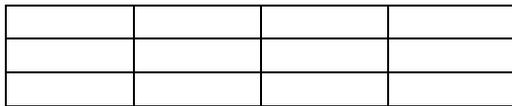


# 中學生通訊解題第三十三期題目

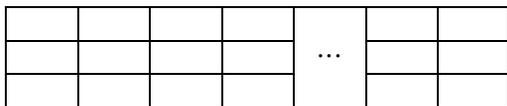
## 臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號  
933301

- (1)如下圖 G1，一個  $3 \times 4$  的棋盤，最後一列(橫為列)都染上黑色，其他的方格染上黑色或白色。試證：其他的方格無論如何染色，若把每一方格當作一個點，棋盤中一定含有一個矩形，它的四個頂點的顏色相同。  
(註：此處矩形是指長寬均不小於 2 的矩形)
- (2)如下圖 G2，在一個  $3 \times n$  的棋盤中的每個方格均染以黑色或白色，試求出最小的自然數  $n$ ，使得對於任何一種染色法，棋盤一定含有一個矩形，它的四個頂點的顏色相同。



G1



G2

問題編號  
933302



問題編號  
933303

若  $p$  點為正方形  $ABCD$  所在平面上的任意一點，請問存在多少個  $P$  點，使得  $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDA$  都是等腰三角形？並請說明之。

問題編號  
933304

在一個正立方體的八個頂點上分別標上  $+1$  或  $-1$ ，在六個面上也分別標上一個數，它等於這個面的四個頂點處的數的乘積。試問用這樣方法所標示的 14 個數字的和能否為 0？並請說明之。

(下轉第 48 頁)

(2)  $(1000-15)/8=123\cdots 1$ ,故為循環節第 1 項)

$$(3) \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \text{時, } 2, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2,$$

4, 8, 3, 2, 6, 1, 2,  $\cdots$ 。

$(20-8)/8=1\cdots 4$ ,故為循環節第 4 項,為 3

$(1000-15)/8=123\cdots 1$ ,故為循環節第 1 項,為 2

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases} \text{時, } 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2,$$

$\cdots$ 。

$(20-0)/8=2\cdots 4$ ,故為循環節第 4 項,為 3

$(1000-0)/8=125\cdots 0$ ,故為循環節第 8 項,為 2

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases} \text{時, } 2, 5, 1, 0, 0, \cdots, \text{顯然第 20 項和第}$$

1000 項均為 0。

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases} \text{時, } 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3,$$

2, 6, 1, 2,  $\cdots$ 。

$(20-4)/8=2\cdots 0$ ,故為循環節第 8 項,為 2

$(1000-4)/8=124\cdots 4$ ,故為循環節第 4 項,為 3

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases} \text{時, } 2, 7, 1, 4, 4, 1, 6, 6, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2,$$

4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2,  $\cdots$ 。

如原題解

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 8 \end{cases} \text{時, } 2, 8, 1, 6, 6, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 3,$$

2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2,  $\cdots$ 。

$(20-12)/8=1\cdots 0$ ,故為循環節第 8 項,為 2

$(1000-12)/8=123\cdots 4$ ,故為循環節第 4 項,為 3

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 9 \end{cases} \text{時, } 2, 9, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2,$$

4, 8, 3, 2, 6, 1, 2,  $\cdots$ 。

$(20-7)/8=1\cdots 5$ ,故為循環節第 5 項,為 2

$(1000-7)/8=124\cdots 1$ ,故為循環節第 1 項,為 2

在  $a_1$  與  $a_2$  各從 1 到 9 的 81 組起始值中,除了(2,5),(3,5),(4,5),(5,n),(6,5),(6,9),(7,5),(7,8),(8,5),(8,7),(9,5),(9,6)外,其餘皆可無窮盡的延續下去,且會以{2,4,8,3,2,6,1,2}為循環節。

(上承第 39 頁)

問題編號  
933305

如圖,  $\triangle ABC$  內接於一個圓,  $\overline{AM}$  是  $\angle A$  的平分線交  $\overline{BC}$  於  $M$ , 延長  $\overline{AM}$  於  $\overline{BC}$  於  $L$ , 試以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  來表示  $\frac{AM}{AL}$  之值。

