# 與物體相連之彈簧的縱向振動

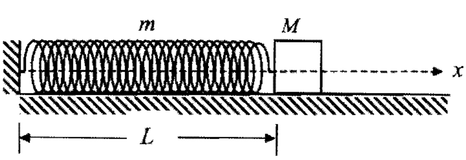
蔡尚芳
國立臺灣大學　物理系

## 摘要

本文分別由質點與波動兩種觀點，探討一端固定，另端與物體相連之彈簧的縱向振動。結果顯示一般物理教科書所給之簡諧振動頻率公式，其實是在彈簧應變為均勻，且彈簧無質量的條件下，才能成立的。本文導出此物體與彈簧系統的駐波振動頻率所必須滿足的一般性色散方程式，其解包括此系統的基音頻率，與所有高階泛音的頻率。當彈簧與物體的質量比甚小時，可視此比之平方根為微量，而將色散方程式做低階展開，求出其近似解的公式。結果顯示在此微量的二階近似下，以質點與波動方式獲得的基音頻率，確實是相同的，但波動方式之解尚包括泛音的頻率。

## 與物體相連之彈簧的縱向振動

考慮一均勻之螺線圈彈簧，設其力常數為 $k$，自然長度為 $L$，總質量為 $m$，截面積為 $A$。此彈簧平放於一無摩擦力的水平面上，其縱軸與 $x$ 軸重合，如下圖一所示，彈簧一端固定於 $x = 0$，另端位於 $x = L$，與一質量為 $M$ 的物體相連接。




圖一

若將質量為 $M$ 的物體，視為一受彈簧力作用之質點，則可由牛頓第二運動定律求解其運動，而知物體沿 $x$ 軸之運動為簡諧振動。一般高中與大學普通物理教科書，通常都假設彈簧的質量可以忽略，而給出物體做簡諧振動的頻率 $f$ 為

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{1}$$

但 $f$ 並非唯一可能之振動頻率，此彈簧與物體組成之系統，還存在有其他較高之振動頻率，亦即泛頻，此一結論在將彈簧視為可以傳遞縱波之介質時，即可明顯看出。

本文之主要目的，是要指出上述質點與波動兩種觀點間之關聯，以提供對此系統縱向振動之更深入了解，以作為高中與大學教學之參考。在探討問題時，本文假設此「彈簧 - 物體」系統僅微幅偏離其靜力平衡態，而其橫截面之面積 $A$ 恆不改變，永遠維持為一固定值。

當彈簧沿縱軸方向微幅伸縮時，其應力(即每單位面積受到之力)與應變(即伸長量與原來長度之比)成正比，故以力 $F$，自然長度 $L$，伸長量 $\Delta L$，及截面積 $A$ 表示時，此正比關係可表示為

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} \tag{2a}$$

上式中 $Y$ 為比例常數，可視為彈簧沿縱

軸方向微幅伸縮時之有效楊氏係數。依虎克定律，力 $F$ 與伸長量 $\Delta L$ 成正比，其比例常數即彈簧之力常數 $k$，故上式亦可寫成

$$F = AY\frac{\Delta L}{L} = k\Delta L \tag{2b}$$

即比例常數 $Y$ 可表示如下：

$$Y = k\frac{L}{A} \tag{2c}$$

設 以 $\xi(x)$ 代表位在 $x$ 處之彈簧截面沿 $x$ 方向的位移，則 $\xi(L)$ 即物體 $M$ 之位移 。考慮彈簧上 $x$ 到 $x+\Delta x$ 之小段，其自然長度為 $\Delta x$，而其伸長量則可用位移表示為

$$\Delta\xi = \xi(x+\Delta x) - \xi(x)$$

設在 $x$ 處之彈簧截面所受來自其右方鄰接部分沿 $+x$ 方向之力為 $F(x)$，則此小段左、右兩側面之鄰接部分，對其所施之作用力分別為 $-F(x)$ 與 $F(x+\Delta x) \approx F(x)$。依楊氏係數之定義，即式(2a)，可得以下關係：

$$F(x) = AY\frac{\Delta\xi}{\Delta x} = kL\frac{\Delta\xi}{\Delta x} \tag{2d}$$

## (一)均勻應變下彈簧之振動頻率

在彈簧 - 物體系統做微幅振動時，若彈簧之應變，到處都是均勻的，則應變 $\Delta\xi/\Delta x$ 為常數，與 $x$ 座標無關，即

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{\xi(x)}{x} = \frac{\xi_M}{L} \tag{3a}$$

或

$$\xi(x) = \frac{\xi_M}{L}x \tag{3b}$$

在 $x$ 處之彈簧截面，其速度 $\dot{\xi}(x)$ 為位移 $\xi(x)$ 對時間之微分，故由式(3b)可得

$$\dot{\xi}(x) = \frac{\dot{\xi}_M}{L}x \tag{3c}$$

上式中之 $\dot{\xi}_M$ 為物體振動之速度。因彈簧之線質量密度為 $m/L$，故可利用上式，先求出彈簧上位於 $x$ 到 $x+\Delta x$ 小段之動能，再以積分求出其總和，而得彈簧之動能為

$$\begin{aligned} K_S &= \frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{m}{L}dx\right)\{\dot{\xi}(x)\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}\right)\left(\frac{\dot{\xi}_M^2}{L^2}\right)\int_0^L x^2dx \\ &= \frac{m\dot{\xi}_M^2}{2L^3}\left(\frac{L^3}{3}\right) = \frac{1}{6}m\dot{\xi}_M^2 \end{aligned} \tag{3d}$$

因物體之速度為 $\dot{\xi}_M$，故物體之動能為

$$K_M = \frac{1}{2}M\dot{\xi}_M^2 \tag{3e}$$

此系統之位能，可用力常數 $k$ 與彈簧之伸長量 $\xi(L)$，或物體之位移 $\xi_M$，表示為

$$U = \frac{1}{2}k\xi_M^2 \tag{4}$$

綜合以上結果，可知此彈簧 - 物體系統之總力學能為

$$\begin{aligned} E &= K_S + K_M + U = \\ &= \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\dot{\xi}_M^2 + \frac{1}{2}k\xi_M^2 \end{aligned} \tag{5}$$

注意：當此系統處於靜止平衡態時，式(4)所採用之位能為零，而其總力學能亦為零。上式與質量為 $M+m/3$、力常數為 $k$ 之簡諧振子所具有之總力學能，形式完全一樣，顯示此彈簧 - 物體系統沿 $x$ 方向之運動確為簡諧振動，其振動頻率為

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m/3}} \tag{6}$$

比較(1)與(6)兩式之結果，可知一般教科書常見之簡諧振動頻率公式，即式(1)，其實是假設彈簧應變為均勻，且彈簧質量 $m$ 為零時之結果。

### (二)沿 $+x$ 方向傳遞之彈簧縱波的波速

考慮在彈簧中，有一沿 $+x$ 方向傳遞之正弦縱波。假設此波之振幅為 $\xi_0$，波長為 $\lambda$，波速為 $u$，則波之頻率 $f$ 可由 $f\lambda = u$ 之關係決定。在任一時刻 $t$，此波之波形可表示為

$$\xi(x) = \xi_o \sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut) \tag{7}$$

上式中 $\xi(x)$ 為在 $x$ 處的彈簧截面沿 $x$ 方向之位移(由平衡位置起算)。若由上式求出位移 $\xi(x)$ 對位置座標 $x$ 之微分後，再代入式(2d)之右邊，則可得知在此截面右側的鄰接部分對其所施之力 $F(x)$為

$$F(x) = AY\frac{\Delta\xi}{\Delta x} = kL\frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\lambda}kL\xi_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut) \tag{8a}$$

彈簧上位於 $x$ 到 $x+\Delta x$ 之小段，其加速度為位移 $\xi(x)$對時間之二次微分 $\ddot{\xi}(x)$，而彈簧之線質量密度為 $m/L$，故此小段之質量為 $m\Delta x/L$。此小段的左、右兩邊，受到之作用力分別為 $-F(x)$與 $F(x+\Delta x)$，故由牛頓第二運動定律，可得此小段彈簧之運動方程式為

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = (\frac{m}{L}\Delta x)\ddot{\xi}(x) \tag{8b}$$

即

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{m}{L}\ddot{\xi}(x) \tag{8c}$$

由(7)與(8a)兩式可求出上式兩邊之微分，即

$$\ddot{\xi}(x) = -(\frac{2\pi u}{\lambda})^2\xi(x) \tag{8d}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = -(\frac{2\pi}{\lambda})^2 kL\xi(x) \tag{8e}$$

綜合(8c)、(8d)、(8e)三式之結果可得

$$kL = \frac{m}{L}u^2 \tag{9a}$$

即波速 $u$ 為

$$u = \sqrt{\frac{kL^2}{m}} = \sqrt{\frac{YAL}{m}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{9b}$$

上式中第二個等式係利用式(2c)之關係求得，而 $\rho$ 則代表彈簧之體質量密度。

### (三)縱向駐波的振動頻率必須滿足的方程式 - 色散方程式

假設此彈簧 - 物體系統以單一頻率 $f$ 做縱向駐波振動，則知其波長 $\lambda = u/f$。在此情形下，彈簧各截面均以頻率 $f$ 做簡諧振動。因彈簧位在 $x = 0$ 之一端固定不動，其位移恆為零，故在時刻 $t$ 時，位於 $x$ 處之彈簧截面，其縱向位移可表示為

$$\xi(x) = C\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\sin 2\pi ft = C\sin\frac{2\pi f}{u}x\cdot\sin 2\pi ft \tag{10a}$$

上式中之常數 $C$ 為振幅，且彈簧各點之位移均為零時，取為時刻 $t = 0$。

因物體與彈簧位於 $x = L$ 之一端連接，故物體亦必以頻率 $f$ 做簡諧振動，其加速度 $a_M$ 及所受來自彈簧的作用力 $F_M$，均與其位移 $\xi_M$，亦即 $\xi$ $(x=L)$，成正比。但因作用於彈簧 $x = L$ 端之力 $F(x=L)$，實際上乃是來自物體，與 $F_M$ 有作用力與反作用力的關係，即

$F_M = -F(x=L)$，故得

$$-F(x=L)=M\,a_M$$
$$=-M(2\pi f)^2\xi(x=L) \qquad (10b)$$

將(10a)與(2d)兩式之結果代入上式，可得

$$-kL\cdot\frac{2\pi f}{u}\cos(\frac{2\pi f}{u}L)$$
$$=-M(2\pi f)^2\sin(\frac{2\pi f}{u}L) \qquad (11a)$$

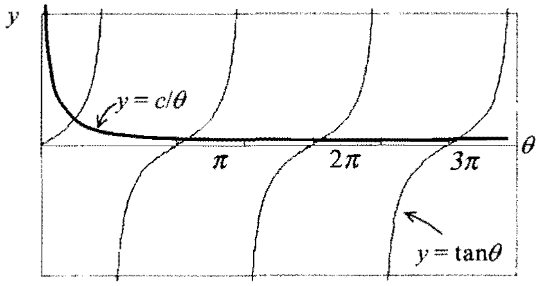
依式(9a)或(9b)，上式可簡化為

$$\frac{m}{M}=(\frac{2\pi fL}{u})\tan(\frac{2\pi fL}{u}) \qquad (11b)$$

若令 $c=m/M$，$\theta=(2\pi fL/u)$，則上式可改寫為

$$\frac{c}{\theta}=\tan\theta \qquad (11c)$$

故可看出，若以 $y$ 為縱軸，$\theta$ 為橫軸，則曲線 $y=c/\theta$ 與 $y=\tan\theta$ 相交之各點所對應之 $\theta$ 或 $f$，即式(11b)之解。此等解有無窮多，且當 $c=m/M<<1$時，均出現在 $\theta=n\pi$ 附近($n=0,1,2,3,\cdots$)，如圖二所示。




圖二

## (四)縱向駐波之基音與泛音頻率

設 $m<<M$，則由圖二或式(11b)可看出基音頻率 $f_0$ 必使 $\theta=(2\pi f_0L/u)<<1$，而在此情形下，正切函數可展開成下式：

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\approx\frac{\theta-(\theta^3/6)+(\theta^5/120)}{1-(\theta^2/2)+(\theta^4/24)}$$
$$\approx\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{2\theta^5}{15} \qquad (12)$$

將此結果代入式(11b)，可得基音頻率須滿足之近似方程式為

$$\frac{m}{M}\approx\theta^2+\frac{\theta^4}{3} \qquad (13a)$$

此為 $\theta^2$ 之二次方程式，由二次方根之公式可得

$$\theta^2=\frac{-3+3\sqrt{1+4m/3M}}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\{-1+1+\frac{1}{2}(\frac{4m}{3M})-\frac{1}{8}(\frac{4m}{3M})^2+\cdots\}$$
$$\approx\frac{m}{M}(1-\frac{m}{3M}) \qquad (13b)$$

故如視質量比($m/M$)之平方根為微量參數，則在此微量參數之二階近似下，可得

$$\theta=\frac{2\pi f_0L}{u}\approx\sqrt{\frac{m}{M}(1-\frac{m}{3M})}\approx\sqrt{\frac{m}{M+m/3}} \qquad (13c)$$

綜合(3d)與(9a)兩式之結果，即可得駐波之基音頻率為

$$f_o\approx\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m/3}} \qquad (14)$$

上式之結果與式(6)相同，故不論是用質點或波動方式，在微量參數之二階近似下，基音頻率之答案是相同的。

設以 $f_n$ 代表第 $n$ 泛音之頻率（$n=1,2,3,\cdots$），並令

$$\theta=\frac{2\pi f_nL}{u}=n\pi+\varepsilon$$
$$(-\pi/2\le\varepsilon<\pi/2) \qquad (15)$$

則由式(11b)可得

$$\frac{m}{M}=\theta\tan\theta=(n\pi+\varepsilon)\tan\varepsilon \qquad (16a)$$

當 $m << M$ 時，上式顯示 $\tan\varepsilon$ 之值很小，因此 $\varepsilon$ 也必須很小，故可將正切函數展開而得

$$\frac{m}{M}\approx(n\pi+\varepsilon)(\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{3})\approx n\pi\varepsilon+\varepsilon^2 \qquad (16b)$$

如保留微小量至($m/M$)的二階，則由上式可得

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(-n\pi+\sqrt{n^2\pi^2+\frac{4m}{M}})$$

$$\approx\frac{m}{n\pi M}(1-\frac{m}{n^2\pi^2 M}) \qquad (16c)$$

由式(9a)、(15)與(16c)可得第 n 泛音之頻率 $f_n$ 的近似解為

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,n\pi\,\{1+\frac{m}{n^2\pi^2 M}(1-\frac{m}{n^2\pi^2 M})\} \qquad (17a)$$

若只保留($m/M$)的一次項，且 n 很大時，上式之結果亦可表示為

$$f_n=n\pi\sqrt{\frac{M+m/3}{m}}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m/3}}$$

$$(1+\frac{m}{n^2\pi^2 M})\approx n\pi\sqrt{\frac{M}{m}+\frac{1}{3}}\;f_o \qquad (17b)$$

可見一般而言，此系統之泛音頻率，並非基音頻率之整數倍。

## (五)彈簧之兩端固定時，縱向駐波之基音與泛音頻率

彈簧之兩端若均固定，則可視之為物體質量 $M$ 趨近於無窮大之情形，故此時彈簧縱向駐波之基音與泛音頻率，實際上即為以上結果在 $M$ 趨近於無窮大之極限值。故由式(14)得頻率 $f_0$ 為零，即彈簧靜止不動，此解顯然可自可能之振動頻率中剔除；但由式(17a)則可求得此情況下彈簧之基音與泛音頻率，結果為

$$f_n=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$(n=1,2,3,\cdots) \qquad (17c)$$

由上式可看出此時彈簧上縱向駐波之泛音頻率，均為基音頻率 之整數倍。利用式(9a)之關係，可將上式表示為

$$\frac{1}{\lambda_n}=\frac{f_n}{u}=\frac{n}{2L} \qquad (17d)$$

故知此兩端固定之彈簧，其駐波之波長滿足以下之公式：

$$\lambda_n=\frac{2L}{n} \qquad (17e)$$

此結果與兩端固定之弦線相同。