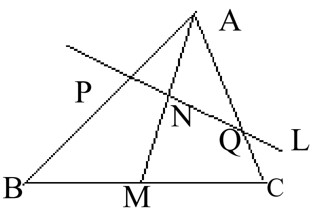
中學生通訊解題第三十一期
題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
921201

$\overline{AB}$為△ABC 中$\overline{BC}$邊上的中線，任一直線 L 交$\overline{AB}$、$\overline{AM}$、$\overline{AC}$於 P，N，Q。

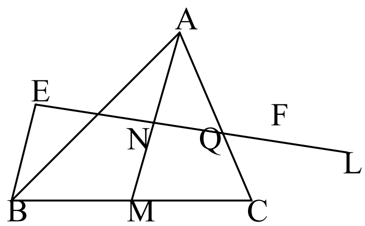
求證：$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}},\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}},\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}$成等差數列



參考解答：

過 B、C 作$\overline{MN}$平行線分別交 L 於 E、F，梯形 EBCF 中，$\overline{MN}$為中線，

$\overline{MN}=\dfrac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{CF})$，∴$\dfrac{\overline{MN}}{\overline{AN}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AN}}+\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AN}}\right)$



∵△BEP～△ANP，∴$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AN}}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$，

同理$\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AN}}=\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}$，

∴$\dfrac{\overline{MN}}{\overline{AN}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}+\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}\right)$……(1)

(1)式兩邊各加 1 得$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}\right)$

∴$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}},\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}},\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}$成等差數列。

評析

本題共有 21 個同學徵答，其中回答較完整的有新竹市光華國中范祐維同學、基隆市銘傳國中何亭豫、鄭景文、林怡廷、江佳穎、李欣瑜、林劭安同學，其中范祐維同學答的最好，台北縣江翠國中陳凱傑、張祺、林怡慈同學回答的也不錯。在這 21 份中，較完整的有 7 份，占 33%，答錯或較不完整的有 14 份，占全體的 67%。

問題編號
921202

兩人玩猜拳遊戲，規則如下：每人可從「剪刀；石頭；布」中任意選出一種拳，“剪刀贏布；石頭贏剪刀；布贏石頭”，若雙方皆出相同之拳，則判定此盤爲不分勝負。

今有五人同時猜拳，每人各出「剪刀；石頭；布」一次，規則定爲：若出現兩種不同的拳，如石頭及剪刀，則出“石頭”者爲勝，出剪刀者爲敗；若三種拳皆出現或只出現一種拳（即 5 人皆出相同的拳），

則判定爲不分勝負。在此情況下，試回答下列問題：

（1）猜拳一次，甲獲勝的機率是多少。

（2）猜拳三次，甲獲勝的機率是多少。

參考解答：

（1）甲勝的情形

甲出石頭，其餘人只可出剪刀或石頭，所以 2×2×2×2＝16，但有一種爲 5 人皆出石頭，造成不分勝負，所以只有 15 種，同理可知甲出剪刀或布時，所以共有 45 種，全部有 3×3×3×3×3＝243 種，所以甲勝之機率爲 $\frac{45}{243}=\frac{5}{27}$

（2）對甲而言，除了平手以外，不是勝就是負，而且機會應該一樣

∴甲勝之機率＝（1－平手）/2

但是三次猜拳爲平手就比較麻煩，有平平平及一平一勝一負（有 6 種可能），而一次中平手之機率爲 x，∴ $\frac{1-X}{2}=\frac{5}{27}$，$\therefore X=\frac{17}{27}$

$\therefore\left(\frac{17}{27}\right)^3+\frac{17}{27}\times\frac{5}{27}\times\frac{5}{27}\times 6=\frac{7463}{19683}$

$\therefore\frac{\left(1-\frac{7463}{19683}\right)}{2}=\frac{6110}{19683}$

評析

本題參加作答者人數不多，可能是比較牽涉到高中課程，但是機率部分在國小就已有接觸。此題可用樹狀圖來分析，雖然辛苦，但也可以作對。參加作答者共有 18 人，只答對第一小題者有 12 人，全對者有北縣江翠國中陳凱傑、黃逸鵬同學，共有 2 人。

問題編號
921203

現在是下午 4：15，有甲、乙、丙、丁四個人想在下午 6：00 前從 A 地走路到 B 地，AB 兩地相距 19.3 公里，而每人走路的時速均爲 4 公里。甲發現根本無法完成此項任務，於是四個人商量結果，租了一輛含司機的摩托車，由於這四人皆不會騎摩托車，且摩托車最多只能載 1 人，若假設摩托車的時速是 56 公里。在租好摩托車全部人開始行動已是下午 4：20，試問這四人是否可同時在下午 6：00 前到達 B 地？並請說明原因。

評析

這個題目同學普遍答得不夠完整，只就其中一種情形來解釋可以完成此計畫。因爲在國中沒有學到不等式，故學生無法以不等式來完整表達可以完成此計畫的範圍，提供參考答案如下：

設一開始，乙、丙、丁三人走路到達 C 點時需要 t 小時

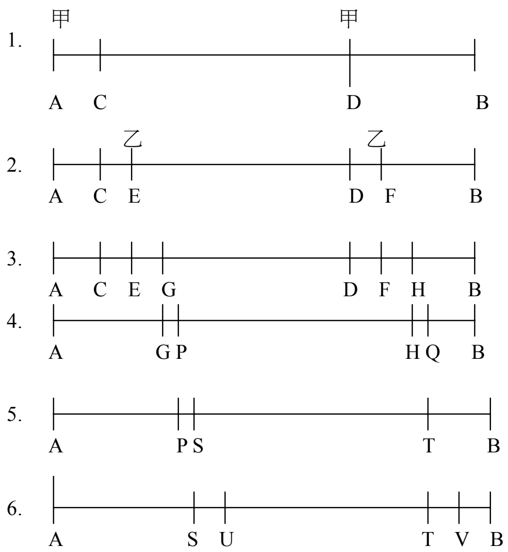
1.一開始，摩托車載甲，其餘三人走路，當摩托車到達 D 點時，將甲放下，讓甲走路，此時 AC=4t , AD=56t。（如下圖 1）

2.摩托車回頭，到達 E 點，載乙其餘二人繼續走路，當摩托車到達 F 點時，將乙放下，讓甲、乙走路，此時 CE=4(52/60)t ,DF=4(52/60)t。（如下圖 2）

3.當摩托車到達 H 點時，將 B 放下，讓 A、B 走路，此時另外兩人已走到 G 點 EG=4t。（如下圖 3）

4.摩托車回頭，到達 P 點，載 C 其餘一人繼續走路，此時 GP=4(52/60)t。(如下圖 4)
5.當摩托車到達 T 點時，將 C 放下，讓 A、B、C 走路，此時 PS=4t　。(如下圖 5)
6 摩托車回頭，到達 U 點，載 D，SU=4(52/60)t。(如下圖 6)
7.全部人到達 B 點 UB=4t

$4t+3\times(52/60)t=33/5t\leqq 5/3$　$\therefore t\leqq 25/99$



$12t+12(52/60)t+56t=78.4t\geqq 19.3$

$\therefore t\geqq 193/784$

$193/784\leqq t\leqq 25/99$，所以是可以完成的，

而所花的總時間為 $(\frac{28}{5}t+\frac{1}{4})$ 小時

而所花的總時間的範圍為

$97.71429\leq$ 總時間 ≤ 99.84848

問題編號
921204

有一個由 n 個連續自然數所構成的數列，假設由 A 與 B 二人輪流劃掉數列中的一個數字，且由 A 先開始，直到剩最後兩個數 a 與 b，假若 a、b 互質則 A 贏，否則 B 贏。

(1)若 n 為奇數，則 A、B 何者有必勝之策略？為何？

(2)若 n 為偶數，$n\geqq 12$，則 A、B 何者有必勝之策略？為何？

參考解答：

(1)若 a,b 為連續兩數，則必然互質，故 A 有必勝之策略如下：

1、A 先劃掉此數列之第一個或最後一個數。

2、設所剩為 2k 個數，將此 2k 個連續自然數，每兩個連續數合唯一組，共有 k 組。

3、不論 B 接下來劃何數，A 只要跟著 B 劃掉同一組的數即可。

4、因所剩之兩數必為同一組數，則 a、b 為連續之兩自然數，故 a、b 互質，A 勝。

(2)若 n 為偶數，$n\geqq 12$，令 $n=2k$，因 $n\geqq 12$，故此數列必含有 4 個連續 3 的倍數，其中必有兩個為奇數，設此兩數為 p、q。當此數列取到剩兩數 a、b 時，A、B 必然各取(k-1)個數，但此數列有 k 個奇數，k 個偶數，假若 k 個基數被取完，則 a、b 必為偶數，a、b 不互質，B 勝。故 B 若全部取奇數，則 A 只要不小心取到一奇數，則 B 勝，所以 B 有必勝之策略如下：

假設 A,B 各已取了前(k-2)個數，此時僅剩 4 個數未選，若 A 在此之前取了任一

奇數，則 B 只要將剩餘之奇數取完即勝；假若 A 在前(k-2)個數皆取偶數，則 B 取前(k-2)個數時應取 p, q 以外的其他(k-2)個奇數，此時所剩之 4 個數為 p,q 及 2 個偶數，e1,e2。如果 A 取 p 或 q，則 B 只要取剩下的 p 或 q 即勝。因 e1,e2 皆為偶數不互質。如果 A 取 e1 或 e2 則 B 只要取剩下的另一個偶數即可，因 p,q 皆為 3 的倍數不互質，故 B 勝。

評析

1.在遊戲類的競賽題中常用到奇偶性及配對之技巧。在第一小題中，若能發覺連續之兩自然數必然互質之性質，當可迅速將連續之兩數進行配對，則一切問題迎刃而解。

2.第二小題其實也不難，若最後二數為偶數則 B 勝，因此只要考慮當最後兩數若非偶數之狀況，B 是否亦可能使其不互質，若是，則 B 穩操勝券!最自然之情況當然是考慮 3 的倍數，若能如此思考，則很容易就可推出答案。

3.第一小題答對者較多，第二小題則僅一人答對。

4.答對品質較佳者：基隆銘傳國中王銘鋒同學、北縣江翠國中吳尚融，其中王銘鋒同學為唯一全對者。

問題編號 921205

有一數列第 1 項 a_1=2，第 2 項 a_2=7；今將兩數相乘得到 14，且將十位數 1 視為第 3 項 a_3，將個位數 4 視為第 4 項 a_4；再將末二項（1 與 4）相乘得 4，並令其為第 5 項；再將末二項（4 與 4）相乘，…如此繼續下去，可得數列的任意項。試求：

(1)此數列的第 20 項為何數？

(2)此數列的第 1000 項為何數？

(3) 若將 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases}$ 改成 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 9 \end{cases}$ 等，則其結果又會如何？有何較具體的結論。

評析

這一題難度不高，屬一數列的基本題，如何找出規律（循環部分），如何比較不同起始值產生相同數列關係。一則訓練分析；二則引發思考，重新定義一運算法則，可能產生之差異與不變之關係。

答題者不甚多(共 21 人，答題完整者 6 人)，有心深入答題者應皆可完成，唯第三小題尋求規律，尚有部分同學無法回答完整，誠屬可惜。循環節應是「2,4,8,3,2,6,1,2」，若回答「4,8,3,2,6,1,2,2,」、「2,6,1,2,2,4,8,3」、…或其他重排方式，應屬比較工作做得不夠深入所致。

「數」可說很有規律，但也有很難找出規律的部分，如質數即是。可不可能重新定義思考或運算模式來嘗試尋求其規律性呢？是此題出題本意。

也提供參考答案如下：

此數列為2,7,1,4,4,1,6,6,3,6,1,8,8,6,4,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,…。故

(1)2 ((20-15)/8=0…5,故為循環節第 5 項)

(2)2 ((1000-15)/8=123…1,故爲循環節第 1 項)

(3) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$ 時，2,3,6,1,8,8,6,4,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,…。

(20-8)/8=1…4,故爲循環節第 4 項,爲 3

(1000-15)/8=123…1,故爲循環節第 1 項，爲 2

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases}$ 時，2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8, 3,2,6,1,2,…。

(20-0)/8=2…4,故爲循環節第 4 項,爲 3

(1000-0)/8=125…0,故爲循環節第 8 項,爲 2

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$ 時,2,5,1,0,0,…，顯然第 20 項和第 1000 項均爲 0。

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases}$ 時，2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4, 8, 3,2,6,1,2,…。

(20-4)/8=2…0,故爲循環節第 8 項,爲 2

(1000-4)/8=124…4,故爲循環節第 4 項,爲 3

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases}$ 時，2,7,1,4,4,1,6,6,3,6,1,8,8,6,4,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,…。

如原題解

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 8 \end{cases}$ 時，2,8,1,6,6,3,6,1,8,8,6,4,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,…。

(20-12)/8=1…0,故爲循環節第 8 項,爲 2

(1000-12)/8=123…4,故爲循環節第 4 項,爲 3

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 9 \end{cases}$ 時，2,9,1,8,8,6,4,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,…。

(20-7)/8=1…5,故爲循環節第 5 項,爲 2

(1000-7)/8=124…1,故爲循環節第 1 項,爲 2

在 a_1 與 a_2 各從 1 到 9 的 81 組起始值中，除了(2,5),(3,5),(4,5),(5,n),(6,5),(6,9),(7,5),(7,8),(8,5),(8,7),(9,5),(9,6)外，其餘皆可無窮盡的延續下去，且會以{2,4,8,3,2,6,1,2}爲循環節。

（上承第 39 頁）

問題編號
933305

如圖，ΔABC 內接於一個圓，$\overline{AM}$ 是∠A 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 M，延長 $\overline{AM}$ 於 $\overline{BC}$ 於 L，試以 a、b、c 來表示 $\frac{\overline{AM}}{\overline{AL}}$ 之值。