Aristoteles Logik

-Probematiseret v. Frege

Filosofi og videnskabsteori (1. modul)

Af Mikael Tuxen Johansen og Kresten Hyldeqvist Jacobsen
Vejledt af Finn Guldmann

19. december 2005

Indhold

0.1 Indledning

Aristoteles grundlægger med sin syllogismelære en ny videnskabelig retning inden for filosofien, kaldet logik. Hans logiske system får lov til at stå stort set urørt, som et symbol for denne retning, i århundreder. Det er først i den positivistisk dominerede periode i slutningen af 1800-tallet at hans lære for alvor bliver udfordret. Flere logikere beskæftiger sig i denne periode med at udvikle logikken, men især Gottlob Frege står, som matematiker og logiker, centralt i denne proces. Hans bidrag har i høj grad bestået i at formulere et logisk sprog, som senere er blevet undersøgt og omformuleret, til det vi idag kender som det moderne udsagnslogiske sprog.

Med dette in mente finder vi det interessant at undersøge disse to store filosoffers logiske systemer, for dernæst at finde ud af hvad det er der gør at store dele Aristoteles system bliver refuteret og at Freges tager over og udvidder logikken.

Således er vi kommet frem til følgende problemformulering.

0.1.1 Problemformulering

Hvordan løser Freges logiske system udvalgte problemer ved Aristoteles syllogismelære?

0.1.2 Afgrænsning

Vi har i opgaven taget udganspunkt i Aristoteles kategoriske syllogismelære, som den bliver præsenteret i *Analytica Priori*. Ligeledes gør det sig gældende med Frege, hvor udgangspunktet har været hans værk *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denken*. Disse er især blevet gennemgået via sekundære kilder, som i Freges tilfælde har været [4], da de er de eneste, af vores kilder, der konsekvent gør brug af Freges notation.

1 Teori

I denne del af rapporten beskrives først Aristoteles logiske system, syllogismelæren, som bygger på det naturlige sprog. Dernæst Gottlob Frege's system fra slutningen af det 19. århundrede, som ligger sig tæt op af den matematiske logik.

1.1 Syllogismelæren

Syllogismelæren er første rigtige forsøg på at formalisere sproglig argumentation[1]. Målet er, at det skal være muligt at udlede gyldige konklusioner fra et sæt af præmisser. På denne måde vil det være muligt at argumentere på en sådan vis, at ens tilhører vil være nødsaget til at godtage konklusionen i det tilfælde hvor de har godtaget præmisserne. Denne tanke må have appelleret til Aristoteles' systematiske tilgang til videnskaben, hvilket da også illustreres i følgende citat:

> "We must first state the subject of our inquiry and the faculty to which it belongs: its subject is demonstration and the faculty that carries it out demonstrative science."[2]

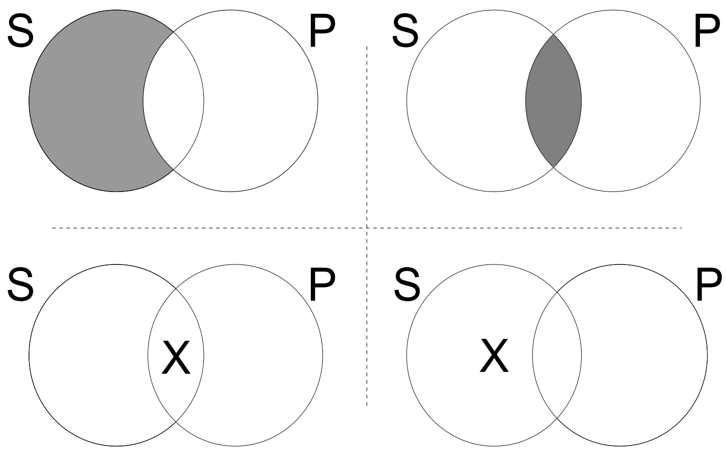
1.1.1 Kategoriske sætninger

Kategoriske sætninger er de sætningstyper hvori påstande om verdenen kan fremsættes. Disse sætninger er opbygget af to dele: et prædikatsbegreb og et subjektbegreb bundet sammen af *er*. I.flg. Aristoteles er der fire af denne slags sætninger[3].
Notationen herunder med A,E,I og O stammer fra middelalderen[4]

A	Alle S er P	*Universelt bekræftende*
E	Ingen S er P	*Universelt benægtende*
I	Nogle S er P	*Partikulært bekræftende*
O	Nogle S er ikke P	*Partikulært benægtende*

En måde at illustrere disse sætninger på er vha. Venn-diagrammer. De udfyldte områder i diagrammerne herunder symboliserer et område hvor der ikke kan være nogle forkomster; et område med et "X" angiver, at der er mindst én forkomst heri. Et umarkeret område antyder muligheden af en eller flere forkomster. De kategoriske sætninger kan med Venn-diagrammer illustreres som i figur 1.1.

[1] [2] pp. 27
[2] [1] A1, 24a10-12
[3] [2] pp. 34
[4] [2] pp. 34n

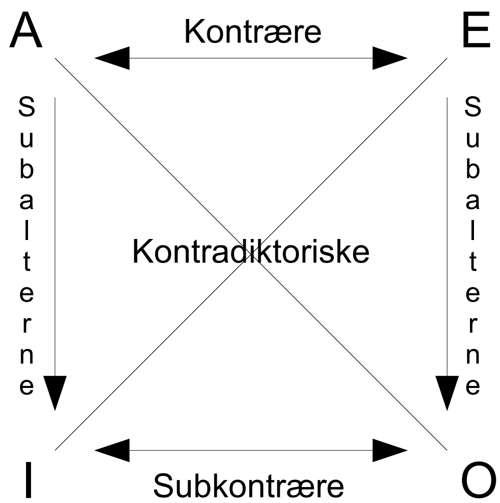


Figur 1.1

Øverst til venstre er det vist hvorledes *alle S er P*; øverst til højre, hvorledes *ingen S er P*; nederst til venstre, at *mindst én S, er P*; og sidst men ikke mindst, nederst til højre, som viser at *mindst én S ikke er P*[5].

Aristoteles hævder, at man udfra disse kategoriske sætninger kan analysere enhver deklarativ sætning, hvorfor gyldigheden af argumenter opbygget af denne type sætninger, er afgørende for gyldigheden af alle postulater, der siger noget om verdenen.

De fire sætningstypers indbyrdes forhold kan vises vha. det logiske oppositionskvadrat, som er illustreret herunder.



Figur 1.2

Kontrære sætninger kan ikke være sande, men godt falske på samme tid. Eks.: "alle S er P" (A-sætning) og "ingen S er P" (E-sætning) er begge falske i det tilfælde at nogle, men ikke alle, S er P.

[5][3] pp. 235

Subkontrære sætninger kan, modsat de kontrære sætninger, ikke være falske, men godt sande på samme tid. Eks.: "nogle S er P" (I-sætning) og "nogle S er ikke P" (O-sætning), er begge sande i det tilfælde at nogle, men ikke alle, S er P.
Subalterne sætninger har det forhold, at den ene er inkluderet i den anden. Eks.: "alle S er P" (A-sætning) indeholder også forholdet "nogle S er P". Ligeledes gør det sig gældende med E- og O-sætninger.
Kontradiktoriske sætninger kan hverken være sande eller falske på samme tid. Eks.: "alle S er P" og "nogle S er ikke P" er tydeligt kontradiktoriske.

1.1.2 Gyldighedsteori

En speciel form for argumenter danner grundlag for Aristoteles syllogismelære; nemlig argumenter der har præcis *to kategoriske sætninger med én term tilfælles, som præmisser*[6]. Disse argumenter deles op i tre figurer.

Figurer

Alle sætningerne herunder er kategoriske og kan skrives på formene A, E, I og O, hvorfor der, ud fra hver figur, bliver seksten kombinationsmuligheder. Fire med A-formen i første præmis (eks. A+A, A+E, A+I, A+O) fire med E-formen og så fremdeles. Figurene er vist herunder:

Første figur

Subjekt	Prædikat
M	P
S	M

Her er prædikatet fra første sætning subjekt i anden. Eksempelvis:
alle M er P
alle S er M

Anden figur

Subjekt	Prædikat
P	M
S	M

Her har de to subjekter i sætningerne prædikatet til fælles. Eksempelvis:
alle P er M
alle S er M

Tredje figur

Subjekt	Prædikat
M	P
M	S

Her tilskrives samme subjekt forskellige prædikater i de to sætninger. Eksempelvis:
alle M er P
alle M er S

[6] [2] pp. 35

Udover de tre former som Aristoteles behandler direkte i Analytica Priori er der også en fjerde, der kun behandles indirekte[7].
Fjerde figur

Subjekt	Prædikat
P	M
M	S

Her er subjektet fra første sætning prædikat i anden.
alle P er M
alle M er S

Argumenterne består på denne vis af:
1. et mellembegreb, som optræder i begge præmisser, og
2. et underbegreb, som optræder i anden præmis og som konklusionens subjekt og endeligt,
3. et overbegreb der optræder i første præmis og som konklusionens prædikat.
Således vil en syllogisme fra første figur have formen[8]:

1. præmis	overbegreb, mellembegreb
2. præmis	mellembegreb, underbegreb
Konklusion	overbegreb, underbegreb

Hvis der, udover de 4^2 kombinationsmuligheder for præmisserne, er fire mulige konklusioner, fås 4^3 kombinationer per figur og da der er 4 figurer er det totale antal af syllogismer på denne form 4×4^3 eller 256 forskellige syllogismer.

Undersøgelse af figurerne

Aristoteles går, som tidligere antydet, kun systematisk ind i de første tre figurer, hvorfor vi koncentrerer os om disse. Der skelnes mellem *komplette* og *ukomplette*[9] deduktioner. En komplet deduktion er en, hvor konklusionen følger, ikke blot logisk, men *umiddelbart* fra argumentets præmisser, uden at nye præmisser skal udledes af argumentet. En ukomplet deduktion er en, hvor der skal tilføjes ekstra logiske trin end dem, der fremgår direkte af præmisserne. En ukomplet deduktion er dog stadig logisk gyldig, man skal blot bevæge sig ad omveje for at få bekræftet gyldigheden af konklusionen.

Alle gyldige deduktioner fra første figur er komplette og derudover de eneste logisk gyldige komplette deduktioner i.flg. Aristoteles[10]

I anden og tredje figur er der, som nævnt, ikke nogle komplette deduktioner, hvorfor der må anvendes nogle andre logiske regler sammen med syllogismerne fra første figur. Disse andre regler omfatter omregning og tilfældig omregning[11].

Omregning/tifældig omregning

At foretage en omregning vil sige at omskrive et kategorisk udsagn, således at subjekt og prædikat bytter plads. E- og I-formerne implicerer en direkte omregning:
E-omregning: "ingen S er P", som implicerer "ingen P er S"; og
I-omregning: "nogle S er P", der implicerer "nogle P er S".
Hverken A- eller O-sætninger lader sig omregne, men tilgengæld implicerer A-

[7] Hvorvidt der rent faktisk *er* en fjerde figur er genstand for diskussion. Jf. [4] pp. 101
[8] [3] pp. 232.
[9] [2] pp. 36n, "complete"og "incomplete".
[10] [2] pp. 37ø.
[11] [2] pp. 37ø, "conversion"og "accidental conversion".

sætninger en tilsvarende omregnet I-sætning (tilfældig omregning):
"alle S er P", som implicerer "nogle P er S".
Dette er én af de regnemåder Aristoteles bruger, når han går videre til at undersøge anden og tredje figur. Dette illusteres i følgende citat:

> "[...] if M belongs to every N but to no X, then neither will N belong to any X. For if M belongs to no X, then neither does X belong to any M; but M belonged to every N; therefore, X will belong to no N. [...] And since the privative converts, neither will N belong to any X."[12]

Som igen kan skrives på følgende måde:

1. alle N er M	1. præmis.
2. ingen X er M	2. præmis.
ingen X er N	Påstået konklusion.
——	
3. ingen X er M	2. præmis.
4. ingen M er X	E-omregning af 2. præmis.
5. alle N er M	1. præmis.
6. ingen N er X	resultat af EAE-1 deduktion på 4. og 5. (se evt. ovenfor)
7. ingen X er N	E-omregning af 6

Således bevises at selvom "ingen X er N" ikke ummiddelbart kan udledes af "alle N er M" og "ingen X er M", kan det lade sig gøre ud fra de deduktions- og omregningsregler som er beskrevet ovenfor.

Bevis ad absurdum

Aristoteles bruger dog også en anden form for bevis, nemlig "bevis ad absurdum", hvor benægtelsen af konklusionen vises at være falsk (eller umulig), i det tilfælde at præmiserne er sande. Hvis dette er tilfældet er det nødvendigt at godtage konklusionen, da ikke både konklusionen og dens negation kan afvises samtidigt[13].
Dette gøres bl.a. ved sætningerne "alle N er M" og "nogle X er ikke M" udfra hvilke det hævdes, at man kan konkludere "nogle X er ikke N".

1. alle N er M	1. præmis.
2. nogle X er ikke M	2. præmis.
nogle X er ikke N	Påstået konklusion.
——	
3. alle X er N	Benægtelsen af den påståede konklusion (NoX og NaX kan ikke begge være tilfældet).
4. alle N er M	1. præmis.
5. alle X er M	resultat af AAA-1 deduktion på 3. og 4. (se evt. ovenfor).

2. præmis kan ikke være tilfældet samtidigt med 5., som er en følge af benægtelsen af den påståede konklusion, hvorfor den påståede konklusion må være sand.

[12] [1] A 5, 27a9-12
[13] Jf. 1.2 - Det Logiske Oppositionskvadrat

Udover at bevise hvilke syllogismeformer der er gyldige, viser Aristoteles også hvilke der ikke er gyldige. Til dette formål bruger han den metode, der kaldes "afvisning ved modeksempel"[14].

Afvisning ved modeksempel

For at vise at en form ikke er gyldig, skal der blot findes ét eksempel, hvorunder præmisserne er sande og konklusionen falsk. Dette gør Aristoteles ved at benytte sig af eksempler hvis konklusioner udelukker hinanden[15]. Eksempelvis to førstefigurs slutninger, der har samme form, men forskellig konklusion. Eksemplerne vises så i det naturlige sprog, hvor hver sætning (inkl. konklusion), vises at være mulig samtidigt.[16]

Natursprogligt:

Eksempel 1	*Eksempel 2*
Alle heste er hvide.	Alle heste er brune.
Ingen får er heste.	Ingen får er heste.
Alle får er hvide.	Ingen får er brune.

Hvor præmisserne er på samme form, men konklusionen forskellig:

Eksempel 1	*Eksempel 2*	
(A) Alle B er A	(A) Alle B er A	
(E) Ingen C er B	(E) Ingen C er B	
$\therefore$ (A) Alle C er A	$\therefore$ (E) Ingen C er A	$\Leftarrow$ Ikke gyldige konklusioner

Konklusionen er, natursprogligt, ikke i strid med præmisserne. De er sande, men ikke på baggrund af præmisserne. At formen så er ugyldig, kan vises ved at se på de fire typer af konklusioner, der er mulige (A,E,I,O). Eksempel 1 udelukker E- og O-formerne, da A-formen er tilfældet, i konklusionen[17]. Omvendt er det tilfældet med eksempel 2, der i kraft af at den har en konklusion på E-form, udelukker A- og I-formerne.

Således kan Aristoteles også vise hvilke logiske slutninger, der ikke er gyldige og det er nu muligt at afdække hele det logiske system mht. gyldighed.

Gyldige former

I gennemgangen af de tre figurer kommer Aristoteles frem til at følgende slutningsformer er gyldige[18]:

AAA-1	EAE-1	AII-1	EIO-1		
AEE-2	EAE-2	EIO-2	AOO-2		
AAI-3	EAO-3	IAI-3	AII-3	OAO-3	EIO-3

[14][2] pp. 39, "Disproofs by counterexample"

[15]Jf. figur 1.2 - Det Logiske Oppositionskvadrat

[16][2] pp. 40

[17]Kan bl.a. ses i det logiske oppositionskvadrat (figur 1.2), da A-E er kontrære og A-O er kontradiktoriske.

[18]Skrevet på formen: *"første præmis type", "anden præmis type", "konklusion type" - "figur nr."*.

1.1.3 Oversættelse af de kategoriske sætninger til moderne udsagnslogisk sprog

Herunder er en oversættelsesnøgle af de kategoriske sætninger til moderne udsagnslogisk sprog[19], da vi skal bruge disse senere i opgaven.

(A)	Alle S er P	$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$	*Universelt bekræftende*
(E)	Ingen S er P	$\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$	*Universelt benægtende*
(I)	Nogle S er P	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$	*Patikulært bekræftende*
(O)	Nogle S er ikke P	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$	*Partikulært benægtende*

[19][3] pp. 230

1.2 Freges logiske sprog

Gottlob Frege udgav i 1879 bogen *"Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denken"*[20] (Begriffsschrift), hvori han kraftigt udviddede logikkens muligheder, fra det ældre aristoteliske system, ved hjælp af et nyt formelt sprog. Han introducerer en række symboler der skal udtrykke komplekse udsagn og behandler dem ved hjælp af logiske slutninger. Freges formelle sprog slog aldrig an i bredere kredse, men ikke desto mindre indeholder "Begriffsschrift" adskillige filosofiske landevindinger, og vi vil i det følgende beskrive det formelle sprog, samt de slutningsmuligheder det giver.

1.2.1 Det formelle logiske sprog

Frege indfører tegnet $\vdash$, som skal udtrykke en påstand eller dom, og placeres til venstre for indholdet af dommen; $\vdash \Gamma$, hvor Γ er et givent udsagn, efterfølgende benævnt påstandsstregen[21]. Hvis den vandrette streg optræder alene udtrykker den blot ideen om et udsagn der kan dømmes om, uden at dømme om den; $-\Gamma$, som kaldes indholdsstregen[22].

Frege benytter disse tegn til at ophæve den klassiske skelnen mellem prædikat og subjekt i en dom, og hævder at hvis man insisterer på at finde et prædikat kan $\vdash$ læses som prædikatet "det er tilfældet", der lægges til hvert udsagn[23]. Frege gør brug af hvad der kaldes en Philonian betingelse[24], i hans introduktion af det komplekse tegn:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\; \Gamma \\ \;\;\llcorner\; \Delta \end{array}$$

Philo var en stoiker fra antikken der fandt på at undersøge de muligheder der opstår, når to udsagn kombineres som forudsætning og konsekvens. Betingelsen tager udgangspunkt i en liste over de fire muligheder der opstår, når to udsagn, forkortet Γ og Δ, kombineres ud fra hvorvidt de kan bekræftes eller benægtes, med Δ som forudsætning for konsekvensen Γ:

1) Δ bekræftet, Γ bekræftet
2) Δ benægtet, Γ bekræftet
3) Δ bekræftet, Γ benægtet
4) Δ benægtet, Γ benægtet

Ovenstående komplekse tegn skal læses således, at Γ ikke kan benægtes så længe Δ er bekræftet, altså at 3) ikke kan være tilfældet, men en af de tre andre er[25]. Alle senere udvidelser og varianter af dette tegn skal forstås i denne sammenhæng.

Bekræftet og benægtet skal læses som værdierne sand og falsk, og de værdier det komplekse tegn udtrykker, kan lettest anskueliggøres ved hjælp af en sandhedstabel:

---

[20] [4] pp. 436
[21] [6] pp. 31 "Judgement stroke"
[22] [6] pp. 31 "content stroke"
[23] [4] pp. 479
[24] [4] pp. 480
[25] [4] pp. 480

	Δ	Γ	$\vdash\!\!\begin{smallmatrix}\Gamma\\ \llcorner\,\Delta\end{smallmatrix}$
1)	$\top$	$\top$	$\top$
2)	$\bot$	$\top$	$\top$
3)	$\top$	$\bot$	$\bot$
4)	$\bot$	$\bot$	$\top$

| som forbinder Δ med indholdsstregen kaldes betingelsesstregen, og dækker ifølge Frege ikke helt betydningen af "hvis", således at tegnet ikke kan læses som identisk med "hvis Δ så Γ". Dette har dog ingen betydning for vores brug af tegnet i opgaven, og vi vil derfor behandle betingelsesstregen som om den læses "hvis".

Kombineres tegnet med dommen $\vdash \Delta$, som en form for forudsætning, udelukker vi 2) og 4), og har dermed kun mulighed 1) tilbage.

Så hvis en kompleks dom ser således ud:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \llcorner\,\Delta\end{array}$$

Kan man drage en slutning[26]:

$$\frac{\vdash \Delta}{\vdash \Gamma}$$

Således at hvis man har dommen, altså hævder den er sand og dermed udelukker den tredje mulighed i skemaet, og dommen $\vdash \Delta$, som hævder at Δ er sand, kan man slutte $\vdash \Gamma$, at Γ er sand, da den første mulighed i skemaet er den eneste der kan være tilfældet.

Dette kaldes en "detachment slutning", og Frege mener dette er den eneste form for slutning vi skal tillade. Om end der er flere måder at drage slutninger på, så øges chancen for fejl, jo flere slutningsformer vi har. Han hævder at vi kan nøjes med en enkel slutningsform hvis vi har tilstrækkelig med logiske formler som præmisser. Det er klart at det som Frege kalder en detachment slutning, er det der normalt omtales: modus ponens.

Frege indfører negation i sit formelle sprog, således at

$$\vdash\!\!\top\, \Gamma$$

betyder at Γ ikke er tilfældet[27].

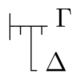
Frege kan nu udtrykke forskellige logiske sammenhænge ved at kombinere sin indholds og betingelsesstreg samt negationen:

$$\vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \llcorner\,\Delta\end{array}$$

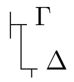
Det er ikke tilfældet at både Γ og Δ.

---

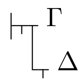
[26][4] pp. 481
[27][4] pp 481



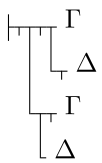
Både Γ og Δ.



Γ eller Δ (inklusivt).



Hverken Γ eller Δ.



Enten Γ eller Δ (eksklusivt)[28].

Frege introducerer et nyt tegn "≡"som skal signalere at to navne, ikke nødvendigvis propositioner, henviser til den samme ting. Navnet på en ting kan havde betydning for hvorledes man tolker indholdet, som i Freges eget eksempel hvor "morgenstjerne" og "aftenstjerne" jo henviser til samme ting, men lægger to forskellige perspektiver på den. Dette har dog ikke betydning i den logiske forstand vi bruger tegnet, da "morgenstjerne" og "aftenstjerne" i dette tilfælde kan skiftes ud uden at medføre et sandhedstab, og vil skrives således; $\vdash (\Gamma \equiv \Delta)$[29].

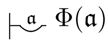
1.2.2 Funktioner og kvantorer

Som nævnt opløser Frege skelnen mellem prædikat og subjekt, hvilket har stor betydning for hans logiske system, og tillader at han kan begynder at dele vores naturlige sprog op i argument og funktion. Argumentet er det der kan skiftes ud i en sætning, eks: "Torben er tungere end Stig", hvor man kan gøre Stig til et argument i funktionen "Torben er tungere end ..." og indsætte et hvilken som helst argument i funktion. Man kan også gøre Torben til argumentet og få funktionen "... er tungere end Stig", eller både Torben og Stig så funktionen er "... er tungere end ...".

Dissee skriver han således: $\Phi(t)$ for at beskrive en tilfældig funktion Φ med argumentet t (Torben), og $\Psi(t, s)$ er en funktion med to argumenter. Hvis funktion og argument udtrykker en dom skrives det $\vdash \Phi(t)$, hvilket læses som, at t har egenskaben Φ, og $\vdash \Psi(t, s)$ læses som, at t står i forholdet Ψ til s, hvad der også kaldes to-plads prædikater[30].

[28] [4] pp. 482
[29] [4] pp 483
[30] [4] pp. 484
Det skal bemærkes at Frege selv gør brug af tegnene Γ og Δ, som argumenter i funktionen, men dette antyder inddragelse af højere ordens prædikatlogik, hvilket vi ikke beskæftiger os med i dette projekt, hvorfor vi holder os til navne.

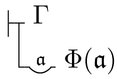
Dette kombineres med det gotiske bogstav $\mathfrak{a}$ der indtager argumentpladsen i ovenstående funktion, og som skal læses i betydningen alting der giver mening at indsætte i funktionen så en dom kan formes, og som i senere logik og i resten af vores opgave kaldes universalkvantoren. Samtidigt kan $\mathfrak{a}$ også indsættes i en bule på påstandsstregen, og på den måde binde variablen til universalkvantoren, og dermed er Frege nået frem de bundne variabler, hvilket har stor betydning for hvad man kan udtrykke med hans logiske sprog. Symbolet skrives således, hvor Φ er en given funktion[31]:



Dette giver adskillige nye muligheder da $\mathfrak{a}$ ikke er bundet til at være placeret umiddelbart efter påstandsstregen, men kan placeres efter f.eks. en negations streg, hvilket betyder at der er noget der ikke tilfredsstiller den følgende funktion. Hvis man så placerer en negations streg mere, efter den universelle kvantor siger man der er noget som tilfredsstiller funktionen, men ikke alt; hvilket udtrykkes af nedenstående komplekse tegn[32]:

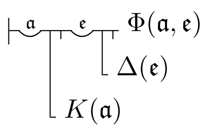
Dette kaldes også en eksistenskvantor i moderne logik.

$\mathfrak{a}$ kan også placeres i betingelsen for en dom:



der udtrykker et udsagn som "If everything is wet, we cannot light a fire"[33].

Indførelsen af endnu en universel kvantor, giver endnu større mulighed for at udtrykke komplekse udsagn som "Every cat fears some dog"[34] hvilket følgende komplekse tegn udtrykker[35]:



Bruges der flere kvantorer i et udsagn skal man være forsigtig med at udskifte dem med hinanden, da de kan få en særlig betydning efter hvor de står i udsagnet kan det blive nonsens hvis de bytter plads[36].

Kvantoren kan stå alle steder i udsagnet, men Frege lægger særlig vægt på de tilfælde hvor den står først, da de tillader erstatning, de er universelle og dækker hele udsagnet, derfor kan alle mere specifikke udsagn erstatte kvantoren.

For at markere og simplificere kan man i de tilfælde der tillader erstatning skrive; $\vdash \Phi(a)$ dette kan gøres i de tilfælde hvor den universelle kvantor har hele udtrykket i sit omfang. Udtrykket kan skiftes tilbage til $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$, hvis man sikrer sig at dette ikke skaber konflikt med allerede brugte kvantorer i et udsagn.

Brugen af bundne variabler tillader, at de variabler der optræder i et udsagn, i modsætning til tidligere logik, ikke udtrykker en universalitet for et helt

[31][4] pp. 485
[32][4] pp. 486
[33]Citat: [4] pp. 486
[34]Citat: [4] pp. 486
[35][4] pp. 486
[36][4] pp. 487

udsagn, men kun inden for en afgrænset del af det, altså forskellige niveauer af universalitet i et udsagn[37].

1.2.3 Deduktion og slutninger i det formelle sprog

Med det logiske sprog på plads, er det tid til at deducere, og opstille regler for logikken gennem et deduktivt system. Dette gør Frege ved at antage ni aksiomer, der tilsammen udgør principperne for logikken. De første tre omhandler påstandsstregens udtryk, de næste tre negation, to indholdsidentitet og endeligt, én, universalitet[38]. Deduktion i Freges logiske system sker med hans ni aksiomer som grundlag, og fire forskellige deduktions former, hvoraf detachment (modus ponens) er den primære, mens substitution optræder implicit. En tredje regel er den allerede nævnte mulighed, for at erstatte en universal kvantor i en bule med $\vdash \Phi(a)$, og omvendt. En lignende regel er, muligheden for at erstatte en fri variabel a i et udtryk med en bunden; således[39]:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, \Phi(a) \\ \;\;\llcorner\, \Gamma \end{array}$$

Kan ifølge reglen deduceres til:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\, \Phi(\mathfrak{a}) \\ \;\;\llcorner\, \Gamma \end{array}$$

Når Frege har præsenteret et aksiom undersøger han de logiske konsekvenser af dette ved eksempler, og indfører så det næste aksiom når han har udtømt dem. De foregående aksiomer og konsekvenser indgår også i videre beregninger, og på den måde udvikler han adskillige eksempler på deduktioner.

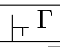
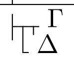
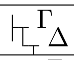
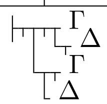
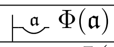
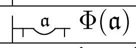
Det bliver, af praktiske årsager, nødvendigt for Frege at indføre et tegn for definition med henblik på at forkorte hans notation. Dette symbol er $\Vdash$ og bruges, $\Vdash \Gamma \equiv \Delta$, for at vise, at to symboler eller komplekse udsagn er logisk ækvivalente. Dette skal ikke betragtes som domme, men konventioner for symboler og bliver nødvendigt da hans notationsform er meget omstændig[40]. Hvilket da også en af grundene til at vi har valgt at oversætte hans notation til et moderne udsagnslogisk sprog.

1.2.4 Oversættelse af Frege-notation til moderne udsagnslogisk sprog

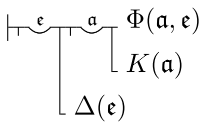
I det følgende vil vi oversætte de relevante dele af Freges logiske sprog, til det mere gængse moderne udsagnslogiske sprog, da dette er lettere at arbejde med, og muliggør en sammenligning med Aristoteles syllogismelære, som også tidligere er formuleret i samme logiske sprog.

Det følgende skema viser nogle af de mere grundlæggende symboler der erstatter Freges komplekse figurer:

[37] [4] pp. 488
[38] [4] pp. 488
[39] [4] pp. 489
[40] [4] pp. 492

Normalsproglig betydning	Frege notation	Moderne udsagnslogisk notation
Γ er tilfældet		Γ
Hvis Δ så Γ		$\Delta \rightarrow \Gamma$
Det er ikke tilfældet at Γ		$\neg\Gamma$
Det er ikke tilfældet at både Γ og Δ		$\neg(\Gamma \wedge \Delta)$
Γ og Δ		$\Gamma \wedge \Delta$
Γ eller Δ (inklusivt)		$\Gamma \vee \Delta$
Hverken Γ eller Δ		$\neg\Gamma \vee \Delta$
Enten Γ eller Δ (eksklusivt)		$\Gamma \veebar \Delta$
Universalkvantor		$\forall x(S(x))$
Eksistenskvantor		$\exists x(S(x))$

Et eksempel på en oversættelse af Frege notation til en moderne udsagnslogisk notation, kan være det komplekse udtryk "Der er en hund alle katte frygter":



Hvilket kan oversættes til: $\exists x \forall y[P(x) \wedge (P(x) \rightarrow S(x,y))]$.

2 Problematisering af Aristoteles syllogismelære

2.1 Begrænsning i udtrykket i syllogismelæren

Aristoteles havde ikke et fuldt udviklet logisk sprog til sin rådighed, hvilket begrænser noget ham i hvad han kan udtrykke logisk. En af begrænsningerne i udtrykket hos Aristoteles er i brugen af kvantorer. De forskellige sætningsformer Aristoteles benytter i oppositionskvadratet, er begrænset til en kvantor. Der optræder som nævnt de fire muligheder (universelt bekræftende/benægtende og partikulært bekræftende/benægtende), der benyttes som kvantorer i præmisser i og konklusion i en syllogisme. Det som der ikke er mulighed for i præmissen i en syllogisme er brugen af to eller flere kvantorer, så mens en præmis kan lyde "alle nisser er små", kan der ikke udtrykkes "alle nisser er glade for noget mad". Som vi så i afsnit 1.1.3, kan førstnævnte skrives således; $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$. Her ses det tydeligt at hele udsagnet er underlagt den universelle kvantors omfang, mens sidstnævnte sætning, der kan skrives således; $\forall x \exists y(N(x) \rightarrow (M(y) \wedge G(x,y)))$[41], gør brug af to kvantorer med hver deres omfang, henholdsvis x og y.

En anden svaghed ved syllogismelæren er at sætningerne kun tillader en konstruktion, hvor subjekt og prædikat bliver bundet sammen af "er". En sætning som eksempelvis "alle nisser elsker risengrød", kan ikke direkte udtrykkes som en præmis eller konklusion i en syllogisme, uden en besynderlig omskrivning som eksempelvis "alle nisser er risengrøds-elskende". Det hænger igen sammen med syllogismens form, der tillægger et subjekt et prædikat, og ikke udtrykker noget andet forhold mellem to objekter, som f.eks. elske, hade, frygte, større, tungere, osv. Det at subjekt og prædikat bliver bundet sammen af "er" gør det også umuligt at konstruere sætninger hvori der indgår to kvantorer, som beskrevet ovenfor. Man kan ikke formulere en sætning i stilen "alle mennesker er nogen dødelige". Rent formelt er man altså udelukket fra at binde prædikater til en kvantor i den Aristoteliske logik.

Stoikerne udviklede i antikken en sætningslogik, der i mange år blev betragtet som adskilt fra syllogismelæren, og på sin vis i konkurrence med den[42]. Et eksempel herfra er modus ponens. Syllogismelæren handler om subjekter og prædikater, og er derfor ikke på samme måde som sætningslogikken i stand til at udtrykke forholdet mellem sætninger som "hvis månen er i kredsløb om jorden, så vil der opstå solformørkelser; månen er i omkreds om jorden; ergo opstår solformørkelser". Formaliseret:

$A \rightarrow B$

A

$\therefore B$

Dette er en relation, der ikke på samme måde som i en syllogisme, er afhængigt af forholdet mellem subjekt og prædikat, men handler om forholdet mellem atomare udsagn.

[41]hvor N er nisse; M, mad og G to-plads prædikatet "... glad for ..."

[42][6] pp. 26

2.2 Problemer vedrørende det logiske oppositionskvadrat

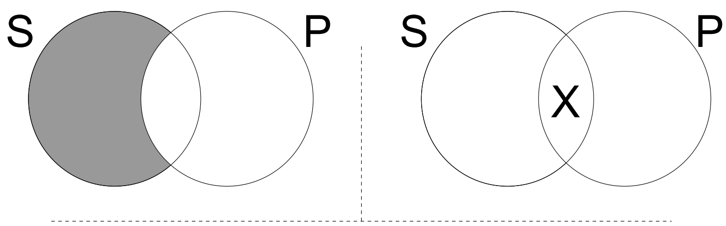
Aristoteles benytter sig af forholdet mellem de forskellige sætningsformer i det logiske oppositionskvadrat, når han skal beregne gyldigheden ved en syllogisme. Eksempelvis har vi påvist hvordan hævdelsen af præmisserne *og* negationen af konklusionen medfører en kontradiktion, så kan der sluttes at argumentet fra præmisserne til konklusionen er gyldigt. Aristoteles udnytter den egenskab ved kontradiktioner, at de definerer hinanden på en sådan måde at hvis kontradiktionen af et udsagn er falsk, så må udsagnet være sandt. På samme måde benytter Aristoteles sig af de andre relationer mellem udsagn i oppositionskvadratet, henholdsvis kontrærere, subkontrærere og subalterne, når han foretager sine beregninger af gyldighed.

Problemet er blot, at man kan påvise, at disse tre relationer ikke er gyldige, hvilket vi vil gøre i det følgende ved hjælp af Venn-diagrammer og semantiske tableauer.

2.2.1 Afprøvning af de subalterne forhold

Det som Aristoteles mangler i sin brug af relationerne mellem de fire typer udsagn (A, E, I, O), er konceptet om tomme mængder.

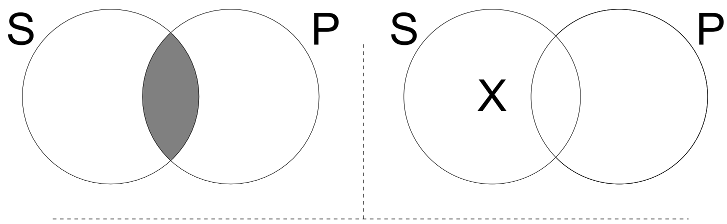
I den subalterne relation, mellem universelt bekræftende og partikulært bekræftende, hævder Aristoteles, at man kan slutte fra alle til nogen. Eksempelvis "alle heste er firbenede", som implicerer "nogle heste er firbenede". Men hvis den første mængde er tom får man et problem i slutningen. Dette forhold kan ses af disse to Venn-diagrammer:



Figur 3.1

Figur 3.1 kunne f.eks. illustrere forholdet mellem sætningerne "alle nisser er små" (venstre del) til "nogle nisser er små" (højre del), mængden "alle nisser ..." referer til en mængde der godt kan være tom, men mængden "nogle nisser ... ", referer til en mængde hvori der mindst er en nisse - som er lille.

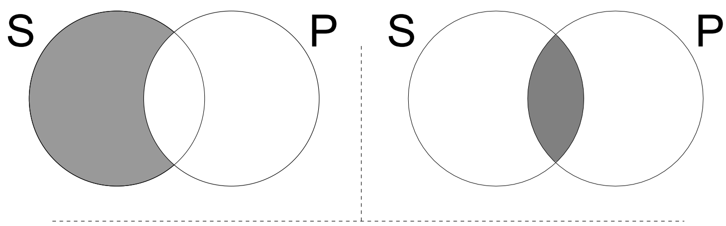
Samme problematik finder vi i den anden subalterne relation, som går fra universelt benægtende til partikulært benægtende, eksempelvis sætningen "ingen nisser er store", der ikke siger noget om hvorvidt der findes nisser, så derfor er det ugyldigt at slutte til at "nogen nisser er ikke store", for dermed siger man netop at der findes nogen nisser - som ikke er store. Dette bliver da også klart hvis man betragter figur 3.2.



Figur 3.2

2.2.2 Afprøvning af de kontrære og subkontrære forhold

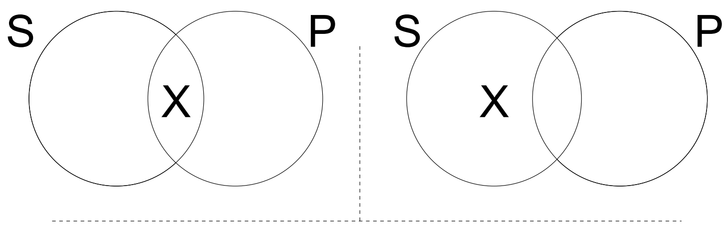
Forholdet mellem A- og E-domme siges at være kontrært, hvilket, som tidligere nævnt, vil sige at de kan være falske på samme tid, men ikke sande. Dette kan også ses af nedenstående Venn-diagram.



Figur 3.3

Til venstre i figur 3.3 ses udtrykket "alle S er P" og til højre "ingen S er P". Hvis mængden S er tom, kan begge dele af den udfyldes, uden det går ud over nogen instanser af S, hvorfor de to udtryk både kan være sande og falske samtidigt. Når dette er tilfældet kan de to udsagn altså ikke være kontrære.

På samme vis gør det sig gældende for det subkontrære forhold mellem "nogle S er P" og "nogle S er ikke P". Disse hævdes ikke at kunne være falske samtidigt.



Figur 3.4

Måden hvorpå disse to sætninger kan gøres falske samtidigt, er at afvise muligheden af S. Hvis man gør dette vil der hverken være en instans, som angivet i venstre eller højre del af figur 3.4. Derfor kan også det subkontrære forhold fra det logiske oppositionskvadrat afvises.

2.2.3 Afprøvning af de kontradiktoriske forhold

Lige som det med Venn-diagrammerne var muligt at refutere det kontrære forhold mellem A- og E-sætninger, de subkontrære forhold mellem I- og O-sætninger og de subalterne forhold mellem A- og I-sætninger og E- og O-sætninger, er det målet for dette afsnit af efterprøve de kontradiktoriske forhold mellem A- og O-sætninger og E- og I-sætninger. Midlet til dette er blot semantiske tableauer.

For at efterprøve om de kontradiktoriske relationer holder, må der først laves et semantisk tableau for $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$ og $\exists x(S(x) \wedge P(x))$ for at se om de kan være sande på samme tid og dernæst deres respektive negationer for at se om de kan være falske på samme tid. Er dette ikke tilfældet er de to udsagn kontradiktoriske.

Først $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$ og $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$.

$$
\begin{array}{lccc}
1 & & \forall x(S(x) \rightarrow P(x)) & \\
2 & & \exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) & \\
 & & | & \\
3 & & S(a) \wedge \neg P(a) & \\
 & & | & \\
4 & & S(a) & \\
 & & \neg P(a) & \\
 & & | & \\
5 & & S(a) \rightarrow P(a) & \\
 & / & & \backslash \\
6 & \neg S(a) & & P(a) \\
 & \times & & \times
\end{array}
$$

Her lukker begge grene, hvorfor de to udsagn ikke kan være tilfældet samtidigt[43]. Herefter skal negationerne af de to udsagn efterprøves.

$$
\begin{array}{lccc}
1 & & \neg\forall x(S(x) \rightarrow P(x)) & \\
2 & & \neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) & \\
 & & | & \\
3 & & \exists x\neg(S(x) \rightarrow P(x)) & \\
4 & & \forall x\neg(S(x) \wedge \neg P(x)) & \\
 & & | & \\
5 & & \neg(S(a) \rightarrow P(a)) & \\
 & & | & \\
6 & & S(a) & \\
 & & \neg P(a) & \\
 & & | & \\
7 & & \neg(S(a) \wedge \neg P(a)) & \\
 & / & & \backslash \\
8 & \neg S(a) & & P(a) \\
 & \times & & \times
\end{array}
$$

Også her lukker det semantiske tableau[44]. Dette betyder at forholdet mellem sætningstyperne "alle ... er ..." ($\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$) og "nogle ... er ikke ..."

[43] Linie 1 og 2 angiver de sætninger der er mål for undersøgelsen. Linie 3 angiver reslultatet af $\exists$-reglen på 2; og 4 er resultatet af $\wedge$-reglen på 3. Linie 5 er resultatet af $\forall$-reglen på 1; og linie 6 er resultatet af $\rightarrow$-reglen på 5.

[44] Linie 1 og 2 er negationerne af de oprindelige sætninger. 3 er resultatet af $\neg\forall$-reglen på 1;

$(\exists x(S(x) \land \neg P(x)))$ er bevist kontradiktoriske, da de hverken kan være sande eller falske på samme tid.

Det samme skal så gøres for udsagnene $\forall x(S(x) \to \neg P(x))$ og $\exists x(S(x) \land P(x))$.

$$
\begin{array}{lccc}
1 & & \forall x(S(x) \to \neg P(x)) & \\
2 & & \exists x(S(x) \land P(x)) & \\
 & & | & \\
3 & & S(a) \to \neg P(a) & \\
 & & | & \\
4 & & S(a) \land P(a) & \\
 & / & & \backslash \\
5 & \neg S(a) & & \neg P(a) \\
 & | & & | \\
6 & S(a) & & S(a) \\
 & P(a) & & P(a) \\
 & \times & & \times
\end{array}
$$

Her lukker alle grenene, hvorfor det er bevist at de to udsagn ikke kan være sande samtidigt[45]. Således kan vi, ligesom før, fortsætte med at efterprøve om de to sætninger kan være falske på samme tid. For at gøre dette skal de to udsagn negeres, hvilket gøres således: $\neg\forall x(S(x) \to \neg P(x))$ og $\neg\exists x(S(x) \land P(x))$.

$$
\begin{array}{lccc}
1 & & \neg\forall x(S(x) \to \neg P(x)) & \\
2 & & \neg\exists x(S(x) \land P(x)) & \\
 & & | & \\
3 & & \exists x\neg(S(x) \to \neg P(x)) & \\
4 & & \forall x\neg(S(x) \land P(x)) & \\
 & & | & \\
5 & & \neg(S(a) \to \neg P(a)) & \\
 & & | & \\
6 & & \neg(S(a) \land P(a)) & \\
 & / & & \backslash \\
7 & S(a) & & P(a) \\
 & | & & | \\
8 & \neg S(a) & & \neg S(a) \\
 & \neg P(a) & & \neg P(a) \\
 & \times & & \times
\end{array}
$$

Også her lukker begge grene[46]. Dermed er det bevist at sætningerne "ingen ... er ..." og "nogle ... er ... " er kondradiktoriske.

Således kan de semantiske tableauer bruges, i stil med Venn-diagrammerne, til at efterprøve Aristoteles syllogismelære og det er nu vist at de eneste forhold

---

4 er resultatet af $\neg\exists$-reglen på 2. 5. er resultatet af $\exists$-reglen på 3; 6 er resultatet af $\neg\ \to$-reglen. 7 er resultatet af $\forall$-reglen på 4 og 8 er resultatet af $\neg\land$-reglen på 7 (og derefter ophævelsen af en dobbelt $\neg$).

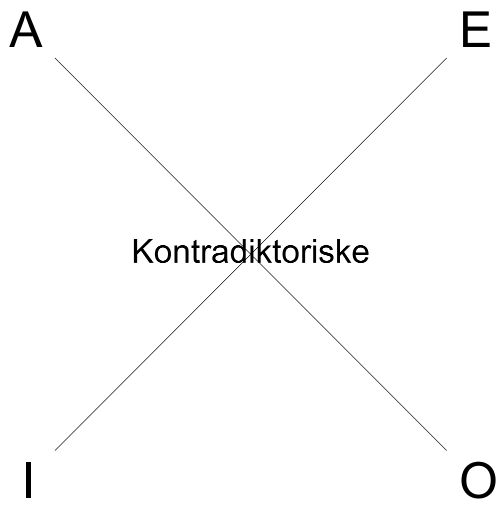
[45] 1 og 2 er de sætninger der er mål for undersøgelsen. 3 er resultatet af $\forall$-reglen på 1 og 4 resultatet af $\exists$-reglen på 2. 5 er resultatet af $\to$-reglen på 3; 6 resultatet af $\land$-reglen på 4.

[46] Linie 1 og 2 er negationerne af de oprindelige sætninger. 3 er resultatet af $\neg\forall$-reglen på 1 og 4 er resultatet af $\neg\exists$-reglen på 2. 5 er resultatet af $\exists$-reglen på 3 og 6 resultatet af $\forall$-reglen på 4. 7 er resultatet er resultatet af $\neg\land$-reglen på 6 (og derefter ophævelsen af en dobbelt $\neg$). Endeligt er 8 resultatet af $\neg\ \to$-reglen på 5.

der holder i det logiske oppositionskvadrat, som det blev præsenteret i afsnit 1.1.1 er de konktradiktoriske.

2.2.4 Det reviderede logiske oppositionskvadrat

Derfor vil det reviderede logiske oppositionskvadrat se således ud:



Figur 3.5

Her er de kontrære, subkontrære og subalterne forhold barberet væk. De eneste forhold der holder ved nærmere eftersyn er de kontradiktoriske forhold.

Dette får betydning alle de steder hvor Aristoteles slutter fra det universelle til det partikulære, altså benytter de subalterne relationer. Ydermere har dette har også betydning når han benytter sig af de kontrære og subkontrære relationer.

Grunden til at Aristoteles går galt mht. tomme mængder i forhold til det logiske oppositionskvadrat kan være pga. af hans metafysik og dermed hans syn på forholdet mellem prædikater og deres respektive subjekter. Han mener at et prædikat kun kan siges at tilhøre en ting, subjekt eller substans, hvis denne virkeligt eksisterer. Eksistensen af en ting går så at sige forud for dens egenskaber.

> "That is, each non-substance [prædikat] "is in something, not as a part, and cannot exist seperately from what it is in" (*Cat.* 1a25). Indeed, it becomes clear that substances are the subjects that these ontologically dependant non-substances are 'in'."[47]

Et prædikat kan dog godt optræde som subjekt, og dermed substans, i en anden sætning. Men inden for den enkelte sætning har prædikatet ikke nogen eksistensberettigelse alene.

[47] [8]

2.2.5 Afrunding af problematisering af Aristoteles ved Frege

Som vi viste i foregående afsnit, er de fire slutninger fra det logiske oppositionskvadrat som Aristoteles benytter sig af, de kontrærere, subkontrærere og to subalterne, ugyldige. Spørgsmålet er så, hvorvidt Frege benytter sig af disse slutninger, og dermed falder i samme fælde som Aristoteles?

Umiddelbart lader det ikke til at være tilfældet, da Frege primært benytter sig af modus ponens, som betragtes som en gyldig slutningsform, der brugt korrekt ikke burde lede ham til at foretage ugyldige slutninger. Problemet består således i, at Aristoteles også benytter sig af modus ponens som slutningsform i sine syllogismer, om end ubevidst, da modus ponens som vi kender den ikke er formuleret eksplicit på hans tid. Dette ses hvis man formulerer syllogismen i moderne logisk sprog, og regner på dens gyldighed, så finder man ud af at slutningen er baseret på en modus ponens. Aristoteles benytter dog i kombination med denne implicitte modus ponens, de ugyldige slutninger fra det logiske oppositionskvadrat, hvorfor brugen af modus ponens i sig selv, ikke er nogen garanti for at undgå fejlslutninger.

Derfor bliver det nødvendigt at kigge på hvor specifikt Aristoteles gik galt, for at finde ud af om Frege gør det samme, og der ses det at Aristoteles som tidligere nævnt ikke tager højde for muligheden af tomme mængder. Spørgsmålet bliver dermed, om hvorvidt Frege er bevidst om muligheden af tomme mængder?

Dette er svært at sige med sikkerhed, da der er tvivl om præcist hvornår man tilbageviste de ugyldige slutninger i det logiske oppositionskvadrat[48], der er dog forskellige tegn på at Frege har været bevidst om tomme mængder. For det første kan man argumentere for at tanken lå i tiden, idet John Venn (1834-1923)[49] i 1880, et år efter "Begriffsschrift", introducerede Venn-diagrammerne, som vi også benytter i vores opgave. Det virker sandsynligt at Frege har holdt sig ajour med den logiske udvikling i Europa, og dermed har været opmærksom på nogle af de tanker der ligger bag Venn-diagrammerne. For det andet kan man fremføre Freges arbejde med numre, især i *"Die Grundlagen der Arithmetik: eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl"* der udkom i 1884[50], hvori han definerer numre som begreber og blandt andet diskuterer tallet 0:

> "If I say 'Venus has 0 moons', there simply does not exist any moon or agglomeration of moons for anything to be asserted of; but what happens is that a property is assigned to the concept 'moons of Venus', namely that of including nothing under it."[51]

Selv om dette citat stammer fra et værk der udkommer fem år efter "Begriffsschrift", ligger kimen til disse tanker dog allerede deri, og gør Freges kendskab til tomme mængder sandsynligt. Endeligt kan man fremføre at Aristoteles metafysik, som beskrevet i foregående afsnit, havde en vis indflydelse på hans logik. Frege er ikke bundet af samme metafysik, og er derfor ikke i samme grad tilbøjelig til at antage eksistensen af de ting der benævnes i logikken.

Grundet ovenstående argumenter virker det usandsynligt at Frege skulle havde foretaget fejlslutninger af samme type som Aristoteles, som er baseret på

[48] [7]
[49] [3] pp. 234
[50] [5] pp. 6
[51] Citat: [5] pp. 101.
Det er klart at Freges teori om numre som begreber har mange implikationer, vi begrænser os dog til at bruge citatet til at undersøge Freges bevidsthed om tomme mængder.

fraværet af erkendelsen af tomme mængder.

Problematiseringen af Aristoteles syllogismelære, viste os at der var store begrænsning i hvad der kan udtrykkes i præmisserne og konklusionen i en syllogisme. Det var problemer med brugen af flere kvantorer i en sætning, samt to-plads prædikater, der begrænsede Aristoteles udtryk.

Introduktionen af flere kvantorer med forskelligt omfang i et udtryk, samt opløsningen af subjekt/prædikat måden at beskrive en sætning, til fordel for funktion/argument, er netop betragtet som nogle af Freges største bidrag til logikken. Brugen af funktioner tillader Frege at benytte to-plads prædikater, hvilket hænger sammen med hans opdagelse af bundne variabler i flere forskellige kvantorers omfang. Det vil sige at han i stedet for at betragte en vilkårlig sætning som "alle nisser er små" som et subjekt og prædikat, betragter det som to prædikater i en funktion "er", der kunne repræsenteres således $f(x,y)$

Det er fordi Frege ser en sætning som et antal prædikater forbundet af en funktion, at han kan tilskrive forskellige kvantorer til de forskellige prædikater. Han binder funktionens forskellige variabler til forskellige kvantorer, enten universelle eller partikulære. Som vi har set, kan Frege med brugen af bundne variabler udtrykke langt mere komplekse udtryk end Aristoteles kunne, med sine sætninger baseret på subjekt/prædikat-opstillingen.

Brugen af funktioner tillader også Frege at beskrive andre forhold end Aristoteles kunne i sine kategoriske sætninger. Mens Aristoteles holdt sig til "er" for at prædikere et subjekt, så kan Frege udtrykke mange andre forhold mellem prædikaterne, som eks. elsker, hader, tungere, o.s.v. Et andet eksempel er relationer som "mindre end", hvilket Aristoteles med lidt god vilje godt kan udtrykke, men som han ikke kan drage de samme slutninger fra som Frege. En syllogisme som "Alle S er mindre end M; alle M er mindre end P; alle S er mindre end P"er ikke mulig, selvom det umiddelbart ser sådan ud, selv hvis man indfører den præmis at egenskaben "mindre end" er transitiv. Problemet er at prædikatet i første præmis ikke er M, men "mindre end M", hvilket vi kan kalde X, og prædikatet i anden præmis er "mindre end P", hvilket vi kan kalde Y, og så lyder syllogismen "Alle S er X; alle M er Y; alle S er Y", hvilket de færreste vil godtage som en gyldig slutning. Til gengæld kan ovenstående udmærket udtrykkes ved hjælp af funktioner og argumenter; $\forall x, \forall y, \forall z[(f(x,y) \wedge f(y,z)) \rightarrow f(x,z)]$, hvor f udtrykker relationen "mindre end" og så fremt $x \neq y \neq z$ gælder. Problemet er bare at f kan udtrykke et hvilket som helst forhold; og hvis man sætter begrebet "elsker" ind, giver udsagnet ikke længere mening. Man kan selvfølgelig vedtage at f kun kan udtrykke en transitiv relation, men man kan også indføre et tegn for "mindre end" f.eks $<$, og dermed kan udsagnet formuleres; $\forall x, \forall y, \forall z[((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow (x < z)]$ igen under forudsætning af at $x \neq y \neq z$ gælder.

Freges formulering af udsagnet vil nok ligge tættere på det første logisk formulerede udsagn, idet han ikke har et specifikt tegn for relationen "mindre end", ikke desto mindre kan han altså i modsætning til Aristoteles formulere det i et logisk gyldig udtryk.

Det har altså vist sig at Freges logiske system væsentligt udvider hvad der kan udtrykkes, grundet indførelsen af flere kvantorer med forskelligt omfang for forskellige bundne variabler, hvilket var gjort muligt ved en indførelse af funktions/argument måden at udtrykke en sætning, som også medførte muligheden for at udtrykke forskellige relationer mellem argumenterne via funktionen.

3 Konklusion

Vi har vist hvorledes Aristoteles syllogismelære kommer i problemer på to forskellige punkter;

1) i en begrænsning af hvad der kan udtrykkes inden for hans logik, og
2) i gyldigheden af en række af hans slutninger.

Samtidigt er det blevet klart ved en undersøgelse af det logiske system der kommer til syne i Freges debutværk "Begreiffssrift", at han løser begge disse problemer ved hjælp af sit logiske sprogs notation, og hans slutningsregler.

Begrænsningerne i sproget blev løst ved at opløse prædikat/subjekt synet på en sætning til en funktion og argumenter, hvilket gav muligheden for at indføre bundene variabler med forskelligt omfang. Den fejlagtige slutningsform er højest sandsynligt ikke et problem, da den bunder i hvorvidt man er bevidst om tomme mængder, hvilket meget tyder på at Frege var.

I et mere filosofihistorisk perspektiv kan man hævde at Frege, med sine tilføjelser til logikken, har været med til at skabe grundlag for den moderne logik. En del af hans notation har sågar overlevet, stort set uændret. Men vigtigere endnu er det, at han har bidraget til en matematisering af logikken, hvilket har hjulpet til at gøre logikken beregnbar, om end hans notationsform er noget omstændig.

4 Formalia

4.1 Litteraturliste

Litteratur

Bøger

[1] Aristotle: *Prior Analytics*, Hackett Publishing, Indianapolis (1989), ISBN: 0-87220-065-5.

[2] J. Barnes et al. (Red.): *Cambridge Companion to Aristotle*, Cambridge University Press, New York (1995), ISBN: 0-521-41133-5.

[3] Hendricks et al.: *Moderne Elementær Logik*, Høst og Søns Forlag, København (2002), ISBN: 87-14-29744-2.

[4] Kneale et al.: *The Development of Logic*, 5.udgave, Oxford University Press, London (1971).

[5] H. W. Noonan: *Frege -A Critical Introduction*, Polity Press, Cambridge (2001), ISBN: 0-7456-1673-9.

[6] J. Weiner: *Frege*, Oxford University Press, Reading (1999), ISBN: 0-19-287695-3.

Internet

Stanford Encylopedia of Philosophy
Edward N. Zalta (Red.)

[7] Opslag v. T. Parson: *The Traditional Square of Opposition* URL: "http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/square/", d. 17/12-2005.

[8] Opslag v. M. S. Cohen: *Aristotle's Metaphysics* URL: "http://plato.stanford.edu/archives/win2003/entries/aristotle-metaphysics/", d. 17/12-2005.

4.2 Resumé

Opgavens mål er at undersøge Aristoteles syllogismelære og se hvilke problemer der kan opstå.

Dette er gjort vha. en redegørelse for syllogismelæren og Freges logiske system, hvorefter der er en problematisering af de metoder som Aristoteles benytter i *Analytica Priori*. Endeligt bruges Freges system, som det bliver fremsat i *Begriffsschrift*, til at vise hvorledes disse problemer kan overkommes.