日本算額題的趣味教學

蘇意雯
臺北市立成功高級中學

壹、前言

今年農曆春節總共有九天的連假，很多國人都趁著難得的假期全家出國旅遊。而鄰近的日本由於交通方便及治安良好，向來是民眾出遊的熱門選擇。大部分的日本旅遊行程，總免不了安排到寺廟神社參觀，在寺廟裡大家舉目可見的是琳瑯滿目的繪馬，如圖一所示。繪馬是日本民眾在寺廟祈願的憑藉，除了繪畫精妙、色彩鮮豔，頗具民族特色之外，也曾與日本的數學文化相關，甚至促進了「和算」(日本本土數學）的發展。

本文是以筆者旅遊中所碰觸的數學文化脈絡為源起，運用日本繪馬中的數學題目做為中學幾何教學之運用，希望在異國風情的引領下，讓學生能體會數學的多元風貌，以提升學生對於數學的喜愛，進而能對學習有所裨益。

圖一、日本太宰府天滿宮琳瑯滿目的繪馬

貳、繪馬 vs.算額

早期，日本人會獻上馬匹給神社或寺廟表示崇敬，但由於馬隻昂貴難以擁有，逐漸地，他們就以畫有馬隻的繪板代替，而所畫的對象也逐漸由馬匹延伸到他種物件，這就是現今所謂的「繪馬」。在繪馬的背面，可以寫上祈求人的心願，以及他們的姓名和住所。那麼，如此懸放在寺廟中用來祈福的繪馬，到底與數學有何關聯呢？

江戶時代（1603~1867 年）的日本人信仰虔誠，他們會設計各種式樣的匾額到鄰近的寺廟或神社酬神。如果是把數學問題和答案用漢字書寫在板上，這種還願的書板就叫做「算額」，因此，算額可以說就是數學風貌的繪馬。換句話說，和算家不在木製的書板上畫上馬匹酬神，而是另外以一種數學的形式來呈現（蘇意雯，2006）。

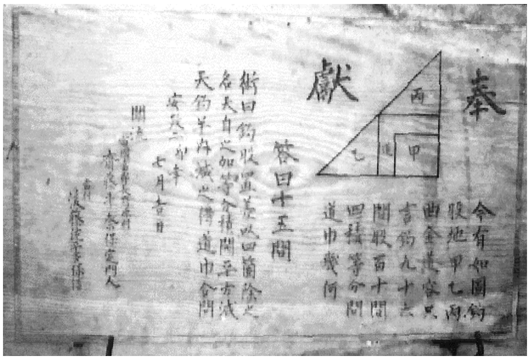
事實上，奉納算額的意義有三種：一是感謝神佛的恩賜；另外，也表示對和算教師的尊崇，最後一種，則是展示研究的成果，因為神社和寺廟，是當時人們交流的一個最佳場所，在此，算額可以有很高的能見度，也能引起有志之士的討論和共鳴。在算額上所書寫的數學知識，幾何問題多於代數問題。至於為何會有這樣不同

的呈現風貌，主要是因爲幾何圖形包含了美麗的圓形或多邊形，而顯得更有吸引力。至於典型的算額問題，則是求邊長或者圓的直徑，其中當然也包含了直線、三角形、內切圓和圓周長等問題。以下，就讓我們欣賞一些算額中有趣的數學題目。

參、算額趣題舉隅

大致來說，一塊算額包括 1~10 個不等的問題，在整塊算額的配置上，通常上方是彩色的圓或三角形等幾何圖形，接下來的部分是題目、答案及解法。位於下方的則是流派、教師、展示者的名稱及奉獻的日期。算額上的這些題目正是訓練學生數學實作的素材。

首先，介紹布置於飯田市一色神社中的一個算額（圖二），這片算額長爲 91 公分，寬爲 51 公分。茲說明題目的內容如下。



圖二、一色神社的算額（http://www.wasan.jp/nagano/issiki.html）

本題原文如下：

今有如圖鉤股地，甲、乙、丙、曲全道容。只言鉤九十六間，股百十間，四積等分，問道巾幾何？

答曰：十五間。

在數學史融入數學教學的過程中，若遇到古代數學文本，教師可於課堂中翻譯成現代數學術語，以方便學生理解。在本題中，所謂「間」，是日人所用的長度單位，日本人以六尺爲間，約合 1.8182 公尺。現在，將本題翻譯成白話文，並解釋做法如下：

問題：有一個直角三角形，鉤長 96 間，股長 110 間，內含一條寬度相等的 L 型的道路如圖所示，已知矩形甲與乙、丙兩三角形及道路這四個部分面積都相等，問道路寬爲何？

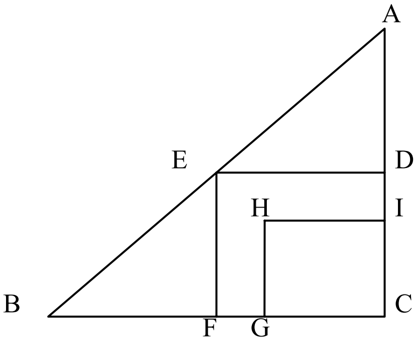
答案：15 間。

接下來，我們運用現代數學符號表示其解法。如圖三所示，由於三角形 AED 的面積＝三角形 EBF 的面積＝**1/2** 矩形 DEFC 的面積。

$$\therefore \overline{AD} = \overline{DC} = \frac{1}{2} \times 96 = 48,$$

$$\overline{BF} = \overline{FC} = \frac{1}{2} \times 110 = 55$$

設道路寬爲 x，則 $48 \times 55 = 2(48 - x)(55 - x)$，整理可得方程式 $x^2 - 103x + 1320 = 0$，解得 x=15 或 88(不合)，因此，得出道路的寬度。



圖三

其次，我們看看三角形內切圓的問題。這是布置於長谷觀音堂中的一個算額（圖四)，本算額長為 95 公分，寬為 52 公分。此題原文如下：

今有鉤股弦內如圖隔中鉤容大小圓二箇。其大圓徑三十二尺，小圓徑二十四尺，鉤股弦各問幾何？

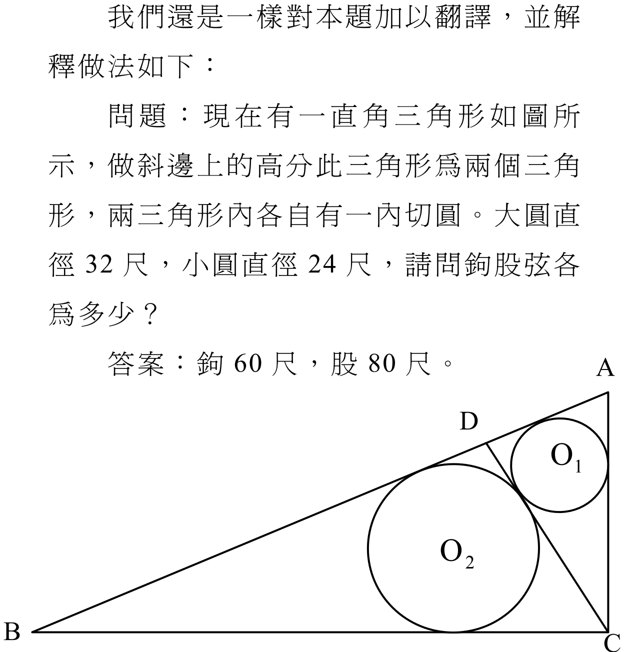
答曰：鉤六十尺，股八十尺。

圖四：長谷觀音堂的算額 (http://www.wasan.jp/nagano/hasekannon.html)

我們還是一樣對本題加以翻譯，並解釋做法如下：

問題：現在有一直角三角形如圖所示，做斜邊上的高分此三角形為兩個三角形，兩三角形內各自有一內切圓。大圓直徑 32 尺，小圓直徑 24 尺，請問鉤股弦各為多少？

答案：鉤 60 尺，股 80 尺。



圖五

參考圖五，

設小圓O_1半徑r_1，大圓O_2半徑r_2，

$\overline{AC}=x$，$\overline{BC}=y$，則$\overline{CD}=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{x^2-\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

同理

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{y^2-\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}。$$

在三角形 ADC 中，

$$\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AC}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+x=2x+2r_1,$$

整理可得

$$(2r_1+x)\sqrt{x^2+y^2}=x^2+xy=x(x+y)\ldots(1)$$

同理，於三角形 BDC，

$$\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{BC}=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+y=2y+2r_2$$

整理可得

$$(2r_2+y)\sqrt{x^2+y^2}=y^2+xy=y(x+y)\ldots(2)$$

(1)÷(2) 可得 $\dfrac{2r_1+x}{2r_2+y}=\dfrac{x}{y}$, $\therefore y=\dfrac{r_2}{r_1}x$

把 $y=\dfrac{r_2}{r_1}x$ 代入(1)，可得

$$(2r_1+x)\sqrt{x^2+\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}x^2}=x\left(x+\frac{r_2}{r_1}x\right)$$

整理可得

$$x=\frac{(r_1^{\,2}+r_2^{\,2})+(r_1+r_2)\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}}}{r_2}。$$

同理，可得

$$y=\frac{(r_1{}^2+r_2{}^2)+(r_1+r_2)\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2}}{r_1}$$ 。

在本題中，

$2r_1=24,\ 2r_2=32,\ \therefore r_1=12,\ r_2=16$ 代入

得鉤為

$$\frac{(12^2+16^2)+(12+16)\sqrt{12^2+16^2}}{16}=\frac{960}{16}=60$$

得股為

$$\frac{(12^2+16^2)+(12+16)\sqrt{12^2+16^2}}{12}=\frac{960}{12}=80$$

而三角形之斜邊為 100。

承上題的三角形內切圓的題型，接著，我們再介紹布置於長野市北尾張部的連開庵中的一個算額（圖六）。本算額長 43 公分，寬也是 43 公分。不過，本題較為困難，因此，比較適合程度好的學生或是資優班的學生研究。以下，我們就對題目的內容加以說明。

圖六：連開庵的算額
（http://www.wasan.jp/nagano/renkaian3.html）

本題原文如下：

假如有圖隔斜容等圓二等，乃不知三斜欵鉤股，只云中鉤四寸、全圓徑三寸，問等圓徑？

答曰：等圓徑二寸。

我們還是一樣對本題加以翻譯，並解釋其做法如下：

問題：如圖所示，從一個大三角形頂點畫直線分割成兩個小三角形，每一個小三角形各有一內切圓，此二內切圓相等，不知道大三角形的邊長，只知道大三角形底邊上的高是 4 寸，以及大三角形的內切圓直徑是 3 寸，問兩等圓的直徑為何？

答案：兩等圓直徑為 2 寸。

在解這個問題之前，我們先來看看一個定理：如圖七，若三角形 ABC 之內切圓半徑是 r，底邊 BC 的高是 h，則 $1-\frac{2r}{h}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$。由於三角形 ABC 的面積等於 1/2 三角形周長×三角形內切圓半徑，故

$$\frac{1}{2}\times 2\left(\frac{r}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{A}{2}}\right)\times r=\frac{1}{2}\times\left(\frac{r}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{C}{2}}\right)\times h$$

又因為

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{\pi-(B+C)}{2}=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right]=\cot\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

所以，

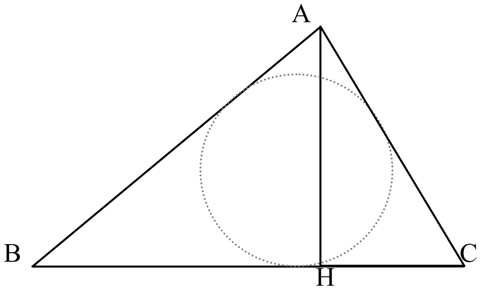
$$(2r-h)\left(\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)+2r\left(\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}\right)=0$$

$$(2r-h)\left(\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}\right)=2r\left(\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-1}\right)$$

$$\therefore (2r-h)(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-1)=2r(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2})$$

整理可得

$$h-2r=h\times\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},\quad \therefore 1-\frac{2r}{h}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$



圖七

根據上述定理，由題意可畫出圖八。若設大圓半徑爲 R，等圓的半徑爲 r，則我們可得出下列三式：

在三角形 ABD 中，

$$1-\frac{2r}{h}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{\angle ADB}{2}\ldots(1)$$

在三角形 ABC 中，

$$1-\frac{2R}{h}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\qquad\ldots(2)$$

在三角形 ADC 中，

$$1-\frac{2r}{h}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{\angle ADC}{2}\ldots(3)$$

(1)×(3)可得

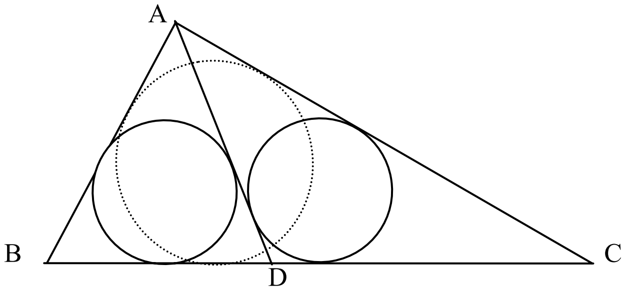
$$(1-\frac{2r}{h})^2=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{\angle ADB}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{\angle ADC}{2},$$

其中

$$\tan\frac{\angle ADB}{2}\tan\frac{\angle ADC}{2}=\tan\frac{\angle ADB}{2}\tan\frac{\pi-\angle ADB}{2}$$

$$=\tan\frac{\angle ADB}{2}\cot\frac{\angle ADB}{2}=1\text{。}$$

把(2)式代入，得 $(1-\frac{2r}{h})^2=1-\frac{2R}{h}$，整理可得 $r=\frac{h-\sqrt{h^2-2hR}}{2}$，等圓的直徑就是 $2r=h-\sqrt{h^2-2hR}$。在本題中代入 $4-\sqrt{4^2-4\times3}=2$，就是等圓的直徑。



圖八

在古代數學文本中，除了題目和答案之外，還有所謂的「術」，就是我們今日的解題方法。但通常「術」只是寥寥數語的代公式，真正的解答還是需要讀者自行推敲。在筆者的教學過程中，當學生首次接觸到古文本，對於古代數學家僅以隻字片語就交代完全部的計算過程總是瞠目結舌，從而往往對於數學家所提出的「解法」不知所云。此時，我們應鼓勵學生靠自己的能力解題，給予出整道數學問題一個完整的解法，這對於他們也是一大挑戰。例如，上題的解法是「術曰：置中鉤內減全圓徑，餘乘中鉤開平方以減中鉤，餘得等圓徑。」所表達的就是

$$2r=h-\sqrt{h^2-h(2R)}=h-\sqrt{h(h-2R)}$$

這個式子。以白話文來解說，此法就是：把底邊上的高減掉大三角形內切圓的直徑，剩下的乘上高並開平方根，用底邊上的高減去上面開平方根求出來的答案，就

可得到等圓的直徑。也就是本題中代入 $4-\sqrt{4(4-3)}=2$，求出等圓直徑。

肆、數學文本融入數學教學

日本的學者由於擔憂現代日本人已不知算額為何物，並在急切希望保存此文化遺產的理念之下，正積極整理解析現存的算額。另外，也有日本中學教師，嘗試在平面幾何的教學中融入算額文本。他們所採用的方式，是在教授完幾何圖形的基本性質、定理的證明之後，於相關例題的應用上，提供算額的題目，讓學生以上課所學習到的平面幾何算法求解。儘管在算題中以漢文所表達圖形的問題居多，會造成日本學生學習上的些許困難，而必須仰賴教師加以解釋，但是，這些人的努力，都是希望這個特殊的文化財得以讓日本人重新認識，甚至讓世界上更多對此有興趣的人分享。

對於臺灣的中學教師而言，由於我們並沒有保存和發揚算額文化的重責大任，正可以好整以暇的客觀擷取一些有趣的算額題目，讓學生了解數學是人類的活動，數學的發展與社會文化脈絡息息相關，並藉著算額圖片和繪馬的古今對照，讓學生擁有多元文化的關懷。也就是透過對數學文化遺產的緬懷、追溯、獵奇與探索，讓學生得以認識古算家的數學思維與發展軌跡，以及領會文化交融的啓發與創意。

Richard Courant (1953) 在 Morris Kline 所撰寫的《西方文化中的數學》一書中的序言常為人所津津樂道，其中一段話是這麼說的：「許多世紀以來，人們一直遵循數學是文化的組成部分之傳統，但在我們這個教育普及的時代，這一傳統卻被拋棄了。科學家們與世隔絕的研究，教師們少得可憐的熱情，還有大量枯燥乏味、商業氣十足的教科書和無視智力訓練的教學風氣，已經在教育界掀起了一股反數學的浪潮。然而，我們深信，公眾依然對數學有濃厚的興趣。」時至今日，這仍是一段振聾發聵的警語，如何提升學生學習數學的興趣，不要只是為了考試需要，囫圇吞棗地勉強背誦下一大堆公式及定理，正是身為教育工作者所要努力的目標。以數學與文化的關係切入，利用古代數學文本所呈現的多樣風貌，吸引學生的注意，讓學生體會數學知識呈現的背後，其實蘊含著璀璨的歷史風華，也能從認識數學的文化性、趣味性開始，進而願意接近數學，領略數學的知識面向，這正也是一條值得嘗試的道路。

伍、參考文獻

洪萬生 (1996)：數學史與代數學習。科學月刊，27(7)，560-567。

蘇意雯 (1999)：日本寺廟內的算學挑戰。HPM 通訊，2(8/9)，13-18。

蘇意雯 (2006)：探索日本寺廟的繪馬數學。科學月刊，37(10)，788-791。

Kline, M. (1953) (張祖貴譯, 1995)：西方文化中的數學 (*Mathematics in western culture*)。台北市：九章出版社。

大山 誠(1998)：桐生市天滿宮の算額題について。日本數學教育學會誌，80(7)，20-23。

Itō, E., & Kobayashi, H., & Nakamura, N., & Nomura, E., & Kitahara, I., & Yanagisawa, R., & Tanaka, H., & Ōtani, K., & Sekiguchi, T. (2003). *Japanese temple mathematical problems in Nagano Pref. Japan*. Nagano : Kyōikushokan.