}dxdy$, де S – криволінійний трикутник OAB, обмежений параболою $y^2 = x$ і прямими x = 0, y = 1.

Задачі для самоперевірки

1. Записати подвійний інтеграл від функції *f* (*x*,*y*) за областю *D* у вигляді повторних інтегралів двома способами. Область *D* обмежена лініями *x* + *y* = 2, $x^2 + y^2 = 4$ і розміщена в першій чверті.

Відповідь:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

2. Записати подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ за областю D у вигляді повторних інтегралів двома способами. Область D обмежена лініями $xy = 4$, $x = y$, $x = 4$.

Відповідь:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_2^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{x} f(x,y)dy = \int_1^2 dy \int_{\frac{4}{y}}^{4} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x,y)dx.$$

3. Замінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. Відповідь: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

4. Замінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$. Відповідь: $\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)dx \int_2^4 dy \int_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x,y)dx$

.

5. Замінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$. Відповідь: $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

6. Замінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$. Відповідь: $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)dx$.

7. Замінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$. Відповідь: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

8. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \int_0^a y dy$. Відповідь: $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

9. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^3}^{x} (x-y)dy$. Відповідь: $112\frac{8}{105}$.

10. Обчислити інтеграл $\int\limits_3^4\int\limits_1^2 \frac{dxdy}{(x+y)^2}$. Відповідь: $\ln\frac{25}{24}$.

11. Обчислити $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y dxdy$, де D: $0\leq x\leq\pi$, $0\leq y\leq \pi/2$.

Відповідь: $(e-1)(e^{\pi}-1)$.

12. Обчислити $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$, де D обмежена лініями

$y = x^2 + 3$, $y = 4x$, $x=0$. Відповідь: $\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Обчислити $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, де D обмежена лініями

$y = x^2$, $x = y^2$. Відповідь: $\frac{33}{140}$.

14. Обчислити $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, де D обмежена лініями:

$y = x$, $y + x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.

15. Обчислити $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$, де D обмежена

лініями: $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 1$. Відповідь: 0.

16. Обчислити $\iint\limits_D y\ln x dxdy$, де D обмежена лініями: $xy = 1$,

$y = \sqrt{x}$, $x = 2$. Відповідь: 5 (2 ln 2-1)/8.

17. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, де D: $x^2 + y^2 \leq 1$,

$x \geq 0$, $y \geq 0$. Відповідь: $\dfrac{\pi(\pi-2)}{8}$.

18. Обчислити $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, де D – частина круга радіуса R=2 із центром на початку координат. Відповідь: $2\pi\,(e^4-1)$.

19. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 - x^2$, $y = x$. Відповідь: 4,5.

20. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$. Відповідь: $\sqrt{2}-1$.

21. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$y = 2x - x^2$, $y = x^3$. Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

22. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:
$y^2 = x$, $y^2 = 8x$, $xy = 1$, $xy = 8$. Відповідь: 7ln2.

23. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією

$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$. Відповідь: a^2.

24. Знайти площу області D, обмеженої лініями $y = 2^{\pi}$,

$y = 2^{-2\pi}$, $y = 4$. Відповідь: $12 - \dfrac{9}{2\ln 2}$.

25. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і площинами $y + x + z = 3$, $z = 0$.

Відповідь: 3π.

26. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = x^2 + 1$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ і розміщеного в першому октанті. Відповідь: 12.

27. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Відповідь: $\dfrac{abc}{6}$.

28. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $z = xy$, $z = 0$. Відповідь: π.

29. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + z – 2 = 0. Відповідь: $\frac{2}{3}$.

30. Знайти координати центра мас однорідної плоскої пластини, обмеженої параболами $y^2 = x$ та $x^2 = y$.

Відповідь: $x_c = \frac{9}{20}, y_c = \frac{9}{20}$.

Питання для самоперевірки

1. Як знайти об'єм циліндричного тіла, обмеженого знизу плоскою квадровною областю (D) площини Oxy, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$? Запишіть формулу.
2. Надайте формулу обчислення площі плоскої області за допомогою подвійного інтеграла у прямокутній та полярній системах координат.
3. Виведіть формулу обчислення площі поверхні за допомогою подвійного інтеграла.
4. Яка поверхня була названа циліндром Шварца?
5. Запишіть формули площі поверхонь, якщо поверхня S задана рівнянням $x = \varphi(y, z)$ або $y = \varphi(x, z)$.
6. Як знайти масу плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла?
7. Запишіть формули для знаходження статичних моментів плоскої пластини.
8. Як знайти координати центра мас плоскопаралельної пластини?
9. За якими формулами знаходять моменти інерції щодо осей координат плоскої пластини?

РОЗДІЛ 3. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

3.1. Задача, що приводить до поняття потрійного інтеграла

Розглянемо ***задачу про масу матеріального тіла.*** Нехай масу розподілено за замкненою кубовною (такою, що має об’єм) областю (V) з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$. Потрібно знайти масу заданого матеріального тіла.

Відомо, що маса однорідного матеріального тіла з густиною $\rho = \rho_0$ визначається за формулою $m = \rho_0 V$, де V – об’єм тіла. Для неоднорідного тіла обчислювати масу таким способом не можна. Тому застосуємо метод, аналогічний методу знаходження об’єму.

Розіб’ємо тіло (V) сіткою поверхонь довільно на n частин (V_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$, попарно без спільних внутрішніх точок, об’єми цих частин позначимо через ΔV_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$. У кожній області (V_k) виберемо довільним чином точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Припустимо, що густина в кожній області (V_k) стала і дорівнює $\rho(x_k, y_k, z_k)$. Тоді величина $\rho(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta V_k$ є наближеним значенням маси тієї частини тіла, що займає область (V_k), а сума $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta V_k$ наближено визначає масу всього тіла. Точне значення маси заданого тіла одержимо, якщо в сумі S перейти до границі за умови, що $d = \max\limits_{1\le k\le n} diam(V_k) \to 0$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, тобто

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k . \qquad (3.1)$$

Таким чином, приклад знаходження маси тіла зводиться до знаходження границі вигляду (3.1), що пов'язана з поняттям потрійного інтеграла.

3.2. Потрійний інтеграл та умови його існування

Нехай функцію $u = f(x, y, z)$ визначено в замкненій обмеженій кубовній області $(V) \subset R^3$. Розіб'ємо область (V) сіткою поверхонь на n довільних частин (V_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$, (T-розбиття області (V)), об'єми яких позначимо через ΔV_k відповідно. У кожній області (V_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$, візьмемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, і складемо суму

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k . \qquad (3.2)$$

Суму S називають ***інтегральною сумою*** для функції $f(x, y, z)$ в області (V), складеною для даного T-розбиття області (V) і заданого вибору точок $M_k \in (V_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Нехай $d_k = diam\,(V_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $d(T) = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$.

Якщо при $d(T) \to 0$ інтегральні суми (3.2) мають границю що, дорівнює числу I, то це число називають ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x, y, z)$ в області (V) і позначають

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV \text{ або } \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\,. \quad (3.3)$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k\,.$$

Якщо ця границя існує, то функцію $f(x,y,z)$ називають ***інтегровною за Ріманом*** в області (V).

Справедлива теорема, яка є достатньою умовою інтегрованості функції:

Теорема. *Будь-яка функція $f(x,y,z)$, неперервна в замкненій обмеженій кубовній області (V), інтегровна в цій області.*

Потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок функції трьох змінних. Теорія потрійного інтеграла в більшості випадків аналогічна теорії подвійного інтеграла. Тому властивості потрійних інтегралів аналогічні властивостям подвійних і доречним є зупинитися лише на питанні про обчислення потрійних інтегралів.

3.3. Обчислення потрійних інтегралів

Теорема (про обчислення потрійного інтеграла в прямокутному паралелепіпеді). *Нехай функція $f(x,y,z)$ інтегровна в прямокутному паралелепіпеді $(P)=\{(x,y,z): a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2, a_3 \le z \le b_3\}$. Якщо для кожної фіксованої точки (x,y) прямокутника $(D)=\{(x,y): a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2\}$ існує інтеграл*

$F(x,y)=\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$, *то існує також і подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(D)} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$, *причому*

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми про зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку прямокутної області інтегрування. Якщо до умов цієї теореми додати умову існування інтеграла $\int\limits_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$ для кожної фіксованої точки $x \in [a_1, b_1]$, то існуватиме повторний інтеграл $\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$.

Тоді справедлива формула

$$\iiint\limits_{(P)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{a_2}^{b_2} dy\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz. \quad (3.4)$$

Зауваження. Можна одержати формули зведення потрійного інтеграла до повторного, де інтегрування відбувається за змінними x, y та z у тій чи іншій послідовності. Зокрема, при обчисленні потрійного інтеграла по області (P) від неперервної функції $f(x,y,z)$ порядок інтегрування у повторному інтегралі за змінними x, y і z може бути довільним.

Теорема (про обчислення потрійного інтеграла за довільною областю). *Якщо функція* $f(x,y,z)$

інтегровна в обмеженій області (V), *що визначається нерівностями* $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$, *де* $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – *неперервні функції, і для кожної фіксованої точки* $(x,y) \in (D) = \{y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$, *існує інтеграл* $F(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, *то існує також і подвійний інтеграл*

$$\iint\limits_{(D)} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \text{, причому}$$

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \quad (3.5)$$

Теорему сприймаємо без доведення (рис. 3.1).

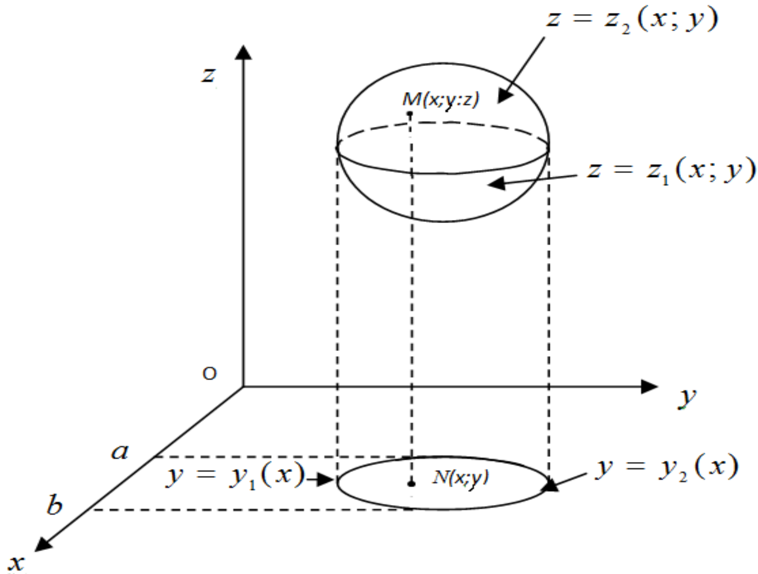


Рисунок 3.1

Аналогічно можна одержати інші формули обчислення потрійного інтеграла, в яких інтегрування за змінними x, y і z здійснюється в іншому порядку.

3.4. Побудова поверхонь та тіл, обмежених цими поверхнями в декартових координатах.

Уведемо означення основних понять, що будуть використовуватись у подальшому.

Поверхнею називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$. Крім вищезазначеного неявного способу задання, поверхня може бути задана явно, якщо одну з змінних, наприклад *z*, можна виразити через інші: $z = f(x, y)$.

Тілом називається зв'язний простір, обмежений замкненою поверхнею. Іноді тілом називають компактну множину, що має внутрішні точки. Елементарна геометрія визначає тіло як «частину простору, обмежену з усіх сторін». У «Началах» Евкліда тілом називається «те, що має довжину, ширину і глибину».

Розглянемо деякі поверхні до другого порядку включно та тіла, обмежені цими поверхнями.

Почнемо з найпростішого вигляду поверхні – площини. ***Площиною*** називають множину точок, що задовольняють рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$.

Якщо $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то площина паралельна осі *OX*, якщо $A \neq 0,\ B = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$, то площина паралельна осі *OY*, якщо $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C = 0,\ D \neq 0$, то площина паралельна осі *OZ*.

Якщо $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0,\ D = 0$, то площина містить ось *OX*, якщо $A \neq 0,\ B = 0,\ C \neq 0,\ D = 0$, то площина містить вісь *OY*, якщо $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C = 0,\ D = 0$, то площина містить вісь *OZ*.

Якщо $A = 0,\ B = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$, то площина паралельна координатній площині *OXY*, якщо $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D \neq 0$, то площина паралельна координатній площині *OYZ*, якщо $A = 0,\ B \neq 0,\ C = 0,\ D \neq 0$, то площина паралельна координатній площині *OXZ*.

Якщо $A = 0,\ B = 0,\ C \neq 0,\ D = 0$, то маємо рівняння самої координатної площини *OXY*, при $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 0$ одержимо координатну площину *OYZ*, якщо $A = 0, B \neq 0, C = 0, D = 0$, то дана площина є площиною *OXZ*.

Площину також можна задати рівнянням у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.6)$$

Це задання є зручним для побудови. Якщо площину задано рівнянням (3.6), то у просторі вона будується так, як показано на рис. 3.2.

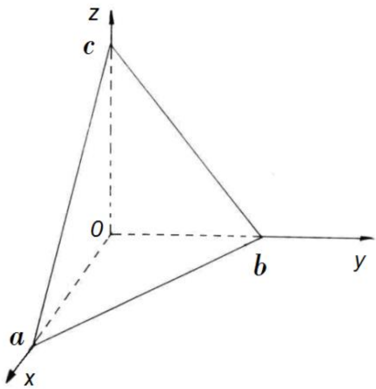


Рисунок 3.2

Розглянемо поверхні другого порядку. Всі поверхні другого порядку можна утворити рухом прямої твірної) або лінії другого порядку. Зазначимо, що найпростішими виглядами рухів є обертання і паралельне перенесення. Більшість поверхонь другого порядку одержують обертанням ліній другого порядку навколо осі й рівномірним стисненням або розтягненням одержаної поверхні обертання в певному напрямі. Потрібно зауважити, що існують винятки. Так, наприклад, гіперболічний параболоїд не належить до цієї групи поверхонь, оскільки його не можна утворити обертанням, а лише паралельним перенесенням параболи.

Загалом поверхнею другого порядку називають множину всіх точок простору, координати яких задовольняють рівняння другого степеня:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+ 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

де $a_{11}, a_{22}, ..., a_{00}$ – дійсні числа, і не всі коефіцієнти при членах другого степеня дорівнюють нулю.

У цьому параграфі не розглядатимуться дослідження загального рівняння поверхні другого порядку. Розглянемо лише основні типи таких поверхонь, використовуючи їх канонічні рівняння. Дамо означення поверхні обертання.

Означення. Поверхню, яка разом із кожною своєю точкою містить усе коло, одержане обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої *d*, називають ***поверхнею обертання***.

Пряму *d*, навколо якої виконують обертання, називають віссю обертання. Обертання точки навколо осі відбувається в площині, перпендикулярній до осі. В перетині поверхні обертання площинами, перпендикулярними до осі обертання одержуються кола, які називають паралелями. Площини, що проходять через вісь обертання, перетинають поверхню обертання по лініях, які називають меридіанами.

Будь-яке рівняння вигляду $x^2+y^2=f(z)$ є рівнянням поверхні обертання навколо осі OZ.

Зауваження. Аналогічно знаходимо рівняння поверхонь обертання лінії навколо осей OX і OY.

До поверхонь обертання належать деякі конічні й циліндричні поверхні.

Дамо означення циліндричній поверхні.

Означення. Поверхня, яка має таку властивість, що разом із кожною своєю точкою M вона містить усю пряму, що проходить через M, паралельну ненульовому вектору $\vec{p}$, називається ***циліндричною поверхнею,*** або ***циліндром***.

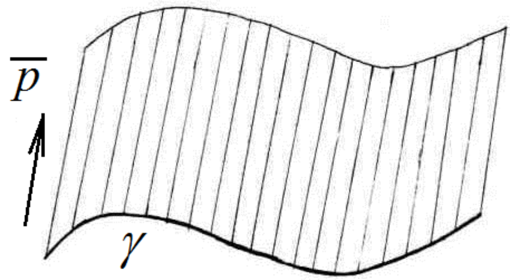


Рисунок 3.3

Прямі, що належать циліндричній поверхні й паралельні вектору $\vec{p}$, називаються ***твірними*** цієї поверхні.

Циліндрична поверхня може бути утворена таким чином. Нехай γ – деяка лінія, а $\vec{p}$ – ненульовий вектор. Поверхня, утворена всіма прямими, кожна з яких проходить через деяку точку лінії γ паралельно вектору $\vec{p}$, буде циліндричною (рис. 3.3). У цьому випадку γ буде називатися ***напрямною поверхні*** і є справедливим твердження: якщо в просторі дана прямокутна система координат *OXYZ* і в площині *OXY* лінія задана рівнянням

$$F(x, y) = 0, \qquad (3.8)$$

то це рівняння визначає в просторі циліндричну поверхню із твірними, паралельними осі *OZ*.

Зауваження. Якщо рівняння $G(x, z) = 0$ у площині *OXZ* визначає лінію γ', то це рівняння в просторі визначає циліндричну поверхню, в якої твірні паралельні осі *OY*. Аналогічно рівняння $H(z, y) = 0$ у площині *OYZ* визначає лінію γ'', а в просторі – циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі *OX*.

Якщо рівняння (3.8) є рівнянням другого порядку відносно x і y (тобто γ – лінія другого порядку), то циліндрична поверхня з напрямною γ і твірними, паралельними осі *OZ*, є ***циліндричною поверхнею другого порядку,*** або ***циліндром другого порядку***. Якщо напрямною циліндра є еліпс, гіпербола, парабола, то цей циліндр називається еліптичним, гіперболічним, параболічним відповідно. Можливий випадок, коли циліндр другого порядку розпадається на пару площин.

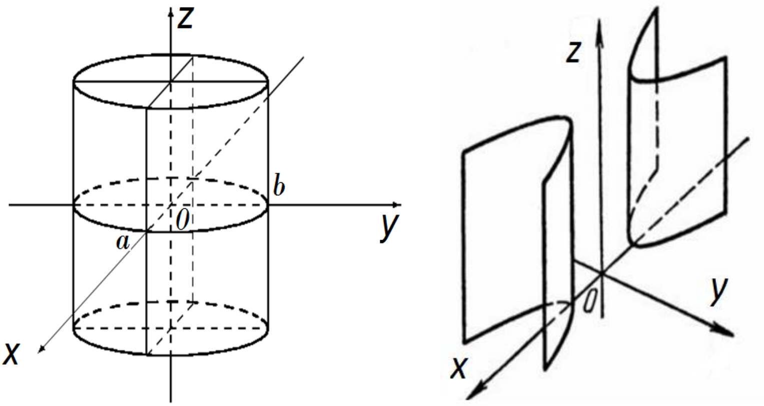
Якщо вибрати прямокутну систему координат так, щоб твірні циліндра були паралельні осі *OZ*, а напрямна γ у площині *OXY* мала канонічне рівняння, то вищезазначені циліндричні поверхні визначаються такими рівняннями:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – еліптичний циліндр (рис. 3.4 а);

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гіперболічний циліндр (рис. 3.4 б);

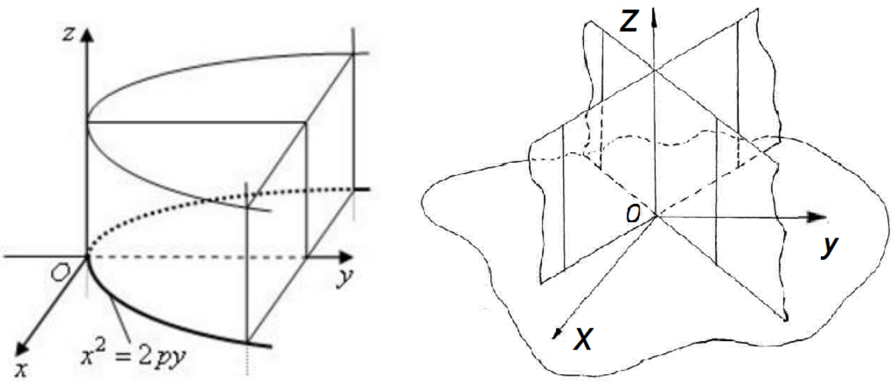
$y^2 = 2px$ – параболічний циліндр (рис. 3.5 а);

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – циліндр, що розпадається на пару площин, які перетинаються по осі *OZ* (рис. 3.5 б).



а) б)

Рисунок 3.4



а) б)

Рисунок 3.5

$x^2 - a^2 = 0$, $a \neq 0$ – циліндр, що розпадається на пару паралельних площин;

$x^2 = 0$ – циліндр, що становить пару збіжних площин.

Ці рівняння називаються канонічними рівняннями відповідних циліндричних поверхонь другого порядку.

Зауваження. Якщо в канонічному рівнянні еліптичного циліндра $a = b$, то напрямною циліндра є коло $x^2 + y^2 = a^2$. В такому разі поверхня є ***циліндром обертання.***

Розглянемо конічні поверхні.

Означення. Конічною поверхнею, або конусом, із вершиною в точці M_0 називається поверхня, що має таку властивість, що разом із кожною своєю точкою *M*, відмітною від точки M_0, містить пряму M_0M.

Прямі, що проходять через вершину конуса і знаходяться на ньому, називаються твірними цього конуса.

Конічну поверхню можна утворити таким чином. Розглянемо в просторі лінію γ і точку M_0, що не знаходиться на цій лінії. Поверхня, утворена всіма прямими, кожна з яких проходить через точку M_0 і через деяку точку лінії γ, є ***конічною поверхнею*** з вершиною M_0.

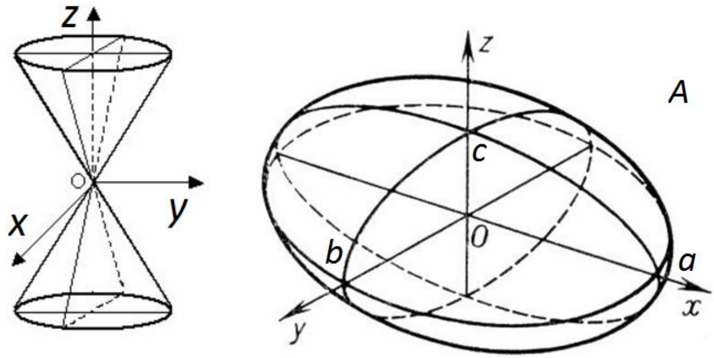
У цьому разі лінія γ називається ***напрямною.***

Якщо напрямною поверхні є еліпс, заданий у площині *OXY*, то рівняння конічної поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

У випадку, коли напрямною поверхні другого порядку є коло, тобто коли $a=b$, останнє рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



а) б)

Рисунок 3.6

Поверхня, визначена цим рівнянням у прямокутній системі координат, називається круговою конічною поверхнею, або ***круговим конусом*** (рис. 3.6 а). Очевидно, що ця поверхня утворена під час обертання навколо осі OZ прямої, що знаходиться в площині OXZ. Розглянемо три типи поверхонь: еліпсоїди, гіперболоїди та параболоїди.

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.9)$$

Це рівняння є канонічним рівнянням ***еліпсоїда***.

Якщо $a\neq b, b\neq c, c\neq a$, то еліпсоїд називається тривісним. Додатні числа a, b, c називають півосями еліпсоїда. У тривісному еліпсоїді шість вершин:

$A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0), B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0), C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$. Оскільки до рівняння (3.9) змінні *x*, *y* і *z* входять у парних степенях, то поверхня є симетричною відносно координатних площин, осей координат і початку координат.

У перетині з будь-якою площиною еліпсоїд дає еліпс. Дослідивши дану поверхню методом перерізів, переконуємося, що якщо еліпсоїд задається рівнянням (3.9), то його зображають так, як показано на рис. 3.6 б. Якщо хоча б одна зі змінних дорівнює нулю, то еліпсоїд вироджується у пару уявних прямих на площині.

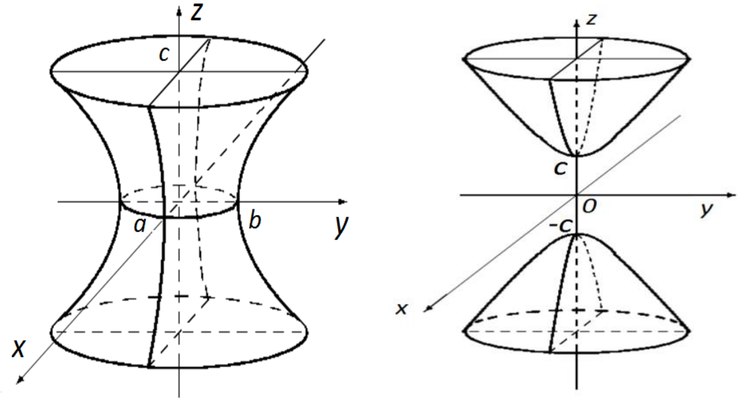
Якщо дві півосі еліпсоїда рівні, то він називається ***еліпсоїдом обертання*** і має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо всі три осі еліпсоїда рівні, тобто $a = b = c$, то він є сферою $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Гіперболоїди розрізняють однопорожнинні та двопорожнинні. ***Однопорожнинним гіперболоїдом*** (рис. 3.7 а) називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.10}$$



а) б)

Рисунок 3.7

Це рівняння є ***канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.***

Оскільки до рівняння (3.10) змінні x, y і z входять у парних степенях, то поверхня симетрична відносно координатних площин, осей координат і початку координат. Дві осі OX і OY перетинають поверхню у точках $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0), B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0)$. Ці осі називають дійсними осями однопорожнинного гіперболоїда, а зазначені точки – його вершинами. Третя вісь симетрії не має спільних точок з однопорожнинним гіперболоїдом і називається його уявною віссю. Додатні числа a, b, c називають півосями однопорожнинного гіперболоїда.

Якщо у рівнянні (3.10) $a = b$, то одержимо рівняння поверхні

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

яка називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання.

Двопорожнинним гіперболоїдом (рис. 3.7 б) називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (3.11)$$

Рівняння (3.11) називається ***канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда***. Дослідимо властивості даної поверхні. Вона симетрична відносно координатних площин, осей координат і початку координат. Вісь *OZ* перетинає поверхню у двох точках $C_1(0{,}0{,}c), C_2(0{,}0{,}-c)$, що називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда. Сама ця пряма називається ***дійсною віссю***. Осі симетрії *OX* і *OУ* не мають із поверхнею спільних точок і називаються уявними осями. Додатні числа a, b, c називають півосями двопорожнинного гіперболоїда.

Якщо у рівнянні (3.11) $a=b$, то одержимо рівняння поверхні вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

яка називається ***двопорожнинним гіперболоїдом обертання.***

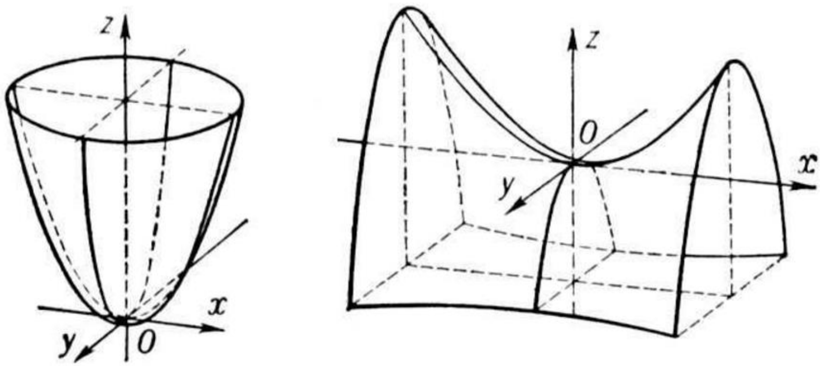
Гіперболоїди розрізняють еліптичні та гіперболічні.

Означення. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (3.12)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням еліптичного параболоїда. Оскільки до рівняння (3.12) змінні x, y входять у парних степенях, то поверхня симетрична відносно площин OXZ, OYZ і відносно осі OZ (вісь поверхні). Еліптичний параболоїд не симетричний відносно площини $OXУ$, відносно осей OX, $OУ$ і початку координат. Точка перетину еліптичного параболоїда з його віссю називається вершиною. Якщо поверхня задана канонічним рівнянням (3.12), то вершина збігається з початком координат. Для всіх точок еліптичного параболоїда, заданого рівнянням (3.12), виконуються співвідношення $z \geq 0$, причому $z = 0$ виконується лише для вершини.

Якщо у рівнянні (3.12) $a = b$, то одержимо рівняння поверхні у вигляді $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 2z$,



а) б)

Рисунок 3.8

яка називається параболоїдом обертання.

Еліптичний параболоїд зображений на рис. 3.8 а.

Означення. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,. \qquad (3.13)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда. Як і у випадку еліптичного параболоїда, змінні *x*, *y* входять до рівняння у парних степенях і поверхня симетрична відносно площин *OXZ*, *OYZ* і відносно осі *OZ* (вісь поверхні). Ця поверхня не симетрична відносно площини *OXУ*, відносно осей *OX*, *OУ* і початку координат. Точка перетину гіперболічного параболоїда з його віссю називається вершиною. Якщо поверхня задана канонічним рівнянням (3.13), то вершина збігається з початком координат.

Гіперболічний параболоїд зображений на рис. 3.8 б.

При побудові будь-якої поверхні застосовують метод перерізів.

За використання цього методу зручно застосовувати прямокутну систему координат. Суть методу перерізів полягає в такому. Поверхню перетинаємо площинами, паралельними координатним площинам, або самими координатними площинами. Знаходимо лінії перетину поверхні з даними площинами і за виглядом цих ліній формуємо твердження про форму поверхні.

Нехай поверхня *S* задана в прямокутній системі координат деяким рівнянням. Для дослідження поверхні визначимо таку послідовність дій.

Визначаємо, чи є поверхня симетричною відносно координатних площин.

1. Знаходимо точки перетину поверхні з осями координат.

2. Знаходимо лінії перетину поверхні з координатними площинами.
3. Якщо за лініями перетину поверхні з координатними площинами не можна встановити вигляд поверхні, то визначають лінії перетину поверхні з площинами, паралельними координатним.

Розглянемо приклад. Нехай деяка поверхня задана рівнянням вигляду $4(x^2+y^2)=z^2$. Побудуємо дану поверхню, використовуючи ***метод перерізів.***

1. Дана поверхня є симетричною відносно всіх координатних площин, оскільки змінні x, y і z входять до рівняння поверхні лише у другому степені.
2. а) Знаходимо точки перетину з координатною віссю OZ шляхом розв'язання системи

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0\ . \end{cases}$$

Такою точкою є точка, що збігається з початком координат O(0, 0, 0).

б) Відшукаємо точки перетину з координатною віссю *OУ*.

$$\begin{cases} z=0, \\ x=0, \\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0\ . \end{cases}$$

Такою точкою є точка, що збігається з початком координат O(0, 0, 0).

в) Знаходимо точки перетину з координатною віссю *OX*.

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = 0, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \; . \end{cases}$$

Такою точкою є точка, що збігається з початком координат O(0, 0, 0).

3. а) Знайдемо рівняння перетину поверхні та площини $z = 0$.

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \; . \end{cases}$$ Перетином є точка O (0, 0, 0).

б) Знайдемо рівняння перетину поверхні та площини $x = 0$.

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \; . \end{cases} .$$ Перетином є лінії $z = \pm 2y$.

в) Визначимо рівняння перетину поверхні та площини $y = 0$.

4. $$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \; . \end{cases} .$$ Перетином є лінії $z = \pm 2x$.

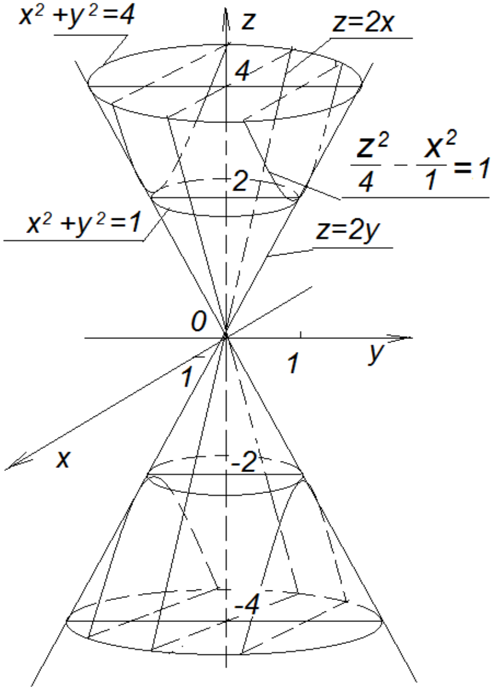


Рисунок 3.9

а) Знайдемо перетин із площинами $z = 2$ і $z = -2$:

$$\begin{cases} z = 2, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -2, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0\ . \end{cases}$$

Одержуємо рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$.

б) Знайдемо перетин із площинами $z = 4$ і $z = -4$:

$$\begin{cases} z = 4, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -4, \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0\ . \end{cases}$$

Маємо рівняння кола $x^2+y^2=4$.

в) Знайдемо перетин із площинами $z=1$ і $z=-1$:

$$\begin{cases} y=1, \\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-1, \\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0\,. \end{cases}$$

Одержуємо рівняння гіперболи $\dfrac{z^2}{2^2}-\dfrac{x^2}{1^2}=1$.

Побудувавши всі перерізи в декартовій системі координат, зображаємо шукану поверхню (рис. 3.9).

Для того щоб зобразити тіло, зображають поверхні, що обмежують його, та лінії перерізів цих поверхонь.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} xdxdydz$, де область (T) обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0, y=h,\ x+z=a$.

Розв'язання. Зробивши рисунок (дивись рис. 3.10), можна помітити, що дана область інтегрування обмежена зверху площиною $x+z=a$, знизу – площиною $z=0$, тому для змінної z маємо нерівності: $0\le z\le a-x$. Проекцією даного тіла в площині xOy є прямокутник $0\le x\le a,\ 0\le y\le h$. Тому одержуємо

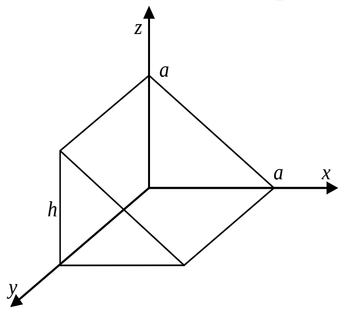


Рисунок 3.10

$$\iiint\limits_{(T)} xdxdydz=\int_0^a dx\int_0^h dy\int_0^{a-x} xdz=\int_0^a xdx\int_0^h dy\cdot z\Big|_0^{a-x}=\int_0^a x(a-x)dx\cdot y\Big|_0^h=$$

$$=h\int_0^a\left(ax-x^2\right)dx=h\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ha^3}{6}\cdot$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz$, якщо область (T) обмежена поверхнями $x=2$, $x=3$, $y^2+z^2=1$, $z=0$ $(z>0)$.

Розв'язання. Область (T) зображена на рис. 3.11.

Маємо: $0\le z\le\sqrt{1-y^2}$, $-1\le y\le 1$, $2\le x\le 3$.

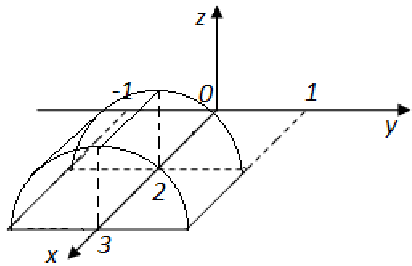


Рисунок 3.11

Тоді перейдемо до обчислення повторного інтеграла:

$$\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz=\iint\limits_{(D)} e^{x+y}dxdy\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} zdz=\frac{1}{2}\int\limits_2^3 e^x dx\int\limits_{-1}^1 e^y\left(1-y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^3-e^2\right)\int\limits_{-1}^1 e^y\left(1-y^2\right)dy=\begin{vmatrix} u=1-y^2, & du=-2ydy, \\ dv=e^y dy, & v=e^y, \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^3-e^2\right)\left((1-y^2)e^y\Big|_{-1}^1+2\int\limits_{-1}^1 ye^y dy\right)=\frac{1}{2}\left(e^3-e^2\right)\cdot 2\int\limits_{-1}^1 ye^y dy=$$

$$=\begin{vmatrix} u=y, & du=dy, \\ dv=e^y dy, & v=e^y \end{vmatrix}=e^2(e-1)\left(ye^y\Big|_{-1}^1-\int\limits_{-1}^1 e^y dy\right)=e^2(e-1)\cdot\frac{2}{e}=2e(e-1).$$

3.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай неперервні та диференційовні функції $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ взаємно однозначно відображають область (V) на область (V').

Введемо до розгляду визначник

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \qquad (3.14)$$

який за аналогією з двомірним випадком називається ***якобіаном відображення.*** Якщо $I \neq 0$ в області (V), то справедлива формула заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f\left(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right) \cdot |I|\, dudvdw . \qquad (3.15)$$

Виведення цієї формули аналогічне виведенню формули заміни змінних для подвійного інтеграла.

Змінні u, v, w називають криволінійними координатами точки (x, y, z), а вираз $|I(u, v, w)| dudvdw$ – елементом об'єму в криволінійних координатах.

Розглянемо два випадки найбільш вживаних на практиці криволінійних координат: циліндричні та сферичні.

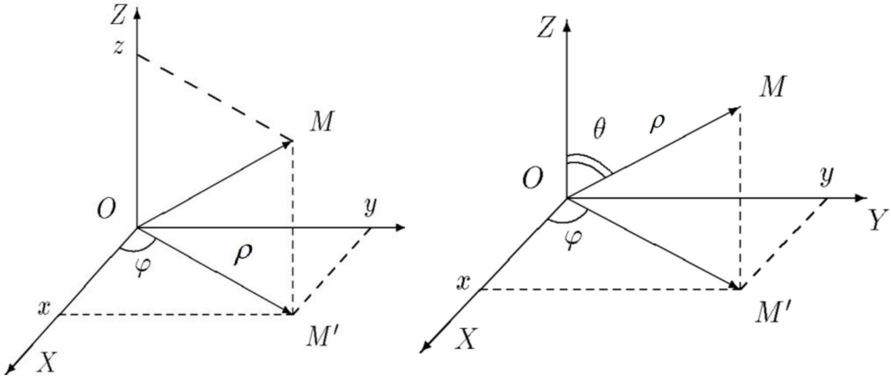
Циліндричними координатами точки $M(x, y, z)$ називають числа ρ, φ, z, де ρ і φ – полярні координати точки (x, y) (рис. 3. 12 а). Тоді формули переходу такі:

$$x = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\sin\varphi, \ z = z, \qquad (3.16)$$

де $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$.

Якобіан переходу має вигляд $I(\rho, \varphi, z) = \rho$. Тому формула заміни змінних у циліндричних координатах під час роботи з потрійним інтегралом має вигляд

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \cdot \rho\, d\rho d\varphi dz . \qquad (3.17)$$



а) б)

Рисунок 3.12

Сферичними координатами точки $M(x, y, z)$ називають числа ρ, φ, θ, де θ – кут між віссю Oz і радіусом-вектором OM точки M, ρ – довжина цього радіуса-вектора, φ – кут між проекцією OM' радіуса-вектора OM на площину xOy і віссю Ox (рис. 3.12 б). Маємо $OM' = \rho \sin\theta$, і тоді

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho \cos\theta, \quad (3.18)$$

де $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобіан цього перетворення $I(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin\theta$, тому формула заміни змінних у сферичних координатах така:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta. \quad (3.19)$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(G)} zdxdydz$, де *(G)* – область, обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та параболоїдом обертання $x^2 + y^2 = 3z$.

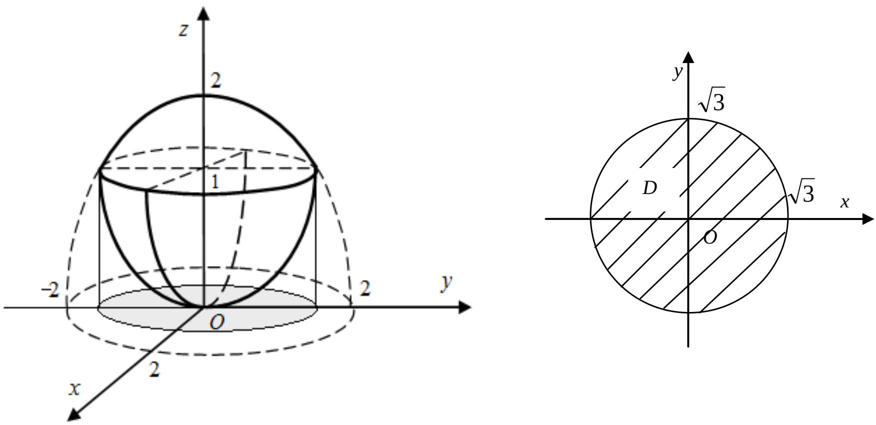
Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2+z^2=4$ визначає сферу із центром на початку координат і радіусом $R = 2$, друга поверхня $x^2+y^2=3z$ є параболоїдом обертання навколо осі Oz (рис. 3.13 а). Побудуємо область (G) та її проекцію (D) на площину xOy.

Для визначення області (D) розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4-z^2, \\ x^2+y^2=3z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-z^2=3z, \\ x^2+y^2=3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-3z-4=0, \\ x^2+y^2=3z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1=1, z_2=-4, (\text{не підходить}) \\ x^2+y^2=3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2=3z. \end{cases}$$



а) б)

Рисунок 3.13

Маємо, що область (D) – це круг радіуса $\sqrt{3}$, центр якого збігається з початком координат, тобто (D): $x^2 + y^2 \le 3$ (рис. 3.13 б).

Перейдемо у потрійному інтегралі до циліндричних координат. Врахуємо, що у циліндричних координатах рівняння сфери $\rho^2 + z^2 = 4$ або $z^2 = 4 - \rho^2$;

рівняння параболоїда обертання $\rho^2 = 3z$ або $z = \dfrac{\rho^2}{3}$;

рівняння кола $\rho^2 = 3$. Отже,

$$(G`): 0 \le \rho \le \sqrt{3}, 0 \le \varphi \le 2\pi, \frac{\rho^2}{3} \le z \le \sqrt{4-\rho^2} .$$

Маємо

$$\iiint\limits_{(G)} zdxdydz = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi,\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz \\ y = \rho\sin\varphi, \qquad (G) \to (G`) \\ z = z \end{array} \right| = \iiint\limits_{(G`)} z\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\left. \frac{z^2}{2} \right|_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} \right) d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho \left(4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(4\rho - \rho^3 - \frac{\rho^5}{9} \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \left. \left(\frac{4\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{54} \right) \right|_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(6 - \frac{9}{4} - \frac{27}{54} \right) = \frac{13}{4}\pi.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(G)} \dfrac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}$, де ($G$) – верхня половина кулі радіуса R із центром на початку координат: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0$.

Розв'язання. Перейдемо у потрійному інтегралі до сферичних координат. Врахуємо, що у сферичних координатах рівняння сфери $r = R$. Проекцією півкулі на площину xOy є круг $x^2 + y^2 \le R^2$. Отже, маємо

$$\iiint\limits_{(G)} \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta, dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, (G) \to (G`) \\ z = r\cos\theta, G`: 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \iiint\limits_{(G`)} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 + R^2} dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R \frac{r^2 dr}{r^2 + R^2} = \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\int\limits_0^R \frac{r^2 + R^2 - R^2}{r^2 + R^2} dr\right) =$$

$$= 2\pi\left(\int\limits_0^R dr - R^2 \int\limits_0^R \frac{dr}{r^2 + R^2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(R - \frac{R^2}{R} arctg \frac{r}{R}\Big|_0^R\right) = 2\pi\left(R - R \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi R\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Питання для самоперевірки

1. Яким чином задача про масу матеріального тіла приводить до поняття потрійного інтеграла?
2. Що називають інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ в області (V)? Запишіть її формулу, сформулюйте означення.
3. Що називають потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ в області (V). Як він записується?

4. Сформулюйте умови існування потрійного інтеграла.
5. Надайте основні властивості потрійних інтегралів.
6. Сформулюйте та доведіть теорему про обчислення потрійного інтеграла в прямокутному паралелепіпеді.
7. Запишіть формулу для обчислення потрійного інтеграла для функції $f(x,y,z)$ в області (V).
8. Чи можна змінювати порядок інтегрування у потрійному інтегралі?
9. Дайте означення понять тіла та поверхні в просторі.
10. Що називається площиною у просторі. Як записується рівняння площини?
11. Які поверхні другого порядку ви знаєте? Наведіть приклади.
12. У чому полягає суть методу перерізів під час побудови об'ємів?
13. Як відбувається заміна змінних у потрійному інтегралі?
14. Як задаються циліндричні координати точки $M(x,y,z)$?
15. Запишіть формулу переходу до циліндричних координат у потрійному інтегралі.
16. Як задаються сферичні координати точки $M(x,y,z)$?
17. Запишіть формулу переходу до сферичних координат у потрійному інтегралі.

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

4.1. Геометричне та фізичне застосування потрійного інтеграла

Розглянемо вираз об'єму довільної кубовної області у вигляді потрійного інтеграла. З очевидної рівності $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta V_k = V$ (як би ми не розбивали область (V) на частинні області, ми матимемо об'єм усієї області (V)) випливає

$$\lim_{d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta V_k = V, \tag{4.1}$$

тобто ***об'єм просторового тіла***, обмеженого областю (V), обчислюється за формулою

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz. \tag{4.2}$$

Маса тіла *V* з густиною $\gamma = \gamma\ (x, y, z)$:

$$m = \iiint\limits_{V} \gamma(x, y, z) dxdydz. \tag{4.3}$$

Моментом інерції тіла відносно деякої осі *L* називають інтеграл $I_L = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) \cdot l^2 dxdydz$, де l – відстань змінної точки тіла *(x, y, z)* до осі.

Моменти інерції тіла відносно координатних осей задаються формулами:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z) dxdydz, \tag{4.4}$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} \left(z^2 + x^2\right) \gamma(x, y, z) dxdydz, \tag{4.5}$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z)dxdydz. \qquad (4.6)$$

Для однорідних тіл $\gamma(x, y, z) = 1$.

Моменти інерції тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$I_{yx} = \iiint\limits_{(V)} z^2\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (4.7)$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (4.8)$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y^2\gamma(x, y, z)dxdydz. \qquad (4.9)$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площін обчислюються за формулами:

$$S_{yx} = \iiint\limits_{(V)} z\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (4.10)$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (4.11)$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y\gamma(x, y, z)dxdydz. \qquad (4.12)$$

Координати центра тяжіння тіла (V) знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{S_{xy}}{m}. \qquad (4.13)$$

Приклад. Знайти момент інерції куба зі стороною a відносно його ребра.

Розв'язання. Вибираємо систему координат, початок якої – точку О – помістимо в одну з вершин. Тоді нерівності, що визначають область інтегрування, запишемо у вигляді

(V): $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Момент інерції куба відносно ребра в такій системі координат можна обчислити, використавши формулу $l^2 = y^2 + z^2$. В цьому разі ребро куба вибране вздовж осі OX. Отже,

$$I_L = \iiint\limits_{(V)} l^2 dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2) dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^a (y^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^a dy = \int_0^a dx \int_0^a (ay^2 + \frac{1}{3} a^3) dy =$$

$$= \int_0^a (\frac{1}{3} ay^3 + \frac{1}{3} a^3 y) \Big|_0^a dx = \frac{2}{3} a^4 \int_0^a dx = \frac{2}{3} a^5 .$$

Відмітимо також, що в цій задачі не було необхідності виконувати креслення. Достатньо записати нерівності, що визначають область.

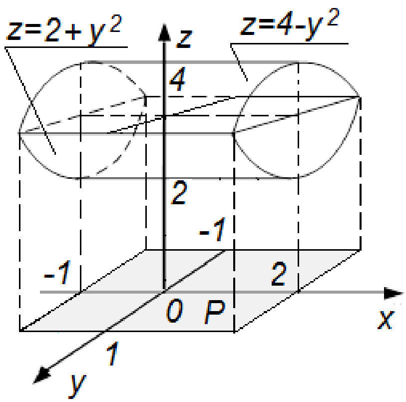


Рисунок 4.1

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1, x = 2$

Розв'язання. Поверхні $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ – це парабо-лічні циліндри з твірними, паралельними осі Ox, і напрямними параболами $z = 4 - y^2$ та $z = y^2 + 2$ у площині yOz відповідно (рис. 4.1). Площини $x = -1, x = 2$ паралельні площині yOz і відсікають на осі Ox відрізки довжиною 1 та 2 відповідно.

Проекцією цього тіла, тобто областю інтегрування, є прямокутна область (P) у площині *xOy*.

Тобто об'єм даного тіла виражається інтегралом

$$V=\int_{-1}^{2}dx\int_{-1}^{1}dy\int_{2+y^2}^{4-y^2}dz=\int_{-1}^{2}dx\int_{-1}^{1}(2-2y^2)dy=2\int_{-1}^{2}dx\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=8.$$

Отже, $V = 8$ (куб. од.).

Приклад. Обчислити об'єм фігури, обмеженої поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x$.

Розв'язання. Зобразити дану поверхню в прямокутній системі координат дуже важко, так само як і обчислити інтеграл. Тому під час обчислення інтеграла перейдемо до сферичних координат за допомогою формул (3.18). Після перетворення рівняння поверхні $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x$ набере вигляду: $\rho=a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$. Звідси маємо межі інтегрування за змінною ρ: $0\le\rho\le a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$.

Визначимо межі за змінними θ і φ. Для цього візьмемо $\rho=0$, або $a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}=0$. Звідси $\sin\theta\cos\varphi=0$. Це можливо у разі, якщо $\sin\theta=0$ або $\cos\varphi=0$ ($\theta=\pi+\pi n,\ n\in Z,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$). Отже, $0\le\theta\le\pi$ і $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$. Тоді шуканий об'єм дорівнює

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{\pi}d\theta\int_{0}^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}}\rho^2\sin\theta d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{0}^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}}d\theta=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta \cos\varphi d\theta = \frac{\pi a^3}{3} \text{(куб. од.)}.$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z$ та $\frac{5}{9}x^2 + 4 = z$.

Розв'язання. Перша поверхня є еліптичним параболоїдом, що проходить через початок координат. Друга поверхня є параболічним циліндром, що піднятий над площиною XOY на 4 одиниці. Дані поверхні та тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображені на рис. 4.2.

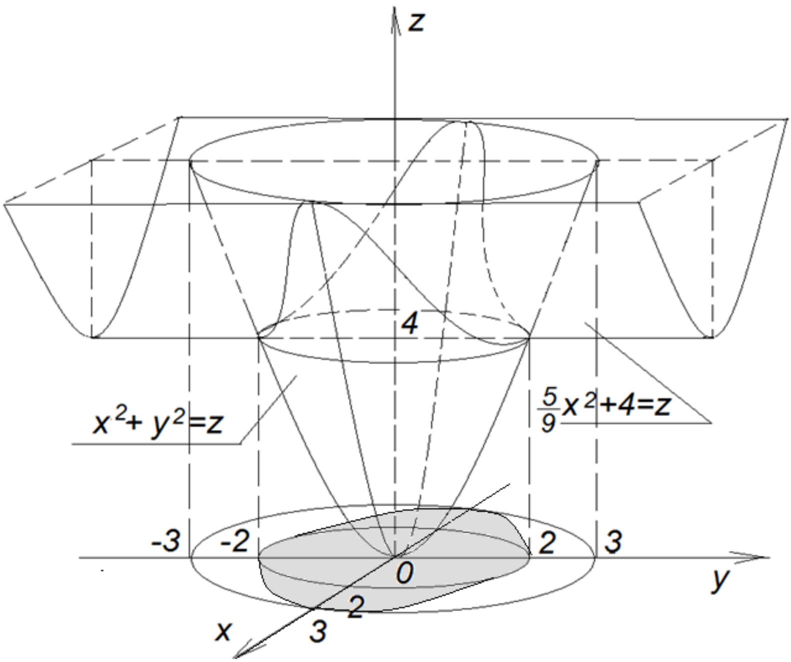


Рисунок 4.2

Тіло є симетричним відносно координатних площин *YOZ* та *XOZ*, оскільки змінні *x* і *y* входять лише у квадратах в обидва рівняння. Ці зауваження дозволяють обчислити об'єм лише частини тіла, що знаходиться у першому октанті. Проекцією цього тіла на площину *XOY* є еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Перейдемо до узагальнених полярних координат за формулами $x=3\rho\cos\Theta,\ y=2\rho\sin\Theta$. Обчислимо якобіан цього перетворення:

$$I(\rho,\Theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\Theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3\cos\Theta & -3\rho\sin\Theta \\ 2\sin\Theta & 2\rho\cos\Theta \end{vmatrix}=6\rho\cos^2\Theta+6\rho\sin^2\Theta=6\rho.$$

Область інтегрування в узагальнених полярних координатах матиме вигляд $E'=\{(\rho,\Theta):\rho\le 1, 0\le\Theta\le 2\pi\}$. Проте враховуючи те, що знаходиться лише четверта частина тіла, то $0\le\Theta\le\frac{\pi}{2}$.

Рівняння еліптичного параболоїда є $z=\rho^2(9\cos^2\theta+4\sin^2\theta)$, а параболічного циліндра – $z=4+5\rho^2\cos^2\theta$.

Тоді об'єм тіла дорівнює

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 6\rho d\rho\int_{\rho^2(9\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}^{4+5\rho^2\cos^2\theta}dz=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 6\rho d\rho z\Big|_{\rho^2(9\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}^{4+5\rho^2\cos^2\theta}=$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(4-4\rho^2)\rho d\rho=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(\rho-\rho^3)d\rho=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=12\pi.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює 12π (куб. од.)

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ та $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1$.

Розв'язання. Дані поверхні є еліпсоїдами, перетином яких є еліпс $\frac{x^2}{9}+y^2=\frac{3}{4}$ у площині $z=1$. Тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображене на рис. 4.3.

Знаходимо об'єм:

$$V=\iint_E dxdy \int_{2-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}} dz = \iint_E \left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}-2\right)dxdy,$$

де $E=\left\{(x,y):\frac{x^2}{9}+y^2\le\frac{3}{4}\right\}$.

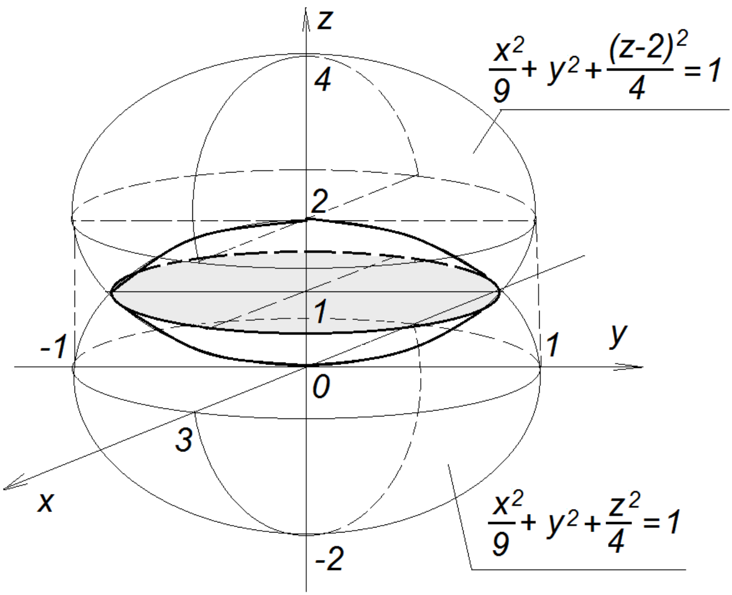


Рисунок 4.3

Під час обчислення цього інтеграла перейдемо до узагальнених полярних координат за формулами $x = 3\rho\cos\Theta,\ y = \rho\sin\Theta$. Обчислимо якобіан цього перетворення:

$$I(\rho,\Theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\Theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos\Theta & -3\rho\sin\Theta \\ \sin\Theta & \rho\cos\Theta \end{vmatrix} = 3\rho\cos^2\Theta + 3\rho\sin^2\Theta = 3\rho.$$

Область інтегрування в узагальнених полярних координатах матиме вигляд

$$E' = \left\{ (\rho,\Theta) : \rho \le \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \le \Theta \le 2\pi \right\}.$$

Отже,

$$V = \iint\limits_{E'} (4\sqrt{1-\rho^2} - 2)3\rho d\rho d\Theta = 3\int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4\sqrt{1-\rho^2} - 2)\rho d\rho = \frac{5}{2}\pi.$$

Шуканий об’єм тіла дорівнює $\frac{5}{2}\pi$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x}{a}$, де $a \ge 1$.

Розв’язання. У цьому випадку зручно перейти до сферичних координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

де $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$.

Тіло розміщене симетрично відносно площин *XOZ* і *XOY*, оскільки змінні y і z входять до рівняння лише у квадратах. Оскільки ліва частина рівняння завжди більша за нуль, то і $x \ge 0$, тобто все тіло знаходиться над площиною *YOZ*. Тому на кути φ *і* θ накладаються деякі обмеження: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Рівняння поверхні $(x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{x}{a}$ у сферичній системі координат має вигляд $r = \sqrt[3]{\frac{\sin\theta\cos\varphi}{a}}$, а якобіан даного перетворення дорівнює $r^2\sin\theta$. Маємо

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\theta\cos\varphi}{a}}} r^2 \sin\theta\, dr =$$

$$= \frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\varphi d\varphi = \frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{3a}.$$

Отже, шуканий об’єм тіла дорівнює $\frac{\pi}{3a}$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $((ax)^2+y^2+z^2)^3 = \frac{z^2}{(ax)^2+y^2}$.

Розв’язання. Для знаходження об’єму даного тіла доцільно перейти до узагальнених сферичних координат: $x = \frac{1}{a} r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$,
де $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

Поверхня $((ax)^2+y^2+z^2)^3 = \frac{z^2}{(ax)^2+y^2}$ матиме вигляд $r = \sqrt[3]{\mathrm{c}\,tg\theta}$, а об’єм $r \le \sqrt[3]{\mathrm{c}\,tg\theta}$. Якобіан даного перетворення дорівнює $\frac{1}{a} r^2 \sin\theta$.

Тіло розміщене симетрично відносно координатних площин, оскільки змінні *x*, *y*, *z* входять до рівняння лише у квадратах. Ці зауваження дозволяють обмежитись обчисленням восьмої частини об'єму тіла, тієї, що знаходиться у першому октанті. Тоді накладаються деякі обмеження на кути φ і $\theta: 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Звідси,

$$V = \frac{8}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{ctg\theta}} r^2 \sin\theta dr = \frac{8}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{8}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4\pi}{3a}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\dfrac{4\pi}{3a}$ (куб. од.).

Розв'язування типових задач

Розглянемо на прикладах розв'язування основних типів задач на застосування потрійного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\ dz$.

Розв'язання

$$I = \int_0^1 xdx \int_0^x ydy \int_0^y zdz = \int_0^1 xdx \int_0^x y \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^y dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^x y^3 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^x = \frac{1}{8}\int_0^1 x^5 dx = \left.\frac{1}{48}x^6\right|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

Приклад 2. Обчислити $I = \iiint\limits_D 2y^2 z e^{xyz} dxdydz$,

якщо D: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Розв'язання. Областю інтегрування D є одиничний куб, три ребра якого знаходяться на координатних осях.

$$I = \iiint\limits_D 2y^2 z e^{xyz} dxdydz = 2\int_0^1 y^2 dy \int_0^1 zdz \int_0^1 e^{xyz} dx = 2\int_0^1 y^2 dy \int_0^1 zdz \left.\frac{1}{yz} e^{xyz}\right|_0^1 =$$

$$= 2\int_0^1 ydy \int_0^1 dz\left(e^{yz} - 1\right) = 2\int_0^1 ydy\left(\frac{1}{y}e^{yz} - z\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\int_0^1 y\left(\frac{1}{y}e^{yz} - z\right)\Bigg|_0^1 dy = 2\int_0^1 y\left(\frac{1}{y}e^{y} - 1 - \frac{1}{y} + 0\right)dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(e^y - y - 1\right)dy = 2\left(e^y - \frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(e - \frac{1}{2} - 1 - 1\right) = 2e - 5.$$

Пропонуємо подумати, чому потрійний інтеграл зручніше подати у вигляді повторного саме в цьому порядку.

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого кулею $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і параболоїдом $3z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Нехай Ω – дане в задачі тіло. На рис. 4.4 а зображене тіло Ω_1 – частина тіла Ω, що міститься у першому октанті. Очевидно, що $V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$.

Знайдемо проекцію лінії перетину кулі й параболоїда на площину xOy.

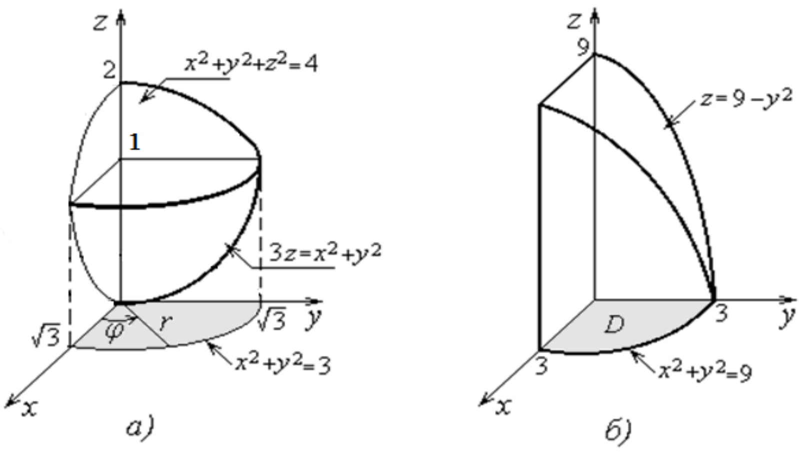


Рисунок 4.4

Для цього достатньо із системи рівнянь $x^2+y^2 = 4 - z^2$, $x^2+y^2= 3z$ одержати $z^2+3z-4=0$. Звідси $x^2+y^2=-4$ і $x^2+y^2=1$.

Відповідно до рівнянь проекції буде коло $x^2+y^2=3$. Згідно з формулою (4.2) маємо

$$V(\Omega)=V(\Omega_1)=4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz.$$

Оскільки проекцією даного тіла Ω на площину xOy є круг $x^2+y^2 \le 3$, то доцільно перейти до циліндричних координат. Після перетворень за формулами (3.16) рівняння кола $x^2 + y^2 = 3$, параболоїда $3z = x^2+y^2$ і кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ відповідно набирають вигляду $r=\sqrt{3}$, $z=\frac{1}{3}r^2$, $z=\sqrt{4-r^2}$. Із рис. 4.4 а бачимо, що в області інтегрування Ω_1 кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, r – від 0 до $\sqrt{3}$, , а z – від $\frac{r^2}{3}$ до $\sqrt{4-r^2}$. Тому

$$V(\Omega)=4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1} rdrd\varphi dz=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}rdr\int\limits_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}}dz=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)dr=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{19}{3}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{19}{6}\pi.$$

Приклад 4. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 0$, $z = 9 - y^2$; $x^2 + y^2 = 9$.

Розв’язання. Нехай Ω – дане в задачі тіло. На рис. 4.4 б зображене тіло Ω_1 – частина тіла Ω, що знаходиться у першому октанті. Очевидно, дане в задачі тіло симетричне відносно площин xOz, yOz і тому $V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$. Згідно з формулою (4.2) маємо

$$V(\Omega) = 4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz.$$

Проекцією даної частини тіла Ω_1 на площину xOy є частина круга $x^2+y^2 \leq 9$, що знаходиться у першій чверті (на рис. 4.4 б – це чверть круга D). Отже,

$$V(\Omega) = 4\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{9-y^2} dz = 4\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} z\Big|_0^{9-y^2} dy =$$

$$= 4\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(9-y^2\right) dy = 4\int_0^3 (9\sqrt{9-x^2} - \frac{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}{3})dx.$$

Зробимо заміну $x = 3\sin t$, $dx = 3\cos t\, dt$. Якщо $x = 0$, тоді $t = 0$, а якщо $x = 3$, тоді $t = \frac{\pi}{2}$.

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9\sqrt{9-9\sin^2 t} - \frac{(\sqrt{9-9\sin^2 t})^3}{3}\right) 3\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(27\cos t - 9\cos^3 t\right) 3\cos t dt =$$

$$= 108\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos t - \cos^3 t\right)\cos t dt = 324\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 108\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 162\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt -$$

$$- 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right)dt = 162\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 162\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt -$$

$$- 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 54\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t dt =$$

$$= 162t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{162}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} - 27t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{54}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 4t\right) dt =$$

$$=81\pi-\frac{27}{2}\pi-\frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-\frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t dt=81\pi-\frac{27}{2}\pi-\frac{27}{2}t\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\frac{27}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{243}{4}\pi.$$

Пропонуємо студентові обчислити потрійний інтеграл у циліндричних координатах і зіставити з вищенаведеним обчисленням за складністю.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями, побудувати об’єм:

а) $z \ge 0$, $x = 3$, $y = 2x$, $z = y^2$;

б) $y \ge 0$, $z \ge 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$, $z = x^2$;

в) $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x - y = 0$, $2x + y = 2$, $4z = y^2$;

г) $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$.

2. Обчислити потрійний інтеграл від функції $F(x,y,z)$ за областю V :

	$F(x,y,z)$	V		
а)	$2x^2+3y+z$,	$2 \le x \le 3$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 4$
б)	$x^2\ \ yz$	$-1 \le x \le 2$	$0 \le y \le 3,$	$2 \le z \le 3$
в)	$x+y+4z^2$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 1$
г)	$x^2+y^2+z^2$	$0 \le x \le 3,$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 2$

3. Обчислити потрійний інтеграл від функції $F(x,y,z)$ за областю V за допомогою циліндричної або сферичної системи координат:

	$F(x,y,z)$	V
а)	y	$4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$; $y \le \sqrt{3}x$; $y \ge 0$; $z \ge 0$
б)	y	$z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y \ge 0$
в)	$\dfrac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$	$x \ge 0$; $y \ge \sqrt{3}x$; $z \ge 0$; $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36$
г)	$\dfrac{y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$	$y \ge 0$; $y \le \sqrt{3}x$; $z = 3(x^2 + y^2)$; $z = 3$

4. Обчислити інтеграли, перетворивши їх до циліндричних або сферичних координат:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2 + y^2}\,dz$, б)

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)dz .$$

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{1 - x - y}$, якщо область D обмежена площинами: x = 0, x = 1, y = 2, y = 5, z = 2, z = 4.

6. Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_W (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, де область W обмежена поверхнею $3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2$.

7. Обчислити координати центра мас однорідного тіла *V*, обмеженого зазначеними поверхнями:

а) $V:\ y^2 + z^2 = 8x;\ \ x = 2$	в) $V:\ z = 9\sqrt{x^2 + y^2};\ \ z = 36$
б) $V:\ x = 2\sqrt{y^2 + z^2}\ \ y^2 + z^2 = 4;\ \ x = 0$	г) $V:\ z = 3(x^2 + y^2);\ \ x^2 + y^2 = 9;\ \ z = 0$

8. Обчислити момент інерції однорідного тіла V відносно зазначеної осі координат, обмеженого поданими поверхнями. Густина тіла $\gamma(x, y, z) = 1$.

	V	Вісь
а)	$y^2 = x^2 + z^2; \ y = 4;$	Oy
б)	$y^2 = x^2 + z^2; \ y = 2;$	Oy
в)	$x^2 = y^2 + z^2; \ x = 2;$	Ox
г)	$x^2 = y^2 + z^2; \ x = 3;$	Ox

Задачі для самоперевірки

1. Обчислити $\int\limits_0^a \left\{ \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^y xyzdz \right] dy \right\} dx$. Відповідь: $\frac{a^6}{48}$.
2. Обчислити $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, де V : $y = x$, $y = 0$, $z = xy$, $z = 0$, $x = 2$.

Відповідь: 4.

3. Обчислити $\iiint\limits_V x^2 \sin(xyz) dxdydz$, де V : $y = 2x$, $y = 0$, $z = 4\pi$, $z = 0$, $x = 1$. Відповідь: 2.
4. Обчислити $\iiint\limits_V xydxdydz$, де V : $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$.

Відповідь: 0.

5. Обчислити $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, де V – куля радіуса R, із центром в початку координат. Відповідь: $\frac{4\pi R^5}{15}$.
6. Обчислити $\iiint\limits_V zdxdydz$, де V: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

7. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 3z.$ Відповідь: $\frac{19}{6}\pi$.

8. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 8$, $z = \frac{30}{11}y$, $x = \sqrt{2y}$, $z = 0$, $x = 0$. Відповідь: $\frac{180}{11}$.

Питання для самоперевірки

1. Як знайти об’єм просторового тіла за допомогою потрійного інтеграла?

2. За якою формулою знаходиться маса тіла V із заданою густиною γ = γ (x, y, z)?

3. Зазначте формули, за допомогою яких можна обчислити моменти інерції тіла відносно координатних осей.

4. Як знайти координати центра тяжіння просторового тіла з відомою густиною γ = γ (x, y, z)?

5. Чи можна обчислити статичні моменти тіла відносно координатних площин за допомогою потрійного інтеграла? За якими формулами можна їх знайти?

РОЗДІЛ 5. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ 1-ГО РОДУ

5.1. Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай маємо неоднорідну матеріальну криву $\breve{AB}$, уздовж якої розподілено масу з лінійною густиною $\rho = \rho(x, y)$. Знайдемо масу цієї кривої.

Якщо крива однорідна, то ***лінійною густиною*** ρ ***маси*** називають відношення маси кривої до її довжини. Якщо крива неоднорідна, то ***лінійною густиною маси*** в довільній точці M є границя (якщо вона існує) відношення маси тієї частини кривої, що містить точку M, до її довжини за умови, що довжина цієї частини прямує до нуля.

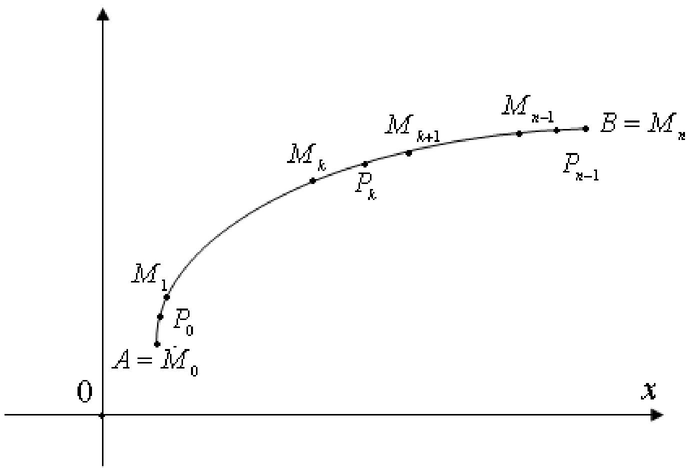


Рисунок 5.1

Нехай крива $\breve{AB}$ – спрямлювана (має довжину) і задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ так, що кожним двом різним точкам відрізка

$[\alpha, \beta]$ відповідають дві різні точки кривої. Розглянемо деяке розбиття кривої $\breve{AB}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ на частини $M_k \breve{M}_{k+1}$ (рис. 5.1). На кожній дузі $M_k \breve{M}_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ виберемо довільним чином точку P_k і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(P_k) \Delta l_k \, , \tag{5.1}$$

де Δl_k – довжина дуги $M_k \breve{M}_{k+1}$.

Цю суму можна вважати наближеним значенням маси кривої $\breve{AB}$. Якщо $L = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k \to 0$, то з (5.1) одержимо точне значення маси m, тобто $m = \lim\limits_{L \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(P_k) \Delta l_k$. Із цією границею і пов'язане поняття криволінійного інтеграла першого роду.

5.2. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду

Означення. Нехай у площині xOy задано спрямлювану криву $\breve{AB}$ і на ній задано деяку неперервну функцію $f(x, y)$; параметр s $(0 \le s \le S)$ – довжина дуги на кривій AB, що сполучає точку A з довільною точкою кривої, S – довжина кривої AB. Рівняння кривої AB у натуральній параметризації має вигляд $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \le s \le S$. Тому задана функція $f(x, y)$ перетворюється у функцію $f(x(s), y(s))$ від однієї змінної s.

Розіб'ємо відрізок $[0, S]$ точками $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k < \ldots < s_{n-1} < s_n = S$ (T-розбиття) та складемо суму $\sigma = \sum_{k-0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta s_k$, яку називають ***інтегральною сумою***. Нехай $\lambda(T) = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta s_k$ – ***параметр розбиття***.

Якщо існує границя складених інтегральних сум при $\lambda(T) \to 0$ і дорівнює числу I, то це число називають ***криволінійним інтегралом першого роду*** від функції $f(x, y)$ на кривій $\breve{AB}$ і позначають $\int\limits_{AB} f(x, y)ds$.

5.3. Властивості криволінійних інтегралів 1-го роду

1. Якщо функція $f(x, y)$ інтегровна на кривій $\breve{AB}$, то інтегровною на цій кривій є й функція $Cf(x, y)$, де C – константа, і виконується рівність

$$\int\limits_{AB} Cf(x, y)ds = C\int\limits_{AB} f(x, y)ds .$$

2. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ інтегровні на кривій $\breve{AB}$, то функції $f(x, y) \pm g(x, y)$ також інтегровні на цій кривій і

$$\int\limits_{AB}(f(x, y) \pm g(x, y))ds = \int\limits_{AB} f(x, y)ds \pm \int\limits_{AB} g(x, y)ds .$$

3. Якщо $f(x, y)$ невід'ємна інтегровна функція на кривій $\breve{AB}$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds \geq 0.$$

4. Якщо $f(x,y) \geq g(x,y)$, $(x,y) \in AB$ і кожна з функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ інтегровна на кривій AB, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds \geq \int\limits_{AB} g(x,y)ds.$$

5. Якщо крива $A\breve{B}$ складається із двох кривих AC і CB, то функція $f(x,y)$ інтегровна на кривій $A\breve{B}$, причому

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds.$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна на кривій $A\breve{B}$, то функція $|f(x,y)|$ також інтегровна на цій кривій і

$$\left|\int\limits_{AB} f(x,y)ds\right| \leq \int\limits_{AB} f(x,y)ds.$$

7. ***Теорема (про середнє значення).*** *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на кривій $A\breve{B}$, то на цій кривій знайдеться така точка $(\bar{x};\bar{y})$, що*

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = f(\bar{x};\bar{y}) \cdot S,$$

де S – довжина дуги кривої $A\breve{B}$.

Оскільки, як буде показано далі, обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів, то й властивості криволінійних інтегралів та їх доведення аналогічні властивостям визначених інтегралів.

5.4. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Якщо рівняння кривої $\breve{AB}$ задане за допомогою довільного параметра t у вигляді $x = x(t),\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, то обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла за формулою

$$\int_{AB} f(x, y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}dt \cdot \quad (5.2)$$

Дійсно, якщо функції $x = x(t),\ y = y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку і функція $f(x(t), y(t))$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, то крива $\breve{AB}$ є спрямлюваною і довжина її дуги $\breve{AM}$, де M – довільна точка кривої $\breve{AB}$, обчислюється за формулою $S(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}d\tau$. Звідси $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.

Беручи довжину дуги за параметр, дістанемо дану формулу.

Зокрема, якщо криву $\breve{AB}$ задано в декартових координатах рівнянням $y = y(x), a \le x \le b$, де функція $y(x)$ неперервна разом зі своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a, b]$, то формула має вигляд

$$\int_{AB} f(x, y)ds = \int_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx \cdot \quad (5.3)$$

Якщо криву $\breve{AB}$ задано рівнянням $x = x(y), c \le y \le d$, де функція $x(y)$ неперервна разом зі своєю похідною $x'(y)$ на відрізку $[c, d]$, то

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{c}^{d} f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy. \quad (5.4)$$

Криву інтегрування $\breve{AB}$ часто позначають літерою L.

Якщо криву $\breve{AB}$ задано в полярній системі координат $\rho=\rho(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, тоді формула для обчислення криволінійного інтеграла така:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi),\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi. \qquad (5.5)$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L y^2 ds$, де L – арка циклоїди:

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання. Знайдемо похідні:

$x'=a(1-\cos t),\ y'=a\sin t$ та одержимо інтеграл

$$\int_L y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = \frac{256}{15}a^3.$$

Зауваження. (Про криволінійні інтеграли першого роду для просторових кривих). Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена та неперервна на просторовій кривій $\breve{AB}$, заданої рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, де функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[\alpha,\beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл $\int_{\breve{AB}} f(x,y,z)ds$, причому

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2(t)+y_t'^2(t)+z_t'^2(t)}dt. \quad (5.6)$$

5.5. Геометричне і фізичне застосування криволінійних інтегралів 1-го роду

Довжина кривої

Якщо підінтегральна функція $f(x, y, z) = 1$, то з означення криволінійного інтеграла 1-го роду одержимо, що в цьому разі він дорівнює довжині кривої, за якою виконується інтегрування:

$$l = \int_l ds. \tag{5.7}$$

Площа циліндричної поверхні

Якщо поверхня параллельна вісі OZ і її твірною є крива AB, що знаходиться в площині OXY, тоді площа поверхні, що задається функцією $z = f(x, y)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_{AB} f(x, y) ds. \tag{5.8}$$

Маса кривої

Вважаючи, що підінтегральна функція $\gamma\ (x, y, z)$ визначає щільність кожної точки кривої, знайдемо масу кривої за формулою

$$m = \int_l \gamma(x, y, z) ds. \tag{5.9}$$

Якщо матеріальна крива AB має густину $\mu(x, y)$ у точці $M(x, y)$, тоді її масу можна обчислити за формулою

$$m = \int_{AB} \mu(x, y) ds. \tag{5.10}$$

Статичні моменти кривої l

Для матеріальної кривої статичні моменти відносно осей координат та координати центра тяжіння (x_c, y_c) визначаються за формулами:

$$M_x = \int_l y\gamma(x,y)ds, \qquad M_y = \int_l x\gamma(x,y,z)ds, \quad (5.11)$$

$$x_c = \frac{\int_l x\gamma(x,y)ds}{m}, y_c = \frac{\int_l y\gamma(x,y)ds}{m}. \quad (5.12)$$

Моменти інерції

Момент інерції просторової кривої відносно початку координат знаходиться за формулою

$$I_0 = \int_l (x^2 + y^2 + z^2)ds. \quad (5.13)$$

Моменти інерції кривої відносно координатних осей:

$$I_x = \int_l (y^2 + z^2)ds, I_y = \int_l (x^2 + z^2)ds, I_z = \int_l (x^2 + y^2)ds \quad (5.14)$$

Координати центра мас кривої

$$x_c = \frac{\int_l x\gamma(x,y,z)ds}{m}, y_c = \frac{\int_l y\gamma(x,y,z)ds}{m}, z_c = \frac{\int_l z\gamma(x,y,z)ds}{m}. \quad (5.15)$$

Приклад. Знайти масу кривої з лінійною густиною $\gamma = \frac{\rho}{2}$, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = 4\varphi$, де $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$.

Розв’язання

Використаємо формулу (5.5) з урахуванням того, що крива задана в полярних координатах:

$$m=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\gamma\left(\rho(\varphi),\varphi\right)\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}d\varphi=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{4\varphi}{2}\cdot 4\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\varphi^2+1}d(\varphi^2+1)=\frac{8}{3}\left(\varphi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{8}{81}\left(\left(4\pi^2+9\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\pi^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Розв’язування типових задач

Приклад 1. Обчислити $I=\int\limits_L x^2dl$ за дугою L плоскої кривої $y = lnx$, якщо $1\le x\le 2$.

Розв’язання. За формулою (5.3) одержуємо

$$I=\int_1^2 x^2\sqrt{1+(\left(\ln x\right)')^2}dx=\int_1^2 x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+x^2\right)=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{3}{2}}\right).$$

Приклад 2. Обчислити $I=\int\limits_L\left(x^2+y^2+z^2\right)dl$ за одним витком гвинтової лінії L: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$.

Розв’язання. За формулою (5.6) одержуємо

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2\right)\cdot\sqrt{\left(\left(\cos t\right)'\right)^2+\left(\left(\sin t\right)'\right)^2+1}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1+t^2\right)\cdot\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(1+t^2\right)dt=\sqrt{2}\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right).$$

Приклад 3. Обчислити $I = \int\limits_L ydl$ за дугою L параболи $y^2 = 2x$ від точки A (0, 0) до точки B (2, 2).

Розв'язання. Для формули (5.3) $y = \sqrt{2x}$,

$$y' = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad a = 0, \quad b = 2.$$

$$I = \int\limits_0^2 \sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = \int\limits_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{2x+1}\,d\left(2x+1\right) =$$

$$= \frac{\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Приклад 4. Знайти масу чверті кола: $x = \cos t$, $y = \sin t$, розміщену в першому квадранті, якщо щільність у кожній точці кривої дорівнює квадрату ординати цієї точки.

Розв'язання. За умовою, $\mu(x,y) = y^2 = \sin^2 t$, $dl=$ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt.$

За формулою (5.2) маємо

$$m = \int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчислити такі криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де С – відрізок прямої, що з'єднує точки О (0, 0) і А (1 , 2) ;

б) $\int\limits_{L_{OB}} ydl$, де L_{OB} – дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$; $O\ (0,\ 0)$; $B\left(\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$;

в) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A\ (0, 4)$, $B\ (4, 0)$;

г) $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x+y^2\right)dy$, де L_{ABC} – ламана; $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$.

2. Обчислити такі криволінійні інтеграли від лінії, заданої параметрично:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} – дуга еліпса: $x = cos\ t$, $y = \alpha\, sin\ t$ від точки A (1, 0) до точки B (0, 2);

б) $\int\limits_{L} \sqrt{2y}\ dl$, де L – перша арка циклоїди: $x = 2\ (t - sin\ t)$, $y = 2\ (1 - cos\ t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

в) $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right)dl$, де L_{AB} – дуга астроїди: $x = cos^3\ t$; $y = sin^3\ t$ від точки A(1,0) до точки B(0,1) ;

г) $\int\limits_{L} \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L – дуга кривої: $x = cos\ t$, $y = sin\ t$, $z = \sqrt{3}\ t$, $0 \le t \le 2\pi$;

3. Обчислити такі криволінійні інтеграли від лінії, заданої в полярній системі координат:

а) $\int\limits_{L} \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L – дуга кардіоїди $\rho = 2\ (\ 1 + cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$;

б) $\int\limits_{L} (x+y)dl$, де L – контур лемніскати Бернуллі

$\rho^2 = \cos 2\varphi, \quad -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4;$

в) $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, де L – частина дуги спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, розміщеної всередині кола радіусом R із центром у полюсі;

г) $\int\limits_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2+y^2)^2}dl$, де L – дуга кривої $\rho = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$.

Задачі для самоперевірки

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$, де L – відрізок прямої, між точками $O\ (0,\ 0)$ і $A\ (1,\ \sqrt{8})$.

Відповідь: 9.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_L y^2 dl$ де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, причому $0 \le t \le 2\pi$.

Відповідь: $\frac{256}{15}a^3$.

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$, де L – контур кола $x^2 + y^2 = 2x$. (Перейти до полярних координат).

Відповідь: 4π.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу, що приводить до поняття криволінійного інтеграла першого роду.
2. Дайте означення криволінійного інтеграла першого роду (інтеграла за довжиною дуги).
3. Наведіть основні властивості криволінійних інтегралів першого роду.
4. Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду, якщо крива інтегрування задана параметрично?
5. За якою формулою можна знайти значення криволінійного інтеграла за дугою, заданою в декартовій системі координат?
6. Яка формула дозволяє обчислення криволінійного інтеграла за дугою в полярній системі координат? Наведіть формулу.
7. Чи можна знайти довжину дуги, за якою виконується інтегрування за допомогою криволінійного інтеграла першого роду? За якою формулою?
8. Як обчислюється маса кривої з відомою функцією лінійної густини? З функцією об'ємної густини?
9. Наведіть формулу знаходження моментів інерції просторової кривої відносно початку координат та координатних осей.
10. Чи можна за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити статичні моменти матеріальної кривої відносно осей координат? Наведіть формули.

РОЗДІЛ 6. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ 2-ГО РОДУ

6.1 Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла 2-го роду

Зазначимо, що робота, витрачена на переміщення матеріальної точки вздовж прямолінійного шляху під дією сталої сили $\vec{F}$, визначається як скалярний добуток вектора сили на вектор шляху $\vec{S}$, тобто

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} \qquad (6.1)$$

Розглянемо більш загальну задачу. Нехай матеріальна точка $M(x, y)$ під дією змінної сили $\vec{F}$ (залежить від

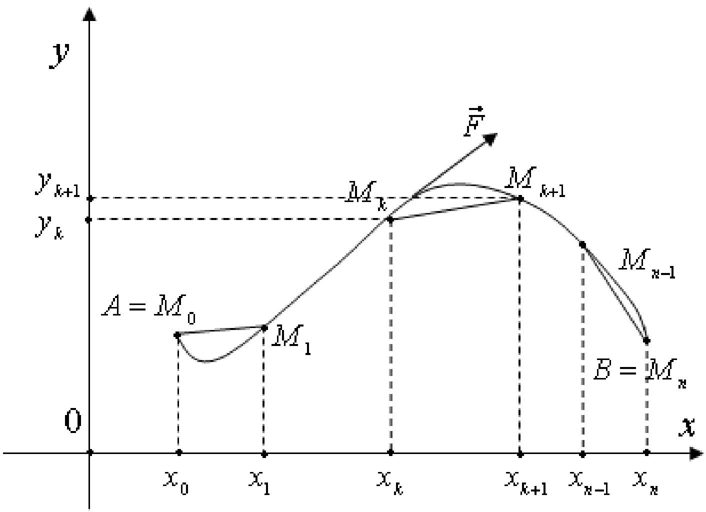


Рисунок 6.1

положення точки на кривій) рухається в площині xOy вздовж кривої L. Обчислимо роботу сили $\vec{F}$ під переміщення точки M з точки A в точку B кривої (рис. 6.1).

Розіб'ємо криву $\breve{AB}$ довільним чином на n частин точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$. Усі точки поділу сполучимо послідовно відрізками $M_k M_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Припустимо, що на кожному відрізку $M_k M_{k+1}$ сила $\vec{F}$ стала і дорівнює її значенню в довільній точці цього відрізка, наприклад у точці M_k. Тоді роботу сили на кожному відрізку $M_k M_{k+1}$ можна обчислити за формулою (6.1), тобто $W_k = \vec{F}(M_k) \cdot M_k \vec{M}_{k+1}$. Якщо точка $M_k(x_k, y_k)$ і $\vec{F}(M_k) = P(M_k)\vec{i} + Q(M_k)\vec{j}$, $M_k \vec{M}_{k+1} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$, то $W_k = P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k$. Тоді робота вздовж усієї ламаної, вписаної в криву $\breve{AB}$, дорівнює $\sum\limits_{k=0}^{n-1} P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k$. Якщо існує границя цієї суми при $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \left| M_k \vec{M}_{k+1} \right| \to 0$, то її беруть за роботу сили $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ вздовж кривої $\breve{AB}$, тобто

$$W = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k . \qquad (6.2)$$

6.2. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду

Нехай на неперервній спрямлюваній кривій $\breve{AB}$, заданій рівняннями $x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, визначено функцію $P(x, y)$. Введемо *T*-розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$ ($\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$) і на кожному відрізку $[t_k, t_{k+1}]$ довільним чином візьмемо точку τ_k. Складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(x\left(\tau_k\right), y\left(\tau_k\right)\right)\Delta x_k \,, \tag{6.3}$$

яку називають ***інтегральною сумою***.

Нехай $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta t_k$. Якщо існує границя інтегральної суми (6.3) при $\lambda(T) \to 0$, то це число називають ***криволінійним інтегралом від функції*** $P(x, y)$ ***за змінною*** x уздовж кривої $\breve{AB}$ і позначають $\int\limits_{AB} P(x, y)dx$.

Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла за *змінною* y, який позначається $\int\limits_{AB} Q(x, y)dy$.

Криволінійні інтеграли за координатами об'єднують загальною назвою – ***криволінійні інтеграли 2-го роду***. Загальний вигляд криволінійного інтеграла другого роду такий:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,. \tag{6.4}$$

У випадку замкненої кривої $AB = L$, якщо вона обходиться проти годинникової стрілки (додатний напрямок обходу), криволінійний інтеграл позначається $\oint\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ або $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy$.

Механічний зміст криволінійного інтеграла 2-го роду. Інтеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ чисельно дорівнює роботі змінної сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ із переміщення матеріальної точки $M(x,y)$ вздовж кривої $\breve{AB}$ від точки A до точки B.

6.3. Властивості криволінійних інтегралів 2-го роду

1. $\int\limits_{AB} 0dx = \int\limits_{AB} 0dy = 0$.

2. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0$, якщо $\breve{AB}$ – відрізок, перпендикулярний до осі Ox;

$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = 0$, якщо $\breve{AB}$ – відрізок, перпендикулярний до осі Oy.

3. $\int\limits_{AB} CP(x,y)dx = C\int\limits_{AB} P(x,y)dx,\ C = const$.

4. $\int\limits_{AB} (P_1 \pm P_2)dx = \int\limits_{AB} P_1dx \pm \int\limits_{AB} P_2dx$.

5. Якщо крива $\breve{AB}$ є сполученням кривих AC і CB, причому кінець C кривої AC є початком кривої CB, то

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$$

Для доведення цих властивостей досить застосувати означення криволінійного інтеграла другого роду.

6. При зміні напрямку обходу криволінійний інтеграл змінює знак на протилежний, тобто

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\breve{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Дійсно, при інтегруванні за $\breve{BA}$ всі прирости Δx_i та Δy_j беруться з протилежними знаками, що і впливає на знак результату.

Зауваження. Якщо точки A і B кривої збігаються, ми одержимо замкнений контур. Іншими словами, під ***замкненим контуром*** на площині Oxy розуміють неперервну криву $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \in [\alpha; \beta]$ таку, що $x(\alpha) = x(\beta),\ y(\alpha) = y(\beta)$.

У випадку інтегрування вздовж замкненої кривої потрібно зазначати напрям, у якому проводимо інтегрування, оскільки, маючи справу з незамкненою кривою, напрям її визначався початковою й кінцевою точками, а тут початкова й кінцева точки зливаються.

За ***додатний напрям*** під час інтегрування по замкненій криві (розглядаємо лише плоскі криві, які не перетинають самих себе) беруть напрям *проти руху* годинникової стрілки, або напрям, ідучи за яким, обмежена контуром частина площини залишається *зліва*. Протилежний цьому напрям називають *від'ємним*.

6.4. Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду

Нехай криву $\breve{AB}$ задано параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ \ t \in [\alpha, \beta]$, де функції $x(t),\ y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція $P(x, y)$ неперервна на кривій $\breve{AB}$. За означенням

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k .$$

Розглянемо інтегральну суму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k$. Оскільки $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k)$, то, застосувавши теорему Лагранжа, одержимо

$\Delta x_k = x'(\theta_k)\Delta t_k$, $\theta_k \in (t_k, t_{k+1})$. Точку (ζ_k, η_k) виберемо так, щоб $\zeta_k = x(\theta_k)$, $\eta_k = y(\theta_k)$.

Тоді $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\zeta_k), y(\eta_k))x'(\theta_k)\,\Delta t_k$. Це інтегральна сума для функції $P(x(t), y(t))x'(t)$ від змінної t, яка неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, отже й інтегровна на ньому, тому

$$\int_{A\breve{B}} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt \cdot$$

Аналогічно, якщо функція $Q(x, y)$ неперервна на кривій $A\breve{B}$, то

$$\int_{A\breve{B}} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt \cdot$$

Тоді

$$\int_{A\breve{B}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))\cdot y'(t))dt \cdot \quad (6.5)$$

Якщо крива $A\breve{B}$ є графіком неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$, а функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні на кривій $A\breve{B}$, то дійсна формула

$$\int_{A\breve{B}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\cdot y'(x))dx \cdot$$

Якщо крива $A\breve{B}$ є графіком неперервної на відрізку $[c, d]$ функції $x = \varphi(y)$, а функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні на кривій $A\breve{B}$, то дійсна формула

$$\int_{A\breve{B}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(y), y) + Q(x(y), y)\cdot x'(y))dy$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} xydx + xdy$, де $\breve{AB}$ – крива, що сполучає точки і A (0, 0) і B (1, 1), задана рівнянням $y = x^2$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\limits_{AB} xydx = \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}, \quad \int\limits_{AB} xdy = \int\limits_0^1 \sqrt{y}dy = \left.\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Тому $\int\limits_{AB} xydx + xdy = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання. Використовуючи параметричне задання кола рівняннями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, одержимо інтеграл

$$\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t)}{R^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

6.5. Формула Остроградського – Гріна

Формула Остроградського – Гріна встановлює зв'язок між криволінійним інтегралом і подвійним інтегралом, тобто дає вираз інтеграла за замкненим контуром через подвійний інтеграл за областю, обмеженою цим контуром. Вона пов'язує подвійний інтеграл за областю (D) з криволінійним інтегралом за межею L цієї області.

Розглянемо цю формулу для так званих елементарних областей.

Область (D) називається ***елементарною відносно осі*** Ox**,** якщо вона обмежена лініями $y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ x = a,$ $x = b,\ y_1(x) \le y_2(x)$ для всіх $x \in [a, b]$. Область (D) називається ***елементарною відносно осі*** Oy**,** якщо вона обмежена лініями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$, $x_1(y) \le x_2(y)$, для всіх $y \in [c, d]$.

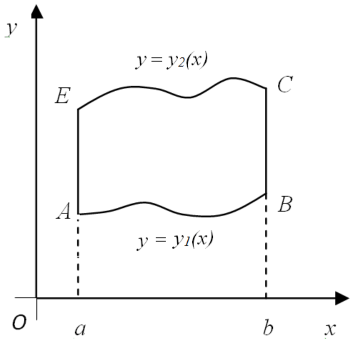


Рисунок 6.2

Область (D), одночасно елементарна відносно обох осей Ox і Oy, називається *елементарною*.

***Теорема* (Остроградського – Гріна)**. *Нехай область* (D) *елементарна, а функції* $P(x, y), Q(x, y)$ *неперервні разом із частинними похідними* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *та* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *в області* (D) *і на її межі* L. *Тоді дійсна формула*

$$\oint\limits_{L} P dx + Q dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \qquad (6.6)$$

Доведення. Розглянемо елементарну відносно осі Ox область (D) (рис. 6.2), межу якої $ABCEA$ будемо вважати додатно орієнтованою. Нехай функція $P(x, y)$

визначена та неперервна разом зі своєю частинною похідною $\frac{\partial P}{\partial y}$ у замкненій області (D).

Розглянемо подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx . \tag{6.7}$$

Замінимо визначені інтеграли криволінійними:

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int\limits_{\breve{EC}} P(x, y) dx = -\int\limits_{\breve{CE}} P(x, y) dx , \tag{6.8}$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = -\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y) dx . \tag{6.9}$$

До правої частини рівності (6.9) додамо криволінійні інтеграли $-\int\limits_{\breve{BC}} P(x, y) dx = 0$ та $-\int\limits_{\breve{EA}} P(x, y) dx = 0$.

Ураховуючи (6.8) та (6.9), маємо

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y) dx - \int\limits_{\breve{BC}} P(x, y) dx - \int\limits_{\breve{CE}} P(x, y) dx -$$

$$-\int\limits_{\breve{EA}} P(x, y) dx = -\oint\limits_{ABCEA} P(x, y) dx . \tag{6.10}$$

Одержана рівність доведена для області, елементарної відносно осі Ox. Проте її можна довести й для довільної області, яку можна розбити на скінченну кількість таких областей.

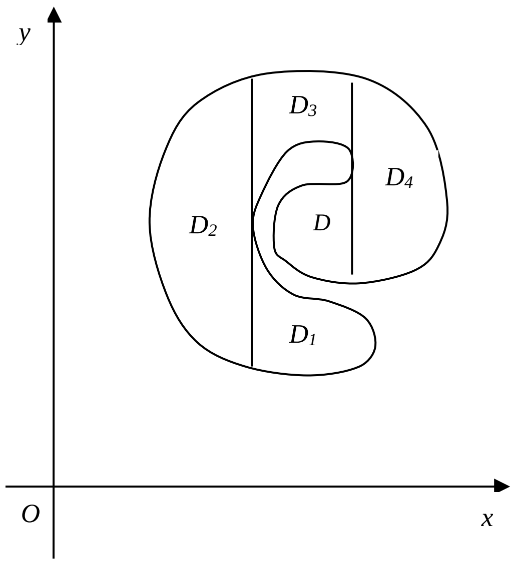


Рисунок 6.3

Нехай область (D) із межею L розбито на частини (D_i) з межами L_i, $i=1,2,\ldots,n$ (рис. 6.3), для кожної з яких справджується рівність

$$\iint\limits_{(D_i)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L_i} P(x,y)dx .$$

Візьмемо суму цих рівностей за i від 1 до n. Тоді зліва матимемо подвійний інтеграл за всією областю (D), а справа – суму криволінійних інтегралів, взятих за контурами L_i. Кожен із цих контурів складається з ліній, що обмежують область (D), а також із допоміжних ліній, якими розбито область (D) на частини. Проте кожна з цих допоміжних ліній входить до двох контурів L_i, по кожній з них криволінійний інтеграл беруть двічі, причому в протилежних напрямках. Отже, в розглядуваній сумі інтеграли вздовж допоміжних ліній знищуватимуться. Тому сума інтегралів вигляду $\int\limits_{L_ш} P(x,y)dx$ є криволінійним інтегралом за контуром L. Таким чином, матимемо

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L} P(x,y)dx. \qquad (6.11)$$

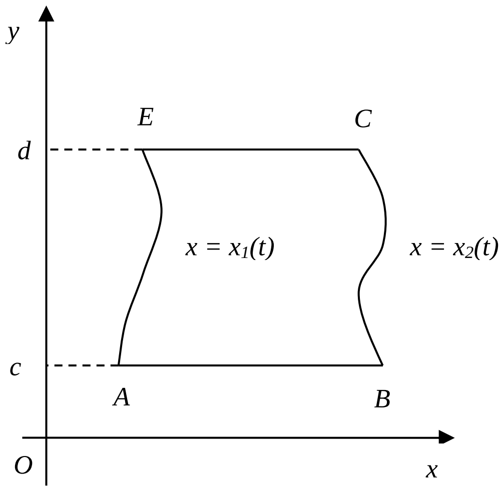


Рисунок 6.4

Розглянемо тепер область (D), елементарну відносно осі Oy (рис. 6.4). Нехай функція $Q(x,y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial Q}{\partial x}$ визначені та неперервні в замкненій області (D). Повторюючи міркування, аналогічні щодо виведення формули (6.11), одержимо

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{L} Q(x,y)dy. \qquad (6.12)$$

Аналогічно можна впевнитися у тому, що формула (6.12) справедлива для областей, які можна розбити на скінченну кількість областей розглянутого типу.

Область (D) називається ***елементарною***, якщо вона допускає розбиття як на області, елементарні відносно осі Ox, так і на області, елементарні відносно осі Oy.

Очевидно, що для елементарної області одночасно справджуються рівності (6.11) і (6.12). Якщо від рівності (6.12) відняти рівність (6.11), одержимо ***формулу Гріна***

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Теорему доведено.

Зауваження. З формули Гріна можна одержати формулу для обчислення площі плоскої фігур через криволінійний інтеграл. Поклавши $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$, одержимо $\iint_{(D)} dxdy = \int_L xdy$. Якщо $Q(x,y) = 0$, $P(x,y) = -y$, то $\iint_{(D)} dxdy = -\int_L ydx$. Додавши почленно ці рівності, матимемо

$$\iint_{(D)} dxdy = \frac{1}{2} \int_L xdy - ydx .$$

Оскільки $\iint_{(D)} dxdy = S(D)$, то маємо формулу для обчислення ***площі плоскої фігури*** (D):

$$S(D) = \frac{1}{2} \int_L xdy - ydx . \qquad (6.13)$$

Теорема (про незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування). Якщо в елементарній області (D) функції $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, то рівносильними є такі чотири умови:

1. Інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятий за довільним контуром $L \subset (D)$, дорівнює нулю.
2. Інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування.
3. Вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, визначеної в області (D).
4. В області (D) виконується рівність $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Доведення проведемо за схемою $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

1. Нехай $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де L – будь-який замкнений контур в області (D). Розглянемо контур $AmBnA$ (рис. 6.5).

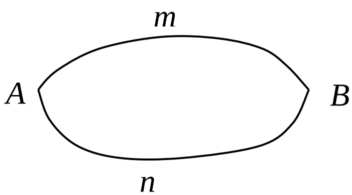


Рисунок 6.5

Маємо $\int\limits_{AnB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BmA} Pdx + Qdy = 0$, звідки випливає, що $\int\limits_{AnB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy$, тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування ($1 \to 2$).

2. Позначимо $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy = U(x,y) - U(x_0,y_0)$ (рис. 6.6). Маємо

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x;y)-U(x;y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{MM_1} Pdx+Qdy}{\Delta x}. \quad (6.14)$$

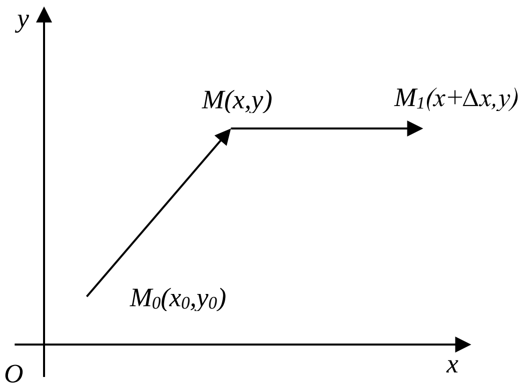


Рисунок 6.6

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то виберемо шлях по прямій $y=const$, тому $dy=0$ і (6.14) запишуться у вигляді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx}{\Delta x}.$$

Згідно з теоремою про середнє між точками x та $x+\Delta x$ знайдеться така точка ξ, що $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = P(\xi,y)\Delta x$.

Тому рівність (6.14) набирає вигляду

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\xi,y)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(\xi;y)=\lim_{\xi\to x}P(\xi;y)=P(x;y),$$

тому що функція $P(x,y)$ неперервна в області (D).

Таким чином, $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$, аналогічно доводиться, що $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$. Отже,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU(x,y). \qquad (2 \to 3)$$

3. Визначимо цю функцію:

$$U(x,y) - U(x_0, y_0) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то виберемо шлях інтегрування, зображений на рис. 6.7. Тоді за властивостями криволінійного інтеграла одержимо

$$U(x,y) - U(x_0, y_0) = \int\limits_{M_0M_1} Q(x_0; y)dy + \int\limits_{M_1M} P(x; y)dx =$$

$$= \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0; y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x; y)dx.$$

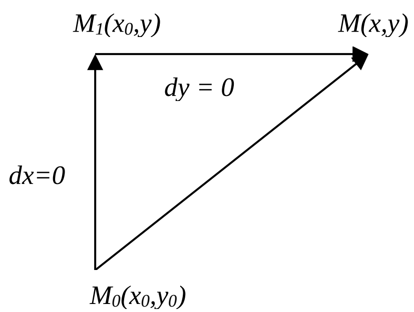


Рисунок 6.7

Звідси

$$U(x; y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x; y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0; y)dy + U(x_0; y_0).$$

Оскільки $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$, то $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ для довільних точок $(x;y)$ з області (D). (Нагадаємо, що рівність мішаних частинних похідних другого порядку випливає з неперервності відповідних частинних похідних першого порядку.) ($3 \to 4$)

4. Для довільного замкненого контура L, що повністю знаходиться в області (D), справедлива формула Гріна і $\int\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_{(D)} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$, тому що $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в області (D). ($4 \to 1$)

Таким чином, усі чотири умови рівносильні. Теорему доведено.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} \left(x^3 - y^3\right) dx - 3xy^2 dy$, якщо AB – крива, що сполучає точки $A(1,2)$ і $B(0,1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$. Оскільки вони рівні, то за сформульованою теоремою величина даного інтеграла не залежить від форми шляху інтегрування. Виберемо криву, що сполучає точки A (1, 2) і B (0, 1) зручним та оптимальним для нас чином.

1-й спосіб. Сполучимо точки A (1, 2) і B (0, 1) прямою, рівняння якої складемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}$ або $y=x+1$. Тоді маємо

$$\int_{AB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy=\int_{0}\left(x^3-(x+1)^3-3x(x+1)^2\right)dx=\frac{31}{4}.$$

2-й спосіб. Сполучимо точки A (1, 2) і B (0, 1) ламаною лінією ACB, де точка С (1, 1) Тоді відрізок $AC\perp Ox,\ CB\perp Oy$, тому

$$\int_{AB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy=\int_{AC}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy+$$

$$+\int_{CB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy=$$

$$=\int_2^1-3y^2dy+\int_1^0\left(x^3-1\right)dx=y^3\Big|_1^2+\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Bigg|_1^0=7+\frac{3}{4}=\frac{31}{4}.$$

Приклад. Перевірити, чи є вираз $\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy$ повним диференціалом деякої функції двох змінних, і якщо так, знайти цю функцію.

Розв'язання. Для того щоб вираз $Pdx+Qdy$ був повним диференціалом функції двох змінних, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2y} - 15y^2e^x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{2y} - 15y^2e^x,$$ тобто даний вираз є повним диференціалом деякої функції $\Phi(x, y)$.

Знайдемо її за формулою $\Phi(x, y) = \int\limits_{AM} Pdx + Qdy$, де A – фіксована точка, $M(x, y)$ – змінна точка. Криволінійний інтеграл від даного виразу не залежить від форми шляху інтегрування, тому шлях інтегрування AM виберемо так, як показано на рис. 6.8 (на відрізку AB маємо $y = 0$ і $dy = 0$, а на відрізку BM маємо $dx = 0$):

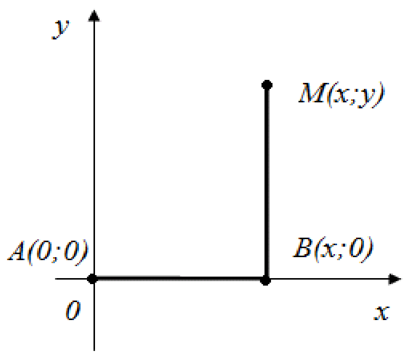


Рисунок 6.8

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{ABM} \left(e^{2y} - 5y^3e^x\right)dx + \left(2xe^{2y} - 15y^2e^x\right)dy =$$

$$= \int\limits_{AM} \left(e^{2y} - 5y^3e^x\right)dx + \left(2xe^{2y} - 15y^2e^x\right)dy + \int\limits_{BM} \left(e^{2y} - 5y^3e^x\right)dx + \left(2xe^{2y} - 15y^2e^x\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^x dx + \int\limits_0^y \left(2xe^{2y} - 15y^2e^x\right)dy = x\Big|_0^x + \left(xe^{2y} - 5y^3e^x\right)\Big|_0^y = xe^{2y} - 5y^3e^x.$$

Загальний вигляд усіх таких функцій можна записати у вигляді $\Phi(x, y) = xe^{2y} - 5y^3e^x$.

6.6. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

Плоска область D називається однозв'язною, якщо для будь-якого замкненого контура L, що знаходиться в цій області, обмежена ним частина площині цілком належить області D.

Теорема. Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ не залежав від шляху інтегрування в однозв'язної області D, в якій функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ безперервні разом зі своїми частинними похідними, необхідно і достатньо, щоб у кожній точці цієї області виконувалась умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6.15}$$

Якщо виконується умова (6.15) і L – замкнений контур, тоді

$$\oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{6.16}$$

Якщо виконується умова (6.16), тоді вираз $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D, тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint\limits_L \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$, де L – коло $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Розв'язання. Для цього інтеграла $P = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $Q = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Одержимо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Оскільки умова (6.15) виконується і контур L замкнений, тоді за формулою (6.15) даний інтеграл дорівнює нулю.

6.7. Геометричне та фізичне застосування криволінійних інтегралів 2-го роду

Площа плоскої області

Площу S плоскої області D у площині OXY, обмеженій замкненою лінією L, знаходять за формулою

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx, \qquad (6.16)$$

де напрямок обходу контура L вибрано так, що область D весь час знаходиться зліва від шляху інтегрування.

Робота сили

Роботу сили $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, діючої на точку, що рухається вздовж кривої (AB), знаходять за формулою

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (6.17)$$

Приклад. Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j}$ із переміщення матеріальної точки *C* вздовж прямої $y = x$ з точки $O(0,0)$ до точки $M(1,1)$.

Розв'язання. Із формули (6.17) випливає, що

$$A = \int_{ом} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 (x^2 + x + x)dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити $\int_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$ за дугою *L* параболи $y = x^2$ від точки $A\,(-1,\ 1)$ до точки $B\,(2,\ 4)$.

Розв'язання. Змінна x в даному напрямку змінюється від –1 до 2. Обчислимо криволінійний інтеграл зведенням його до визначеного:

$$\int_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_{-1}^{2} \left(x^2 - 2x^3\right)dx +$$

$$+\left(x^4 - 2x^3\right)d\left(x^2\right) = \int_{-1}^{2}\left(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{2} + \frac{64}{3} - \frac{128}{5}\right) -$$

$$-\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{-4}{5}\right) = -9{,}9.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_L 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки (0, 0) і (4, 8).

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дані точки:

$$\frac{x-0}{4-0} = \frac{y-0}{8-0} \Rightarrow y = 2x.$$

Шлях інтегрування визначається цим рівнянням, якщо $0 \le x \le 4$. Взявши x за параметр, знайдемо $dy = 2dx$ і подставимо в інтеграл значення y і dy. Одержимо

$$\int\limits_L 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy = \int\limits_0^4 \left(4x\sin^2 2x + 2x(\cos^2 2x)\cdot 2\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^4 4xdx = 32.$$

Приклад 3. Дані точки A (0, 6) і B (3, 0). Знайти роботу, виконану силою $\overline{F} = 2x\bar{i} - y^2\,\bar{j}$ на відрізку AB.

Розв'язання. Відрізок AB знаходиться на прямій: $\dfrac{x-0}{3-0} = \dfrac{y-6}{0-6} \Rightarrow y = 6-2x.$ Оскільки $\overline{F}(x,y) = (2x, -y^2)$, то за формулою (6.17) шукана робота дорівнює $A = \int\limits_{AB} 2xdx - y^2dy$. Взявши у формулі (6.17) $y = 6 - 2x$, $dy = -2dx$, $a = 0$, $b = 3$, маємо

$$A = \int\limits_0^3 2xdx - (6-2x)^2(-2dx) = \int\limits_0^3 2xdx + 2(36 - 24x + 4x^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (2x + 72 - 48x + 8x^2)dx = (72x - 23x^2 + \frac{8}{3}x^3)\Big|_0^3 =$$

$$= (72\cdot 3 - 23\cdot 9 + 72) = (72\cdot 4 - 207) = 288 + 207 = 495.$$

Приклад 4. Дані точки $A(2,0)$ і $B(4,2)$ і $O(0,0)$. Обчислити

$I=\int\limits_L (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy,$ де L – ламана OAB.

Розв'язання. Інтеграл по ламаній дорівнює сумі інтегралів за складовими відрізками. Відповідно

$$\int\limits_L (x-y)^2 dx+(x+y)^2 dy=\int\limits_{OA}(x-y)^2 dx+(x+y)^2 dy+$$
$$+\int\limits_{AB}(x-y)^2 dx+(x+y)^2 dy.$$

На відрізку OA $0\le x\le 2,\ y=0,\ dy=0,$ а на відрізку AB $2\le x\le 4,\ y=x{-}2,\ dy=dx.$ Тому

$$I=\int\limits_{OA}(x)^2 dx+\int\limits_{AB}(x-x+2)^2 dx+(2x-2)^2 dx=$$
$$=\int\limits_0^2 x^2 dx+\int\limits_2^4 (4+4x^2-8x+4)dx=$$
$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+\left.\left(8x+\frac{4}{3}x^3-4x^2\right)\right|_2^4=\frac{8}{3}+(32+\frac{64\cdot 4}{3}-64)-$$
$$-(16+\frac{32}{3}-16)=\frac{8}{3}+\frac{128}{3}=\frac{136}{3}.$$

Задачі для аудиторної роботи

Обчислити криволінійні інтеграли:

1. $\int\limits_L (x-y)\,dl,\ L$ – коло : $x^2+y^2=ax.$
2. $\int\limits_L xy\,dl,\ L$ – ламана $(ABCD), A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2).$
3. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl,\ L$ – перша арка циклоїди : $x=a\left(t-\sin t\right), y=a\left(1-\cos t\right).$
4. $\int\limits_L \left(x^2-y^2\right)dx,\ L: y=x^2,$ від точки $O\left(0,0\right)$ до точки $C\left(2,4\right).$

5. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y-x)dy, L: 1) y = x, 2) y = x^2, 3) y = x^3, 4) y^2 = x.$

6. $\int\limits_L ydx - xdy,\ \ L\ -$ еліпс $: x = a\cos t, y = b\sin t.$

7. $\int\limits_L \dfrac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2},\ L\ -$ коло $: x = a\cos t, y = a\sin t, t_1 = 0, t_2 = \pi.$

8. $\int\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy, L\ -$ коло $: x^2+y^2 = R^2.$

Задачі для самоперевірки

1. Обчислити $I = \int\limits_L (x+y+z)dl$ за дугою витка гвинтової лінії, заданої параметричними рівняннями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ якщо $0 \le t \le \pi/2$. Відповідь: $\sqrt{2}(2+\dfrac{\pi^2}{8})$.

2. Обчислити $\int\limits_L (x-y)dl$, де L – відрізок прямої від точки (0, 0) до точки (4, 3). Відповідь: 5/2.

3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{y}dl$, де L – перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

Відповідь: $\sqrt{8}\pi$.

4. Знайти масу дуги кола $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi)$, якщо лінійна густина її в точці (x, y) дорівнює y.

Відповідь: 2.

5. Обчислити $\int\limits_L xdy - ydx$ по кривій $y = x^3$ від точки (0, 0) до точки (2, 8). Відповідь: 8.

6. Обчислити $\int\limits_L \sin y dx + \sin x dy$ за прямою від точки $(0, \pi)$ до точки $(\pi, 0)$. Відповідь. 0.

7. Обчислити $\int\limits_L y dx + x dy$ за контуром трикутника, обмеженого осями координат і прямою $14x + 10y = 35$.

Відповідь: 0.

8. Обчислити $\int\limits_{AB} x^2 dx - yz dy + z dz$, де AB – відрізок прямої від точки $A(1, 2, -1)$ до точки $B(3, 3, 2)$.

Відповідь. $\frac{26}{3}$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу, що приводить до поняття криволінійного інтеграла другого роду (інтеграла за координатами).
2. Про яку інтегральну суму йде мова при означенні криволійного інтеграла другого роду? Дайте пояснення.
3. Яка область на площині Oxy називається елементарною відносно осі Ox? Відносно осі Oy?
4. Сформулюйте теорему Остроградського – Гріна та доведіть її.
5. Як із формули Остроградського – Гріна можна одержати співвідношення для обчислення площі плоскої фігур через криволінійний інтеграл?
6. Запишіть формулу для обчислення площі плоскої фігури.
7. Зазначте умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.
8. Як знайти роботу змінної сили $\vec{F}$ за переміщенням матеріальної точки M уздовж заданої кривої?

Варіанти контрольної роботи

Варіант 1

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le\sqrt{\pi},\, 0\le y\le x\right\}$, $f(x,y)=x^2\cos xy$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 9,\, \frac{3\sqrt{2}}{2}\le z\le 3\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої *Г*: $\int\limits_{\Gamma} xds$, $\Gamma -$ відрізок із кінцями (1, 1) і (2, 3).

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} xdy-ydx, \qquad A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола $C=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_C (\cos ydx+x(1-\sin y)dy).$$

Варіант 2

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le\sqrt{\pi},\, x\le y\le\sqrt{\pi}\right\},\ f(x,y)=y^2\cos xy$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\middle|\, x^2+y^2\le z^2\le 9-x^2-y^2,\, z\ge 0\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Γ: $\int\limits_\Gamma (2x+y)ds$, Γ – відрізок з кінцями (1, 0) і (0, 2).

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} xdy-ydx,\ \ A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола $C=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_C (\sin ydx+x(1+\cos y)dy).$$

Варіант 3

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D=\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{\pi}\le x\le 0,-x\le y\le\sqrt{\pi}\right\}$, $f(x,y)=x^2\sin xy$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 4, 1\le z\le 2\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Γ:

$\int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$, Г – межа трикутника із вершинами (0, 0), (0, 2), (2, 0).

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*, причому $A(-1,0)$, а $B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\int\limits_{AB}xdy$.

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола $C=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2=1\right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_{C}(y(\cos x-1)dx+\sin xdy).$$

Варіант 4

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D=\left\{(x,y)\middle| -\sqrt{\pi}\le x\le 0, 0\le y\le -x\right\}$, $f(x,y)=y^2\sin xy$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le z^2\le 9-x^2-y^2, z\le 0\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж кривої Γ: $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{y-x}$, Γ – відрізок із кінцями (0, –2) і (4, 0).

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки А до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} ydx,\ A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B(1,0).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола $C=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2=1\right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_{C}(y(\sin x-1)dx-\cos xdy).$$

Варіант 5

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D = \{(x,y) | -1 \le x \le 0, x \le y \le 0\}$, $f(x,y) = x^2 e^{xy}$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G = \left\{ (x,y,z) \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \le 3, \frac{3}{2} \le z \le \sqrt{3} \right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Г: $\int\limits_\Gamma xyds$, Γ – межа трикутника з вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0).

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} xdy,\ A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл вздовж кола $C = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 = 1\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_C (y + e^{-y})dx + xe^{-y}dy.$$

Варіант 6

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D = \{(x,y) | -1 \le x \le 0, -1 \le y \le x\}$, $f(x,y) = y^2 e^{xy}$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G = \left\{(x,y,z) \middle| \frac{3\sqrt{2}}{2} \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Г: $\int\limits_\Gamma xyds$, Г – чверть кола $x^2 + y^2 = 1$, що знаходиться в першому октанті.

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} x^2 dy, \; A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \; B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола $C = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_C (y+e^x)dx + ye^{-y}dy \cdot$$

Варіант 7

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$$D=\{(x,y)\,|\;0\le x\le 1, -1\le y\le -x\},\; f(x,y)=y^2\operatorname{ch}xy.$$

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\,\middle|\;\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Γ: $\int\limits_\Gamma xyds$, Γ – межа прямокутника з вершинами (0, 0), (3, 0), (3, 2), (2, 0).

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} y^2dx,\; A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\; B(0,-1).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола

$C=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_{C} (y+\mathrm{arctg}y)dx+\frac{x}{1+y^2}dy$$

Варіант 8

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ від функції $f(x,y)$ за зазначеною областю D:

$D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le 1, -x\le y\le 0\right\}$, $f(x,y)=y^2\mathrm{sh}xy$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\middle|\, 1\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Γ: $\int\limits_{\Gamma} x^2 ds$, Γ – напівколо $x^2+y^2=4,\ y\ge 0$.

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} x^2dy-ydx,\ A(0,-1),\ B(-1,0).$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола

$C = \left\{ (x, y) \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_{C} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} dx + (x + \sqrt{1+x^2}) dy \cdot$$

Варіант 9

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy$ від функції $f(x, y)$ за зазначеною областю D:

$D = \left\{ (x, y) \middle| \, 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x \right\}$, $f(x, y) = xye^{x+y}$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G = \left\{ (x, y, z) \middle| \, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 2 \right\} \cdot$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої $\Gamma : \int\limits_{\Gamma} (x - y) ds$, Γ – напівколо $x^2 + y^2 = 1, \, y \leq 0 \cdot$

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками *A* і *B* та орієнтована у напрямку від точки *A* до точки *B*:

$$\int\limits_{AB} xdy + ydx, \; A(-1,0), \; B(0,1) \cdot$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола

$C = \left\{(x, y) \middle| \, x^2 + y^2 = 1\right\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint_C \left(y + \arcsin\frac{y}{2} \right) dx + \frac{x}{\sqrt{4 - y^2}} dy \cdot$$

Варіант 10

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dxdy$ від функції $f(x, y)$ за зазначеною областю D:

$D = \left\{(x, y) \middle| -1 \le x \le 0,\, x \le y \le -x\right\},\; f(x, y) = x^2 \mathrm{ch} xy$.

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G = \left\{(x, y, z) \middle| 1 - x^2 - y^2 \le z \le 0\right\}.$$

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Г: $\int_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2} ds$, Г – коло $x^2 + y^2 = 1$.

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками A і B та орієнтована у напрямку від точки A до точки B:

$$\int_{AB} xdy - y^2 dx,\; A(0,1),\; B(1,0) \cdot$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола

$C = \{(x, y) |\, x^2 + y^2 = 1\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint\limits_C \frac{y}{1+x^2}dx + (x + \mathrm{arctg}x)dy.$$

Розв'язування типового варіанта контрольної роботи

Приклад 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx$ від функції $f(x, y)$ за зазначеною областю D:

$D = \{(x, y) |\, 0 \le x \le 2, 0 \le x \le y\}$, $f(x, y) = x^2 \mathrm{sh} xy$.

Розв'язання

Вигляд області D показаний на рис. 7.1.

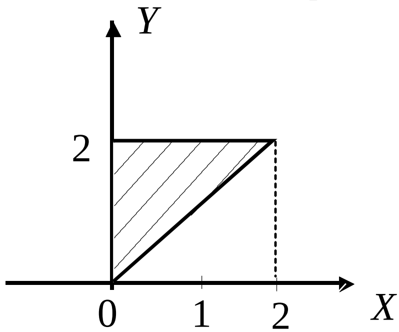


Рисунок 7.1

Подамо подвійний інтеграл через повторний:

$$J=\iint\limits_D x^2\mathrm{sh}xy\,dxdy=\int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_x^2 \mathrm{sh}xy\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 x^2dx\left(\frac{1}{x}\mathrm{ch}xy\Big|_x^2\right)=\int\limits_0^2 x^2\,\frac{1}{x}(\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}x^2)dx=$$

$$=\int\limits_0^2 x\mathrm{ch}2x\,dx-\int\limits_0^2 x\mathrm{ch}x^2dx=J_1+J_2.$$

Перший інтеграл J_1 візьмемо частинами:

$$J_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 xd(\mathrm{sh}2x)=\frac{1}{2}\left(x\mathrm{sh}2x\Big|_0^2-\int\limits_0^2 \mathrm{sh}2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\mathrm{sh}4-\frac{1}{2}\mathrm{ch}2x\Bigg|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\mathrm{sh}4-\frac{1}{2}\mathrm{ch}4+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{sh}4+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{ch}4.$$

$$J_2=\int\limits_0^2 x\mathrm{ch}x^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \mathrm{ch}x^2d(x^2)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}x^2\Big|_0^2=\frac{1}{2}\mathrm{sh}^2 4.$$

Звідки $J=\mathrm{sh}4+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{ch}4+\frac{1}{2}\mathrm{sh}^2 4.$

Приклад 2

Обчислити об’єм тіла G за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи необхідну заміну змінних:

$$G=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}.$$

Розв’язання

За означенням потрійного інтеграла об’єм V області G обчислюється за формулою

$$V = \iiint\limits_G dxdydz.$$

Область G – це конус, проекція якого на площину XOY є кругом D: $x^2 + y^2 \le 4$ (див. рис. 7.2).

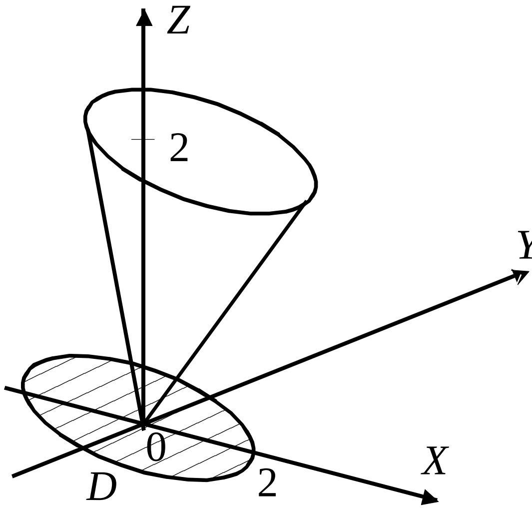


Рисунок 7.2

Тоді

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz = \iint\limits_D \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_D dxdy - \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = J_1 + J_2.$$

Перший з інтегралів J_1 дорівнює за означенням подвоєній площі круга D, тобто $2\pi r^2 = 8\pi$. Для обчислення другого інтеграла перейдемо до полярних координат, пов'язаних із декартовими координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \, r \ge 0 \\ y = r\sin\varphi, \, \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

За формулою заміни змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\left|J(r,\varphi)\right|drd\varphi,$$

де

$$J(r,\varphi) = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

– якобіан заміни, D^* – прообраз області D у координатах (r,φ), оскільки область $D = \left\{(x, y) \middle| \, x^2 + y^2 \le 4\right\}$, то $D^* = \left\{(r,\varphi) \middle| \, 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$. Звідси

$$J_2 = \iint\limits_{D^*} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\, rdrd\varphi = \iint\limits_{D^*} r^2 drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^2 dr =$$

$$= 2\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

Відповідь: $V = 8\pi - \dfrac{16}{3}\pi = \dfrac{8}{3}\pi$.

Приклад 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду вздовж плоскої кривої Γ:

$\int\limits_{\Gamma}(x+2y)ds$, Γ – ламана ABC із вершинами у точках $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$.

Розв'язання

За властивостями адитивності й лінійності криволінійного інтеграла першого роду маємо

$$\int\limits_{\Gamma}(x+2y)ds = \int\limits_{AB}(x+2y)ds + \int\limits_{BC}(x+2y)ds \cdot$$

Рівняння відрізка AB: $x=0, 0\le y\le 1$, рівняння відрізка BC: $y=1, 0\le x\le 1$. Тоді за формулою обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду

$$\int\limits_{AB}(x+2y)ds = \int\limits_0^1(0+2y)\sqrt{0^2+1^2}dy = 2\int\limits_0^1 ydy = 1,$$

$$\int\limits_{BC}(x+2y)ds = \int\limits_0^1(x+2)\sqrt{1^2+0^2}dx = \int\limits_0^1(x+2)dx = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}\cdot$$

Відповідь: $\int\limits_{\Gamma}(x+2y)ds = 1+\frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

Приклад 4

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж меншої дуги одиничного кола, що міститься між точками A і B та орієнтована у напрямку від точки A до точки B:

$$\int\limits_{AB} x^2dy - y^2dx,\ A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\ B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Розв'язання

Задамо рівняння дуги AB одиничного кола параметрично: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$.

Орієнтація дуги AB при цьому буде задовольняти умову задачі. Тоді за формулою обчислення криволінійного інтеграла 2-роду маємо

$$\int_{AB} x^2dy - y^2dx = \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (\cos^2 t\cos t + \sin^2 t\sin t)dt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (\cos^3 t + \sin^3 t\ )dt = \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1-\sin^2 t)\cos tdt + \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1-\cos^2 t)\sin tdt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1-\sin^2 t)d(\sin t) - \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1-\cos^2 t)d(\cos t) =$$

$$= \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} - \cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi/3}^{3\pi/4} = \frac{11}{24} - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Приклад 5

Обчислити криволінійний інтеграл уздовж кола $C = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 = 1\}$, орієнтованої за годинниковою стрілкою:

$$\oint_C \frac{y}{\sqrt{4-x^2}}dx - (x + \arccos x/2)dy.$$

.

Розв'язання

За формулою Гріна, яка у цій задачі застосовна, оскільки крива C кусково-гладка, а функції $P = \frac{y}{\sqrt{4-x^2}}$ і $Q = -(x + \arccos x/2)$ – неперервні разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ у замкненому крузі D: $x^2 + y^2 \le 1$, маємо

$$\oint_C \frac{y}{\sqrt{4-x^2}}dx - (x + \arccos x/2)dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

.

Знак «–» перед подвійним інтегралом пояснюється тим, що формула Гріна справедлива за умови додатної орієнтації границі області D, що у нашій задачі збігається з орієнтацією кола C проти годинникової стрілки, а за умовою необхідно підрахувати значення інтеграла за умови протилежної орієнтації кола:

$$I = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_D \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dxdy =$$

$= \iint_D dxdy = \pi$ – площа одиничного круга.

Завдання для індивідуальної роботи студента

ВАРІАНТ 1

1.1. Визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint_S f(x, y) dxdy$, де S – круг $x^2 + y^2 = a^2$.

1.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою: $x^4 + y^4 = 2a^2 xy$.

1.3. Знайти площу, обмежену кривими $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$; $a < b$, $\alpha < \beta$.

1.4. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x + y + 2 = 6$; $x = 0$; $z = 0$; $x + 2y = 4$.

1.5. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^4 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1$; $x > 0, y > 0, z > 0$.

1.6. Знайти площу поверхні $z^2 = 2xy$, якщо $z > 0$, $0 < x < a$; $0 < y < b$.

1.7. Знайти координати центра тяжіння однорідної пластинки $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab}$ (права петля).

1.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x.$

1.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такою поверхнею:

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$ $x > 0, y > 0, z > 0.$

1.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого такими поверхнями: $x < 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c.$

В А Р І А Н Т 2

2.1. Визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint\limits_{s} f(x,y)dxdy,$ для площі S, обмеженої прямими $x = 0, y = 0, x + y = a.$

2.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою: $\left(x^2+y^2\right)^2=a\left(x^3+y^3\right).$

2.3. Знайти площу, обмежену кривими $x^2=ay,$ $x^2=by,$ $y = m, y = n; a < b, m < n.$

2.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x - y + z = 6; x + y = 2, x = y; y = 0, z = 0.$

2.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1;$ $x>0, y>0, z>0.$

2.6. Знайти площу поверхні $x^2=2pz$, якщо $\alpha x > y > \beta x,$ $0 < x < a.$

2.7. Знайти координати центра тяжіння сегмента кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$, якщо $h<z<a$.
2.8. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=axyz$.
2.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такою поверхнею: $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.
2.10. Знайти момент інерції відносно вісі Oz тіла, обмеженого такими поверхнями: $z^2=2ax$, $z=0$, $x^2+y^2=ax$.

В А Р І А Н Т 3

3.1. В інтегралі $\iint\limits_s f(x,y)dxdy$ площа S обмежена прямими $x=y$, $y=0$, $x+y=2$. Визначити межі інтегрування, якщо внутрішнє інтегрування виконується за x, а також якщо воно виконується за y.
3.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою: $x^3+y^3=axy$ (листок Декарта) – площа петлі.
3.3. Знайти площу, обмежену кривими:
$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\frac{x}{a}=9\frac{y}{b}$; $x>0$, $y>0$.
3.4. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями:
$x-y+z=6$; $x=3$, $x=y$; $y=0$, $z=0$.
3.5. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^8+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

3.6. Знайти площу поверхні $z^2 = 2px,$ вирізану поверхнями $y^2 = 2qx,\ x{=}a.$

3.7. Знайти координати центра тяжіння гелікоїда $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = hv,$ якщо $0 < u < a,\ 0 < v < \pi.$

3.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = az\left(x^2 + y^2\right).$

3.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c},\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1,\quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm 1,\ z = 0.$$

3.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого такими поверхнями: $h^2\left(x^2 + y^2\right) = a^2 z^2,$ $0 < z < h.$

В А Р І А Н Т 4

4.1. Визначити в інтегралі $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ межі інтегрування, якщо: S – паралелограм зі сторонами $y = 0,\ y = a,\ y = x,$ $y = x - 2a$. Розглянути обидва можливі порядки інтегрування.

4.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою: $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$

4.3. Знайти площу, обмежену такими кривими: $xy = a^2, xy = b^2, y = m, y = n;\quad a^2 > b^2, m > n.$

4.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z = a + x, z = -x - a, x^2 + y^2 = a^2.$

4.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}; y > 0, z > 0.$

4.6. Знайти площу поверхні частини циліндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, що міститься всередині циліндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1; a>b$.

4.7. Знайти координати центра тяжіння тіла, обмеженого поверхнями $3z=2\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)$, $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

4.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$.

4.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{y^2}=\frac{z^2}{c^2};\ z>0.$

4.10. Знайти момент інерції відносно осі *Oz* тіла, обмеженого поверхнями
$x+y+z=a\sqrt{2}, x^2+y^2=a^2, z=0.$

ВАРІАНТ 5

5.1. Визначити в інтегралі $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ межі інтегрування, якщо S – площа, обмежена лініями $y=h, ay=hx, ay=4ah-hx; a>0; h>0.$

5.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою:
$\left(x^2+y^2\right)^3=a^2(x^4+y^4).$

5.3. Знайти площу, обмежену такими кривими: $y^2=m\,x,\ y^2=n\,x,\ x=\alpha\,y,\ x=\beta\,y;\ \ \alpha>\beta,\ m>n.$

5.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z^2=xy, x=a, y=b, z=0.$

5.5. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $cz = xy,\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}; x > 0, y > 0, z > 0.$

5.6. Знайти площу поверхні частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що розміщена всередині циліндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad (a > b).$

5.7. Знайти координати центра тяжіння тіла, обмеженого такими поверхнями: $x^2 = 2c(c - z)$, $y = 0$, $y = kx$, $z = 0$.

5.8. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$.

5.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такою поверхнею: $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 z.$

5.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 z$.

В А Р І А Н Т 6

6.1. Визначити в інтегралі $\iint\limits_{(S)} f(x, y)dxdy$ межі інтегрування, якщо: S – частина площини між прямою $y = x - 2$ та параболою $y^2 = x$ (двома способами).

6.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою: $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ (підера еліпса).

6.3. Знайти площу фігури, обмежену такими кривими: $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x = ay$, $x = by$; $x > 0$, $y > 0$, $a > b$, $m > n$.

6.4. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x + y + z = a,\ 3x + y = a,\ 3x + 2y = 2a,\ y = 0,\ z = 0.$

6.5. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z^2 = xy,\ \ x + y = 1,\ \ z > 0.$

6.6. Знайти площу поверхні частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, розміщеної поза циліндром $x^2 + y^2 = \pm ax.$ (Приклад Вівіані).

6.7. Знайти координати центра тяжіння об'єма частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, обмеженої площинами $x^2 + y^2 = ax,\ z = 0.$

6.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = a^2 y^2 z^2.$

6.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:

$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = axyz;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

6.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого такою поверхнею: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

ВАРІАНТ 7

7.1. Визначити в інтегралі $\iint\limits_S f(x, y)dxdy$ межі інтегрування, якщо S – паралелограм зі сторонами $y = x; y = x + a; y = 2x; y = 2x - a$ (обома способами).

7.2. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу, обмежену такою кривою: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

7.3. Знайти площу, обмежену кривими $y^2 = ax, y^2 = bx, x^2 = my, x^2 = ny; a > b, m > n$.

7.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x + y + z = a,\ x^2 + y^2 = b^2,\ z = 0,\ a > b\sqrt{2}$.

7.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x\sqrt{x} + y\sqrt{y},\ x + y = 1;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

7.6. Знайти площу поверхні циліндрів $x^2 + y^2 = \pm ax$, розміщених всередині кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

7.7. Знайти координати центра тяжіння частини об'єму кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, обмеженої площинами:
$x + y = \pm a,\ x - y = \pm a$.

7.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz$.

7.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:
$x^2 + y^2 = 2a^2,\ x + y + z = 2a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

7.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого такими поверхнями:
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

ВАРІАНТ 8

8.1. Визначити в інтегралі $\iint\limits_S f(x, y)dxdy$ межі інтегрування, якщо S визначається так: $x^2 - y^2 \le a^2, x^2 + y^2 \le 3a^2$.

8.2. Знайти площу, обмежену кривою $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

8.3. Знайти площу, обмежену кривими $xy = a^2, xy = b^2, y = mx, y^2 = nx; a^2 > b^2, m > n.$

8.4. Знайти об'єм, обмежений такими поверхнями:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ \ y = \frac{b}{a}x,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

8.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4+\frac{z^2}{c^2}=1; x>0, y>0, z>0.$$

8.6. Знайти площу поверхні частини конуса $y^2+z^2=x^2$, розміщеної всередині циліндра $x^2+y^2=a^2$.

8.7. Знайти моменти інерції конуса $h^2\left(x^2+y^2\right)=a^2z^2$, якщо $0<z<h$ відносно осі Oz.

8.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^3\left(x^3+y^3+z^3\right)$; $x>0, y>0, z>0.$

8.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:

$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=a(a-2z).$

8.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого такою поверхнею:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

ВАРІАНТ 9

9.1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1\int\limits_0^x f(x,y)dydx$.

9.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b};\ y>0.$

9.3. Знайти площу, обмежену такими кривими: $y^2=a^2-2ax,\ y^2=b^2-2bx,\ y^2=m^2+2mx,$

$y^2=n^2+2nx;\ y>0,\ a>b,\ m>n.$

9.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x^2z^2+a^2y^2=c^2x^2,\ \ 0<x<a.$

9.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1;\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

9.6. Знайти площу поверхні частини конуса $y^2+z^2=x^2$, вирізаної поверхнею $x^2=ay$.

9.7. Знайти момент інерції поверхні однорідної кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$ відносно діаметра.

9.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2+y^2+z^2)^5=(a^3x^2+b^3y^2+c^3z^2)^2$.

9.9. Знайти координати центрів тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:

$x^2+y^2=z;\quad x+y+z=0.$

9.10. Знайти момент інерції тора $x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi, y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi, z=r\sin\theta$ відносно його осі обертання.

ВАРІАНТ 10

10.1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{0} f(x,y)dy.$

10.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^2}{h^2};\ \ y>0,\ \ a>0,\ \ b>0.$

10.3. Знайти площу, обмежену еліпсом $(ax+by+c)^2+(a_1x+b_1y+c_1)^2=h^2;\ \ ab_1-a_1b\neq 0.$

10.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $y^2+z^2=x,\ \ x=y;\ \ z>0.$

10.5. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=2.$

10.6. Знайти площу частини поверхні $z = arctg\,\frac{y}{x}$, проекція якої на площину xOy обмежена першим витком спіралі Архімеда $r=\varphi$ і віссю Ox.

10.7. Знайти момент інерції частини поверхні параболоїда $x^2+y^2=2ax$ відносно осі Oz, якщо $0<z<a.$

10.8. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z e^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}.$$

10.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:

$x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax.$

10.10. Знайти момент інерції тора $x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi, y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi, z=r\sin\varphi$ відносно його екваторіального діаметра.

ВАРІАНТ 11

11.1. Змінити порядок інтегрування в $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dy.$

11.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ (площа петлі).

11.3. Знайти площу, обмежену лінією $|ax+by+c|+|a_1x+b_1y+c_1|=h; ab_1-a_1b\neq 0.$

11.4. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z = x^2 + y^2, y = x^2; 0 < y < 1, z = 0.$

11.5. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями:
$z^2 = 2xy, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2};\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

11.6. Знайти площу поверхні $2cz = y^2 - x^2 + 2xy \cdot ctg\alpha$ за умови $z \geq 0;\ x^2 + y^2 < a^2.$

11.7. Знайти момент інерції частини кульового сегмента $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, якщо $h < z < a$ відносно Oz.

11.8. Знайти об’єм, обмежений поверхнею $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(x - y).$

11.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого поверхнею сегмента кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $h < z < a$.

11.10. Знайти момент інерції еліптичного конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{h^2}, z = h$ відносно осі Ox.

ВАРІАНТ 12

12.1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2 - x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y)dy.$

12.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; x > 0, y > 0.$

12.3. Використовуючи формулу $S = \iint\limits_S dxdy,$ обчислити площу, обмежену такими лініями: $y = x^2, x = y^2$.

12.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z = cosx \times cosy;\quad |x + y| < \frac{p}{2};\quad z = 0.$

12.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c},\ \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ z = 0.$

12.6. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 = 2az$ усередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

12.7. Обчислити інтеграл $\iint \frac{ds}{\rho}$, взятий за поверхнею еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ де ρ – відстань від центра еліпсоїда до площини, дотичної до елемента ds.

12.8. Знайти об'єм, обмежений поверхнею $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 z$.

12.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями:
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x > 0, y > 0, z > 0.$

12.10. Знайти момент інерції кругового циліндра з висотою *H* і радіусом основи *R*.

В А Р І А Н Т 13

13.1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^{2a} \int\limits_{\sqrt{2a-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)dydx$.

13.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}; x > 0, y > 0.$

13.3. Обчислити площу, використовуючи формулу $S=\iint\limits_{S} dxdy,$ обмежену такими кривими: $y=2x-x^2, y=x^2$.

13.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z=\sin(x^2+y^2), z=0, n\pi<x^2+y^2<(n+1)\pi.$

13.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}, z>0.$

13.6. Знайти площу поверхні $az=xy$ всередині циліндра $(x^2+y^2)^2=2a^2xy.$

13.7. Обчислити інтеграл $\iint \frac{ds}{\rho^n}$, взятий за поверхнею кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$, якщо ρ – відстань елемента поверхні до точки $(0,0,C)$, розміщеної зовні кулі.

13.8. Знайти об'єм, обмежений поверхнею $(x^2+y^2)^3+z^6=a^3xyz$.

13.9. Знайти координати центрів тяжіння однорідного тіла, обмеженого поверхнею $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2; 0<z<h.$

13.10. Знайти момент інерції кругового конуса висотою H і радіусом основи R.

В А Р І А Н Т 14

14.1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^2 \int\limits_{5-\sqrt{25-x^2}}^{x} f(x,y)dydx+\int\limits_2^4 \int\limits_{5-\sqrt{25-x^2}}^{2} f(x,y)dydx$ та об'єднати.

14.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^6=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}.$

14.3. Використовуючи формулу $S = \iint\limits_S dxdy,$ обчислити площу, обмежену такими кривими: $2y = x^2, y = x.$

14.4. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $cz = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$

14.5. Знайти об’єм, обмежений поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^k + \frac{z}{c} = 1; z > 0, k > 0.$

14.6. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

14.7. Знайти координати центра тяжіння об’єма частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, обмеженої площинами
$x^2 + y^2 = ax,\ z = 0.$

14.8. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$

14.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого поверхнею $abz = c\ (a - x)\ (b - y);$ $x = 0,$ $y = 0, z = 0.$

14.10. Визначити висоту h і радіус основи a однорідного циліндра так, щоб еліпсоїд інерції для цього циліндра перетворився в кулю.

В А Р І А Н Т 15

15.1. Змінити порядок інтегрування, а також перейти до полярних координат $\int\limits_0^a \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-ay}} f(x, y) dxdy.$

15.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2};$ $x>0, y>0.$

15.3. Обчислити площу, обмежену кривими $4y = x^2 - 4x$, $x - y - 3 = 0$.

15.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x^2 + y^2 = 2ax,\ z = \alpha x,\ z = \beta x;\ \alpha < \beta$.

15.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

15.6. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 = z^2$ всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$, якщо $z \geq 0$.

15.7. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями: $x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

15.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = \frac{a^6}{x^2 + y^2}$.

15.9. Знайти координати центра тяжіння однорідного тіла, обмеженого такими поверхнями: $z^2 = xy$, $x = a,\ y = b,\ z = 0$.

15.10. Довести, що момент інерції тіла I_σ відносно осі $\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$ виражається формулою

$$I_\sigma = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\alpha\cos\beta -$$
$$-2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\beta\cos\gamma,$$

де коефіцієнти дорівнюють відповідним моментам інерції і центробіжним моментам:

$A = J_x, B = J_y, C = J_{xy}, E = J_{xz}, F = J_{yz}$.

В А Р І А Н Т 16

16.1 Змінити порядок інтегрування, а також перейти до полярних координат: $\int\limits_{a}^{2a}\int\limits_{2a-y}^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dxdy$.

16.2. Знайти площу, обмежену кривою $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12}=\sqrt{\frac{xy}{c^2}}$ (площа петлі).

16.3. Знайти площу, обмежену кривими: лемніскатою $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2(x^2-y^2)$ і колом $x^2+y^2=2ax$ (використати формулу $S=\iint\limits_{(S)} dxdy$ і перейти до полярних координат).

16.4 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\alpha\mathrm{z}^2$, $x^2+y^2=ax$; $z>0$.

16.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $c\,z = x\,y$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z = 0$; $x > 0$, $y > 0$.

16.6. Знайти площу поверхні $\left(x\cos\alpha+y\sin\alpha\right)^2+z^2=a^2$, якщо $x > 0, y > 0, z > 0$.

16.7. Знайти центр тяжіння однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z^2=xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$.

16.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

16.9. Визначити межі інтегрування в декартових, циліндричних і сферичних координатах у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)$, взятому за об'ємом V і заданому

таким чином: $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \\ x + y \le a, \\ z \le h. \end{cases}$

16.10. Визначити висоту h і радіус основи a однорідного циліндра так, щоб еліпсоїд інерції для цього циліндра перетворився в конус.

ВАРІАНТ 17

17.1. Визначити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\int\limits_{(s)}\int f(x,y)dxdy$ у декартових і полярних координатах, якщо: $x^2 + y^2 \le 4x; y \ge x$.

17.2. В інтегралі $\iint\limits_{s} f(x,y)dxdy$ область інтегрування чверть круга $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$. Заміною змінних перетворити її в прямокутник.

17.3**.** Знайти площу, обмежену кривими: кардіоїдою $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$ і колом $x^2 + y^2 = ay\sqrt{3}$ (використовуючи формулу $S = \iint\limits_{(s)} ds$) і перейти до полярних координат.

17.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x^2 + y^2 = az$, $x + z = 2a$.

17.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ $= 2z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

17.6. Знайти площу поверхні $(x+y)^2 + z = 1$, якщо $x > 0, y > 0, z > 0$.

17.7. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1$; $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ шляхом уведення сферичних узагальнених координат

$$x = ar\sin^{\sigma}\theta\cos^{\sigma}\phi, y = br\sin^{\sigma}\theta\sin^{\sigma}\phi, z = cr\cos^{\sigma}\theta.$$

(Зауваження. Якобіан $J = abc\,\delta^2 r^2 \sin^{2\sigma-1}\theta(\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)^{\sigma}$).

17.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{h^3}$.

17.9. Визначити межі інтегрування в декартових, циліндричних і сферичних координатах у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)$, взятому за об'ємом v і заданому таким чином: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ x + y + z \leq a. \end{cases}$

17.10. Визначити висоту h прямокутного паралелепіпеда, в основі якого квадрат зі стороною a, так, щоб еліпсоїд інерції для однорідної маси, що заповнює цей паралелепіпед, перетворився в кулю.

В А Р І А Н Т 18

18.1. Визначити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_{s} f(x, y)dxdy$ в декартових і полярних координатах, якщо область S визначається так: $x^2 + y^2 \leq a^2, x + y \geq a.$

18.2. В інтегралі $\iint\limits_{s} f(x, y)dxdy$ область інтегрування – чверть круга: $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$. Заміною змінних перетворити її в равнобічний прямокутний трикутник.

18.3. Записати подвійний інтеграл та обчислити площу, обмежену лініями $y = \ln x$, $x - y = 1$ і $y = -1$.

18.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $cz = xy$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$; $y > 0$.

18.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$ (перейти до полярних координат).

18.6. Знайти величину поверхні $(x+y)^2+2z^2=2a$, якщо $x > 0, y > 0, z > 0$.

18.7. За допомогою заміни змінних знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x+y+z=a$, $x+y+z=2a$, $x+y=z$, $x+y=2z$, $y=x$, $y=3x$.

18.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{z^4}{h^4}$.

18.9. Визначити межі інтегрування в декартових, циліндричних і сферичних координатах у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)\,dv$, взятому за об'ємом v і заданому таким чином: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $x^2 + y^2 \le z^2 tg^2\alpha$.

18.10. Довести, що серед усіх еліпсів лише у кулі еліпсоїдом інерції є куля.

В А Р І А Н Т 19

19.1. Визначити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy$ у декартових і полярних координатах, якщо область S визначається так: $x \ge y$; $x + y \le 2a$; $y \ge 0$.

19.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy$ за областю S, межі якої визначаються так: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

19.3. Побудувати області, площі яких виражаються в інтегралах: $1)\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy$; $2)\int\limits_0^a dy\int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$; $3)\int\limits_0^a dx\int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$

та змінити порядок інтегрування.

19.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$.

19.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = 0$.

19.6. Знайти площу поверхні $(x^2+y^2)z = x + y$, якщо $1 < x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0$.

19.7. За допомогою заміни змінних знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$.

19.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{xyz}{h^3}$.

19.9. Визначити межі інтегрування в декартових, циліндричних і сферичних координатах у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)\,dv$, взятому за об'ємом V і заданому так: $x^2 + y^2 \le z^2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = az$.

19.10. Довести, що для однорідних тіл, симетричних відносно площини yOz, величина $J_{xy} = 0$.

ВАРІАНТ 20

20.1. Визначити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_s f(x,y)dxdy$ у декартових і полярних координатах, якщо область S визначається так: $y^2 \le 2px + p^2;\ \ y \ge x$.

20.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_s f(x,y)dxdy$ за областю s, межі якої задаються так: $y = 0,\ x = y,\ x = 1$.

20.3. Побудувати область, площа якої виражається в інтегралі $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy$. Змінити порядок інтегрування.

20.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x - y + z = 6; x + y = 2, x = y; y = 0, z = 0.$

20.5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $x^2+y^2=a^2$ (зовні циліндра). Перейти до полярних координат.

20.6. Знайти площу поверхні $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$ усередині циліндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

20.7. За допомогою заміни змінних знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1.$

20.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$; $\alpha^2<1.$

20.9. Визначити межі інтегрування у сферичних координатах в інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)dv$, взятому за об'ємом V і заданому так: $x^2+y^2 \le z, x^2+y^2+z^2 \le 0$.

20.10. Знайти момент інерції відносно осі Oz, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 z$.

В А Р І А Н Т 21

21.1. Визначити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_s f(x,y)dxdy$ у декартових і полярних координатах, якщо область визначається так: $x^2 + y^2 \ge a^2$, $x^2 + y^2 \le 2ax.$

21.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{s}(x+y)dxdy$ за областю S, межі якої задаються так: $x = y, x = y^2$.
21.3. Обчислити площу, обмежену лініями $r = a(1\text{-}cos\varphi)$ і $r = a$ та розміщену поза колом.
21.4. Довести, що об'єм сегмента, що відтинає площина від еліптичного параболоїда, дорівнює площі основи сегмента, помноженого на половину висоти сегмента.
21.5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (усередині циліндра).
21.6. Знайти площу поверхні $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$ усередині циліндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, якщо $z > 0$.
21.7. За допомогою заміни змінних знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2 = 1,$ $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h$.
21.8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = axyz$.
21.9. Визначити межі інтегрування в декартових, циліндричних і сферичних координатах в інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)\,dv$, за об'ємом V, заданому так: $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x + z = a, z \geq 0$.
21.10. Довести, що однорідний еліпсоїд може бути подібним до свого еліпсоїда інерції лише в тому разі, якщо еліпсоїдом є куля.

ВАРІАНТ 22

22.1. Ввести замість x і y нові змінні й визначити межі інтегрування за новими змінними:

$$\int_0^a \int_{\beta x}^{\alpha x} f(x,y)dxdy$$, якщо $u = x + y$, $uv = y$.

22.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{|x|+|y|<1} x^2 dxdy$.

22.3. Обчислити площу, обмежену прямою $r\cos\varphi = a$ і колом $r = 2a$.

22.4. Від кругового конуса з радіусом основи R і висотою H відсічена частина площини, паралельної осі конуса. Визначити об’єм відсіченої частини, якщо сегмент в основі відповідає центральному куту 2α.

22.5. Обчислити V тіла, обмеженого першим завитком гелікоїда $y = x\,tg\dfrac{z}{a}$ всередині циліндра $x^2+y^2 = a^2$ і площиною $z = 0$.

22.6. Знайти площу поверхні $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 2z$ всередині циліндра $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^3 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

22.7. За допомогою заміни змінних знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею

$|a_1x+b_1y+c_1z| + |a_2x+b_2y+c_2z| + |a_3x+b_3y+c_3z| = 1.$

22.8. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z^4}{c^4} = \dfrac{z}{k}$.

22.9. Визначити межі інтегрування в декартових, циліндричних і сферичних координатах у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)\,dv$, взятому за об’ємом V і заданому так: $x^2 + y^2 \le z^2$, $x^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$.

22.10. Визначити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ і $z = h$, якщо густина в кожній точці дорівнює аплікаті цієї точки.

В А Р І А Н Т 23

23.1. Ввести замість x і y нові змінні та визначити межі інтегрування за новими змінними: $\int_0^a dx \int_0^b f(x, y)dy$, якщо $u = \alpha x+y$, $uv = y$.

23.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_s f(x - y)dxdy$, $y = 0$, $x = y$, $x + y = 2$ – межі області S.

23.3. Обчислити площу, обмежену лініями $xy = \frac{a^2}{2}$, $xy = 2a^2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$.

Вказівка. *Перейти до нових координат* $xy = u$, $y = vx$, *після чого площа визначається за формулою*

$$\iint |J|\, dudv,\ \text{де } J= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ – якобіан переходу.}$$

23.4. Правильна призма із квадратною основою (зі стороною a) і висотою h перетинається круговим конусом так, що слідом на одній основі є вписане в основу коло, а на другій основі – описане навколо неї коло. Яка частина об’єму призми знаходиться поза конусом?

23.5. Обчислити об’єм тіла, перейшовши до полярних координат: $z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = ax$.

23.6. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $x + y < a$, $z > 0$.

23.7. Визначити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$.

23.8. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 + \frac{z^6}{c^6} = \frac{xyz}{h^3}$.

23.9. Визначити центр тяжіння однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

23.10. Визначити момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $x + z = a$.

В А Р І А Н Т 24

24.1. Ввести замість x і y нові змінні й визначити межі інтегрування за новими змінними: $\iint\limits_S f(x, y)dxdy$, $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$, а площа S обмежена астроїдою $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

24.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_s xydxdy$, якщо межі області S: $y^2 = 2x$, $x = 2$.

24.3. Обчислити площу, обмежену лініями $y^2 = ax$, $y^2 = 16a\,x$, $a\,y^2 = x^3$, $16a\,y^2 = x^3$.

Вказівка. *Припустимо, що* $y^2 = ux$, $vy^2 = x^3$.

24.4. Знайти об’єм тіла, обмеженого такими поверхнями: $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $3x + 2y = 2a$, $y = 0$, $z = 0$.

24.5. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\ z = 0.$$

Вказівка. *Перейти до узагальнених (еліптичних) полярних координат:* $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$.

24.6. Знайти величину площі поверхні $z^2 = 2xy$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} < 1$.

24.7. Визначити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $az = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.
24.8. Показати, що поверхня конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ділить об’єм кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ у відношенні 3:1.
24.9. Визначити центр тяжіння однорідного тіла, обмеженого поверхнями $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
24.10. Визначити момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого поверхнями $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$.

ВАРІАНТ 25

25.1. В інтегралі $\iint\limits_{S} f(x, y)dxdy$ площа S обмежена прямими $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $x = a$. Отже, область інтегрування – трикутник. Необхідною заміною змінних перетворити область інтегрування в прямокутник.

25.2. Обчислити інтеграли $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x} \ell^{\frac{-y}{x}} dxdy$, $\int\limits_0^a \int\limits_x^a \ell^{y^2} dydx$, попередньо змінивши порядок інтегруання.

25.3. Обчислити площу, обмежену лінією $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Вказівка. Перейти до узагальнених полярних координат: $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$.
25.4. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (всередині циліндра).
25.5. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = c\,\ell^{\frac{-x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
25.6. Знайти величину поверхні частини гелікоїда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$ для $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.
25.7. Обчислити площу поверхні параболи $x^2 + y^2 = 2az$, розміщеної всередині циліндра $x^2 + y^2 = 3a^2$.

25.8. Визначити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$.

25.9. Визначити центр тяжіння однорідної напівкулі $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, $z = 0$.

25.10. Визначити момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого поверхнями $x + y + z = a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Тестові завдання

Завдання 1

Заданий подвійний інтеграл за областю інтегрування D (рис. 8.1). Зазначити інтеграл серед запропонованих, межі якого відповідають заданій області.

А	$\int_{1/2}^{2} dy \int_{\sqrt{2y}}^{4/y} f(x;y)\,dx$
Б	$\int_{1}^{8} dx \int_{4/x}^{\frac{1}{2}x^2} f(x;y)\,dy$
В	$\int_{0}^{2} dy \int_{\sqrt{2y}}^{4/y} f(x;y)\,dx$
Г	$\int_{1}^{8} dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{4/x} f(x;y)\,dy$
Д	$\int_{0}^{2} dy \int_{4/y}^{\sqrt{2y}} f(x;y)\,dx$

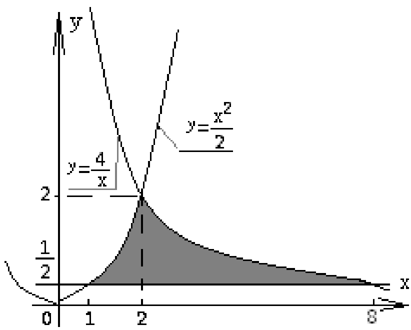


Рисунок 8.1

Завдання 2

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(x+2y)dxdy$ за областю D, що обмежена лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Обрати правильну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
15	0,45	0,5	– 0,45	0,4

Завдання 3
Обчислити подвійний інтеграл за областю D, що обмежена заданими лініями $y = x, \ \ y = 0, \ \ x = 1$

$$\iint_D (xy)dxdy\ .$$

А	Б	В	Г	Д
0,8	0,125	2	3/14	12

Завдання 4
При переході до сферичної системи координати точки M записуються за допомогою нових змінних. Зазначте формулу переходу із декартової до сферичної системи координат для змінної y.

А	Б	В	Г	Д
$y = \rho cos\varphi sin\theta$	$y = \rho cos\theta$	$y = \rho^2 sin\varphi sin\theta$	$y = \rho sin\varphi cos\theta$	$y = \rho sin\varphi sin\theta$

Завдання 5
Зазначити координати, за допомогою яких точка M задається у сферичній системі координат.

А	Б	В	Г	Д
$M(i;j;k)$	$M(x;\varphi;\theta)$	$M(\rho;\varphi;z)$	$M(x;y;z)$	$M(\rho;\varphi;\theta)$

Завдання 6
Установити відповідність між твердженнями:

1	Елементарний об′єм dV у сферичній системі координат виражається як…		А	$\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$
2	Елементарний об′єм dV у циліндричній системі координат виражається як…		Б	$\rho^2 sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$
3	Елементарний об′єм dV у декартовій системі координат виражається як...		В	$\rho\, d\rho\, d\varphi$
4	Елементарна площа dS у полярній системі координат виражається як…		Г	$\rho\, sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$
			Д	$dx\, dy\, dz$
			Е	$\rho^2 d\rho\, d\varphi$

Завдання 7

Точка M у циліндричній системі координат задана координатами (2; $\frac{\pi}{3}$; 7). Зазначте координати точки M у декартовій системі координат.

А	Б	В	Г	Д
$(2;\sqrt{3};7)$	$(-1;\sqrt{3};7)$	$(1;\sqrt{3};7)$	$(\frac{1}{2};-\sqrt{3};7)$	$(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};7)$

Завдання 8

Рівняння поверхні у декартовій системі координат має вигляд $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Виконайте перехід до сферичної системи координат та зазначте правильне рівняння поверхні в цій системі.

А	Б	В	Г	Д
$\rho = 3cos\varphi$	$\rho = 9sin\theta$	$\rho = 9$	$\rho = 3cos\varphi sin\theta$	$\rho = 3$

Завдання 9

Зазначити вираз для елемента дуги кривої в полярній системі координат

А	Б	В	Г	Д
$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$	$dl = \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'(\varphi)}d\varphi$	$dl = \rho d\rho d\varphi$	$dl = \frac{1}{2}\sqrt{\rho^2(\varphi) - \rho'^2(\varphi)}d\varphi$	$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) - \rho'^2(\varphi)}d\varphi$

Завдання 10

Обчислити криволінійний інтеграл, де L – відрізок прямої $y = 2x$ від точки O (0; 0) до точки A (3; 6),

$$\int_L (8x + 4y + 2)dx + (8y + 2)dy.$$

А	Б	В	Г	Д
234	230	24	164	12

Завдання 11

Зазначте формулу для обчислення маси неоднорідної дуги.

А	Б	В	Г	Д
$\int_L \gamma(x;y)dl$	$\int_L \gamma(x;y)dxdy$	$\int_L \gamma(x;y)dx + {}$ $+\gamma(x;y)dy$	$\int_L dl$	$\int_L dxdy$

Завдання 12

Заданий криволінійний інтеграл $\int_L \mathrm{x}^5 dx + \mathrm{y}^2 dy$ за дугою L, що є частиною параболи $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ від точки A(0; 0) до B (1; 1). Зазначте інтеграл, до якого переходимо під час обчислення за змінною x.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^1 (\mathrm{x}^5 + 2x^4)dx$	$\int_0^1 (\mathrm{x}^5 + x^4)dx$	$3\int_0^1 \mathrm{x}^5 dx$	$3\int_0^1 \mathrm{x}^7 dx$	$2\int_0^1 \mathrm{x}^4 dx$

Завдання 13

Зазначте формулу Остроградського – Гріна.

А	Б	В	Г	Д
$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L (P + Q)dxdy$	$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L (P + Q)dxdy$	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L (P + Q)dxdy$	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Атанасян Л. С. Геометрия : учебное пособие / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – Москва : Просвещение, 1986. – 336 с.
2. Базылев В. Т. Геометрия : учебное пособие / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – Москва : Просвещение, 1975. – 367 с.
3. Бахвалов С. В. Аналитическая геометрия : учебное пособие / С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В. П. Иваницкая. – Москва : Просвещение, 1970. – 376 с.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1980. – 336 с.
5. Белоусова В. П. Аналитическая геометрия: учебное пособие / В. П. Белоусова и др. – Москва : Высшая школа, 1973. – 328 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1969. – 440 с.
7. Бутузов В. Ф. Математический анализ в вопросах и примерах. Функции нескольких переменных : учебное пособие / В. Ф. Бутузов и др. – Москва : Высшая школа, 1988. – 288 с.
8. Вилейтнер Г. И. История математики от Декарта до середины XIX столетия : учебник. / Г. И. Вилейтнер ; под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1960. – 468 с.
9. Вилейтнер Г. И. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : учебник / Г. И. Вилейтнер ; под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1972. – 495 с.

10. Давыдов Н. А. Курс математического анализа : учебное пособие / Н. А. Давыдов. – Москва : Просвещение, 1973. – 351 с.
11. Давыдов Н. А. Сборник задач по математическому анализу / Н. А. Давыдов. – Москва : Просвещение, 1973. – 256 с.
12. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1977. – 528 с.
13. Математичний аналіз у задачах і прикладах : навчальний посібник / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ : Вища шк., 2003. – Т. 2. – 470 с.
14. Ефимов К. Г. Краткий курс аналитической геометрии : учебное пособие / К. Г. Ефимов. – Москва : Наука, 1979. – 373 с.
15. Коровкин П. П. Математический анализ : учебное пособие / П. П. Коровкин. – Москва : Просвещение, 1974. – Ч. 2. – 464 с.
16. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Просвещение, 1988. – Т. 2. – 208 с.
17. Бохан К. А. Курс математического анализа, учебник. / К. А. Бохан, И. А. Егорова ; под ред. Б. З. Вулиха. – Москва : Просвещение, 1972. – Т. 2. – 439 с.
18. Математический анализ. Кратные и криволинейные интегралы : учебное пособие / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай и др. – Москва : Просвещение, 1994. – 439 с.
19. Никольский О. А. Курс математического анализа: учебное пособие / О. А. Никольский. – Москва : Просвещение, 1986. – 432 с.

20. Уваренков М. М. Курс математического анализа / М. М. Уваренков, М. З. Маллер. – Москва : Просвещение, 1976. – 479 с.
21. Фихтенгольц Г. М. Курс математического анализа : учебное пособие / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Просвещение, 1968. – Т. 2. – 464 с.
22. Шамоня В. Г. Практикум з курсу «Методи обчислень» : навчальний посібник / В. Г. Шамоня, О. В. Семеніхіна. – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка. 2008. – 68 с.
23. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник / М. І. Шкіль. – Київ : Вища школа, 1995. – Ч. 2. – 510 с.

Список рекомендованої літератури

1. Математичний аналіз у задачах і прикладах : у 2 ч. : навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Ляшенко та ін. – Київ : Вища школа, 2003. – Ч. 2. – 470 с.
2. Задачник по курсу математического анализа : учебное пособие ; под ред. Н. Я. Виленкина. – Москва : Просвещение, 1971. – Ч. 2. – 336 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие. / Б. П. Демидович. – Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
4. Егорова И. А. Задачник-практикум по математическому анализу. Ч. II. Функции нескольких переменных / И. А. Егорова. – Москва, 1962. – 104 с.
5. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч. II. Дифференциальное исчисление

функций одной и многих независимых переменных / И. А. Каплан. – Харьков : Вища шк., 1973. – 368 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956. – Т. 2. – 464 с.
8. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник у 2 ч. – Київ : Вища шк., 2005. – Ч. 2. – 510 с.
9. Давиглядов Н. А. Курс математического анализа. Ч. 2. Функции многих переменных и дифференциальные уравнения / Н. А. Давиглядов. – Київ : Вища шк., 1978. – 392 с.
10. Гаврилов В. Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учеб. пособие / В. Р. Гаврилов, Е. Е. Иванова, В. Д. Морозова. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 496 с.
11. Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – Москва, 2005. – 479 с.
12. Щипачев В. С. Задачник по высшей математике / В. С. Шипачев. – Москва, 2005. – 479 с.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука. 1970. – Т. 1, 2. – 1978.
14. Математический анализ в вопросах и задачах: учеб. пособие / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев и др. ; под ред. В. Ф. Бутузова. – 5-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480 с.
15. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 416 с.

16. Шестаков А. А. Курс высшей математики / А. А. Шестаков, И. А. Малышева, Д. П. Полозков. – Москва : Высшая школа, 1987. – 320 с.
17. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. И. Чубариков. – Москва : Высшая школа, 2000. – 695 с.
18. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1964. – 444 с.
19. Бохан К. А. Курс математического анализа / К. А. Бохан, И. А. Егорова, К. В. Лащёнов. – Москва : Просвещение, 1966. – Т. 2. – 380 с.
20. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий.– Москва : Высшая школа, 2002. – Т. 1. – 725 с.
21. Гюнтер Н. М. Сборник задач по высшей математике / Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин. – Москва : Физматгиз, 1958. – 286 с.

Навчальне видання

Жиленко Тетяна Іванівна,
Білоус Олена Анатоліївна

ОБЧИСЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ І КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки Т. І. Жиленко
Редактори: Н. А. Гавриленко, М. Я. Сагун
Комп’ютерне верстання: Т. І. Жиленко, О. А. Білоус

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 13,02. Обл.-вид. арк. 11,83. Тираж 300 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.