Das Verhalten von Differentialformen, bilinearen Formen und quadratischen Formen unter rein inseparablen Körpererweiterungen sowie unter mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaft
(Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Marco Sobiech

29.06.2017

Dissertation

Das Verhalten von Differentialformen, bilinearen Formen und quadratischen Formen unter rein inseparablen Körpererweiterungen sowie unter mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. Detlev W. Hoffmann, TU Dortmund
Zweitgutachter: Prof. Dr. Daniel Plaumann, TU Dortmund

Tag der mündlichen Prüfung: 19.10.2017

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich primär mit der Analyse von Differentialformen, bilinearen Formen und quadratischen Formen unter verschiedenen Körpererweiterungen in positiver Charakteristik. Ist E/F eine (nicht notwendigerweise endliche) rein inseparable Körpererweiterung, so werden wir ein Erzeugendensystem der Gruppe $H_p^{n+1}(E/F)$ mit beliebiger Primzahl $p > 0$ konstruieren, mit dessen Hilfe wir dann auch ein Erzeugendensystem des quadratischen Wittkerns $W_q(E/F)$ erhalten. Analog zu dieser Fragestellung werden wir zusätzlich in einigen Spezialfällen rein inseparabler Erweiterungen ebenfalls Erzeuger der Gruppe $\nu_n(E/F)$ und damit auch Erzeuger des bilinearen Wittkerns $W(E/F)$ bestimmen. Eines der Hauptwerkzeuge, die wir dabei einführen und verwenden werden, sind Annullatoren in der Algebra $\Omega^*(F)$. Diese werden wir gesondert untersuchen und anschließend auch für die Analyse von Differentialformen und bilinearen Formen unter mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen verwenden. Zusätzlich werden wir mit Hilfe des Bloch-Kato-Gabber Theorems und des Bloch-Kato Theorems alle vorliegenden Ergebnisse auch auf die Theorie der Milnor-K-Gruppen und der Brauergruppen übertragen.

Einige der Hauptresultate aus den Kapiteln 6.3 und 8.3 dieser Arbeit wurden bereits zur Veröffentlichung im „Journal of Algebra“ unter dem Titel „The behavior of differential, quadratic and bilinear forms under purely inseparable field extensions“ eingereicht (Stand 7. November 2017).

Abstract

In this thesis, we will primarily study differential forms, bilinear forms and quadratic forms under different kinds of field extensions E/F where F denotes a field of positive characteristic. Let E/F be a (not necessarily finite) purely inseparable field extension. We will compute a generating system of the group $H_p^{n+1}(E/F)$ for an arbitrary prime number $p > 0$ and using this group, we will also obtain a generating system of the quadratic witt kernel $W_q(E/F)$ when p equals two. Analyzing the same extension in some special cases, we will also be able to give a generating system of the group $\nu_n(E/F)$ which we can translate into a generating system of the bilinear witt kernel $W(E/F)$ for $p = 2$. To do so, we will introduce and study so called annihilators in the graded differential algebra $\Omega^*(F)$. These annihilators will also be used to get some results on the behavior of the space of differential forms under iterated function field extensions of p-forms. Afterwards we determine the structure of the witt ring of these extensions as well. Using the Bloch-Kato-Gabber Theorem and the Bloch-Kato Theorem, we will also be able to transfer our main results to the theory of Milnor-K-groups resp. to the p-torsion part of the brauer group.

Note that some of the main results of chapters 6.3 and 8.3 have already been handed in at the „Journal of Algebra“ under the title „The behavior of differential, quadratic and bilinear forms under purely inseparable field extensions“ (November 7, 2017).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Bei der Betrachtung von über Körper definierter algebraischer Objekte ist es ein zentrales Problem, das Verhalten eben dieser Objekte unter Körpererweiterungen zu beschreiben. Genau diese Fragestellung werden wir in dieser Arbeit für bilineare und quadratische Formen über Körper der Charakteristik zwei und für Differentialformen über Körper positiver Charakteristik $p > 0$ aufgreifen. Dabei beantworten wir primär die Frage, welche bilinearen Formen $\mathfrak{b} \in W(F)$, welche nicht singulären quadratischen Formen $\varphi \in W_q(F)$ und welche Differentialformen $\omega \in \Omega^n(F)$ unter einer gegebenen Körpererweiterung K/F metabolisch bzw. hyperbolisch bzw. trivial werden. Den wohl tiefsten Grundstein dieser Dissertation legte dabei Witt in seiner Arbeit „Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern [44]“ aus dem Jahr 1937, in der er einen Ring einführte, der heute als der Wittring bekannt ist und somit der Menge der quadratischen und bilinearen Formen über einem Körper F eine algebraische Struktur zuordnete. Allerdings wurde der Wittring in dieser Arbeit ausschließlich für Formen über Körper mit Charakteristik verschieden von zwei eingeführt. Erste Untersuchungen von Formen in Charakteristik zwei wurden etwa von Arf in [12] bereits im Jahr 1941 durchgeführt, aber bis heute gibt es wenig Literatur im Bereich der quadratischen Formen, die sowohl Körper der Charakteristik ungleich zwei als auch Körper der Charakteristik zwei behandelt. Einer der Hauptgründe für die Trennung dieser beiden Theorien ist vor allem die Tatsache, dass bilineare Formen und quadratische Formen in Charakteristik zwei stets getrennt voneinander untersucht werden müssen, da diese nicht wie im üblichen Fall äquivalent zueinander sind. Aber gerade im Verhalten unter Körpererweiterungen liefern Formen über Körper der Charakteristik zwei oft eine größere Vielfalt an Resultaten als über Körper anderer Charakteristik. So gibt es etwa für Körper der Charakteristik zwei, zwei deutlich verschiedene Typen von quadratischen Körpererweiterungen unter denen sich die quadratische Wittgruppe auch deutlich verschieden verhält. Aber natürlich haben Körper der Charakteristik zwei aus noch vielen weiteren Gründen eine Daseinsberechtigung. Aus diesem Grund wollen wir uns in dieser Arbeit der Untersuchung von quadratischen und bilinearen Formen über Körper der Charakteristik zwei widmen und uns dabei speziell auf das Verhalten unter Körpererweiterungen konzentrieren. Dabei sind vor allem rein inseparable Körpererweiterungen für uns von Interesse, was sich wie folgt begründen lässt:

Aus der Algebra wissen wir, dass jeder Körper F mit $\mathrm{char}(F) = 0$ perfekt ist und somit jede endliche Erweiterung von F separabel ist. In diesem Fall gibt es also schlichtweg keine inseparablen Erweiterungen von F. Ist $\mathrm{char}(F) = p \neq 2$, so ist der Körpergrad jeder endlichen rein inseparablen Erweiterung E/F stets eine Potenz von p und damit insbesondere ungerade. Nach dem Theorem von Springer (siehe [21, Cor. 18.5]) sind in diesem Fall also über F anisotrope Formen auch über E anisotrop. Lediglich für Körper der Charakteristik zwei liefern damit rein inseparable Erweiterungen also von Null verschiedene bilineare und quadratische Wittkerne. Insbesondere gibt es also auch keinerlei Ansätze oder Vorgaben aus der üblichen Theorie, die wir bei der Untersuchung aufgreifen oder übertragen könnten. Aber eben diesen Wittkernen wollen wir einen Großteil dieser Arbeit widmen und sie für die quadratische Wittgruppe $W_q(F)$ vollständig klassifizieren. Um dies zu tun, werden wir die Theorie der Differentialformen über F zu Hilfe nehmen, welche im Fall $\text{char}(F) = 2$ in Verbindung zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen über F steht. Differentialformen sind generell für Körper beliebiger positiver Charakteristik definiert, weshalb wir auch viele unserer Ergebnisse weitestgehend für Körper beliebiger Charakteristik $p > 0$ formulieren werden, auch wenn ihre Anwendung dann im Fall $p = 2$ erfolgt. Differentialformen sind bereits schon länger bekannt und erste Analysen dieser Formen erfolgten in [18] und [23]. Den Zusammenhang zwischen Differentialformen und bilinearen bzw. quadratischen Formen zeigte Kato im Jahr 1982 in seiner Arbeit „Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-Theory in characteristic two [31]", in der er die Milnor Vermutung in Charakteristik zwei bewies.

Im Folgenden wollen wir noch eine Übersicht über den Aufbau dieser Dissertation geben. Zum besseren Verständnis dieser Arbeit empfehlen wir dem Leser zu Beginn eine kurze Durchsicht des Anhangs, in dem einige für diese Arbeit notwendigen Definitionen und Resultate aus der Algebra wiederholt werden.

In Kapitel 1 wollen wir eine kurze Einführung in die Theorie der bilinearen und quadratischen Formen über Körper der Charakteristik zwei liefern. Da diese Theorie nicht so bekannt ist wie die Theorie der quadratischen Formen über Körper der Charakteristik ungleich zwei, werden wir dabei von Grund auf alle notwendigen Begriffe einführen und lediglich ein grundlegendes Vorwissen der Materie beim Leser voraussetzen. Wir führen in diesem Kapitel den Wittring und die Wittgruppe von F, sowie das Fundamentalideal von F ein und beschreiben dieses anschließend durch bilineare und quadratische Pfisterformen.

Kapitel 2 dieser Arbeit befasst sich mit sogenannten quasilinearen p-Formen. Diese sind eine Verallgemeinerung von total singulären quadratischen Formen von Körper der Charakteristik zwei auf Körper der Charakteristik $p > 0$. Wir geben auch hier eine Übersicht der grundlegenden Definitionen und Eigenschaften. Weiter führen wir für eine p-Form den Normkörper und den Normgrad ein, welche in den späteren Kapiteln 7 und 8 bei der Untersuchung von Formen unter Funktionenkörpern von p-Formen eine zentrale Rolle einnehmen werden.

In Kapitel 3 werden wir damit beginnen, die p-Unabhängigkeit von Elementen einzuführen. Dabei spielt vor allem der Begriff einer p-Basis eines Körpers F der Charakteristik $p > 0$ für uns eine zentrale Rolle, da wir mit Hilfe einer solchen p-Basis auch eine Vektorraumbasis des Raumes der einfachen Differentialformen $\Omega^1(F)$ erhalten. Anschließend werden wir alle nötigen grundlegenden Begriffe im Bereich der Differentialformen einführen und auch die aus einer p-Basis resultierende Filtrierung des Raumes $\Omega^n(F)$, sowie das bekannte Lemma von Kato formulieren. Zusätzlich werden wir ebenfalls den von Kato bewiesenen Zusammenhang zwischen Differentialformen und bilinearen sowie quadratischen Formen aufführen. Da wir uns in dieser Arbeit primär mit dem Verhalten von Differentialformen unter Körpererweiterungen befassen, werden wir außerdem eine kurze Übersicht über die bisher bekannten Resultate dieser Thematik liefern.

Kapitel 4 befasst sich mit einer kurzen Einführung und Definition der Milnor-K-Gruppen sowie der Brauergruppe. Des Weiteren formulieren wir das Bloch-Kato-Gabber Theorem sowie das Bloch-Kato Theorem, welches bestimmte Milnor-K-Gruppen und die Brauergruppe eines Körpers F der Charakteristik $p > 0$ ebenfalls in Verbindung mit Gruppen von Differentialformen setzt.

In Kapitel 5 beginnt dann der Forschungsteil dieser Arbeit. Völlig losgelöst von Körpererweiterungen werden in diesem Kapitel zunächst Annullatoren in der Algebra $\Omega^*(F)$ untersucht und so einige erste Ergebnisse von Aravire und Baeza in [7] mittels einer völlig anderen Herangehensweise deutlich verallgemeinert. Diese Ergebnisse werden wir anschließend mit Hilfe des Lemmas von Kato auf die Gruppe $\nu_n(F)$ übertragen, um so später einige Annullatoren im Wittring $W(F)$ zu erhalten.

Kapitel 6 befasst sich dann mit dem Verhalten von Differentialformen unter rein inseparablen Körpererweiterungen. Wir werden zunächst den Raum $\Omega^n(F)$ unter modularen rein inseparablen Erweiterungen E/F untersuchen, anschließend die Gruppe $\nu_n(E/F)$ bestimmen und so später ein Ergebnis für den bilinearen Wittring $W(E/F)$ erhalten. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 5 können wir dann auch $\Omega^n(E/F)$ für einen Spezialfall einer nicht modularen rein inseparablen Erweiterung E/F bestimmen und erhalten so den ersten Ω-Kern dieser Art. Anschließend werden wir den Kern $H_p^{n+1}(E/F)$ für eine vollkommen beliebige rein inseparable Erweiterung bestimmen, indem wir ein Erzeugendensystem dieser Gruppe angeben.

In Kapitel 7 entfernen wir uns kurzzeitig von den algebraischen Erweiterungen und befassen uns mit dem Verhalten von Differentialformen unter Funktionenkörpern von p-Formen. Dabei werden wieder die Annullatoren aus Kapitel 5 ein zentrales Hilfsmittel sein, mit dessen Hilfe wir die Kerne $\Omega^n(F(\varphi_1, \dots, \varphi_r)/F)$ und $\nu_n(F(\varphi_1, \dots, \varphi_r)/F)$ für p-Formen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ als Annullatoren bestimmter Mengen von Differentialformen identifizieren werden, die mit Hilfe der Normkörper der Formen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ beschrieben werden können. Mittels verschiedener Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln können wir diese Kerne dann in verschiedenen Spezialfällen genauer bestimmen.

Im achten und letzten Kapitel werden wir diese Arbeit damit abschließen, alle Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln zusammenzutragen und diese mittels zweier Transformationslemmata auf den bilinearen Wittring und die quadratische Wittgruppe des Körpers F mit $\mathrm{char}(F) = 2$ zu übertragen.

Abschließend möchte ich noch einigen Menschen danken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt und immer wieder neu motiviert haben. Zunächst bedanke ich mich bei meinem Betreuer Detlev Hoffmann, der mir die Freiheit ließ in die Richtung zu forschen, in der ich die größten Erfolgsaussichten sah, mich nie drängte aber stets Zeit für Fragen und Orientierungshilfen hatte und mit dem ich viele interessante Gespräche führte, die mir immer wieder neue Ideen und Ansätze lieferten. Auch meinen Arbeitskollegen am Lehrstuhl möchte ich für die vielen interessanten Diskussionen danken, auch wenn diese nicht immer mathematisch motiviert waren. Schließlich danke ich noch meiner Frau, die auch in den schwierigsten Phasen dieser Arbeit immer hinter mir stand.

Teil I

Eine Wiederholung der notwendigen Theorien

Kapitel 1

Bilineare und quadratische Formen

In diesem Kapitel wollen wir die für diese Arbeit notwendige Theorie der bilinearen und quadratischen Formen über Körper der Charakteristik zwei wiederholen und einige Notationen fixieren. Dabei beschränken wir uns ausschließlich auf den Fall der Charakteristik zwei und setzen bei dem Leser ein grundlegendes Verständnis der Materie voraus.

Unabhängig von der Tatsache, dass einige der hier aufgeführten Ergebnisse auch in einem allgemeineren Kontext gültig sind, wollen wir uns in diesem Kapitel ausschließlich auf Körper F der Charakteristik zwei und endlich dimensionale F-Vektorräume beschränken. Des Weiteren verwenden wir die üblichen Standardnotationen der Theorie, etwa schreiben wir $\perp$ für die orthogonale Summe von Formen. Für eine detaillierte Einführung in die Theorie der bilinearen und quadratischen Formen verweisen wir auf die einführenden Kapitel des Buches [21].

1.1 Bilineare Formen, quadratische Formen und ihre Wittzerlegung

Der erste wichtige Unterschied zur üblichen Theorie der quadratischen Formen ergibt sich bereits in der Definition einer quadratischen Form.

Definition 1.1 Es sei V ein F-Vektorraum.

(a) Eine Abbildung $\mathfrak{b} : V \times V \to F$ heißt bilineare Form über F, wenn sie in jeder Komponente linear ist. Sie heißt symmetrisch, wenn für alle $u, v \in V$ stets $\mathfrak{b}(u, v) = \mathfrak{b}(v, u)$ gilt. Das Paar $(\mathfrak{b}, V)$ nennen wir dann einen symmetrischen bilinearen Raum.

(b) Eine Abbildung $\varphi : V \to F$ heißt quadratische Form über F, wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in F$ gilt

- $\varphi(\lambda v) = \lambda^2 \varphi(v)$;
- $\mathfrak{b}_\varphi : V \times V \to F$ definiert durch $\mathfrak{b}_\varphi(u, v) = \varphi(u+v)+\varphi(u)+\varphi(v)$ ist eine (symmetrische) bilineare Form über F.

Das Paar (φ, V) nennen wir dann einen quadratischen Raum.

(c) Eine bilineare Form $\mathfrak{b}$ heißt alternierend, wenn $\mathfrak{b}(v, v) = 0$ für alle $v \in V$ gilt.

Im Folgenden werden wir der Einfachheit halber die Form $\mathfrak{b}$ oft mit dem bilinearen Raum $(\mathfrak{b}, V)$ und die quadratische Form φ mit dem quadratischen Raum (φ, V) identifizieren.

Die Dimension einer bilinearen oder quadratischen Form identifizieren wir mit der Dimension des zugrunde liegenden Vektorraums. Natürlich können wir auch jeder bilinearen Form $\mathfrak{b}$ ihre sogenannte polare Form $\varphi_{\mathfrak{b}}$ durch $\varphi_{\mathfrak{b}}(v) := \mathfrak{b}(v, v)$ zuordnen. Im Gegensatz zur üblichen Theorie in Charakteristik ungleich zwei ist diese Zuordnung jedoch keine Bijektion, sondern es gilt $\varphi_{\mathfrak{b}_\varphi} = 0$ und $\mathfrak{b}_{\varphi_{\mathfrak{b}}} = 0$. Aus diesem Grund müssen an vielen Stellen bilineare und quadratische Formen in Charakteristik zwei getrennt voneinander untersucht werden.

Sind $(\mathfrak{b}_1, V_1), (\mathfrak{b}_2, V_2)$ zwei bilineare Räume und $(\varphi_1, W_1), (\varphi_2, W_2)$ zwei quadratische Räume, so nennen wir $L : V_1 \to V_2$ eine Isometrie der Formen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, wenn L ein Vektorraumisomorphismus ist und zusätzlich $\mathfrak{b}_2(L(u), L(v)) = \mathfrak{b}_1(u, v)$ für alle $u, v \in V_1$ gilt. Analog nennen wir $M : W_1 \to W_2$ eine Isometrie der quadratischen Formen φ_1 und φ_2, wenn M ein Vektorraumisomorphismus ist, der $\varphi_2(M(w)) = \varphi_1(w)$ für alle $w \in W_1$ erfüllt. In diesen Fällen nennen wir die Formen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ sowie φ_1, φ_2 isometrisch und schreiben kurz $\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}_2$ und $\varphi_1 \cong \varphi_2$. Existiert ein $a \in F^*$ mit $a\,\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}_2$ bzw. mit $a\,\varphi_1 \cong \varphi_2$, so nennen wir die jeweiligen Formen ähnlich.

Im Gegensatz zu der in Definition 1.1 gegebenen koordinatenfreien Definition können wir bilineare und quadratische Formen durch Fixieren einer Basis des zugrunde liegenden Vektorraumes auch als homogene Polynome von Homogenitätsgrad zwei auffassen. Eine Isometrie zweier Formen entspricht dann genau einer linearen Variablentransformation der zugehörigen Polynome.

Da wir uns in dieser Arbeit ausschließlich mit symmetrischen bilinearen Formen befassen werden, sei von nun an mit bilinearer Form stets eine symmetrische bilineare Form gemeint. Einige der nachfolgenden Aussagen sind zwar in leicht abgewandelter Form auch für beliebige bilineare Formen gültig, jedoch spielen diese für das Ziel dieser Arbeit keine Rolle.

Definition 1.2 Es seien $(\mathfrak{b}, V)$ ein bilinearer Raum und (φ, W) ein quadratischer Raum. Wir definieren das bilineare Radikal von $\mathfrak{b}$ bzw. das quadratische Radikal von φ als die Unterräume

$$\operatorname{rad}\mathfrak{b} := \{v \in V \mid \mathfrak{b}(v, u) = 0\ \forall u \in V\} \text{ bzw. } \operatorname{rad}\varphi := \{w \in \operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi \mid \varphi(w) = 0\}.$$

Ist $\operatorname{rad}\mathfrak{b} = \{0\}$, so nennen wir $\mathfrak{b}$ nicht ausgeartet und gilt $\operatorname{rad}\varphi = \{0\}$, so nennen wir φ regulär.

Um im weiteren Verlauf dieses Kapitels den Wittring und die Wittgruppe definieren zu können, werden wir uns später auf Formen mit trivialen Radikalen beschränken. Dies ist jedoch keine wesentliche Einschränkung, da das bilineare Radikal einer bilinearen Form sowie das quadratische Radikal einer quadratischen Form stets ein orthogonaler Summand des zugrunde liegenden Vektorraumes ist und die Restform dabei nicht ausgeartet bzw. regulär ist. Man beachte zusätzlich, dass im Fall von Charakteristik zwei die Radikale der Formen φ und $\mathfrak{b}_\varphi$ nicht zusammenfallen müssen.

Wir wollen uns nun mit Normgestalten von bilinearen und quadratischen Formen befassen. Dazu bezeichnen wir mit $\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle_b$ diejenige bilineare Form, welche durch das Polynom $\sum_{i=1}^n a_i X_i Y_i \in F[X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n]$ beschrieben ist. Ist $\mathfrak{b}$ eine bilineare Form über F mit $\mathfrak{b} \cong \langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle_b$, so nennen wir $\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle_b$ eine Diagonalisierung von $\mathfrak{b}$. Analog bezeichnen wir mit $\langle\, b_1, \ldots, b_n \,\rangle$ die quadratische Form, welche durch das Polynom $\sum_{i=1}^n b_i X_i^2$ gegeben ist. Schließlich bezeichnet $[c, d]$ die zweidimensionale quadratische Form $cX^2 + XY + dY^2 \in F[X, Y]$. Mit diesen Notationen erhalten wir dann das folgende Resultat.

Proposition 1.3 *([21, Cor. 1.9],[38, Chap. 1, Theo. 4.3])*

(a) Es sei $\mathfrak{b}$ eine nicht alternierende n-dimensionale bilineare Form über F. Dann existieren $a_1, \ldots, a_n \in F$ so, dass $\mathfrak{b} \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_b$ gilt.

(b) Es sei φ eine quadratische Form über F. Dann existieren $b_1, c_1, \ldots, b_r, c_r, d_1, \ldots, d_s \in F$ mit $\varphi \cong [b_1, c_1] \perp \ldots \perp [b_r, c_r] \perp \langle d_1, \ldots, d_s \rangle$.

Man beachte, dass in Proposition 1.3(b) dabei $\langle d_1, \ldots, d_s \rangle = \varphi_{|\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi}$ gilt. Das durch φ eindeutig bestimmte Tupel $(r, s) \in \mathbb{N}_0^2$ heißt der Typ der Form φ. Mit dieser Bezeichnung nennen wir eine Form φ vom Typ (r, s) dann

- nicht singulär, wenn $s = 0$ ist;
- singulär, wenn $s > 0$ ist;
- total singulär, wenn $r = 0$ ist.

Da wir total singuläre Formen in Kapitel 2 dieser Arbeit in allgemeinerer Form noch genauer studieren werden, wollen wir hier nicht weiter auf diese eingehen und uns im Folgenden weitestgehend mit nicht singulären Formen befassen.

Für einen bilinearen Raum $(\mathfrak{b}, V)$ und einen quadratischen Raum (φ, W) definieren wir die von den Formen über F dargestellten Elemente als

$$D_F(\mathfrak{b}) := \{\mathfrak{b}(v, v) \mid v \in V \ , \ \mathfrak{b}(v, v) \neq 0\} \text{ und } D_F(\varphi) := \{\varphi(w) \mid w \in W \ , \ \varphi(w) \neq 0\}.$$

Man beachte dabei, dass für alternierende bilineare Formen stets $D_F(\mathfrak{b}) = \varnothing$ gilt und insbesondere jede Form $\mathfrak{b}$ mit $D_F(\mathfrak{b}) \neq \varnothing$ diagonalisierbar ist. Weiter nennen wir $\mathfrak{b}$ bzw. φ isotrop, wenn ein $v \in V \setminus \{0\}$ bzw. ein $w \in W \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\mathfrak{b}(v, v) = 0$ bzw. $\varphi(w) = 0$ gilt. Ist dies nicht der Fall, nennen wir die Formen anisotrop.

Lemma 1.4 *([21, Lem. 1.23, Prop. 7.13])*

(a) Es sei $\mathfrak{b}$ eine nicht ausgeartete bilineare Form über F. Ist $\mathfrak{b}$ isotrop, so existiert ein $a \in F$, eine zweidimensionale bilineare Form $\mathbb{M}$ mit Grammatrix $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und eine bilineare Form $\mathfrak{b}'$ mit $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}' \perp \mathbb{M}$.

(b) Es sei φ eine reguläre quadratische Form über F. Ist φ isotrop, so existiert eine quadratische Form φ' mit $\varphi \cong \varphi' \perp [0, 0]$.

Die in Lemma 1.4 beschriebene zweidimensionale Form $\mathbb{M}$ mit Grammatrix $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $a \in F$ wollen wir kurz als $\mathbb{M}_a$ bezeichnen und nennen diese eine metabolische Ebene. Man beachte, dass für $a \in F^*$ dann $\mathbb{M}_a \cong \langle a, a \rangle_b$ gilt. Die Form $\mathbb{M}_0$ wird auch die bilineare hyperbolische Ebene genannt und mit $\mathbb{H}_b$ bezeichnet. Dabei ist die Form $\mathbb{H}_b$ nicht diagonalisierbar und es gilt $D_F(\mathbb{H}_b) = \varnothing$. Die nicht singuläre isotrope quadratische Form $[0, 0]$ wollen wir analog quadratische hyperbolische Ebene nennen und mit $\mathbb{H}$ bezeichnen. Für die quadratische hyperbolische Ebene schreiben wir auch kurz hyperbolische Ebene.

Offensichtlich gilt für $a, c \in F^*$ genau dann $\mathbb{M}_a \cong \mathbb{M}_c$, wenn $ac \in (F^*)^2$ ist. Weiter ist $\mathbb{M}_a \ncong \mathbb{H}_b$ für alle $a \in F^*$. Zudem ist leicht zu sehen, dass für $a \in F^*$ dann $D_F(\mathbb{M}_a) = a(F^*)^2$ und für die (quadratische) hyperbolische Ebene $D_F(\mathbb{H}) = F^*$ gilt.

Ist ein bilinearer Raum $(\mathfrak{b}, V)$ orthogonale Summe von metabolischen Ebenen, so nennen wir diesen einen metabolischen Raum. Genauso nennen wir einen nicht singulären quadratischen

Raum (φ, V) einen hyperbolischen Raum, wenn er Summe von hyperbolischen Ebenen ist. Dies ist für beide Formen genau dann der Fall, wenn es einen total isotropen Unterraum der Dimension $\frac{1}{2}\dim \mathfrak{b}$ bzw. $\frac{1}{2}\dim \varphi$ gibt, also einen Unterraum $U \subset V$ der Dimension $\frac{1}{2}\dim V$ mit $\mathfrak{b}(u_1, u_2) = 0$ für alle $u_1, u_2 \in U$ bzw. $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in U$. Mit diesen Bezeichnungen sind wir nun in der Lage, die Wittzerlegung der jeweiligen Formen zu formulieren.

Theorem 1.5 *([21, Theo. 1.27], [27, Prop. 2.4])*

(a) Es sei $\mathfrak{b}$ eine nicht ausgeartete bilineare Form über F. Dann existiert eine anisotrope bilineare Form $\mathfrak{b}_{an}$ und eine metabolische Form $\mathfrak{b}_m$ mit $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}_{an} \perp \mathfrak{b}_m$. Dabei ist $\mathfrak{b}_{an}$ bis auf Isometrie eindeutig durch $\mathfrak{b}$ bestimmt und heißt der anisotrope Anteil von $\mathfrak{b}$. Der ebenfalls durch $\mathfrak{b}$ eindeutig definierte Wert $\frac{1}{2}\dim \mathfrak{b}_m$ heißt der Wittindex der Form $\mathfrak{b}$ und wird mit $i_W(\mathfrak{b})$ bezeichnet.

(b) Es sei φ eine quadratische Form über F. Dann existieren eine nicht singuläre quadratische Form φ_r, eine total singuläre quadratische Form φ_s und $i, j \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\varphi \cong i \times \mathbb{H} \perp \varphi_r \perp \varphi_s \perp j \times \langle 0 \rangle$ gilt. Dabei ist die Form $\varphi_r \perp \varphi_s$ anisotrop, bis auf Isometrie eindeutig durch φ bestimmt, heißt der anisotrope Anteil von φ und wird mit φ_{an} bezeichnet. Die Werte i, j sind ebenfalls eindeutig durch φ definiert, heißen der Wittindex bzw. der Defekt von φ und werden mit $i_W(\varphi)$ bzw. $i_d(\varphi)$ bezeichnet.

1.2 Pfisterformen

In diesem Abschnitt wollen wir die sogenannten Pfisterformen einführen, welche in den späteren Kapiteln dieser Arbeit eine zentrale Rolle einnehmen werden. Pfisterformen tauchen in fast allen Bereichen der Theorie der quadratischen Formen aber auch in vielen angrenzenden Themengebieten immer wieder auf. Sie wurden erstmalig von Albrecht Pfister in seiner Arbeit „Multiplikative quadratische Formen [37]“ über Körper der Charakteristik ungleich zwei eingeführt und zusammen mit den hyperbolischen Formen als die quadratischen Formen φ klassifiziert, die eine Kompositionsformel der Art $\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(Z)$ erfüllen. Sie nehmen heute eine zentrale Rolle in vielen Bereichen der Theorie der bilinearen und quadratischen Formen ein.

Um Pfisterformen zu definieren, werden wir die üblichen Verknüpfungen von bilinearen und quadratischen Formen mit Hilfe des Tensorproduktes verwenden. Für eine genaue Definition dieser Multiplikation von Formen (sowie der bereits verwendeten orthogonalen Summe von Formen) verweisen wir auf [14, S. 5].

Definition 1.6 Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ sowie $b \in F$.

(a) Eine bilineare Form der Art $\langle 1, a_1 \rangle_b \otimes \ldots \otimes \langle 1, a_n \rangle_b$ nennen wir n-fache bilineare Pfisterform und schreiben für sie kurz $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b$. Weiter definieren wir $\langle 1 \rangle_b$ als die 0-fache bilineare Pfisterform.

(b) Eine quadratische Form der Art $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b \otimes [1, b]$ nennen wir $(n+1)$-fache quadratische Pfisterform und schreiben für sie kurz $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]]$.

Wenn klar ist, ob wir eine bilineare oder quadratische Pfisterform meinen, schreiben wir kurz Pfisterform. Nach Definition 1.6 ist klar, dass die Dimension einer Pfisterform eine Zweierpotenz ist und quadratische Pfisterformen stets nicht singulär sind. Zusätzlich zu den hier beschriebenen Pfisterformen kann man noch sogenannte total singuläre quasi-Pfisterformen definieren. Diese werden wir allerdings in Kapitel 2 in allgemeinerer Form einführen und hier nicht weiter auf diese eingehen. Es sei zudem angemerkt, dass die Bezeichnung der quadratischen Pfisterformen in der Literatur nicht konsistent ist. In einigen Quellen wird die Form $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]]$ als n-fache und nicht wie bei uns als $(n+1)$-fache quadratische Pfisterform bezeichnet.

Pfisterformen besitzen viele interessante Eigenschaften und tauchen in vielen Bereichen der Theorie der bilinearen und quadratischen Formen immer wieder auf. So ist etwa die Normform einer Quaternionenalgebra stets eine 2-fache Pfisterform. Eine der bekanntesten Eigenschaften von Pfisterformen ist etwa ihre Rundheit, das heißt ist $\mathfrak{b}$ eine bilineare Pfisterform und φ eine quadratische Pfisterform, so gilt $a \in D_F(\mathfrak{b})$ bzw. $b \in D_F(\varphi)$ genau dann, wenn $a\,\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}$ bzw. $b\,\varphi \cong \varphi$ gilt. Man nennt solche Skalare dann Ähnlichkeitsfaktor der Form $\mathfrak{b}$ bzw. φ (siehe etwa [21, Koro. 9.9]). Für uns ist vor allem die Tatsache interessant, dass Pfisterformen stets metabolisch bzw. hyperbolisch über ihrem Funktionenkörper sind. Dieses Resultat ergibt sich sofort aus dem folgenden Lemma, welches sowohl für bilineare, als auch für quadratische Pfisterformen gilt.

Lemma 1.7 *([21, Kor. 6.3, Kor. 9.10]) Bilineare/Quadratische Pfisterformen sind entweder anisotrop oder metabolisch/hyperbolisch.*

1.3 Der Wittring und die Wittgruppe

Wir wollen nun mit Hilfe der untersuchten Formen den Wittring der bilinearen Formen und die Wittgruppe der quadratischen Formen definieren. Wir haben bereits erwähnt, dass sowohl für bilineare, als auch für quadratische Formen das jeweilige Radikal stets als orthogonaler Summand des zugrunde liegenden Vektorraumes aufgefasst werden kann. Aus diesem Grund meinen wir von nun an mit dem Begriff Bilinearform stets eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform. Um nun den Wittring und die Wittgruppe definieren zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der Wittäquivalenz, welcher wie folgt definiert ist.

Definition 1.8 (a) Zwei bilineare Formen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ heißen wittäquivalent, wenn es metabolische Formen M_1, M_2 über F gibt, sodass $\mathfrak{b}_1 \perp M_1 \cong \mathfrak{b}_2 \perp M_2$ gilt.

(b) Zwei nicht singuläre quadratische Formen φ_1, φ_2 heißen wittäquivalent, wenn es hyperbolische Formen H_1, H_2 über F gibt, sodass $\varphi_1 \perp H_1 \cong \varphi_2 \perp H_2$ gilt.

Wittäquivalenz ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der bilinearen und der quadratischen Formen über F. Ihre Äquivalenzklassen werden Wittklassen genannt. Nutzen wir nun die orthogonale Summe zweier Formen, sowie das Tensorprodukt zweier bilinearer Formen bzw. einer bilinearen und einer quadratischen Form als vertreterweise Verknüpfung dieser Klassen, so erhalten wir die folgende Ring- bzw. Gruppenstruktur.

Proposition 1.9 *([38, S. 35-37])*

(a) Die Menge $W(F)$ der Wittklassen der bilinearen Formen über F wird mit den vertreterweisen Verknüpfungen $\perp$ und $\otimes$ zu einem kommutativen Ring mit $1 = [\langle 1 \rangle_b]$ und $0 = [\mathbb{H}_b] = [\mathbb{M}_a]$, genannt der bilineare Wittring von F.

(b) Die Menge $W_q(F)$ der Wittklassen der nicht singulären quadratischen Formen über F wird mit der vertreterweisen Verknüpfung $\perp$ zu einer abelschen Gruppe mit $0 = [\mathbb{H}]$, genannt die

quadratische Wittgruppe von F. Diese kann durch das Tensorprodukt von bilinearen und quadratischen Formen als $W(F)$-Modul aufgefasst werden.

Wie allgemein üblich schreiben wir für die Wittklasse $[\mathfrak{b}]$ einer bilinearen Form kurz $\mathfrak{b}$, falls klar ist, ob die Form oder die Klasse gemeint ist. Analoges gilt dabei auch für die Wittklassen quadratischer Formen.

Wie auch im Fall von Charakteristik ungleich zwei liefert nun die wohldefinierte Abbildung

$$\dim_2 : W(F) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ,\ \mathfrak{b} \mapsto \dim \mathfrak{b} \mod 2$$

einen surjektiven Homomorphismus, dessen Kern wir als Fundamentalideal $I(F)$ von $W(F)$ bezeichnen. Von besonderem Interesse für uns sind dabei die Potenzen $I^n(F) := (I(F))^n$ dieses Ideals. Dabei definieren wir $I^0(F) := W(F)$ und $I^n(F) := \{0\}$ für $n < 0$. Eine erste Eigenschaft dieser Potenzen liefert das folgende Lemma.

Lemma 1.10 *([21, S. 24,53])*

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ wird $I^n(F)$ sowohl als Ideal, als auch additiv von den n-fachen bilinearen Pfisterformen erzeugt und es gilt

$$W(F) \supseteq I(F) \supseteq I^2(F) \supseteq \dots$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ wird $I^nW_q(F) := I^n(F) \otimes W_q(F)$ sowohl als Modul, als auch additiv von den $(n+1)$-fachen quadratischen Pfisterformen erzeugt und es gilt

$$W_q(F) \supseteq IW_q(F) \supseteq I^2W_q(F) \supseteq \dots$$

Im späteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns primär mit den Faktorgruppen $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ bzw. $I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$, sowie dazu isomorphen Gruppen beschäftigen. Aus diesem Grund führen wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Kurzschreibweisen

$$I^n(F)/I^{n+1}(F) := \overline{I^n}(F) \ \text{ und } \ I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) := \overline{I^nW_q}(F)$$

ein. Für eine Form $\mathfrak{b} \in I^n(F)$ schreiben wir dann für die Klasse von $\mathfrak{b}$ in $\overline{I^n}(F)$ kurz $\overline{\mathfrak{b}}$ und eine analoge Notation verwenden wir ebenfalls für den quadratischen Fall. Eine erste genauere Beschreibung dieser Quotienten liefern die Dimensionsabbilung $\dim_2$, die Determinantenabbildung det und die Arf-Invariante Δ. Mittels dieser Abbildungen erhalten wir die Isomorphien

$$\overline{I^0}(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ \ ,\ \ \overline{I}(F) \cong F^*/(F^*)^2 \ \text{ und } \ \overline{W_q}(F) \cong F/\wp(F).$$

Von ähnlichen Beispielen ausgehend formulierte Milnor im Jahr 1970 mit den Worten „I do not know of any examples for which the homomorphism [...] fails to be bijectiv“ als erster Mathematiker die Vermutung, dass (im Fall Charakteristik ungleich zwei) die Struktur der Quotienten $\overline{I^n}(F)$ mit denen bestimmter Galoiskohomologiegruppen mit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-Koeffizienten übereinstimmt. Um genauer zu sein formulierte er seine Vermutung mittels der in Kapitel 4 definierten Milnor-K-Gruppen, siehe dazu [35]. Eine positive Antwort dieser Vermutung lieferte im Jahr 1996 Voevodsky in [36]. Allerdings konnte eine analoge Aussage im Fall von Charakteristik zwei im Jahr 1982 von Kato in [31] bereits 14 Jahre früher bewiesen werden.

Neben der Milnorvermutung ist eines der bekanntesten Resultate bezüglich der Potenzen des Fundamentalideals der Arason-Pfister Hauptsatz. Für uns wird er ein wichtiger Mechanismus sein, mit dessen Hilfe wir die Ergebnisse aus den Kapiteln 5, 6 und 7 auf bilineare und quadratische Formen übertragen können.

Theorem 1.11 *([21, Theo. 23.7, Cor. 23.8],[13, Satz 4.1, Satz 4.2])*

(a) Ist $\mathfrak{b}$ eine anisotrope bilineare Form in $I^n(F)$, so ist $\dim \mathfrak{b} \geq 2^n$. *Insbesondere ist damit* $\bigcap_{n\geq 0} I^n(F) = \{0\}$.

(b) Ist φ eine anisotrope nicht singuläre Form in $I^nW_q(F)$, so ist $\dim \varphi \geq 2^{n+1}$. *Insbesondere ist damit* $\bigcap_{n\geq 0} I^nW_q(F) = \{0\}$.

Das klare Hauptziel dieser Arbeit ist es das Verhalten von $W(F)$ und $\overline{I^n}(F)$ bzw. $W_q(F)$ und $\overline{I^nW_q}(F)$, sowie anderen verwandten algebraischen Strukturen unter Körpererweiterungen zu studieren. Weiter wollen wir die Formen klassifizieren, welche unter einer gegebenen Erweiterung K/F metabolisch bzw. hyperbolisch werden. Darum definieren wir zunächst für eine Körpererweiterung K/F, einen bilinearen Raum $(\mathfrak{b}, V)$ und einen quadratischen Raum (φ, V) die Räume

$$\mathfrak{b}_K := (\mathfrak{b}, V)_K := (\mathfrak{b} \otimes K, V \otimes K) \quad \text{und} \quad \varphi_K := (\varphi, V)_K := (\varphi \otimes K, V \otimes K).$$

Die Form $\mathfrak{b}_K$ entsteht also aus der Form $\mathfrak{b}$ durch eine Skalarerweiterung. Analoges gilt dabei auch für die Form φ_K. Damit sind wir nun in der Lage, den bilinearen und den quadratischen Wittkern zu definieren.

Definition 1.12 Es sei K/F eine Körpererweiterung. Dann definieren wir

- den bilinearen Wittkern $W(K/F) := \ker(\ \iota : W(F) \to W(K)\ )$;
- den quadratischen Wittkern $W_q(K/F) := \ker(\ \iota : W_q(F) \to W_q(K)\ )$;
- den graduierten bilinearen Wittkern $\overline{I^n}(K/F) := \ker(\ \iota : \overline{I^n}(F) \to \overline{I^n}(K)\ )$;
- den graduierten quadratischen Wittkern $\overline{I^nW_q}(K/F) := \ker(\ \iota : \overline{I^nW_q}(F) \to \overline{I^nW_q}(K)\ )$.

Zusätzlich definieren wir noch die Kerne

$$I^n(K/F) := \ker(\ \iota : I^n(F) \to I^n(K)\ ) \quad \text{und} \quad I^nW_q(K/F) := \ker(\ \iota : I^nW_q(F) \to I^nW_q(K)\ ).$$

Dabei bezeichnet ι die jeweilige, durch Skalarerweiterung induzierte, kanonische Einbettung.

Eine vollständige Liste der bereits bekannten Wittkerne würde an dieser Stelle diese Arbeit unnötig verlängern, weshalb wir auf [20] oder [29], sowie die einschlägigen Quellen für eine kurze Übersicht der bekannten Wittkerne verweisen wollen.

1.4 Funktionenkörpererweiterungen

Eine der interessantesten Körpererweiterungen unter denen man bilineare und quadratische Formen studieren kann, sind die sogenannten Funktionenkörpererweiterungen bilinearer und quadratischer Formen. Diese wollen wir in diesem Abschnitt einführen und ihre grundlegenden Eigenschaften festhalten. Dazu zunächst das folgende Lemma.

Lemma 1.13 *([33, Prop. 3]) Es sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über F mit zugehörigem Polynom $\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in F[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ genau dann reduzibel in $F[X_1, \ldots, X_n]$, wenn $\varphi \cong \mathbb{H} \perp (n-2) \times \langle\, 0 \,\rangle$ oder $\varphi \cong \langle\, a \,\rangle \perp (n-1) \times \langle\, 0 \,\rangle$ für ein $a \in F$ gilt.*

Mit dieser Hilfsaussage definieren wir dann den Funktionenkörper wie folgt.

Definition 1.14 (a) Es sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über F in den Variablen $X := (X_1, \ldots, X_n)$. Ist $\varphi(X)$ irreduzibel in $F[X]$, so definieren wir den Funktionenkörper von φ als

$$F(\varphi) := \mathrm{Quot}\,(\ F[X]/\,(\varphi(X))\ )\,.$$

Ist $\varphi(X)$ reduzibel in $F[X]$, so definieren wir $F(\varphi) := F$.

(b) Für eine bilineare Form $\mathfrak{b}$ definieren wir $F(\mathfrak{b}) := F(\varphi_{\mathfrak{b}})$.

Um das Verhalten bilinearer Formen unter Funktionenkörpern einer weiteren bilinearen Form zu studieren, müssen wir uns also mit den Funktionenkörpern total singulärer Formen befassen. Dies wollen wir ebenfalls in Kapitel 2 in einem allgemeineren Kontext formulieren. Einige Eigenschaften von Funktionenkörpern quadratischer Formen sind in der folgenden Proposition aufgeführt.

Proposition 1.15 *([21, Prop. 22.9]) Es seien φ, ψ reguläre quadratische Formen über F.*

(a) Ist $\varphi \cong a\psi$ für ein $a \in F^*$, so gilt $F(\varphi) = F(\psi)$.

(b) Gilt $\dim \varphi \geq 2$, so ist die Form $\varphi_{F(\varphi)}$ isotrop.

(c) Ist das zu φ gehörende Polynom $\varphi(X) \in F[X]$ irreduzibel in $F[X]$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Form φ ist isotrop.

(ii) Die Erweiterung $F(\varphi)/F$ ist rein transzendent.

Man beachte, dass die Proposition 1.15(c) für total singuläre Formen im Allgemeinen falsch ist. Eine Untersuchung von Funktionenkörpern isotroper bilinearer Formen liefert also immer noch interessante Ergebnisse.

Kapitel 2

Quasilineare p-Formen

Nachdem wir uns nun zur Definition der Wittgruppe mit nicht singulären quadratischen Formen befasst haben, wollen wir in diesem Kapitel das andere Extrem der quadratischen Formen, die total singulären Formen studieren. Diese spielen für uns eine zentrale Rolle, da Funktionenkörper bilinearer Formen $\mathfrak{b}$ mit Hilfe ihrer polaren Form $\varphi_{\mathfrak{b}}$, also mittels einer total singulären Form konstruiert werden.

Betrachtet man nun die definierenden Eigenschaften einer total singulären Form, so liegt es nahe diese auch auf Körper beliebiger Charakteristik $p > 0$ zu verallgemeinern. Die so entstehenden p-Formen wurden von Hoffmann in [24] im Jahr 2004 eingeführt und studiert. Da in dieser Arbeit einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften der p-Formen ausreichen, verweisen wir für eine tiefer liegende Analyse auf diese Quelle. Weitere Resultate dieser Thematik ergeben sich dann etwa in [41] oder für den Fall $p = 2$ in [27] oder [28].

Wir werden nun auch unsere Grundvoraussetzungen aus dem vorangegangen Kapitel verallgemeinern. Von nun an und für alle folgenden Kapitel sei, wenn nicht anders beschrieben, F stets ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Weiterhin seien alle auftretenden Vektorräume endlich dimensional.

2.1 Grundlegende Definitionen

Beginnen wir damit, die definierenden Eigenschaften einer total singulären Form zu verallgemeinern.

Definition 2.1 Es sei V ein F-Vektorraum. Eine quasilineare p-Form φ auf V, oder kurz p-Form auf V, ist eine Abbildung $\varphi : V \to F$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt

- $\varphi(\lambda v) = \lambda^p \varphi(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in F$;
- $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.

Ferner definieren wir für eine p-Form φ auf V ihre dargestellten Elemente durch die Mengen

$$D_F(\varphi) := \{\varphi(v) \mid v \in V,\ \varphi(v) \neq 0\} \text{ und } D_F^0(\varphi) = D_F(\varphi) \cup \{0\}.$$

Wir beschreiben φ kurz als p-Form über F, wenn eine genaue Beschreibung des Vektorraums V nicht notwendig ist. Analog zum ersten Kapitel definieren wir die Dimension einer p-Form durch die Dimension des zugrunde liegenden Vektorraumes und nennen φ isotrop, wenn es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $\varphi(v) = 0$, ansonsten anisotrop. Definition 2.1 zeigt dann auch sofort, dass 2-Formen nichts anderes als total singuläre quadratische Formen sind.

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des Vektorraums V und φ eine p-Form auf V, so ergibt sich für jedes $v \in V$ mit Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ für passende $x_i \in F$ sofort $\varphi(v) = \sum_{i=1}^n x_i^p \varphi(v_i)$. Wir können also analog zu Kapitel 1 wieder jede p-Form als homogenes Polynom $\sum_{i=1}^n a_i X_i^p$ in $F[X_1, \ldots, X_n]$ auffassen. Umgekehrt definiert auch jedes Polynom dieser Art wieder eine p-Form über F.

Da die Frage nach einer Diagonalisierung von p-Formen überflüssig ist, schreiben wir für eine p-Form auf dem Vektorraum V mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ kurz $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_p$, wenn $\varphi(v_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Da diese Darstellung natürlich abhängig von der Wahl der Basis von V ist, setzen wir die folgende Definition.

Definition 2.2 Es sei φ eine p-Form auf V und ψ eine p-Form auf U. Die Formen φ und ψ heißen isomorph, wenn es einen Vektorraumisomorphismus $L : V \to U$ mit $\psi(L(v)) = \varphi(v)$ für alle $v \in V$ gibt. Wir schreiben dann kurz $\varphi \cong \psi$.

Wir wollen nun auf dem Raum der p-Formen über F analog zu Kapitel 1 noch eine Addition $\perp$ und eine Multiplikation $\otimes$ definieren.

Definition 2.3 Es sei φ eine p-Form auf V und ψ eine p-Form auf U. Dann definieren wir

(a) die Summe $\varphi \perp \psi$ auf $V \oplus U$ durch $(\varphi \perp \psi)(v + u) = \varphi(v) + \psi(u)$ für alle $v \in V,\ u \in U$;

(b) das Produkt $\varphi \otimes \psi$ auf $V \otimes U$ durch $(\varphi \otimes \psi)(\sum_i v_i \otimes u_i) = \sum_i \varphi(v)\psi(u)$ für alle endlichen Summen mit $v_i \in V$ und $u_i \in U$.

Offensichtlich sind diese Verknüpfungen wohldefiniert und für p-Formen $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_p$ und $\psi = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle_p$ ergibt sich sofort

$$\varphi \perp \psi = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rangle_p \quad \text{und} \quad \varphi \otimes \psi = \perp_{i,j} \langle a_i b_j \rangle_p \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, m.$$

Unglücklicherweise existiert keine Kürzungsregel für p-Formen, da natürlich $\langle 1, 1 \rangle_p \cong \langle 1, 0 \rangle_p$, aber $\langle 1 \rangle_p \not\cong \langle 0 \rangle_p$ gilt. Wir erhalten also für p-Formen auf diese Weise keine zum Wittring analoge Ringstruktur.

Die Frage nach der Isomorphie zweier p-Formen lässt sich sehr gut mit Hilfe der Menge der dargestellten Elemente $D_F(\varphi)$ beantworten. Dazu halten wir zunächst fest, dass für eine p-Form $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_p$ mit $a_1, \ldots, a_n \in F$ stets

$$D_F^0(\varphi) = \mathrm{sp}_{F^p}(a_1, \ldots, a_n)$$

gilt. Die Menge $D_F^0(\varphi)$ ist also ein endlich dimensionaler Untervektorraum des F^p-Vektorraums F, mit dessen Hilfe wir die Isomorphie von p-Formen wie folgt klassifizieren können.

Proposition 2.4 *([24, Prop. 2.6]) Es seien $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_p$ und $\psi = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle_p$ p-Formen über F mit $a_i, b_j \in F$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt*

(a) Ist $\dim_{F^p}(D_F^0(\varphi)) = k \leq n$ und ist $c_1, \ldots, c_k$ eine F^p-Basis von $D_F^0(\varphi)$, so ist $\varphi \cong \langle c_1, \ldots, c_k, 0, \ldots, 0 \rangle_p$. Insbesondere existiert also für jede p-Form φ ein anisotrope p-Form

φ_{an} mit $\varphi \cong \varphi_{an} \perp (\dim\varphi - \dim\varphi_{an}) \times \langle\, 0 \,\rangle_p$. Die Form φ_{an} ist dabei bis auf Isomorphie eindeutig durch φ bestimmt und heißt der anisotrope Anteil von φ. Der Wert $i_d(\varphi) := \dim\varphi - \dim\varphi_{an}$ heißt der Defekt von φ.

(b) Genau dann ist $\varphi \cong \psi$, wenn $n = m$ und $D_F^0(\varphi) = D_F^0(\psi)$ gilt.

Wegen des Basisauswahlsatzes der linearen Algebra können die $c_1, \ldots, c_k$ aus Proposition 2.4 dabei stets aus der Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ gewählt werden. Schreiben wir analog zu Kapitel 1 kurz φ_K wenn wir die p-Form φ unter einer Körpererweiterung K/F betrachten, so zeigt dieses Resultat also, dass für p-Formen jede Körpererweiterung exzellent ist. Diese Eigenschaft von Körpererweiterungen besitzt damit im Kontext der p-Formen keinerlei beschreibenden Wert.

2.2 Normkörper, Normgrad und p-Pfisterformen

Eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Beschreibung der bilinearen Wittkerne von mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen von bilinearen Formen wird der Normkörper einer p-Form sein. Darum wollen wir diesen Begriff in diesem Abschnitt einführen und einige der für uns wichtigsten Eigenschaften aufzeigen. Beginnen wir zunächst mit der Definition.

Definition 2.5 Es sei φ eine von Null verschiedene p-Form über F. Dann definieren wir den Normkörper der Form φ als

$$N_F(\varphi) := F^p\left(\frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in D_F(\varphi)\right).$$

Weiter bezeichnen wir die F^p-Dimension des Normkörpers $N_F(\varphi)$ als den Normgrad der Form φ und schreiben für diesen kurz

$$\mathrm{ndeg}_F(\varphi) := [N_F(\varphi) : F^p].$$

Sind φ und ψ zwei p-Formen über F für die ein $x \in F^*$ mit $\varphi \cong x\psi$ existiert, so erhalten wir aus der Definition 2.5 sofort $N_F(\varphi) = N_F(\psi)$. Es sei zudem angemerkt, dass der Normgrad einer p-Form φ stets eine p-Potenz ist, da $N_F(\varphi)$ eine rein inseparable Erweiterung über F^p vom Exponent 1 ist.

Um den Normkörper etwas greifbarer zu machen, erhalten wir aus einer einfachen Rechnung das folgende Ergebnis.

Lemma 2.6 *([24, Lem. 4.2]) Es sei $\varphi = \langle\, a_0, \ldots, a_n \,\rangle_p$ eine $(n+1)$-dimensionale p-Form über F mit $a_0, \ldots, a_n \in F$, $a_0 \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $N_F(\varphi) = F^p(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0})$.*

Wir wollen diesen kurzen Abschnitt nun mit der Betrachtung der sogenannten p-Pfisterformen abschließen. Diese sind wie im vorangegangen Kapitel ein spezieller Typ von p-Formen und werden wie folgt definiert.

Definition 2.7 Es sei φ eine p-Form über F. Wir bezeichnen φ als eine 1-fache quasi p-Pfisterform, oder kurz eine 1-fache p-Pfisterform, wenn es ein $a \in F^*$ mit $\varphi \cong \langle\, 1, a, \ldots, a^{p-1} \,\rangle_p$ gibt und schreiben dann kurz $\varphi = \langle\langle\, a \,\rangle\rangle_p$. Weiter nennen wir φ eine n-fache quasi p-Pfisterform, oder kurz eine n-fache p-Pfisterform, wenn es $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ gibt mit $\varphi \cong \langle\langle\, a_1 \,\rangle\rangle_p \otimes \ldots \otimes \langle\langle\, a_n \,\rangle\rangle_p$ und schreiben dann kurz $\varphi \cong \langle\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle\rangle_p$. Die 0-fache p-Pfisterform definieren wir als $\langle\, 1 \,\rangle_p$.

Offensichtlich besitzen n-fache p-Pfisterformen stets die Dimension p^n und es gilt

$$\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,\ldots,p-1\}^n} \langle a_1^{i_1} \ldots a_n^{i_n} \rangle_p .$$

Die $(p^n - 1)$-dimensionale Form

$$\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p' = \bigoplus_{0\neq(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,\ldots,p-1\}^n} \langle a_1^{i_1} \ldots a_n^{i_n} \rangle_p$$

wollen wir als den reinen Anteil der p-Pfisterform $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p$ bezeichnen.

Pfisterformen sind neben vielen weiteren Gründen deshalb sehr interessant, da sich ihr Normkörper leicht berechnen lässt. Mit Lemma 2.6 erhält man aus der Definition einer p-Pfisterform sofort $N_F(\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p) = F^p(a_1, \ldots, a_n)$. Insbesondere ist also die n-fache p-Pfisterform $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p$ genau dann anisotrop, wenn $\mathrm{ndeg}_F(\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p) = \dim(\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p)$ gilt.

Für eine weitaus genauere Charakterisierung von p-Pfisterformen und die Bestimmung weiterer interessanter Eigenschaften, insbesondere mit Hilfe von sogenannten quasi Pfisternachbarn, verweisen wir auf [24, Chap. 4] oder auf [27] für den Fall $p = 2$.

2.3 Funktionenkörper von p-Formen

Als letzten Punkt zur Theorie der p-Formen wollen wir uns nun noch mit dem Funktionenkörper einer p-Form befassen. Wir haben bereits in Abschnitt 2.1 gesehen, dass eine p-Form wieder als homogenes Polynom aufgefasst werden kann. Aus diesem Grund wollen wir nun ähnlich wie in Kapitel 1 vorgehen, um Funktionenkörper von p-Formen zu definieren. Zunächst gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.8 *([24, Lem. 7.1]) Es sei $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_p$ eine von Null verschiedene p-Form über F. Dann ist das Polynom $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i X_i^p \in F[X_1, \ldots, X_n]$ genau dann irreduzibel in $F[X_1, \ldots, X_n]$, wenn $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) > 1$ ist.*

Mit dieser Tatsache gehen wir nun ähnlich wie in Abschnitt 1.4 vor und definieren den Funktionenkörper einer p-Form wie folgt.

Definition 2.9 Es sei $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_p$ eine von Null verschiedene p-Form über F und $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Wir definieren den Funktionenkörper $F(\varphi)$ von φ dann wie folgt.

- Ist $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 1$, so setze $F(\varphi) := F(X)$;
- Ist $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) > 1$, so definieren wir $F(\varphi) := \mathrm{Quot}\,(\,F[X]/(\varphi(X))\,)$.

Für den Fall $p = 2$ und $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) > 1$ fällt diese Definition also mit der Definition des Funktionenkörpers einer total singulären quadratischen Form, das heißt mit dem Funktionenkörper einer bilinearen Form zusammen. Da diese Definition selbst zunächst etwas unhandlich wirkt, liefern die folgenden Lemmata einen genaueren Einblick in die Struktur dieser Erweiterung.

Lemma 2.10 *([24, Rem. 7.4]) Es seien φ, ψ zwei von Null verschiedene p-Formen über F.*

(a) Ist $\dim\varphi \geq 2$, so ist $\varphi_{F(\varphi)}$ isotrop.

(b) Ist $\varphi \cong x\psi$ für ein $x \in F^*$, so gilt $F(\varphi) = F(\psi)$.

(c) Ist $\varphi = \psi \perp t\times\langle 0 \rangle_p$, so gilt $F(\varphi) = F(\psi)(Y_1, \ldots, Y_t)$ mit Variablen $Y_1, \ldots, Y_t$. Insbesondere ist $F(\varphi)$ eine rein transzendente Erweiterung von $F(\varphi_{an})$ vom Transzendenzgrad $i_d(\varphi)$.

Lemma 2.10 zeigt also auch, dass der Funktionenkörper isotroper p-Formen nicht zwangsläufig eine rein transzendente Erweiterung von F sein muss. Die für uns wohl wichtigste Beschreibung des Funktionenkörpers liefert nun die folgende Aussage.

Lemma 2.11 *([24, Rem. 7.4]) Es sei $\varphi = \langle 1, a_1, \ldots, a_n \rangle_p$ eine von Null verschiedene p-Form über F der Dimension $n+1$ und mit Normgrad $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) > 1$. Dann besitzt $F(\varphi)$ den Transzendenzgrad n über F und es gilt*

$$F(\varphi) \cong F(X_1, \ldots, X_n)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cong F(X_1, \ldots, X_n)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{a_i} X_i\right).$$

Der Funktionenkörper einer p-Form φ kann also realisiert werden als eine rein transzendente Erweiterung vom Transzendenzgrad $\dim\varphi - 1$, gefolgt von einer rein inseparablen Erweiterung vom Grad p und Exponent 1. Man beachte dabei, dass die Bedingung $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) > 1$ gerade aussagt, dass $\sum a_i X_i^p \notin F(X_1, \ldots, X_n)^p$ gilt.

Ziel wird es später sein, verschiedene algebraische Strukturen unter mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen zu studieren. Dazu seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ von Null verschiedene p-Formen über F. Mit $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ bezeichnen wir dann den Körper, der durch sukzessives Bilden der jeweiligen Funktionenkörper der Formen φ_i entsteht. Definieren wir den Körperturm $F_0 \subset F_1 \subset \ldots$ durch $F_0 = F$ und $F_i = F_{i-1}(\varphi_i)$, so entspricht $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ also dem Körper F_r.

Ähnlich können wir auch einen weiteren Körperturm $L_0 \subset L_1 \subset \ldots$ wie folgt definieren. Wir setzen $L_0 = F$ und $L_i = L_{i-1}(((\varphi_i)_{L_{i-1}})_{an})$. Definieren wir nun L als den Körper L_r, so erhalten wir aus Lemma 2.10(c) und Lemma A.1, dass $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ eine rein transzendente Erweiterung von L ist. Später zeigt sich noch, dass die rein transzendente Erweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/L$ keinen Einfluss auf die in den Kapiteln 7 und 8 berechneten Kerne besitzt und aus diesem Grund die bilinearen Wittkerne der Erweiterungen L/F und $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F$ übereinstimmen. Wir werden uns deshalb der Einfachheit halber auf die Untersuchung der Erweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F$ beschränken.

Eine typische Frage bezüglich der Funktionenkörper von Formen ist, unter welchen Bedingungen der Körper F in $F(\varphi)$ für eine p-Form φ algebraisch abgeschlossen ist. Antwort darauf liefert das folgende Resultat, welches wir später in einem anderen Kontext wieder aufgreifen werden.

Proposition 2.12 *([24, Prop. 7.6]) Es sei φ eine von Null verschiedene p-Form über F der Dimension $n+1 \geq 2$ und mit Normgrad $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) > 1$. Dann ist F genau dann algebraisch abgeschlossen in $F(\varphi)$, wenn $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) \geq p^2$ gilt.*
Ist $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = p$ und $N_F(\varphi) = F^p(a)$ für ein $a \in F \setminus F^p$, so ist $F(\sqrt[p]{a})$ der algebraische Abschluss von F in $F(\varphi)$ und es gilt $F(\varphi) \cong F(\sqrt[p]{a})(X_1, \ldots, X_n)$ für Variablen $X_1, \ldots, X_n$.

Es seien nun $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ von Null verschiedene p-Formen mit $\dim\varphi_i \geq 2$, $\mathrm{ndeg}_F(\varphi_i) = p$ und $N_F(\varphi_i) = F^p(a_i)$ mit $a_i \in F \setminus F^p$ für $i = 1, \ldots, r$. Wenden wir dann Proposition 2.12 auf die mehrfache Funktionenkörpererweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ an, so folgt, dass $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ eine rein transzendente Erweiterung des Körpers $F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_r})$ ist. Dabei muss allerdings nicht zwangsläufig $[F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_r}) : F] = p^r$ gelten. Genauer gilt $[F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_r}) : F] = p^r$ genau dann, wenn $\mathrm{ndeg}_{F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})}(\varphi_i) = p$ für alle $i = 2, \ldots, r$ ist.

Kapitel 3

Differentialformen

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit den Differentialformen, den „Hauptakteuren“ dieser Arbeit befassen und die notwendigen Grundlagen in diesem Themengebiet zusammentragen. Dabei befassen wir uns genau betrachtet nur mit einem Spezialfall der Theorie der Differentiale, den sogenannten F^p-Ableitungen. Die allgemeinen Differentiale werden unter anderem dazu verwendet inseparable Körpererweiterungen zu untersuchen. Auf diese Weise entsteht eine Theorie für inseparable Erweiterungen, die in einigen Punkten ähnlich zur Galoistheorie für galoische Körpererweiterungen ist. Zudem finden Differentiale auch viele Anwendungen in anderen Bereichen der Mathematik, etwa der Differentialgeometrie. Da diese für uns allerdings keine Rolle spielen, werden wir uns hier auf die für uns relevante Theorie der Differentialformen beschränken. Für eine deutlich allgemeinere Einführung in die Theorie der Differentiale verweisen wir auf [34, Kap. 9]. Typische Quellen für eine umfangreichere Einführung in die Theorie der hier verwendeten Differentialformen sind etwa [18], [19], [23] und [31]. Wir erinnern noch einmal daran, dass F stets einen Körper der Charakteristik $p > 0$ ist.

3.1 p-Unabhängigkeit und p-Basen

Bevor wir uns mit den Differentialformen selbst befassen können, müssen wir ein Hilfsmittel aus der Körpertheorie einführen, welches spätere Rechnungen und Beweise erst ermöglichen und vereinfachen wird. Darum beginnen wir zunächst mit dem Begriff der p-Unabhängigkeit, welcher wie folgt definiert ist.

Definition 3.1 Es sei $\mathcal{A} \subset F$ eine Teilmenge von F. Die Menge $\mathcal{A}$ heißt p-unabhängig über F, wenn $[F^p(a_1, \dots, a_k) : F^p] = p^k$ für jede endliche Teilmenge $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathcal{A}$ gilt. Ansonsten heißt $\mathcal{A}$ p-abhängig. Eine p-unabhängige Menge $\mathcal{B} \subset F$ mit $F = F^p(\mathcal{B})$ heißt p-Basis von F.

Mit dieser Definition sind die Elemente $a_1, \dots, a_k \in F$ also genau dann p-unabhängig über F, wenn $[F^p(a_1, \dots, a_k) : F^p] = p^k$ gilt, das heißt wenn für $(i_1, \dots, i_k) \in \{0, \dots, p-1\}^k$ die Elemente $a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}$ eine F^p-Basis von $F^p(a_1, \dots, a_k)$ bilden. Insbesondere ist in diesem Fall die p-Pfisterform $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle_p$ also anisotrop. Man beachte außerdem, dass der Körpergrad $[F^p(\mathcal{A}) : F^p]$ für jede endliche Teilmenge $\mathcal{A} \subset F$ stets eine p-Potenz ist, da die Körpererweiterung $F^p(\mathcal{A})/F^p$ eine rein inseparable Erweiterung vom Exponent 1 ist. Eben diesen Körpergrad wollen wir mittels der folgenden Definition genauer beschreiben.

Definition 3.2 Es sei $\mathcal{A} \subset F$ eine Menge. Wir definieren den p-Grad von $\mathcal{A}$ durch

$$p\text{-}\deg_F(\mathcal{A}) := \log_p([F^p(\mathcal{A}) : F^p]),$$

falls $[F^p(\mathcal{A}) : F^p]$ endlich ist. Ansonsten setzen wir $p\text{-}\deg_F(\mathcal{A}) = \infty$.

Der Begriff der p-Unabhängigkeit geht zurück auf Teichmüller, siehe dazu [42, S.368]. Für Teichmüller war vor allem die Mächtigkeit einer p-Basis $\mathcal{B}$ eines Körpers F von Interesse, da dieser im Falle $|\mathcal{B}| < \infty$ eine Invariante des Körpers F ist und somit ein Maß generiert welches angibt, wie weit ein Körper davon entfernt ist perfekt zu sein. Man kann in diesem Kontext perfekte Körper also als diejenigen Körper klassifizieren, die eine leere p-Basis besitzen. Aus diesem Grund bezeichnete Teichmüller den Wert $|\mathcal{B}|$ als den Unvollkommenheitsgrad des Körpers F.

Die p-unabhängigen Teilmengen des Körpers F erfüllen außerdem alle Eigenschaften eines sogenannten finitären Matroids mit Rangfunktion $p\text{-}\deg_F$. Insbesondere sind also die üblichen Existenz-, Austausch-, Auswahl- und Ergänzungssätze erfüllt, welche sich in unserem Kontext wie folgt formulieren lassen.

Lemma 3.3 *([22, Cor. A 8.9])*

(a) Jeder Körper F besitzt eine p-Basis.

(b) Sind $a_1, \ldots, a_k \in F$ p-unabhängig, so existiert stets eine p-unabhängige Menge $\mathcal{A} \subset F$ so, dass $\{a_1, \ldots, a_k\} \cup \mathcal{A}$ eine p-Basis von F ist.

(c) Es seien $a_1, \ldots, a_k \in F$ p-unabhängig und $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Dann existieren $i_1, \ldots, i_k \in I$ so, dass $(\mathcal{B} \setminus \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}\}) \cup \{a_1, \ldots, a_k\}$ eine p-Basis von F ist.

(d) Ist $\mathcal{A}$ ein p-Erzeugendensystem von F, das heißt gilt $F^p(\mathcal{A}) = F$, so existiert eine p-Basis $\mathcal{B}$ von F mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Wir werden später noch sehen, dass sich mit Hilfe von Differentialformen alle Aussagen aus Lemma 3.3 auf die analogen Aussagen für F-Vektorräume aus der linearen Algebra zurückführen lassen.

Um den Begriff der p-Unabhängigkeit später sinnvoll für die Berechnung verschiedener Gruppen unter Körpererweiterungen zu verwenden, wollen wir nun diesen einführenden Abschnitt damit abschließen noch die wichtigsten Verhaltensweisen der p-Unabhängigkeit unter Körpererweiterungen zusammenzufassen. Beginnen wir zunächst mit dem Verhalten unter modularen rein inseparablen Erweiterungen.

Lemma 3.4 *([39, Satz 9]) Es sei $b \in F$ und $M \subset F \setminus \{b\}$. Ist $\{b\} \cup M$ p-unabhängig über F, so ist $\{\sqrt[p^e]{b}\} \cup M$ p-unabhängig über dem Körper $F(\sqrt[p^e]{b})$ für alle $e \in \mathbb{N}$.*

Damit erhalten wir sofort das folgende, für uns später sehr wichtige Korollar.

Korollar 3.5 *Es seien $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Sind die $b_1, \ldots, b_r$ p-unabhängig über F und ist $\mathcal{B}$ eine $b_1, \ldots, b_r$ enthaltende p-Basis von F, so ist*

$$(\mathcal{B} \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}) \cup \{\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r}\}$$

eine p-Basis des Körpers $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$.

Das Verhalten von p-Unabhängigkeit unter separablen Körpererweiterungen ist dabei deutlich einfacher. Eine einfache Rechnung zeigt sofort das folgende Resultat.

Lemma 3.6 *([3, Lem. 2.1], [24, Prop. 5.3]) Es sei S/F eine separable Körpererweiterung.*

(a) Sind $a_1, \dots, a_k \in F$ p-unabhängig über F, so sind $a_1, \dots, a_k$ ebenfalls p-unabhängig über S.

(b) Ist $F(X_1, \dots, X_n)/F$ eine rein transzendente Erweiterung von F und ist $\mathcal{B}$ eine p-Basis von F, so ist $\mathcal{B} \cup \{X_1, \dots, X_n\}$ eine p-Basis von $F(X_1, \dots, X_n)$.

(c) Ist S/F eine endliche separable Erweiterung und ist $\mathcal{B}$ eine p-Basis von F, so ist $\mathcal{B}$ ebenfalls eine p-Basis von S.

3.2 Der Raum der Differentialformen

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Differentialformen einführen und ihre grundlegenden Eigenschaften zusammenfassen, sowie einige für uns im späteren Verlauf wichtige Hilfsaussagen aufführen.

Definition 3.7 Für Elemente $x \in F$ definieren wir Symbole $\mathrm{d}x := \mathrm{d}(x)$ so, dass für alle $a, b \in F$ die Relationen

$$\mathrm{d}(a + b) = \mathrm{d}a + \mathrm{d}b \quad \text{und} \quad \mathrm{d}(ab) = a\,\mathrm{d}b + b\,\mathrm{d}a$$

erfüllt sind. Wir definieren dann weiter $\mathrm{d}F := \{\mathrm{d}a \mid a \in F\}$ und $\Omega^1(F) := \mathrm{sp}_F(\mathrm{d}F)$. Der Raum $\Omega^1(F)$ heißt der Raum der 1-fachen Differentialformen.

Eine simple Rechnung zeigt sofort, dass $\mathrm{d}(a^p) = 0$ für alle $a \in F$ gilt. Mit Definition 3.7 ist dann auch sofort klar, dass $\mathrm{d}\colon F \to \Omega^1(F)$, $a \mapsto \mathrm{d}a$ eine wohldefinierte F^p-lineare Abbildung liefert. Zudem wollen wir an dieser Stelle anmerken, dass wir mit der Notation $\Omega^1(F)$ von der üblichen Standardnotation Ω^1_F leicht abweichen. Dies begründen wir damit, dass wir in dieser Arbeit primär mit Körpererweiterungen arbeiten werden und in unserer Notation so den Fokus auf den zugrunde liegenden Körper richten. Zudem ist diese Notation kohärenter zu den noch zu definierenden Standardnotationen der Gruppen $\nu_n(F)$ und $H_p^{n+1}(F)$, siehe dazu Definition 3.13.

Um nun den Raum der n-fachen Differentialformen zu konstruieren, verwenden wir die in Abschnitt A.2 beschriebene äußere Potenz angewandt auf den Vektorraum $\Omega^1(F)$. Damit ergibt sich die folgende Definition.

Definition 3.8 Für $n \geq 2$ definieren wir den Raum der n-fachen Differentialformen durch $\Omega^n(F) := \bigwedge^n \Omega^1(F)$. Weiter setzen wir $\Omega^0(F) = F$ und $\Omega^n(F) = \{0\}$ für $n < 0$.

Ein Wedge-Produkt der Form $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n$ nennen wir elementares Wedge-Produkt, das heißt die elementaren Wedge-Produkte bilden nach Abschnitt A.2 ein F-Erzeugendensystem des F-Vektorraums $\Omega^n(F)$. Differentialformen der Art $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}$ mit $a_1, \dots, a_n \in F^*$ nennen wir logarithmische Differentialformen, oder kurz logarithmische Formen. Der Begriff logarithmisch bezieht sich dabei auf die Eigenschaft, dass für alle $a, b \in F^*$ dann $\frac{\mathrm{d}(ab)}{(ab)} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{\mathrm{d}b}{b}$ gilt, was an das Verhalten des Logarithmus erinnert.

Die oben definierte Abbildung d können wir nun auch für den Fall $n \geq 1$ verallgemeinern, indem wir sie als additive Fortsetzung der Abbildung

$$\mathrm{d}\colon \Omega^n(F) \to \Omega^{n+1}(F)\ ,\ x\,\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \mathrm{d}a_n \mapsto \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n$$

definieren. Auf diese Weise erhalten wir wieder eine wohldefinierte F^p-lineare Abbildung, welche wir ebenfalls für alle $n \in \mathbb{N}$ mit d bezeichnen wollen. Man beachte, dass wegen $\mathrm{d}(1) = 0$ dann $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ gilt. Weiter definieren wir

$$Z^n(F) := \ker(\mathrm{d}\colon \Omega^n(F) \to \Omega^{n+1}(F)) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\Omega^n(F) := \mathrm{im}(\mathrm{d}\colon \Omega^n(F) \to \Omega^{n+1}(F)).$$

Formen in $Z^n(F)$ bezeichnen wir als geschlossene Formen (aus dem englischen „closed“) und Formen in $\mathrm{d}\Omega^n(F)$ nennen wir exakte Formen. Es ist dabei leicht nachzurechnen, dass $\mathrm{d}\Omega^n(F)$ additiv von den elementaren Wedge-Produkten $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{n+1}$ mit $a_1, \ldots, a_{n+1} \in F^*$ erzeugt wird.

Mit Hilfe des Wedge-Produktes als Multiplikation können wir nun ausgehend von den Räumen $\Omega^n(F)$ auch die Algebra der Differentialformen wie folgt definieren.

Definition 3.9 Der Raum $\Omega^*(F) := \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n(F)$ wird mittels der kanonischen Addition und der auf additiven Erzeugern definierten Multiplikation

$$(x\,\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n) \cdot (y\,\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_m) := xy\,\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \mathrm{d}a_n \wedge \mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \mathrm{d}b_m$$

für $x, y, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in F$ zu einer $\mathbb{Z}$-graduierten Algebra, genannt die Algebra der Differentialformen.

Man beachte dabei, dass für $p \neq 2$ die Multiplikation dieser Algebra wegen $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b = -\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}a$ für alle $a, b \in F$ nicht kommutativ ist.

Viele der nachfolgenden Resultate und Zerlegungen sind nicht nur für $\Omega^n(F)$, sondern auch für die Algebra $\Omega^*(F)$ möglich. Um die Rechnungen möglichst simpel zu halten, werden wir uns in dieser Arbeit allerdings auf die Räume $\Omega^n(F)$ beschränken und überlassen es dem Leser, die Resultate der nachfolgenden Kapitel auch für die Algebra der Differentialformen auszuformulieren.

Verknüpfen wir nun die bis hier eingeführten Begriffe, so erhalten wir das folgende Lemma, welches in fast allen der nachfolgenden Kapiteln an verschiedenen Stellen immer wieder Verwendung finden wird.

Lemma 3.10 *([20, Lem. 5.4], [22, Prop. A.8.8])*

(a) Es seien $a_1, \ldots, a_n \in F$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die $a_1, \ldots, a_n$ sind p-unabhängig;

(ii) Es ist $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n \neq 0$;

(iii) Die Formen $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_n$ sind F-linear unabhängig;

(iv) Die p-Pfisterform $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p$ ist anisotrop.

(b) Gilt eine der Bedingungen aus Teil (a) für $a_1, \ldots, a_n \in F$ und sind $b_1, \ldots, b_n \in F$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $F^p(a_1, \ldots, a_n) = F^p(b_1, \ldots, b_n)$;

(ii) $F\,\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n = F\,\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_n$;

(iii) $\mathrm{sp}_F(\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_n) = \mathrm{sp}_F(\mathrm{d}b_1, \ldots, \mathrm{d}b_n)$;

(iv) $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle_p \cong \langle\!\langle b_1, \ldots, b_n \rangle\!\rangle_p$.

Insbesondere gilt also für ein $a \in F$ genau dann $\mathrm{d}a = 0$, wenn $a \in F^p$ ist. Außerdem zeigt Lemma 3.10 ebenfalls, dass wenn F eine endliche p-Basis $\mathcal{B}$ mit $|\,\mathcal{B}\,| = k$ besitzt, dann $\Omega^n(F) = 0$ für alle $n > k$ gilt. Dies erhalten wir sofort aus der Tatsache, dass jede $(k+1)$-elementige Teilmenge von F offensichtlich p-abhängig ist und somit alle Wedge-Produkte der Länge $k+1$ trivial sind. Insbesondere ist in diesem Fall dann $\Omega^k(F)$ nach Lemma 3.10(b) eindimensional.

Den Zusammenhang zwischen p-unabhängigen Elementen in F und F-linear unabhängigen Elementen in $\Omega^1(F)$ wollen wir nun ausnutzen, um mit Hilfe einer p-Basis von F eine Vektorraumbasis von $\Omega^n(F)$ zu definieren. Dazu sei nun $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Zusätzlich können wir stets annehmen, dass I eine wohlgeordnete Indexmenge $I = (I, <)$ ist (dabei verwenden wir den Wohlordnungssatz aus der Mengenlehre). Diese Wohlordnung übertragen wir auf $\mathcal{B}$ durch $c_i < c_j :\Leftrightarrow i < j$ in I. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset \mathcal{B}$ definieren wir dann die folgende Menge von logarithmischen Differentialformen

$$\bigwedge\nolimits_S^n := \left\{ \frac{\mathrm{d}c_{i_1}}{c_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{i_n}}{c_{i_n}} \;\middle|\; c_{i_1}, \ldots, c_{i_n} \in S \text{ mit } i_1 < \ldots < i_n \right\}$$

und konstruieren damit den Untervektorraum $\Omega_S^n(F) := \mathrm{sp}_F(\bigwedge_S^n)$ von $\Omega^n(F)$.

Der Einfachheit halber werden wir von nun an für jede p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F stets voraussetzen, dass die zugehörige Indexmenge I eine wohlgeordnete Menge $I = (I, <)$ ist.

Proposition 3.11 *([20, S. 406]) Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Für jedes $S \subset \mathcal{B}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Elemente aus $\bigwedge_S^n$ linear unabhängig. Weiter ist $\Omega_{\mathcal{B}}^n(F) = \Omega^n(F)$ und insbesondere ist damit $\bigwedge_{\mathcal{B}}^n$ eine F-Basis von $\Omega^n(F)$.*

Im Gegensatz zu anderen Quellen verwenden wir hier logarithmische Differentialformen als Basiselemente, da diese zur Definition einiger noch folgender Abbildungen auf $\Omega^n(F)$ notwendig sind. Aber natürlich liefert für eine p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F durch Umskalierung die Menge

$$\bigwedge\nolimits_{\mathcal{B},0}^n := \{\mathrm{d}c_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}c_{i_n} \mid c_{i_1}, \ldots, c_{i_n} \in \mathcal{B} \text{ mit } i_1 < \ldots < i_n\}$$

ebenfalls eine F-Basis von $\Omega^n(F)$. Diese werden wir in den späteren Kapiteln, insbesondere in Kapitel 5, ebenfalls verwenden.

Um die in Proposition 3.11 beschriebene F-Basis von $\Omega^n(F)$ besser nutzen zu können, wollen wir die Basisvektoren etwas kompakter notieren. Es sei also wieder $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F und damit definieren wir die Menge

$$\Sigma_n := \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I \mid \sigma(i) < \sigma(j) \text{ für } i < j \text{ mit } i, j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Weiter definieren wir für ein $\sigma \in \Sigma_n$ die Form

$$\frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} := \frac{\mathrm{d}c_{\sigma(1)}}{c_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\sigma(n)}}{c_{\sigma(n)}}.$$

Damit ist dann $\bigwedge_{\mathcal{B}}^n = \{\frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ und jedes $\omega \in \Omega^n(F)$ besitzt bezüglich der F-Basis $\bigwedge_{\mathcal{B}}^n$ eine eindeutige Darstellung $\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}$ mit $x_\sigma \in F$, wobei nur endlich viele der x_σ verschieden von Null sind. Wir bezeichnen diese Darstellung dann auch als die eindeutige Darstellung von ω bezüglich $\mathcal{B}$.

Wir wollen nun noch zwei wichtige Abbildungen auf dem Raum der Differentialformen definieren. Dazu sei weiterhin $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Bezüglich dieser p-Basis $\mathcal{B}$ erweitern wir die Forbenius-Abbildung und die Artin-Schreier-Abbildung auf den Raum der Differentialformen durch die Abbildungen

$$\begin{aligned} s_p : \Omega^n(F) \to \Omega^n(F) \ , \ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} &\mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma^p \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \ ; \\ \wp : \Omega^n(F) \to \Omega^n(F) \ , \ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} &\mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (x_\sigma^p - x_\sigma) \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \ . \end{aligned}$$

Dabei ist es notwendig, diese Abbildungen mit Hilfe von logarithmischen Differentialformen zu definieren, da sie sonst wegen der Relation $\mathrm{d}(ab) = a\,\mathrm{d}b + b\,\mathrm{d}a$ nicht wohldefiniert sind. Weiter sind diese Abbildungen natürlich abhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$. Verschiedene Rechnungen zeigen allerdings, dass ein Basiswechsel das Bild einer Form unter den Abbildungen s_p und $\wp$ lediglich durch eine exakte Form abändert. Mit diesem Wissen können wir also die obigen Abbildungen unabhängig von einer Basiswahl wie folgt wohldefinieren.

Lemma 3.12 *([5, S. 365]) Die additiven Fortsetzungen der auf additiven Erzeugern von $\Omega^n(F)$ definierten Abbildungen*

$$\begin{aligned} s_p : \Omega^n(F) \to \Omega^n(F)/\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\,,\ x\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} &\mapsto x^p \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \mod \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) \ , \\ \wp : \Omega^n(F) \to \Omega^n(F)/\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\,,\ x\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} &\mapsto (x^p - x) \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \mod \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) \end{aligned}$$

liefern wohldefinierte (additive) Homomorphismen.

Das Bild von $\omega \in \Omega^n(F)$ unter s_p bezeichnen wir kurz mit $\omega^{[p]}$ und definieren rekursiv $\omega^{[p^k]} := (\omega^{[p]})^{[p^{k-1}]}$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich dann ebenfalls $\wp(\omega) = \omega^{[p]} - \omega$. Weiter schreiben wir für das Bild der Abbildung s_p kurz $\Omega^n(F)^{[p]}$ bzw. $\Omega^n(F)^{[p^k]}$ und für das Bild von $\wp$ schreiben wir $\wp\Omega^n(F)$. Für $k \in \mathbb{N}$ und eine fest gewählte p-Basis $\mathcal{B}$ von F ist dann also $\Omega^n(F)^{[p^k]} = \mathrm{sp}_{F^{p^k}}(\bigwedge_{\mathcal{B}}^n)$.

Betrachten wir nun noch die in Lemma 3.12 definierte Artin-Schreier-Abbildung $\wp$ etwas genauer. Für uns wird sowohl der Kern, als auch der Kokern dieser Abbildung eine zentrale Rolle in den kommenden Kapiteln einnehmen. Aus diesem Grund setzen wir die folgende Definition.

Definition 3.13 Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für die in Lemma 3.12 definierte verallgemeinerte Artin-Schreier-Abbildung $\wp : \Omega^n(F) \to \Omega^n(F)/\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)$ definieren wir die additiven Gruppen

$$\begin{aligned} \nu_n(F) &:= \ker(\wp) = \{\omega \in \Omega^n(F) \mid \wp(\omega) \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\}; \\ H_p^{n+1}(F) &:= \mathrm{coker}(\wp) = \Omega^n(F)/\left(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\right) . \end{aligned}$$

Für die Nebenklasse von $\omega \in \Omega^n(F)$ in $H_p^{n+1}(F)$ schreiben wir kurz $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(F)$.

Für $n = 0$ vereinfachen sich die Definitionen aus 3.13 sofort zu $\nu_0(F) = \mathbb{F}_p$ und $H_p^1(F) = F/\wp(F)$. Es ist außerdem klar, dass die Gruppe $H_p^{n+1}(F)$ additiv erzeugt ist von den Formen $\overline{b\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}}$ mit $b, a_1, \ldots, a_n \in F^*$. Zusätzlich ergibt sich schnell das folgende unscheinbare Lemma, welches später für verschiedene Rechnungen sehr nützlich sein wird.

Lemma 3.14 *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $\omega \in \Omega^n(F)$ ist $\omega \equiv \omega^{[p^k]} \mod \left(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\right)$.*

Beweis: Offensichtlich gilt in $H_p^{n+1}(F)$ die Gleichung

$$\omega^{[p^k]} \equiv \omega^{[p^k]} + \wp(-\omega^{[p^{k-1}]}) \equiv \omega^{[p^k]} - \omega^{[p^k]} + \omega^{[p^{k-1}]} \equiv \omega^{[p^{k-1}]} \mod \left(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\right).$$

Die Aussage folgt dann mit Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. □

3.3 Differentialformen nach Kato

Einer der bekanntesten Artikel im Bereich der Differentialformen stammt von Kato [31]. Das vielleicht wichtigste Resultat dieser Arbeit ist der Beweis der Milnor-Vermutung in Charakteristik zwei, welches somit eines der seltenen Beispiele in der Theorie der bilinearen und quadratischen Formen liefert, in denen ein Resultat zunächst in Charakteristik zwei und erst anschließend in beliebiger Charakteristik ungleich zwei bewiesen wurde. Eines der Hauptwerkzeuge von Kato ist dabei eine Hilfsaussage, die heute als das Lemma von Kato bekannt ist. Dieses Lemma findet in vielen Beweisen in dem Bereich der Differentialformen immer wieder Anwendung und auch wir werden es in verschiedenen Varianten in den folgenden Kapiteln wiederholt verwenden. Um das Lemma von Kato formulieren zu können, benötigen wir zunächst eine Filtrierung auf $\Omega^n(F)$, welche wir wie folgt aus einer p-Basis von F erhalten.

Definition 3.15 Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Wir versehen die Menge Σ_n mit der lexikographischen Ordnung, das heißt für $\sigma, \pi \in \Sigma_n$ gilt $\sigma < \pi$ genau dann, wenn es ein $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $\sigma(\ell) < \pi(\ell)$ und $\sigma(j) = \pi(j)$ für alle $j < \ell$. Wir definieren dann für ein $\delta \in \Sigma_n$ die Mengen

$$\bigwedge\nolimits_{\mathcal{B},\delta}^n := \left\{ \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \in \bigwedge\nolimits_{\mathcal{B}}^n \;\middle|\; \sigma \in \Sigma_n,\ \sigma \leq \delta \right\} \quad \text{und} \quad \bigwedge\nolimits_{\mathcal{B},<\delta}^n := \left\{ \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \in \bigwedge\nolimits_{\mathcal{B}}^n \;\middle|\; \sigma \in \Sigma_n,\ \sigma < \delta \right\}.$$

Mit diesen Mengen von linear unabhängigen logarithmischen Formen setzen wir

$$\Omega_\delta^n(F) := \mathrm{sp}_F\left(\bigwedge\nolimits_{\mathcal{B},\delta}^n\right) \quad \text{und} \quad \Omega_{<\delta}^n(F) := \mathrm{sp}_F\left(\bigwedge\nolimits_{\mathcal{B},<\delta}^n\right)$$

und definieren für ein $\omega \in \Omega^n(F)$ dann $\max_{\mathcal{B}}(\omega) := \max\{\delta \in \Sigma_n \mid \omega \in \Omega_\delta^n(F)\}$ und nennen ihn den maximalen Multiindex von ω bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Zunächst gilt mit diesen Definitionen sofort $\Omega_\alpha^n(F) \subsetneq \Omega_\beta^n(F)$ für $\alpha, \beta \in \Sigma_n$ mit $\alpha < \beta$. Außerdem erhalten die Abbildungen s_p und $\wp$ diese Filtrierung, da sie nach fester Basiswahl lediglich auf den Koordinaten eines Vektors operieren. Natürlich hängt diese Filtrierung auch wieder von der Wahl der p-Basis $\mathcal{B}$ und insbesondere von der Wohlordnung auf I ab.

Eine dazu ähnliche Filtrierung definieren wir nun auch auf dem Körper F. Für eine p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F definieren wir für ein $\ell \in I$ die Unterkörper

$$F_\ell := F^p(c_i \mid i \in I \text{ mit } i \leq \ell) \text{ und } F_{<\ell} := F^p(c_i \mid i \in I \text{ mit } i < \ell).$$

Mit diesen Notationen können wir nun das Lemma von Kato formulieren.

Proposition 3.16 *([30, Lem. 2]) Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Weiter sei $x \in F^*$, $\delta \in \Sigma_n$ und für den Körper F gelte $F = F^{p-1}$. Ist $(x^p - x)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega_{<\delta}^n(F)$, so existieren $a_j \in F_{\delta(j)}^*$ für $j = 1 \ldots, n$ und $v \in \Omega_{<\delta}^n(F)$ mit*

$$x\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} + v.$$

Dabei ist Katos Lemma nur für $(p-1)$-abgeschlossene Körper gültig, also für Körper die $F^{p-1} = F$ erfüllen. Man beachte, dass diese Bedingung für $p = 2$ trivialerweise immer erfüllt ist. Schwächen wir unsere Forderungen an die Elemente a_j aus Proposition 3.16 ab, so können wir auch die folgende, schwächere Version von Katos Lemma verwenden. Diese wird uns helfen, für $p = 2$ bereits bekannte Aussagen auf Körper beliebiger Charakteristik $p > 0$ zu verallgemeinern.

Lemma 3.17 *([3, Lem. 3.2]) Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Weiter sei $x \in F^*$ und $\delta \in \Sigma_n$. Ist $(x^p - x)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega^n_{<\delta}(F)$, so existieren passende $a_{i_j} \in F^*$ und $v \in \Omega^n_{<\delta}(F)$ mit*

$$x\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \frac{\mathrm{d}a_{i_1}}{a_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_{i_n}}{a_{i_n}} + v.$$

Wir wollen das Lemma 3.17 auch als das schwache Lemma von Kato bezeichnen. Eine erste sehr interessante Anwendung des schwachen Lemmas von Kato ist etwa das folgende Resultat, welches mittels anderer Methoden allerdings bereits schon vor dem schwachen Lemma von Kato bewiesen wurde.

Proposition 3.18 *([30, Prop. 1]) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Gruppe $\nu_n(F)$ additiv erzeugt von den logarithmischen Differentialformen $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in F^*$.*

Da uns nun ein passendes Erzeugendensystem von $\nu_n(F)$ bekannt ist, sind wir in der Lage das Theorem zu formulieren, welches der Grund ist, sich bei der Analyse von bilinearen und quadratischen Formen mit Differentialformen zu befassen.

Theorem 3.19 *([31, S.494 Theo.]) Es sei F ein Körper der Charakteristik zwei. Für $n \in \mathbb{N}_0$ existieren Isomorphismen α_n und β_n gegeben auf additiven Erzeugern durch*

$$\alpha_n : \nu_n(F) \to \overline{I^n}(F)\ ,\ \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \mapsto \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b \mod I^{n+1}(F),$$

$$\beta_n : H_2^{n+1}(F) \to \overline{I^n W_q}(F)\ ,\ \overline{b\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}} \mapsto \langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]] \mod I^{n+1}W_q(F).$$

Die Isomorphismen α_n und β_n wollen wir kurz als Katos Isomorphismen bezeichnen.

3.4 Differentialformen unter Körpererweiterungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige der bereits bekannten Aussagen zum Verhalten von Differentialformen unter Körpererweiterungen zusammenfassen. Wir versuchen dabei eine möglichst gute Übersicht der bekannten Resultate zu geben, erheben allerdings keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit.

Es sei also K/F eine Körpererweiterung und $\omega \in \Omega^n(F)$. In Analogie zu den bilinearen und quadratischen Formen bezeichnen wir mit ω_K das Bild von ω unter der natürlichen Einbettung $\Omega^n(F) \to \Omega^n(K)$. Analog dazu bezeichnen wir mit $\overline{\omega}_K$ die Form $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(F)$ aufgefasst als Element in $H_p^{n+1}(K)$. Ferner definieren wir die folgenden Gruppen.

Definition 3.20 Es sei K/F eine Körpererweiterung. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \Omega^n(K/F) &:= \ker(\ \iota : \Omega^n(F) \to \Omega^n(K)\ ), \\ \nu_n(K/F) &:= \ker(\ \iota : \nu_n(F) \to \nu_n(K)\ ), \\ H_p^{n+1}(K/F) &:= \ker(\ \iota : H_p^{n+1}(F) \to H_p^{n+1}(K)\ ) \end{aligned}$$

und nennen sie den Ω-Kern, den ν-Kern und den H-Kern der Erweiterung K/F.

Für jede Körpererweiterung K/F gilt dabei natürlich $\Omega^n(K/F) \cap \nu_n(F) = \nu_n(K/F)$. Aus diesem Grund werden wir in den nachfolgenden Kapitel zunächst für eine gegebene Erweiterung K/F den Ω-Kern dieser Erweiterung bestimmen und dann anschließend für die Bestimmung von $\nu_n(K/F)$ den Schnitt $\Omega^n(K/F) \cap \nu_n(F) = \nu_n(K/F)$ berechnen.

Ist nun F ein Körper der Charakteristik zwei und K/F eine Körpererweiterung von F, so folgt aus Theorem 3.19 und der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \overline{I^n}(F) & \longrightarrow & \overline{I^n}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu_n(F) & \longrightarrow & \nu_n(K) \end{array}$$

sofort $\nu_n(K/F) \cong \overline{I^n}(K/F)$ und analog ebenso $H_2^{n+1}(K/F) \cong \overline{I^n W_q}(K/F)$. Wir werden später noch sehen, dass wir mittels dieser Kerne dann auch den bilinearen und quadratischen Wittkern der Erweiterung K/F bestimmen können.

3.4.1 $\Omega^n(F)$ und $\nu_n(F)$ unter Körpererweiterungen

Kommen wir nun zu einigen Resultaten, welche die Räume $\Omega^n(F)$ und $\nu_n(F)$ unter Körpererweiterungen beschreiben und beginnen dabei mit den separablen Erweiterungen. Nach dem Satz vom primitiven Element A.7 kann jede endliche separable Körpererweiterung S/F realisiert werden als $S = F(\vartheta)$ für ein passendes $\vartheta \in S$. Damit erhalten wir dann das folgende Lemma.

Lemma 3.21 *([3, S. 717]) Es sei S/F eine endliche separable Körpererweiterung vom Grad $[S : F] = s$ und $S = F(\vartheta)$ für ein $\vartheta \in S$. Dann ist*

$$\Omega^n(S) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \Omega^n(F).$$

Die obige Darstellung des Raums $\Omega^n(S)$ ergibt sich dabei natürlich direkt aus Lemma 3.6 zusammen mit Proposition 3.11. Wiederum bedingt aus der Tatsache, dass p-unabhängige Mengen unter separablen Erweiterungen p-unabhängig bleiben, erhalten wir für den Ω-Kern und ν-Kern einer separablen Körpererweiterung sofort die folgende Aussage.

Proposition 3.22 *([20, Lem. 7.1]) Es sei S/F eine separable Körpererweiterung. Dann ist*

$$\Omega^n(S/F) = \{0\} \ \textit{und}\ \nu_n(S/F) = \{0\} \ \textit{für alle}\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Insbesondere gilt für den Körperturm $F \subset L \subset K$ mit einer rein transzendenten Erweiterung K/L dann stets

$$\Omega^n(K/F) = \Omega^n(L/F) \ \textit{und}\ \nu_n(K/F) = \nu_n(L/F).$$

Wir sehen also, dass die Berechnung von Ω-Kernen und ν-Kernen für separable Körpererweiterungen stets triviale Ergebnisse liefert. Befassen wir uns also mit dem anderen Extrem, den rein inseparablen Körpererweiterungen. Dazu formulieren wir zunächst das folgende Lemma, welches sich sofort aus Korollar 3.5 und Proposition 3.11 ergibt.

Lemma 3.23 *Es seien $b_1,\dots,b_r \in F$ p-unabhängig und $m_1,\dots,m_r \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine $b_1,\dots,b_r$ enthaltende p-Basis von F. Für $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1},\dots,\sqrt[p^{m_r}]{b_r})$, $\beta_i = \sqrt[p^{m_i}]{b_i}$, $T = \bigtimes_{i=1}^{r}\{0,\dots,p^{m_i}-1\}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{B}\setminus\{b_1,\dots,b_r\}$ ist dann*

$$\Omega^n(E) = \bigoplus_{\substack{(i_1,\dots,i_r)\in T\\ \{\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_s}\}\subset\{\beta_1,\dots,\beta_r\}\\ \text{für } s=0,\dots,r \text{ mit } j_1<\dots<j_s}} \beta_1^{i_1}\dots\beta_r^{i_r}\,\mathrm{d}\beta_{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}\beta_{j_s}\wedge\Omega_{\mathcal{B}'}^{n-s}(F)$$

Wir werden später den Ω-Kern und den ν-Kern für Erweiterungen $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1},\dots,\sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ mit p-unabhängigen $b_1,\dots,b_r \in F$ vollständig beschreiben. In der Literatur findet sich allerdings bisher nur der Fall $r = 1$, welcher gegeben ist durch das folgende Resultat.

Lemma 3.24 *([20, Lem. 7.1]) Für $b \in F \setminus F^p$ und $m \in \mathbb{N}$ ist*

$$\Omega^n(F(\sqrt[p^m]{b})/F) = \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-1}(F).$$

An späterer Stelle werden wir beweisen, dass sich mit diesem Ω-Kern aus Lemma 3.24 dann auch sofort für Körper mit $F^{p-1} = F$ der ν-Kern dieser Erweiterung beschreiben lässt als

$$\nu_n(F(\sqrt[p^m]{b})/F) = \left[\frac{\mathrm{d}a}{a} \;\middle|\; a \in F^p(b)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F).$$

Dolphin und Hoffmann waren in [20] in der Lage, den in Lemma 3.24 beschriebenen Kern noch auf beliebige einfache Erweiterungen zu verallgemeinern.

Proposition 3.25 *([20, Prop. 7.2]) Es sei θ ein Element eines algebraischen Abschlusses von F. Weiter sei $f \in F[X]$ das Minimalpolynom von θ über F und $\mathcal{C}(f) \subset F^*$ die Menge der von Null verschiedenen Koeffizienten von f.*

(a) Ist $f \notin F[X^p]$, so ist $\Omega^n(F(\theta)/F) = \{0\}$.

(b) Ist $f \in F[X^p]$ und ist $p\text{-}\deg_F(\mathcal{C}(f)) = k \geq 1$ mit $F^p(\mathcal{C}(f)) = F^p(a_1,\dots,a_k)$ für passende $a_1,\dots,a_k \in F^*$, so ist

$$\Omega^n(F(\theta)/F) = \mathrm{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_k \wedge \Omega^{n-k}(F).$$

Dabei ist in Proposition 3.25(b) der Ω-Kern der Erweiterung trivial, falls $n < k$ gilt. Natürlich erhalten wir als Folgerung dieser Aussage das Lemma 3.24 aus der Tatsache, dass das Minimalpolynom von $\sqrt[p^m]{b}$ mit $b \in F \setminus F^p$ über F gegeben ist durch $X^{p^m} - b \in F[X]$ und damit $\mathcal{C}(X^{p^m} - b) = \{1, b\}$ gilt.

Wir wollen diesen kurzen Unterabschnitt nun damit abschließen, den Ω-Kern und den ν-Kern einer Funktionenkörpererweiterung eines beliebigen Polynoms zu beschreiben. Dazu definieren wir für ein irreduzibles Polynom $f \in F[X_1,\dots,X_r]$ den Funktionenkörper $F(f)$ als den Quotientenkörper des Integritätsbereiches $F[X_1,\dots,X_r]/(f)$. Weiter definieren wir einen verallgemeinerten Normkörper und verallgemeinerten Normgrad von f durch

$$N_F(f) = F^p\left(f(\alpha)f(\beta)^{-1} \;\middle|\; \alpha,\beta \in F^r,\ f(\beta) \neq 0\right) \text{ und } \operatorname{ndeg}_F(f) = [N_F(f) : F^p].$$

Mit diesen Notationen erhalten wir dann das folgende Theorem.

Theorem 3.26 *([20, Theo. 8.5]) Es sei $f \in F[X_1, \dots, X_r]$ ein irreduzibles Polynom und $\mathcal{C}(f)$ die Menge der von Null verschiedenen Koeffizienten von f.*

(a) Ist $f \notin F[X_1^p, \dots, X_r^p]$, so ist $\Omega^n(F(f)/F) = \{0\}$.

(b) Ist $f \in F[X_1^p, \dots, X_r^p]$ mit $\mathrm{ndeg}_F(f) = p^k > 1$ und ist $N_F(f) = F^p(a_1, \dots, a_k)$ für passende $a_1, \dots, a_k \in F^*$, so ist

$$\Omega^n(F(f)/F) = \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k \wedge \Omega^{n-k}(F).$$

Das Thoerem 3.26 schließt natürlich den Fall einer Funktionenkörpererweiterung einer p-Form mit ein und in diesem Fall stimmen der verallgemeinerte Normkörper und der verallgemeinerte Normgrad mit dem Normkörper und dem Normgrad der p-Form überein. Weiter ist Theorem 3.26 die allgemeinste Form einer Funktionenkörpererweiterung. Dabei findet man vorhergegangene Teilergebnisse etwa in [6] (der Fall einer bilinearen Pfisterform) oder in [24] (der Fall einer beliebigen p-Form).

3.4.2 $H_p^{n+1}(F)$ unter Körpererweiterungen

Befassen wir uns nun mit der Gruppe $H_p^{n+1}(F)$ und ihrem Verhalten unter verschiedenen Körpererweiterungen. Durch den Zusammenhang zu dem Raum der quadratischen Formen in Charakteristik zwei wird die Gruppe $H_p^{n+1}(F)$ oft nur für eben diesen Fall untersucht. Aus diesem Grund werden wir einige der hier aufgeführten Ergebnisse eben nur für $p = 2$ formulieren können. In Kapitel 6 verallgemeinern wir dann einige der Ergebnisse auch auf Körper beliebiger Charakteristik $p > 0$. Beginnen wir nun zunächst wie eben mit separablen Körpererweiterungen S/F. Ähnlich wie zuvor kann die Gruppe $H_p^{n+1}(S)$ mit Hilfe von $H_p^{n+1}(F)$ beschrieben werden.

Lemma 3.27 *([3, Prop. 2.10]) Es sei S/F eine endliche separable Körpererweiterung. Dann ist*

$$H_p^{n+1}(S) = H_p^n(F) \wedge \overline{\nu_1(S)}.$$

Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Abschnitt 3.4.1 ist es durchaus möglich, dass der H-Kern einer separablen Erweiterung nicht trivial ist. Betrachten wir dazu im Fall $p = 2$ etwa die separable quadratische Erweiterung $F(\vartheta)/F$ mit $\wp(\vartheta) = b$ für ein $b \in F \setminus \wp(F)$. Dann gilt für die Form $\overline{b\frac{\mathrm{d}a}{a}}$ mit $a \in F^*$ wegen $(\overline{b\frac{\mathrm{d}a}{a}})_{F(\vartheta)} = \overline{\wp(\vartheta)\frac{\mathrm{d}a}{a}} = \overline{0}$ natürlich $\overline{b\frac{\mathrm{d}a}{a}} \in H_2^2(F(\vartheta)/F) \neq \{\overline{0}\}$. Verschärfen wir allerdings die Anforderungen an die Körpererweiterung, so erhalten wir das folgende Resultat.

Lemma 3.28 *([24, S. 180]) Es sei K/F eine endliche Körpererweiterung mit $p \nmid [K : F]$. Dann ist $H_p^{n+1}(K/F) = \{\overline{0}\}$.*

Dabei sind die in Lemma 3.28 beschriebenen Körpererweiterungen stets separabel, aber das nicht jede separable Erweiterung diese Bedingung erfüllt zeigt das vorhergegangen Beispiel. Das Verhalten der Gruppe $H_p^{n+1}(F)$ unter rein transzendenten Erweiterungen ist dagegen analog zu dem des Raumes $\Omega^n(F)$, denn es gilt die folgende Aussage.

Proposition 3.29 *([5, Lem. 2.17] für $p = 2$) Ist K/F eine rein transzendente Körpererweiterung, so gilt $H_p^{n+1}(K/F) = \{\overline{0}\}$.*

Der Beweis aus [5] für $p = 2$ kann dabei mit ein wenig Arbeit für Körper beliebiger Charakteristik $p > 0$ übernommen werden. Man muss jedoch beachten, dass an einer Stelle das Lemma von Kato verwendet wird. Allerdings reicht es an eben dieser Stelle aus, das schwache Lemma von Kato 3.17 zu nutzen und man kann so den Beweis fortführen.

Wir wollen nun auch für rein inseparable Erweiterungen E/F die Gruppe $H_p^{n+1}(E)$ mit Hilfe von $H_p^{n+1}(F)$ beschreiben. Dazu betrachten wir das folgenden Resultat.

Proposition 3.30 *([3, Prop. 4.3] für $r = 1$) Es seien $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ und $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ eine endliche rein inseparable Körpererweiterung. Setzen wir $\beta_i = \sqrt[p^{m_i}]{b_i}$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist*

$$H_p^{n+1}(E) = \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_s\}\subset\{1,\ldots,r\} \\ \text{für } s=0,\ldots,r \text{ mit } j_1<\ldots<j_s}} H_p^{n+1-s}(F) \wedge \overline{\frac{\mathrm{d}\beta_{j_1}}{\beta_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}\beta_{j_s}}{\beta_{j_s}}}.$$

Der Beweis aus [3] lässt sich dabei ohne weiteres auf den Fall $r > 1$ verallgemeinern. Man beachte, dass in der Zerlegung aus Proposition 3.30 durchaus einige Summanden trivial sein können, abhängig von der Körpererweiterung E und der p-Abhängigkeit der Elemente $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_s}$.

Wir wollen diesen Abschnitt nun damit abschließen, noch einige weitere bekannte H-Kerne zusammenzutragen. Beginnen wir dazu mit den endlichen Körpererweiterungen in Charakteristik zwei. Zunächst zeigt sich, dass das obige Beispiel einer quadratischen separablen Erweiterung in Charakteristik zwei in gewisser Weise das kanonische Beispiel ist, denn es gilt das folgende Resultat.

Proposition 3.31 *([4, Prop. 6.4]) Es sei $\mathrm{char}(F) = 2$ und $b \in F \setminus \wp(F)$. Dann ist*

$$H_2^{n+1}(F(\wp^{-1}(b)/F) = \overline{b\nu_n(F)}.$$

Für Körpererweiterungen von Grad vier in Charakteristik zwei wurden die quadratischen Wittkerne in [29] vollständig klassifiziert. Das Übertragen dieser Ergebnisse auf die H-Kerne separabler Erweiterungen vom Grad vier scheint allerdings ein schwieriges Problem zu sein. Aravire und Jacob konnten in [9] erste Teilergebnisse für diese Erweiterungen liefern, indem sie die Theorie der Differentialformen auf die der sogenannten Izhboldingruppen verallgemeinerten. Eines ihrer Ergebnisse ist dabei der H-Kern einer biquadratischen separablen Erweiterung in Charakteristik zwei, welcher durch die folgende Proposition beschrieben ist.

Proposition 3.32 *([9, Theo. 39]) Es sei $\mathrm{char}(F) = 2$, $b_1, b_2 \in F \setminus \wp(F)$ und $\vartheta_i = \wp^{-1}(b_i)$ für $i = 1, 2$. Für die separable biquadratische Erweiterung $F(\vartheta_1, \vartheta_2)/F$ gilt dann*

$$H_2^{n+1}\left(F\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right)/F\right) = \overline{b_1\nu_n(F)} \ + \ \overline{b_2\nu_n(F)} = H_2^{n+1}(F(\vartheta_1)/F) \ + \ H_2^{n+1}(F(\vartheta_2)/F).$$

Dabei drängt sich die offensichtliche Frage auf, ob sich dieses Verhalten auch auf multiquadratische separable Erweiterungen verallgemeinern lässt. Allerdings zeigt ein Beispiel aus [40] (auf der Ebene der Brauergruppen aus Kapitel 4.2), dass eben dies nicht der Fall ist. Genauer wird ein Beispiel eines Körpers F der Charakteristik zwei, sowie $b_1, b_2, b_3 \in F \setminus \wp(F)$ konstruiert mit $[F(\wp^{-1}(b_1), \wp^{-1}(b_2), \wp^{-1}(b_3)) : F] = 8$ und

$$H_2^2(F(\wp^{-1}(b_1), \wp^{-1}(b_2), \wp^{-1}(b_3))/F) \subsetneq \sum_{i=1}^{3} \overline{b_i\nu_1(F)}.$$

Ein noch sehr aktuelles Resultat stammt von Aravire, Laghribi und O'Ryan und liefert Auskunft über den H-Kern der Hintereinaderschaltung einer rein inseparablen Erweiterung vom Exponent 1 mit dem Funktionenkörper einer bilinearen Pfisterform.

Theorem 3.33 *([11, Theo. 1.2]) Es sei F ein Körper der Charakteristik zwei und die Elemente $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r \in F$ seien 2-unabhängig über F. Weiter sei $\pi = \langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle_b$ eine bilineare Pfisterform über F und $L = F(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_r})$. Zusätzlich wählen wir ein $c \in F \setminus \wp(F)$ und setzen $K = F(\wp^{-1}(c))$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} H_2^{n+1}(L(\pi)/F) &= \overline{\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_k}{a_k} \wedge \Omega^{n-k}(F)} + \sum_{i=1}^{r} \overline{\frac{\mathrm{d}b_i}{b_i} \wedge \Omega^{n-1}(F)}, \\ H_2^{n+1}(L(\pi) \cdot K/F) &= H_2^{n+1}(L(\pi)/F) + H_2^{n+1}(K/F). \end{aligned}$$

Dieses sehr allgemeine Resultat schließt dabei wieder einige weitere bereits bekannte Fälle mit ein. So gilt für 2-unabhängige $b_1, \ldots, b_r \in F$ damit

$$H_2^{n+1}(F(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_r})/F) = \sum_{i=1}^{r} \overline{\frac{\mathrm{d}b_i}{b_i} \wedge \Omega^{n-1}(F)}.$$

Diese Aussage wurde zunächst für $r = 1$ in [5] gezeigt und dann in [10] auf Erweiterungen für beliebiges r verallgemeinert.

Das Theorem 3.33 liefert ebenfalls Auskunft über den H-Kern einer Funktionenkörpererweiterung einer bilinearen Pfisterform. Ist etwa $\pi = \langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle_b$ eine bilineare anisotope Pfisterform, so ist

$$H_2^{n+1}(F(\pi)/F) = \overline{\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_k}{a_k} \wedge \Omega^{n-k}(F)}.$$

Diese Aussage wurde in dieser Form von Aravire und Baeza in [5] mittels eines relativ langen und technischen Beweises gezeigt. Eine in gewisser Weise kanonische Übertragung auf den Fall einer p-Pfisterform ist dabei nicht ohne Weiteres möglich, da im Beweis Methoden und Rechnungen verwendet werden, die in Charakteristik zwei, nicht aber in allgemeiner Charakteristik $p > 0$ gültig sind. Im späteren Verlauf der Arbeit werden wir in der Lage sein, Theorem 3.33 auch für $\Omega^n(F)$ und $\nu_n(F)$ im Fall beliebiger Charakteristik $p > 0$ zu formulieren. Dabei sind wir zusätzlich noch in der Lage, einige der Voraussetzungen aus Theorem 3.33 abzuschwächen (siehe Korollar 7.8).

Ein noch offenes Problem ist die Bestimmung des H-Kerns für Funktionenkörper quadratischer Pfisterformen. Ist etwa $\pi = \langle\!\langle a_1, \ldots, a_k, b]]$ eine anisotrope quadratische Pfisterform mit $a_1, \ldots, a_k, b \in F^*$, so vermutet man für den H-Kern der Erweiterung $F(\pi)/F$ dann

$$H_2^{n+1}(F(\pi)/F) = \overline{b\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_k}{a_k} \wedge \nu_{n-k}(F)}.$$

Diese Aussage konnte allerdings bisher nur in den Fällen

$$k = 0 \quad [4, \mathit{Prop.}\ 6.4]\ ,\ \ k = 1 \quad [8, \mathit{Theo.}\ 1.6]\ ,\ \ k = n \quad [5, \mathit{Theo.}\ 5.4]\ ,\ \ k > n \quad [11, \mathit{S.}\ 655]$$

bewiesen werden.

3.5 Technische Hilfsaussagen

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 3 wollen wir noch einige, für den späteren Verlauf sehr nützliche, Hilfsaussagen zusammenfassen. Beginnen wir dazu mit den folgenden zwei Lemmata. Diese liefern in gewisser Weise eine Ergänzung zu Katos Lemma, da sie unter Verwendung ähnlicher Voraussetzungen eine Aussage über die Koeffizienten einer Form $\omega \in \Omega^n(F)$ ermöglichen.

Lemma 3.34 *([3, Lem. 3.1]) Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Weiter seien $\delta \in \Sigma_n$ und $x_\sigma \in F$ für $\sigma \leq \delta$ mit $x_\delta \neq 0$. Ist $\sum_{\sigma \leq \delta} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)$, so existieren $M_{ij} \in F_{<\delta(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, p-1$ mit*

$$x_\delta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} c_{\delta(i)}^j.$$

Lemma 3.35 *([3, Prop. 3.3]) Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Weiter seien $\delta \in \Sigma_n$ und $x_\sigma \in F$ für $\sigma \leq \delta$ mit $x_\delta \neq 0$. Ist $\sum_{\sigma \leq \delta} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \wp\Omega^n(F)$, so existieren $M_{ij} \in F_{<\delta(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, p-1$, sowie ein $u \in F$ mit*

$$x_\delta = \wp(u) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} c_{\delta(i)}^j.$$

Kommen wir nun noch zu dem Begriff der Teilbarkeit von Differentialformen. Dazu seien $\omega \in \Omega^n(F)$ und $u \in \Omega^m(F)$. Wir sagen die Form u teilt die Form ω, in Zeichen $u \mid \omega$, wenn es eine Form $v \in \Omega^{n-m}(F)$ gibt mit $\omega = u \wedge v$. Dies entspricht also genau der üblichen Definition von Teilbarkeit im Ring $\Omega^*(F)$. Die Teilbarkeit von elementaren Wedge-Produkten lässt sich dann wie folgt charakterisieren.

Lemma 3.36 *([5, Prop. 1.16] für $p = 2$) Es seien $b_1, \ldots, b_r \in F$ p-unabhängig und $\omega \in \Omega^n(F)$. Teilen $\mathrm{d}b_1, \ldots, \mathrm{d}b_r$ die Form ω, so teilt auch $\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r$ die Form ω. Insbesondere ist dann also für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_i \wedge \Omega^{n-1}(F) = \mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \Omega^{n-r}(F).$$

In der folgenden Bemerkung wollen wir noch festhalten, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einer Rechnung mit Differentialformen eine endliche p-Basis des zugrunde liegenden Körpers F vorausgesetzt werden kann. Diese auf den ersten Blick unscheinbare Bemerkung wird dabei vor allem in den letzten Kapiteln noch eine wichtige Rolle einnehmen.

Bemerkung 3.37 Immer wenn wir Aussagen treffen wollen über ein festes $\omega \in \Omega^n(F)$ oder auch ein $\omega \in \nu_n(F)$, so können wir stets annehmen, dass dieses ω über einem Körper mit einer endlichen p-Basis definiert ist. Denn ist etwa $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F, so werden in der Darstellung $\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}$ mit $x_\sigma \in F$ nur endlich viele der c_i und nur endlich viele Koeffizienten x_σ verschieden von Null verwendet. Adjungieren wir nun eben diese c_i und x_σ an den Primkörper $\mathbb{F}_p$, so ist ω bereits über einer endlich erzeugten Erweiterung von $\mathbb{F}_p$ definiert und diese besitzt offensichtlich eine endliche p-Basis. Analoges gilt dabei natürlich auch für $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(F)$.

Ein ganz ähnliches Argument gilt etwa bei endlich erzeugten Körpererweiterungen K/F und der Berechnung von Elementen in $H_p^{n+1}(K/F)$. Betrachten wir dazu ein festes $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(K/F)$.

Da jede Körpererweiterung als rein transzendente Erweiterung, gefolgt von einer algebraischen Erweiterung geschrieben werden kann und die Erweiterung K/F endlich erzeugt ist, finden wir also über F transzendente Elemente $X_1, \ldots, X_t$ und über $F(X_1, \ldots, X_t)$ algebraische Elemente $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ mit

$$K = F(X_1, \ldots, X_t)(\Theta_1, \ldots, \Theta_r).$$

Um die Koeffizienten der Minimalpolynome der Θ_i über $F(X_1, \ldots, X_t)$, die Form ω und die Relation $\omega_K = \wp(u) + \mathrm{d}v$ mit $u \in \Omega^n(K)$ und $v \in \Omega^{n-1}(K)$ zu beschreiben, werden dabei nur endlich viele Elemente aus F, die $X_1, \ldots, X_t$ sowie die Elemente $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ benötigt. Adjungieren wir nun all diese Elemente aus F an den Primkörper $\mathbb{F}_p$, so erhalten wir einen Körper F' über dem die Form ω definiert ist und der eine endliche p-Basis besitzt, da F' endlich erzeugt ist über $\mathbb{F}_p$. Da die Minimalpolynome der Θ_i aber auch über dem Körper $F'(X_1, \ldots, X_t)$ definiert sind (sie stimmen sogar mit den Minimalpolynomen über $F(X_1, \ldots, X_t)$ überein), erhalten wir mit $K' = F'(X_1, \ldots, X_t)(\Theta_1, \ldots, \Theta_r)$ dann ebenfalls $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(K'/F')$. Wir können also auch in dieser Situation stets von einer endlichen p-Basis des Körpers F ausgehen. Dabei gilt eine völlig analoge Aussage natürlich auch für Formen $\omega \in \Omega^n(K/F)$ und $\chi \in \nu_n(K/F)$.

Kapitel 4

Milnor-K-Gruppen und Brauergruppen

Wir haben bereits gesehen, dass für Körper der Charakteristik zwei für alle $n \in \mathbb{N}$ stets die Isomorphien $\nu_n(F) \cong \overline{I^n}(F)$ und $H_2^{n+1}(F) \cong \overline{I^n W_q}(F)$ gelten. In diesem Kapitel wollen wir nun noch weitere algebraische Strukturen einführen und anschließend das Bloch-Kato-Gabber Theorem sowie das Bloch-Kato Theorem formulieren, welche eben diese Strukturen ebenfalls in Verbindung mit den Gruppen $\nu_n(F)$ und $H_p^{n+1}(F)$ setzen. Da das klare Ziel dieser Arbeit allerdings das Beschreiben von Differentialformen, bilinearen Formen und quadratischen Formen unter Körpererweiterungen ist, ist dieses Kapitel mehr als ein kurzer Exkurs zu verstehen, der die nötigen Grundbegriffe klärt und Notationen einführt. Wir verweisen an passender Stelle auf die geeignete Literatur, um sich in diese Theorie detaillierter einzuarbeiten.

4.1 Milnor-K-Gruppen

Da Milnor-K-Gruppen unabhängig von der Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers definiert werden können, bezeichne in diesem Abschnitt F einen Körper beliebiger Charakteristik (einschließlich 0). Für eine genauere Einführung in die Theorie der Milnor-K-Gruppen verweisen wir auf [21, S. 398 ff.].

Definition 4.1 Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n-te Milnor-K-Gruppe als

$$K_n^M(F) := (F^*)^{\otimes n}/J_n,$$

wobei die Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ gebildet werden und J_n das zweiseitige Ideal von $(F^*)^{\otimes n}$ ist, welches durch die Elemente der Form $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ mit $x_i + x_j = 1$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i \neq j$ erzeugt ist.

Der Einfachheit halber schreiben wir kurz $K_n(F)$ für $K_n^M(F)$. Da das Ideal J_n erst für $n \geq 2$ verschieden von Null ist, gilt offensichtlich $K_0(F) = \mathbb{Z}$ und $K_1(F) \cong F^*$. Für die Nebenklasse des Elements $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ schreiben wir kurz $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und nennen dieses ein Symbol. Dabei ist die Verknüpfung in $K_n(F)$ additiv geschrieben und ein Element in $K_n(F)$ ist stets Summe von Symbolen, nicht aber zwangsläufig ein Symbol selbst.

Ähnlich wie bei den Differentialformen erhalten wir auch hier durch $K^*(F) = \bigoplus_{n\geq 0} K_n(F)$ mit der üblichen Addition und der durch auf additiven Erzeugern definierten Multiplikation

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \cdot \{b_1, \ldots, b_m\} := \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\} \in K_{n+m}(F)$$

mit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in F$ wieder eine Algebra.

Um nun das wichtige Bloch-Kato-Gabber Theorem formulieren zu können, setzen wir zuvor noch die folgenden Definitionen.

Definition 4.2 Es sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Gruppe $k_n(F) := K_n(F)/pK_n(F)$ und bezeichnen die Nebenklasse eines Symbols $\{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n(F)$ für $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ in $k_n(F)$ als $\overline{\{a_1, \ldots, a_n\}}$. Weiter wird der Raum $k_*(F) := \bigoplus_{n\geq 0} k_n(F)$ mittels der kanonischen Addition und der auf additiven Erzeugern definierten Multiplikation

$$\overline{\{a_1, \ldots, a_n\}} \cdot \overline{\{b_1, \ldots, b_m\}} := \overline{\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}}$$

für $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in F^*$ zu einem Ring (siehe dazu etwa [35]).

Dabei wollen wir uns auch hier wieder auf die Gruppen $k_n(F)$ konzentrieren und überlassen es dem Leser, alle folgenden Resultate auch für den Ring $k_*(F)$ auszuformulieren. Die Gruppen $k_n(F)$ können dabei natürlich auch unabhängig von der Charakteristik des Körpers definiert werden, allerdings werden wir sie ausschließlich in dem in Definition 4.2 angegebenen Fall verwenden. Mit den Gruppen $k_n(F)$, die wir ebenfalls als Milnor-K-Gruppen bezeichnen wollen, können wir nun das bekannte Bloch-Kato-Gabber Theorem formulieren.

Theorem 4.3 *([15, Theo. 2.1]) Es sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die auf additiven Erzeugern definierte Abbildung*

$$k_n(F) \to \nu_n(F)\ ,\ \overline{\{a_1, \ldots, a_n\}} \mapsto \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus. Insbesondere gilt für $p = 2$ dann $k_n(F) \cong \overline{I^n}(F)$.

Da wir nun jedes Resultat über die Gruppe $\nu_n(F)$ auch auf $k_n(F)$ für Körper F der Charakteristik p übertragen können, definieren wir abschließend noch für eine Körpererweiterung K/F die Gruppe

$$k_n(K/F) := \ker(\,\iota : k_n(F) \to k_n(K)\,).$$

Nach Theorem 4.3 erhalten wir dann $\nu_n(K/F) \cong k_n(K/F)$ und können somit alle Resultate über die Gruppe $\nu_n(F)$ unter Körpererweiterungen auch auf Milnor-K-Gruppen übertragen.

4.2 Der p-Torsionsanteil der Brauergruppe

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Brauergrupe eines Körpers befassen. Wie auch schon im vorangegangenen Abschnitt werden wir uns dabei auf die grundlegenden Definitionen beschränken und verweisen etwa auf [32] für weitere Details und eine genauere Einführung der Theorie. Dabei können auch Brauerguppen unabhängig von der Charakteristik des zugrundeliegenden Körpers F definiert werden. Also sei auch hier zunächst F ein Körper beliebiger

Charakteristik (einschließlich 0). Zudem setzen wir voraus, dass alle auftretenden Algebren stets endlichdimensional und mit 1 sind.

Beginnen wir zunächst damit, einige notwendige Bezeichnungen zu wiederholen. Dazu sei A eine F-Algebra. Wir nennen A eine zentral einfache Algebra, wenn das Zentrum von A gegeben ist durch F und A keine nicht trivialen zweiseitigen Ideale besitzt. Weiter heißt A Divisionsalgebra, wenn jedes von Null verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt und mit A^{op} bezeichnen wir die opponierte Algebra von A. Analog zu den vorhergegangenen Kapiteln schreiben wir für eine F-Algebra A, welche unter der Körpererweiterung K/F betrachtet wird kurz A_K. Schließlich wollen wir mit $M_n(A)$ den Ring der quadratischen $(n \times n)$-Matrizen über A bezeichnen. Die Struktur zentral einfacher Algebren wird durch das folgende Theorem beschrieben.

Theorem 4.4 *([32, Theo. 1.1]) Für eine F-Algebra A sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) A ist eine zentral einfache Algebra.

(b) Die Abbildung $A \otimes A^{op} \to \mathrm{End}_F(A)$, $(a, b) \mapsto (x \mapsto axb)$ ist ein Isomorphismus.

(c) Es existiert eine Körpererweiterung K/F so, dass $A_K \cong M_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

(d) Ist $\overline{F}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der F enthält, so ist $A_{\overline{F}} \cong M_n(\overline{F})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(e) Es existiert eine endlich dimensionale zentrale Divisionsalgebra D über F und ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A \cong M_r(D)$.

Ein wie in Theorem 4.4(c) beschriebener Körper K heißt Zerfällungskörper der Algebra A und man sagt kurz A zerfällt über K. Da die Dimension einer Algebra eine Invariante unter Körpererweiterungen ist, muss die Dimension jeder zentral einfachen Algebra damit stets ein Quadrat sein. Ist also A eine zentral einfache F-Algebra mit $\dim A = r^2$, so bezeichnen wir r als den Grad von A und schreiben kurz $\deg A = r$. Die Dimension der in Theorem 4.4(e) beschriebenen Divisionsalgebra heißt der Index der Algebra A und wird kurz als $\operatorname{ind} A$ geschrieben.

Definition 4.5 Zwei zentral einfache F-Algebren A, B heißen Brauer-äquivalent, wenn es $\ell, r \in \mathbb{N}$ gibt mit $M_\ell(A) \cong M_r(B)$. Dies liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der zentral einfachen F-Algebren.

Äquivalent zu dieser Definition von Braueräquivalenz ist etwa, dass es eine F-Divisionsalgebra D und $s, t \in \mathbb{N}$ gibt mit $A \cong M_s(D)$ und $B \cong M_t(D)$. Jede zentral einfache Algebra ist damit also zu einer, bis auf Isomorphie eindeutigen, Divisionsalgebra Brauer-äquivalent. Die Äquivalenzklasse einer zentral einfachen Algebra A wollen wir als Brauerklasse von A bezeichnen und schreiben für diese kurz $[A]$. Mit diesen Notationen definieren wir die Brauergruppe dann wie folgt.

Proposition 4.6 *([32, S. 4]) Die Menge $\mathrm{Br}(F) := \{[A] \mid A \text{ zentral einfache } F\text{-Algebra } \}$ der Brauerklassen über F wird mit der Multiplikation $[A] \cdot [B] = [A \otimes B]$ zu einer Gruppe, genannt die Brauergruppe von F. Für diese gilt $[A]^{-1} = [A^{op}]$ und $1 = [F]$.*

Wie auch schon beim Wittring und der Wittgruppe schreiben wir schlicht aber ungenau kurz A für die Brauerklasse $[A]$, wenn klar ist, was gemeint ist.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den n-Torsionsanteil der Brauergruppe als

$$\mathrm{Br}_n(F) := \{A \in \mathrm{Br}(F) \mid A^{\otimes n} = 1\}.$$

Für uns von besonderem Interesse ist dabei der p-Torsionsanteil der Brauergruppe $\mathrm{Br}(F)$ für einen Körper der Charakteristik $p > 0$. Darum sei von nun an für den Rest des Abschnitts wieder F stets ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

Um die Gruppe $\mathrm{Br}_p(F)$ besser zu beschreiben, benötigen wir die sogenannten Symbol-Algebren. Diese sind für ein $a \in F$ und $b \in F^*$ definiert als

$$[a, b)_{p,F} := [a, b)_F := F \langle x, y \mid x^p - x = a \ , \ y^p = b \ , \ yx - xy = y \rangle \, .$$

Dies ist offensichtlich eine F-Algebra der Dimension p^2 über F mit einem über F separablen Unterkörper vom Grad p und einem über F rein inseparablen Unterkörper vom Grad p. Dabei entsprechen diese Symbolalgebren für $p = 2$ genau den Quaternionenalgebren. Weiter zeigt sich, dass $[a, b)_F$ eine zentral einfache F-Algebra ist und $[a, b)_F^{\otimes p}$ brauer-äquivalent zu F ist. Insbesondere liegen also die Symbol-Algebren in $\mathrm{Br}_p(F)$ und genauer gilt sogar das folgende Resultat.

Theorem 4.7 *([2, Ch. 7 Theo. 30]) Die Gruppe* $\mathrm{Br}_p(F)$ *ist erzeugt von den Brauerklassen der Symbol-Algebren* $[a, b)_F$ *mit* $a \in F$ *und* $b \in F^*$*.*

Für eine genauere Analyse dieser Symbol-Algebren verweisen wir auf die Durchsicht von [2]. Kommen wir nun zu dem für uns interessanten Bloch-Kato Theorem.

Theorem 4.8 *([22, Theo. 9.2.4]) Der auf Erzeugern definierte Homomorphismus*

$$\mathrm{Br}_p(F) \to H_p^2(F) \ , \ [a, b)_F \mapsto \overline{a \frac{\mathrm{d}b}{b}}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere gilt für $p = 2$ *dann* $\mathrm{Br}_2(F) \cong \overline{IW_q}(F)$*.*

Wie auch schon im vorangegangenen Abschnitt über Milnor-K-Gruppen erhalten wir also aus jedem Resultat über $H_p^2(F)$ ebenfalls eine Aussage über $\mathrm{Br}_p(F)$. Aus diesem Grund definieren wir für eine Körpererweiterung K/F dann

$$\mathrm{Br}_p(K/F) := \{A \in \mathrm{Br}_p(F) \mid A \text{ zerfällt über } K\}.$$

Mit Theorem 4.8 erhalten wir dann schließlich die Isomorphien $\mathrm{Br}_p(K/F) \cong H_p^2(K/F)$ und $\mathrm{Br}_2(K/F) \cong \overline{IW_q}(K/F)$ für $p = 2$.

Teil II

Neue Forschungsergebnisse im Bereich der Differentialformen, bilinearen Formen und quadratischen Formen

Kapitel 5

Annullatoren

Nachdem wir im ersten Teil die erforderlichen Grundlagen wiederholt und alle nötigen Notationen eingeführt haben, wollen wir nun in den Forschungsteil dieser Arbeit einsteigen. Ziel wird es sein, die Räume $\Omega^n(F)$, $\nu_n(F)$ und $H_p^{n+1}(F)$ unter rein inseparablen Körpererweiterungen und unter mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen zu studieren. Eines der Hilfsmittel, denen wir uns bedienen werden um diese Ω-Kerne, ν-Kerne und H-Kerne zu bestimmen sind die Annullatoren, die wir in diesem Kapitel einführen wollen. Eine erste Analyse der Annullatoren von Differentialformen wurde in [7] von Aravire und Baeza durchgeführt. Sie untersuchten dabei jeweils nur die Annullatoren einer einzelnen Form. Wir werden hier einen anderen Ansatz wählen und so deutlich allgemeinere Resultate erhalten, welche die Ergebnisse aus [7] dabei als Spezialfall beinhalten. Zudem werden wir hier, im Gegensatz zu [7], wieder mit Körper beliebiger positiver Charakteristik $p > 0$ arbeiten. Also sei weiterhin F wieder stets ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

Beginnen wir nun damit, Annullatoren in möglichst allgemeiner Form zu definieren.

Definition 5.1 Es sei $U \subset \Omega^r(F)$ eine nicht leere Teilmenge. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ann}\Omega_F^n(U) &:= \{\omega \in \Omega^n(F) \mid \omega \wedge u = 0 \in \Omega^{n+r}(F) \text{ für alle } u \in U\}\\
\operatorname{Ann}\nu_F^n(U) &:= \{\chi \in \nu_n(F) \mid \omega \wedge u = 0 \in \Omega^{n+r}(F) \text{ für alle } u \in U\}\\
\operatorname{Ann}H_F^{n+1}(U) &:= \{\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(F) \mid \overline{\omega \wedge u} = \overline{0} \in H_p^{n+r+1}(F) \text{ für alle } u \in U\}
\end{aligned}$$

und nennen diese kurz den Ω-Annullator, den ν-Annullator und den H-Annullator von U. Ist dabei $U = \{u\}$ einelementig, so schreiben wir kurz $\operatorname{Ann}\Omega_F^n(u)$ statt $\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\{u\})$ und nutzen diese Notation auch für den ν-Annullator und den H-Annullator.

Wie auch in Kapitel 3 gilt dabei $\operatorname{Ann}\nu_F^n(U) = \operatorname{Ann}\Omega_F^n(U) \cap \nu_n(F)$. Wenn wir also den ν-Annullator einer Menge U bestimmen wollen, können wir wieder zunächst den Ω-Annullator von U berechnen und diesen anschließend mit der Gruppe $\nu_n(F)$ schneiden.

Bemerkung 5.2 Es sei $U \subset \Omega^r(F)$ eine nicht leere Teilmenge. Gilt nun $\Omega^{n+r}(F) = \{0\}$, so sind die Annullatoren von U, unabhängig von U selbst, stets der ganze Raum $\Omega^n(F)$, bzw. $\nu_n(F)$, bzw. $H_p^{n+1}(F)$. In Kapitel 3 haben wir bereits gesehen, dass der Raum $\Omega^m(F)$ genau trivial ist, wenn F eine p-Basis $\mathcal{B}$ mit weniger als m Elementen besitzt. Eine Fallunterscheidung in die Fälle $|\mathcal{B}| < n$, $n \leq |\mathcal{B}| < n+r$ und $|\mathcal{B}| \geq n+r$ ist bei der Untersuchung von Annullatoren allerdings nicht nötig, da alle in dieser Arbeit aufgeführten Resultate auch in diesen Spezialfällen gültig sind und in den Beweisen nie eine notwendige Größe der verwendeten p-Basis vorausgesetzt wird. Dabei überlassen wir es allerdings dem Leser, sich von dieser Gültigkeit selbst zu überzeugen.

Da eine allgemeine Betrachtung von Annullatoren für unsere Ziele nicht zweckmäßig ist und Annullatoren im Allgemeinen stark von der zu annullierenden Menge U abhängen, werden wir uns in fast allen der folgenden Aussagen auf eine besondere Teilmenge von $\Omega^r(F)$ einschränken. Dazu definieren wir zunächst die folgende Menge.

Definition 5.3 Für nicht leere Teilmengen $S_1, \ldots, S_r \subset F$ definieren wir die Menge

$$\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r := \{\mathrm{d}s_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}s_r \mid s_i \in S_i \text{ für } i = 1, \ldots, r\} \subset \Omega^r(F).$$

Ist dabei eine der Mengen $S_1, \ldots, S_r$ einelementig, etwa $S_j = \{s_j\}$, so schreiben wir für diesen Slot kurz $\mathrm{d}s_j$ statt $\mathrm{d}S_j$.

5.1 Annullatoren in $\Omega^n(F)$

Wir wollen unsere Analyse von Annullatoren nun mit den Ω-Annullatoren beginnen. Dazu fassen wir zunächst einige offensichtliche, aber wichtige Eigenschaften eben dieser Annullatoren zusammen. Dabei bezeichne $\mathfrak{S}_r$ die symmetrische Gruppe.

Lemma 5.4 *Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F$ und $U, V \subset \Omega^r(F)$ jeweils nicht leere Teilmengen.*

(a) Es ist $(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) \cup \{0\} = (\mathrm{d}(S_1 \setminus F^p) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(S_r \setminus F^p)) \cup \{0\}$, falls $S_i \setminus F^p \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots, r$ gilt.

(b) Für alle $v \in \Omega^r(F)$ und $\lambda \in F^*$ ist $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(v) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\lambda v)$.

(c) Für alle $\pi \in \mathfrak{S}_r$ ist $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_{\pi(1)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_{\pi(r)}) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r)$.

(d) Ist $U \subset V$, so ist $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(V) \subset \operatorname{Ann}\Omega^n_F(U)$.

(e) Es gilt $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(U) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{sp}_F(U))$.

Analoge Aussagen gelten dabei auch für die jeweiligen ν-Annullatoren.

Beweis: Die Behauptung in (a) ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass $\mathrm{d}F^p = 0$ gilt. Die Behauptungen aus (b) und (d) sind trivial und (c) ist eine direkte Folgerung aus (b) und der Alterniertheit des Wedge-Produktes. Es bleibt also nur die Behauptung (e) zu beweisen, wobei die Inklusion $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{sp}_F(U)) \subset \operatorname{Ann}\Omega^n_F(U)$ wegen $U \subset \mathrm{sp}_F(U)$ und Teil (d) klar ist. Es sei also nun $\omega \in \operatorname{Ann}\Omega^n_F(U)$ und $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i u_i \in \mathrm{sp}_F(U)$ mit passenden $u_i \in U$, $\lambda_i \in F$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Dann folgt wegen $\omega \in \operatorname{Ann}\Omega^n_F(U)$ sofort

$$\omega \wedge \left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \omega \wedge u_i = \sum 0 = 0$$

und die zweite Inklusion ist gezeigt. Die analogen Aussagen der ν-Annullatoren folgen dann durch Schneiden der jeweiligen Ω-Annullatoren mit $\nu_n(F)$. $\square$

Wir können also nach Lemma 5.4 davon ausgehen, dass für die gegebenen Mengen $S_1, \ldots, S_r$ bei der Berechnung des Annullators $\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r)$ stets $S_i \subset F \setminus F^p$ für $i = 1, \ldots, r$ gilt. Auf dieselbe Weise könnten wir so auch $S_i \subset F^*$ für $i = 1, \ldots, r$ fordern. Als Folgerung aus Lemma 5.4 erhalten wir ebenfalls das folgende Korollar.

Korollar 5.5 *Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen. Dann ist*

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) = \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\ \mathrm{d}(F^p(S_1)) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(F^p(S_r))\ ).$$

Insbesondere gilt also für $p\text{-}\deg_F(S_i) = k_i \in \mathbb{N}$ und $F^p(S_i) = F^p(a_{i1}, \ldots, a_{ik_i})$ mit passenden p-unabhängigen $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i} \in F$ für $i = 1, \ldots, r$ dann

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) = \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\ \mathrm{d}\{a_{11}, \ldots, a_{1k_1}\} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\{a_{r1}, \ldots, a_{rk_r}\}\ ).$$

Eine analoge Aussage gilt auch für die jeweiligen ν-Annullatoren.

Beweis: Die Inklusion ($\supset$) folgt sofort aus Lemma 5.4(d) und der Tatsache, dass $\mathrm{d}S_i \subset \mathrm{d}(F^p(S_i))$ gilt. Beweisen wir also nun die umgekehrte Inklusion. Dazu sei $\{a_{ij_i} \mid j_i \in J_i\}$ eine p-Basis von $F^p(S_i)$ für $i = 1, \ldots, r$. Ohne Einschränkung können wir dabei $a_{ij_i} \in S_i$ für alle $j_i \in J_i$ wählen. Ist nun $x_i \in F^p(S_i)$ für $i = 1, \ldots, r$, so finden wir nach Proposition 3.11 stets endliche Teilmengen $T_i \subset J_i$ sowie passende $\lambda_{it_i} \in F$ für $t_i \in T_i$ mit $\mathrm{d}x_i = \sum_{t_i \in T_i} \lambda_{it_i} \mathrm{d}a_{it_i}$. Ist nun $\omega \in \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_r &= \omega \wedge \left(\sum_{t_1 \in T_1} \cdots \sum_{t_r \in T_r} \lambda_{1t_1} \ldots \lambda_{rt_r} \mathrm{d}a_{1t_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rt_r} \right) \\
&= \sum_{t_1 \in T_1} \cdots \sum_{t_r \in T_r} \lambda_{1t_1} \ldots \lambda_{rt_r} \omega \wedge \mathrm{d}a_{1t_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rt_r} = 0,
\end{aligned}$$

da die Form ω wegen $a_{it_i} \in S_i$ alle elementaren Wedge-Produkte $\mathrm{d}a_{1t_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rt_r}$ annulliert. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Eine Übertragung auf die ν-Annullatoren erhalten wir dann sofort durch Schneiden der jeweiligen Ω-Annullatoren mit $\nu_n(F)$. □

Ziel wird es nun sein, diese Ω-Annullatoren in möglichst vielen Fällen zu bestimmen, da diese in Kapitel 7 als Ω-Kern von Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen wieder auftauchen werden. Zur Vereinfachung der folgenden Beweise setzen wir zunächst die folgende Notation.

Notation 5.6 Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Für ein $c \in \mathcal{B}$ und ein $\sigma \in \Sigma_n$ schreiben wir kurz $c \in \operatorname{im}(\sigma)$, falls $c = c_i$ für ein passendes $i \in I$ ist und $i \in \operatorname{im}(\sigma)$ gilt. Eine analoge Schreibweise nutzen wir für Teilmengen $C \subset \mathcal{B}$ und $C \subset \operatorname{im}(\sigma)$.

Proposition 5.7 *Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen mit $p\text{-}\deg_F(S_i) = k_i \in \mathbb{N}$ und $F^p(S_i) = F^p(a_{i1}, \ldots, a_{ik_i})$ für $i = 1, \ldots, r$ mit passenden $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i} \in F$. Weiter sei $p\text{-}\deg_F(S_1 \cup \ldots \cup S_r) = k_1 + \ldots + k_r$, das heißt die Elemente $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r}$ sind p-unabhängig über F. Dann ist*

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F).$$

Insbesondere gilt also in diesem Fall

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_i).$$

Beweis: Zunächst können wir ohne Einschränkung $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i} \in S_i$ für $i = 1, \ldots, r$ wählen. Da die Elemente $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r}$ p-unabhängig sind, können wir sie zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F ergänzen und setzen ohne Einschränkung voraus, dass sie die kleinsten $k_1 + \ldots + k_r$ Elemente in $\mathcal{B}$ sind. Weiter seien die $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r}$ in $\mathcal{B}$ lexikographisch nach ihrem Index in I angeordnet. Wir betrachten nun die folgende Inklusionskette

$$\begin{aligned} \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) &\overset{5.5}{=} \bigcap_{j_1=1}^{k_1} \ldots \bigcap_{j_r=1}^{k_r} \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r}) \\ &\overset{(1)}{\subset} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F) \\ &\overset{(2)}{\subset} \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) \end{aligned}$$

und begründen zunächst die Gültigkeit der Inklusion (1). Dazu sei $(j_1, \ldots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^r \{1, \ldots, k_i\}$ fest gewählt und $\omega \in \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r})$. Schreiben wir nun ω in der F-Basis $\bigwedge_{\mathcal{B},0}^n$, so finden wir eindeutige $x_\sigma \in F$ mit $\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \, \mathrm{d}c_\sigma$. Nach Wahl von ω gilt dann

$$0 = \omega \wedge \mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \, \mathrm{d}c_\sigma \wedge \mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r}.$$

Die von Null verschiedenen elementaren Wedge-Produkte $\mathrm{d}c_\sigma \wedge \mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r}$ sind dabei (möglicherweise nach Umsortierung der Slots) paarweise verschiedene Elemente der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B},0}^{n+r}$ von $\Omega^{n+r}(F)$, also insbesondere linear unabhängig. Damit muss also stets $x_\sigma = 0$ gelten, falls $\{a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}\} \cap \operatorname{im}(\sigma) = \varnothing$ ist.

Wählen wir nun ein $\omega \in \bigcap_{j_1=1}^{k_1} \ldots \bigcap_{j_r=1}^{k_r} \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r})$, so muss die obige Bedingung für alle $(j_1, \ldots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^r \{1, \ldots, k_i\}$ erfüllt sein. Setzen wir also

$$\Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)} := \Big\{\sigma \in \Sigma_n \mid \text{ für alle } (j_1, \ldots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^{r} \{1, \ldots, k_i\} \text{ ist } \{a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}\} \cap \operatorname{im}(\sigma) \neq \varnothing\Big\},$$

so gilt $\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}} x_\sigma \, \mathrm{d}c_\sigma$. Wir beweisen nun $\omega \in \sum_{i=1}^r \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F)$. Dazu zeigen wir, dass jede der Formen $\mathrm{d}c_\sigma$ mit $\sigma \in \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}$ von mindestens einer der Formen $\mathrm{d}a_{11} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{1k_1}, \ldots, \mathrm{d}a_{r1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{rk_r}$ geteilt wird. Nehmen wir dazu an, dass dies nicht der Fall ist und es also ein $\sigma \in \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}$ gibt, sodass $\mathrm{d}c_\sigma$ von keiner dieser Formen geteilt wird. Dann muss es für $i = 1, \ldots, r$ stets mindestens ein $\ell_i \in \{1, \ldots, k_i\}$ geben mit $\mathrm{d}a_{i\ell_i} \nmid \mathrm{d}c_\sigma$. Aber dann erhalten wir einen Widerspruch, da wegen $(\ell_1, \ldots, \ell_r) \in \bigtimes_{i=1}^r \{1, \ldots, k_i\}$ und $\{a_{1\ell_1}, \ldots, a_{r\ell_r}\} \cap \operatorname{im}(\sigma) = \varnothing$ dann $\sigma \notin \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}$ folgt.

Beweisen wir nun noch die Inklusion (2). Sei dazu $\omega \in \sum_{i=1}^r \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F)$. Dann finden wir $u_i \in \Omega^{n-k_i}(F)$ für $i = 1, \ldots, r$ mit $\omega = \sum_{i=1}^r \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge u_i$. Weiter sei $\mathrm{d}s_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}s_r \in \mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\omega \wedge \mathrm{d}s_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}s_r \\ = &\sum_{i=1}^{r} (-1)^{n+i-k_i-1} \, \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \mathrm{d}s_i \wedge u_i \wedge \mathrm{d}s_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}s_{i-1} \wedge \mathrm{d}s_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}s_r. \end{aligned}$$

Da aber wegen $p\text{-}\deg_F(S_i) = k_i$ die $k_i + 1$ Elemente $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}, s_i \in S_i$ p-abhängig sind, gilt also $\mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \mathrm{d}s_i = 0$ nach Lemma 3.10 und dies in die obige Gleichung eingesetzt liefert dann schließlich die zu zeigenden Aussage $\omega \wedge \mathrm{d}s_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}s_r = 0$. □

Als Korollar aus Proposition 5.7 erhalten wir sofort das folgende Resultat.

Korollar 5.8 *Es seien $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r} \in F$ p-unabhängig und $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F, die diese Elemente enthält. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F) = \Bigg\{ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \,\mathrm{d}c_\sigma \mid \textit{für alle } (j_1, \ldots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^{r} \{1, \ldots, k_i\} \; \textit{ist } \{a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}\} \cap \mathrm{im}(\sigma) \neq \varnothing \Bigg\}.$$

Insbesondere ist mit $T_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}\}$ für $i = 1, \ldots, r$ dann

$$\mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\mathrm{d}T_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}T_r) = \sum_{i=1}^{r} \bigcap_{j_i=1}^{k_i} \mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{ij_i}) = \bigcap_{j_1=1}^{k_1} \cdots \bigcap_{j_r=1}^{k_r} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{ij_i}).$$

Beweis: Die Aussage ergibt sich aus dem Beweis der Proposition 5.7 und dem Lemma 3.36. □

In Proposition 5.7 haben wir den Ω-Annullator von $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r$ für in gewissem Sinne maximal unabhängige Mengen $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ bestimmt. In der folgenden Proposition wollen nun den Ω-Annullator des entgegengesetzten Falles, das heißt den Annullator für maximal abhängige Mengen $S_1, \ldots, S_r$ bestimmen.

Proposition 5.9 *Es sei $S \subset F \setminus F^p$ eine nicht leere Teilmenge, $p\text{-}\deg_F(S) = k \in \mathbb{N}$ und $F^p(S) = F^p(a_1, \ldots, a_k)$ für passende $a_1, \ldots, a_k \in F$. Für $r \in \{1, \ldots, k\}$ setze $t = k - r + 1$. Dann ist*

$$\mathrm{Ann}\,\Omega_F^n\left(\bigwedge^r \mathrm{d}S\right) = \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_t\} \subset \{1,\ldots,k\} \\ i_1 < \ldots < i_t}} \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F).$$

Für $r > k$ ist $\mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\bigwedge^r \mathrm{d}S) = \Omega^n(F)$.

Beweis: Wie auch schon zuvor wählen wir ohne Einschränkung $a_1, \ldots, a_k \in S$. Zunächst ist klar, dass für $r > k$ dann $\bigwedge^r \mathrm{d}S = \{0\}$ gilt, da wegen $p\text{-}\deg_F(S) = k$ keine r-elementige p-unabhängige Menge in S existieren kann. Damit erhalten wir sofort $\mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\bigwedge^r \mathrm{d}S) = \Omega^n(F)$.

Es sei also nun $r \in \{1, \ldots, k\}$ und $t = k - r + 1$. Wegen Korollar 5.5 reicht es den Fall $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ zu betrachten. Da die Elemente $a_1, \ldots, a_k$ p-unabhängig sind, können wir sie zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \in I\}$ von F ergänzen. Dabei sei die Menge I so angeordnet, dass die $a_1, \ldots, a_k$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich $a_1 < \ldots < a_k$ gilt. Weiter ist dann

$$\bigwedge^r \mathrm{d}S = \{\pm\, \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r} \mid \{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, k\} \text{ mit } j_1 < \ldots < j_r\} \cup \{0\}.$$

Wie im vorherigen Beweis ergibt sich dann also mittels Lemma 5.4

$$\mathrm{Ann}\,\Omega_F^n\left(\bigwedge^r \mathrm{d}S\right) = \bigcap_{\substack{\{j_1,\ldots,j_r\} \subset \{1,\ldots,k\} \\ j_1 < \ldots < j_r}} \mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r}).$$

Es sei nun eine Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $j_1 < \ldots < j_r$ fest gewählt und $\omega \in \mathrm{Ann}\,\Omega_F^n(\mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r})$. Schreiben wir ω in der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B},0}^n$, so ist $\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \,\mathrm{d}c_\sigma$ mit eindeutigen $x_\sigma \in F$ (fast alle $x_\sigma = 0$) und nach Voraussetzung gilt

$$0 = \omega \wedge \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_\sigma \,\mathrm{d}c_\sigma \wedge \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r}.$$

Die von Null verschiedenen Wedge-Produkte $\mathrm{d}c_\sigma \wedge \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r}$ sind dabei (möglicherweise nach Umsortierung der Slots) in der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B},0}^{n+r}$ enthalten und paarweise verschieden, das heißt sie sind insbesondere linear unabhängig. Es ist also $x_\sigma = 0$ wenn $\mathrm{d}c_\sigma \wedge \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r} \neq 0$, das heißt, wenn $\mathrm{im}(\sigma) \cap \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}\} = \varnothing$ gilt.

Da diese Bedingung für $\omega \in \mathrm{Ann}\, \Omega_F^n(\bigwedge^r \mathrm{d}S)$ dann für alle Teilmengen $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $j_1 < \ldots < j_r$ gelten muss, ergibt sich damit dann in der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B},0}^n$ die Darstellung

$$\omega = \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_n, \forall \{j_1,\ldots,j_r\} \subset \{1,\ldots,k\} \\ \text{mit } j_1 < \ldots < j_r \\ \text{ist } \mathrm{im}(\sigma) \cap \{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}\} \neq \varnothing}} x_\sigma \, \mathrm{d}c_\sigma.$$

Es sei nun ein $\sigma \in \Sigma_n$ gegeben mit der Eigenschaft, dass für alle Teilmengen $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $j_1 < \ldots < j_r$ stets $\mathrm{im}(\sigma) \cap \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}\} \neq \varnothing$ gilt. Wir werden nun zeigen, dass es dann eine t-elementige Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_t\} \subset \{1, \ldots, k\}$ gibt mit $\mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \mid \mathrm{d}c_\sigma$.

Zunächst existiert nach Voraussetzung an σ mindestens ein $a_{i_1} \in S$ mit $\mathrm{d}a_{i_1} \mid \mathrm{d}c_\sigma$. Ist $t = 1$ sind wir fertig. Ist $t \geq 2$, so folgt $|S \setminus \{a_{i_1}\}| \geq r$ und wir wählen eine beliebige r-elementige Menge in $S \setminus \{a_{i_1}\}$. Da die Form $\mathrm{d}c_\sigma$ dann mindestens eines dieser Elemente als Slot enthält, finden wir also auf diese Weise ein $i_2 \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i_1\}$ mit $\mathrm{d}a_{i_2} \mid \mathrm{d}c_\sigma$. Nach Lemma 3.36 folgt dann $\mathrm{d}a_{i_1} \wedge \mathrm{d}a_{i_2} \mid \mathrm{d}c_\sigma$. Ist nun $t = 2$, so sind wir fertig. Ist $t \geq 3$, so folgt $|S \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}\}| \geq r$ und wir können die eben durchgeführte Prozedur wiederholen, bis wir im Schritt $\ell \in \mathbb{N}$ die paarweise verschiedenen Elemente $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_\ell} \mid \mathrm{d}c_\sigma$ konstruiert haben und $|S \setminus \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_\ell}\}| = r - 1$ gilt. Dann folgt aber $k - \ell = r - 1$, das heißt, es ist $\ell = k - r + 1 = t$ und zu $\mathrm{d}c_\sigma$ haben wir also auf diese Weise eine t-elementige Menge $\{i_1, \ldots, i_t\} \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \mid \mathrm{d}c_\sigma$ gefunden. Damit ist die erste Inklusion der Behauptung gezeigt.

Für die zweite Inklusion reicht es zu zeigen, dass für jede t-elementige Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_t\} \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $i_1 < \ldots < i_t$ und jede r-elementige Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $j_1 < \ldots < j_r$ dann

$$\mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_r} = 0$$

gilt. Dazu zeigen wir, dass $\{i_1, \ldots, i_t\} \cap \{j_1, \ldots, j_r\} \neq \varnothing$ gilt und die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.10. Nehmen wir also an, die beiden Mengen seien disjunkt. Dann folgt sofort der Widerspruch

$$k \geq |\{i_1, \ldots, i_t\} \cup \{j_1, \ldots, j_r\}| = t + r = k - r + 1 + r = k + 1$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Bemerkung 5.10 (a) Wir können die Voraussetzungen aus Proposition 5.9 durchaus noch weiter abschwächen. Anstatt einer nicht leeren Menge $S \subset F \setminus F^p$ können wir auch r nicht leere Menge $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ mit $F^p(S_1) = \ldots = F^p(S_r)$ von endlichem p-Grad wählen. Nach Korollar 5.5 stimmen dann die Ω-Annullatoren von $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r$ und $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_1$ überein und Proposition 5.9 ist anwendbar.

(b) Das obige Resultat und vor allem auch der Beweis der Proposition 5.9 kann auch rein kombinatorisch aufgefasst werden. Dabei haben wir das folgende Ergebnis bewiesen.

Es seien $n, k, r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq k$. Setze $t = k - r + 1$. Weiter sei B eine Menge mit $|B| \geq \max\{k, n\}$, S eine k-elementige Teilmenge von B und C eine n-elementige Teilmenge von B. Ist $n \geq t$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Für jede r-elementige Teilmenge J von S ist $|C \cap J| \geq 1$.

(ii) Es existiert eine t-elementige Teilmenge I von S mit $I \subset C$.

Ähnlich könnte man auch Korollar 5.8 als eine solche rein kombinatorische Aussage formulieren.

Eine weiterführende vollständige Klassifikation der Annullatoren $\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r)$ für nicht leere Mengen $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ scheint kompliziert zu sein. Wir wollen dennoch versuchen, diesen Annullator in so vielen Fällen wie möglich zu bestimmen oder zumindest einzuschränken. Die ersten natürlichen Schranken für den Ω-Annullator der Menge $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r$ erhalten wir durch das folgende Lemma.

Lemma 5.11 *Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen und $p\text{-}\deg_F(S_i) = k_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, r$. Weiter sei $[F^p(S_1, \ldots, S_i) : F^p(S_1, \ldots, S_{i-1})] = p^{\ell_i}$ mit $0 \leq \ell_i \leq k_i$ und $b_{i1}, \ldots, b_{i\ell_i} \in F$ so, dass $F^p(S_1, \ldots, S_i) = F^p(S_1, \ldots, S_{i-1})(b_{i1}, \ldots, b_{i\ell_i})$ gilt. Ergänzen wir die $b_{i1}, \ldots, b_{i\ell_i}$ durch passende $b_{i\ell_i+1}, \ldots, b_{ik_i} \in F$ zu einer p-Basis von $F^p(S_i)$, so gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F) \subset \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) \subset \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_{i\ell_i} \wedge \Omega^{n-\ell_i}(F).$$

Beweis: Die erste Inklusion ist klar und wird ganz analog zum Beweis von Proposition 5.7 gezeigt. Außerdem können wir ohne Einschränkung $b_{ij} \in S_i$ für $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, k_i$ annehmen. Um die zweite Inklusion zu zeigen, setzen wir $T_i = \{b_{i1}, \ldots, b_{i\ell_i}\}$. Dann gilt wegen $\mathrm{d}T_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}T_r \subset \mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r$ offensichtlich

$$\begin{aligned} \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) &\overset{5.5}{=} \operatorname{Ann}\Omega_F^n\left(\mathrm{d}\{b_{11}, \ldots, b_{1k_1}\} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\{b_{r1}, \ldots, b_{rk_r}\}\right) \\ &\subset \operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}T_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}T_r). \end{aligned}$$

Da die Elemente $b_{11}, \ldots, b_{1\ell_1}, \ldots, b_{r1}, \ldots, b_{r\ell_r}$ aber nach Konstruktion p-unabhängig sind, folgt die Behauptung dann durch Proposition 5.7. □

In Lemma 5.11 gilt dabei stets $\ell_1 = k_1$ und beide Schranken fallen unter den Voraussetzungen von Proposition 5.7 zusammen. Die Aussage gilt auch dann, wenn eines der $\ell_i = 0$ ist, allerdings entspricht dann der zu diesem ℓ_i gehörende Summand der oberen Schranke dem ganzen Raum $\Omega^n(F)$. Die obere Schranke für den Ω-Annullator hat damit also für uns in diesem Fall keinen Wert mehr. Es ist zudem wichtig zu bemerken, dass die Werte ℓ_i natürlich von der Reihenfolge der S_i abhängen, der Ω-Annullator nach Lemma 5.4 aber nicht. Wir können Lemma 5.11 demnach wie folgt verschärfen.

Korollar 5.12 *Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen mit $p\text{-}\deg_F(S_i) = k_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, r$. Weiter sei für $\pi \in \mathfrak{S}_r$ dann $[F^p(S_{\pi(1)}, \ldots, S_{\pi(i)}) : F^p(S_{\pi(1)}, \ldots, S_{\pi(i-1)})] = p^{\ell_i(\pi)}$ mit $0 \leq \ell_i(\pi) \leq k_{\pi(i)}$ und $b_{i1}^\pi, \ldots, b_{i\ell_i(\pi)}^\pi \in F$ so, dass*

$$F^p(S_{\pi(1)}, \ldots, S_{\pi(i)}) = F^p(S_{\pi(1)}, \ldots, S_{\pi(i-1)})(b_{i1}^\pi, \ldots, b_{i\ell_i(\pi)}^\pi)$$

für $i = 1, \ldots, r$ gilt. Dann ist

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) \subset \bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_{i1}^\pi \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_{i\ell_i(\pi)}^\pi \wedge \Omega^{n-\ell_i(\pi)}(F) \right).$$

Wir wollen nun Lemma 5.11 und Korollar 5.12 mit Hilfe einiger Beispiele etwas genauer betrachten und dabei zeigen, dass die Inklusionen beider Resultate durchaus echt sein können.

Beispiel 5.13 Das folgende Beispiel zeigt zunächst, dass beide Inklusionen in Lemma 5.11 echt sein können. Dazu wählen wir den Körper $F = \mathbb{F}_p(a, b, c, e)$ mit Variablen a, b, c, e. Weiter setzen wir $r = 2$ und wählen $S_1 = \{a, b\}$ und $S_2 = \{a, c\}$. Offensichtlich gilt dann

$$\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2 = \{\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c,\ \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}a,\ \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c,\ 0\}$$

und damit folgt $\mathrm{sp}_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) = \mathrm{sp}_F(\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}T)$ für $T = \{a, b, c\}$. Nach Lemma 5.4 stimmen die Ω-Annullatoren der beiden Mengen $\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2$ und $\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}T$ überein und aus Proposition 5.9 folgt dann mit einer Sortierung $a < b < c$ für den Annullator

$$\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-2}(F).$$

Wenden wir nun Lemma 5.11 auf den Annullator $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2)$ an, so erhalten wir $k_1 = \ell_1 = 2$, $k_2 = 2$, $\ell_2 = 1$ und wählen passend $b_{11} = a, b_{12} = b$ sowie $b_{21} = c$ und $b_{22} = a$. Für die untere Schranke aus Lemma 5.11 folgt dann

$$\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-2}(F) \subset \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2).$$

Diese Inklusion ist echt, denn für $n = 2$ gilt

$$\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c \in \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) \setminus (F\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b + F\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c)\,.$$

Als obere Schranke für den Ω-Annullator von $\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2$ liefert Lemma 5.11 dann

$$\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) \subset \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-1}(F).$$

Auch diese Inklusion ist dabei echt, denn für $n = 1$ ist $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) = \{0\}$ aber es ist $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{-1}(F) + F\,\mathrm{d}c = F\,\mathrm{d}c \neq \{0\}$.

Wenden wir allerdings das stärkere Korollar 5.12 an um eine obere Schranke für den Annullator $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2)$ zu bestimmen, so herrscht in diesem Fall Gleichheit. Um dies nachzuprüfen sei π die in $\mathfrak{S}_2$ von id verschiedene Permutation (12). Zusätzlich zu den obigen Werten b_{ij} (die dann b^{id}_{ij} entsprechen) wählen wir dann wie in Korollar 5.12 beschrieben $\ell_1(\pi) = 2 = k_2$, $\ell_2(\pi) = 1 < 2 = k_1$ und $b^\pi_{11} = a, b^\pi_{12} = c, b^\pi_{21} = b, b^\pi_{22} = a$. Der Ω-Annullator $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2)$ ist also Teilmenge von

$$\mathfrak{A} := \Big(\ \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-1}(F)\ \Big) \cap \Big(\ \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-1}(F)\ \Big)\,.$$

Wir wählen nun die p-Basis $\mathcal{B} = \{a, b, c, e\}$ mit Anordnung $a < b < c < e$ und schreiben $\omega \in \mathfrak{A}$ in der F-Basis $\bigwedge^n_{\mathcal{B},0}$ als $\omega = \sum_\sigma x_\sigma\,\mathrm{d}c_\sigma$. Für jedes $\sigma \in \Sigma_n$ mit $x_\sigma \neq 0$ gilt dann mindestens einer der folgenden vier Fälle

- $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b$ und $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c$ teilen $\mathrm{d}c_\sigma$;
- $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b$ und $\mathrm{d}b$ teilen $\mathrm{d}c_\sigma$;
- $\mathrm{d}c$ und $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c$ teilen $\mathrm{d}c_\sigma$;
- $\mathrm{d}c$ und $\mathrm{d}b$ teilen $\mathrm{d}c_\sigma$, das heißt $\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c$ teilt $\mathrm{d}c_\sigma$.

In allen vier Fällen teilt also mindestens eine der Formen $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b, \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c, \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c$ die Form $\mathrm{d}c_\sigma$ und damit folgt $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) = \mathfrak{A}$. Es stellt sich nun die Frage, ob für die in Korollar 5.12

beschriebene Inklusion stets Gleichheit gilt. Dies ist allerdings nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

Über demselben Körper $F = \mathbb{F}_p(a, b, c, e)$ seien nun $S_1 = \{a, b, c\}$ und $S_2 = \{a, b, e\}$. Wir wollen nun mit Hilfe von Korollar 5.12 eine obere Schranke des Ω-Annullators $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2)$ konstruieren. Dazu bezeichne $\pi \in \mathfrak{S}_2$ wieder die von id verschiedene Permutation in $\mathfrak{S}_2$. Wie in Korollar 5.12 beschrieben, wählen wir dann die folgenden Elemente:

$$\begin{aligned} \ell_1(\mathrm{id}) = 3,\ \ell_2(\mathrm{id}) = 1 \ \text{ und } \ b^{\mathrm{id}}_{11} = a,\ b^{\mathrm{id}}_{12} = b,\ b^{\mathrm{id}}_{13} = c \ \ b^{\mathrm{id}}_{21} = e \\ \ell_1(\pi) = 3,\ \ell_2(\pi) = 1 \ \text{ und } \ b^{\pi}_{11} = a,\ b^{\pi}_{12} = b,\ b^{\pi}_{13} = e \ \ b^{\pi}_{21} = c. \end{aligned}$$

Der Ω-Annullator $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2)$ ist für $n = 2$ dann also Teilmenge von

$$\mathrm{d}e \wedge \Omega^1(F) \cap \mathrm{d}c \wedge \Omega^1(F) \stackrel{3.36}{=} F\,\mathrm{d}e \wedge \mathrm{d}c.$$

Für $\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \in \mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2$ gilt allerdings $\mathrm{d}e \wedge \mathrm{d}c \wedge \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \neq 0$ nach Voraussetzung. Damit ist die in Korollar 5.12 beschriebene Inklusion in diesem Beispiel echt. Wie zuvor können wir den Ω-Annullator in diesem Beispiel ebenfalls exakt bestimmen, da mit $T = \{a, b, c, e\}$ wieder $\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \mathrm{d}S_2) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}T)$ gilt.

Auch wenn wir in Beispiel 5.13 gezeigt haben, dass die Inklusionen in Lemma 5.11 und Korollar 5.12 echt sein können, so können wir mit Hilfe dieser Ergebnisse dennoch den folgenden Ω-Annullator bestimmen.

Proposition 5.14 *Es seien $S_1, \ldots, S_{r+1} \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen mit $p\text{-}\deg_F(S_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ und $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_{r+1} \neq \{0\}$. Dann existieren p-unabhängige $a_1, \ldots, a_r \in F$ mit $F^p(S_i) = F^p(a_i)$. Weiter sei $p\text{-}\deg_F(\{a_1, \ldots, a_r\} \cup S_{r+1}) = r + \ell \in \mathbb{N}$ und $F^p(a_1, \ldots, a_r)(S_{r+1}) = F^p(a_1, \ldots, a_r)(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$. Dann ist $\ell \geq 1$ und*

$$\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r \wedge \mathrm{d}S_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F).$$

Beweis: Ohne Einschränkung können wir zunächst $S_i = \{a_i\}$ für $i = 1, \ldots, r$ voraussetzen. Zunächst ist klar, dass die $a_1, \ldots, a_r$ p-unabhängig sind, da ansonsten $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \wedge \mathrm{d}S_{r+1} = \{0\}$ folgen würde. Außerdem gilt $\ell \geq 1$, da sonst $S_{r+1} \subset F^p(a_1, \ldots, a_r)$ folgt und damit wieder der Widerspruch $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \wedge \mathrm{d}S_{r+1} = \{0\}$ entsteht. Wir können also das Lemma 5.11 anwenden und erhalten somit sofort die Inklusion ($\subset$).

Kommen wir also nun zur umgekehrten Inklusion und setzen dazu $\{a_1, \ldots, a_r\} \cup S_{r+1} = T_{r+1}$. Mit dieser Menge gilt dann offensichtlich

$$\operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \wedge \mathrm{d}S_{r+1}) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \wedge \mathrm{d}T_{r+1})$$

und wir können wieder ohne Einschränkung $T_{r+1} = \{a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_\ell\}$ wählen. Es reicht nun aus zu zeigen, dass die Formen $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_r$ und die Form $\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell$ jedes Element in $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \wedge \mathrm{d}T_{r+1}$ annullieren. Diese annullierende Eigenschaft ist für $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_r$ offensichtlich erfüllt. Schließlich gilt auch

$$\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \wedge \mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } x \in \{a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_\ell\} = T_{r+1}.$$

$\square$

5.2 Annullatoren in $\nu_n(F)$

Wir wollen in diesem Abschnitt nun die gewonnenen Kenntnisse der Ω-Annullatoren auch auf die ν-Annullatoren derselben Mengen übertragen. Dabei werden wir versuchen, die hier betrachteten ν-Annullatoren stets mittels logarithmischen Erzeugern zu beschreiben um diese dann später mittels Katos Isomorphismus 3.19 auf den bilinearen Wittring übertragen zu können. Zunächst halten wir fest, dass für nicht leere Mengen $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ (oder auch für nicht leere $S_1, \ldots, S_r \subset F^*$) die Ω-Annullatoren und damit auch die ν-Annullatoren der Mengen $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r$ und $\{\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_r}{s_r} \mid s_i \in S_i \text{ für } i = 1, \ldots, r\}$ wegen Lemma 5.4 übereinstimmen. Dies ermöglicht ebenfalls eine Übertragung der zu annullierenden Menge mittels Katos Isomorphismus.

Das größte Problem bei der Bestimmung der ν-Annullatoren liefert dabei die Berechnung der Menge

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F)\right) \cap \nu_n(F), \tag{5.2.1}$$

für passende $a_{ij} \in F$ und $k_i \in \mathbb{N}$. Halten wir zunächst die folgende Observation fest.

Lemma 5.15 *Es seien $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in F$ für $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k_i$. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\mathrm{d}y_{i1}}{y_{i1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_{ik_i}}{y_{ik_i}} \;\middle|\; y_{i1}, \ldots, y_{ik_i} \in F^p(a_{i1}, \ldots, a_{ik_i})^*\right] \wedge \nu_{n-k_i}(F)$$
$$\subset \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F)\right) \cap \nu_n(F).$$

Beweis: Offensichtlich reicht es wegen

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F) \cap \nu_n(F)\right) \subset \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F)\right) \cap \nu_n(F)$$

die Behauptung für $r = 1$ zu beweisen. Dazu schreiben wir kurz $a_{11} = a_1, \ \ldots, \ a_{1k_1} = a_k$. Weiter können wir voraussetzen, dass die $a_1, \ldots, a_k$ p-unabhängig sind, denn wären sie es nicht, so wäre die Inklusion trivialerweise wegen $\{0\} \subset \{0\}$ erfüllt. Es sei also eine Form $v = \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_k}{y_k} \wedge \chi$ mit $y_1, \ldots, y_k \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^*$ und $\chi \in \nu_{n-k}(F)$ gegeben. Da die Elemente $a_1, \ldots, a_k$ eine p-Basis von $F^p(a_1, \ldots, a_k)$ bilden, existieren eindeutige $\lambda_{ij} \in F$ für $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k$ mit $\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\, \mathrm{d}a_j$. Damit erhalten wir dann

$$v = \left(\sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_k=1}^{k} \frac{\lambda_{1j_1} \ldots \lambda_{kj_k}}{y_1 \cdots y_k} \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_k}\right) \wedge \chi \in \left(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k \wedge \Omega^{n-k}(F)\right) \cap \nu_n(F),$$

denn es ist $v \in \nu_n(F)$ und für jedes $(j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, k\}^k$ gilt

$$\mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_k} \in \{\pm\, \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k, \ 0\}.$$

□

Dabei stellt sich die natürliche Frage, ob für p-unabhängige $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r}$ in Lemma 5.15 Gleichheit herrscht. Wir werden später sehen, dass eine solche Gleichheit dann einem additivem Verhalten der ν-Annullatoren analog zu Proposition 5.7 entsprechen würde. Dies ist allerdings nicht der Fall und wir werden diese Tatsache am Ende des Abschnitts an einem Beispiel genauer untersuchen.

Um nun den Schnitt in Gleichung (5.2.1) in verschiedenen Fällen berechnen zu können, werden wir wiederholt das Lemma von Kato verwenden. Dazu müssen wir immer wieder vereinzelt die $(p-1)$-Abgeschlossenheit des Körpers F fordern.

Proposition 5.16 *Es seien $a_1, \dots, a_r, e_1, \dots, e_\ell \in F$ p-unabhängige Elemente, $r, \ell \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $F^{p-1} = F$. Dann ist*

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F)\right) \cap \nu_n(F) \\
= &\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^p(a_1, \dots, a_r)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F) \\
&+ \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\Big|\; y_1, \dots, y_\ell \in F^p(a_1, \dots, a_r, e_1, \dots, e_\ell) \setminus F^p(a_1, \dots, a_r)\right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist für $\ell = 0$ also

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F)\right) \cap \nu_n(F) = \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^p(a_1, \dots, a_r)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F)$$

und für $r = 0$ dann

$$\left(\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F)\right) \cap \nu_n(F) = \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\Big|\; y_1, \dots, y_\ell \in F^p(e_1, \dots, e_\ell)^*\right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).$$

Beweis: Wir beginnen mit der Inklusion ($\supset$) und wählen dazu eine Form $v = \frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \chi$ mit $x \in F^p(a_1, \dots, a_r)^*$ und $\chi \in \nu_{n-1}(F)$. Da die $a_1, \dots, a_r$ eine p-Basis von $F^p(a_1, \dots, a_r)$ bilden, existieren passende $\lambda_i \in F$ für $i = 1, \dots, r$ mit $\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, \mathrm{d}a_i$. Damit ergibt sich dann

$$v = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{x} \, \mathrm{d}a_i\right) \wedge \chi = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \left(\frac{\lambda_i}{x} \chi\right) \in \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F)\right) \cap \nu_n(F).$$

Ist andererseits $v = \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \wedge \eta$ mit $y_1, \dots, y_\ell \in F^p(a_1, \dots, a_r, e_1, \dots, e_\ell) \setminus F^p(a_1, \dots, a_r)$ und $\eta \in \nu_{n-\ell}(F)$ gegeben, so finden wir analog zu eben für $j = 1, \dots, \ell$ eine Darstellung

$$\mathrm{d}y_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} \, \mathrm{d}a_i + \sum_{m=1}^{\ell} \mu_{jm} \, \mathrm{d}e_m \quad \text{mit } \lambda_{ji}, \mu_{jm} \in F.$$

Durch eine ähnliche Rechnung wie zuvor erhalten wir dann

$$\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_\ell = q \, \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell + z \text{ für ein } q \in F \text{ und } z \in \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{\ell-1}(F). \tag{5.2.2}$$

Für $v \in \nu_n(F)$ folgt dann also insgesamt

$$\begin{aligned}
v &= (y_1 \ldots y_\ell)^{-1} q \, \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \eta + (y_1 \ldots y_\ell)^{-1} z \wedge \eta \\
&= \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \left(q (y_1 \ldots y_\ell)^{-1} \eta\right) + z \wedge \left((y_1 \ldots y_\ell)^{-1} \eta\right) \\
&\in \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F)\right) \cap \nu_n(F)
\end{aligned}$$

und die erste Inklusion ist gezeigt.

Betrachten wir nun die umgekehrte Inklusion ($\subset$). Dazu ergänzen wir $a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_\ell$ zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F. Dabei sei die Indexmenge I so angeordnet, dass die Elemente $a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_\ell$ die kleinsten $r + \ell$ Elemente in $\mathcal{B}$ mit Ordnung $a_1 < \ldots < a_r < e_1 < \ldots < e_\ell$ sind. Es sei nun $\omega \in \left(\sum_{i=1}^r \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}\right) \cap \nu_n(F)$. Schreiben wir ω in der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B}}^n$ und ist $\max_{\mathcal{B}}(\omega) = \delta$ der maximale Multiindex von ω bezüglich $\mathcal{B}$, so ist

$$\omega = \sum_{\sigma \leq \delta} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} = x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega_{<\delta} \quad \text{mit } x_\sigma \in F \text{ und } \omega_{<\delta} \in \Omega^n_{<\delta}(F). \tag{5.2.3}$$

Wie in Bemerkung 3.37 beschrieben, können wir ohne Einschränkung $|\,\mathcal{B}\,| < \infty$ voraussetzen und damit ist auch Σ_n endlich. Da $\wp$ die Filtrierung von $\Omega^n(F)$ erhält, gilt also nach Voraussetzung

$$\wp(x_\delta) \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega^n_{<\delta}(F).$$

Wegen $F^{p-1} = F$ können wir das Lemma von Kato 3.16 anwenden und erhalten damit

$$x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} + v_{<\delta} \quad \text{mit } y_i \in F^*_{\delta(i)} \text{ und } v_{<\delta} \in \Omega^n_{<\delta}(F). \tag{5.2.4}$$

Nach Voraussetzung gilt für $\mathrm{d}c_\delta$ nun mindestens einer der beiden folgenden Fälle:

(i) Es existiert ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\mathrm{d}a_i \mid \mathrm{d}c_\delta$;

(ii) Es gilt $\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \mid \mathrm{d}c_\delta$.

Nehmen wir zunächst an, dass Fall (i) gilt. Dazu sei $s \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $\mathrm{d}a_s \mid \mathrm{d}c_\delta$ und $\mathrm{d}a_i \nmid \mathrm{d}c_\delta$ für $i = 1, \ldots, s-1$ erfüllt ist. Wegen der passenden Anordnung der p-Basis $\mathcal{B}$ ist dann also $c_{\delta(1)} = a_s$, da die $a_1, \ldots, a_r$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind. In Gleichung (5.2.4) ist dann $y_1 \in F^p(a_1, \ldots, a_s)^* \subset F^p(a_1, \ldots, a_r)^*$ und dieses Ergebnis eingesetzt in Gleichung (5.2.3) liefert dann

$$\omega = \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} + \omega_{<\delta} + v_{<\delta}.$$

Da wir wegen $y_1 \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^*$ nach der ersten Inklusion bereits wissen, dass $\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} \in \left(\sum_{i=1}^r \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F)\right) \cap \nu_n(F)$ gilt, folgt dann also

$$\omega_{<\delta} + v_{<\delta} = \omega - \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} \in \left(\sum_{i=1}^r \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F)\right) \cap \nu_n(F).$$

Die Behauptung folgt dann durch Induktion über den maximalen Multiindex $\max_{\mathcal{B}}(\omega) = \delta$.

Betrachten wir nun den Fall (ii), das heißt es gelte $\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \mid \mathrm{d}c_\delta$ und wegen des bereits geprüften Falls (i) können wir zusätzlich noch annehmen, dass $\mathrm{d}a_i \nmid \mathrm{d}c_\delta$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt. Wegen der Anordnung von $\mathcal{B}$ ist dann also $c_{\delta(1)} = e_1, \ldots, c_{\delta(\ell)} = e_\ell$. In Gleichung (5.2.4) folgt für $j = 1, \ldots, \ell$ dann

$$y_j \in F^p(a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_j)^* \;, \quad \text{also } y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots e_\ell)^*.$$

Wie im Fall (i) erhalten wir dann aus Gleichung (5.2.3) und der ersten Inklusion der zu zeigenden Aussage

$$\omega_{<\delta} + v_{<\delta} = \omega - \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} \in \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F) \right) \cap \nu_n(F)$$

und die Behauptung folgt ebenfalls wieder mit Induktion über $\max_{\mathcal{B}}(\omega) = \delta$.

Insgesamt haben wir nun die folgende Gleichheit gezeigt:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F) \Big) \cap \nu_n(F) &= \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^* \right] \wedge \nu_{n-1}(F) \\ &+ \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\Big|\; y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(a_1, \ldots a_r, e_1, \ldots, e_\ell)^* \right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann sofort aus der Tatsache, dass wir jede Form $\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \wedge \eta$ für die ein y_i mit $y_i \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^*$ existiert, nach Umsortierung der Slots dem ersten Summanden $\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \mid x \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^* \right] \wedge \nu_{n-1}(F)$ zuordnen können. □

Eine analoges Vorgehen wie in Proposition 5.16 zur Berechnung des Schnittes

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F) \right) \cap \nu_n(F)$$

für p-unabhängige $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r} \in F$ ist nicht möglich, da in gewisser Weise „quer liegenden“ Formen keinem der Summanden passend zugeordnet werden können. Ein Fall in dem wir den Schnitt allerdings berechnen können ist wiederum der Folgende.

Proposition 5.17 *Es seien $a_1, \ldots, a_k \in F$ p-unabhängige Elemente, $t \in \{1, \ldots, k\}$ und es gelte $F^{p-1} = F$. Dann ist*

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, k\} \\ i_1 < \ldots < i_t}} \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F) \right) \cap \nu_n(F) \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}x_t}{x_t} \;\Big|\; x_1, \ldots, x_t \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^* \right] \wedge \nu_{n-t}(F).\end{aligned}$$

Beweis: Da dieser Beweis in vielen Punkten mit dem Beweis von Proposition 5.16 übereinstimmt, wollen hier nur auf die wesentlichen Schritte eingehen.

Beginnen wir mit Inklusion ($\supset$). Dazu sei $v = \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}x_t}{x_t} \wedge \chi$ mit $x_1, \ldots, x_t \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^*$ und $\chi \in \nu_{n-t}(F)$. Dann finden wir eindeutige $\lambda_{ij} \in F$ für $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, k$ mit $\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\, \mathrm{d}a_j$. Setzen wir dies in die Darstellung von v ein, so erhalten wir dann wegen $v \in \nu_n(F)$ sofort

$$\begin{aligned} v &= \left(\sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_t=1}^{k} \frac{\lambda_{1j_1} \ldots \lambda_{tj_t}}{x_1 \ldots x_t} \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_t} \right) \wedge \chi \\ &= \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_t=1}^{k} \mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_t} \wedge \left(\frac{\lambda_{1j_1} \ldots \lambda_{tj_t}}{x_1 \ldots x_t} \chi \right) \\ &\in \left(\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, k\} \\ i_1 < \ldots < i_t}} \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F) \right) \cap \nu_n(F), \end{aligned}$$

da für alle $(j_1, \ldots, j_t) \in \{1, \ldots, k\}^t$ stets gilt

$$\mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_t} \in \{\pm\, \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \mid i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, k\} \text{ für } i_1 < \ldots < i_t\} \cup \{0\}.$$

Um nun die umgekehrte Inklusion zu beweisen, ergänzen wir die Elemente $a_1, \ldots, a_k$ zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F und ordnen diese Basis so an, dass $a_1, \ldots, a_k$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich $a_1 < \ldots < a_k$ gilt. Beachte dabei, dass dann

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}a_{i_1}}{a_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_{i_t}}{a_{i_t}} \;\middle|\; i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, k\},\ i_1 < \ldots < i_t \right\} \subset \bigwedge\nolimits_{\mathcal{B}}^{t}$$

gilt. Es sei nun $\omega \in (\sum \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F)) \cap \nu_n(F)$. In der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B}}^n$ mit $\max_{\mathcal{B}}(\omega) = \delta$ ist dann

$$\omega = \sum_{\sigma \leq \delta} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} = x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega_{<\delta} \quad \text{mit } \omega_{<\delta} \in \Omega^n_{<\delta}(F) \tag{5.2.5}$$

für passende $x_\sigma \in F$. Ohne Einschränkung können wir wieder annehmen, dass $\mathcal{B}$ und damit auch Σ_n endlich ist. Wegen $F^{p-1} = F$ und $\wp(x_\delta)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega^n_{<\delta}(F)$ folgt aus dem Lemma von Kato 3.16 dann

$$x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} + v_{<\delta} \quad \text{mit } y_i \in F^*_{\delta(i)} \text{ und } v_{<\delta} \in \Omega^n_{<\delta}(F). \tag{5.2.6}$$

Nach Voraussetzung existiert dabei mindestens ein $(i_1, \ldots, i_t) \in \{1, \ldots, k\}^t$ mit $i_1 < \ldots < i_t$, für das $\mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \mid \mathrm{d}c_\delta$ gilt. Unter allen geordneten t-Tupeln die diese Bedingung erfüllen, wählen wir das in der lexikographischen Ordnung kleinste t-Tupel. Da die $a_1, \ldots, a_k$ die kleinsten Elemente in der Anordnung der p-Basis sind, gilt dann $c_{\delta(1)} = a_{i_1}, \ldots, c_{\delta(t)} = a_{i_t}$. Es folgt also in Gleichung (5.2.6) dann $y_1 \in F^p(a_1, \ldots, a_{i_1})^*, \ldots, y_t \in F^p(a_1, \ldots, a_{i_t})^*$ und wir erhalten damit

$$y_1, \ldots, y_t \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^*.$$

Analog zum vorherigen Beweis folgt dann wieder mit Gleichung (5.2.5) sowie der ersten Inklusion dieses Beweises

$$\omega_{<\delta} + v_{<\delta} = \omega - \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n} \in \left(\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, k\} \\ i_1 < \ldots < i_t}} \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F) \right) \cap \nu_n(F).$$

Die Behauptung folgt dann mittels Induktion über $\max_{\mathcal{B}}(\omega)$. $\square$

Kombinieren wir nun die Propositionen 5.16 und 5.17 mit den Resultaten 5.9 und 5.14 des vorangegangenen Abschnitts, so sind wir in der Lage, die folgenden ν-Annullatoren zu bestimmen.

Theorem 5.18 *Es sei F ein Körper mit $F^{p-1} = F$.*

(a) Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Mengen mit p-$\deg_F(S_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$, $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r \neq \{0\}$ und $a_1, \ldots, a_r \in F$ passend mit $F^p(S_i) = F^p(a_i)$. Dann sind die $a_1, \ldots, a_r$ p-unabhängig und es gilt

$$\operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) = \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\middle|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^* \right] \wedge \nu_{n-1}(F).$$

(b) *Es seien* $S_1, \ldots, S_{r+1} \subset F \setminus F^p$ *nicht leere Teilmengen mit* $p\text{-}\deg_F(S_i) = 1$ *für* $i = 1, \ldots, r$ *und* $\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_{r+1} \neq \{0\}$*. Dann existieren* p*-unabhängige* $a_1, \ldots, a_r \in F$ *mit* $F^p(S_i) = F^p(a_i)$*. Weiter sei* $p\text{-}\deg_F(\{a_1, \ldots, a_r\} \cup S_{r+1}) = r + \ell \in \mathbb{N}$ *und es gelte dabei* $F^p(a_1, \ldots, a_r)(S_{r+1}) = F^p(a_1, \ldots, a_r)(e_1, \ldots, e_\ell)$ *für passende* $e_1, \ldots, e_\ell \in F$*. Dann ist* $\ell \geq 1$ *und*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r \wedge \mathrm{d}S_{r+1}) &= \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F) \\ &+ \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\Big|\; y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots e_\ell) \setminus F^p(a_1, \ldots, a_r)\right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).\end{aligned}$$

(c) *Es sei* $S \subset F \setminus F^p$ *eine nicht leere Teilmenge,* $p\text{-}\deg_F(S) = k \in \mathbb{N}$ *und es gelte* $F^p(S) = F^p(a_1, \ldots, a_k)$ *für passende* $a_1, \ldots, a_k \in F$*. Für* $r \in \{1, \ldots, k\}$ *setze* $t = k - r + 1$*. Dann ist*

$$\operatorname{Ann} \nu_F^n \left(\bigwedge\nolimits^r \mathrm{d}S\right) = \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_t}{y_t} \;\Big|\; y_1, \ldots, y_t \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^*\right] \wedge \nu_{n-t}(F).$$

Für $r > k$ *ist* $\operatorname{Ann} \nu_F^n(\bigwedge^r \mathrm{d}S) = \nu_n(F)$*. Insbesondere ist also auch*

$$\operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}S) = \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_k}{y_k} \;\Big|\; y_1, \ldots, y_k \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^*\right] \wedge \nu_{n-k}(F).$$

Dieses Theorem verallgemeinert die Aussagen aus [7] deutlich, da in dieser Arbeit lediglich der ν-Annullator der einelementigen Menge $\{\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}\}$ bestimmt wurde. Dieses Ergebnis finden wir also in Theorem 5.18(a) mit $S_i = \{a_i\}$ für $i = 1, \ldots, r$ wieder.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir uns noch einmal mit der in Lemma 5.15 beschriebenen Inklusion befassen. Dazu seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leer mit $p\text{-}\deg_F(S_i) = k_i \in \mathbb{N}$ und $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i} \in F$ eine p-Basis von $F^p(S_i)$. Eine Gleichheit in Lemma 5.15 würde nach Theorem 5.18(c) dann also die Gleichheit der Mengen $\operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r)$ und $\sum_{i=1}^r \operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}S_i)$ bedeuten. Dies ist im Allgemeinen aber sogar für p-unabhängige $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{rk_r}$ falsch. Um ein für diesen Fall passendes Gegenbeispiel zu konstruieren, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Lemma 5.19 *([6, Lem. 1.3]) Es sei* F *ein Körper der Charakteristik zwei. Weiter seien die Elemente* $a_1, \ldots, a_n \in F$ 2*-unabhängig über* F *und* $x \in F^*$*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $x\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \in \nu_n(F)$;

(b) $\wp(x) \in F^2(a_1, \ldots, a_n)' := \bigoplus_{0 \neq \varepsilon \in \{0,1\}^n} F^2 a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$ *mit* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Dieses Lemma lässt sich ohne Probleme auch auf Charakteristik $p > 0$ verallgemeinern, indem man im Beweis in [6] jede 2 an passender Stelle durch ein p ersetzt. Da wir es aber lediglich für den Fall $p = 2$ verwenden werden, überlassen wir es dem Leser, sich von dieser Tatsache zu überzeugen.

Beispiel 5.20 Wir wollen in diesem Beispiel zeigen, dass die in Lemma 5.15 beschriebene Inklusion echt sein kann. Dazu betrachten wir den Körper $F = \mathbb{F}_2(a, b, c)$ der Charakteristik zwei mit Unbestimmten a, b, c. Damit ist insbesondere a, b, c eine 2-Basis von F. Nach Proposition 5.16 erhalten wir für $n = 2$ dann

$$\begin{aligned}&\Big(\mathrm{d}a \wedge \Omega^1(F) + F\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c\Big) \cap \nu_2(F) \\ =&\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^2(a)^*\right] \wedge \nu_1(F) + \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \frac{\mathrm{d}y_2}{y_2} \;\Big|\; y_1, y_2 \in F^2(a,b,c) \setminus F^2(a)\right].\end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, dass

$$\left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \frac{\mathrm{d}y_2}{y_2} \;\Big|\; y_1, y_2 \in F^2(a,b,c) \setminus F^2(a)\right] \not\subset \Big(\mathrm{d}a \wedge \Omega^1(F)\Big) \cap \nu_2(F) + (F\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c) \cap \nu_2(F)$$

gilt, woraus wir dann sofort mit Theorem 5.16 wie gewünscht

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{u} \;\Big|\; u \in F^2(a)^*\right] \wedge \nu_1(F) + \left[\frac{\mathrm{d}v_1}{v_1} \wedge \frac{\mathrm{d}v_2}{v_2} \;\Big|\; v_1, v_2 \in F^2(b,c)^*\right] \subsetneqq \Big(\mathrm{d}a \wedge \Omega^1(F) + F\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c\Big) \cap \nu_2(F)$$

erhalten. Wählen wir nun $y_1 = b$ und $y_2 = c + a$. Dann ist

$$\chi = \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \frac{\mathrm{d}y_2}{y_2} = \frac{\mathrm{d}b}{b} \wedge \frac{\mathrm{d}(c+a)}{c+a} = \left(\frac{c}{c+a}\right)\frac{\mathrm{d}b}{b} \wedge \frac{\mathrm{d}c}{c} + \left(\frac{a}{c+a}\right)\frac{\mathrm{d}a}{a} \wedge \frac{\mathrm{d}b}{b}.$$

Nehmen wir also an, dass $\chi \in \big(\mathrm{d}a \wedge \Omega^1(F)\big) \cap \nu_2(F) + (F\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c) \cap \nu_2(F)$ gilt. Da a, b, c eine 2-Basis von F ist (ohne Einschränkung mit Ordnung $a < b < c$), finden wir also eindeutige $\lambda, \mu, \rho \in F$ mit

$$\chi = \lambda\frac{\mathrm{d}b}{b} \wedge \frac{\mathrm{d}c}{c} + \mu\frac{\mathrm{d}a}{a} \wedge \frac{\mathrm{d}b}{b} + \rho\frac{\mathrm{d}a}{a} \wedge \frac{\mathrm{d}c}{c}$$

und $\lambda\frac{\mathrm{d}b}{b} \wedge \frac{\mathrm{d}c}{c} \in \nu_2(F)$ sowie $\mu\frac{\mathrm{d}a}{a} \wedge \frac{\mathrm{d}b}{b} + \rho\frac{\mathrm{d}a}{a} \wedge \frac{\mathrm{d}c}{c} \in \nu_2(F)$. Aufgrund der Basiseigenschaften von a, b, c folgt dann also $\frac{c}{c+a} = \lambda$, $\frac{a}{c+a} = \mu$ und $\rho = 0$ und damit ist insbesondere $\frac{c}{c+a}\frac{\mathrm{d}b}{b} \wedge \frac{\mathrm{d}c}{c} \in \nu_2(F)$. Nach Lemma 5.19 ist dies aber genau dann der Fall, wenn $\alpha, \beta, \gamma \in F$ existieren mit

$$\frac{c^2}{c^2 + a^2} + \frac{c}{c+a} = \alpha^2 b + \beta^2 c + \gamma^2 bc.$$

Eine einfache Rechnung liefert dann

$$c = (\beta c)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 c + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 a + (\gamma c)^2\, b + \alpha^2 bc + \alpha^2 ab + \beta^2 ac + \gamma^2 abc$$

und da die Elemente a, b, c 2-unabhängig sind, folgt dann der Widerspruch $\frac{c}{c+a} = 0 = 1$. Dieses Beispiel zeigt also, dass in Lemma 5.15 im Allgemeinen keine Gleichheit herrscht. Insbesondere gilt also auch

$$\operatorname{Ann}\nu_F^n(\mathrm{d}a) + \operatorname{Ann}\nu_F^n(\mathrm{d}\{b,c\}) \subsetneqq \operatorname{Ann}\nu_F^n(\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\{b,c\})$$

was ein Gegenbeispiel zu einem additiven Verhalten der ν-Annullatoren liefert.

5.3 Annullatoren in Milnor-K-Gruppen

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit H-Annullatoren befassen werden, wollen wir noch die bisherigen Ergebnisse mit Hilfe des Bloch-Kato-Gabber Theorems 4.3 auch auf die Theorie der Milnor-K-Gruppen übertragen. Dazu definieren wir zunächst einen Annullator in $k_n(F)$ wie folgt.

Definition 5.21 Es sei $U \subset k_r(F)$ eine nicht leere Teilmenge. Dann definieren wir

$$\operatorname{Ann} k_F^n(U) := \{x \in k_n(F) \mid x \cdot u = 0 \in k_{n+r}(F) \text{ für alle } u \in U\}.$$

Das Produkt der Klassen zweier Symbole in $k_n(F)$ und $k_r(F)$ sei dabei wie in Kapitel 4 definiert. Sind $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen, so erhalten wir mit Theorem 4.3 sofort

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r) &= \operatorname{Ann} \nu_F^n \left(\left\{ \frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_r}{s_r} \;\middle|\; s_i \in S_i \text{ für } i = 1, \ldots, r \right\} \right) \\ &\cong \operatorname{Ann} k_F^n \left(\left\{ \overline{\{s_1, \ldots, s_r\}} \mid s_i \in S_i \text{ für } i = 1, \ldots, r \right\} \right)\end{aligned}$$

Schreiben wir kurz $\overline{\{S_1, \ldots, S_r\}}$ für die Menge $\{ \overline{\{s_1, \ldots, s_r\}} \mid s_i \in S_i \text{ für } i = 1, \ldots, r\}$, so überträgt sich Theorem 5.18 auf die Milnor-K-Gruppen wie folgt.

Theorem 5.22 *Es sei F ein Körper mit $F^{p-1} = F$.*

(a) Es seien $S_1, \ldots, S_r \subset F \setminus F^p$ nicht leere Mengen mit $p\text{-}\deg_F(S_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$, $\overline{\{S_1, \ldots, S_r\}} \neq \{0\}$ und $a_1, \ldots, a_r \in F$ passend mit $F^p(S_i) = F^p(a_i)$. Dann sind die $a_1, \ldots, a_r$ p-unabhängig und es gilt

$$\operatorname{Ann} k_F^n \left(\overline{\{S_1, \ldots, S_r\}} \right) = \left[\overline{\{x\}} \;\middle|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^* \right] \cdot k_{n-1}(F).$$

(b) Es seien $S_1, \ldots, S_{r+1} \subset F \setminus F^p$ nicht leere Teilmengen mit $p\text{-}\deg_F(S_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ und $\overline{\{S_1, \ldots, S_{r+1}\}} \neq \{0\}$. Dann existieren p-unabhängige $a_1, \ldots, a_r \in F$ mit $F^p(S_i) = F^p(a_i)$. Weiter sei $p\text{-}\deg_F(\{a_1, \ldots, a_r\} \cup S_{r+1}) = r + \ell \in \mathbb{N}$ und es gelte dabei $F^p(a_1, \ldots, a_r)(S_{r+1}) = F^p(a_1, \ldots, a_r)(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$. Dann ist $\ell \geq 1$ und

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann} k_F^n \left(\overline{\{S_1, \ldots, S_r, S_{r+1}\}} \right) &= \left[\overline{\{x\}} \;\middle|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^* \right] \cdot k_{n-1}(F) \\ &+ \left[\overline{\{y_1, \ldots, y_\ell\}} \;\middle|\; y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^p(a_1, \ldots, a_r) \right] \cdot k_{n-\ell}(F).\end{aligned}$$

(c) Es sei $S \subset F \setminus F^p$ eine nicht leere Teilmenge, $p\text{-}\deg_F(S) = k \in \mathbb{N}$ und es sei $F^p(S) = F^p(a_1, \ldots, a_k)$ für passende $a_1, \ldots, a_k \in F$. Für $r \in \{1, \ldots, k\}$ setze $t = k - r + 1$. Dann ist

$$\operatorname{Ann} k_F^n \left(\overline{\{S\}^r} \right) = \left[\overline{\{y_1, \ldots, y_t\}} \;\middle|\; y_1, \ldots, y_t \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^* \right] \cdot k_{n-t}(F).$$

Für $r > k$ ist $\operatorname{Ann} k_F^n \left(\overline{\{S\}^r} \right) = k_n(F)$. Insbesondere ist also auch

$$\operatorname{Ann} k_F^n \left(\overline{\{S\}} \right) = \left[\overline{\{y_1, \ldots, y_k\}} \;\middle|\; y_1, \ldots, y_k \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^* \right] \cdot k_{n-k}(F).$$

5.4 Annullatoren in $H_p^{n+1}(F)$

Im Gegensatz zu den Annullatoren aus den vorangegangenen Abschnitten sind H-Annullatoren im Allgemeinen deutlich schwieriger zu bestimmen. Wir werden uns aus diesem Grund in diesem Abschnitt darauf beschränken, die Ergebnisse aus [7] von Körper der Charakteristik zwei auf Körper beliebiger Charakteristik $p > 0$ zu verallgemeinern.

Wir wollen zusätzlich noch anmerken, dass selbst die elementaren Sätze aus Abschnitt 5.1 für H-Annullatoren nicht mehr gültig sind und selbst die Annullatoren $\operatorname{Ann} H_F^1(v)$ und $\operatorname{Ann} H_F^1(\lambda v)$ für ein $v \in \Omega^1(F)$ und ein $\lambda \in F^*$ nicht übereinstimmen müssen.

Proposition 5.23 *Es sei* $\chi = \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \in \nu_n(F) \setminus \{0\}$ *für* $a_1, \ldots, a_r \in F^*$. *Dann ist*

$$\operatorname{Ann} H_F^{n+1}(\chi) = \overline{\operatorname{Ann} H_F^1(\chi) \cdot \nu_n(F)} + \overline{H_p^n(F) \wedge \operatorname{Ann} \nu_F^1(\chi)}.$$

Beweis: Da die Inklusion ($\supset$) offensichtlich gilt, brauchen wir nur die Inklusion ($\subset$) zu beweisen. Wegen der Voraussetzung $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_r \neq 0$ sind die $a_1, \ldots, a_r$ p-unabhängig und wir können sie zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F ergänzen. Weiter sei die Basis $\mathcal{B}$ dabei so angeordnet, dass die $a_1, \ldots, a_r$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich $a_1 < \ldots < a_r$ gilt. Es sei nun $\overline{\omega} \in \operatorname{Ann} H_F^{n+1}(\chi)$. Wie schon zuvor können wir wie in Bemerkung 3.37 beschrieben ohne Einschränkung $|\,\mathcal{B}\,| < \infty$ annehmen. In der Basis $\bigwedge_{\mathcal{B}}^n$ ist dann

$$\omega \equiv \sum_{\sigma \leq \delta} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \quad \bmod \ \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big) \tag{5.4.1}$$

für $x_\sigma \in F$ mit maximalem Multiindex $\delta \in \Sigma_n$ von ω bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Wegen $\overline{\omega \wedge \chi} = \overline{0} = \overline{\chi \wedge \omega}$ ist dann also

$$\chi \wedge \omega = \sum_{\sigma \leq \delta} x_\sigma \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \wedge \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \in \wp\Omega^{n+r}(F) + \mathrm{d}\Omega^{n+r-1}(F).$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 1: $\operatorname{im} \delta \cap \{a_1, \ldots, a_r\} \neq \varnothing$.
Dann ist $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}} = 0$, das heißt es ist $\frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}} \in \operatorname{Ann} \nu_F^1(\chi)$ und damit folgt dann

$$\overline{x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta}} = \overline{\frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}} \wedge \left(x_\delta \frac{\mathrm{d}c_{\delta(2)}}{c_{\delta(2)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}}\right)} \in \overline{\operatorname{Ann} \nu_F^1(\chi) \wedge H_p^n(F)}.$$

Die Behauptung folgt dann in diesem Fall durch Induktion über den maximalen Multiindex δ angewandt auf die Form $\omega - x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \Omega_{<\delta}^n(F)$.

Fall 2: $\operatorname{im} \delta \cap \{a_1, \ldots, a_r\} = \varnothing$.
Wir definieren $\tau \in \Sigma_{r+n}$ als die Abbildung $\tau = (\iota(1), \ldots, \iota(r), \delta(1), \ldots, \delta(n))$, wobei $\iota \in \Sigma_r$ das eindeutige kleinste Element in Σ_r bezeichnet. Dann ist τ der maximale Multiindex der Form $\chi \wedge \omega$ mit zugehörigem Koeffizienten x_δ. Nach Lemma 3.35 ist dann

$$x_\delta = \wp(z) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} a_i^j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p-1} M_{k\ell} c_{\delta(k)}^\ell$$

mit $z \in F$, $M_{ij} \in F^p(a_1, \ldots, a_{i-1})$ und $M_{k\ell} \in F_{<\delta(k)}$ für alle passenden Indizes. Setzen wir diese Darstellung von x_δ nun in Gleichung (5.4.1) ein und reduzieren die Gleichung modulo $\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega_{<\delta}^n(F)$, so folgt mit $\wp(z)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)$ dann

$$\omega \equiv x_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \equiv \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} a_i^j \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p-1} M_{k\ell} c_{\delta(k)}^\ell \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \\ \bmod \ \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega_{<\delta}^n(F)\Big)\,. \tag{5.4.2}$$

Wir betrachten nun die beiden Summen der Gleichung (5.4.2) zunächst einzeln. Für alle passenden i, j gilt (mit $\frac{\check{\mathrm{d}a}}{a}$ meinen wir, dass dieser Slot in der beschrieben Form nicht auftaucht)

$$\begin{aligned} a_i^j M_{ij} \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} &= \mathrm{d}\left((-1)^{i+1} \frac{M_{ij}}{j} a_i^j \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\check{\mathrm{d}a_i}}{a_i} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \right) \\ &\quad - \frac{M_{ij}}{j} a_i^j \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_{i-1}}{a_{i-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}M_{ij}}{M_{ij}} \wedge \frac{\mathrm{d}a_{i+1}}{a_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \\ &= \mathrm{d}\left((-1)^{i+1} \frac{M_{ij}}{j} a_i^j \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\check{\mathrm{d}a_i}}{a_i} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \right) =: \mathrm{d}t_{ij}, \end{aligned}$$

da wegen $M_{ij} \in F^p(a_1, \ldots, a_{i-1})$ die Elemente $a_1, \ldots, a_{i-1}, M_{ij}$ dann p-abhängig sind. Insgesamt erfüllt der erste Summand in Gleichung (5.4.2) dann also

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} a_i^j \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \wedge \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}t_{ij} \wedge \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p-1} t_{ij} \wedge \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \right) \in \mathrm{d}\Omega^{r+n-1}(F),$$

das heißt er liegt in $\overline{\operatorname{Ann} H_F^1(\chi) \wedge \nu_n(F)}$.

Auf ganz ähnliche Weise werden wir nun zeigen, dass der zweite Summand in Gleichung (5.4.2) in $\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega^n_{<\delta}(F)$ liegt. Für passende Indizes k, ℓ ist dann mit den selben Argumenten wie oben

$$\begin{aligned} M_{k\ell} c_{\delta(k)}^\ell \frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}} &= \mathrm{d}\left((-1)^{k+1} \frac{M_{k\ell}}{\ell} c_{\delta(k)}^\ell \frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\check{\mathrm{d}c_{\delta(k)}}}{c_{\delta(k)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}} \right) \\ &\quad - \frac{M_{k\ell}}{\ell} c_{\delta(k)}^\ell \frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(k-1)}}{c_{\delta(k-1)}} \wedge \frac{\mathrm{d}M_{k\ell}}{M_{k\ell}} \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(k+1)}}{c_{\delta(k+1)}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}} \end{aligned}$$

in der Menge $\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) + \Omega^n_{<\delta}(F)$ enthalten. Kombinieren wir nun diese Argumente, so erhalten wir aus Gleichung (5.4.2) dann schließlich

$$\overline{\omega} = \overline{\omega_0} + \overline{v} \qquad \text{mit } \overline{\omega_0} \in \overline{\operatorname{Ann} H_F^1(\chi) \wedge \nu_n(F)} \text{ und } \overline{v} \in \overline{\Omega^n_{<\delta}(F)}.$$

Die Behauptung folgt dann wieder mit Induktion über den maximalen Multiindex angewandt auf die Form $\overline{v} = \overline{\omega} - \overline{\omega_0} \in \operatorname{Ann} H_F^{n+1}(\chi)$. □

Da wir den ν-Annullator von $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}$ bereits in Abschnitt 5.2 bestimmt haben, bleibt also noch der Annullator $\operatorname{Ann} H_F^1(\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r})$ näher zu klassifizieren. Dazu verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 5.24 *Es seien $a_1, \ldots, a_r \in F$ p-unabhängig und $e \in F^p(a_1, \ldots, a_r)'$. Dann ist die Form $e\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}$ exakt.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt zunächst für $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$

$$e = \sum_{0 \neq \gamma \in T^r} x_\gamma^p a_1^{\gamma_1} \ldots a_r^{\gamma_r}$$

mit eindeutigen $x_\gamma \in F$ und der Menge $T := \{0, \ldots, p-1\}$. Für ein festes $\gamma \in T^r \setminus \{0\}$ definieren wir dann die nicht leere Menge $\{j_1, \ldots, j_s\} := \{j \in \{1, \ldots, r\} \mid \gamma_j \neq 0\}$ und damit setzen wir

$\{b_1, \ldots, b_{r-s}\} := \{a_1, \ldots, a_r\} \setminus \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}\}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&x_\gamma^p a_1^{\gamma_1} \ldots a_r^{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \\
&= (\pm 1) x_\gamma^p a_{j_1}^{\gamma_{j_1}-1} \ldots a_{j_s}^{\gamma_{j_s}-1} \,\mathrm{d}a_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{j_s} \wedge \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}b_{r-s}}{b_{r-s}} \\
&= \mathrm{d}\Big((\pm 1) x_\gamma^p (\gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_s})^{-1} a_{j_1}^{\gamma_{j_1}} \,\mathrm{d}\Big(a_{j_2}^{\gamma_{j_2}}\Big) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\Big(a_{j_s}^{\gamma_{j_s}}\Big) \wedge \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}b_{r-s}}{b_{r-s}} \Big).
\end{aligned}$$

Also ist jeder Summand in $\sum_{0 \neq \gamma \in T^r} x_\gamma^p a_1^{\gamma_1} \ldots a_r^{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}$ exakt und damit dann auch die Form $e \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}$ selbst. □

Abschließend bestimmen wir nun den noch ausstehenden H-Annullator der Form $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}$.

Theorem 5.25 *Es sei $\chi = \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \in \nu_n(F) \setminus \{0\}$ für $a_1, \ldots, a_r \in F^*$. Dann ist*

$$\operatorname{Ann} H_F^1(\chi) = \{\overline{e} \in F/\wp(F) \mid e \in F^p(a_1, \ldots, a_r)'\} = \Big\{\overline{e} \in F/\wp(F) \mid e \in D_F(\langle\!\langle a_1, \ldots, a_r \rangle\!\rangle_p')\Big\}.$$

und damit dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ann} H_F^{n+1}(\chi) = &\{\overline{e} \in F/\wp(F) \,|\, e \in F^p(a_1, \ldots, a_r)'\} \cdot \overline{\nu_n(F)} \\
&+ \overline{H_p^n(F) \wedge \left[\frac{\mathrm{d}y}{y} \,\Big|\, y \in F^p(a_1, \ldots, a_r)^*\right]}.
\end{aligned}$$

Beweis: Offensichtlich reicht es aus, die erste Behauptung zu beweisen. Die Darstellung des Annullators $\operatorname{Ann} H_F^{n+1}(\chi)$ folgt dann sofort aus der ersten Behauptung, zusammen mit Theorem 5.23, Theorem 5.18 und der Tatsache, dass $\operatorname{Ann} \nu_F^1(\chi) = \{\frac{\mathrm{d}x}{x} \mid x \in F^p(a_1, \ldots, a_n)\}$ gilt.

Die Inklusion ($\supset$) ergibt sich sofort aus Lemma 5.24. Zeigen wir also die umgekehrte Inklusion. Es sei dazu $\overline{e} \in \operatorname{Ann} H_F^1(\chi)$ mit

$$e \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \in \wp\Omega^r(F) + \mathrm{d}\Omega^{r-1}(F).$$

Wir ergänzen die Elemente $a_1, \ldots, a_r$ wieder zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F und ordnen $\mathcal{B}$ so an, dass $a_1, \ldots, a_r$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich $a_1 < \ldots < a_r$ gilt. Damit ist $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r}$ der Basisvektor in $\bigwedge_{\mathcal{B}}^r$ mit kleinst möglichem Multiindex ι. Es folgt also

$$e \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_r}{a_r} \in \wp\Omega^r(F) + \mathrm{d}\Omega^{r-1}(F) + \Omega_{<\iota}^r(F)$$

und wir können Lemma 3.35 anwenden. Dadurch erhalten wir eine Darstellung

$$e = \wp(z) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} a_i^j$$

mit passenden $M_{ij} \in F(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Um die Behauptung zu beweisen zeigen wir nun, dass $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} a_i^j \in F^p(a_1, \ldots, a_r)'$ gilt. Dazu schreiben wir jedes M_{ij} mit $T = \{0, \ldots, p-1\}$ als

$$M_{ij} = \sum_{\gamma_i \in T^{i-1}} y_{ij\gamma_i}^p a_1^{(\gamma_i)_1} \ldots a_{i-1}^{(\gamma_i)_{i-1}}.$$

Kombinieren wir nun diese Darstellungen, so folgt

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} a_i^j = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{\gamma_i \in T^{i-1}} y_{ij\gamma_i}^p a_1^{(\gamma_i)_1} \dots a_{i-1}^{(\gamma_i)_{i-1}} a_i^j a_{i+1}^0 \dots a_r^0$$

und dabei sind die Tupel $((\gamma_i)_1, \dots, (\gamma_i)_{i-1}, j, 0, \dots, 0)$ stets paarweise verschieden und ungleich Null. Also liegt der obige Ausdruck in $F^p(a_1, \dots, a_r)'$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Kapitel 6

Rein inseparable Körpererweiterungen

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit den Ω-Kernen, den ν-Kernen und den H-Kernen rein inseparabler Körpererweiterungen befassen und diese weitestgehend klassifizieren. Dabei wurde ein Teil des Abschnitts 6.1 und ein Großteil des Abschnittes 6.3 bereits bei der Zeitschrift „Journal of Algebra“ unter dem Titel „The behavior of differential, quadratic and bilinear forms under purely inseparable field extensions“ zur Veröffentlichung eingereicht (Stand 7. November 2017).

6.1 $\Omega^n(F)$ und $\nu_n(F)$ unter rein inseparablen Erweiterungen

Wie wir bereits in Kapitel 3 gesehen haben, ist der Ω-Kern einer einfachen rein inseparablen Erweiterung $E = F(\sqrt[p^m]{b})$ mit $b \in F \setminus F^p$ und $m \in \mathbb{N}$ gegeben durch $\Omega^n(E/F) = \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-1}(F)$. Wir wollen diesen Kern nun auf modulare rein inseparable Erweiterungen verallgemeinern und nutzen dazu die folgenden Notationen.

Definition 6.1 Es sei $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ eine p-Basis von F. Für ein $s \in \mathbb{N}$ seien $i_1, \ldots, i_s \in I$ die kleinsten Elemente in I mit Ordnung $i_1 < \ldots < i_s$. Dann definieren wir

$$\Sigma_{n,\leq s} := \{\sigma \in \Sigma_n \mid \operatorname{im}\sigma \cap \{i_1, \ldots, i_s\} \neq \varnothing\} = \{\sigma \in \Sigma_n \mid \sigma(1) \leq i_s\};$$
$$\Sigma_{n,>s} := \{\sigma \in \Sigma_n \mid \operatorname{im}\sigma \cap \{i_1, \ldots, i_s\} = \varnothing\} = \{\sigma \in \Sigma_n \mid \sigma(1) > i_s\}.$$

Damit gilt dann $\Sigma_n = \Sigma_{n,\leq s} \uplus \Sigma_{n,>s}$ und für jede Form $\omega \in \Omega^n(F)$ finden wir eindeutige Formen $\omega_{\leq s}, \omega_{>s} \in \Omega^n(F)$ mit $\omega = \omega_{\leq s} + \omega_{>s}$, wobei in der Basisdarstellung von $\omega_{\leq s}$ bezüglich $\mathcal{B}$ jeder Summand von mindestens einer der Formen $\mathrm{d}c_{i_1}, \ldots, \mathrm{d}c_{i_s}$ geteilt wird und in der Basisdarstellung von $\omega_{>s}$ bezüglich $\mathcal{B}$ kein Summand von einer der Formen $\mathrm{d}c_{i_1}, \ldots, \mathrm{d}c_{i_s}$ geteilt wird. Wenn klar ist welches $n \in \mathbb{N}$ gemeint ist, schreiben wir auch kurz $\Sigma_{\leq s}$ und $\Sigma_{>s}$.

Proposition 6.2 *Es sei $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ eine rein inseparable Körpererweiterung mit p-unabhängigen $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\Omega^n(E/F) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_i \wedge \Omega^{n-1}(F) = \sum_{i=1}^{r} \Omega^n(F(\sqrt[p^{m_i}]{b_i})/F) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r).$$

Beweis: Offensichtlich reicht es aus, die erste Gleichheit zu beweisen. Die Gleichheit zum Annullator folgt dann sofort aus Proposition 5.7 und der Tatsache, dass die $b_1, \ldots, b_r$ p-unabhängig sind.

Zunächst ist wegen $b_i \in E^p$ für $i = 1, \ldots, r$ offensichtlich $(\mathrm{d}b_i)_E = 0$ und damit ist die erste Inklusion trivialerweise erfüllt.

Kommen wir nun zur umgekehrten Inklusion. Da die $b_1, \ldots, b_r$ p-unabhängig sind, können wir sie zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F ergänzen. Dabei sei die Basis $\mathcal{B}$ so angeordnet, dass $b_1, \ldots, b_r$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich $b_1 < \ldots < b_r$ gilt. Nach Korollar 3.5 erhalten wir dann eine p-Basis von E durch $\mathcal{B}_E := (\mathcal{B} \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}) \cup \{\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r}\}$. Es sei nun $\omega \in \Omega^n(E/F)$. Nutzen wir die Bezeichnungen aus Definition 6.1, so finden wir passende $x_\sigma, y_\tau \in F$ mit

$$\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\leq r}} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} + \sum_{\tau \in \Sigma_{>r}} x_\tau \frac{\mathrm{d}c_\tau}{c_\tau}. \tag{6.1.1}$$

Da aber jede Form $\frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}$ mit $\sigma \in \Sigma_{\leq r}$ von mindestens einer der Formen $\mathrm{d}b_1, \ldots, \mathrm{d}b_r$ geteilt wird und diese über E der Nullform entsprechen, erhalten wir also

$$0 = \omega_E = 0 + \sum_{\tau \in \Sigma_{>r}} x_\tau \frac{\mathrm{d}c_\tau}{c_\tau}.$$

Dabei sind die Formen $\frac{\mathrm{d}c_\tau}{c_\tau}$ mit $\tau \in \Sigma_{>r}$ Teil der Basis $\bigwedge^n_{\mathcal{B}_E}$ von $\Omega^n(E)$ und damit insbesondere linear unabhängig über E. Es folgt also $y_\tau = 0$ für alle $\tau \in \Sigma_{>r}$ und dies eingesetzt in Gleichung (6.1.1) liefert dann

$$\omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\leq r}} x_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \in \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{\leq r}} F \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_i \wedge \Omega^{n-1}(F).$$

□

Offensichtlich ist dieser Kern also unabhängig von den Werten $m_1, \ldots, m_r$. Dies ist nicht überraschend, da Hoffmann in [25, Th. 5.2] ein ähnliches Resultat für bilineare Formen erhält und wir nach Katos Isomorphismus 3.19 bereits wissen, dass Differentialformen und bilineare Formen in Zusammenhang stehen.

Nutzen wir nun noch die Ergebnisse aus Kapitel 5, so erhalten wir mit Proposition 5.16 sofort das folgende Korollar.

Korollar 6.3 *Es sei $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ eine rein inseparable Körpererweiterung mit p-unabhängigen $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in F$. Dann ist*

$$\nu_n(E/F) = \operatorname{Ann} \nu_F^n(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r).$$

Gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so ist

$$\nu_n(E/F) = \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\middle|\; x \in F^p(b_1, \ldots, b_r)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F).$$

Insbesondere ist also $\nu_n(E/F) = \nu_1(E/F) \wedge \nu_{n-1}(F)$.

Damit sind die Ω-Kerne und die ν-Kerne (im Falle von $F^{p-1} = F$) für endliche modulare rein inseparable Erweiterungen vollständig bestimmt. Als nächsten Schritt wollen wir nun diese Ergebnisse auch auf möglicherweise unendliche modulare Erweiterungen verallgemeinern. Dies geschieht im folgenden Theorem.

Theorem 6.4 *Es sei $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ eine rein inseparable Erweiterung von F. Wir setzen $e_j = \exp(\beta_j/F)$ und $b_j = \beta_j^{p^{e_j}}$ für $j \in J$. Ist $\{b_j \mid j \in J\}$ p-unabhängig über F, so ist $\Omega^n(E/F)$ additiv erzeugt von den Formen*

$$\mathrm{d}b_j \wedge u \ , \quad \text{mit } j \in J \text{ und } u \in \Omega^{n-1}(F).$$

Gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so ist $\nu_n(E/F)$ additiv erzeugt von den Formen

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \chi \ , \quad \text{mit } x \in F^p(b_j \mid j \in J)^* \text{ und } \chi \in \nu_{n-1}(F).$$

Beweis: Zunächst ist klar, dass analog zum Beweis von Proposition 6.2 wegen $b_j \in E^p$ stets $(\mathrm{d}b_j)_E = 0$ für alle $j \in J$ gilt. Es sei nun $\omega \in \Omega^n(E/F)$. Um die Relation $\omega_E = 0$ zu beschreiben, werden nur endlich viele Elemente in E benötigt, welche wiederum nur endlich viele Elemente in $\{\beta_j \mid j \in J\}$ verwenden. Es existiert also bereits eine endliche Teilmenge $T \subset J$ mit $E' = F(\beta_t \mid t \in T)$ und $\omega_{E'} = 0$. Mit der Proposition 6.2 folgt dann die erste Behauptung und aus Korollar 6.3 ergibt sich die zweite Behauptung. $\square$

Eine vollständige Klassifikation der Ω-Kerne und dann auch der ν-Kerne für beliebige rein inseparable Erweiterungen scheint sehr schwierig zu sein. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 5 sind wir allerdings in der Lage, den Ω-Kern und den ν-Kern des folgenden Falles zu bestimmen.

Theorem 6.5 *Es seien $b_1, \ldots, b_r \in F$ p-unabhängig und $b \in F^p(b_1, \ldots, b_r) \setminus F^p$. Weiter seien $m, m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ mit $m \leq m_1, \ldots, m_r$ und $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r}, \sqrt[p^m]{b})$.*

(a) Existiert ein $t \geq m$ mit $b \in F^{p^t}(b_1, \ldots, b_r)$, so ist $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ und die Kerne $\Omega^n(E/F)$ und $\nu_n(E/F)$ sind bekannt aus Proposition 6.2 und Korollar 6.3.

(b) Angenommen die Bedingung in (a) gilt nicht. Ist $t \in \mathbb{N}$ maximal mit $b \in F^{p^t}(b_1, \ldots, b_r)$ und $1 \leq t < m$, so schreibe mit $T = \{0, \ldots, p^t - 1\}^r$ dann $b = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_r)\in T} x_i^{p^t} b_1^{i_1} \ldots b_r^{i_r}$ und setze $S = \{x_i \mid i \in T,\ x_i \neq 0\}$. Dann gilt

$$\Omega^n(E/F) = \operatorname{Ann}\Omega^n_F(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S) \quad \text{und} \quad \nu(E/F) = \operatorname{Ann}\nu^n_F(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S).$$

Ist also $p\text{-}\deg_F(\{b_1, \ldots, b_r\} \cup S) = r + \ell$ und $F^p(b_1, \ldots, b_r)(S) = F^p(b_1, \ldots, b_r)(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$, so ist $\ell \geq 1$ und

$$\Omega^n(E/F) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}b_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F).$$

Gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so folgt

$$\begin{aligned}\nu_n(E/F) = &\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^p(b_1, \ldots, b_r)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F) \\ &+ \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\Big|\; y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^p(b_1, \ldots, b_r)\right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).\end{aligned}$$

Beweis: Beginnen wir mit dem Fall in (a). Dazu sei $t \geq m$ mit $b \in F^{p^t}(b_1, \ldots, b_r)$ und für $T = \{0, \ldots, p^t - 1\}^r$ schreiben wir $b = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_r)\in T} x_i^{p^t} b_1^{i_1} \ldots b_r^{i_r}$. Eine einfache Rechnung zeigt unter Verwendung von $m \leq m_1, \ldots, m_r$ und $t - m \geq 0$ dann

$$\sqrt[p^m]{b} = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_r)\in T} x_i^{p^{t-m}} \left(\sqrt[p^m]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^m]{b_r}\right)^{i_r} \in F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r}).$$

Es ist also

$$E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})(\sqrt[p^m]{b}) = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$$

und die Kerne dieser Erweiterung sind bekannt aus Proposition 6.2 und Korollar 6.3.

Betrachten wir nun also den Fall (b). Zunächst ist klar, dass ein maximales $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t < m$ und $b \in F^{p^t}(b_1, \ldots, b_r)$ existiert, da nach Voraussetzung $b \in F^p(b_1, \ldots, b_r)$ gilt. Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S \neq \{0\}$ gilt und nehmen dazu $\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S = \{0\}$ an. Da die $b_1, \ldots, b_r$ p-unabhängig über F sind, muss dann also $S \subset F^p(b_1, \ldots, b_r)$ gelten. Für jedes $x_i \in S$ mit $i \in T$ finden wir dann also passende $z_{ij} \in F$ und eine Darstellung

$$x_i = \sum_{j=(j_1,\ldots,j_r)\in\{0,\ldots,p-1\}^r} z_{ij}^p b_1^{j_1} \ldots b_r^{j_r}.$$

Setzen wir dies in die Darstellung von b ein, so erhalten wir

$$b = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_r)\in T} x_i^{p^t} b_1^{i_1} \ldots b_r^{i_r} = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_r)\in T} \sum_{j\in\{0,\ldots,p-1\}^r} z_{ij}^{p^{t+1}} b_1^{i_1+j_1} \ldots b_r^{i_r+j_r} \in F^{p^{t+1}}(b_1, \ldots, b_r)$$

und damit einen Widerspruch zur Maximalität von t. Also ist $\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S \neq \{0\}$ und damit insbesondere $\ell \geq 1$.

Kommen wir nun zu der Gleichheit $\Omega^n(E/F) = \operatorname{Ann} \Omega_F^n(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S)$ und beginnen mit der Inklusion ($\supset$). Nach Proposition 5.14 reicht es nun zu überprüfen, dass die Formen $\mathrm{d}b_1, \ldots, \mathrm{d}b_r$ und $\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell$ über E der jeweiligen Nullform entsprechen. Für die Formen $\mathrm{d}b_1, \ldots, \mathrm{d}b_r$ ist dies wegen $b_1, \ldots, b_r \in E^p$ sofort klar. Weiter ist wegen $t < m \leq m_1, \ldots, m_r$ dann auch $\sqrt[p^t]{b}, \sqrt[p^t]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^t]{b_r} \in E^p$ und über E folgt

$$0 = \mathrm{d}\left(\sqrt[p^t]{b}\right) = \mathrm{d}\left(\sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in T} x_i \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r}\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in T} \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \mathrm{d}x_i.$$

Wegen $x_i \in S \subset S \cup \{b_1, \ldots, b_r\} \subset F^p(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell)$ finden wir dann für jedes $x_i \in S$ passende $\lambda_{ik}, \mu_{iq} \in F$ mit

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}\, \mathrm{d}b_k + \sum_{q=1}^{\ell} \mu_{iq}\, \mathrm{d}e_q.$$

Insgesamt erhalten wir also über E wegen $(\mathrm{d}b_1)_E = \ldots = (\mathrm{d}b_r)_E = 0$ dann

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in T} \sum_{k=1}^{r} \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \lambda_{ik}\, \mathrm{d}b_k + \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in T} \sum_{q=1}^{\ell} \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \mu_{iq}\, \mathrm{d}e_q \\ &= \sum_{q=1}^{\ell} \left(\sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in T} \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \mu_{iq}\right) \mathrm{d}e_q. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Wir zeigen nun, dass dabei mindestens eines der μ_{iq} verschieden von Null ist. Nehmen wir dazu an, dass $\mu_{iq} = 0$ für alle $i \in T$ und $q \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt. Dann folgt $\mathrm{d}x_i \in \mathrm{sp}_F(\mathrm{d}b_1, \dots, \mathrm{d}b_r)$, das heißt es ist $x_i \in F^p(b_1, \dots, b_r)$ für alle $x_i \in S$. Dies ist aber ein Widerspruch zum Beginn des Beweises, wo wir bereits gezeigt haben das $\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S \neq \{0\}$ und damit dann auch $S \not\subset F^p(b_1, \dots, b_r)$ gilt. Also ist mindestens eines der μ_{iq} verschieden von Null. Nun sind die Elemente $\left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r}$ für $(i_1, \dots, i_r) \in T$ wegen der p-Unabhängigkeit der $b_1, \dots, b_r$ Teil einer F-Basis des Körpers $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \dots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$. Aus der Tatsache, dass mindestens eines der $\mu_{iq} \neq 0$ ist, folgt dann ebenfalls, dass einer der Koeffizienten $\sum_{i \in T} \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \mu_{iq}$ verschieden von Null ist. Damit sind die Formen $\mathrm{d}e_1, \dots, \mathrm{d}e_\ell$ über E linear abhängig und aus Lemma 3.10 erhalten wir dann $(\mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell)_E = 0$, womit die erste Inklusion gezeigt ist.

Kommen wir nun zur umgekehrten Inklusion. Dazu setzen wir $M = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \dots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ und definieren die Menge $U = \bigtimes_{j=1}^r \{0, \dots, p^{m_j} - 1\}$. Offensichtlich gilt dann $E = M(\sqrt[p^m]{b}) = M(\sqrt[p^{m-t}]{b_0})$ mit $b_0 = \sqrt[p^t]{b} = \sum_{i \in T} x_i \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \in M$. Dabei ist $b_0 \in M \setminus M^p$, denn angenommen es gilt $b_0 \in M^p$, dann erhalten wir mit $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$ und passenden $z_u \in F$ aus der Darstellung

$$b_0 = \left(\sum_{u \in U} z_u \left(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}\right)^{u_1} \ldots \left(\sqrt[p^{m_r}]{b_r}\right)^{u_r} \right)^p = \sum_{u \in U} z_u^p \left(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}\right)^{pu_1} \ldots \left(\sqrt[p^{m_r}]{b_r}\right)^{pu_r}$$

eingesetzt in die Relation $b_0^{p^t} = b$ dann

$$b = b_0^{p^t} = \sum_{u \in U} z_u^{p^{t+1}} \left(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}\right)^{p^{t+1}u_1} \ldots \left(\sqrt[p^{m_r}]{b_r}\right)^{p^{t+1}u_r}.$$

Ein Koeffizientenvergleich bezüglich der F-Basis $\left(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}\right)^{u_1} \ldots \left(\sqrt[p^{m_r}]{b_r}\right)^{u_r}$ mit $u \in U$ des Körpers M liefert dann $b \in F^{p^{t+1}}(b_1, \dots, b_r)$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Maximalität von t. Also ist $b_0 \in M \setminus M^p$, damit insbesondere auch $[E : M] = p^{m-t}$ und nach Proposition 6.2 folgt $\Omega^n(E/M) = \operatorname{Ann} \Omega_M^n(\mathrm{d}b_0)$. Es sei nun $\omega \in \Omega^n(E/F)$. Dann ist also $\omega_M \in \operatorname{Ann} \Omega_M^n(\mathrm{d}b_0)$, das heißt es gilt $\omega_M \wedge \mathrm{d}b_0 = 0$. Wie schon im Beweis der ersten Inklusion berechnet ist wegen $t < m \leq m_1, \dots, m_r$ dann

$$0 = \omega_M \wedge \mathrm{d}b_0 = \omega_M \wedge \mathrm{d}\left(\sum_{i \in T} x_i \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \right) = \sum_{i \in T} \left(\sqrt[p^t]{b_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\sqrt[p^t]{b_r}\right)^{i_r} \omega_M \wedge \mathrm{d}x_i. \tag{6.1.3}$$

Nutzen wir nun die Zerlegung des Raumes $\Omega^n(M)$ wie sie in Lemma 3.23 beschrieben ist, so erhalten wir wegen $t < m \leq m_1, \dots, m_r$ aus Gleichung (6.1.3) dann

$$\omega_M \wedge \mathrm{d}x_i = 0 \quad \text{für alle } i \in T.$$

Da nun aber $x_i \in F$ ist, folgt dann

$$\omega \wedge \mathrm{d}x_i \in \Omega^n(M/F) \overset{6.2}{=} \operatorname{Ann} \Omega_F^n(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r) \quad \text{für alle } i \in T.$$

Schließlich gilt damit also $\omega \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r = 0$ für alle $i \in T$, was äquivalent ist zu $\omega \in \operatorname{Ann} \Omega_F^n(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r \wedge \mathrm{d}S)$.

Alle weiteren Behauptungen ergeben sich dann aus Proposition 5.14 und aus Theorem 5.18. □

Mit Theorem 6.5 sind wir also in der Lage, den Ω-Kern und den ν-Kern (im Fall $F^{p-1} = F$) jeder rein inseparablen Erweiterung der Form $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \sqrt[p^{m_2}]{b_2})$ mit $b_1, b_2 \in F \setminus F^p$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ zu beschreiben, da die Voraussetzungen aus Theorem 6.5 trivialerweise für $p\text{-deg}_F(\{b_1, b_2\}) = 1$ stets erfüllt sind. Es zeigt sich ebenfalls, dass für Erweiterungen $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ mit $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ eine mögliche p-Abhängigkeit der $b_1, \ldots, b_r$ eine massive Auswirkung auf den Ω-Kern und den ν-Kern der Erweiterung hat. Wir werden später noch sehen, dass diese Eigenschaft bei H-Kernen rein inseparabler Erweiterungen nicht vorliegt. Diese Auswirkung wollen wir mit dem folgenden Beispiel noch einmal verdeutlichen.

Beispiel 6.6 Für $p = 2$ betrachten wir den Körper $F = \mathbb{F}_2(a, b, c)$ mit Unbestimmten a, b, c und der Körpererweiterung $E = F(\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{a^2c + b^2})/F$. In [43] wird gezeigt, dass diese Art von Erweiterung in Charakteristik zwei die vom Körpergrad kleinst mögliche nicht modulare Erweiterung beschreibt, das heißt es existiert keine Darstellung $E = F(\sqrt[2^{m_1}]{b_1}, \sqrt[2^{m_2}]{b_2}, \sqrt[2^{m_3}]{b_3})$ mit passenden $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ und 2-unabhängigen $b_1, b_2, b_3 \in F$ oder weniger Erzeugenden (mehr Erzeugende sind wegen $[E : F] = 8$ nicht möglich). Wenden wir nun Theorem 6.5 auf diese Situation an, so erhalten wir als Ω-Kern der Erweiterung E/F dann

$$\Omega^n(E/F) = \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-2}(F).$$

Eine einfache Rechnung zeigt allerdings

$$\mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}\Big(a^2c + b^2\Big) \wedge \Omega^{n-1}(F) = \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-1}(F) \subsetneq \Omega^n(E/F).$$

Es stellt sich die Frage, ob für möglicherweise nicht modulare rein inseparable Erweiterungen $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ mit $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ die nicht mit weniger algebraischen Erzeugenden geschrieben werden können (man nennt diese dann r-fache Erweiterungen), stets Mengen $S_1, \ldots, S_r \subset F$ existieren, sodass $\Omega^n(E/F) = \operatorname{Ann} \Omega^n_F(\mathrm{d}S_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}S_r)$ gilt. Wie diese S_i, abhängig von den $b_1, \ldots, b_r$ und den $m_1, \ldots, m_r$ dann zu wählen sind, lässt sich durch die bisherigen Resultate allerdings nicht sagen.

Etwas losgelöst von der bisherigen Thematik, aber mit ähnlichen Methoden wollen wir diesen Abschnitt nun mit einer alternativen Berechnung eines bereits bekannten Ω-Kerns abschließen.

Proposition 6.7 *Es sei S/F eine separable Erweiterung, $b \in S \setminus S^p$ und $K = S(\sqrt[p^m]{b})$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $[S : F] = s \in \mathbb{N}$ und $S = F(\vartheta)$ für ein primitives Element $\vartheta \in S$. Schreiben wir $b = \sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i f_i$ für passende $f_0, \ldots, f_{s-1} \in F$, so ist*

$$\Omega^n(K/F) = \operatorname{Ann} \Omega^n_F(\mathrm{d}\{f_0, \ldots, f_{s-1}\}) \quad \textit{und} \quad \nu^n(K/F) = \operatorname{Ann} \nu^n_F(\mathrm{d}\{f_0, \ldots, f_{s-1}\}).$$

Ist also $p\text{-deg}_F(\{f_0, \ldots, f_{s-1}\}) = k$ und $F^p(f_0, \ldots, f_{s-1}) = F^p(a_1, \ldots, a_k)$ für passende Elemente $a_1, \ldots, a_k \in F$, so ist

$$\Omega^n(K/F) = \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k \wedge \Omega^{n-k}(F)$$

und gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so ist

$$\nu_n(K/F) = \left[\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}x_k}{x_k} \;\Big|\; x_1, \ldots, x_k \in F^p(a_1, \ldots, a_k)^*\right] \wedge \nu_{n-k}(F).$$

Beweis: Ohne Einschränkung können wir $\vartheta \in S^p$ und $m = 1$ annehmen, denn für ein $\omega \in \Omega^n(F)$ ist offensichtlich

$$\omega \in \Omega^n(K/F) \Leftrightarrow \omega_S \in \Omega^n(S(\sqrt[p^m]{b})/S) \overset{6.2}{\Leftrightarrow} \omega_S \in \Omega^n(S(\sqrt[p]{b})/S) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^n(F(\vartheta)(\sqrt[p]{b})/F).$$

Beginnen wir damit zu zeigen, dass $(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k)_K = 0$ gilt. Zunächst ist wegen $b \in K^p$ und $\vartheta \in S^p$ offensichtlich

$$0 = (\mathrm{d}b)_K = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \,\mathrm{d}f_i\right)_K = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \,\mathrm{d}a_j\right)\right)_K$$

für passende $\lambda_{ij} \in F$. Da nicht $f_i \in S^p$ für alle $i = 0, \ldots, s-1$ gelten kann (sonst ist $b \in S^p$), ist mindestens eines der $\mathrm{d}f_i \neq 0$ und damit ist auch mindestens ein $\lambda_{ij} \neq 0$, denn die λ_{ij} sind eindeutig aufgrund der linearen Unabhängigkeit der $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_k$ über S. Wir erhalten also

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \lambda_{ij}\right) \mathrm{d}a_j\right)_K .$$

Da die Potenzen $\vartheta^0, \ldots, \vartheta^{s-1}$ ebenfalls über F linear unabhängig sind, ist also mindestens eine der Summen $\sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \lambda_{ij}$ verschieden von Null und somit sind die $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_k$ über K linear abhängig, woraus wir mit Lemma 3.10 sofort $(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k)_K = 0$ erhalten.

Kommen wir nun zu der umgekehrten Inklusion und wählen dazu $\omega \in \Omega^n(K/F)$. Wegen $\omega_S \in \Omega^n(S(\sqrt[p]{b})/S) = \operatorname{Ann}\Omega^n_S(\mathrm{d}b)$ erhalten wir $\omega \wedge \mathrm{d}b = 0$ über S. Da wir $\vartheta \in S^p$ gewählt haben, folgt analog zur ersten Inklusion wieder $\mathrm{d}b = \sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \,\mathrm{d}f_i$, woraus wir dann

$$\omega \wedge \mathrm{d}b = \sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \omega \wedge \mathrm{d}f_i = 0 \tag{6.1.4}$$

erhalten. Nach Lemma 3.21 ist nun $\Omega^n(S) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} \vartheta^i \Omega^n(F)$, das heißt aus Gleichung (6.1.4) erhalten wir $\omega \wedge \mathrm{d}f_i = 0$ für $i = 0, \ldots, s-1$ und die Behauptung ist gezeigt.

Der ν-Kern der Erweiterung ergibt sich dann durch Schneiden des Ω-Kerns mit $\nu_n(F)$. $\square$

Es stellt sich nun die Frage, ob sich das Ergebnis aus Proposition 6.7, zumindest für über S p-unabhängige $b_1, \ldots, b_r \in S$, mit $b_j = \sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i f_{ij}$ für passende $f_{ij} \in F$ auf die Körpererweiterung $K = S(\sqrt[p]{b_1}, \ldots, \sqrt[p]{b_r})/F$ verallgemeinern lässt. Eine einfache Rechnung zeigt zunächst, dass stets

$$\operatorname{Ann}\Omega^n_F \left(\mathrm{d}\left\{f_{01}, \ldots, f_{(s-1)1}\right\} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\left\{f_{0r}, \ldots, f_{(s-1)r}\right\}\right) \subset \Omega^n(K/F) \tag{6.1.5}$$

gilt. Mit dem folgende Beispiel werden wir nun zeigen, dass die in (6.1.5) beschriebene Inklusion allerdings echt sein kann.

Beispiel 6.8 Wir betrachten für $p = 2$ den Körper $F = \mathbb{F}_2(a, b, c, e)$ mit Variablen a, b, c, e. Insbesondere ist $\mathcal{B} = \{a, b, c, e\}$ eine 2-Basis von F mit Anordnung $a < b < c < e$. Weiter sei $\vartheta = \wp^{-1}(1)$ und $S = F(\vartheta)$. In S wählen wir dann die Elemente $g_1 = a\vartheta + b$ und $g_2 = c\vartheta + b$ und zeigen, dass diese über S 2-unabhängig sind. Zunächst ist klar, dass $g_1, g_2 \in S \setminus S^2$ gilt. Angenommen es ist $g_2 \in S^2(g_1)$. Dann finden wir also $\alpha, \beta \in S$ mit $g_2 = \alpha^2 + \beta^2 g_1$. Schreiben wir nun $\alpha = \alpha_1\vartheta + \alpha_2$ und $\beta = \beta_1\vartheta + \beta_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$, so erhalten wir also

$$c\vartheta + b = (\alpha_1^2 + \beta_2^2 a + \beta_1^2 b)\vartheta + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 a + \beta_1^2 b + \beta_2^2 b).$$

Ein simpler Koeffizientenvergleich liefert dann den Widerspruch $c \in F^2(a, b)$ und damit sind g_1, g_2 2-unabhängig über S.

Wir betrachten nun den Körper $K = S(\sqrt{g_1}, \sqrt{g_2})$ und nehmen an, dass in (6.1.5) Gleichheit gilt und damit also

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}\{a,b\} \wedge \mathrm{d}\{c,b\}) = \Omega^n(K/F)$$

folgt. Wie schon zuvor in Beispiel 5.13 gilt für $n = 2$ mit $T = \{a, b, c\}$ dann

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^2(\mathrm{d}\{a,b\} \wedge \mathrm{d}\{c,b\}) = \operatorname{Ann}\Omega_F^2(\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}T) = F\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b + F\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c + F\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c.$$

In K gilt nun $0 = \mathrm{d}g_1 = \vartheta\,\mathrm{d}a + \mathrm{d}b$ sowie $0 = \mathrm{d}g_2 = \vartheta\,\mathrm{d}c + \mathrm{d}b$ wegen $\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}(\vartheta^2 + 1) = 0$. Kombiniert erhalten wir dann also in K die Relation $\mathrm{d}a = \mathrm{d}c$. Betrachten wir nun die Form $\omega = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}e + \mathrm{d}c \wedge \mathrm{d}e$ in der eindeutigen Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{B}$, so erhalten wir in K also $\omega_K = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}e + \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}e = 0$ und damit insbesondere $\omega \in \Omega^2(K/F)$. Allerdings ist wegen der eindeutigen Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{B}$ dann $\omega \notin F\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b + F\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c + F\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c$, womit wir

$$\operatorname{Ann}\Omega_F^2(\mathrm{d}\{a,b\} \wedge \mathrm{d}\{c,b\}) \subsetneqq \Omega^2(K/F)$$

gezeigt haben.

Bemerkung 6.9 In Proposition 3.25 haben wir bereits gesehen, dass für inseparable einfache Körpererweiterungen $F(\Theta)/F$ der Ω-Kern dieser Erweiterung gegeben ist durch den Annullator $\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}\mathcal{C}(g))$, wobei $\mathcal{C}(g)$ die Menge der von Null verschiedenen Koeffizienten des Minimalpolynoms $g \in F[X]$ von Θ über F bezeichnet. Ist also $p\text{-}\deg_F(\mathcal{C}(g)) = t \in \mathbb{N}$ und $e_1, \ldots, e_t$ eine p-Basis von $F^p(\mathcal{C}(g))$, so ist also $\Omega^n(F(\Theta)/F) = \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_t \wedge \Omega^{n-t}(F)$.

Nun können wir die in Proposition 6.7 beschriebene Körpererweiterung ebenfalls als einfache inseparable Erweiterung erzeugt von α auffassen und dementsprechend müssen beide Beschreibungen des Kerns übereinstimmen. Ist also in den Notationen aus Proposition 6.7 das Minimalpolynom von α über F gegeben durch $h \in F[X]$, so folgt insbesondere also $F^p(f_0, \ldots, f_{s-1}) = F^p(\mathcal{C}(h))$.

6.2 $k_n(F)$ unter rein inseparablen Erweiterungen

Wie zuvor in Kapitel 5 können wir auch hier die bewiesenen Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 mit Hilfe des Bloch-Kato-Gabber Theorems 4.3 auf die Milnor-K-Gruppen $k_n(F)$ übertragen. Ohne weitere Beweise erhalten wir also die folgenden Resultate.

Theorem 6.10 *Es sei $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ eine rein inseparable Erweiterung von F. Wir setzen $e_j = \exp(\beta_j/F)$ und $b_j = \beta_j^{p^{e_j}}$ für $j \in J$. Gilt $F^{p-1} = F$ und ist $\{b_j \mid j \in J\}$ p-unabhängig über F, so ist*

$$k_n(E/F) = \left[\overline{\{x\}} \;\middle|\; x \in F^p(b_j \mid j \in J)^*\right] \cdot k_{n-1}(F).$$

Insbesondere gilt also $k_n(E/F) = k_1(E/F) \cdot k_{n-1}(F)$ und ist $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ endlich, so ist $k_n(E/F) = \operatorname{Ann} k_F^n\left(\overline{\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_r}\}}\right)$.

Theorem 6.11 *Es seien $b_1, \ldots, b_r \in F$ p-unabhängig und $b \in F^p(b_1, \ldots, b_r) \setminus F^p$. Weiter seien $m, m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ mit $m \leq m_1, \ldots, m_r$ und $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r}, \sqrt[p^m]{b})$.*

(a) Existiert ein $t \geq m$ mit $b \in F^{p^t}(b_1, \ldots, b_r)$, so ist $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ und die Gruppe $k_n(E/F)$ wird mittels Theorem 6.10 beschrieben.

(b) Angenommen die Bedingung in (a) gilt nicht. Ist $t \in \mathbb{N}$ maximal mit $b \in F^{p^t}(b_1, \dots, b_r)$ und $1 \leq t < m$, so schreibe mit $T = \{0, \dots, p^t - 1\}^r$ dann $b = \sum_{i=(i_1,\dots,i_r)\in T} x_i^{p^t} b_1^{i_1} \dots b_r^{i_r}$ und setze $S = \{x_i \mid i \in T,\ x_i \neq 0\}$. Dann gilt

$$k_n(E/F) = \operatorname{Ann} k_F^n \left(\overline{\{b_1, \dots, b_r, S\}}\right).$$

Ist also $p\text{-}\deg_F(\{b_1, \dots, b_r\} \cup S) = r + \ell$ und $F^p(b_1, \dots, b_r)(S) = F^p(b_1, \dots, b_r)(e_1, \dots, e_\ell)$ für passende $e_1, \dots, e_\ell \in F$, sowie $F^{p-1} = F$, dann ist $\ell \geq 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} k_n(E/F) = {} & \left[\overline{\{x\}} \;\middle|\; x \in F^p(b_1, \dots, b_r)^*\right] \cdot k_{n-1}(F) \\ & + \left[\overline{\{y_1, \dots, y_\ell\}} \;\middle|\; y_1, \dots, y_\ell \in F^p(b_1, \dots, b_r, e_1, \dots, e_\ell) \setminus F^p(b_1, \dots, b_r)\right] \cdot k_{n-\ell}(F). \end{aligned}$$

Als letzte Aussage wollen wir nun noch Proposition 6.7 für Milnor-K-Gruppen formulieren und erhalten dadurch die folgende Aussage.

Proposition 6.12 *Es sei S/F eine separable Erweiterung, $b \in S \setminus S^p$ und $K = S(\sqrt[p^m]{b})$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $[S : F] = s \in \mathbb{N}$ und $S = F(\vartheta)$ für ein primitives Element $\vartheta \in S$. Schreiben wir $b = \sum_{i=0}^{s-1} \vartheta^i f_i$ für passende $f_0, \dots, f_{s-1} \in F$, so ist*

$$k^n(K/F) = \operatorname{Ann} k_F^n \left(\left\{\overline{\{f_i\}} \mid i = 0, \dots, s-1,\ f_i \neq 0\right\}\right).$$

Ist zusätzlich $F^{p-1} = F$, sowie $p\text{-}\deg_F(\{f_0, \dots, f_{s-1}\}) = k$ und $a_1, \dots, a_k \in F$ eine p-Basis von $F^p(f_0, \dots, f_{s-1})$, dann ist

$$k_n(K/F) = \left[\overline{\{x_1, \dots, x_k\}} \mid x_1, \dots, x_k \in F^p(a_1, \dots, a_k)^*\right] \cdot k_{n-k}(F).$$

6.3 $H_p^{n+1}(F)$ unter rein inseparablen Erweiterungen

In diesem Kapitel wollen wir den H-Kern rein inseparabler Erweiterungen untersuchen und dabei vollständig klassifizieren. Da wir im Gegensatz zu den meisten anderen Veröffentlichungen in diesem Themengebiet in Charakteristik p arbeiten und uns nicht auf $p = 2$ beschränken, werden wir zunächst damit beginnen, einige der bekannten Resultate auf den Fall beliebiger Charakteristik $p > 0$ zu verallgemeinern. Dazu starten wir mit einfachen rein inseparablen Erweiterungen vom Exponent eins, also den kleinst möglichen Erweiterungen dieser Art.

Proposition 6.13 *Es sei $b \in F$ und $E = F(\sqrt[p]{b})$. Dann ist*

$$H_p^{n+1}(E/F) = \overline{\mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-1}(F)} = \overline{b\, \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)}.$$

Beweis: Beginnen wir mit der ersten Gleichheit. Für $b \in F^p$ folgt sofort $E = F$ und damit $H_p^{n+1}(E/F) = \{\overline{0}\} = \overline{\mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-1}(F)}$. Wir können also $b \in F \setminus F^p$ voraussetzen.

Da $b \in E^p$ ist, gilt über E dann offensichtlich $(\mathrm{d}b)_E = 0$ und damit ist die erste Inklusion klar.

Kommen wir nun zur umgekehrten Inklusion. Dazu sei $\beta = \sqrt[p]{b}$. Wegen $b \in F \setminus F^p$ können wir b zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i \in I\}$ von F erweitern. Dabei sei b das kleinste Element in $\mathcal{B}$ und nach Korollar 3.5 erhalten wir dann durch $\mathcal{B}_E = (\mathcal{B} \setminus \{b\}) \cup \{\beta\}$ eine p-Basis von E. Ohne Einschränkung sei zusätzlich $\beta > c_i$ für alle $c_i \in \mathcal{B} \setminus \{b\}$. Es sei nun $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(E/F)$. Wegen $\overline{\omega_E} = \overline{0}$ finden wir $u \in \Omega^n(E)$ und $v \in \Omega^{n-1}(E)$ mit $\omega_E = \wp(u) + \mathrm{d}v$. In der Basis $\mathcal{B}$ schreiben wir nun $\omega = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \omega_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}$ mit passenden $\omega_\sigma \in F$ und wie in Definition 6.1 beschrieben finden wir dann eine eindeutige Zerlegung

$$\omega = \sum_{\sigma\in\Sigma_{\leq 1}} \omega_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} + \sum_{\sigma\in\Sigma_{>1}} \omega_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}.$$

Da wir den Ω-Kern dieser Erweiterung bereits in Proposition 6.2 bestimmt haben, wissen wir, dass in dieser Zerlegung genau der erste Summand über E trivial wird. Aus diesem Grund setzen wir ohne Einschränkung voraus, dass in der Darstellung $\omega = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \omega_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}$ kein Summand von der Form $\mathrm{d}b$ geteilt wird, das heißt, dass alle auftretenden σ mit $\omega_\sigma \neq 0$ bereits in $\Sigma_{>1}$ liegen. Unter dieser Annahme ist die eindeutige Darstellung von ω bezüglich $\mathcal{B}$ ebenfalls die eindeutige Darstellung von ω_E bezüglich $\mathcal{B}_E$. Zusätzlich können wir wegen Bemerkung 3.37 annehmen, dass die p-Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_E$ endlich sind. Es sei nun γ der maximale Multiindex der Form u bezüglich der Basis $\mathcal{B}_E$ und δ der maximale Multiindex der Form ω_E bezüglich der Basis $\mathcal{B}_E$. Dann ist

$$\omega = \sum_{\sigma\leq\delta} \omega_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma} \quad \text{und} \quad u = \sum_{\varepsilon\leq\gamma} u_\varepsilon \frac{\mathrm{d}c_\varepsilon}{c_\varepsilon}.$$

Angenommen es ist $\delta < \gamma$. Dann folgt

$$0 \equiv \wp(u_\gamma)\frac{\mathrm{d}c_\gamma}{c_\gamma} \mod \left(\mathrm{d}\Omega^{n-1}(E) + \Omega^n_{<\gamma}(E)\right)$$

und wir können Lemma 3.17 anwenden und erhalten damit passende $a_{i_j} \in E^*$ und $u_{<\gamma} \in \Omega^n_{<\gamma}(E)$ mit

$$u_\gamma \frac{\mathrm{d}c_\gamma}{c_\gamma} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \frac{\mathrm{d}a_{i_1}}{a_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_{i_n}}{a_{i_n}} + u_{<\gamma}.$$

Schreiben wir nun $u = u_\gamma \frac{\mathrm{d}c_\gamma}{c_\gamma} + u'_{<\gamma}$ mit $u'_{<\gamma} \in \Omega^n_{<\gamma}(E)$ und ersetzen dabei den ersten Summanden, so erhalten wir $\wp(u) = \wp(u'_{<\gamma} + u_{<\gamma})$. Auf diese Weise können wir den maximalen Multiindex von u senken bis $\delta \geq \gamma$ gilt.

Betrachten wir nun also eben diesen Fall, es sei also $\delta \geq \gamma$. Dann ist

$$\omega_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \equiv \wp(u_\delta)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \mod \left(\mathrm{d}\Omega^{n-1}(E) + \Omega^n_{<\delta}(E)\right),$$

woraus wir dann $(\omega_\delta - \wp(u_\delta))\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(E) + \Omega^n_{<\delta}(E)$ erhalten. Nach Lemma 3.34 finden wir dann $M_{ij} \in E_{<\delta(i)} = E^p(c \in \mathcal{B}_E \mid c < c_{\delta(i)})$ mit

$$\omega_\delta - \wp(u_\delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} c^j_{\delta(i)}.$$

Da die Form ω über F definiert ist, sind $c_{\delta(1)}, \dots, c_{\delta(n)} \in F$ und wegen $E^p \subset F$ gilt ebenfalls $M_{ij} \in F$ für alle passenden i, j. Insgesamt erhalten wir also $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} c^j_{\delta(i)} \in F$. Damit muss dann auch $\wp(u_\delta) \in F$ gelten, woraus wir mit Lemma A.5 dann auch $u_\delta \in F$ erhalten.

Zusammen folgt also

$$\begin{aligned}(\omega_\delta - \wp(u_\delta))\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p-1} M_{ij} c_{\delta(i)}^{j}\frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p-1}\Bigg(\mathrm{d}\Bigg((-1)^{i+1}\frac{M_{ij}}{j}c_{\delta(i)}^{j}\frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}\check{c_{\delta(i)}}}{c_{\delta(i)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}}\Bigg)\\ &\qquad -\frac{M_{ij}}{j}c_{\delta(i)}^{j}\frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{\delta(i-1)}}{c_{\delta(i-1)}}\wedge\frac{\mathrm{d}M_{ij}}{M_{ij}}\wedge\frac{\mathrm{d}c_{\delta(i+1)}}{c_{\delta(i+1)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}}\Bigg)\\ &\equiv \mathrm{d}t \mod \Omega^n_{<\delta}(F), \end{aligned}\tag{6.3.1}$$

mit $t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p-1}\mathrm{d}\Big((-1)^{i+1}\frac{M_{ij}}{j}c_{\delta(i)}^{j}\frac{\mathrm{d}c_{\delta(1)}}{c_{\delta(1)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}\check{c_{\delta(i)}}}{c_{\delta(i)}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{\delta(n)}}{c_{\delta(n)}}\Big)$. Dabei ist wegen $M_{ij}\in F$ dann auch $t\in\Omega^{n-1}(F)$. Gleichung (6.3.1) liefert also

$$\omega' := (\omega_\delta - \wp(u_\delta))\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} - \mathrm{d}t \in \Omega^n_{<\delta}(F). \tag{6.3.2}$$

Schreiben wir nun $\omega = \omega_\delta\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega_{<\delta}$ mit $\omega_{<\delta}\in\Omega^n_{<\delta}(F)$ und ersetzen den ersten Summanden mit Hilfe von Gleichung (6.3.2), so erhalten wir

$$\omega = \omega_\delta\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega_{<\delta} = \wp(u_\delta)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \mathrm{d}t + \omega' + \omega_{<\delta}.$$

Es ist also $\overline{\omega} = \overline{\omega' + \omega_{<\delta}} \in H_p^{n+1}(F)$. Da offensichtlich $\omega' + \omega_{<\delta}\in\Omega^n_{<\delta}(F)$ gilt, können wir also auf diese Weise den maximalen Multiindex von ω senken, ohne die Klasse in $H_p^{n+1}(F)$ zu verändern. Wiederholen wir nun diesen Schritt und senken ebenfalls den maximalen Multiindex von u falls möglich, so erhalten wir nach endlich vielen Schritten dann $\omega_E = 0$. Da wir ω bereits frei von Formen der Art $\mathrm{d}b$ gewählt haben, muss dann also $\omega = 0$ gelten, woraus wir schließlich $H_p^{n+1}(E/F)\subset\overline{\mathrm{d}b\wedge\Omega^{n-1}(F)}$ erhalten.

Die zweite Beschreibung des Kerns erhalten wir sofort aus der Relation $\overline{\mathrm{d}b\wedge u} = \overline{b\,\mathrm{d}(-u)}$ für alle $b\in F$ und $u\in\Omega^{n-1}(F)$. □

Dieses Resultat werden wir nun auf beliebige endliche rein inseparable Erweiterungen von Exponent eins verallgemeinern. Wir wollen dabei mit Hinblick auf die späteren Resultate diese Aussage bewusst auch für möglicherweise p-abhängige Elemente $b_1,\ldots,b_r$ formulieren.

Proposition 6.14 *Es seien $b_1,\ldots,b_r\in F$ und $E = F(\sqrt[p]{b_1},\ldots,\sqrt[p]{b_r})$. Dann ist*

$$H_p^{n+1}(E/F) = \sum_{i=1}^{r}\overline{\mathrm{d}b_i\wedge\Omega^{n-1}(F)} = \sum_{i=1}^{r}\overline{b_i\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)}.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 6.13 ist wegen $b_i\in E^p$ für $i = 1,\ldots,r$ die Inklusion $\sum_{i=1}^{r}\overline{\mathrm{d}b_i\wedge\Omega^{n-1}(F)}\subset H_p^{n+1}(E/F)$ sofort klar.

Die umgekehrte Inklusion zeigen wir mittels Induktion über r, wobei der Fall $r = 1$ bereits in Proposition 6.13 diskutiert wurde. Es sei also nun $r > 1$ und wir setzen $M = F(\sqrt[p]{b_1})$. Nehmen wir zunächst an, dass die Elemente $b_1,\ldots,b_r$ p-unabhängig über F sind. Dann können wir diese zu einer p-Basis $\mathcal{B} = \{c_i \mid i\in I\}$ von F ergänzen und dabei sei $\mathcal{B}$ so angeordnet, dass die $b_1,\ldots,b_r$ die kleinsten Elemente in $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich $b_1 < \ldots < b_r$ gilt. Wie auch schon im Beweis zuvor ist dann $\mathcal{B}_M = (\mathcal{B}\setminus\{b_1\}) \cup \{\sqrt[p]{b_1}\}$ eine p-Basis von M. Zusätzlich gelte wieder $\sqrt[p]{b_1} > c$ für alle $c \in \mathcal{B}\setminus\{b_1\}$. Es sei nun $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(E/F)$ und ohne Einschränkung seien dann $\mathcal{B}$ und damit auch $\mathcal{B}_M$ endlich nach Bemerkung 3.37. Wie im Beweis zuvor nehmen wir an, dass in der Basisdarstellung von ω bezüglich $\mathcal{B}$ kein Summand von der Form $\mathrm{d}b_1$ geteilt wird. Dann ist $\overline{\omega_M} \in H_p^{n+1}(E/M)$, $E = M(\sqrt[p]{b_2}, \ldots, \sqrt[p]{b_r})$ und nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\omega_M = \wp(u) + \mathrm{d}v + \sum_{i=2}^{r} \mathrm{d}b_i \wedge x_i \tag{6.3.3}$$

mit passenden $u \in \Omega^n(M)$ und $v, x_2, \ldots, x_r \in \Omega^{n-1}(M)$. Es sei nun δ der maximale Multiindex in Gleichung (6.3.3) bezüglich der Basis $\mathcal{B}_M$.

Angenommen es ist $\delta \in \Sigma_{>r}$. Schreiben wir ω und u in der Basis $\mathcal{B}_M$, so erhalten wir $\omega = \sum_\sigma \omega_\sigma \frac{\mathrm{d}c_\sigma}{c_\sigma}$ und $u = \sum_\varepsilon u_\varepsilon \frac{\mathrm{d}c_\varepsilon}{c_\varepsilon}$. Dann ist

$$\omega_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \equiv \wp\left(u_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta}\right) + \mathrm{d}v \equiv \wp\left(u_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta}\right) + t\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \mod \Omega^n_{<\delta}(M), \tag{6.3.4}$$

mit $\mathrm{d}v - t\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = v' \in \Omega^n_{<\delta}(M)$. Angenommen es ist $c_{\delta(n)} = \sqrt[p]{b_1}$. Dann folgt offensichtlich $\omega_\delta = 0$, da ω über F definiert ist und wir erhalten

$$\wp(u_\delta)\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} \in \mathrm{d}\Omega^{n-1}(M) + \Omega^n_{<\delta}(M).$$

Nach Lemma 3.17 finden wir dann passende $a_{i_j} \in F^*$ und $u' \in \Omega^n_{<\delta}(M)$ mit

$$u_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \frac{\mathrm{d}a_{i_1}}{a_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_{i_n}}{a_{i_n}} + u'.$$

Setzen wir dies in die Zerlegung $u = u_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + u''$ mit $u'' \in \Omega^n_{<\delta}(M)$ ein, so folgt $\wp(u) = \wp(u' + u'')$ mit $u' + u'' \in \Omega^n_{<\delta}(M)$. Wir können also den maximalen Multiindex von u (und damit auch den von $\mathrm{d}v$) wiederholt senken und somit annehmen, dass sowohl bei ω als auch bei u und $\mathrm{d}v$ in ihrer Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{B}_M$ kein Summand von der Form $\mathrm{d}(\sqrt[p]{b_1})$ geteilt wird und wir können insgesamt also $c_{\delta(n)} \neq \sqrt[p]{b_1}$ annehmen.

Als nächstes zeigen wir, dass $v \in \Omega^{n-1}(F)$ gilt. Setzen wir $\beta = \sqrt[p]{b_1}$, so ist nach Lemma 3.23 zunächst $v = \sum_{i=0}^{p-1} \beta^i v_i + \sum_{i=0}^{p-1} \beta^i v_i' \wedge \mathrm{d}\beta$ mit $v_i \in \Omega^{n-1}(F)$, $v_i' \in \Omega^{n-2}(F)$. Wenden wir nun den Operator d an, so erhalten wir

$$\mathrm{d}v = \sum_{i=0}^{p-1} \beta^i \,\mathrm{d}v_i + \sum_{i=1}^{p-1} i(-1)^{n-1}\beta^{i-1} v_i \wedge \mathrm{d}\beta + \sum_{i=0}^{p-1} \beta^i \,\mathrm{d}v_i' \wedge \mathrm{d}\beta.$$

Da wir bereits gezeigt haben, dass kein Summand von $\mathrm{d}v$ von der Form $\mathrm{d}\beta$ geteilt wird, erhalten wir dann also

$$0 = \sum_{i=1}^{p-1} i(-1)^{n-1}\beta^{i-1} v_i + \sum_{i=0}^{p-1} \beta^i \,\mathrm{d}v_i' = \beta^{p-1}\,\mathrm{d}v_{p-1}' + \sum_{i=1}^{p-1} \beta^{i-1}\left((-1)^{n-1} i v_i + \mathrm{d}v_{i-1}'\right),$$

woraus wir $\mathrm{d}v_{p-1}' = 0$ und $v_i = \mathrm{d}\big((-1)^{n-1} i^{-1} v_{i-1}'\big) \in \mathrm{d}\Omega^{n-2}(F)$ für $i = 1, \ldots, p-1$ erhalten. Eingesetzt in $\mathrm{d}v$ liefert dies dann

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}v_0 + \sum_{i=1}^{p-1} \beta^i \,\mathrm{d}v_i = \mathrm{d}v_0 + \sum_{i=1}^{p-1} \beta^i \,\mathrm{d}\Big(\mathrm{d}\Big((-1)^{n-1} i^{-1} v_{i-1}'\Big)\Big) = \mathrm{d}v_0.$$

Wir können also ohne Einschränkung $v \in \Omega^{n-1}(F)$ und damit auch $t\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta}, v' \in \Omega^n(F)$ voraussetzen.

Aus Gleichung (6.3.4) erhalten wir dann wegen $\omega_\delta, t \in F$ auch $\wp(u_\delta) \in F$ und mit Lemma A.5 folgt dann $u_\delta \in F$. Ersetzen wir nun den ersten Summanden in $\omega = \omega_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega'$ mit $\omega' \in \Omega^n_{<\delta}(F)$ mittels Gleichung (6.3.4), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega' \\
&= \wp\left(u_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta}\right) + t\frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta} + \omega' \\
&= \wp\left(u_\delta \frac{\mathrm{d}c_\delta}{c_\delta}\right) + \mathrm{d}v - v' + \omega' \\
&\equiv \omega' - v' \mod \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big)
\end{aligned}$$

mit $\omega' - v' \in \Omega^n_{<\delta}(F)$. Iterieren wir diese Argumentation, so erhalten wir nach endlich vielen Wiederholungen eine über F definierte Form ω'' mit $\overline{\omega} = \overline{\omega''} \in H_p^{n+1}(M)$, wobei der maximale Multiindex ε von ω'' bezüglich $\mathcal{B}_M$ die Bedingung $\varepsilon \in \Sigma_{\leq r}$ erfüllt. Wir finden also Formen $z_2, \dots, z_r \in \Omega^{n-1}(F)$, sodass über M dann $\overline{\omega} - \sum_{i=2}^r \overline{\mathrm{d}b_i \wedge z_i} = \overline{0} \in H_p^{n+1}(M)$ gilt. Nach Proposition 6.13 existiert dann schließlich eine weitere Form $z_1 \in \Omega^{n-1}(F)$ mit

$$\overline{\omega} = \overline{\mathrm{d}b_1 \wedge z_1} + \sum_{i=2}^r \overline{\mathrm{d}b_i \wedge z_i} \in \overline{\mathrm{d}b_i \wedge \Omega^{n-1}(F)}.$$

Befassen wir uns nun noch mit dem Fall p-abhängiger Elemente $b_1, \dots, b_r$, das heißt es ist $p\text{-deg}(\{b_1, \dots, b_r\}) = s < r$. Dann existieren paarweise verschiedene $\ell_1, \dots, \ell_s \in \{1, \dots, r\}$ mit $F(\sqrt[p]{b_1}, \dots, \sqrt[p]{b_r}) = F(\sqrt[p]{b_{\ell_1}}, \dots, \sqrt[p]{b_{\ell_s}})$ und die Elemente $b_{\ell_1}, \dots, b_{\ell_s}$ sind dabei p-unabhängig. Wenden wir dann den ersten Teil des Beweises an, so erhalten wir

$$H_p^{n+1}(E/F) = \sum_{k=1}^s \overline{\mathrm{d}b_{\ell_k} \wedge \Omega^{n-1}(F)} = \sum_{i=1}^r \overline{\mathrm{d}b_i \wedge \Omega^{m-1}(F)},$$

wobei die zweite Gleichheit wegen $\mathrm{d}b_1, \dots, \mathrm{d}b_r \in \mathrm{sp}_F(\mathrm{d}b_{\ell_1}, \dots, \mathrm{d}b_{\ell_s})$ gilt, was wir sofort aus $b_1, \dots, b_r \in F^p(b_{\ell_1}, \dots, b_{\ell_s})$ erhalten.

Die zweite Darstellung des Kerns ergibt sich analog wie im Beweis von Proposition 6.13. □

Bevor wir uns nun mit dem H-Kern endlicher rein inseparabler Erweiterungen mit beliebigem Exponent befassen können, benötigen wir noch eine Reihe von Hilfsaussagen, die dann im späteren Verlauf im Hauptbeweis verwendet werden und diesen vereinfachen.

Lemma 6.15 *Es sei $v \in \Omega^{n-1}(F)$, $b_1, \dots, b_r \in F$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\overline{b_1^{k_1} \dots b_r^{k_r}\, \mathrm{d}v} = \sum_{j=1}^r \overline{b_j\, \mathrm{d}\Big(k_j b_1^{k_1} \dots b_{j-1}^{k_{j-1}} b_j^{k_j - 1} b_{j+1}^{k_{j+1}} \dots b_r^{k_r} v\Big)}.$$

Beweis: Offensichtlich können wir ohne Einschränkung $b_1, \dots, b_r \in F^*$ voraussetzen. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über r, dazu sei zunächst $r = 1$. Für $k_1 = 1$ ist nichts zu zeigen. Es sei nun $k_1 \geq 2$ und $k := k_1$. Dann gilt

$$0 \equiv \mathrm{d}\Big(b^k v\Big) \equiv b^k\, \mathrm{d}v + kb^{k-1}\, \mathrm{d}b \wedge v \mod \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big),$$

sowie

$$0 \equiv k\,\mathrm{d}\Big(b\,\left(b^{k-1}v\right)\Big) \equiv kb\,\mathrm{d}\Big(b^{k-1}v\Big) + k\,\mathrm{d}b \wedge (b^{k-1}v) \mod \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big).$$

Setzen wir nun diese beiden Ausdrücke gleich, so erhalten wir wegen $k \in \mathbb{F}_p \subset F^p$ dann wie behauptet $b^k\,\mathrm{d}v \equiv b\,\mathrm{d}\Big(kb^{k-1}v\Big) \mod (\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F))$.

Es sei also nun $r \geq 2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} b_1^{k_1}\dots b_r^{k_r}\,\mathrm{d}v &\equiv -\,\mathrm{d}\Big(b_1^{k_1}\dots b_r^{k_r}\Big)\wedge v \\ &\equiv -b_1^{k_1}\,\mathrm{d}\Big(b_2^{k_2}\dots b_r^{k_r}\Big)\wedge v - b_2^{k_2}\dots b_r^{k_r}\,\mathrm{d}\Big(b_1^{k_1}\Big)\wedge v \\ &\equiv -\,\mathrm{d}\Big(b_2^{k_2}\dots b_r^{k_r}\Big)\wedge\Big(b_1^{k_1}v\Big) - \mathrm{d}\Big(b_1^{k_1}\Big)\wedge\Big(b_2^{k_2}\dots b_r^{k_r}v\Big) \\ &\equiv b_2^{k_2}\dots b_r^{k_r}\,\mathrm{d}\Big(b_1^{k_1}v\Big) + b_1^{k_1}\,\mathrm{d}\Big(b_2^{k_2}\dots b_r^{k_r}v\Big) \mod \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big). \end{aligned}$$

Anwenden der Induktionsvoraussetzung liefert dann die Behauptung. □

Lemma 6.16 *Es seien $v \in \Omega^{n-1}(F)$, $b_1, \dots, b_r \in F$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien für $i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, t$ dann $q_{ij} \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq q_{ij} < p^j$ und $k_i \equiv q_{ij} \mod p^j$. Dann existieren stets Formen $\omega_j, u_i \in \Omega^{n-1}(F)$ mit*

$$b_1^{k_1}\dots b_r^{k_r}(\mathrm{d}v)^{[p^t]} \equiv \sum_{j=1}^{t} b_1^{q_{1j}}\dots b_r^{q_{rj}}(\mathrm{d}\omega_j)^{[p^j]} + \sum_{i=1}^{r} b_i\,\mathrm{d}u_i \mod \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big).$$

Beweis: Wir beweisen die Aussagen mittels Induktion über t, wobei der Fall $t = 0$ bereits in Lemma 6.15 diskutiert wurde. Es sei also nun $t \geq 1$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $b_1, \dots, b_r \in F^*$ gilt und es mindestens ein $j \in \{1, \dots, r\}$ gibt mit $k_j \geq p^t$, da wir ansonsten $\omega_t = v$ und alle weiteren ω_j sowie u_i als Nullform wählen können und nichts zu zeigen wäre. Es sei also ohne Einschränkung zunächst $k_1 \geq p^t$. Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, ist die Abbildung s_p nur bis auf exakte Formen eindeutig. Nutzen wir dies aus, so folgt

$$\begin{aligned} & b_1^{k_1}\dots b_r^{k_r}(\mathrm{d}v)^{[p^t]} \\ \equiv\ & b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}(b_1\,\mathrm{d}v)^{[p^t]} \\ \equiv\ & b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\left(\mathrm{d}(b_1v)^{[p^t]} \pm \left(b_1v\wedge\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1}\right)^{[p^t]}\right) \\ \equiv\ & b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\left(\mathrm{d}(b_1v)^{[p^t]} \pm \left(b_1^p v^{[p]}\wedge\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} + \mathrm{d}x_{t-1}\right)^{[p^{t-1}]}\right) \\ \equiv\ & b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\left(\mathrm{d}(b_1v)^{[p^t]} \pm b_1^{p^t-1}v^{[p^t]}\wedge\mathrm{d}b_1 \pm \sum_{j=0}^{t-1}(\mathrm{d}x_j)^{[p^j]}\right) \\ \equiv\ & b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\,\mathrm{d}(b_1v)^{[p^t]} \pm \Big(b_1^{k_1-1}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}v^{[p^t]}\Big)\wedge\mathrm{d}b_1 + \sum_{j=0}^{t-1} b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\,(\mathrm{d}(\pm x_j))^{[p^j]} \\ \equiv\ & b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\,\mathrm{d}(b_1v)^{[p^t]} + b_1\,\mathrm{d}\Big(\pm b_1^{k_1-1}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}v^{[p^t]}\Big) + \sum_{j=0}^{t-1} b_1^{k_1-p^t}b_2^{k_1}\dots b_r^{k_r}\,(\mathrm{d}(\pm x_j))^{[p^j]} \\ & \quad \mod \Big(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\Big) \end{aligned}$$

für passende $x_0, \dots, x_{t-1} \in \Omega^{n-1}(F)$. Diese Rechnung kann nun für den Exponenten k_1 und anschließend für die Exponenten $k_2, \dots, k_r$ so oft wiederholt werden, bis diese kleiner als p^t sind. Schreibt man dann die letzte Summe mittels der Induktionsvoraussetzung um, so folgt die Behauptung durch die Tatsache, dass die q_{ij} eindeutig sind und offensichtlich $k_i - p^t \equiv k_i \mod p^j$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, t$ ist. □

Lemma 6.17 *Es seien $k, t, q_1, \dots, q_t \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $\max\{1, p^{t-m+1}\}|k$. Für $j = 1, \dots, t$ gelte $0 \leq q_j < p^j$ und $k \equiv q_j \mod p^j$. Dann gilt auch $\max\{1, p^{j-m+1}\}|q_j$.*

Beweis: Es sei zunächst $t < m$. Dann ist $j - m + 1 \leq t - m + 1 \leq 0$ und für die Teilbarkeitsbedingung ist nichts zu zeigen.

Es sei also nun $t \geq m$ und $j \in \{1, \dots, t\}$. Da für $j < m$ wieder nichts zu zeigen ist, sei also zusätzlich noch $j \geq m$, insbesondere also $\max\{1, p^{j-m+1}\} = p^{j-m+1}$. Zunächst ist $\max\{1, p^{t-m+1}\} = p^{t-m+1} > 1$, wir finden also ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k = \ell p^{t-m+1}$. Weiter existiert nach Voraussetzung ein $s_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k - s_j p^j = q_j$. Kombinieren wir nun diese beide Aussagen, so erhalten wir

$$q_j = k - s_j p^j = \ell p^{t-m+1} - s_j p^j = p^{j-m+1}(\ell p^{t-j} - s_j p^{m-1}).$$

□

Wenden wir also das Lemma 6.17 auf die Situation in Lemma 6.16 an, so sehen wir, dass wenn für feste $m_i \in \mathbb{N}$ die Bedingung $\max\{1, p^{t-m_i+1}\}|k_i$ erfüllt ist für $i = 1, \dots, r$, dann ebenfalls $\max\{1, p^{j-m_i+1}\}|q_{ij}$ für alle $j = 1, \dots, t$ gilt. Diese Tatsache werden wir nun verwenden, um die folgende Gruppe genauer zu untersuchen.

Definition 6.18 Es seien $b_1, \dots, b_r \in F$ und $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ mit $m = \max\{m_1, \dots, m_r\}$. Wir definieren $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r))$ als die Untergruppe von $H_p^{n+1}(F)$, welche erzeugt ist durch Formen

(i) $\overline{b_i \, \mathrm{d}u}$, mit $u \in \Omega^{n-1}(F)$, $i = 1, \dots, r$;

(ii) $\overline{b_1^{k(t,1)} \cdot \ldots \cdot b_r^{k(t,r)} \, (\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$, mit $v \in \Omega^{n-1}(F)$, $t = 1, \dots, m-1$ und $0 \leq k(t,i) < p^t$ mit $\max\{1, p^{t-m_i+1}\}|k(t,i)$ für $i = 1, \dots, r$.

Man beachte dabei, dass für $n = 0$ wegen $\mathrm{d}\Omega^{-1}(F) = \{0\}$ dann $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r)) = \{0\}$ für alle passenden $b_1, \dots, b_r \in F$ und $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ gilt.

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass die Gruppe $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r))$ genau dem H-Kern der Erweiterung $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \dots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ entspricht. Dazu wollen wir im folgenden Lemma zunächst einige wichtige Eigenschaften der Gruppe $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r))$ festhalten.

Lemma 6.19 *Es seien $(b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r) \in F \times \mathbb{N}$.*

(a) Für alle $\pi \in \mathfrak{S}_r$ ist $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r)) = \mathcal{K}_F((b_{\pi(1)}, m_{\pi(1)}), \dots, (b_{\pi(r)}, m_{\pi(r)})$.

(b) Existiert ein $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $b_j = 0$ oder mit $b_j \in F^p$ und $m_j = 1$, so ist

$$\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r)) = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_{j-1}, m_{j-1}), (b_{j+1}, m_{j+1}), \dots, (b_r, m_r)).$$

(c) Für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ gilt

$$\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_r, m_r)) = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \dots, (b_j^p, m_j + 1), \dots, (b_r, m_r)).$$

Beweis: Die Definition von $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r))$ liefert sofort die Behauptung aus (a). Beweisen wir nun die Aussage (b). Dazu reicht es den Fall $j = 1$ zu betrachten. Ist $b_1 = 0$, so sieht man die Behauptung direkt an der Definition der Gruppe $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r))$. Es sei also nun $b_1 \in F^p$ und $m_1 = 1$. Für Erzeuger von Typ (i) gilt dann $\overline{b_1\, \mathrm{d}u} = \overline{\mathrm{d}(b_1 u)} = \overline{0}$ für jede Form $u \in \Omega^{n-1}(F)$. Weiter muss für $t \in \{1, \ldots, \max\{m_1, \ldots, m_r\} - 1\}$ der Exponent von b_1 für Erzeuger von Typ (ii) offensichtlich stets Null sein um die Bedingung $\max\{1, p^t\} \mid k(t, 1)$ sowie $0 \leq k(t, 1) < p^t$ zu erfüllen. Demnach taucht der Faktor b_1 in keinem der Erzeuger vom Typ (ii) auf und es folgt die Behauptung in (b).

Kommen wir nun zur Aussage (c) und wählen dabei ohne Einschränkung $b_1, \ldots, b_r \in F^*$ sowie $j = 1$. Wir zeigen nun also die Gleichheit

$$\mathcal{K}_1 := \mathcal{K}_F((b_1^p, m_1 + 1), (b_2, m_r), \ldots, (b_r, m_r)) = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r)) =: \mathcal{K}_2.$$

Dazu setzen wir $m := \max\{m_1, \ldots, m_r\}$, $m' := \max\{m_1 + 1, m_2, \ldots, m_r\}$ und für den gesamten Beweis sei stets $v \in \Omega^{n-1}(F)$.

Wir beginnen mit der Inklusion $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ und werden zeigen, dass jeder Erzeuger von $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ liegt. Starten wir dazu mit einem Erzeuger vom Typ (i). Für $i = 2, \ldots, r$ ist $\overline{b_i\, \mathrm{d}v} \in \mathcal{K}_2$ sicherlich erfüllt. Weiter ist ebenfalls $\overline{b_1^p\, \mathrm{d}v} = \overline{\mathrm{d}(b_1^p v)} = \overline{0} \in \mathcal{K}_2$. Betrachten wir also nun einen Erzeuger vom Typ (ii) gegeben durch $\overline{(b_1^p)^{k(t,1)} b_2^{k(t,2)} \ldots b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$ mit $1 \leq t < m'$ und $0 \leq k(t, i) < p^t$ mit $\max\{1, p^{t-m_i+1}\} \mid k(t, i)$ für $i = 2, \ldots, r$ sowie $\max\{1, p^{t-m_1}\} \mid k(t, 1)$ und $0 \leq k(t, 1) < p^t$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: $t = m$ (das heißt es ist $m' = m + 1$ und $m = m_1$).
Da p^m als Exponent der Form $\mathrm{d}v$ als Erzeuger in $\mathcal{K}_2$ nicht erlaubt ist, reduzieren wir ihn wie folgt. Wegen $\max\{1, p^{m-m_i+1}\} \mid k(m, i)$ für $i = 2, \ldots, r$ und $m \geq m_i$ gilt $p \mid k(m, i)$ für $i = 2, \ldots, r$. Es ist also $k(m, i) = p\ell(m, i)$ für passende $\ell(m, i) \in \mathbb{N}_0$. Mit Lemma 3.14 folgt dann

$$\overline{(b_1^p)^{k(m,1)} \ldots b_r^{k(m,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^m]}} = \overline{b_1^{k(m,1)} b_2^{\ell(m,2)} \ldots b_r^{\ell(m,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^{m-1}]}}. \tag{6.3.5}$$

Wenden wir nun Lemma 6.16 auf Gleichung (6.3.5) an, so finden wir Formen $\omega_j, u_i \in \Omega^{n-1}(F)$ für $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, m - 1$ mit

$$\overline{b_1^{k(m,1)} b_2^{\ell(m,2)} \ldots b_r^{\ell(m,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^{m-1}]}} = \sum_{j=1}^{m-1} \overline{b_1^{q(j,1)} b_2^{q(j,2)} \ldots b_r^{q(j,r)} (\mathrm{d}\omega_j)^{[p^j]}} + \sum_{i=1}^{r} \overline{b_i\, \mathrm{d}u_i}, \tag{6.3.6}$$

wobei $0 \leq q(j, i) < p^j$ für alle passenden i, j und $k(m, 1) \equiv q(j, 1) \mod p^j$, sowie $\ell(m, i) \equiv q(j, i) \mod p^j$ für $i = 2, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, m - 1$ gilt. Wir werden nun zeigen, dass die rechte Seite in Gleichung (6.3.6) nur aus Erzeugern der Gruppe $\mathcal{K}_2$ besteht, was für die Formen der zweiten Summe offensichtlich erfüllt ist. Betrachten wir nun also die Formen der ersten Summe. Für $m = 1$ ist dabei nichts zu zeigen, es sei also nun $m > 1$. Um zu zeigen, dass jede Form der ersten Summe der rechten Seite in Gleichung (6.3.6) ein Erzeuger in $\mathcal{K}_2$ ist, müssen wir die nötigen Bedingungen der jeweiligen Exponenten überprüfen. Zunächst ist $1 \leq m - 1 < m$ sicherlich erfüllt und nach Konstruktion gilt $0 \leq q(j, i) < p^j$ für alle passenden i, j. Weiter ist wegen $m = m_1$ stets $\max\{1, p^{j-m_1+1}\} = 1$ für $j = 1, \ldots, m - 1$ und die Teilbarkeitsbedingung gilt trivialerweise. Da für $i = 2, \ldots, r$ nach Voraussetzung $\max\{1, p^{m-m_i+1}\} | p\ell(m, i)$ gilt, folgt also $\max\{1, p^{(m-1)-m_i+1}\} | \ell(m, i)$ und die Anwendung von Lemma 6.17 liefert dann $\max\{1, p^{j-m_i+1}\} | q(j, i)$ für $j = 1, \ldots, m - 1$.

Fall 2: $t < m$.
Wenden wir in diesem Fall direkt Lemma 6.16 auf den Erzeuger $\overline{b_1^{pk(t,1)} b_2^{k(t,2)} \dots b_r^{k(t,r)} \,(\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$ an, so finden wir wie eben Formen $\omega_j, u_i \in \Omega^{n-1}(F)$ für $i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, t$ mit

$$\overline{b_1^{pk(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)} \,(\mathrm{d}v)^{[p^t]}} = \sum_{j=1}^{t} \overline{b_1^{q(j,1)} b_2^{q(j,2)} \dots b_r^{q(j,r)} \,(\mathrm{d}\omega_j)^{[p^j]}} + \sum_{i=1}^{r} \overline{b_i \,\mathrm{d}u_i}, \tag{6.3.7}$$

wobei $0 \le q(j,i) < p^j$ für alle passenden i, j und $k(t,i) \equiv q(j,i) \mod p^j$ für $i = 2, \dots, r$, sowie $pk(t,1) \equiv q(j,1) \mod p^j$ für $j = 1, \dots, t$ gilt. Wir werden nun erneut zeigen, dass jede auf der rechten Seite von Gleichung (6.3.7) auftretende Form ein Erzeuger in $\mathcal{K}_2$ ist, wobei diese Aussage für die Formen der zweiten Summe offensichtlich wahr ist. Betrachten wir also wieder die Formen der ersten Summe. Zunächst gilt $1 \le t < m$ nach Voraussetzung dieses Falles und nach Konstruktion ist $0 \le q(j,i) < p^j$ für alle passenden i, j. Da für $i = 2, \dots, r$ ebenfalls nach Voraussetzung $\max\{1, p^{t-m_i+1}\} | k(t,i)$ gilt, folgt mit Lemma 6.17 sofort $\max\{1, p^{j-m_i+1}\} | q(j,i)$ für alle $j = 1, \dots, t$. Betrachten wir nun noch die Exponenten von b_1. Da $\max\{1, p^{t-m_1}\} | k(t,1)$ gegeben ist, folgt $\max\{1, p^{t-m_1+1}\} | pk(t,1)$. Durch eine Anwendung von Lemma 6.17 erhalten wir dann $\max\{1, p^{j-m_1+1}\} | q(j,1)$ für alle $j = 1, \dots, t$ und die Inklusion $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ ist bewiesen.

Zeigen wir nun also die Inklusion $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$. Dazu überprüfen wir wie schon in der ersten Inklusion, dass jeder Erzeuger von $\mathcal{K}_2$ auch in $\mathcal{K}_1$ liegt. Beginnen wir wieder mit den Erzeugern vom Typ (i). Für $i = 2, \dots, r$ ist offensichtlich $\overline{b_i \,\mathrm{d}v} \in \mathcal{K}_1$ und wegen $m' \ge 2$ gilt ebenfalls $\overline{b_1 \,\mathrm{d}v} = \overline{b_1^p (\mathrm{d}v)^{[p]}} \in \mathcal{K}_1$. Es sei nun ein Erzeuger von Typ (ii) in $\mathcal{K}_2$ gegeben durch

$$\overline{b_1^{k(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)} \,(\mathrm{d}v)^{[p^t]}} \tag{6.3.8}$$

mit $t \in \{1, \dots, m-1\}$ und $0 \le k(t,i) < p^t$ mit $\max\{1, p^{t-m_i+1}\} \mid k(t,i)$ für $i = 1, \dots, r$. Auch hier unterscheiden wir wieder zwei Fälle.

Fall 1: $p \mid k(t,1)$.
In diesem Fall finden wir ein $\ell(t,1) \in \mathbb{N}_0$ mit $k(t,1) = p\ell(t,1)$. Damit können wir den Erzeuger aus Gleichung (6.3.8) umschreiben zu

$$\overline{(b_1^p)^{\ell(t,1)} \, b_2^{k(t,2)} \dots b_r^{k(t,r)} \,(\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$$

und zeigen nun, dass diese Form ein Erzeuger vom Typ (ii) in $\mathcal{K}_1$ ist, indem wir die notwendigen Bedingungen an die jeweiligen Exponenten nachprüfen. Zunächst gilt $1 \le t < m \le m'$ und für $i = 2, \dots, r$ erfüllen die Exponenten der b_i die nötigen Bedingungen nach Wahl der $k(t,i)$. Es bleibt also der Exponent von b_1^p zu überprüfen. Zunächst gilt sicherlich $0 \le \ell(t,i) \le k(t,i) < p^t$. Prüfen wir also nun noch, ob die Teilbarkeitsbedingung $\max\{1, p^{t-m_1}\} \mid \ell(t,1)$ erfüllt ist, wobei für $m_1 \ge t$ nicht zu zeigen ist. Für $m_1 < t$ gilt nach Voraussetzung an $k(t,1)$ dann $k(t,1) = p^{t-m_1+1} n(t,1)$ für ein passendes $n(t,1) \in \mathbb{N}_0$. Dann ist also $\ell(t,1) = p^{t-m_1} n(t,1)$ und damit ist $\ell(t,1)$ wie verlangt teilbar durch p^{t-m_1}.

Fall 2: $p \nmid k(t,1)$.
Wenden wir Lemma 3.14 auf den Erzeuger in Gleichung (6.3.8) an, so erhalten wir damit

$$\overline{b_1^{k(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)} \,(\mathrm{d}v)^{[p^t]}} = \overline{(b_1^p)^{k(t,1)} \, b_2^{pk(t,2)} \dots b_r^{pk(t,r)} \,(\mathrm{d}v)^{[p^{t+1}]}}. \tag{6.3.9}$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite des neuen Ausdrucks ein Erzeuger vom Typ (ii) in $\mathcal{K}_1$ ist, indem wir wieder die notwendigen Voraussetzungen an die jeweiligen Exponenten nachweisen. Zunächst gilt wegen $p \nmid k(t,1)$ nach Definition der Gruppe $\mathcal{K}_2$ dann $t < m_1$ und für den

Exponenten von $\mathrm{d}v$ gilt $1 \leq t+1 \leq m_1 < m'$ sowohl für den Fall $m_1 = m$, als auch für den Fall $m_1 < m$. Für $i = 2, \ldots, r$ erhalten wir nach Wahl der Exponenten $k(t,i)$ sofort $0 \leq pk(t,i) < p^{t+1}$ und $\max\{1, p^{(t+1)-m_i+1}\} \mid pk(t,i)$. Für den Exponenten von b_1^p gilt ebenfalls $0 \leq k(t,1) < p^{t+1}$ und $\max\{1, p^{(t+1)-(m_1+1)+1}\} = \max\{1, p^{t-m_1+1}\} \mid k(t,1)$ nach Wahl von $k(t,1)$. Damit ist dann auch die zweite Inklusion bewiesen. $\square$

Bevor wir zeigen werden, dass die Gruppe $\mathcal{K}_F((b_1,m_1),\ldots,(b_r,m_r))$ für $(b_1,m_1),\ldots,(b_r,m_r) \in F \times \mathbb{N}$ genau dem H-Kern der Erweiterung $F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1},\ldots,\sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ entspricht, ist es für den Hauptbeweis dieses Abschnittes nötig, eben diese Aussage an den bereits bekannten H-Kernen aus den Propositionen 6.13 und 6.14 zu überprüfen. Dazu betrachten wir das folgende Lemma.

Lemma 6.20 *Es seien $b_1,\ldots,b_r \in F$ und $m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{N}$. Setze $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1},\ldots,\sqrt[p^{m_r}]{b_r})$.*

(a) Ist $[E:F] = p$, so existiert ein $j \in \{1,\ldots,r\}$ und ein $c_j \in F \setminus F^p$ mit $b_j = c_j^{p^{m_j-1}}$ für das dann $E = F(\sqrt[p]{c_j})$ gilt. Weiter gilt dann $\mathcal{K}_F((b_1,m_1),\ldots,(b_r,m_r)) = \overline{c_j\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)} = H_p^{n+1}(E/F)$.

(b) Ist $\exp(E/F) = 1$, so ist $\mathcal{K}_F((b_1,m_1),\ldots,(b_r,m_r)) = H_p^{n+1}(E/F)$.

Beweis: Beginnen wir mit der Aussage (a) und setzen dazu $\mathcal{K} := \mathcal{K}_F((b_1,m_1),\ldots,(b_r,m_r))$. Wegen $[E:F] \neq 1$ muss es ein $j \in \{1,\ldots,r\}$ mit $b_j \notin F^{p^{m_j}}$ geben. Gäbe es ein $k \in \{1,\ldots,r\}$ mit $b_k \in F^{p^{m_k-\ell}}$ für $\ell \geq 2$, so erhielten wir $[F(\sqrt[p^{m_k}]{b_k}) : F] \geq p^2$, was einen Widerspruch zu $[E:F] = p$ liefert. Also gilt $b_i \in F^{p^{m_i-1}}$ für alle $i = 1,\ldots,r$ und es existiert ein j mit $b_j \in F^{p^{m_j-1}} \setminus F^{p^{m_j}}$. Angenommen es existiert ein weiteres $k \in \{1,\ldots,r\}$ mit $k \neq j$ und $b_k \in F^{p^{m_k-1}} \setminus F^{p^{m_k}}$. Dann finden wir $c_j, c_k \in F \setminus F^p$ mit $c_j^{p^{m_j-1}} = b_j$ und $c_k^{p^{m_k-1}} = b_k$. Wären dabei die Elemente c_j, c_k p-unabhängig über F, so würden wir $[F(\sqrt[p^{m_j}]{b_j}, \sqrt[p^{m_k}]{b_k}) : F] = p^2$ erhalten, was ebenfalls einen Widerspruch zur Voraussetzung $[E:F] = p$ liefert. Für jedes b_i mit $i = 1,\ldots,r$ gilt also eine der folgenden beiden Bedingungen.

(i) $b_i \in F^{p^{m_i-1}} \setminus F^{p^{m_i}}$ mit $b_i = c_i^{p^{m_i-1}}$ und $c_i \in F^p(c_j)$;

(ii) $b_i \in F^{p^{m_i}}$, das heißt es ist $b_i = c_i^{p^{m_i}}$ für ein $c_i \in F$.

Sortieren wir nun die Elemente $b_1,\ldots,b_r$ so um, dass $j = 1$ gilt, die Elemente $b_1,\ldots,b_s$ die Bedingung (i) und die Elemente $b_{s+1},\ldots,b_r$ die Bedingung (ii) erfüllen, so erhalten wir offensichtlich $E = F(\sqrt[p]{c_1},\ldots,\sqrt[p]{c_s}) = F(\sqrt[p]{c_1})$. Da nach Lemma 6.19 die Gruppe $\mathcal{K}$ invariant unter Umsortierung der Indizes ist, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{K} = \overline{c_1\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)}$ gilt. Zunächst gilt nach Lemma 6.19 dann $\mathcal{K} = \mathcal{K}_F((c_1,1),\ldots,(c_s,1))$ und in dieser Darstellung ist die Inklusion $\overline{c_1\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)} \subset \mathcal{K}$ trivialerweise erfüllt. Kommen wir nun zur umgekehrten Inklusion. Dazu zeigen wir, dass jeder Erzeuger in $\mathcal{K}_F((c_1,1),\ldots,(c_s,1))$ auch in $\overline{c_1\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)}$ liegt. Dabei sei angemerkt, dass $\mathcal{K}_F((c_1,1),\ldots,(c_s,1))$ lediglich von Erzeugern vom Typ (i) erzeugt wird. Es sei $v \in \Omega^{n-1}(F)$ und $\ell \in \{2,\ldots,r\}$. Wegen $c_\ell \in F^p(c_1)$ finden wir dann $x_{\ell k} \in F$ für $k = 0,\ldots,p-1$ mit $c_\ell = \sum_{k=0}^{p-1} x_{\ell k}^p c_1^k$. Damit ergibt sich dann

$$\overline{c_\ell\,\mathrm{d}v} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{c_1^k\,\mathrm{d}(x_{\ell k}^p v)} \overset{6.15}{=} \sum_{k=1}^{p-1} \overline{c_1\,\mathrm{d}\Big(k c_1^{k-1} x_{\ell k}^p v\Big)} = \overline{c_1\,\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{p-1} k c_1^{k-1} x_{\ell k}^p v\right)} \in \overline{c_1\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)}.$$

Damit ist die zweite Inklusion gezeigt und die Aussage (a) bewiesen.

Es sei nun $\exp(E/F) = 1$. Ähnlich wie zuvor zeigt man, dass für $i = 1, \ldots, r$ dann $b_i \in F^{p^{m_i-1}}$ gelten muss, da es sonst einen Unterkörper von E gäbe der Elemente vom Exponent 2 über F enthalten würde. Also finden wir wieder $c_i \in F$ mit $b_i = c_i^{p^{m_i-1}}$ für $i = 1, \ldots, r$ und damit folgt dann $E = F(\sqrt[p]{c_1}, \ldots, \sqrt[p]{c_r})$ sowie $\mathcal{K} := \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r)) = \mathcal{K}_F((c_1, 1), \ldots, (c_r, 1))$ nach Lemma 6.19(c). Aus der Definition der Gruppe $\mathcal{K}$ erhalten wir dann wie behauptet

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = \mathcal{K}_F((c_1,1),\ldots,(c_r,1)) &= [\ \overline{c_i\,\mathrm{d}v} \mid i = 1,\ldots,r\ ,\ v \in \Omega^{n-1}(F)\ ] = \sum_{i=1}^{r} \overline{c_i\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)} \\ &= H_p^{n+1}(F(\sqrt[p]{c_1},\ldots,\sqrt[p]{c_r})/F) = H_p^{n+1}(E/F).\end{aligned}$$

□

Nachdem wir nun diese beiden Fälle abgedeckt haben, sind wir in der Lage, das Haupttheorem dieses Abschnitts zu beweisen.

Theorem 6.21 *Es seien $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Für die rein inseparable Erweiterung $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ gilt dann*

$$H_p^{n+1}(E/F) = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r)).$$

Beweis: Zunächst können wir wegen Lemma 6.19 ohne Einschränkung $b_1, \ldots, b_r \in F^*$ voraussetzen. Weiter setzen wir $m = \max\{m_1, \ldots, m_r\}$ und $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r))$.

Beginnen wir zunächst damit zu zeigen, dass jeder Erzeuger von $\mathcal{K}_F$ in $H_p^{n+1}(E/F)$ liegt. Dies ist für Erzeuger vom Typ (i) offensichtlich wegen $b_1, \ldots, b_r \in E^p$ erfüllt. Für einen Erzeuger vom Typ (ii) wählen wir $t \in \{1, \ldots, m-1\}$, $v \in \Omega^{n-1}(F)$ und $k(t,i) \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k(t,i) < p^t$ und $\max\{1, p^{t-m_i+1}\} \mid k(t,i)$ für $i = 1, \ldots, r$. Nach diesen Voraussetzungen finden wir also für $i = 1, \ldots, r$ stets ein $\ell(t,i) \in \mathbb{N}_0$ mit $p^{m_i} k(t,i) = p^{t+1} \ell(t,i)$. Mit $\beta_i := \sqrt[p^{m_i}]{b_i}$ für $i = 1, \ldots, r$ folgt dann

$$\begin{aligned} b_1^{k(t,1)} \ldots b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]} &\equiv \beta_1^{(p^{m_1})k(t,1)} \ldots \beta_r^{(p^{m_r})k(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]} \\ &\equiv \beta_1^{(p^{t+1})\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{(p^{t+1})\ell(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]} \\ &\equiv \left(\beta_1^{p\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{p\ell(t,r)}\,\mathrm{d}v\right)^{[p^t]} \\ &\overset{3.14}{\equiv} \beta_1^{p\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{p\ell(t,r)}\,\mathrm{d}v \\ &\overset{(1)}{\equiv} \mathrm{d}\Big(\beta_1^{p\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{p\ell(t,r)} v\Big) \\ &\equiv 0 \mod \Big(\wp\Omega^n(E) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(E)\Big). \end{aligned}$$

Dabei wird in Schritt (1) verwendet, dass der gesamte Ausdruck $\beta_1^{p\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{p\ell(t,r)}$ in E^p liegt.

Kommen wir nun zur umgekehrten Inklusion. Nehmen wir zunächst an, es existiert ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $b_j = c_j^p$ für ein $c_j \in F$. Ist dabei $m_j \geq 2$, so gilt wie im vorherigen Beweis sowohl $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_j-1}]{c_j}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ sowie nach Lemma 6.19(c) dann ebenfalls $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (c_j, m_j - 1), \ldots, (b_r, m_r))$. Ist zusätzlich noch $m_j = 1$, so gilt $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_{j-1}}]{b_{j-1}}, \sqrt[p^{m_{j+1}}]{b_{j+1}}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ und wieder nach Lemma 6.19 folgt $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_{j-1}, m_{j-1}), (b_{j+1}, m_{j+1}), \ldots, (b_r, m_r))$. Wir können also ohne Einschränkung $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$ voraussetzen. Schließlich nutzen wir Lemma 6.19 ein weiteres Mal, sodass wir ohne Einschränkung auch $m_1 \geq \ldots \geq m_r$ erhalten. Es sei nun $[E : F] = p^h$ für ein $h \in \mathbb{N}$.

Der Fall $h = 0$ kann dabei nicht auftreten, da wir bereits $b_1, \dots, b_r \in F \setminus F^p$ gewählt haben. Wir zeigen die Behauptung nun mit Induktion über h, wobei der Fall $h = 1$ bereits in Lemma 6.20 diskutiert wurde. Es sei also $h \geq 2$. Der Fall $m_1 = \ldots = m_r = 1$ wurde ebenfalls bereits in Lemma 6.20 behandelt, sodass wir nun den Fall $h \geq 2$ und $m = m_1 \geq 2$ betrachten wollen. Um die nachfolgenden Rechnungen zu vereinfachen führen wir die folgenden Notationen ein.

Setze $B := b_2 \cdot \ldots \cdot b_r$ und für alle $\nu = (\nu_2, \dots, \nu_r) \in \mathbb{N}_0^{r-1}$ sei $B^\nu = b_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot b_r^{\nu_r}$. Auf der Menge $\mathbb{N}_0^{r-1}$ werden wir im Folgenden stets die komponentenweise Addition und skalare Multiplikation verwenden. Weiter definieren wir $M := F\left(\sqrt[p]{b_1}\right) \subset E$ womit wir dann

$$E = M\left(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \dots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r}\right)$$

erhalten. Beachte dabei, dass einige der b_i über M p-Potenzen sein können, aber auf jeden Fall wegen $b_1 \in M^p$ und $b_1 \in F \setminus F^p$ dann $[E : M] = p^{h-1}$ gilt. Für $t = 1, \dots, m-1$ setzen wir

$$Q_t := \{(k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}_0^{r-1} \mid \ 0 \leq k_j < p^t \text{ und } \max\{1, p^{t-m_j+1}\} | k_j \text{ für } j = 2, \dots, r\}.$$

Die Menge Q_t besteht also für ein festes t aus all den möglichen Exponenten der Elemente $b_2, \dots, b_r$ als Erzeuger vom Typ (ii).

Es sei nun $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(E/F)$. Damit ist dann $\overline{\omega_M} \in H_p^{n+1}(E/M)$ und wegen $[E : M] = p^{h-1}$ erhalten wir aus der Induktionsvoraussetzung wegen $m_1 = \max\{m_1, \dots, m_r\}$ dann

$$\omega_M = \wp(u) + \mathrm{d}v + \sum_{j=1}^{r} b_j \,\mathrm{d}x_j + \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{\varepsilon \in Q_t} \sum_{k=0}^{p^t-1} b_1^k B^\varepsilon (\mathrm{d}z_{t\varepsilon k})^{[p^t]} \tag{6.3.10}$$

mit $u \in \Omega^n(M)$ und $v, x_j, z_{t\varepsilon k} \in \Omega^{n-1}(M)$ für alle passenden Indizes j, t, ε, k.

Da nach Voraussetzung $b_1 \in F \setminus F^p$ gilt, können wir b_1 zu einer p-Basis $\mathcal{B}$ von F ergänzen und erhalten dann eine p-Basis von M durch $\mathcal{B}_M = (\mathcal{B} \setminus \{b_1\}) \cup \{\sqrt[p]{b_1}\}$. Nutzen wir nun die Zerlegung von $\Omega^n(M)$ wie sie in Lemma 3.23 beschrieben ist, so finden wir eindeutige Formen $u_i \in \Omega^n(F)$, $v_i, x_{ji}, z_{t\varepsilon ki} \in \Omega^{n-1}(F)$ und $u' \in M\,\mathrm{d}(\sqrt[p]{b_1}) \wedge \Omega^{n-1}(F)$, $v', x'_j, z'_{t\varepsilon k} \in M\,\mathrm{d}(\sqrt[p]{b_1}) \wedge \Omega^{n-2}(F)$ mit

$$u = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i u_i + u' \ , \qquad v = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i v_i + v' \,,$$
$$x_j = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i x_{ji} + x'_j \ , \quad z_{t\varepsilon k} = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i z_{t\varepsilon ki} + z'_{t\varepsilon k}.$$

Wenden wir nun die additiven Abbildungen $\wp, \mathrm{d}$ und s_p an, so erhalten wir

$$\wp(u) = \sum_{i=0}^{p-1} b_1^i u_i^{[p]} - \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i u_i + u'' \ , \quad \mathrm{d}v = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i \mathrm{d}v_i + v'' \,,$$
$$\mathrm{d}x_j = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i \mathrm{d}x_{ji} + x''_j \ , \quad (\mathrm{d}z_{t\varepsilon k})^{[p^t]} = \sum_{i=0}^{p-1} b_1^{ip^{t-1}} (\mathrm{d}z_{t\varepsilon ki})^{[p^t]} + z''_{t\varepsilon k} \ ,$$

mit passenden Formen $u'' \in M\,\mathrm{d}(\sqrt[p]{b_1}) \wedge \Omega^{n-1}(F)$ und $v'', x''_j, z''_{t\varepsilon k} \in M\,\mathrm{d}(\sqrt[p]{b_1}) \wedge \Omega^{n-2}(F)$. Setzen wir dies in Gleichung (6.3.10) ein, so folgt dann

$$\begin{aligned}\omega_M = &\sum_{i=0}^{p-1}\left(b_1^i u_i^{[p]} - \left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i u_i + u''\right) + \sum_{i=0}^{p-1}\left(\left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i \mathrm{d}v_i + v''\right)\\ &+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=0}^{p-1}\left(b_j\left(\sqrt[p]{b_1}\right)^i \mathrm{d}x_{ji} + b_j x_j''\right)\\ &+\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{\varepsilon\in Q_t}\sum_{k=0}^{p^t-1}\sum_{i=0}^{p-1}\left(b_1^{k+ip^{t-1}}B^\varepsilon(\mathrm{d}z_{t\varepsilon ki})^{[p^t]} + b_1^k B^\varepsilon z''_{t\varepsilon k}\right).\end{aligned}$$

Nutzen wir die Zerlegung des Raumes $\Omega^n(M)$ aus Lemma 3.23 ein weiteres Mal und verwenden, dass die Form ω_M über F definiert ist, so erhalten wir durch einen Vergleich der Ausdrücke insgesamt $2p$ verschiedene Gleichungen. Wir sind allerdings nur an diesen Ausdrücken interessiert, die nicht von der von der Form $\mathrm{d}(\sqrt[p]{b_1})$ geteilt werden. Darum erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega_M = \wp(u_0) + \mathrm{d}v_0 + \sum_{i=1}^{p-1} b_1^i u_i^{[p]} + \sum_{j=1}^{r} b_j\,\mathrm{d}x_{j0}\\ +\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{\varepsilon\in Q_t}\sum_{k=0}^{p^t-1}\sum_{i=0}^{p-1}\left(b_1^{k+ip^{t-1}}B^\varepsilon(\mathrm{d}z_{t\varepsilon ki})^{[p^t]}\right)\end{aligned}\tag{6.3.11}$$

und für $i = 1, \ldots, p-1$

$$0 = -u_i + \mathrm{d}v_i + \sum_{j=1}^{r} b_j\,\mathrm{d}x_{ji}.$$

Für $i = 1, \ldots, p-1$ erhalten wir dann also

$$u_i^{[p]} = (\mathrm{d}v_i)^{[p]} + \sum_{j=1}^{r} b_j^p(\mathrm{d}x_{ji})^{[p]}.$$

Dies setzen wir in Gleichung (6.3.11) ein und erhalten auf diese Weise nach einer Reduktion modulo $(\wp\Omega^n(M) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(M))$ dann

$$\begin{aligned}\omega_M \equiv &\sum_{i=1}^{p-1} b_1^i(\mathrm{d}v_i)^{[p]} + \sum_{j=1}^{r} b_j\,\mathrm{d}x_{j0} + \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{r} b_1^i b_j^p(\mathrm{d}x_{ji})^{[p]}\\ &+\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{\varepsilon\in Q_t}\sum_{k=0}^{p^t-1}\sum_{i=0}^{p-1} b_1^{k+ip^{t-1}}B^\varepsilon(\mathrm{d}z_{t\varepsilon ki})^{[p^t]} \qquad \bmod \left(\wp\Omega^n(M) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(M)\right).\end{aligned}$$

Obwohl alle in dieser Gleichung auftauchenden Formen über F definiert sind, ist die gesamte Gleichung über M definiert. Um sie auf den Körper F zu reduzieren, müssen wir ein passendes Element aus $H_p^{n+1}(M/F) = \overline{b_1\,\mathrm{d}\Omega_F^{n-1}}$ addieren. Wir finden also eine passende Form $y \in \Omega^{n-1}(F)$ mit

$$\begin{aligned}\omega \equiv &\sum_{i=1}^{p-1} b_1^i(\mathrm{d}v_i)^{[p]} + b_1\,\mathrm{d}y + \sum_{j=1}^{r} b_j\,\mathrm{d}x_{j0} + \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{r} b_1^i b_j^p(\mathrm{d}x_{ji})^{[p]}\\ &+\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{\varepsilon\in Q_t}\sum_{k=0}^{p^t-1}\sum_{i=0}^{p-1} b_1^{k+ip^{t-1}}B^\varepsilon(\mathrm{d}z_{t\varepsilon ki})^{[p^t]} \qquad \bmod \left(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\right).\end{aligned}$$

Nutzen wir nun noch abschließend Lemma 6.16 um die Exponenten der Faktoren der letzten beiden Summen zu reduzieren, so sehen wir, dass $\overline{\omega}$ mit Erzeugern der Gruppe $\mathcal{K}_F$ dargestellt werden kann und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Der Beweis der obigen Aussage in dieser allgemeinen Form hat den Nachteil, dass nicht klar wird, wie die Struktur der Erzeuger des H-Kerns der Erweiterung $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ zustande kommt. Diese Gestalt ergibt sich am deutlichsten, wenn man obigen Beweis für p-unabhängige $b_1, \ldots, b_r \in F$ umschreibt und die Induktion nicht über den Körpergrad, sondern über den Exponenten der Erweiterung durchführt. Wählt man wieder $m_1 \geq \ldots \geq m_r$ mit $m_1 = \ldots = m_s > m_{s+1} \geq \ldots m_r$ und wendet man die Induktionsvoraussetzung auf die Erweiterung $E/F(\sqrt[p]{b_1}, \ldots, \sqrt[p]{b_s})$ an, so sieht man bei ähnlichen, aber deutlich komplizierten Rechnungen wie im obigen Beweis, dass alle Exponenten der Faktoren $b_{s+1}, \ldots, b_r$ in den Erzeugern um eine p-Potenz vergrößert werden. Die Exponenten der Faktoren der Erzeuger ergeben sich also durch die Exponenten der verschiedenen Zwischenkörper der Erweiterung E/F.

Bemerkung 6.22 Wie im obigen Theorem sei $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ mit $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$.

(a) Man beachte, dass das in Theorem 6.21 berechnete Erzeugendensystem des H-Kerns der Erweiterung E/F unabhängig von einer möglichen p-Abhängigkeit der $b_1, \ldots, b_r$ ist. Jedoch kann die Anzahl der Erzeuger vom Typ (i) für p-abhängige $b_1, \ldots, b_r$ wie folgt reduziert werden. Ist $p\text{-}\deg_F(\{b_1, \ldots, b_r\}) = s$ und $b_{\ell_1}, \ldots, b_{\ell_s} \in \{b_1, \ldots, b_r\}$ eine p-Basis von $F^p(b_1, \ldots, b_r)$, so können die Erzeuger vom Typ (i) ersetzt werden durch die Formen

(i') $\overline{b_{\ell_j}\, \mathrm{d}u}\ ,\ j = 1, \ldots, s\ ,\ u \in \Omega^{n-1}(F)$.

(b) Es seien nun $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$ (dies ist bei jeder rein inseparablen Erweiterung ohne Einschränkung möglich). Dann entspricht das Maximum $\max\{m_1, \ldots, m_r\}$ dem Exponenten $e = \exp(E/F)$ der Erweiterung E/F. Ist etwa $\exp(E/F) = 1$, so gibt es nach Definition der Menge $\mathcal{K}_F((b_1, m_1), \ldots, (b_r, m_r))$ keine Erzeuger vom Typ (ii). Wählen wir nun $s \in \{1, , \ldots, e\}$ und setzen dann $s_i := \min\{s, m_i\}$ für $i = 1, \ldots, r$, so rechnet man leicht nach, dass dann

$$F(\sqrt[p^{s_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{s_r}]{b_r}) = \{x \in E \mid \exp(x/F) \leq s\} =: E_{\leq s}$$

gilt. Damit folgt dann auch sofort

$$H_p^{n+1}(E_{\leq s}/F) = \mathcal{K}_F((b_1, s_1), \ldots, (b_r, s_r)).$$

Die Erzeuger von $H_p^{n+1}(E_{\leq s}/F)$ entsprechen also genau den Erzeugern von $H_p^{n+1}(E/F)$ mit der Einschränkung, dass der Exponent der exakten Form für Erzeuger vom Typ (ii) maximal $s - 1$ betragen darf. Jeder Schritt im Körperturm $F \subset E_{\leq 1} \subset \ldots \subset E_{\leq e} = E$ erhöht im H-Kern der Erweiterung E/F also den maximalen Exponenten der exakten Formen der Erzeuger von Typ (ii) um jeweils eine p-Potenz.

(c) Nicht alle möglichen Kombinationen der $k(t, i)$ als Exponenten der Faktoren der Erzeuger von Typ (ii) liefern verschiedene Formen. Betrachten wir dazu Erzeuger von Typ (ii), bei denen alle Exponenten durch p teilbar sind. Ist $\overline{b_1^{k(t,1)} \ldots b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$ ein Erzeuger vom Typ (ii) mit passenden Exponenten und $t \geq 1$ und gilt $p \mid k(t, i)$ für $i = 1, \ldots, r$, so finden wir geeignete $\ell(t, i) \in \mathbb{N}_0$ mit $k(t, i) = p\ell(t, i)$ und damit erhalten wir

$$\overline{b_1^{k(t,1)} \ldots b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]}} = \overline{b_1^{\ell(t,1)} \ldots b_r^{\ell(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^{t-1}]}},$$

wobei beide Formen zulässige Erzeuger vom Typ (ii) sind.

Kombinieren wir die Bemerkungen 6.22(c) mit Lemma 3.14, so erhalten wir sofort das folgende Resultat.

Korollar 6.23 *Es sei $b \in F \setminus F^p$ und $E = F(\sqrt[p^e]{b})$ eine einfache rein inseparable Erweiterung vom Exponent e. Dann ist*

$$H_p^{n+1}(E/F) = \overline{b\,\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)} + \sum_{t=1}^{e-1} \sum_{\substack{1\le j<p^t \\ j,p \text{ teilerfremd}}} \overline{b^j\,(\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F))^{[p^t]}}.$$

Das nächste Ziel ist es nun, das Theorem 6.21 auch auf beliebige rein inseparable Erweiterungen zu verallgemeinern. Dazu das folgende Resultat.

Theorem 6.24 *Es sei E/F eine rein inseparable Erweiterung gegeben durch $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ mit passender Indexmenge J. Setze $e_j = \exp(\beta_j/F)$ und $b_j = \beta_j^{p^{e_j}}$ für $j \in J$. Ist $G \subset J$ eine endliche Teilmenge von J, so setzen wir $e(G) := \max\{e_g \mid g \in G\} = \exp(F(\beta_g \mid g \in G)/F)$. Dann ist der Kern $H_p^{n+1}(E/F)$ erzeugt durch die Formen*

(i) $\overline{b_j\,\mathrm{d}u}$ *, mit $j \in J$, $u \in \Omega^{n-1}(F)$;*

(ii) $\overline{\left(\prod_{g\in G} b_g^{k(t,g)}\right)(\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$*, mit $v \in \Omega^{n-1}(F)$, einer endlichen Menge $G \subset J$, $t = 1,\dots,e(G)-1$ und $0 \le k(t,g) < p^t$ mit $\max\{1, p^{t-e_g+1}\} | k(t,g)$ für $g \in G$.*

Beweis: Zunächst ergibt sich analog zum Beweis von Theorem 6.21, dass die in der Behauptung beschriebenen Erzeuger in $H_p^{n+1}(E/F)$ liegen. Es sei also nun $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(E/F)$. Da die Relation $\omega_E = \wp(u) + \mathrm{d}v$ mit $u \in \Omega^n(E)$ und $v \in \Omega^{n-1}(E)$ nur eine endliche Anzahl von Elementen in E verwendet und diese dann mit einer endlichen Anzahl von Elementen in $\{\beta_j \mid j \in J\}$ zusammen mit Elementen in F beschrieben werden können, existiert also eine endliche Teilmenge $G \subset J$, für die dann $\overline{\omega} \in H_p^{n+1}(F(\beta_g \mid g \in G)/F)$ gilt. Die Behauptung folgt dann sofort durch Anwendung von Theorem 6.21 auf die endliche Erweiterung $F(\beta_g \mid g \in G)/F$. □

Wir wollen dieses Kapitel nun damit abschließen, eine weitere Darstellung der Erzeuger des Kerns $H_p^{n+1}(E/F)$ für eine rein inseparable Körpererweiterung $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1},\dots,\sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ mit $b_1,\dots,b_r \in F$ und $m_1,\dots,m_r \in \mathbb{N}$ zu finden, welche dann kompatibel mit Katos Isomorphismus 3.19 ist. Dazu nennen wir einen Erzeuger vom Typ (ii) gegeben durch $\overline{b_1^{k(t,1)}\dots b_r^{k(t,r)}(\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$ mit passenden $k(t,i)$ und $t \ge 1$ vom Grad t, wenn er nicht mit Hilfe eines kleineren Wertes t geschrieben werden kann, das heißt wenn die Form in $H_p^{n+1}(E_{\le t+1}/F)$ und nicht in $H_p^{n+1}(E_{\le t}/F)$ liegt (siehe dazu Bemerkung 6.22(c)). Damit sind wir nun in der Lage, ein verändertes Erzeugendensystem des analysierten H-Kerns anzugeben.

Theorem 6.25 *Es seien $b_1,\dots,b_r \in F\setminus F^p$, $m_1,\dots,m_r \in \mathbb{N}$ und $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1},\dots,\sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ eine rein inseparable Erweiterung vom Exponent $e = \exp(E/F)$. Dann ist $H_p^{n+1}(E/F)$ erzeugt durch die Formen*

(i) $\overline{b_i s\frac{\mathrm{d}s}{s} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}}$ *, mit $i = 1,\dots,r$ und $s, a_2,\dots,a_n \in F^*$;*

(ii) $\overline{b_1^{k(t,1)}\dots b_r^{k(t,r)} s^{p^t}\frac{\mathrm{d}s}{s} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}}$ *, mit $s, a_2,\dots,a_n \in F^*$, $t = 1,\dots,e-1$ und für $i = 1,\dots,r$ ist $0 \le k(t,i) < p^t$ mit $\max\{1, p^{t-m_i+1}\} \mid k(t,i)$.*

Insbesondere gilt für $n \geq 1$ dann also

$$H_p^{n+1}(E/F) = H_p^2(E/F) \wedge \overline{\nu_{n-1}(F)}.$$

Beweis: Offensichtlich liegen die Erzeuger vom Typ (i) in $H_p^{n+1}(E/F)$. Für Erzeuger von Typ (ii) gegeben durch $\overline{b_1^{k(t,1)} \cdot \ldots \cdot b_r^{k(t,r)} s^{p^t} \frac{\mathrm{d}s}{s} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}}$ mit passenden Werten $k(t,i)$ und t finden wir nach Voraussetzung für jedes $i = 1, \ldots, r$ stets ein $\ell(t,i) \in \mathbb{N}_0$, sodass $p^{m_i} k(t,i) = p^{t+1}\ell(t,i)$ gilt. Mit $\beta_i = \sqrt[p^{m_i}]{b_i}$ erhalten wir analog zum Beweis von Theorem 6.21 dann

$$\begin{aligned}
&b_1^{k(t,1)} \ldots b_r^{k(t,r)} s^{p^t} \frac{\mathrm{d}s}{s} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \\
&\equiv \left(\beta_1^{\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{\ell(t,r)}\right)^{p^{t+1}} s^{p^t} \frac{\mathrm{d}s}{s} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \\
&\overset{3.14}{\equiv} \left(\beta_1^{\ell(t,1)} \ldots \beta_r^{\ell(t,r)}\right)^{p} s \frac{\mathrm{d}s}{s} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \\
&\equiv \mathrm{d}\Big(\beta_1^{\ell(t,1)p} \ldots \beta_r^{\ell(t,r)p} s \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}\Big) \\
&\equiv 0 \mod \left(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)\right).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass sich jeder Erzeuger der Gruppe $H_p^{n+1}(E/F)$ aus Theorem 6.21 als Summe der oben beschriebene Erzeuger schreiben lässt. Dazu wählen wir zunächst einen Erzeuger vom Typ (ii) gegeben durch $\overline{b_1^{k(t,1)} \cdot \ldots \cdot b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}v)^{[p^t]}}$ mit passenden Werten $k(t,i) \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \ldots, r$ und $t \in \{1, \ldots, e-1\}$ sowie $v \in \Omega^{n-1}(F)$. Da der Raum $\mathrm{d}\Omega^{n-1}(F)$ additiv erzeugt ist durch die Formen $\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ und die Abbildungen s_p und d beide additiv sind, reicht es den Fall $\mathrm{d}v = \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n$ zu betrachten. Wir erinnern noch einmal daran, dass sich bei einem Basiswechsel das Bild einer Form unter s_p durch eine exakte Form ändert. In $\Omega^n(F)$ erhalten wir dann also

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_n)^{[p^t]} \\
&= \left(a_1 \ldots a_n \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}\right)^{[p^t]} \\
&= \left((a_1 \ldots a_n)^p \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} + \mathrm{d}x_{t-1}\right)^{[p^{t-1}]} \\
&= \left((a_1 \ldots a_n)^p \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}\right)^{[p^{t-1}]} + (\mathrm{d}x_{t-1})^{[p^{t-1}]} \\
&\;\vdots \\
&= \left((a_1 \ldots a_n)^{p^t} \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}\right) + \sum_{j=0}^{t-1} (\mathrm{d}x_j)^{[p^j]} \\
&= \left((a_1 \ldots a_n)^{p^t} \frac{\mathrm{d}(a_1 \ldots a_n)}{(a_1 \ldots a_n)} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}\right) + \sum_{j=0}^{t-1} (\mathrm{d}x_j)^{[p^j]}
\end{aligned}$$

mit passenden $x_0 \ldots, x_{t-1} \in \Omega^{n-1}(F)$. Der letzte Umformungsschritt nutzte dabei wiederholt die Tatsache, dass $\frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}(xy)}{xy} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}$ für alle $x, y \in F^*$ gilt. Multiplizieren wir nun die obige

Gleichung mit $b_1^{k(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & b_1^{k(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_n)^{[p^t]} \\ \equiv\ & b_1^{k(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)} \left((a_1 \dots a_n)^{p^t} \frac{\mathrm{d}(a_1 \dots a_n)}{(a_1 \dots a_n)} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \right) \\ & + \sum_{j=0}^{t-1} b_1^{k(t,1)} \dots b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}x_j)^{[p^j]} \qquad \mod \left(\wp\Omega^n(F) + \mathrm{d}\Omega^{n-1}(F) \right). \end{aligned}$$

Wenden wir nun Lemma 6.16 kombiniert mit Lemma 6.17 sowie Lemma 6.15 auf die einzelnen Summanden der Summe $\sum_{j=0}^{t-1} b_1^{k(t,1)} \cdot \ldots \cdot b_r^{k(t,r)} (\mathrm{d}x_j)^{[p^j]}$ an, können wir nun jede dieser Formen als Summe von Erzeugern von Grad kleiner oder gleich j, insbesondere also vom Grad echt kleiner t schreiben. Nutzen wir also eine Induktion über t und ersetzen wir $a_1 \dots a_n$ durch s, so folgt die Behauptung für Erzeuger von Typ (ii). Eine analoge Rechnung für Erzeuger von Typ (i) vervollständigt dann den Beweis. □

Eine Übertragung dieser Darstellung des H-Kerns einer endlichen rein inseparablen Erweiterung E/F auf möglicherweise unendliche rein inseparable Erweiterungen überlassen wir an dieser Stelle dem Leser.

6.4 $\mathrm{Br}_p(F)$ unter rein inseparablen Erweiterungen

Ähnlich wie schon zuvor können wir mit Hilfe des Bloch-Kato Theorems 4.8 den in Abschnitt 6.3 beschriebenen H-Kern einer rein inseparablen Körpererweiterung auf den p-Torsionsteil der Brauergruppe übertragen. Wir erhalten also ohne weiteren Beweis das folgende Theorem.

Theorem 6.26 *Es sei E/F eine rein inseparable Erweiterung gegeben durch $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ mit passender Indexmenge J. Setze $e_j = \exp(\beta_j/F)$ und $b_j = \beta_j^{p^{e_j}}$ für $j \in J$. Ist $G \subset J$ eine endliche Teilmenge von J, so setzen wir $e(G) := \max\{e_g \mid g \in G\} = \exp(F(\beta_g \mid g \in G)/F)$. Dann ist die Gruppe $\mathrm{Br}_p(E/F)$ erzeugt durch die Brauerklassen der Symbolalgebren*

(i) $[sb_j, s)$, *mit $j \in J$ und $s \in F^*$;*

(ii) $[s^{p^t} \prod_{g \in G} b_g^{k(t,g)}, s)$, *mit $s \in F^*$, einer endlichen Teilmenge $G \subset J$, $t = 1, \dots, e(G) - 1$ und $0 \leq k(t,g) < p^t$ mit $\max\{1, p^{t-e_g+1}\} | k(t,g)$ für $g \in G$.*

Kapitel 7

Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, lässt sich für p-unabhängige Elemente $b_1, \ldots, b_r \in F$ sowie ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ der Ω-Kern $\Omega^n(F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F)$ als der Annullator $\operatorname{Ann} \Omega_F^n(\mathrm{d}b_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_r)$ identifizieren. Eine analoge Aussage gilt dann natürlich auch für den ν-Kern dieser Erweiterung und den entsprechenden ν-Annullator. In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit mehrfachen Funktionenkörpererweiterungen von p-Formen vom Typ $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F$ befassen, diese ebenfalls als Annullator identifizieren und anschließend den Kern in den Fällen, in denen der Annullator bekannt ist bestimmen. Dabei erinnern wir noch einmal daran, dass für Körpererweiterungen $F \subset K \subset L$ mit rein transzendentem L/K nach Proposition 3.22 stets $\Omega^n(L/F) = \Omega^n(K/F)$ und damit auch $\nu_n(L/F) = \nu_n(K/F)$ gilt.

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir im Folgenden die p-Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ und die zugehörigen Körper für das gesamte Kapitel wie folgt fixieren.

Notation 7.1 Für $i = 1, \ldots, r$ sei φ_i eine p-Form über F der Dimension $n_i + 1$ mit $n_i \in \mathbb{N}$. Im Folgenden betrachten wir die Körpererweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F$. Nach passender Skalierung sei φ_i gegeben durch $\varphi_i = \langle 1, a_{i1}, \ldots, a_{in_i} \rangle_p$ mit $a_{i1}, \ldots, a_{in_i} \in F$. Diese Skalierung hat nach Lemma 2.10 keinen Einfluss auf den Körper $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Weiter sei $\operatorname{ndeg}_F(\varphi_i) = p^{k_i}$ und die $a_{i1}, \ldots, a_{in_i}$ seien so angeordnet, dass $F^p(a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}) = N_F(\varphi_i)$ gilt. Zusätzlich seien $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ für alle $i = 1, \ldots, r$ stets Variablen. Mit φ_i' bezeichnen wir dann die Form $\varphi_i' = \langle a_{i1}, \ldots, a_{in_i} \rangle_p$, das heißt es ist $\varphi_i = \langle 1 \rangle_p \perp \varphi_i'$. Damit definieren wir

$$T_i := \varphi_i'(X_{i1}, \ldots, X_{in_i}) \in F[X_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i].$$

Mit diesen Notationen können wir die mehrfachen Funktionenkörpererweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ dann auffassen als den Körper

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \cong F(X_{ij} \mid i = 1, \ldots, r\ ,\ j = 1, \ldots, n_i)(\sqrt[p]{T_1}, \ldots, \sqrt[p]{T_r}),$$

wobei wir den Körpers $F(X_{ij} \mid i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, n_i)$ mit M bezeichnen wollen. An dieser Darstellung des Körper $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ sieht man sofort, dass dieser invariant unter Permutation der Formen φ_i ist. Darum nehmen wir für $p\text{-}\deg_M(\{T_1, \ldots, T_r\}) = s$ stets an, dass die φ_i und damit auch die T_i so sortiert sind, dass $M^p(T_1, \ldots, T_r) = M^p(T_1, \ldots, T_s)$ gilt und die $T_1, \ldots, T_s$ damit über M p-unabhängig sind. Abschließend definieren wir den Körper $L = F(X_{ij} \mid i =$

$1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, n_i$) und halten fest, dass $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ eine rein transzendente Erweiterung ist und somit

$$\Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) = \Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)/F)$$

gilt. Für die Berechnung des Ω-Kernes der Erweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F$ ist also eine Betrachtung der Erweiterung $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)/F$ völlig ausreichend. Analoges gilt dann natürlich auch für die jeweiligen ν-Kerne.

7.1 $\Omega^n(F)$ und $\nu_n(F)$ unter Funktionenkörpererweiterungen

Bevor wir nun zur Berechnung der Kerne kommen, betrachten wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 7.2 *Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F. Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt über dem Körper M die Relation*

$$\mathrm{d}T_i = q_{i1}\,\mathrm{d}a_{i1} + \ldots + q_{ik_i}\,\mathrm{d}a_{ik_i},$$

mit passenden $q_{ij} \in F[X_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i]$. Weiter liefert für ein festes $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ die Variablensubstitution

$$X_{ij} \mapsto 1 \text{ und } X_{im} \mapsto 0 \text{ für } m \in \{1, \ldots, n_i\} \setminus \{j\}$$

dann $q_{ij} \mapsto 1$ und $q_{ih} \mapsto 0$ für $h \in \{1, \ldots, k_i\} \setminus \{j\}$. Insbesondere existiert also für jedes $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ eine passende Variablensubstitution, für die dann $\mathrm{d}T_i \mapsto \mathrm{d}a_{ij}$ gilt.

Beweis: Zunächst fixieren wir ein $i \in \{1, \ldots, r\}$. Wegen $T_i = X_{i1}^p a_{i1} + \ldots + X_{in_i}^p a_{in_i}$ erhalten wir sofort

$$\mathrm{d}T_i = X_{i1}^p\,\mathrm{d}a_{i1} + \ldots + X_{in_i}^p\,\mathrm{d}a_{in_i}. \tag{7.1.1}$$

Da aber $a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}$ eine p-Basis des Körper $F^p(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})$ ist, ist auch $\mathrm{d}a_{i1}, \ldots, \mathrm{d}a_{ik_i}$ eine F-Basis des Vektorraums $\mathrm{sp}_F(\mathrm{d}a_{i1}, \ldots, \mathrm{d}a_{in_i})$. Für $t = k_i + 1, \ldots, n_i$ finden wir also stets eine eindeutige Darstellung

$$\mathrm{d}a_{it} = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{itj}\,\mathrm{d}a_{ij}$$

mit passenden $\lambda_{itj} \in F$. Setzen wir dies in Gleichung (7.1.1) ein, so erhalten wir durch eine einfache Rechnung

$$\mathrm{d}T_i = \sum_{j=1}^{k_i} X_{ij}^p\,\mathrm{d}a_{ij} + \sum_{t=k_i+1}^{n_i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{itj}\,\mathrm{d}a_{ij} \right) X_{it}^p = \sum_{j=1}^{k_i} \left(X_{ij}^p + \sum_{t=k_i+1}^{n_i} \lambda_{itj} X_{it}^p \right) \mathrm{d}a_{ij}.$$

Wir setzen also $q_{ij} = X_{ij}^p + \sum_{t=k_i+1}^{n_i} \lambda_{itj} X_{it}^p$ und an dieser Darstellung ist klar, dass für festes $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ die Substitution $X_{ij} \mapsto 1$ und $X_{im} \mapsto 0$ für $m \in \{1, \ldots, n_i\} \setminus \{j\}$ dann $q_{ij} \mapsto 1$ und $q_{ih} \mapsto 0$ für $h \in \{1, \ldots, k_i\} \setminus \{j\}$ liefert. □

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, ist die Berechnung der Ω-Kerne modularer rein inseparabler Erweiterungen deutlich simpler als die beliebiger rein inseparabler Erweiterungen. Übertragen wir dies auf unsere aktuelle Körpererweiterung, so stellt sich die Frage unter welchen Voraussetzungen die $T_1, \ldots, T_r$ über M p-unabhängig sind. Antwort darauf liefert das folgende Lemma.

Lemma 7.3 *Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $[M^p(T_1, \dots, T_r) : M^p] = p^r$;

(b) $\mathrm{d}\{a_{11}, \dots, a_{1k_1}\} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\{a_{r1}, \dots, a_{rk_r}\} \neq \{0\}$;

(c) $\mathrm{d}N_F(\varphi_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}N_F(\varphi_r) \neq \{0\}$.

Beweis: Es seien zunächst $T_1, \dots, T_r$ p-abhängig über M. Mit den Notationen aus Lemma 7.2 ist dies nach Lemma 3.10 dann äquivalent zu

$$0 = \mathrm{d}T_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}T_r = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_r=1}^{k_r} q_{1j_1} \dots q_{rj_r} \, \mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r}. \tag{7.1.2}$$

Für ein festes $(j_1, \dots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^r \{1, \dots, k_i\}$ erhalten wir dann aus Lemma 7.2 eine passende Substitution, die $q_{1j_1}, \dots, q_{rj_r} \mapsto 1$ liefert und alle weiteren q_{ij} auf Null setzt. Unter dieser Substitution liefert Gleichung (7.1.2) dann also $\mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r} = 0$ für jedes $(j_1, \dots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^r \{1, \dots, k_i\}$, woraus wir sofort die Behauptung (b) erhalten. Ist nun $\mathrm{d}a_{1j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_{rj_r} = 0$ für alle $(j_1, \dots, j_r) \in \bigtimes_{i=1}^r \{1, \dots, k_i\}$, so folgt mit Gleichung (7.1.2) sofort $\mathrm{d}T_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}T_r = 0$, was äquivalent zur p-Abhängigkeit der $T_1, \dots, T_r$ über M ist. Damit sind die Aussagen (a) und (b) äquivalent.

Die Äquivalenz von (b) und (c) erhalten wir sofort aus der Tatsache, dass gilt

$$\mathrm{sp}_F(\mathrm{d}\{a_{11}, \dots, a_{1k_1}\} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\{a_{r1}, \dots, a_{rk_r}\}) = \mathrm{sp}_F(\mathrm{d}N_F(\varphi_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}N_F(\varphi_r)).$$

Siehe dazu den Beweis von Korollar 5.5. □

Bevor wir nun mit der Berechnung des Kerns $\Omega^n(F(\varphi_1, \dots, \varphi_r)/F)$ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beginnen, wollen wir noch das folgende simple, aber nützliche Lemma formulieren. Der Beweis ergibt sich dabei direkt aus den jeweiligen Definitionen der Kerne.

Lemma 7.4 *Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-}\deg_M(\{T_1, \dots, T_r\})$ und $M^p(T_1, \dots, T_r) = M^p(T_1, \dots, T_s)$) und $\omega \in \Omega^n(F)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\omega \in \Omega^n(F(\varphi_1, \dots, \varphi_r)/F)$;

(b) $\omega_M \in \Omega^n(M(\sqrt[p]{T_1}, \dots, \sqrt[p]{T_r})/M)$;

(c) $\omega_L \in \Omega^n(L(\sqrt[p]{T_1}, \dots, \sqrt[p]{T_s})/L)$.

Mit diesen Hilfsaussagen können wir nun das Haupttheorem dieses Kapitels beweisen.

Theorem 7.5 *Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-}\deg_M(\{T_1, \dots, T_r\})$ und $M^p(T_1, \dots, T_r) = M^p(T_1, \dots, T_s)$). Dann ist*

$$\mathrm{d}\{a_{11}, \dots, a_{1k_1}\} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\{a_{s1}, \dots, a_{sk_s}\} \neq \{0\}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\Omega^n(F(\varphi_1, \dots, \varphi_r)/F) &= \Omega^n(F(\varphi_1, \dots, \varphi_s)/F) \\ &= \mathrm{Ann}\, \Omega_F^n(\mathrm{d}\{a_{11}, \dots, a_{1k_1}\} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\{a_{s1}, \dots, a_{sk_s}\}) \\ &= \mathrm{Ann}\, \Omega_F^n(\mathrm{d}N_F(\varphi_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}N_F(\varphi_s))\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\nu^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_r)/F) &= \nu_n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)\\ &= \operatorname{Ann}\nu_F^n(\mathrm{d}\{a_{11},\dots,a_{1k_1}\}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\{a_{s1},\dots,a_{sk_s}\})\\ &= \operatorname{Ann}\nu_F^n(\mathrm{d}N_F(\varphi_1)\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}N_F(\varphi_s)).\end{aligned}$$

Insbesondere sind also $\Omega^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_r)/F)$ und $\nu^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_r)/F)$ nur von den Normkörpern der Formen $\varphi_1,\dots,\varphi_s$, nicht aber von den Formen selbst abhängig.

Beweis: Die Aussage $\mathrm{d}\{a_{11},\dots,a_{1k_1}\}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\{a_{s1},\dots,a_{sk_s}\}\neq\{0\}$ folgt sofort mit Lemma 7.3 und der p-Unabhängigkeit der $T_1,\dots,T_s$ über M nach Wahl der φ_i. Des Weiteren sind die Aussagen bezüglich der ν-Kerne und ν-Annullatoren direkte Folgerungen aus den passenden Aussagen der Ω-Kerne und der Ω-Annullatoren. Es reicht also die erste Gleichungskette zu beweisen. Dabei folgt die erste Gleichheit dieser Kette sofort aus der Tatsache, dass die Erweiterung $F(\varphi_1,\dots,\varphi_r)/F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ rein transzendent ist und die letzte Gleichheit ist klar nach Korollar 5.5. Es bleibt also lediglich die Gleichheit

$$\Omega^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)=\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}\{a_{11},\dots,a_{1k_1}\}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\{a_{s1},\dots,a_{sk_s}\})$$

zu zeigen. Dazu sei $\omega\in\Omega^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)$. Dann ist nach Lemma 7.4 also

$$\omega_L\in\Omega^n(L(\sqrt[p]{T_1},\dots,\sqrt[p]{T_s})/L)\overset{6.2}{=}\operatorname{Ann}\Omega_L^n(\mathrm{d}T_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}T_s),$$

da nach Voraussetzung die Elemente $T_1,\dots,T_s$ p-unabhängig sind. Mit Lemma 7.2 angewandt auf die Formen $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ finden wir dann für $i=1,\dots,s$ passende Polynome $q_{ij}\in F[X_{ij}\mid j=1,\dots,n_i]$, welche nach einer ähnlichen Rechnung wie im Beweis von Lemma 7.3 dann

$$0=\omega_L\wedge\mathrm{d}T_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}T_s=\sum_{j_1=1}^{k_1}\ldots\sum_{j_s=1}^{k_s}q_{ij_1}\ldots q_{ij_s}\omega_L\wedge\mathrm{d}a_{1j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}a_{sj_s}\tag{7.1.3}$$

liefern. Durch eine analoge Substitution wie im Beweis von Lemma 7.3 erhalten wir dann

$$0=\omega\wedge\mathrm{d}a_{1j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}a_{sj_s}\quad\text{für alle }(j_1,\dots,j_s)\in\bigtimes_{i=1}^{s}\{1,\dots,k_i\},$$

woraus $\omega\in\operatorname{Ann}\Omega_F^n(\mathrm{d}\{a_{11},\dots,a_{1k_1}\}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\{a_{s1},\dots,a_{sk_s}\})$ folgt.

Da nach Lemma 7.4 zusammen mit Proposition 6.2 genau dann $\omega\in\Omega^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)$ gilt, wenn $\omega_L\wedge\mathrm{d}T_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}T_s=0$ ist, erhalten wir die zweite Inklusion aus Gleichung (7.1.3) und der Voraussetzung $\omega\wedge\mathrm{d}a_{1j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}a_{sj_s}=0$ für alle $(j_1,\dots,j_s)\in\bigtimes_{i=1}^{s}\{1,\dots,k_i\}$. □

Insbesondere können also die Formen φ_i bei der Berechnung des Kerns $\Omega^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_r)/F)$ stets durch die p-Pfisterformen $\pi_i=\langle\!\langle a_{i1},\dots,a_{ik_i}\rangle\!\rangle_p$ ersetzt werden. Eine solche Form π_i heißt auch Normform von φ_i.

Nachdem wir nun den Ω-Kern und den ν-Kern einer mehrfachen Funktionenkörpererweiterung mit einem Annullator identifizieren konnten, können wir nun natürlich alle in Kapitel 5 gewonnen Resultate auch auf diese Problemstellung anwenden. Wir weisen noch einmal darauf hin, dass es für die Anwendung dieser Resultate keine Rolle spielt, ob wir für die Bestimmung der Annullatoren die Wedge-Produkte der $\mathrm{d}N_F(\varphi_i)$, der $\mathrm{d}(N_F(\varphi_i)^*)$ oder der $\mathrm{d}(N_F(\varphi_i)\setminus F^p)$ verwenden. Lediglich bei einer Übertragung auf $k_n(F)$ und später auf $W(F)$ muss darauf geachtet werden, den Fall $0\in N_F(\varphi_i)$ auszuschließen, da wir die zu annullierende Menge mittels des Bloch-Kato-Gabber Theorems und des Isomorphismus von Kato mit übertragen wollen. Als direktes Korollar erhalten wir dann also aus den Propositionen 5.7, 5.9, 5.14 und dem Theorem 5.18 die folgenden Aussagen.

Theorem 7.6 *Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-}\deg_M(\{T_1, \ldots, T_r\})$ und $M^p(T_1, \ldots, T_r) = M^p(T_1, \ldots, T_s)$).*

(a) Ist $p\text{-}\deg_F(\{a_{ij} \mid i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, k_i\}) = k_1 + \ldots + k_s$, so ist

$$\Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}a_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{ik_i} \wedge \Omega^{n-k_i}(F).$$

(b) Es sei $\mathrm{ndeg}_F(\varphi_1) = \ldots = \mathrm{ndeg}_F(\varphi_{s-1}) = 1$. Setze $a_{11} = a_1, \ldots, a_{s-1,1} = a_{s-1}$. Dann sind $a_1, \ldots, a_{s-1}$ p-unabhängig und ist $p\text{-}\deg_F(\{a_1, \ldots, a_{s-1}\} \cup \{a_{s1}, \ldots, a_{sk_s}\}) = s - 1 + \ell$ mit $F^p(a_1, \ldots, a_{s-1})(a_{s1}, \ldots, a_{sk_s}) = F^p(a_1, \ldots, a_{s-1})(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$, so ist $\ell \geq 1$ und es gilt

$$\Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) = \sum_{i=1}^{s-1} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F).$$

Gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so ist

$$\begin{aligned}\nu_n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) = &\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Big|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_{s-1})^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F) \\ + &\left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\Big|\; y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(a_1, \ldots a_{s-1}, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^p(a_1, \ldots, a_{s-1})\right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).\end{aligned}$$

(c) Ist $\varphi_1 = \ldots = \varphi_r = \varphi$ mit $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = p^k$ und $N_F(\varphi) = F^p(a_1, \ldots, a_k)$ für $a_1, \ldots, a_k \in F$, dann ist mit $t := k - r + 1$

$$\Omega^n(F(\underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{r\ mal})/F) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^{n-1}(F) & , r \geq k \\ \sum\limits_{\substack{\{i_1, \ldots, i_t\} \subset \{1, \ldots, k\} \\ i_1 < \ldots < i_t}} \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F) & , r < k \end{cases}.$$

Gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so ist

$$\nu_n(F(\underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{r\ mal})/F) = \begin{cases} \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \mid x \in N_F(\varphi)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F) & , r \geq k \\ \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_t}{y_t} \mid y_1, \ldots, y_t \in N_F(\varphi)^*\right] \wedge \nu_{n-t}(F) & , r < k \end{cases}.$$

Neben den in Theorem 7.6 angegeben Fällen können wir die oben diskutierten Kerne natürlich auch in jedem Fall angeben, in dem der zugehörige Annullator zu berechnen ist. Wie in Beispiel 5.13 erhalten wir für p-unabhängige $a, b, c \in F$ dann also etwa

$$\begin{aligned}\Omega^n(F(\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle_p, \langle\!\langle a, c \rangle\!\rangle_p)/F) &= \Omega^n(F(\langle\!\langle a, b, c \rangle\!\rangle_p, \langle\!\langle a, b, c \rangle\!\rangle_p)/F) \\ &= \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-2}(F) + \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c \wedge \Omega^{n-2}(F).\end{aligned}$$

Ebenso können wir natürlich das Korollar 5.12 auf die Problemstellung dieses Kapitels anwenden und erhalten damit die folgende Aussage.

Proposition 7.7 *Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-deg}_M(\{T_1, \ldots, T_r\})$ und $M^p(T_1, \ldots, T_r) = M^p(T_1, \ldots, T_s)$). Weiter sei $\pi \in \mathfrak{S}_s$ und für $i = 1, \ldots, s$ gelte*

$$\left[F^p\left(N_F(\varphi_{\pi(1)}), \ldots, N_F(\varphi_{\pi(i-1)})\right)(N_F(\varphi_{\pi(i)})) : F^p\left(N_F(\varphi_{\pi(1)}), \ldots, N_F(\varphi_{\pi(i-1)})\right)\right] = p^{\ell_i(\pi)}$$

mit

$$F^p\Big(N_F(\varphi_{\pi(1)}), \ldots, N_F(\varphi_{\pi(i-1)})\Big)(N_F(\varphi_{\pi(i)})) = F^p\Big(N_F(\varphi_{\pi(1)}), \ldots, N_F(\varphi_{\pi(i-1)})\Big)(b^\pi_{i1}, \ldots, b^\pi_{i\ell_i(\pi)})$$

für passende $b^\pi_{i1}, \ldots, b^\pi_{i\ell_i(\pi)} \in F$. Dann ist

$$\Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) \subset \bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_s} \left(\sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}b^\pi_{i1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b^\pi_{i\ell_i(\pi)} \wedge \Omega^{n-\ell_i(\pi)}(F) \right).$$

Wir wollen die bisherigen Resultate noch auf einen weiteren Typ von Körpererweiterung anwenden. Dazu erinnern wir daran, dass für eine p-Form φ über F mit $\operatorname{ndeg}_F(\varphi) = p$ und $N_F(\varphi) = F^p(a)$ für ein passendes $a \in F$ die Erweiterung $F(\varphi)/F(\sqrt[p]{a})$ nach Proposition 2.12 rein transzendent ist und damit $\Omega^n(F(\varphi)/F) = \Omega^n(F(\sqrt[p]{a})/F)$ folgt. Mit den Notationen aus Theorem 7.6(b) ist etwa $N_F(\varphi_i) = F^p(a_i)$ für $i = 1, \ldots, s-1$ und natürlich gilt dabei auch $\operatorname{ndeg}_{F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})}(\varphi_i) = p$ und $(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}))^p(a_i) = N_{F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})}(\varphi_i)$, da ansonsten die Elemente $T_1, \ldots, T_{s-1}$ über M nicht p-unabhängig wären. Zusammengefasst ist damit die Erweiterung

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)/F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_{s-1}})(\varphi_s)$$

rein transzendent. Mit dieser Argumentation erhalten wir dann als direktes Korollar aus Theorem 7.6 das folgende Resultat.

Korollar 7.8 *Es seien $a_1, \ldots, a_s \in F$ p-unabhängig und $\varphi = \langle 1, b_1, \ldots, b_t \rangle_p$ eine (nicht notwendigerweise anisotrope) p-Form über F mit $\operatorname{ndeg}_{F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_s})}(\varphi) > 1$. Ist $p\text{-deg}_F(\{a_1, \ldots, a_s\} \cup \{b_1, \ldots, b_t\}) = s + \ell \in \mathbb{N}$ mit $F^p(a_1, \ldots, a_s)(b_1, \ldots, b_t) = F^p(a_1, \ldots, a_s)(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$, dann ist $\ell \geq 1$ und es gilt*

$$\begin{aligned}\Omega^n(F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_s})(\varphi)/F) &= \operatorname{Ann} \Omega^n_F(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_s \wedge \mathrm{d}N_F(\varphi)) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}a_i \wedge \Omega^n(F) + \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_\ell \wedge \Omega^{n-\ell}(F)\end{aligned}$$

und

$$\nu_n(F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_s})(\varphi)/F) = \operatorname{Ann} \nu^n_F(\mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_s \wedge \mathrm{d}N_F(\varphi)).$$

Gilt zusätzlich noch $F = F^{p-1}$, so ist

$$\begin{aligned}\nu_n(F(\sqrt[p]{a_1}, \ldots, \sqrt[p]{a_s})(\varphi)/F) = &\left[\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\middle|\; x \in F^p(a_1, \ldots, a_s)^*\right] \wedge \nu_{n-1}(F) \\ &+ \left[\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}y_\ell}{y_\ell} \;\middle|\; y_1, \ldots, y_\ell \in F^p(a_1, \ldots, a_s, e_1, \ldots e_\ell) \setminus F^p(a_1, \ldots, a_s)\right] \wedge \nu_{n-\ell}(F).\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Einschränkung auf p-unabhängige Elemente $a_1, \ldots, a_s$ in Korollar 7.8 nicht zwangsläufig notwendig ist, da man die $a_1, \ldots, a_s$ im Falle von p-Abhängigkeit auf eine p-Basis von $F^p(a_1, \ldots, a_s)$ reduzieren kann, ohne die Körpererweiterung zu verändern.

Wie bereits erwähnt, wurde der H-Kern der in Korollar 7.8 beschriebenen Körpererweiterung für den Spezialfall $\varphi = \langle\!\langle b_1, \ldots, b_t \rangle\!\rangle_2$ mit 2-unabhängigen $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t \in F$ für Körper der Charakteristik zwei von Aravire, Laghribi und O'Ryan in [11] bestimmt. Dabei verhält sich der H-Kern dieser Erweiterung additiv, das heißt, er setzt sich als Summe der H-Kerne der Erweiterungen $F(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_s})/F$ und $F(\varphi)/F$ zusammen. Im Gegensatz dazu zeigt Beispiel 5.20, dass ein solches additives Verhalten der ν-Kerne (oder selbst der Ω-Kerne) in Korollar 7.8 selbst unter den verstärkten Bedingungen aus [11] im Allgemeinen nicht gegeben ist.

Bemerkung 7.9 (a) Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-deg}_M(\{T_1, \ldots, T_r\})$ und $M^p(T_1, \ldots, T_r) = M^p(T_1, \ldots, T_s)$). Nutzen wir die Notationen aus Proposition 7.7 sowie das Lemma 3.36, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) &\subset \bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_s} \left(\sum_{i=1}^{s} \mathrm{d}b_{i1}^{\pi} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}b_{i\ell_i(\pi)}^{\pi} \wedge \Omega^{n-\ell_i(\pi)}(F) \right) \\ &= \bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_s} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\bigcap_{j=1}^{\ell_i(\pi)} \mathrm{d}b_{ij}^{\pi} \wedge \Omega^{n-1}(F) \right) \right) \\ &= \bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_s} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\bigcap_{j=1}^{\ell_i(\pi)} \Omega^n \left(F \left(\sqrt[p]{b_{ij}^{\pi}} \right) /F \right) \right) \right).\end{aligned}$$

Wir sehen damit einen Zusammenhang zwischen dem Ω-Kern mehrfacher Funktionenkörpererweiterungen und bestimmten Ω-Kernen einfacher rein inseparabler Erweiterungen vom Grad p. Beispiel 5.13 zeigt allerdings, dass diese Inklusion im Allgemeinen echt sein kann. Setzen wir zusätzlich noch $p\text{-deg}_F(\{a_{ij} \mid i = 1, \ldots, s\ j = 1, \ldots, k_i\}) = k_1 + \ldots + k_s$ für die Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ voraus, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu der folgenden Gleichheit

$$\Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)/F) = \Omega^n(F(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)/F) = \sum_{i=1}^{s} \left(\bigcap_{j=1}^{k_i} \Omega^n(F(\sqrt[p]{a_{ij}})/F) \right).$$

(b) Betrachten wir die Situation aus Theorem 7.6(c), so ergibt sich für alle $t = 1, \ldots, k$ stets

$$\Omega^n(F(\varphi)/F) = \mathrm{d}a_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_k \wedge \Omega^{n-k}(F) = \bigcap_{\substack{\{i_1,\ldots,i_t\} \subset \{1,\ldots,k\} \\ i_1 < \ldots < i_t}} \mathrm{d}a_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_{i_t} \wedge \Omega^{n-t}(F).$$

Der Schnitt der in Theorem 7.6(c) beschrieben Summanden entspricht also für alle t stets dem Ω-Kern $\Omega^n(F(\varphi)/F)$.

7.2 $k_n(F)$ unter Funktionenkörpererweiterungen

Wie in Kapitel 6 wollen wir auch hier die Resultate des vorangegangenen Abschnitts auf die Gruppe $k_n(F)$ übertragen. Mit dem Bloch-Kato-Gabber Theorem 4.3 erhalten wir dann ohne weitere Beweise die folgenden Resultate.

Theorem 7.10 *Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-deg}_M(\{T_1, \ldots, T_r\})$ und $M^p(T_1, \ldots, T_r) = M^p(T_1, \ldots, T_s)$). Dann ist*

$$\overline{\{\{a_{11}, \ldots, a_{ak_1}\}, \ldots, \{a_{s1}, \ldots, a_{sk_s}\}\}} \neq \{0\}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} k_n(F(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)/F) &= k_n(F(\varphi_1,\ldots,\varphi_s)/F) \\ &= \operatorname{Ann} k_F^n\left(\overline{\{\{a_{11},\ldots,a_{1k_1}\},\ldots,\{a_{s1},\ldots,a_{sk_s}\}\}}\right) \\ &= \operatorname{Ann} k_F^n\left(\overline{\{N_F(\varphi_1)^*,\ldots,N_F(\varphi_s)^*\}}\right). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $k_n(F(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)/F)$ nur von den Normkörpern der Formen $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$, nicht aber von den Formen selbst abhängig.

Theorem 7.11 *Es seien $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ wie in Notation 7.1 beschriebene p-Formen über F (mit $s = p\text{-}\mathrm{deg}_M(\{T_1,\ldots,T_r\})$ und $M^p(T_1,\ldots,T_r) = M^p(T_1,\ldots,T_s)$) und es gelte $F^{p-1} = F$.*

(a) Es sei $\mathrm{ndeg}_F(\varphi_1) = \ldots = \mathrm{ndeg}_F(\varphi)_{s-1} = 1$. Setze $a_{11} = a_1,\ldots,a_{s-1,1} = a_{s-1}$. Dann sind $a_1,\ldots,a_{s-1}$ p-unabhängig und ist $p\text{-}\mathrm{deg}_F(\{a_1,\ldots,a_{s-1}\}\cup\{a_{s1},\ldots,a_{sk_s}\}) = s-1+\ell$ mit $F^p(a_1,\ldots,a_{s-1})(a_{s1},\ldots,a_{sk_s}) = F^p(a_1,\ldots,a_{s-1})(e_1,\ldots,e_\ell)$ für passende $e_1,\ldots,e_\ell \in F$, so ist $\ell \geq 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} k_n(F(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)/F) &= \left[\overline{\{x\}} \mid x \in F^p(a_1,\ldots,a_{s-1})^*\right] \cdot k_{n-1}(F) \\ &+ \left[\overline{\{y_1,\ldots,y_\ell\}} \mid y_1,\ldots,y_\ell \in F^p(a_1,\ldots a_{s-1},e_1,\ldots,e_\ell) \setminus F^p(a_1,\ldots,a_{s-1})\right] \cdot k_{n-\ell}(F). \end{aligned}$$

(b) Ist $\varphi_1 = \ldots = \varphi_r = \varphi$ mit $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = p^k$ und $N_F(\varphi) = F^p(a_1,\ldots,a_k)$ für $a_1,\ldots,a_k \in F$ sowie $F^{p-1} = F$, dann ist mit $t := k-r+1$

$$k^n(F(\underbrace{\varphi,\ldots,\varphi}_{r\ mal})/F) = \begin{cases} \left[\overline{\{x\}} \mid x \in N_F(\varphi)^*\right] \cdot k_{n-1}(F) & ,r \geq k \\ \left[\overline{\{y_1,\ldots,y_t\}} \mid y_1,\ldots,y_t \in N_F(\varphi)^*\right] \cdot k_{n-t}(F) & ,r < k \end{cases}.$$

Wir überlassen es dem Leser, die noch ausstehenden Resultate des Abschnitts 7.1 ebenfalls für Milnor-K-Gruppen $k_n(F)$ auszuformulieren.

Kapitel 8

Übertragung der Ergebnisse auf $W(F)$ und $W_q(F)$

In diesem letzten Kapitel wird es nun unser Ziel sein, die in den Kapiteln 5, 6 und 7 bewiesenen Resultate mit Hilfe von Katos Isomorphismen 3.19 auf den Wittring der bilinearen Formen bzw. auf die Wittgruppe der quadratischen Formen zu übertragen. Da der Wittring und die Wittgruppe nur für Körper der Charakteristik zwei in Verbindung zu dem Raum der Differentialformen stehen, sei von nun an für den Rest der Arbeit F wieder stets ein Körper der Charakteristik zwei. Man beachte dabei, dass die an vielen Stellen eingehende Voraussetzung $F = F^{p-1}$ nun redundant ist.

8.1 Übertragungslemmata

Im folgenden Lemma wollen wir zunächst eine einfache aber wichtig Tatsache festhalten.

Lemma 8.1 *Es seien $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ und $b \in F$. Dann sind die in (a) und (b) jeweils formulierten Aussagen äquivalent.*

(a) *(i) Die bilineare Pfisterform $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b$ ist metabolisch.*

(ii) Die logarithmische Differentialform $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \in \nu_n(F)$ ist Null.

(b) *(i) Die quadratische Pfisterform $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]]$ ist hyperbolisch.*

(ii) Die Form $\overline{b\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}} \in H_2^{n+1}(F)$ ist Null.

Beweis: Die Äquivalenz der Aussagen in (a) ergibt sich sofort mit Lemma 3.10 und der 2-Abhängigkeit der $a_1, \ldots, a_n$. Weiter ist in (b) die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ mit Theorem 3.19 offensichtlich erfüllt. Für die Rückrichtung in (b) sei $\overline{b\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}} = \overline{0}$ in $H_2^{n+1}(F)$. Nach Katos Isomorphismus 3.19 ist dann also $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]] \in I^{n+1}W_q(F)$ und mit dem Arason-Pfister Hauptsatz 1.11 folgt dann sofort $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]] = 0$. □

Um die Übertragung der Resultate besser formulieren zu können, wollen wir noch die folgenden Notationen einführen.

Definition 8.2 Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\mathrm{Pf}_b^n(F)$ als die Menge (der Wittklassen) der n-fachen bilinearen Pfisterformen über F. Zusätzlich setzen wir $\mathrm{Pf}_b^n(F) = \{0\}$ für $n < 0$.

Um die Resultate aus Kapitel 5 auf den bilinearen Wittring zu übertragen, wollen wir den Begriff des Annullators ebenfalls für den bilinearen Wittring formulieren. Dabei beschränken wir uns auf die bilinearen Formen, da die aus den Theoremen 5.23 und 5.25 folgenden quadratischen Annullatoren bereits von Aravire und Baeza in [7] bestimmt wurden.

Definition 8.3 Für eine nicht leere Teilmenge $U \subset W(F)$ definieren wir den bilinearen Annullator von U als

$$\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(U) := \{\mathfrak{b} \in W(F) \mid \mathfrak{b} \otimes u = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subset W(F).$$

Weiter definieren wir für nicht leere Mengen $S_1, \dots S_r \subset F^*$ die folgende Mengenschreibweise

$$\langle\!\langle\, S_1 \,\rangle\!\rangle \otimes \dots \otimes \langle\!\langle\, S_r \,\rangle\!\rangle := \langle\!\langle\, S_1, \dots, S_r \,\rangle\!\rangle := \{\langle\!\langle\, s_1, \dots, s_r \,\rangle\!\rangle_b \in W(F) \mid s_1 \in S_1, \dots, s_r \in S_r\}.$$

Dabei ist leicht nachzurechnen, dass für jedes $\varnothing \neq U \subset W(F)$ der bilineare Annullator $\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(U)$ stets ein Ideal in $W(F)$ ist. Mit diesen Definitionen formulieren wir nun die nötigen Hilfslemmata zur Übertragung der bekannten Ergebnisse.

Lemma 8.4 *(a) Es sei* $U = \{\frac{\mathrm{d}e_1}{e_1} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}e_r}{e_r} \mid (e_1, \dots, e_r) \in T\} \subset \nu_r(F)$ *für eine nicht leere Teilmenge* $T \subset (F^*)^r$*. Existieren* $s \in \mathbb{N}$ *und* $M_t \subset (F^*)^t$ *für* $t = 1, \dots, s$ *so, dass für alle* $m \in \mathbb{N}_0$ *der Annullator* $\operatorname{Ann}\nu_F^m(U)$ *erzeugt ist durch die Formen*

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} \wedge \chi_t\ , \ \textit{mit } (a_1, \dots, a_t) \in M_t \textit{ und } \chi_t \in \nu_{m-t}(F) \textit{ für } t = 1, \dots, s,$$

so ist der bilineare Annullator $\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\{\langle\!\langle\, e_1, \dots, e_r \,\rangle\!\rangle_b \mid (e_1, \dots, e_r) \in T\})$ *als Ideal erzeugt durch die Formen* $\langle\!\langle\, a_1, \dots, a_t \,\rangle\!\rangle_b$ *mit* $(a_1, \dots, a_t) \in M_t$ *für* $t = 1, \dots, s$.

(b) Es sei K/F *eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Weiter seien* $s \in \mathbb{N}$ *und* $M_t \subset (F^*)^t$ *für* $t = 1, \dots, s$ *so, dass für alle* $m \in \mathbb{N}_0$ *die Gruppe* $\nu_m(K/F)$ *erzeugt ist durch die Formen*

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} \wedge \chi_t\ , \ \textit{mit } (a_1, \dots, a_t) \in M_t \textit{ und } \chi_t \in \nu_{m-t}(F) \textit{ für } t = 1, \dots, s.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist dann*

- *(i)* $\overline{I^n}(K/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen* $\overline{\pi \otimes \langle\!\langle\, a_1, \dots, a_t \,\rangle\!\rangle_b}$ *mit* $(a_1, \dots, a_t) \in M_t$ *für* $t = 1, \dots, s$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$.
- *(ii)* $I^n(K/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen* $\pi \otimes \langle\!\langle\, a_1, \dots, a_t \,\rangle\!\rangle_b$ *und die Formen ähnlich zu* $\langle\!\langle\, a_1, \dots, a_k \,\rangle\!\rangle_b$ *mit* $(a_1, \dots, a_t) \in M_t$ *für* $t = 1, \dots, n-1$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$ *sowie* $(a_1, \dots, a_k) \in M_k$ *für* $k = n, \dots, s$.
- *(iii) der bilineare Wittkern* $W(K/F)$ *als Ideal erzeugt durch die Formen* $\langle\!\langle\, a_1, \dots, a_t \,\rangle\!\rangle_b$ *mit* $(a_1, \dots, a_t) \in M_t$ *für* $t = 1, \dots, s$.

(c) Existieren Mengen $S_1, \dots, S_r \subset F^*$ *und eine endlich erzeugte Körpererweiterung* K/F *so, dass gilt*

$$\operatorname{Ann}\nu_F^n(\mathrm{d}S_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}S_r) = \nu_n(K/F),$$

dann folgt auch

$$\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\!\langle\, S_1, \dots, S_r \,\rangle\!\rangle_b) = W(K/F).$$

Beweis: Da die Beweise der Aussagen (a) und (b) analog verlaufen, werden wir uns hier auf den Beweis der etwas komplizierteren Aussage (b) beschränken und es dem Leser überlassen einen analogen Beweis für die Behauptung in (a) zu formulieren.

Zunächst folgt die Behauptung in (i) sofort aus der Voraussetzung zusammen mit Katos Isomorphismus 3.19, sowie der Tatsache, dass $I^n(F)$ additiv von den n-fachen bilinearen Pfisterformen erzeugt ist. Beginnen wir nun damit, die Behauptung in (ii) zu beweisen.

Dazu wählen wir $n \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 8.1(a) und der Voraussetzung ist sofort klar, dass die Formen $\langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_t \,\rangle\!\rangle_b$ für $t = 1, \ldots, s$ und $(a_1, \ldots, a_t) \in M_t$ über dem Körper K metabolisch sind. Es sei also nun $\mathfrak{b} \in I^n(K/F)$. Da K eine endlich erzeugte Körpererweiterung ist, können wir analog zu den Beschreibungen in Bemerkung 3.37 voraussetzen, dass F eine endliche 2-Basis $\mathcal{B}$ mit $|\,\mathcal{B}\,| = N < \infty$ besitzt. Dann ist offensichtlich $\Omega^\ell(F) = \{0\}$ für alle $\ell > N$ und damit ist dann auch $\nu_\ell(F) \cong I^\ell(F)/I^{\ell+1}(F) = \{0\}$ für $\ell > N$. Nach dem Arason-Pfister Hauptsatz 1.11 folgt also ebenfalls $I^\ell(F) = \{0\}$ für $\ell > N$. Ist dabei $n > N$, so ist $\mathfrak{b} = 0$ und es ist nichts zu zeigen. Wir können also ohne Einschränkung $n \leq N$ voraussetzen. Wegen $\mathfrak{b} \in I^n(K/F)$ gilt natürlich auch $\overline{\mathfrak{b}} \in \overline{I^n}(K/F)$ und nach Teil (i) finden wir dann passende Formen $\pi_{n,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \in I^{n-t}(F)$ (fast alle dieser Formen sind Null) mit denen dann

$$\mathfrak{b}_{n+1} := \mathfrak{b} + \sum_{t=1}^{s} \sum_{(a_1,\ldots,a_t)\in M_t} \pi_{n,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \otimes \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_t \,\rangle\!\rangle_b \in I^{n+1}(F)$$

gilt. Da sowohl $\mathfrak{b}$ als auch die Formen $\langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_t \,\rangle\!\rangle_b$ für $(a_1, \ldots, a_t) \in M_t$ mit $t \in \{1, \ldots, s\}$ über K metabolisch sind, ist also auch $\mathfrak{b}_{n+1} \in I^{n+1}(K/F)$ und wir können das beschriebene Vorgehen wie folgt wiederholen. Ist die Form $\mathfrak{b}_i \in I^i(K/F)$ für ein $i \geq n$ gegeben, so gilt $\overline{\mathfrak{b}_i} \in \overline{I^i}(K/F)$. Nach (i) finden wir dann passende Formen $\pi_{i,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \in I^{i-t}(F)$ (fast alle dieser Formen sind Null) so, dass wir eine weitere Form

$$\mathfrak{b}_{i+1} := \mathfrak{b}_i + \sum_{t=1}^{s} \sum_{(a_1,\ldots,a_t)\in M_t} \pi_{i,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \otimes \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_t \,\rangle\!\rangle_b \in I^{i+1}(F)$$

erhalten. Da sowohl $\mathfrak{b}_i$, als auch die Formen $\langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_t \,\rangle\!\rangle_b$ für $(a_1, \ldots, a_t) \in M_t$ mit $t \in \{1, \ldots, s\}$ über K metabolisch sind, folgt also $\mathfrak{b}_{i+1} \in I^{i+1}(K/F)$. Aufgrund der endlichen 2-Basis ist dann nach endlich vielen Schritten $0 = \mathfrak{b}_{N+1} \in I^{N+1}(F)$ woraus wir durch rekursives Einsetzen und ein Umsortieren der Summanden dann den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} = &\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{(a_1,\ldots,a_t)\in M_t} \left(\sum_{i=n}^{N} \pi_{i,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \right) \otimes \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_t \,\rangle\!\rangle_b \\ &+ \sum_{k=n}^{s} \sum_{(a_1,\ldots,a_k)\in M_k} \left(\sum_{i=n}^{N} \pi_{i,k}^{(a_1,\ldots,a_k)} \right) \otimes \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_k \,\rangle\!\rangle_b\end{aligned}$$

erhalten. In der ersten Summe gilt nun stets $i > t$ für alle passenden Indizes. Weiter ist $\pi_{i,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \in I^{i-t}(F)$ und wegen $I^{n-t}(F) \supseteq I^{n+1-t}(F) \ldots \supseteq I^{N-t}$ gilt für jedes $t = 1, \ldots, n-1$ dann $\sum_{i=n}^{N} \pi_{i,t}^{(a_1,\ldots,a_t)} \in I^{n-t}(F)$. Die ersten Typen von Erzeugern erhalten wir dann, da $I^{n-t}(F)$ für $t = 1, \ldots, n-1$ nach Lemma 1.10 additiv von Formen in $\mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$ erzeugt ist. Für die zweite Summe ist nun stets eine der Formen $\pi_{i,k}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ in $I^0(F) = W(F)$ für $k = n, \ldots, s$ und $i = n, \ldots, N$. Dann ist auch $\sum_{i=n}^{N} \pi_{i,k}^{(a_1,\ldots,a_k)} \in W(F)$ und wir erhalten den zweiten Typ von Erzeugern aus der Tatsache, dass für beliebige bilineare Formen $\langle\, b_1, \ldots, b_r \,\rangle_b$, $\mathfrak{b} \in W(F)$ stets $\langle\, b_1, \ldots, b_r \,\rangle_b \otimes \mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{r} b_i\, \mathfrak{b}$ gilt.

Eine analoge Rechnung kombiniert mit der Tatsache, dass $I^0(K/F) = W(K/F) = I(K/F)$ gilt, beweist dann auch (iii) und damit ist (b) gezeigt.

Teil (c) folgt dann sofort aus einer kombinierten Anwendung von (a) und (b) zusammen mit der Tatsache, dass jede Gruppe ein Erzeugendensystem besitzt. □

Das Lemma 8.4 können wir natürlich ebenso für die Gruppe $H_2^{n+1}(F)$ und die quadratische Wittgruppe $W_q(F)$ formulieren und erhalten so das folgende Resultat.

Lemma 8.5 *Es sei K/F eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Weiter seien $s \in \mathbb{N}$ und $N_t \subset (F^*)^t \times F$ für $t = 0, \ldots, s$ so, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Gruppe $H_2^{m+1}(K/F)$ erzeugt ist durch die Formen*

$$\overline{b\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} \wedge \chi_t}\ , \quad \textit{mit } ((a_1, \ldots, a_t), b) \in N_t \textit{ und } \chi_t \in \nu_{m-t}(F) \textit{ für } t = 0, \ldots, s.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann

(i) $\overline{I^n W_q}(K/F)$ additiv erzeugt durch die Formen $\overline{\pi \otimes \langle\langle a_1, \ldots, a_t, b]]}$ mit $((a_1, \ldots, a_t), b) \in N_t$ für $t = 0, \ldots, s$ und $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$.

(ii) $I^n W_q(K/F)$ additiv erzeugt durch die Formen $\pi \otimes \langle\langle a_1, \ldots, a_t, b]]$ und die Formen ähnlich zu $\langle\langle a_1, \ldots, a_k, b]]$ mit $((a_1, \ldots, a_t), b) \in N_t$ für $t = 0, \ldots, n-1$ und $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$ sowie $((a_1, \ldots, a_k), b) \in N_k$ für $k = n, \ldots, s$.

(iii) der quadratische Wittkern $W_q(K/F)$ als $W(F)$-Untermodul erzeugt durch die Formen $\langle\langle a_1, \ldots, a_t, b]]$ mit $((a_1, \ldots, a_t), b) \in N_t$ für $t = 0, \ldots, s$.

Da der Beweis dieser Aussage analog zu dem Beweis von Lemma 8.4 verläuft, überlassen wir es wieder dem Leser, diesen auszuformulieren.

Bemerkung 8.6 Es sei wieder K/F eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Wegen $I(K/F) = W(K/F)$ liefert Lemma 8.4(b)(ii) auch ein additives Erzeugendensystem des bilinearen Wittkerns der Erweiterung K/F. Auf eine ähnliche Weise erhalten wir aus Lemma 8.5 ebenfalls ein additives Erzeugendensystem des quadratischen Wittkerns $W_q(K/F)$.

8.2 Bilineare Annullatoren und Wittkerne

Beginnen wir nun damit, die in den vorangegangenen Kapiteln bewiesenen Aussagen auf den bilinearen Wittring zu übertragen und starten mit den Annullatoren aus Kapitel 5. Da sich alle hier aufgeführten Resultate durch eine Kombination der jeweiligen Ergebnisse der Kapitel 5,6 und 7 zusammen mit den Lemmata 8.4 und 8.5 zeigen lassen, wollen wir in den folgenden Abschnitten auf Beweise verzichten.

Proposition 8.7 *(a) Es seien $S_1, \ldots, S_{r+1} \subset F \setminus F^2$ nicht leere Mengen mit $2\text{-}\mathrm{deg}_F(S_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ und $\langle\langle S_1, \ldots, S_{r+1} \rangle\rangle \neq \{0\}$. Dann existieren 2-unabhängige $a_1, \ldots, a_r \in F$ mit $F^2(S_i) = F^2(a_i)$ für $i = 1, \ldots, r$. Weiter sei $2\text{-}\mathrm{deg}_F(\{a_1, \ldots, a_r\} \cup S_{r+1}) = r + \ell$ und es gelte $F^2(a_1, \ldots, a_r)(S_{r+1}) = F^2(a_1, \ldots, a_r)(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$. Dann gilt $\ell \geq 1$ und der bilineare Annullator $\mathrm{Ann}\,\mathfrak{b}_F(\langle\langle S_1, \ldots, S_{r+1} \rangle\rangle)$ ist als Ideal erzeugt durch die Formen*

- $\langle\langle x \rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(a_1, \ldots, a_r)^*$;
- $\langle\langle y_1, \ldots, y_\ell \rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_\ell \in F^2(a_1, \ldots, a_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^2(a_1, \ldots, a_r)$.

Zusätzlich ist $\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\langle S_1, \ldots, S_r \rangle\rangle)$ *als Ideal erzeugt durch die Formen* $\langle\langle x \rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(a_1, \ldots, a_r)^*$.

(b) Es sei $\varnothing \neq S \subset F \setminus F^2$ *mit* $2\text{-}\deg_F(S) = k \in \mathbb{N}$ *und* $F^2(S) = F^2(a_1, \ldots, a_k)$ *für passende* $a_1, \ldots, a_k \in F$. *Für* $r \in \{1, \ldots, k\}$ *setze* $t := k - r + 1$. *Dann ist der bilineare Annullator* $\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\langle S \rangle\rangle^{\otimes r})$ *als Ideal erzeugt durch die Formen*

- $\langle\langle y_1, \ldots, y_t \rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_t \in F^2(a_1, \ldots, a_k)^*$.

Ist $r > k$, *so ist* $\langle\langle S \rangle\rangle^{\otimes r} = \{0\}$ *und damit* $\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\langle S \rangle\rangle^{\otimes r}) = W(F)$.

Insbesondere ist also $\operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\langle S \rangle\rangle)$ *als Ideal erzeugt durch die Formen* $\langle\langle y_1, \ldots, y_k \rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_k \in F^2(a_1, \ldots, a_k)$.

Übertragen wir nun die Ergebnisse der ν-Kerne rein inseparabler Erweiterungen, so erhalten wir das folgende Resultat.

Theorem 8.8 *Es sei* $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ *eine rein inseparable Erweiterung von* F. *Wir setzen* $e_j = \exp(\beta_j/F)$ *und* $b_j = \beta_j^{2^{e_j}}$ *für* $j \in J$. *Ist* $\{b_j \mid j \in J\}$ *2-unabhängig über* F, *so ist für alle* $n \in \mathbb{N}$

(i) $\overline{I^n}(E/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen* $\overline{\pi \otimes \langle\langle x \rangle\rangle_b}$ *mit* $x \in F^2(b_j \mid j \in J)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$.

(ii) $I^n(E/F)$ *für* $n > 1$ *additiv erzeugt durch die Formen* $\pi \otimes \langle\langle x \rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_j \mid j \in J)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$.

Zusätzlich ist $I(E/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen ähnlich zu* $\langle\langle x \rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_j \mid j \in J)^*$.

(iii) der bilineare Wittkern $W(E/F)$ *als Ideal erzeugt durch die Formen* $\langle\langle x \rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_j \mid j \in J)^*$. *Ist dabei* $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ *endlich, so gilt insbesondere*

$$W(E/F) = \operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\langle b_{j_1}, \ldots, b_{j_r} \rangle\rangle_b).$$

Bemerkung 8.9 (a) Der in Theorem 8.8 beschriebene bilineare Wittkern wurde bereits von Hoffmann in [25] bestimmt. Dabei verwendete Hoffmann, im Gegensatz zu dieser Arbeit, ausschließlich die Theorie der bilinearen Formen. Das hier angegebene Erzeugendensystem stimmt dabei mit dem von Hoffmann angegebenen überein.

(b) Nutzt man die durch die Determinante gegebene Isomorphie der Gruppen $I(F)/I^2(F)$ und $F^*/(F^*)^2$, so erhalten wir aus Theorem 8.8 leicht, dass für die oben angegebene Erweiterung E/F dann $E^2 \cap F = F^2(b_j \mid j \in J)$ gilt.

Theorem 8.10 *Es seien* $b_1, \ldots, b_r \in F$ *2-unabhängig und* $b \in F^2(b_1, \ldots, b_r) \setminus F^2$. *Weiter seien* $m, m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ *mit* $m \leq m_1, \ldots, m_r$ *und* $E = F(\sqrt[2^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[2^{m_r}]{b_r}, \sqrt[2^m]{b})$.

(a) Existiert ein $t \geq m$ *mit* $b \in F^{2^t}(b_1, \ldots, b_r)$, *so ist* $E = F(\sqrt[2^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[2^{m_r}]{b_r})$ *und der bilineare Wittkern ist bekannt aus Theorem 8.8.*

(b) *Angenommen die Bedingung in (a) gilt nicht. Ist $t \in \mathbb{N}$ maximal mit $b \in F^{2^t}(b_1, \ldots, b_r)$ und $1 \leq t < m$, so schreibe mit $T = \{0, \ldots, 2^t - 1\}^r$ dann $b = \sum_{i \in T} x_i^{2^t} b_1^{i_1} \ldots b_r^{i_r}$ und setze $S = \{x_i \mid i \in T,\ x_i \neq 0\}$. Ist weiter $2\text{-}\deg_F(\{b_1, \ldots, b_r\} \cup S) = r + \ell$ und $F^2(b_1, \ldots, b_r)(S) = F^2(b_1, \ldots, b_r)(e_1, \ldots, e_\ell)$ für passende $e_1, \ldots, e_\ell \in F$, so gilt $\ell \geq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

   (i) *$\overline{I^n}(E/F)$ additiv erzeugt durch die Formen*
   - $\overline{\pi \otimes \langle\langle\, x \,\rangle\rangle_b}$ *mit* $x \in F^2(b_1, \ldots, b_r)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$*;*
   - $\overline{\psi \otimes \langle\langle\, y_1, \ldots, y_\ell \,\rangle\rangle_b}$ *mit* $y_1, \ldots, y_\ell \in F^2(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^2(b_1, \ldots, b_r)$ *und* $\psi \in \mathrm{Pf}_b^{n-\ell}(F)$.

   (ii) *$I^n(E/F)$ für $n > \ell$ additiv erzeugt durch die Formen*
   - $\pi \otimes \langle\langle\, x \,\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_1, \ldots, b_r)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$*;*
   - $\psi \otimes \langle\langle\, y_1, \ldots, y_\ell \,\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_\ell \in F^2(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^2(b_1, \ldots, b_r)$ *und* $\psi \in \mathrm{Pf}_b^{n-\ell}(F)$*;*

   für $1 < n \leq \ell$ ist $I^n(E/F)$ additiv erzeugt durch die Formen
   - $\pi \otimes \langle\langle\, x \,\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_1, \ldots, b_r)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$*;*
   - *ähnlich zu* $\langle\langle\, y_1, \ldots, y_\ell \,\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_\ell \in F^2(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^2(b_1, \ldots, b_r)$*;*

   und $I(E/F)$ ist additiv erzeugt durch die Formen
   - *ähnlich zu* $\langle\langle\, x \,\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_1, \ldots, b_r)^*$*;*
   - *ähnlich zu* $\langle\langle\, y_1, \ldots, y_\ell \,\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_\ell \in F^2(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^2(b_1, \ldots, b_r)$.

   (iii) *der bilineare Wittkern $W(E/F)$ als Ideal erzeugt durch die Formen*
   - $\langle\langle\, x \,\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(b_1, \ldots, b_r)^*$*;*
   - $\langle\langle\, y_1, \ldots, y_\ell \,\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_\ell \in F^2(b_1, \ldots, b_r, e_1, \ldots, e_\ell) \setminus F^2(b_1, \ldots, b_r)$.

   Insbesondere ist also

$$W(E/F) = \mathrm{Ann}\,\mathfrak{b}_F(\langle\langle\, b_1, \ldots, b_r, S \,\rangle\rangle).$$

Natürlich sind wir mit Theorem 8.10 nun auch in der Lage, den bilinearen Wittkern jeder zweifachen rein inseparablen Erweiterung vollständig zu beschreiben.

Abschließend wollen nun auch noch die in Kapitel 7 bestimmten ν-Kerne auf bilineare Formen übertragen. Dazu merken wir noch einmal an, dass die zu einer bilinearen Form $\mathfrak{b}$ gehörende polare Form $\varphi_{\mathfrak{b}}$ stets eine total singuläre quadratische Form ist, also in den Worten aus Kapitel 2 eine 2-Form. Wie wir in Kapitel 7 gesehen haben, spielte es für die ν-Kerne dabei keine Rolle, ob wir für 2-Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ den Körperturm $F(\varphi_1) \subset F(\varphi_1)(\varphi_2) \subset \ldots$ oder $F(\varphi_1) \subset F(\varphi_1)(((\varphi_2)_{F(\varphi_1)})_{an}) \subset \ldots$ für die Kernberechnung zugrunde gelegt haben. Dies ist für bilineare Formen im Allgemeinen allerdings nicht der Fall, da die Wittkerne der Erweiterungen $F((\varphi_{\mathfrak{b}})_{an})/F$ und $F(\mathfrak{b}_{an})/F$ nicht zwangsläufig übereinstimmen müssen. Dies zeigt schon das einfache Beispiel $\mathfrak{b} = \langle\, 1, a, a \,\rangle_b$ mit $a \in F \setminus F^2$. Für diese Form ist natürlich $\mathfrak{b}_{an} = \langle\, 1 \,\rangle_b$ und damit $W(F(\mathfrak{b}_{an})/F) = \{0\}$. Allerdings ist $(\varphi_{\mathfrak{b}})_{an} = \langle\, 1, a \,\rangle$ und damit also $F((\varphi_{\mathfrak{b}})_{an}) \cong F(X)(\sqrt{a})$, woraus wir sofort $\langle\langle\, a \,\rangle\rangle_b \in W(F((\varphi_{\mathfrak{b}})_{an})/F)$ erhalten. Dennoch stimmen natürlich für bilineare Formen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ die Wittkerne der Körpererweiterungen $F(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r)/F$ und $F(\varphi_{\mathfrak{b}_1}, \ldots \varphi_{\mathfrak{b}_r})/F$ überein. Eine Übertragung der Ergebnisse aus Kapitel 7 liefert nun das folgende Resultat.

Theorem 8.11 *Es seien $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ anisotrope bilineare Formen über F mit zugehörigen polaren Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Ohne Einschränkung seien dabei die Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wie in Notation*

7.1 beschrieben und damit insbesondere so sortiert, dass $[M^2(\sqrt{T_1},\dots,\sqrt{T_r}) : M^2] = 2^s$ *und zusätzlich* $M^2(\sqrt{T_1},\dots,\sqrt{T_r}) = M^2(\sqrt{T_1},\dots,\sqrt{T_s})$ *für* $s \le r$ *gilt. Dann ist*

$$W(F(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r)/F) = W(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F) = \operatorname{Ann}\mathfrak{b}_F(\langle\langle N_F(\varphi_1)^*,\dots,N_F(\varphi_s)^*\rangle\rangle).$$

Es sei nun zusätzlich $\operatorname{ndeg}_F(\varphi_i) = 2$ *für* $i = 1,\dots,s-1$ *mit* $N_F(\varphi_i) = F^2(a_i)$ *für passende* $a_1,\dots,a_{s-1} \in F$. *Dann sind* $a_1,\dots,a_{s-1}$ *2-unabhängig. Weiter sei* $2\text{-}\deg_F(\{a_1,\dots,a_{s-1}\} \cup N_F(\varphi_s)) = s-1+\ell \in \mathbb{N}$ *mit* $F^2(a_1,\dots,a_{s-1})(N_F(\varphi_s)) = F^2(a_1,\dots,a_{s-1})(e_1,\dots,e_\ell)$ *für passende* $e_1,\dots,e_\ell \in F$. *Dann gilt* $\ell \ge 1$ *und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist*

(i) $\overline{I^n}(F(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r)/F) = \overline{I^n}(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)$ *und der Kern ist additiv erzeugt durch die Formen*

- $\overline{\pi \otimes \langle\langle x\rangle\rangle_b}$ *mit* $x \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1})^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$;
- $\overline{\psi \otimes \langle\langle y_1,\dots,y_\ell\rangle\rangle_b}$ *mit* $y_1,\dots,y_\ell \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1},e_1,\dots,e_\ell) \setminus F^2(a_1,\dots,a_{s-1})$ *und* $\psi \in \mathrm{Pf}_b^{n-\ell}(F)$.

(ii) $I^n(F(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r)/F) = I^n(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)$ *und für* $n > \ell$ *ist der Kern additiv erzeugt durch die Formen*

- $\pi \otimes \langle\langle x\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1})^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$;
- $\psi \otimes \langle\langle y_1,\dots,y_\ell\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1,\dots,y_\ell \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1},e_1,\dots,e_\ell) \setminus F^2(a_1,\dots,a_{s-1})$ *und* $\psi \in \mathrm{Pf}_b^{n-\ell}(F)$;

für $1 < n \le \ell$ *ist* $I^n(F(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r)/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen*

- $\pi \otimes \langle\langle x\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1})^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$;
- *ähnlich zu* $\langle\langle y_1,\dots,y_\ell\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1,\dots,y_\ell \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1},e_1,\dots,e_\ell) \setminus F^2(a_1,\dots,a_{s-1})$;

und $I(F(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r)/F)$ *ist additiv erzeugt durch die Formen*

- *ähnlich zu* $\langle\langle x\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1})^*$;
- *ähnlich zu* $\langle\langle y_1,\dots,y_\ell\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1,\dots,y_\ell \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1},e_1,\dots,e_\ell) \setminus F^2(a_1,\dots,a_{s-1})$.

(iii) $W(F(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_r)/F) = W(F(\varphi_1,\dots,\varphi_s)/F)$ *und der bilineare Wittkern ist als Ideal erzeugt durch die Formen*

- $\langle\langle x\rangle\rangle_b$ *mit* $x \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1})^*$;
- $\langle\langle y_1,\dots,y_\ell\rangle\rangle_b$ *mit* $y_1,\dots,y_\ell \in F^2(a_1,\dots,a_{s-1},e_1,\dots,e_\ell) \setminus F^2(a_1,\dots,a_{s-1})$.

Bemerkung 8.12 Mit den Notationen aus Theorem 8.11 stimmen die angegebenen Kerne wegen Proposition 2.12 und Korollar 7.8 mit den Kernen der Erweiterung $F(\sqrt{a_1},\dots,\sqrt{a_{s-1}})(\varphi_s)$ überein. Richtig angewandt bestimmt Theorem 8.11 also auch den Wittkern des Kompositums einer rein inseparablen Erweiterung vom Exponent 1 mit der Funktionenkörpererweiterung einer bilinearen Form. Dies liefert dann ein allgemeineres bilineares Gegenstück zu dem in [11] berechneten quadratischen Wittkern einer solchen Erweiterung.

Theorem 8.13 *Es sei* $\mathfrak{b}$ *eine bilineare Form mit polarer Form* φ. *Weiter sei* $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ndeg}_F(\varphi) = 2^k > 1$ *und* $N_F(\varphi) = F^2(a_1,\dots,a_k)$ *für passende* $a_1,\dots,a_k \in F$. *Setze dann* $t = k-r+1$ *und* $K := F(\underbrace{\mathfrak{b},\dots,\mathfrak{b}}_{r\ mal})$. *Ist* $r \in \{1,\dots,k\}$, *so ist für alle* $n \in \mathbb{N}$

(i) $\overline{I^n}(K/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen* $\overline{\pi \otimes \langle\langle y_1, \ldots, y_t \rangle\rangle_b}$ *mit* $y_1, \ldots, y_t \in N_F(\varphi)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$.

(ii) $I^n(K/F)$ *für* $n > t$ *additiv erzeugt durch die Formen* $\pi \otimes \langle\langle y_1, \ldots, y_t \rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_t \in N_F(\varphi)^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-t}(F)$.

Für $n \leq t$ *ist* $I^n(K/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen ähnlich zu* $\langle\langle y_1, \ldots, y_t \rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_t \in N_F(\varphi)^*$.

(iii) der bilineare Wittkern $W(K/F)$ *als Ideal erzeugt durch die Formen* $\langle\langle y_1, \ldots, y_t \rangle\rangle_b$ *mit* $y_1, \ldots, y_t \in N_F(\varphi)^*$. *Insbesondere ist nach Theorem 8.11 also*

$$W(K/F) = \mathrm{Ann}\, \mathfrak{b}_F(\langle\langle N_F(\varphi)^* \rangle\rangle^{\otimes r}).$$

Ist $r > k$, *so stimmen die jeweiligen Kerne mit den Kernen der Erweiterung* $F(\underbrace{\mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{b}}_{k \text{ mal}})/F$ *überein.*

8.3 Quadratische Wittkerne rein inseparabler Erweiterung

Wir wollen diese Arbeit nun damit abschließen, analog zum vorangegangenen Kapitel auch den von uns berechneten H-Kern beliebiger rein inseparabler Erweiterungen auf die quadratische Wittgruppe $W_q(F)$ zu übertragen. Dazu nutzen wir die in Theorem 6.25 angegebene Formulierung der Erzeuger, da diese mit Hilfe von Katos Isomorphismus auf den Raum $\overline{I^n W_q}(F)$ übertragen werden können. Man beachte dabei, dass die Darstellung der Erzeuger aus Theorem 6.25 ebenfalls für möglicherweise unendliche rein inseparable Erweiterungen verwendet werden kann.

Theorem 8.14 *Es sei* E/F *eine rein inseparable Erweiterung gegeben durch* $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ *mit passender Indexmenge* J. *Setze* $e_j = \exp(\beta_j/F)$ *und* $b_j = \beta_j^{2^{e_j}}$ *für* $j \in J$. *Ist* $G \subset J$ *eine endliche Teilmenge von* J, *so setzen wir* $e(G) := \max\{e_g \mid g \in G\} = \exp(F(\beta_g \mid g \in G)/F)$. *Dann ist für alle* $n \in \mathbb{N}$

(i) $\overline{I^n W_q}(E/F)$ *additiv erzeugt durch die Formen*

- $\overline{\pi \otimes \langle\langle s, sb_j]]}$ *mit* $j \in J$, $s \in F^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$;
- $\overline{\psi \otimes \langle\langle s, s^{2^t} \cdot \prod_{g\in G} b_g^{k(t,g)}]]}$ *mit* $s \in F^*$, *einer endlichen Teilmenge* $G \subset J$, $t = 1, \ldots, e(G) - 1$ *und* $0 \leq k(t,g) < 2^t$ *mit* $\max\{1, 2^{t-e_g+1}\} \mid k(t,g)$ *für* $g \in G$ *sowie* $\psi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$.

(ii) $I^n W_q(E/F)$ *für* $n > 1$ *additiv erzeugt durch die Formen*

- $\pi \otimes \langle\langle s, sb_j]]$ *mit* $j \in J$, $s \in F^*$ *und* $\pi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$;
- $\psi \otimes \langle\langle s, s^{2^t} \cdot \prod_{g\in G} b_g^{k(t,g)}]]$ *mit* $s \in F^*$, *einer endlichen Teilmenge* $G \subset J$, $t = 1, \ldots, e(G) - 1$ *und* $0 \leq k(t,g) < 2^t$ *mit* $\max\{1, 2^{t-e_g+1}\} \mid k(t,g)$ *für* $g \in G$ *sowie* $\psi \in \mathrm{Pf}_b^{n-1}(F)$;

und $IW_q(E/F)$ *ist additiv erzeugt durch die Formen*

- *ähnlich zu* $\langle\langle s, sb_j]]$ *mit* $j \in J$ *und* $s \in F^*$;

- *ähnlich zu* $\langle\!\langle s, s^{2^t} \cdot \prod_{g\in G} b_g^{k(t,g)}]]$ *mit* $s \in F^*$*, einer endlichen Teilmenge* $G \subset J$, $t = 1, \ldots, e(G) - 1$ *und* $0 \leq k(t,g) < 2^t$ *mit* $\max\{1, 2^{t-e_g+1}\} \mid k(t,g)$ *für* $g \in G$.

(iii) der quadratische Wittkern $W_q(E/F)$ *als* $W(F)$*-Untermodul erzeugt durch die Formen*

- $\langle\!\langle s, sb_j]]$ *mit* $j \in J$, $s \in F^*$*;*
- $\langle\!\langle s, s^{2^t} \cdot \prod_{g\in G} b_g^{k(t,g)}]]$ *mit* $s \in F^*$*, einer endlichen Teilmenge* $G \subset J$, $t = 1, \ldots, e(G)-1$ *und* $0 \leq k(t,g) < 2^t$ *mit* $\max\{1, 2^{t-e_g+1}\} \mid k(t,g)$ *für* $g \in G$.

Bemerkung 8.15 (a) Der in Theorem 8.14 beschriebene quadratische Wittkern wurde für rein inseparable Erweiterungen vom Exponent 1 bereits von Aravire und Lagribi für endliche Erweiterungen in [10] und anschließend für beliebige Erweiterungen vom Exponent 1 von Hoffmann in [26] berechnet. Im Gegensatz zu dieser Arbeit verwendet Hoffmann zur Berechnung des Kerns lediglich die Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.

(b) In [29] haben Hoffmann und Sobiech gezeigt, dass der quadratische Wittkern der Erweiterung $F(\sqrt[4]{b})/F$ für ein $b \in F \setminus F^2$ als $W(F)$-Untermodul erzeugt ist durch die Formen

- $\langle\!\langle b, c]]$ mit $c \in F^*$
- $\langle\!\langle e^3, \frac{b}{e^2}]]$ mit $e \in F^*$.

Setzen wir $f = e^{-1}$, so ergibt sich für den zweiten Typ von Erzeugern dann $\langle\!\langle f^{-3}, bf^2]] \cong \langle\!\langle f, bf^2]]$, was genau dem zweiten Typ von Erzeuger in Theorem 8.14(iii) entspricht. Eine simple Rechnung zeigt nun für ein $s \in F^*$ ebenfalls die Isometrie

$$\langle\!\langle s, sb]] = [1, sb] \perp s[1, sb] \cong [1, sb] \perp b[1, sb] = \langle\!\langle b, sb]] \,.$$

Setzt man nun $c = sb$, so stimmen die hier beschriebenen Erzeuger ebenfalls mit den von Hoffmann und Sobiech bestimmten Erzeugern überein. Des Weiteren werden die Erzeuger vom ersten Typ im Beweis von Hoffmann und Sobiech als die Formen beschrieben, die bereits über einem Unterkörper $M \subset F(\sqrt[4]{b})$ mit $[M : F] = 2$ hyperbolisch werden. Dies deckt sich mit der Beschreibung der Erzeuger in Bemerkung 6.22(b), übertragen auf den quadratischen Wittring.

Anhang A

Algebraische Grundlagen

Wir wollen an dieser Stelle einige grundlegende Aussagen und Definitionen der algebraischen Körpertheorie, sowie der äußeren Potenz eines Moduls zusammentragen. Dabei werden wir keine detaillierte Einführung in die jeweiligen Themengebiete liefern, sondern vielmehr die für diese Arbeit notwendigen Definitionen und Aussagen wiederholen und einige hilfreiche Notationen festlegen.

A.1 Körpertheorie

Zunächst ist aus der algebraischen Körpertheorie bekannt, dass jede Körpererweiterung als rein transzendente Erweiterung, gefolgt von einer algebraischen Erweiterung realisiert werden kann. Diese Reihenfolge kann in der Regel nicht umgekehrt werden, allerdings gilt das folgende allgemein bekannte Lemma, welches in dieser Arbeit wiederholt verwenden wird.

Lemma A.1 *Es sei F ein Körper, Θ ein Elemente eines algebraischen Abschlusses von F sowie X ein über F transzendentes Element. Dann ist $F(\Theta)(X) = F(X)(\Theta)$.*

In diesem Kapitel wollen wir uns weitestgehend auf algebraische Körpererweiterungen beschränken, da das Verhalten von den in dieser Arbeit untersuchten Formen unter rein transzendenten Erweiterungen bereits gut verstanden ist. Da wir in Kapitel 6 Differentialformen unter rein inseparablen Erweiterungen studieren, beginnen wir mit den wichtigsten Aussagen über eben diesen Typ von Körpererweiterungen und werden dann anschließend einige Aussagen über separable Erweiterungen formulieren. Da die Unterscheidung in separable und inseparable Körpererweiterungen über Körper der Charakteristik Null keinerlei Sinn hat, wollen wir in diesem Kapitel ausschließlich Körper der Charakteristik p mit $p > 0$ untersuchen, welche wir stets als F bezeichnen wollen. Für eine genauere Einführung in die Körpertheorie, sowie alle Beweise der hier aufgeführten Ergebnisse verweisen wir auf [16], insbesondere auf die Abschnitte 3.6 und 3.7.

A.1.1 Rein inseparable Körpererweiterungen

Definition A.2 Es sei E/F eine algebraische Körpererweiterung. Ein $\beta \in E$ heißt rein inseparabel über F, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\beta^{p^n} \in F$. Ist dabei $\beta^{p^n} = b \in F$, so schreiben wir kurz $\beta = \sqrt[p^n]{b}$. Ist jedes Element in E rein inseparable über F, so bezeichnen wir E als rein inseparable Körpererweiterung von F.

Es sei nun E/F eine rein inseparable Erweiterung sowie $\beta \in E$. Dann bezeichnen wir die ganze Zahl $\exp(\beta/F) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \beta^{p^n} \in F\}$ als den Exponenten von β über F. Dabei gilt natürlich genau dann $\exp(\beta/F) = 0$, wenn $\beta \in F$ gilt. Weiter ist das Minimalpolynom von β mit $\exp(\beta/F) = e$ gegeben durch $X^{p^e} - \beta^{p^e} \in F[X]$. Existiert das Maximum $\max\{\exp(\beta/F) \mid \beta \in E\}$, so nennen wir dieses den Exponenten der Erweiterung E/F und schreiben in diesem Fall kurz $\exp(E/F)$. Man beachte dabei, dass nicht jede rein inseparable Erweiterung einen endlichen Exponenten besitzt. Eine der für uns wichtigsten Charakterisierungen rein inseparabler Körpererweiterungen ist nun durch die folgende Aussage beschrieben.

Lemma A.3 *([16, Kap. 3.7 Satz 2]) Es sei E/F eine algebraische Körpererweiterung. Dann ist E/F genau dann eine rein inseparable Erweiterung, wenn es eine Familie $(\beta_j)_{j\in J}$ rein inseparabler Elemente in E mit geeigneter Indexmenge J gibt, für die $E = F(\beta_j \mid j \in J)$ gilt.*

Insbesondere ist nach Lemma A.3 also jede endliche rein inseparable Erweiterung E/F von der Form $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})$ mit $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Aus dieser Darstellung ergibt sich dann schnell die Tatsache, dass der Körpergrad einer rein inseparablen Erweiterung stets eine p-Potenz ist. Gilt in dieser Darstellung zusätzlich noch $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$, so erhalten wir den Exponenten der Erweiterung durch $\exp(E/F) = \max\{m_1, \ldots, m_r\}$. Man beachte, dass durch Reduktion der passenden m_i stets eine Darstellung des Körpers E mit $b_1, \ldots, b_r \in F \setminus F^p$ gefunden werden kann. Offensichtlich erhalten wir für den Körpergrad dann ebenfalls $[E : F] \leq p^{m_1+\ldots+m_r}$. Um eine Charakterisierung des Falles zu erhalten in dem $[E : F] = p^{m_1+\ldots+m_r}$ gilt, halten wir zunächst fest, dass F^p stets ein Unterkörper von F ist. Weiter handelt es sich bei der Erweiterung $F^p(b_1, \ldots, b_r)/F$ um eine rein inseparable Erweiterung vom Exponenten 1. Damit erhalten wir nun das folgende Lemma.

Lemma A.4 *([24, Prop. 5.7]) Es sei $E = F(\sqrt[p^{m_1}]{b_1}, \ldots, \sqrt[p^{m_r}]{b_r})/F$ eine endliche rein inseparable Erweiterung mit $b_1, \ldots, b_r \in F$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $[F^p(b_1, \ldots, b_r) : F^p] = p^r$;

(b) $[E : F] = p^{m_1+\ldots+m_r}$;

(c) $E \cong \bigotimes_{i=1}^r F(\sqrt[p^{m_i}]{b_i})$.

Die in Lemma A.4(a) beschriebene Bedingung an die Elemente $b_1, \ldots, b_r$ wird in Kapitel 3 als p-Unabhängigkeit der $b_1, \ldots, b_r$ gekennzeichnet. Gilt dabei eine der in Lemma A.4 beschriebenen Bedingungen, so nennen wir E/F eine modulare rein inseparable Erweiterung.

Ist $m_1 = \ldots = m_r = 1$ und damit $E = F(\sqrt[p]{b_1}, \ldots, \sqrt[p]{b_r})$ mit Körpergrad $[E : F] = p^s$ und $s \leq r$, so rechnet man leicht nach, dass es stets eine s-elementige Teilmenge $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}\} \subset \{b_1, \ldots, b_r\}$ mit $F^p(b_1, \ldots, b_r) = F^p(b_{i_1}, \ldots, b_{i_s})$ gibt. Für diese Elemente erhalten wir dann $E = F(\sqrt[p]{b_{i_1}}, \ldots, \sqrt[p]{b_{i_s}})$. Wir können also für rein inseparable Erweiterungen vom Exponenten 1 stets Erzeugende finden, sodass eine (und damit alle) Bedingungen aus Lemma A.4 erfüllt sind.

Um eine abschließende Aussage über rein inseparable Erweiterungen formulieren zu können, erinnern wir an die Artin-Schreier-Abbildung $\wp$, welche für Körper der Charakteristik p definiert ist als $\wp : F \to F\ ,\ x \mapsto x^p - x$.

Lemma A.5 *([1, Prop. 5]) Es sei E/F eine rein inseparable Körpererweiterung und $x \in F$ mit $x \in \wp(E)$. Dann gilt $x \in \wp(F)$.*

A.1.2 Separable Körpererweiterungen

Wir wollen uns nun mit dem anderen Extrem der algebraischen Körpererweiterungen, den separablen Körpererweiterungen befassen. Wiederholen wir dazu zunächst die Definition eben solcher Erweiterungen.

Definition A.6 Ein Polynom $f \in F[X]$ heißt separabel über F, wenn im Zerfällungskörper von f alle Nullstellen von f paarweise verschieden sind. Ist S/F eine algebraische Erweiterung und ist $\vartheta \in S$, so nennen wir ϑ separabel über F, wenn das Minimalpolynom von ϑ über F separabel ist. Weiter nennen wir die Erweiterung S/F separabel, wenn jedes Element in S separabel über F ist. Zusätzlich wollen wir eine beliebige Körpererweiterung K/F als separabel bezeichnen, wenn sie als rein transzendente Erweiterung, gefolgt von einer algebraisch separablen Erweiterung realisiert werden kann.

In der folgenden Aussage fassen wir nun zwei der für uns nützlichsten Eigenschaften von endlichen separablen Körpererweiterungen zusammen.

Proposition A.7 *([16, Kap. 3.6, Satz 12]) Ist S/F eine endliche separable Körpererweiterung, so existiert ein $\vartheta \in S$ mit $S = F(\vartheta)$. Ein solches ϑ heißt primitives Element der Erweiterung S/F und für dieses gilt stets $F(\vartheta) = F(\vartheta^p)$.*

Wir wollen diesen Abschnitt über Körpererweiterungen nun mit einem wichtigen Resultat aus der Körpertheorie abschließen, welches beliebige algebraische Erweiterungen mit Hilfe von separablen und rein inseparablen Körpererweiterungen beschreibt.

Theorem A.8 *([16, Kap. 3.7 Satz 4]) Es sei K/F eine algebraische Körpererweiterung. Dann existiert ein Zwischenkörper S mit $F \subseteq S \subseteq K$ so, dass S/F separabel und K/S rein inseparabel ist. Der Körpergrad $[S : F]$ heißt dabei der Separabilitätsgrad der Erweiterung K/F und wird mit $[K : F]_s$ bezeichnet. Weiter ist S der separable Abschluss von F in K, das heißt es gilt $S = \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ ist separabel über } F\}$.*

Wir können also nach Theorem A.8 jede algebraische Erweiterung realisieren als separable Erweiterung gefolgt von einer rein inseparablen Erweiterung. Ist die in Theorem A.8 beschriebene Erweiterung K/F bereits separabel, so ist $S = K$ und $[K : F]_s = [K : F]$. Ist K/F eine rein inseparable Erweiterung, so ist $S = F$ und $[K : F]_s = 1$. Man beachte dabei, dass die Reihenfolge dieser Erweiterungen in der Regel nicht umgekehrt werden kann. Algebraische Körpererweiterungen, die sich als rein inseparable Erweiterungen gefolgt von einer separablen Erweiterung realisieren lassen, wollen wir als ausgeglichen bezeichnen (aus dem englischen „balanced“). Dies ist etwa für jede normale Körpererweiterung der Fall.

A.2 Die äußere Potenz eines Moduls

In diesem letzten Abschnitt des Anhangs wollen wir uns mit der sogenannten äußeren Potenz befassen. Wir werden die äußere Potenz an dieser Stelle möglichst allgemein für Moduln einführen, obwohl sie in Kapitel 3 lediglich für F-Vektorräume angewendet wird. In diesem letzten kurzen Abschnitt sei R also stets ein kommutativer Ring und alle auftretenden Tensorprodukte seien über R definiert, weshalb wir konsequent kurz $\otimes$ für $\otimes_R$ schreiben werden. Für eine detaillierte Beschreibung der Konstruktion verweisen wir auf [17], speziell auf Kapitel 3, §7.

Definition A.9 Es sei M ein R-Modul und $k \geq 2$. Dann definieren wir die k-te äußere Potenz von M als $\bigwedge^k M := M^{\otimes k}/J_k$, wobei J_k das Untermodul von $M^{\otimes k}$ ist, welches durch die Elemente $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ mit $m_i = m_j$ für $i \neq j$ erzeugt ist. Für die Nebenklasse von $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ in $\bigwedge^k M$ schreiben wir dann kurz $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$ und nennen dieses ein elementares Wedge-Produkt. Abschließend definieren wir $\bigwedge^1 M = M$ und $\bigwedge^0 M = R$.

Die Multilinearität der Abbildung $M^k \to M^{\otimes k}, (m_1, \ldots, m_k) \mapsto m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ überträgt sich dabei ebenfalls auf die Wedge-Produkte und man rechnet leicht nach, dass jedes $\omega \in \bigwedge^k M$ als

$$\omega = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_k)} r_i m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}$$

mit passenden $r_i \in R$ und $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k} \in M$ geschrieben werden kann. Die elementaren Wedge-Produkte bilden also ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^k M$ und eine R-lineare Abbildung auf $\bigwedge^k M$ ist damit vollständig durch ihr Verhalten auf den elementaren Wedge-Produkten beschrieben.

Durch die Erzeuger des Untermoduls J_k aus Definition A.9 ist ebenfalls sofort klar, dass die Abbildung $M^k \to M^{\otimes k}, (m_1, \ldots, m_k) \mapsto m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$ alternierend ist. Somit gilt für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_k$ dann $m_{\pi(1)} \wedge \ldots \wedge m_{\pi(k)} = (\operatorname{sign} \pi) m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$.

Eine wichtige Eigenschaft der äußeren Potenz eines Moduls ist die Tatsache, dass man aus einem Erzeugendensystem des Moduls M auch ein Erzeugendensystem der Potenz $\bigwedge^k M$ erhält. Dies wollen wir in der folgenden abschließenden Proposition festhalten.

Proposition A.10 *([17, Ch. 3 §7.8 Coro. 1]) Es sei M ein R-Modul und $k \geq 2$.*

(a) Besitzt M ein d-elementiges Erzeugendensystem, so ist $\bigwedge^k M = 0$ für alle $k > d$.

(b) Ist M ein freier Modul mit Basis $\{e_i \mid i \in I\}$ für eine wohlgeordnete Indexmenge I, so ist $\bigwedge^k M$ ebenfalls ein freier Modul und eine Basis von $\bigwedge^k M$ ist gegeben durch

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \in I \text{ und } i_1 < \ldots < i_k\}.$$

Ist insbesondere $\operatorname{rang} M = d < \infty$, so ist $\operatorname{rang} \bigwedge^k M = \binom{d}{k}$ für $k \leq d$.

Literaturverzeichnis

[1] H. Ahmad. The Witt kernels of purely inseparable quartic extensions. *Linear Algebra Appl.*, 395:265–273, 2005.

[2] A. A. Albert. *Structure of Algebras.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 24. American Mathematical Society, New York, 1939.

[3] J. K. Arason, R. Aravire, and R. Baeza. On some invariants of fields of characteristic $p > 0$. *J. Algebra*, 311(2):714–735, 2007.

[4] R. Aravire and R. Baeza. Milnor's k-theory and quadratic forms over fields of characteristic two. *Comm. Algebra*, 20(4):1087–1107, 1992.

[5] R. Aravire and R. Baeza. The behavior of quadratic and differential forms under function field extensions in characteristic two. *J. Algebra*, 259(2):361–414, 2003.

[6] R. Aravire and R. Baeza. Linkage of fields in characteristic 2. *Comm. Algebra*, 31(1):463–473, 2003.

[7] R. Aravire and R. Baeza. Annihilators of quadratic and bilinear forms over fields of characteristic two. *J. Algebra*, 299(1):294–308, 2006.

[8] R. Aravire and B. Jacob. $H^1(X,\nu)$ of conics and Witt kernels in characteristic 2. In *Quadratic forms–algebra, arithmetic, and geometry*, volume 493 of *Contemp. Math.*, pages 1–19. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[9] R. Aravire and B. Jacob. Cohomology and graded Witt group kernels for extensions of degree four in characteristic two. *J. Algebra*, 461:314–350, 2016.

[10] R. Aravire and A. Laghribi. Results on Witt kernels of quadratic forms for multi-quadratic extensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(12):4191–4197, 2013.

[11] R. Aravire, A. Laghribi, and M. O'Ryan. Graded Witt kernels of the compositum of multiquadratic extensions with the function fields of Pfister forms. *J. Algebra*, 449:635–659, 2016.

[12] C. Arf. Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. I. *J. Reine Angew. Math.*, 183:148–167, 1941.

[13] R. Baeza. Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2. *Math. Z.*, 135:175–184, 1973/74.

[14] R. Baeza. *Quadratic forms over semilocal rings.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 655. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[15] S. Bloch and K. Kato. p-adic étale cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (63):107–152, 1986.

[16] S. Bosch. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer Spektrum, eighth edition, 2013.

[17] N. Bourbaki. *Algebra I. Chapters 1–3.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[18] P. Cartier. Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique. *Bull. Soc. Math. France*, 86:177–251, 1958.

[19] J.-L. Colliot-Thélène. Cohomologie galoisienne des corps valués discrets henseliens, d'après K. Kato et S. Bloch. In *Algebraic K-theory and its applications (Trieste, 1997)*, pages 120–163. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.

[20] A. Dolphin and D. W. Hoffmann. Differential forms and bilinear forms under field extensions. *J. Algebra*, 441:398–425, 2015.

[21] R. Elman, N. Karpenko, and A. Merkurjev. *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, volume 56 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[22] P. Gille and T. Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology*, volume 101 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[23] A. Grothendieck and J. A. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique. I*, volume 166 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[24] D. W. Hoffmann. Diagonal forms of degree p in characteristic p. In *Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms*, volume 344 of *Contemp. Math.*, pages 135–183. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[25] D. W. Hoffmann. Witt kernels of bilinear forms for algebraic extensions in characteristic 2. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(3):645–652 (electronic), 2006.

[26] D. W. Hoffmann. Witt kernels of quadratic forms for multiquadratic extensions in characteristic 2. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(12):5073–5082, 2015.

[27] D. W. Hoffmann and A. Laghribi. Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(10):4019–4053 (electronic), 2004.

[28] D. W. Hoffmann and A. Laghribi. Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic 2. *J. Algebra*, 295(2):362–386, 2006.

[29] D. W. Hoffmann and M. Sobiech. Witt kernels and Brauer kernels for quartic extensions in characteristic two. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(10):4619–4634, 2015.

[30] K. Kato. Galois cohomology of complete discrete valuation fields. In *Algebraic K-theory, Part II (Oberwolfach, 1980)*, volume 967 of *Lecture Notes in Math.*, pages 215–238. Springer, Berlin-New York, 1982.

[31] K. Kato. Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic two. *Invent. Math.*, 66(3):493–510, 1982.

[32] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol. *The book of involutions*, volume 44 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[33] P. Mammone, J.-P. Tignol, and A. Wadsworth. Fields of characteristic 2 with prescribed u-invariants. *Math. Ann.*, 290(1):109–128, 1991.

[34] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.

[35] J. Milnor. Algebraic K-theory and quadratic forms. *Invent. Math.*, 9:318–344, 1969/1970.

[36] D. Orlov, A. Vishik, and V. Voevodsky. An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms. *Ann. of Math. (2)*, 165(1):1–13, 2007.

[37] A. Pfister. Multiplikative quadratische Formen. In *Algebraische Zahlentheorie (Ber Tagung Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1964)*, pages 229–238. Bibliographisches Institut Mannheim, Mannheim, 1967.

[38] A. Pfister. *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, volume 217 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[39] G. Pickert. Inseparable Körpererweiterungen. *Math. Z.*, 52:81–136, 1949.

[40] L. H. Rowen. Division algebras of exponent 2 and characteristic 2. *J. Algebra*, 90(1):71–83, 1984.

[41] S. Scully. On the splitting of quasilinear p-forms. *J. Reine Angew. Math.*, 713:49–83, 2016.

[42] O. Teichmüller. Zerfallende zyklische p-Algebren. *J. Reine Angew. Math.*, 176:157–160, 1937.

[43] M. Weisfeld. Purely inseparable extensions and higher derivations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 116:435–449, 1965.

[44] E. Witt. Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. *J. Reine Angew. Math.*, 176:31–44, 1937.