GENERALIZAR ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO: UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO RELACIONAL DE ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE[1]

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto da Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Nesta comunicação apresenta-se um estudo que integra uma investigação mais ampla em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade, através da realização de uma experiência de ensino. O objectivo desta comunicação é analisar como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização e para a sua expressão em linguagem natural, e ainda para a iniciação de um percurso em direcção à simbolização. A análise de dados incide sobre a realização de duas tarefas em aula. Os resultados preliminares indicam que os alunos conseguem reconhecer as relações numéricas e as propriedades das operações envolvidas em expressões numéricas particulares e que conseguem descrever a generalização em linguagem natural, iniciando ainda um percurso em direcção à linguagem simbólica.

Palavras-Chave: early algebra, pensamento algébrico, generalização, simbolização, pensamento quase-variável

Introdução

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), considera como um dos quatro eixos fundamentais do ensino-aprendizagem o

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008)

desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Diversas investigações internacionais mostram como, desde cedo, pode ser construída uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas e também na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função. Neste sentido, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) considera a Álgebra como um *fio condutor curricular* desde os primeiros anos de escolaridade e que esta pode contribuir para unificar o currículo da Matemática.

O trabalho de investigação em curso, no qual se integra esta comunicação, tem como objectivo geral compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Em particular, esta comunicação tem como objectivo analisar como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização e para a sua expressão em linguagem natural, possibilitando ainda uma iniciação à linguagem simbólica.

O pensamento algébrico e a aritmética

O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005). Também Ponte, Branco & Matos (2009) assinalam a generalização como um elemento central do pensamento algébrico e salientam que as tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstracção, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático. Para Mason (1996) uma das formas de desenvolver essa capacidade de generalização é sensibilizar para a distinção entre olhar para e olhar através, conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular. A generalização pode ser expressa de diversas formas. Inicialmente, as crianças podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

Uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada. Isso implica a construção da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades e inclui ainda a noção de equivalência associada ao sinal de igual (=). Carpenter *et al.* (2003) reconhecem essas ideias como o pensamento relacional, isto é, a capacidade de olhar para expressões ou equações na sua concepção mais ampla, revelando as relações existentes nessas expressões ou equações. Para ilustrar o que pretendem dizer com pensamento relacional, Carpenter *et al.* (2005) usam a igualdade numérica seguinte: 8+4=__+5. Para resolvê-la, os alunos podem adicionar 8 e 4 e depois pensar em quanto têm de adicionar a 5 para obter 12. No entanto, o processo usado, ainda que válido, não tem em conta a relação entre os números envolvidos. O aluno que apreenda a expressão no seu todo pode considerar que 5 é mais um do que 4 e, por isso, o número a colocar no espaço em branco será menos um do que 8, usando a seguinte relação: 8+4 = (7+1)+4 = 7+(1+4).

A aritmética tem sido, ao longo dos tempos, o tema com maior incidência no currículo da escola elementar, no entanto, torna-se necessário reconsiderar o modo como, habitualmente, tem sido ensinada e o seu papel na formação matemática das crianças. Numa perspectiva tradicional do ensino da Matemática tem existido uma preocupação quase exclusiva com o cálculo, e, nesta perspectiva, o propósito é operacionalizar um conjunto de números a partir de um conjunto de passos para gerar um único número, que é a resposta pretendida. Numa perspectiva mais algébrica, por outro lado, o foco desloca-se para as relações numéricas. Carpenter *et al.* (2003), por exemplo, referem que a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a Matemática, nos primeiros anos, e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados.

De acordo com Fujii e Stephens (2008), a utilização de expressões numéricas generalizáveis pode providenciar uma ponte importante entre a aritmética e o pensamento algébrico. De acordo com estes autores, as explicações gerais dos estudantes sobre o porquê da veracidade da expressão numérica 78 - 49 + 49 = 78 e a sua capacidade de usar exemplos específicos daquilo que mais tarde será uma relação geral (a - b + b = a) podem ser descritas como o pensamento quase – variável. A expressão quase-variável significa um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Desta forma, os alunos podem usar expressões numéricas generalizáveis, centrando a atenção na estrutura dessas expressões, e identificar e discutir a generalização algébrica antes da introdução da simbologia algébrica formal.

Metodologia do estudo

Os resultados apresentados nesta comunicação inserem-se num estudo mais amplo, de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), ainda em fase inicial. O design do estudo segue de perto o que Gravemeijer e Cobb (2006) denominam como experiência de ensino em sala de aula, em que se propõem tarefas que pretendem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade.

Esta comunicação foca-se na análise de duas tarefas específicas, envolvendo estratégias de cálculo a partir da exploração de expressões numéricas particulares. Para recolha dos dados foram gravadas em formato vídeo as duas aulas em que os alunos realizaram as tarefas e analisados os momentos de discussão colectiva. Também foram usadas para análise as fichas de trabalho dos alunos. As aulas da experiência de ensino foram dinamizadas pela investigadora deste estudo (primeira autora desta comunicação) e a professora titular de turma assumiu um papel de coadjuvante. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto directo com a professora e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projectos.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorre durante o presente ano lectivo e as tarefas exploradas têm como base os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspectiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, foram propostas, até ao momento, catorze tarefas, inseridas nos tópicos "múltiplos e divisores" e "operações com números naturais”, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007).

As tarefas realizadas na experiência de ensino centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. A exploração destas tarefas tinha como objectivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direcção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. As tarefas que servem de base a esta comunicação (12.ª e 14.ª) apresentam o contexto de estratégias de cálculo com relações numéricas particulares (dobro e metade) onde se explora a expressão da generalização em linguagem natural e a sua tradução para a linguagem simbólica.

Apresentação dos resultados

As duas tarefas apresentadas e discutidas nesta comunicação têm como títulos: “Calcular usando o dobro” e “A estratégia do Afonso”. As duas tarefas foram resolvidas pelos alunos em pares e tiveram momentos de discussão colectiva na turma. Para análise da exploração das tarefas apresentam-se algumas resoluções dos alunos e excertos que consideramos significativos das discussões colectivas.

Tarefa “Calcular usando o dobro”

Esta tarefa explora a relação de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8. As expressões numéricas apresentadas são as seguintes: 6x8=2x24=48, 12x8=2x48=96 e 25x8=2x100=200, como se pode ver na figura seguinte:

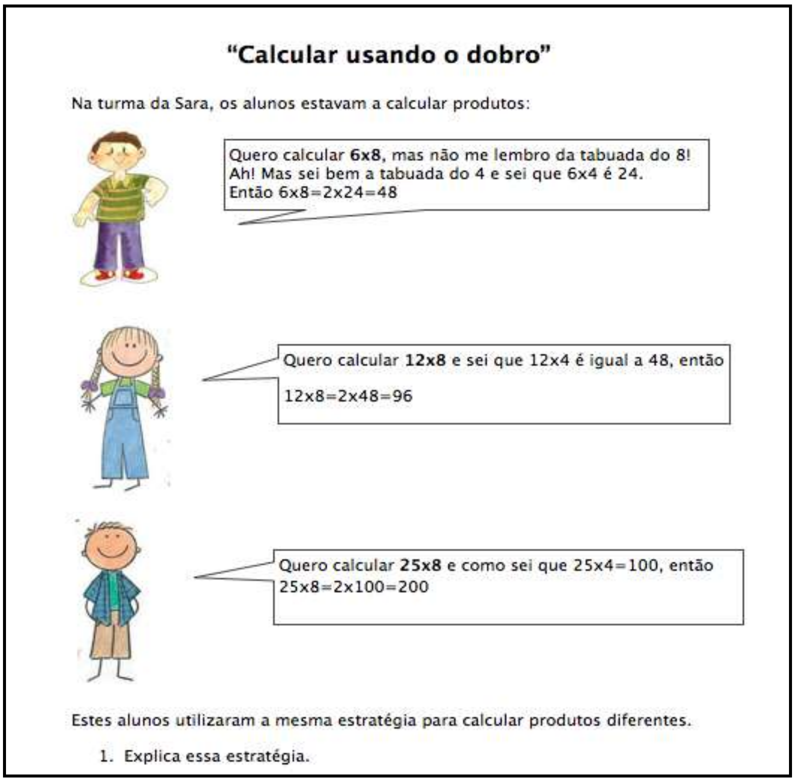

Figura 1 - Enunciado da tarefa "Calcular usando o dobro".

Na explicação da estratégia, os diferentes pares conseguiram reconhecer as relações de dobro e metade entre as tabuadas do 4 e do 8. A figura seguinte mostra a resposta de um par de alunos que revela como identificaram a relação de dobro entre os produtos da tabuada do 8 e os produtos da tabuada do 4, usando um dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa para explicar a estratégia de cálculo.

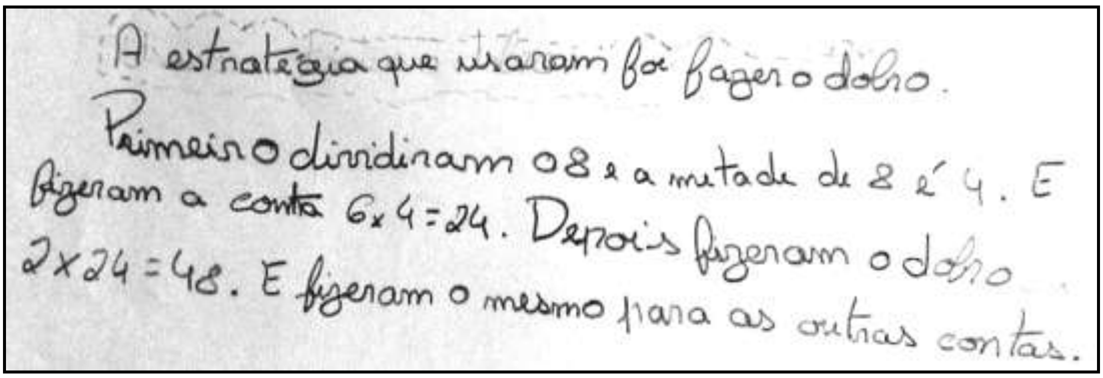
A estratégia que usaram foi fazer o dobro. Primeiro dividiram o 8 e a metade de 8 é 4. E fizeram a conta 6x4=24. Depois fizeram o dobro 2x24=48. E fizeram o mesmo para as outras contas.

Figura 2 - Resposta do par Fábio e Henrique.

A figura seguinte mostra como um par de alunos utiliza uma representação mais elaborada da relação de dobro e metade, para cada um dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa. Estes alunos identificam claramente os produtos da tabuada do 8 como o dobro dos produtos da tabuada do 4, utilizando a propriedade associativa da multiplicação.

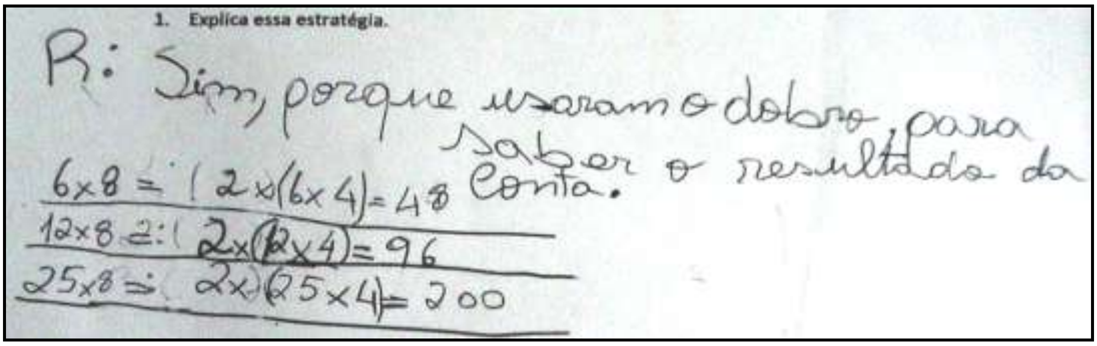

Figura 3 - Resposta do par António e Carolina.

A resposta do par seguinte mostra como os alunos recorreram a outros exemplos, estendendo a estratégia de cálculo para além das expressões apresentadas no enunciado da tarefa. Ilustram o procedimento efectuado representando esquematicamente a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

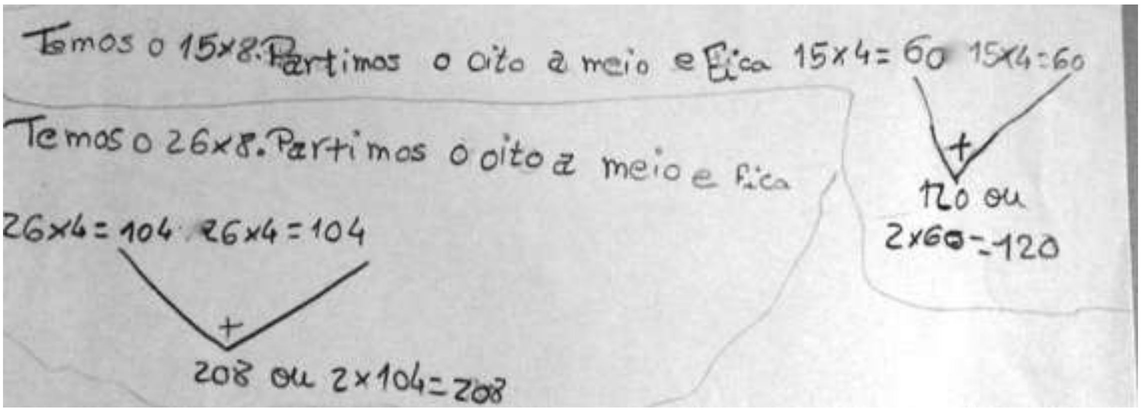

Figura 4 - Resposta do par Joana e Gonçalo.

O último exemplo mostra como os alunos também conseguem generalizar a estratégia de cálculo, apresentando evidências que apreenderam a estratégia para além dos casos particulares usados como exemplos. Quando referem que para saber o resultado da multiplicação de um factor por oito, fazem duas vezes “a metade de oito” por esse factor, estes alunos usam a propriedade associativa da multiplicação e mostram como apreenderam a generalização dessa estratégia.

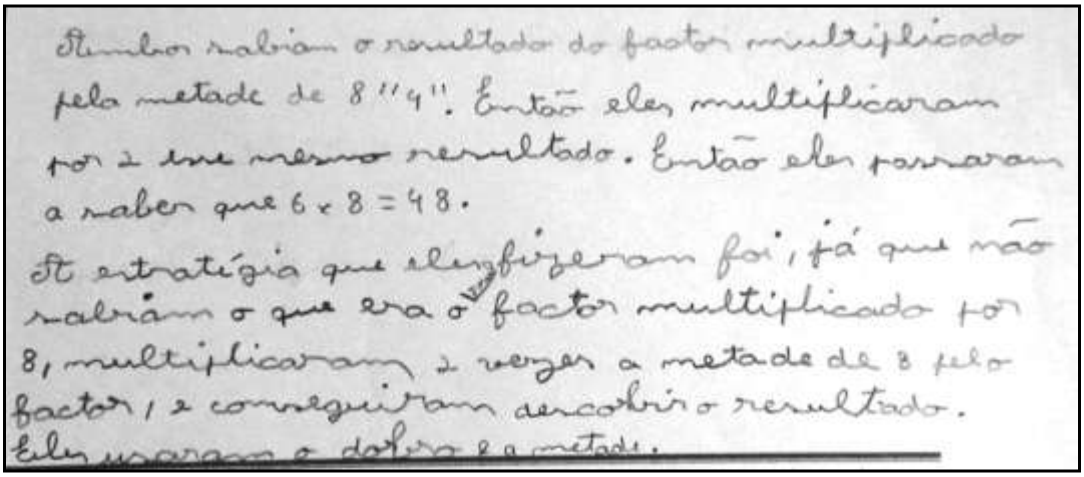
Ambos sabiam o resultado do factor multiplicado
pela metade de 8 "4". Então eles multiplicaram
por 2 esse mesmo resultado. Então eles passaram
a saber que 6 x 8 = 48.
A estratégia que eles fizeram foi, já que não
sabiam o que era o factor multiplicado por
8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo
factor, e conseguiram descobrir o resultado.
Eles usaram o dobro e a metade.

Figura 5 - Resposta do par Matilde e André.

Na exploração colectiva desta tarefa, um dos pares descreveu a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural da seguinte forma: "Para descobrirmos a tabuada do oito, fazemos o dobro da tabuada do quatro". Depois, com o propósito de traduzir essa generalização para a linguagem matemática, a professora[2] conduziu o seguinte diálogo:

> Professora – (...) agora quero que pensem nesta frase que o João escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?
> Vários alunos – Com contas.
> Professora – Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6x8, o 12x8 ou o 25x8, eu quero para todos os números da tabuada do 8 e do 4. (...)
> Rita – Como assim?
> Professora – Para todos os casos da tabuada do 8. O que é que acontece na tabuada do 8?
> Aluno? – É sempre mais oito.
> Professora - Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?
> Alunos – Sempre a multiplicar por oito.
> Professora – Como é que eu posso escrever isso?
> Rita – Usamos um ponto de interrogação.
> Fábio – Vezes oito.

[2] Nesta comunicação, a referência "professora" diz respeito à professora/investigadora.

Desta forma, a professora procura que os alunos expressem a estratégia de cálculo para além dos casos particulares referidos no enunciado da tarefa. Rita sugere a utilização do “ponto de interrogação” e, em colectivo, os alunos conseguiram traduzir para a linguagem matemática o que haviam feito em linguagem natural, do seguinte modo:

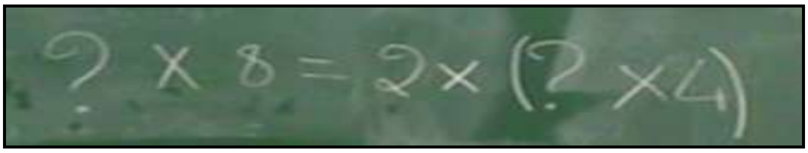

Figura 6 - Expressão final da generalização em linguagem matemática.

Tarefa “A estratégia do Afonso”

Nesta tarefa também foi trabalhada a relação de dobro e metade, desta vez entre as tabuadas do cinco e do dez. Para tal, foi explorado o exemplo particular de 36x5, como mostra o enunciado da tarefa:

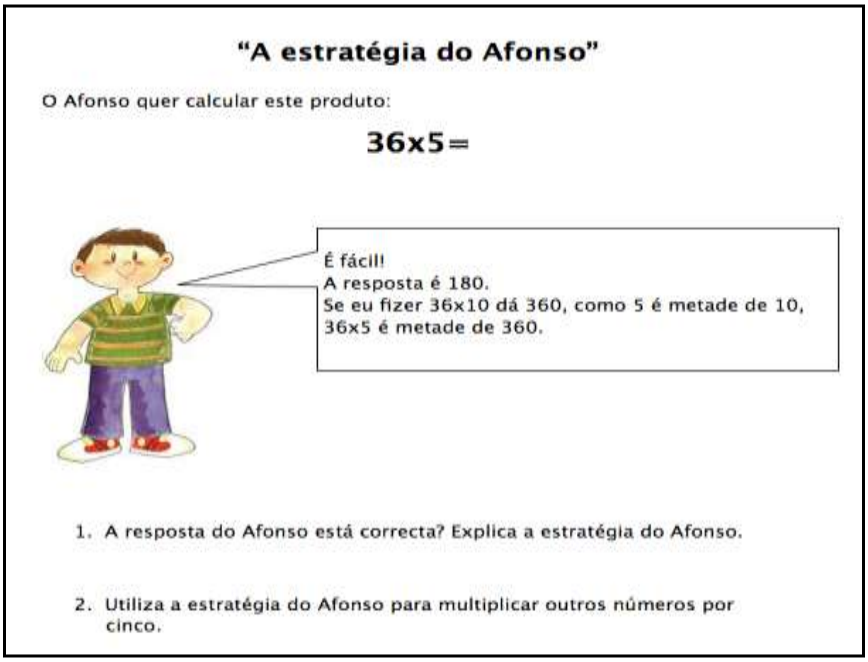

Figura 7 - Enunciado da tarefa "A estratégia do Afonso"

Na resposta à primeira questão, todos os alunos conseguiram verificar que a resposta do Afonso estava correcta e explicaram de diferentes formas a estratégia usada. A resposta que se apresenta, em seguida, mostra como o par de alunos conseguiu reconhecer que a resposta do Afonso estava correcta e que foi usada a estratégia do dobro e da metade para determinar o produto de 36x5. Esses alunos utilizaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para determinar o produto de 36x5.

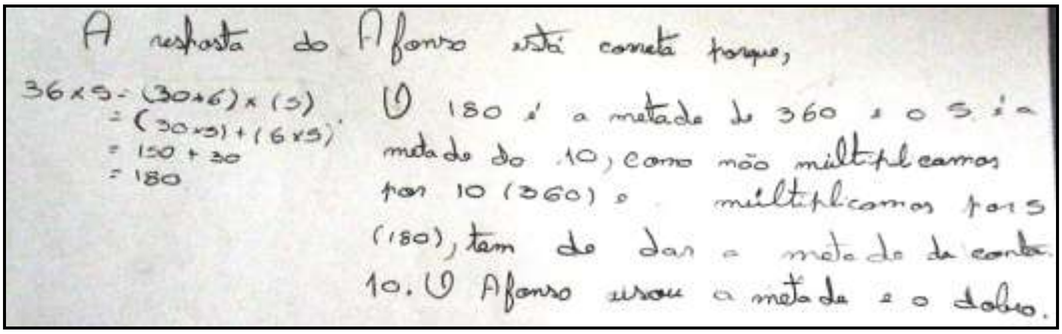

Figura 8 - Resposta do par Rita e Miguel.

No exemplo seguinte os alunos também conseguiram reconhecer que a resposta do Afonso estava correcta. Estes alunos salientam ainda as relações numéricas de dobro e metade envolvidas na estratégia de cálculo representando-as esquematicamente:

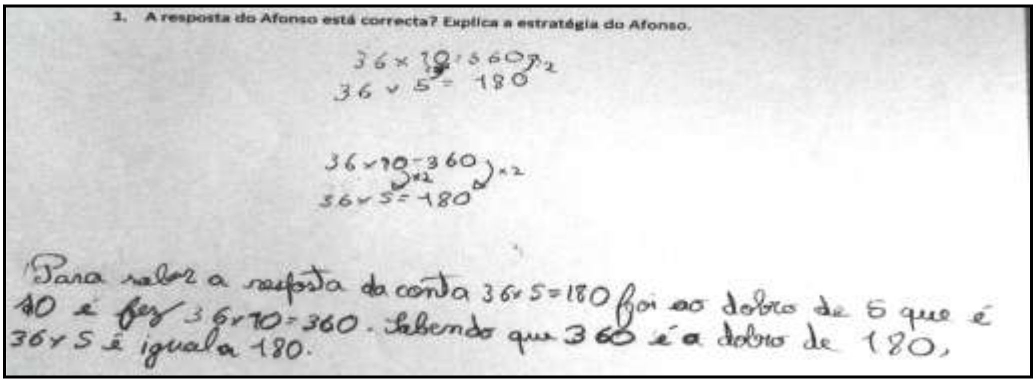

Figura 9 - Resposta do par João V. e Lawry.

Na discussão colectiva, a professora procurou que os alunos generalizassem a estratégia do Afonso através da linguagem natural. O excerto seguinte mostra como diversos alunos conseguiram fazê-lo, sem dificuldade:

Professora. – Quem é que é capaz de explicar por palavras a estratégia do Afonso?
Fábio – Ele para saber a tabuada do cinco fez metade da tabuada do dez.
Rita – Ele fazendo a tabuada do dez, se a dividir vai conseguir a tabuada do cinco. (...) A dividir por dois.

Assim, os alunos expressaram em linguagem natural a generalização da estratégia de cálculo: "Para descobrirmos a tabuada do cinco fazemos metade da tabuada do dez". Quando lhes foi solicitado para traduzirem essa frase para linguagem matemática, alguns alunos continuaram a usar exemplos particulares da estratégia de cálculo. A professora volta a insistir que pretende que a expressão seja válida para todos os casos e não só para alguns, referindo que deve ser usada "para qualquer número". Nessa altura, diversos alunos sugeriram a utilização de um símbolo não numérico. Inicialmente, sugeriram a utilização do "ponto de interrogação" que já tinham usado na tarefa descrita anteriormente, mas também apresentaram outras representações pictóricas. No entanto, tiveram dificuldade em representar a metade de "qualquer número" como mostra a representação sugerida pelo Henrique:

Figura 10 - Tentativa de expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Henrique.

Quando a professora solicita ao Henrique para explicar a sua representação, ele refere que "é um número inteiro a dividir por metade". Neste momento, a professora questiona a turma sobre se aquela representação permite mostrar o que eles já tinham descoberto sobre as tabuadas do cinco e do dez. Então, Rita sugere que se usem as seguintes expressões:

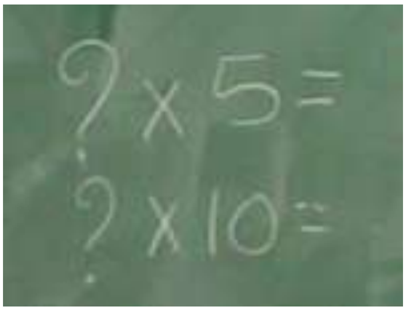

Figura 11 - Tentativa de expressão da generalização em linguagem matemática, feita pela Rita.

Perante essa forma de representação, a professora sugere que pensem sobre a estratégia que usaram para multiplicar qualquer número por cinco, relembrando o que haviam expressado em linguagem natural. Para tal, a professora retomou a exploração do produto 36x5, conduzindo a discussão para a exploração daquilo que tinham feito com a resolução desse produto. O excerto seguinte é ilustrativo desse momento da aula:

> Professora: Nós ali tínhamos 36x5. Fizemos trinta e seis vezes...
> Rita: Trinta e seis vezes dez.
> Professora: Trinta e seis vezes dez e depois fizemos o quê?
> Rita: Dividimos por dois.
> Professora: Então, como é que a gente pode pôr? Qualquer número vezes cinco é igual...
> Fábio: É igual a metade.
> Professora: O que é que a gente fez primeiro?
> Gonçalo C.: Multiplicou por dez.
> Professora: Multiplicou por dez. Ele fez trinta e seis vezes dez. Mas isto (apontando para 36x5=36x10) não é igual?
> Alunos: Não.
> Gonçalo C.: Pois não. Depois fez a metade.
> Professora: Fez a metade. E isso quer dizer o quê? Fez a metade disto (apontado para 36x10). Como é que se representa metade disto?
> Rita: A dividir por dois.

Nesse momento, é escrita no quadro a seguinte expressão numérica: 36x5=(36x10):2. Depois, a professora questiona “E como é que eu posso fazer isso sem ser para o 36?”. Neste momento, Fábio sugere que é “qualquer número vezes dez a dividir por dois” e Rita escreve no quadro:

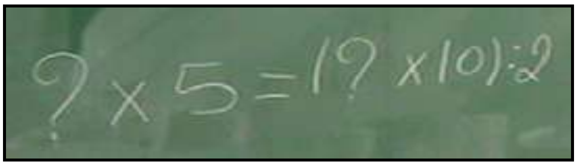

Figura 12 - Expressão da generalização em linguagem matemática.

Fábio propõe ainda a escrita daquela expressão usando outros símbolos. Assim, apresentou o seguinte exemplo no quadro:

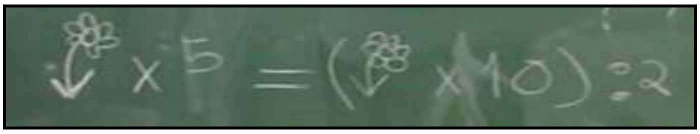

Figura 13 - Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Fábio.

Fábio refere ainda que aquela estratégia de cálculo podia ser usada para outras tabuadas. E exemplifica:

> Fábio: Também dá para outros números. Se for flor vezes três igual a flor vezes seis a dividir por dois. E depois também dá para o quatro e para o oito. E com o um e o dois.

Considerações finais e conclusões

Através da análise das duas tarefas apresentadas nesta comunicação, que exploravam estratégias de cálculo através de expressões numéricas particulares, procurar-se-á, agora, explicitar como a exploração dessas tarefas contribuiu para a mobilização da capacidade de generalização expressa em linguagem natural e em linguagem matemática.

Primeiramente, importa referir que os diferentes pares de alunos conseguiram reconhecer a estrutura subjacente às estratégias de cálculo de cada uma das tarefas, identificando as relações numéricas de dobro e metade e as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição envolvidas nas expressões numéricas apresentadas. Usaram ainda essas relações numéricas e as propriedades das operações para justificar as estratégias de cálculo representando-as de diferentes formas, com esquemas e diagramas de setas, como mostram os exemplos apresentados.

Por outro lado, diferentes pares de alunos conseguiram ainda, com relativa facilidade, construir generalizações que expressaram em linguagem natural. De forma clara, esses alunos referiram que podiam construir a tabuada do 8 a partir do dobro da tabuada do 4, na primeira tarefa, e a tabuada do 5 fazendo metade da tabuada do 10, na segunda tarefa. Em ambos os casos, os alunos exploraram expressões numéricas particulares para a construção da generalização. Salienta-se assim a importância de levar os alunos a focarem-se nas relações numéricas, trabalhando as expressões numéricas numa perspectiva mais numérica (Carpenter *et al.*, 2003).

No entanto, a expressão da generalização em linguagem matemática não foi tão imediata. Não é, de facto, o nosso interesse primário a introdução precoce à linguagem simbólica. Ainda assim, parece ser possível a iniciação nesse percurso como forma de tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, como mostram diversos estudos (Barbosa, 2010; Blanton, 2008; Santos, 2008). Neste sentido, importa salientar a importância da utilização de expressões numéricas particulares para o desenvolvimento da capacidade de generalização e, mais concretamente, para a introdução da linguagem simbólica. Esse facto pode ser reconhecido na segunda tarefa analisada, onde não estando explícita no enunciado a expressão numérica os alunos demonstraram maiores dificuldades em traduzir para linguagem matemática o que tinham referido em linguagem natural. Quando, na discussão colectiva, a expressão numérica foi retomada, os alunos mostraram já uma maior facilidade em traduzir a generalização para a linguagem matemática. Esse facto é coerente com a perspectiva de Fujii (2003) ao assinalar a importância de explorar a generalização a partir de expressões numéricas particulares passíveis de ser generalizadas, enquadrando-se no conceito de pensamento quase-variável defendido por este autor.

Concluindo, pode referir-se que a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares, como as apresentadas nestas tarefas, pode ser utilizada para a expressão da generalização em linguagem natural e sua tradução em linguagem matemática, permitindo a iniciação de um percurso em direcção à simbolização.

Referências

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* (Dissertação de Doutoramento, Universidade do Minho).

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom. Transforming Thinking, Transforming Pratice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos números*. Porto: Porto Editora.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 53-59.

Fujii, T. (2003). Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. ME: DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME - DGIDC.

Santos, M. (2008) *A generalização nos padrões: Um estudo no 5.º Ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado em Educação, FCUL).