UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

A DEMONSTRAÇÃO NA PRÁTICA SOCIAL DA AULA DE MATEMÁTICA

- VOLUME 2 -

Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO
Especialidade de Didáctica da Matemática

2008

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

A DEMONSTRAÇÃO NA PRÁTICA SOCIAL DA AULA DE MATEMÁTICA

- VOLUME 2 -

Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO
Especialidade de Didáctica da Matemática

Tese orientada pelo Prof. Doutor João Filipe de Lacerda Matos

2008

CAPÍTULO V

ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Às vezes, na literatura, encontramos verdadeiras iluminações. Que, antes de mais, não precisam de argumentação, não precisam de demonstração. Às vezes, encontramos na literatura (…) frases que reconhecemos como verdadeiras. . . . São, evidentemente, [verdades] subjectivas. . . . Por vezes, dizemos "sim, isto é verdade", quando lemos uma frase ou reflexão literária. . . . E, em certo sentido, ao dizê-lo, reconhecemo-lo pela primeira vez. Ficamos a saber algo que ignorávamos que já sabíamos.
(Marias, *DNA Entrevista*, p. 11)

Fundamentos Teóricos

Opções Metodológicas

Embora enquadramento filosófico e paradigma de investigação sejam coisas distintas, ambos se relacionam entre si, já que o modo de ver o mundo se relaciona com o modo de conhecer esse mesmo mundo. Campbell (1998) distingue-os referindo-se ao paradigma de investigação como as teorias e métodos através dos quais se obtém conhecimento acerca de determinadas coisas, e ao enquadramento filosófico como o conjunto particular de perspectivas filosóficas que estão subjacentes aos paradigmas de investigação. As perspectivas filosóficas estão ligadas aos valores, atitudes e crenças do investigador, envolvendo os motivos deste, os meios pelos quais é aplicado um paradigma de investigação e o modo como são interpretados os resultados. Assim, as convicções do investigador situam-se no âmbito da ontologia (isto é, da natureza do ser humano e da realidade), da epistemologia (isto é, da relação entre o investigador e o objecto de estudo) e da metodologia (isto é, do modo como podemos obter conhecimento acerca do mundo) (Denzin e Lincoln, 1994).

Campbell (1998) chama a atenção para o facto de um dado paradigma de investigação não estar necessariamente ligado a um enquadramento filosófico particular, enquanto que, ao invés, algumas perspectivas filosóficas implicam a adopção de um paradigma de investigação particular. E dá o exemplo de um positivista estrito que só aceitaria um paradigma de investigação quantitativo. Matos e Carreira (1994) referem o exemplo de estudos sobre atitudes, que encerram uma visão positivista de atitude, concebendo-a como resposta dos indivíduos a estímulos externos, e que utilizam instrumentos de índole quantitativa.

Vejamos agora como se podem caracterizar os dois paradigmas de investigação para que possamos discutir as respectivas relações com o enquadramento filosófico subjacente. Comecemos, pois, pelo paradigma de investigação quantitativo. Neste paradigma é usual utilizar-se uma amostra representativa do universo que constitui o objecto de estudo, sendo portanto essa amostra escolhida criteriosamente. O seu propósito, quando aplicado às ciências sociais, é explicar as causas das mudanças em factos sociais, usando para esse efeito a medida objectiva e a análise quantitativa das relações causais entre variáveis (Anderson, 1990). Por conseguinte, é implementado um design experimental ou correlacional de modo a reduzir o erro, o desvio e a ligação pessoal do investigador que pudesse deturpar a sua visão clara e objectivada da realidade social. No paradigma de investigação qualitativo, o propósito central é a compreensão dos fenómenos sociais a partir das perspectivas dos participantes envolvidos (Bogdan e Biklen, 1991/1994; Firestone, 1987) e para tal, o investigador tem de ficar imerso no fenómeno em estudo de forma a conseguir apresentar as definições da situação desses mesmos participantes (Firestone, 1987). Assim, este paradigma não lida com uma amostragem geral, podendo incidir o seu estudo numa pequena parte da população relacionada com o objecto de estudo já que o foco central deste tipo de investigação reside na interpretação de significados de acções locais e de processos decorridos em situações específicas (Erickson, 1986). Em suma, o paradigma de investigação qualitativo visa a compreensão subjectiva dos modos de ser qualitativos que não podem ser quantificáveis.

A relação entre a abordagem quantitativa e a qualitativa é objecto de debate entre os investigadores, podendo distinguir-se dois grupos extremados, designados por

Firestone (1987) como o grupo dos puristas e o dos pragmáticos. Os puristas—nos quais se incluem Smith e Heshusius (1986)—consideram existir uma forte conexão entre o tipo de métodos e o paradigma de investigação. Na sua óptica, as duas abordagens são incompatíveis. Este grupo de teóricos atribui a incompatibilidade entre as duas abordagens às diferentes assunções sobre o mundo e sobre o que é considerado uma investigação válida, considerando que os princípios relativos à verdade, à realidade e à relação entre o investigador e o objecto de estudo são inerentes ao paradigma de investigação, estabelecendo uma relação lógica com os métodos escolhidos. Ou seja, os métodos escolhidos decorrem desses mesmos princípios. Os pragmáticos—nos quais se incluem Cook e Reichardt (1982/1986)—consideram que a relação entre os métodos e o paradigma é de natureza instrumental, podendo existir uma combinação de métodos quantitativos e qualitativos, embora reconheçam a existência de uma tradição de forte associação entre o tipo de métodos e o paradigma.

Os puristas fundamentam a tese de existência de conexão entre método e paradigma de investigação pelo respectivo enquadramento filosófico subjacente. Assim, consideram que um paradigma de investigação quantitativo está baseado numa filosofia positivista, a qual assume a existência de uma realidade objectiva traduzida em factos sociais, realidade esta independente do pensamento e da actividade cognitiva dos indivíduos. A verdade, nesta perspectiva, é encarada como uma correspondência entre as palavras das pessoas e essa realidade, existindo de forma independente (Smith e Heshusius, 1986). O objectivo deste tipo de investigação será, portanto, prever o comportamento humano com base em relações causais (Merriam, 1991), existindo a necessidade de isolar as variáveis a estudar e a medir. Tem subjacente um modelo determinista indicador da medida em que uma dada variável provoca mudança na outra variável. Os coeficientes de regressão indicam o que se pode esperar relativamente ao aumento da variável dependente para uma dada mudança de uma variável independente (Firestone, 1987). Tal objectivação da realidade conduz à distanciação do investigador relativamente ao fenómeno em estudo (Anderson, 1990) por se considerar que a sua aproximação introduziria elementos tendenciosos no respectivo design experimental concebido de forma a reduzir ao máximo todo o tipo de erros, enviesamentos ou outros ruídos desviantes da percepção clara dos factos sociais em estudo.

Os puristas defendem que um paradigma de investigação qualitativo está baseado numa filosofia fenomenológica, substancialmente distinta da filosofia positivista, uma vez que assume a existência de múltiplas realidades construídas socialmente e mediadas pela interpretação. Bogdan e Biklen (1991/1994) referem que os investigadores fenomenologistas, ao conceberem a realidade como o significado das experiências, visam alcançar a compreensão interpretativa das interacções humanas, tentando portanto compreender o significado que essas mesmas interacções e acontecimentos têm para as pessoas nas suas situações particulares. De acordo com Merriam (1991), um fenómeno altamente subjectivo, como é a realidade construída em função da interacção pessoal, necessita de ser interpretado em vez de medido.

Nesta perspectiva, a verdade resulta de um acordo condicionado social e historicamente (Smith e Heshusius, 1986). Assim, o objectivo deste tipo de investigação será a descrição e a explicação de um dado fenómeno (Merriam, 1991), partindo da compreensão dos significados dos participantes em estudo e das suas acções. A necessidade de captar e interpretar de forma adequada as perspectivas dos participantes envolvidos (Bogdan e Biklen, 1991/1994; Patton, 2002) conduz à imersão do investigador no fenómeno em estudo, constituindo o ambiente natural de ocorrência das acções dos sujeitos, a fonte directa dos dados, já que uma dada situação só pode ser compreendida se analisada contextualmente. “Para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o seu significado” (Bogdan e Biklen, 1991/1994, p. 48). O investigador é, neste paradigma de investigação, o instrumento principal de recolha e de análise de dados (Bogdan e Biklen, 1991/1994; Merriam, 1991).

Os significados locais das acções, definidos pelo ponto de vista dos participantes envolvidos no estudo, constituem o principal interesse de uma investigação qualitativa (Erickson, 1986). O interaccionismo simbólico constitui uma forma bem estabelecida da perspectiva fenomenológica, pelo qual os significados são concebidos como construções sociais, na medida em que são construídos através das interacções com os outros e através da experiência. O significado é, portanto, algo que é atribuído; não são os objectos ou as situações que têm um significado próprio. “O significado que as pessoas atribuem às suas experiências, bem como o processo de interpretação, são elementos essenciais e constitutivos, não acidentais ou secundários àquilo que é a experiência” (Bogdan e Biklen, 1991/1994, p. 55). Segundo Smith e Heshusius (1986), numa investigação conduzida sob este paradigma, existe uma circularidade tanto no processo hermenêutico como no processo epistemológico por os mesmos não possuírem pontos de início e de chegada perfeitamente definidos e definitivos. Smith e Heshusius (1986) sustentam ainda que no processo epistemológico, o investigador apenas pode oferecer interpretações das interpretações dos outros.

Os pragmatistas contrapõem a esta visão o facto de existirem muitos estudos que contradizem a ligação atrás enunciada entre tipo de métodos utilizados e paradigma de investigação. Cook e Reichardt (1982/1986) afirmam que existem investigadores quantitativos que subscrevem posições fenomenológicas, dando o exemplo das teorias psicológicas sociais da atribuição, que se propõem compreender os comportamentos e as crenças, a partir das perspectivas dos actores, e cuja investigação usa métodos quantitativos, em laboratório. Os autores, ao referirem-se à possibilidade de existirem investigações qualitativas conduzidas por investigadores que adoptem uma filosofia positivista, não conseguem dar nenhum exemplo concreto. Dão apenas um exemplo hipotético, que eles próprios consideram improvável de acontecer efectivamente: um investigador que acredite que a categoria socio-económica se define exclusivamente em termos dos bens materiais, como casas, carros, roupas, poderia conduzir um trabalho etnográfico de campo para observar e contar esses artigos, sem fazer qualquer referência aos significados particulares que os mesmos têm para os seus proprietários. Segundo os autores, este seria um exemplo imaginável de um investigador assumindo uma perspectiva positivista e usando métodos qualitativos. Mesmo sendo hipotético, não me parece que este seja um bom exemplo. Por um lado, se um investigador quisesse comprovar tal correlação, estaria, com certeza, interessado numa generalização estatística, podendo obter tais informações através de inquéritos, mesmo que complementados por algum trabalho de campo, envolvendo a observação. Por outro lado, um trabalho etnográfico é caracterizado, precisamente, pela imersão intensa do investigador na cultura a estudar. Tal implica que os significados dos diferentes actores não possam ser ignorados, se definirmos cultura como o conjunto de padrões comportamentais e de crenças (Patton, 2002) ou como "what allows us to perceive the world as meaningful and coherent and at the same time it operates as a constraint on our understandings and activities" (Säljö, 1991, p. 180). No entanto, Firestone (1987) dá o exemplo do trabalho *behaviorista* de Whitings em antropologia como sendo um caso de uma investigação qualitativa que assume uma filosofia positivista.

Cook e Reichardt (1982/1986) defendem mesmo que numa investigação focada em problemáticas de avaliação existirá vantagem em utilizar conjuntamente os dois tipos de métodos por três razões diferentes: (1) tem *objectivos múltiplos* que passam tanto pelo interesse no resultado (o impacto de um dado programa pela medição do efeito do mesmo) como pelo processo (a respectiva descrição conduzirá a explicações causais relativas ao efeito do programa em causa); (2) *vigorização mútua dos dois tipos de métodos* (o conhecimento quantitativo pressupõe um conhecimento qualitativo, e também um método qualitativo poderá necessitar de contar elementos, recorrendo a conceitos quantitativos); e (3) *triangulação através de operações convergentes,* como forma de alcançar uma maior verdade acerca do que se pretende medir, fornecendo percepções que nenhuma das metodologias, quantitativa ou qualitativa, daria se usadas separadamente (é possível também que a sua utilização conjunta faça emergir novas fontes de enviesamento e meios de os diminuir). Como verificamos pela análise das três razões enunciadas pelos autores, a investigação incidente numa problemática de avaliação, tal como caracterizada atrás, tem um único paradigma de investigação—o quantitativo—uma vez que pretende medir efeitos de algo numa dada população e alcançar explicações dos mesmos de natureza causal, mesmo que para tal, recorra a alguns procedimentos qualitativos. Vemos, portanto, que para estes teóricos, métodos são colecções de técnicas e daí que, de acordo com os mesmos, os atributos de um dado paradigma não estejam inerentemente ligados nem aos métodos quantitativos nem aos de índole qualitativa. Bogdan e Biklen (1991/1994) também consideram que a investigação avaliativa pode ser conduzida pelas duas abordagens, a quantitativa e a qualitativa, embora desenvolvidas de forma autónoma e dão um exemplo concreto de uma investigação avaliativa que foi solicitada a uma empresa e que se desdobrou em duas partes distintas que funcionaram de forma independente, não tendo existido, portanto, interpenetração mútua das duas abordagens usadas. No exemplo referido pelos autores, a parte que se dedicou ao estudo qualitativo não visou explicações causais de efeitos mas sim a captação dos significados de todos os intervenientes (pais e pessoal escolar) sobre a forma como foram recebidas as directrizes do programa e sobre o que é que consideravam que se tinha modificado como resultado do programa, se é que algo se tinha modificado. Igualmente Patton (2002) vê vantagem em usar as duas metodologias numa investigação avaliativa, considerando que os dados qualitativos acrescentam profundidade e detalhe aos resultados quantitativos.

Por sua vez, Smith e Heshusius (1986) sublinham a necessidade de se distinguir métodos de procedimentos, uma vez que podem ser utilizados procedimentos quantitativos numa investigação qualitativa e vice-versa, dando o exemplo de um investigador quantitativo que suplementa a sua instrumentação controlada com a observação aberta em contextos naturais, e ainda o exemplo de um investigador qualitativo que suplementa a sua observação naturalista com a quantificação de eventos. Para estes autores, a posição dos pragmatistas de que as duas abordagens podem ser combinadas só pode ser considerada correcta se a discussão se situar ao nível da aplicação de procedimentos específicos individuais, o que, segundo o seu ponto de vista, levanta questões que são irrelevantes. Pois, de acordo com os autores, enquanto a discussão se centrar no nível da justificação lógica, existem diferenças substanciais entre as duas perspectivas de investigação que os conduz à consideração das mesmas como sendo incompatíveis. Smith e Heshusius (1986) clarificam que a lógica da justificação não impõe fronteiras rígidas que determinem todos os aspectos da prática de investigação. E por isso, nenhum investigador que adopte uma dada metodologia está proibido de usar um outro procedimento normalmente associado a uma outra metodologia. No entanto, na sua perspectiva, tal facto não pode levar à conclusão de que ambas as abordagens de investigação podem ser compatíveis ou complementares.

A clivagem de posições existente entre os puristas e os pragmatistas parte essencialmente do modo diferenciado como os mesmos concebem o método. Enquanto que para os pragmatistas o método é uma colecção de técnicas ou procedimentos, envolvendo questões sobre como fazer, para os puristas a caracterização do método prende-se com questões de justificação lógica que informam a prática.

Para Erickson (1986), é no conteúdo do domínio de interesses do estudo que reside a distinção entre uma investigação interpretativa ou qualitativa e uma investigação quantitativa, não podendo, portanto, fazer-se essa distinção com base nos procedimentos adoptados. Tal como já referido atrás, segundo o autor, o principal interesse de uma investigação interpretativa está focado nos significados das acções locais e dos participantes envolvidos no estudo. Por exemplo, o autor refere que pode ser usado um procedimento habitualmente associado às abordagens interpretativas, como é o caso da descrição narrativa, num estudo de orientação positivista cujos interesses excluam os significados.

Para Firestone (1987), há que analisar os dispositivos retóricos da investigação para se poder compreender os motivos da existência da associação entre tipo de métodos e paradigmas. Assim, para este autor, parte da conexão entre o tipo de métodos e o paradigma de investigação é de natureza retórica. Os métodos quantitativos, ao expressarem assunções de um enquadramento filosófico positivista de que o comportamento pode ser explicado por factos objectivos, estão desenhados de modo a mostrar a eliminação do erro e do enviesamento. Os métodos qualitativos, ao expressarem assunções de um enquadramento filosófico fenomenológico de que as múltiplas realidades são definidas socialmente, estão desenhados de modo a facultar ao leitor uma descrição detalhada que permita ao mesmo fazer sentido da situação, descrição esta só possível pela imersão do investigador no contexto real. Este aspecto de índole retórica é igualmente apontado por Bogdan e Biklen (1991/1994) quando referem que os dados recolhidos numa investigação qualitativa assumem a forma descritiva em virtude de se analisar em profundidade e com bastante detalhe o objecto de estudo. A apresentação dos resultados de um estudo qualitativo respeita, portanto, a forma como os dados foram transcritos ou registados para ilustração e consubstanciação dos mesmos.

Firestone (1987) defende que os resultados obtidos por via das duas metodologias podem ser complementares, não obstante serem diferentes retoricamente. Este autor sustenta a tese de que se focarem o mesmo assunto, as investigações quantitativa e qualitativa podem triangular os respectivos resultados, permitindo avaliar a robustez e a estabilidade dos mesmos. "Where studies using different methods have similar results, one can be more certain that the findings are not influenced by the methodology. Where the results diverge more research is needed." (Firestone, 1987, p. 20). Anderson (1990) defende uma posição contrária, referindo que investigações válidas deverão conduzir a conclusões similares, desde que adoptem abordagens investigativas similares, mas que dificilmente tal acontecerá se usarem diferentes abordagens. Este autor acrescenta ainda que nem sequer é expectável que estudos conduzidos sob diferentes metodologias coloquem as mesmas questões quanto mais supor que chegariam às mesmas respostas.

Voltando ao debate entre puristas e pragmatistas, vemos, portanto, que Firestone (1987) não defende nenhuma das posições extremadas, sustentando que a escolha do método não é rigorosamente determinada pela adopção de um dado enquadramento filosófico nem é uma questão meramente pragmática de aplicar técnicas de investigação a um problema. Vejamos a sua posição particular neste debate pelas suas próprias palavras:

> There are in fact a number of reasons for selecting a methodological approach, but one's decision often expresses values about what the world is like, how one ought to understand it, and what the most important threats to that understanding are. The method selected encourages one to adopt

> conventions of presentation that advance certain kinds of argument for the credibility of one's conclusions. These nonlogical methodological tendencies fit with individual stylistic predictions as well as the philosophical underpinnings of the positivist and phenomenological paradigms of research. (Firestone, 1987, p.20)

De acordo com Matos e Carreira (1994), é preferível evitar a dualidade quantitativo-qualitativo, e falar antes de paradigmas de investigação positivista e interpretativo como pólos de um contínuo. Os autores consideram que, muitas das vezes, o plano metodológico subordina-se à adopção de um dado paradigma de investigação e às opções filosóficas, e portanto, um paradigma positivista estará geralmente associado a técnicas de índole quantitativa enquanto o paradigma interpretativo estará associado a metodologias baseadas em técnicas de recolha e análise de dados de natureza qualitativa.

Pessoalmente, considero que as pressuposições filosóficas subjacentes aos paradigmas de investigação não podem ser ignoradas e que vão muito para além de uma fundamentação relativa à adequação da investigação quantitativa ou qualitativa *per se* ao problema em estudo. No entanto, reconheço que as problemáticas que visem uma generalização estatística terão de utilizar uma metodologia quantitativa, mesmo que o respectivo investigador possua uma visão fenomenológica do mundo.

No presente estudo, optei por uma abordagem de natureza qualitativa por ser a mais adequada à problemática em questão, incidente na forma como os alunos constroem as suas demonstrações na aula de Matemática, na forma como as encaram e na forma como se relaciona essa mesma construção com a prática social desenvolvida em sala de aula. Trata-se, pois, de uma investigação que se centra sobretudo nos processos de ocorrência dos acontecimentos, partindo dos significados particulares dos alunos envolvidos no estudo. Esta é, segundo Bogdan e Biklen (1991/1994), uma característica importante de uma investigação de natureza qualitativa, uma vez que neste tipo de investigação é primacial o conhecimento de como ocorre um dado fenómeno, mais do que o conhecimento dos seus resultados ou produtos.

Por outro lado, só se torna possível abarcar a complexidade do fenómeno de construção de uma demonstração por parte dos alunos, se estudarmos todos os seus componentes—natureza da demonstração, o papel da demonstração na aula de Matemática e a prática social—de uma forma holística já que todos eles se influenciam reciprocamente. Esta perspectiva de investigação em que os componentes de um fenómeno não podem ser estudados isoladamente é, precisamente, alcançada através de uma abordagem qualitativa (Merriam, 1991). O presente estudo visa a explicação das relações dialécticas entre estes elementos mutuamente constitutivos. Tal como é referido por Firestone (1987, p. 19), "the qualitative study presents a more complex view of a world in which there are limits and opportunities that individuals must take into account and use. . . . These limits and opportunities shape action, but do not determine it".

Um outro aspecto integrante da presente investigação é o carácter indutivo da análise de dados uma vez que esta percorre um processo de exploração e descoberta do que vai emergindo. Ao contrário da abordagem quantitativa, de natureza hipotético-dedutiva, cujo propósito é o de testar e confirmar hipóteses formuladas previamente à investigação, numa investigação qualitativa, o investigador utiliza parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Também Firestone (1987) contrasta os dois tipos de investigação pelo facto de o estudo quantitativo possuir um quadro teórico preexistente cujo modelo é usado para guiar a análise de dados, enquanto o estudo qualitativo apresenta um carácter muito mais exploratório, sem um modelo preliminar. Isto é, o estudo qualitativo não fica fortemente controlado por uma teoria preexistente:

"o processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo." (Bogdan e Biklen, 1991/1994, p. 50). Matos e Carreira (1994) distinguem, igualmente, os dois tipos de investigação pela sua relação com a teoria: enquanto o paradigma positivista procura confirmar uma dada teoria, o paradigma interpretativo cria uma teoria que explique o fenómeno em estudo. Todavia, este carácter indutivo da análise de dados estabelece também relações, que são de natureza dialéctica, com a dedução decorrente de conceitos teóricos que acabam por se constituir em instrumentos analíticos dos episódios empíricos. Tanto a dedução como a indução estão presentes, em movimento dialéctico, na análise qualitativa de dados (Brown e Dowling, 1998; Erickson, 1986; Merriam, 1991).

No que se refere à presente investigação, as questões do estudo foram ficando mais clarificadas ao longo da análise teórica e encontravam-se estabilizadas na altura do trabalho de campo empírico, não sofrendo alterações com a própria recolha de dados e respectiva análise. No entanto, as questões do estudo são de natureza aberta cuja respostas só poderiam ser alcançadas pela análise dos processos vividos pelos alunos. Nenhuma das questões foi convertida previamente em hipótese enformada por uma teoria preexistente a ser confirmada pela análise de dados. Sendo a unidade de análise o objecto descrito em termos das variáveis da investigação (Brown e Dowling, 1998), a unidade de análise do presente estudo é a demonstração produzida pelos alunos, e a forma como foi desenvolvida nas suas aulas de Matemática.

Para além da fundamentação atrás apresentada, no que respeita à adequação da abordagem de investigação qualitativa relativamente ao problema em estudo, poderei ainda afirmar que o respectivo enquadramento filosófico subjacente está em consonância com as minhas próprias assunções acerca da realidade e com o modo de olhar para a noção de verdade. O que sobretudo importa sublinhar é o facto de que, para a prossecução dos objectivos do presente estudo, só uma abordagem de natureza qualitativa seria viável. O aspecto marcante e decisivo que nos permite distinguir uma investigação quantitativa da qualitativa é o facto de a primeira realçar a medida e a análise das relações causais entre variáveis, enquanto que a segunda enfatiza os processos e significados (Campbell, 1998; Denzin e Lincoln, 1994; Merriam, 1991). Efectivamente, o presente estudo visa descrever e analisar o processo vivido pelos alunos ao longo de um ano lectivo no que respeita à sua competência de demonstração, processo este que só poderá ser cabalmente analisado se atendermos ao significado dos diálogos, dos gestos, das acções, em suma, ao significado da experiência vivida pelos participantes no estudo. Em educação, a investigação qualitativa é frequentemente designada por investigação naturalista (Bogdan e Biklen, 1991/1994) pelo facto de o investigador frequentar os locais onde se verifica o fenómeno que se pretende estudar, observando os comportamentos naturais dos sujeitos, em condições realistas, fora do seu controlo, isto é, em condições não laboratoriais.

> Interests in interpretive content lead the researcher to search for methods that will be appropriate for study of that content. If interpretive research on classroom teaching is to play a significant role in educational research, it will be because of what interpretive research has to say about its central substantive concerns: (a) the nature of classrooms as socially and culturally organized environments for learning, (b) the nature of teaching as one, *but only one,* aspect of the reflexive learning environment, and (c) the nature (and content) of the meaning-perspectives of teacher and learner as intrinsic to the educational process. (Erickson, 1986, p. 120, destaque no original)

Enquanto que a investigação quantitativa tende a ser unitária em teoria e método, a investigação qualitativa, ao contrário, é caracterizada pela sua diversidade (Campbell, 1998), sendo até difícil defini-la claramente. De acordo com Denzin e Lincoln (1994), a investigação qualitativa abarca um conjunto de práticas interpretativas, sendo multiparadigmática: são muitos os paradigmas interpretativos (como o feminismo, o marxismo, os estudos culturais, o construtivismo) que reclamam o uso de uma abordagem de investigação qualitativa. Estes múltiplos paradigmas interpretativos não se podem sintetizar ou misturar, já que, segundo os autores, representam os sistemas de crença do investigador que orientam o mesmo para um particular modo de ver o mundo, denotando, portanto, ontologias, epistemologias e metodologias particulares. A investigação qualitativa é usada em muitas disciplinas separadas, ou interligadas, sendo considerada como interdisciplinar, transdisciplinar e até algumas vezes contradisciplinar. Ela usa ainda múltiplas metodologias, não privilegiando qualquer método específico relativamente a outro: "qualitative researchers use semiotics, narrative, content, discourse, archival, and phonemic analysis, even statistics" (Denzin e Lincoln, 1994, p. 3).

Como Ajuizar a Qualidade de uma Investigação

De acordo com Patton (2002), uma condição requerida para credibilizar uma investigação, seja ela de natureza quantitativa ou de natureza qualitativa, é a neutralidade do investigador relativamente ao fenómeno em estudo. Esta neutralidade, de acordo com o autor, significa que o investigador não distorce ou manipula os dados de modo a servir os seus próprios interesses, perspectivas particulares ou preconceitos, ou de forma a chegar a resultados predeterminados. Apesar de constituir uma condição essencial, o autor considera que tal objectivo não é facilmente atingido, existindo um conjunto de técnicas que ajudam o investigador a tornar-se consciente e a lidar com as suas próprias tendências, a percepção selectiva e as suas predisposições teóricas. Do meu ponto de vista, a imersão do investigador no campo empírico e as suas interpretações subjectivas dos dados constituintes dos resultados, fazem com que as suas posições teóricas e filosóficas estejam presentes em todo o processo de investigação, e que, em bom rigor, o investigador nunca assuma uma posição neutra, tendo que estar consciente dessas mesmas posições para as ter em consideração durante o processo de recolha e análise de dados. No entanto, partilho da posição sustentada por Patton (2002) relativamente à importância de o investigador assumir uma postura de seriedade e de honestidade em todo o processo de investigação, de forma a não existir manipulação ou distorção dos dados que pudessem conduzir a resultados previamente determinados, consonantes com os interesses particulares ou as pressuposições teóricas do investigador. Ou seja, não me parece que o termo mais adequado seja o de neutralidade mas sim os termos que usei de seriedade e de honestidade. E aliás, se essa é a condição de credibilização de uma investigação é porque efectivamente é inerente ao que podemos considerar uma investigação: se já conhecêssemos à partida os resultados que apresentamos, não precisaríamos de investigar. Se esta condição não for cumprida, não estamos em presença de uma investigação. Trata-se de uma condição que me permite chamar investigação à apresentação de um dado estudo. Não é, pois, um critério de ajuizamento da qualidade de uma investigação. Se um investigador não cumpre esta condição, a sua investigação não terá menos qualidade; simplesmente não é credível de ser sequer olhada como investigação.

Patton (2002) chama ainda a atenção para o facto de que neutralidade não significa distanciamento e de que, no caso da investigação qualitativa, esta depende das experiências do investigador e da forma como as interpreta, requerendo uma reflexão cuidadosa da sua parte de forma a registar as potenciais fontes de erros ou de enviesamentos. Patton (2002) refere técnicas, como fontes múltiplas de dados, triangulação, procedimentos sistemáticos de recolha de dados, e verificações externas, que contribuem para a elevada qualidade de um estudo qualitativo, do ponto de vista da sua credibilidade. Para Brown e Dowling (1998), todavia, o principal critério consiste na coerência: "the fundamental criterion for the evaluation of empirical educational research is that it should aim at coherent closure" (p. 162).

A triangulação, ou seja, o uso de múltiplos métodos, para Denzin e Lincoln (1994), não constitui um instrumento de validação, já que é impossível captar a realidade objectiva, mas sim uma alternativa à validação, visando assegurar uma compreensão profunda do fenómeno em questão. "The combination of multiple methods, empirical materials, perspectives and observers in a single study is best understood, then, as a strategy that adds rigor, breadth, and depth to any investigation" (Denzin e Lincoln, 1994, p. 2). Segundo a sua perspectiva, os termos *validade interna, validade externa, fidedignidade* e *objectividade,* ao designarem critérios de qualidade de uma investigação herdados do paradigma positivista, deveriam ser substituídos por, respectivamente, *credibilidade, transferibilidade, confiança* e *confirmabilidade.* Smith e Heshusius (1986) não substituem aqueles termos por outros mas atribuem significados radicalmente distintos ao termo *validade* consoante seja utilizado no âmbito de uma ou de outra perspectiva de investigação, de acordo com a respectiva definição de verdade. Assim, numa investigação quantitativa em que a verdade é definida como uma correspondência, os seus resultados serão considerados válidos se reflectirem o modo como as coisas são de facto no mundo. Deste modo, estabelece-se uma forte conexão com o critério da objectividade: a aplicação apropriada dos procedimentos deverá assegurar objectividade, no sentido de se ajuizar em que medida é que uma dada variável causa mudança na outra variável. Numa investigação qualitativa, o leitor valida intersubjectivamente as interpretações apresentadas. "The ultimate basis for such agreement is that the interpreters share, or come to share after an open dialogue and justification, similar values and interests” (Smith e Heshusius, 1986, p. 9).

Embora não exista um consenso relativamente à linguagem e terminologia usadas para definir os critérios de qualidade de uma investigação qualitativa, Patton (2002) refere que poderemos estar perto desse consenso, o que poderá ser benéfico para se ultrapassar as dicotomias entre objectividade e subjectividade, dicotomias estas, segundo o autor, completamente velhas e desactualizadas. O que é importante, de acordo com Patton, é que o leitor seja persuadido do rigor intelectual e metodológico, bem como da significância, valor e utilidade dos resultados apresentados. A questão da verdade também não se coloca para este autor que considera preferível falar-se de honestidade. “*Truth*, in this case, however, means reasonably accurate and believable data rather than data that are true in some absolute sense” (Patton, 2002, p. 578, destaque no original).

Yin (1989) parte de quatro critérios usados habitualmente para julgamento da qualidade de uma investigação—construção da validação, validação interna, validação externa e fidedignidade—para identificar algumas tácticas no âmbito da estratégia de investigação de estudo de caso que permitam lidar com os mesmos. Apesar deste autor situar a discussão com referência ao estudo de caso, as tácticas apontadas poderão ser aplicáveis a qualquer investigação de natureza qualitativa mesmo que não estruturada por meio da apresentação de estudos de caso.

Um estudo que atinge um elevado grau de validade, de acordo com Yin (1989), deverá ser capaz de reflectir apropriadamente os significados e os pontos de vista dos participantes. Para tal, o investigador não se deve basear unicamente nas suas impressões, devendo recorrer a múltiplas fontes de dados que confiram uma certa consistência na evidência dos dados, e submeter as descrições à verificação das pessoas envolvidas no estudo. Trata-se de tácticas completamente distintas da forma de construir a validação num estudo quantitativo, a qual consiste em estabelecer medidas operacionais correctas para os conceitos em estudo. A construção de validação proposta por Yin (1989) aproxima-se do critério de qualidade indicado por Denzin e Lincoln (1994) de confirmabilidade, em alternativa ao critério de objectividade dos estudos quantitativos. O critério de confirmabilidade aponta para a minimização da influência do investigador, no sentido em que as suas interpretações deverão retratar os significados dos participantes e não serem fruto da sua imaginação. Assim, um estudo qualitativo que satisfaça este critério deverá explicitar os raciocínios usados na interpretação dos dados bem como as fontes que deram origem aos mesmos. Uma das técnicas que poderá ser usada, neste âmbito, é o da verificação por parte dos participantes das interpretações feitas pelo investigador (Patton, 2002; Yin, 1989).

De acordo com Yin (1989), a validação interna possui uma lógica unicamente aplicável a estudos experimentais de natureza quantitativa, onde são estabelecidas relações causais, já que neste tipo de estudos, o investigador tem de determinar até que ponto o evento *x* conduziu ao evento *y*. No entanto, o autor refere que a preocupação com este tipo de validação pode, na investigação por estudo de caso, ser estendida ao problema mais abrangente de fazer inferências. Efectivamente, numa investigação interpretativa, há que ajuizar até que ponto são correctas as inferências feitas pelo investigador, ver até que ponto todas as explicações e possibilidades alternativas foram consideradas. Ponte (1994, pp. 13-4), utilizando a designação de validade interna, refere que uma investigação qualitativa satisfará este critério "se as conclusões apresentadas correspondem autenticamente a alguma realidade reconhecida pelos próprios participantes não sendo unicamente uma construção da mais ou menos fértil imaginação do investigador".

Os significados atribuídos por Yin (1989) à construção da validação e à validação interna no contexto de um estudo qualitativo, caracterizado pelo seu registo exploratório, e simultaneamente descritivo e analítico, aproximam-se dos conceitos de confirmabilidade e credibilidade propostos por Denzin e Lincoln (1994). Por sua vez, Ponte (1994) utiliza o termo credibilidade quando afirma que "uma das condições mais importantes para se poder formular um juízo acerca da credibilidade de um estudo é precisamente a possibilidade de verificação da evidência obtida e dos processos de tratamento dessa evidência usados pelos investigadores" (p. 15).

Segundo Yin (1989), a validação externa prende-se com o problema de saber se os resultados de um dado estudo são generalizáveis para além do estudo de caso imediato. Trata-se, neste caso, de uma *generalização analítica* de natureza diversa da *generalização estatística* obtida nos estudos quantitativos (uma dada amostra, se seleccionada correctamente, generaliza para um universo mais amplo por ser representativa do mesmo). Por intermédio da generalização analítica, os resultados de um estudo interpretativo são generalizáveis para a teoria subjacente ao mesmo, confirmando ou infirmando as teorias existentes, ou ainda contribuindo para a produção de nova teoria (Matos e Carreira, 1994; Yin, 1989). E neste caso, também me parece que o termo transferibilidade proposto por Denzin e Lincoln (1994) traduz melhor a acção de examinar em que medida os resultados de um estudo qualitativo podem ser transferidos para outras situações, explicadas por uma dada teoria, do que o termo validação externa. Erickson (1986) faz também referência a uma generalização obtida dentro do próprio caso estudado, por meio da análise, quando se encontram padrões e se estabelecem ligações entre categorias conceptuais, aproximando-se, assim, da perspectiva de Yin (1989) de generalização analítica, uma vez que a ligação entre categorias conceptuais se estabelece no domínio teórico. O último nível de análise de dados, indicado por Merriam (1991) e Patton (2002), como correspondendo à construção de teoria, através da ligação entre as categorias analíticas e da explicação do significado dos dados, e em última instância, do fenómeno em estudo, enquadra-se também na perspectiva de generalização analítica.

Para Erickson (1986) não faz sentido colocar a ênfase, numa investigação interpretativa, na produção de conhecimento generalizável, já que o foco central deste tipo de investigação reside na interpretação de significados de acções locais e de processos decorridos em situações específicas. Assim, a principal preocupação de um investigador qualitativo reside mais na particularização do que na generalização. Também este autor contesta a ideia de que se possa procurar, num estudo interpretativo, *universais abstractos,* através de uma generalização estatística, afirmando que um estudo bastante detalhado de um caso específico alcança *universais concretos* constituídos por tudo aquilo que transcende o específico e o local, e que caracteriza genericamente todas as situações desse tipo ao longo da história e das diversas culturas, através da comparação com outros casos estudados, igualmente, em grande detalhe. "The paradox is that to achieve valid discovery of universals one must stay very close to concrete cases" (Erickson, 1986, p. 130). Ou seja, a tarefa de analisar o que é único numa dada situação específica, o que é generalizável para outras situações similares, o que é universal e o que é particular, só pode ser efectivamente levada a cabo atendendo aos detalhes da situação concreta em questão. Está aqui também presente o conceito de transferibilidade, uma vez que esta será tanto maior quanto maior for a similitude entre dois contextos (Patton, 2002). Esta ideia de se estudar vários casos no âmbito da mesma problemática para se encontrar padrões ao longo das várias situações encontra-se igualmente em Firestone (1987) e em Yin (1989). Yin, em particular, estabelece uma relação entre o seu conceito de generalização analítica, pela qual os resultados são generalizados nos conceitos teóricos, e a necessidade de testar a teoria através da replicação dos resultados noutros casos semelhantes, designando-a por *replicação lógica.* Assim, o autor refere que a partir do momento em que se faz uma replicação, ocorrendo os mesmos resultados numa outra situação similar, pode-se aceitar esses resultados para um número maior de casos, mesmo que não se efectivem replicações posteriores. O seu conceito de replicação lógica aproxima-se assim do conceito de universais concretos de Erickson (1986).

Uma vez que o leitor de uma descrição detalhada de um dado caso pode sempre compará-lo com a sua própria situação, poderá generalizar os respectivos resultados para o seu próprio contexto. Erickson (1986), a este propósito, aborda uma outra maneira de encarar a generalização, designando-a, agora, por *generalização lógica,* transferindo a responsabilidade de julgamento da mesma para o leitor e não para o investigador: deverá ser aquele que, ao examinar as circunstâncias específicas de uma dada situação estudada, determinará até que ponto poderá generalizar para uma outra situação.

De acordo com Brown e Dowling (1998), a questão da generalização coloca-se em qualquer que seja a investigação, quantitativa ou qualitativa, embora possa assumir diferentes naturezas consoante os procedimentos de amostragem usados—amostragem oportunista, teórica (amostra construída por considerações explicitamente teóricas) ou aleatória (amostra representativa). Os autores contestam a concepção usual de *estudo de caso* correspondente ao estudo de um actor único, uma instituição única, ou por exemplo uma turma, nas suas condições naturais para ser compreendido no seu habitat natural. Consideram que tal visão da investigação e do mundo em geral, é mitológica e romântica. Em primeiro lugar, criticam o facto de esse mundo natural ser encarado como uma colecção de sistemas mutuamente independentes cuja realidade seria captada pelo observador, dispensando as suas preconcepções e motivações. Em segundo lugar, afirmam que referenciar a singularidade do objecto de estudo implicaria considerar os múltiplos contextos em que o mesmo possa estar envolvido. E dão o exemplo de um actor único, referido como objecto de estudo, e sobre quem, contudo, não se incide a atenção nos seus multifacetados aspectos, como o comportamento nas actividades domésticas ou de lazer, a história de vida e história familiar, os aspectos físicos (o sistema cardiovascular, etc.). Ou seja, os autores consideram que a investigação não está a estudar um actor único definido naqueles termos, mas sim a agir selectivamente nos vários campos em que esse mesmo actor participa, o que corresponde, efectivamente, a fazer uma amostragem, já que não se pode considerar que os locais potenciais da investigação sejam independentes de todos os outros. Segundo Brown e Dowling, muitos dos investigadores educacionais designam as suas amostras oportunistas (obtidas pela emergência de uma oportunidade) de estudos de caso para lhes conferirem deliberação, reificando-os como métodos específicos de investigação.

> Essentially, all research is case study research insofar as it makes claims about one or more specific cases of or in relation to a broader field of instances or phenomena. All research seeks to relate its own local findings to this more general field. (Brown e Dowling, 1998, p. 30)

Assim, a referência de estudo de caso, para os autores, não corresponde a um método de investigação mas sim à forma como são organizados e estruturados os métodos de investigação, podendo antes o caso ser interpretado como o modo como se descreve os procedimentos de amostragem. Os resultados de um estudo são, em certa medida, independentes do seu contexto, o que constitui uma condição para a sua generalização. “The empirical site of educational research is, in this sense, consumed by research and this consumption entails the transformative **recontextualization** of the site" (Brown e Dowling, 1998, p. 164, destaque no original).

No que se refere ao quarto critério de julgamento de qualidade de uma investigação, a fidedignidade, Yin (1989) considera que uma investigação com bastante fidedignidade deveria conduzir aos mesmos resultados e conclusões caso fosse de novo conduzida por outro investigador, sob os mesmos procedimentos. Aqui, o autor faz questão de distinguir esta situação da replicação, referida atrás. Trata-se de repetir o mesmo caso e não de fazer um outro estudo de caso para efeito de replicação de resultados. Yin (1989) sublinha a importância de todos os procedimentos utilizados num estudo serem devidamente explicitados, e com grande detalhe, para que se torne possível a repetição de um estudo. Relativamente a este assunto, continuo a defender o mesmo ponto de vista que apresentei anteriormente em Rodrigues (1997) e que passo a citar:

> Pessoalmente, considero que será inatingível a fiabilidade[57], definida sob aquela perspectiva, uma vez que, um mesmo texto, oral ou escrito, pode ter diferentes significados para diferentes pessoas. Parece-me, contudo, de uma extrema pertinência tentar observar, o mais possível, o objectivo último da fiabilidade que é o de minimizar os erros, tentando clarificar os pressupostos do investigador e recorrendo a diversos instrumentos de recolha de dados, por forma a permitir um cruzamento de dados. (p. 124)

Assim, mais uma vez, prefiro a terminologia adoptada por Denzin e Lincoln (1994), nomeadamente o termo confiança subsidiariamente ao termo fidedignidade, pois, de facto, só me parece possível fazer uma repetição estrita de um estudo, conduzindo rigorosamente aos mesmos resultados, se se tratar de um estudo quantitativo com uma problemática externa ao domínio social. Neste caso, a objectivação da realidade encontra-se subjacente à investigação e o distanciamento do

449

[57] Na minha tese de mestrado, traduzi o termo em inglês *reliability* por fiabilidade enquanto que na presente dissertação, utilizo o termo fidedignidade por me parecer que traduz melhor o sentido do mesmo.

investigador relativamente ao objecto de estudo é maximizado. Não podemos ignorar a dinâmica própria dos processos sociais. Uma repetição de um estudo teria de lidar não só com as alterações sofridas pelos respectivos participantes como também com as diferentes condições contextuais. Num contexto de uma investigação qualitativa, poderei considerá-la fidedigna se der um outro significado ao termo fidedignidade: uma investigação com resultados em que se pode confiar, na medida em que os dados expostos apresentam ampla evidência das interpretações realizadas. Uma posição convergente com o que acabei de defender é a de Bogdan e Biklen (1991/1994) quando afirmam que só no caso de dois estudos, incidentes no mesmo fenómeno, chegarem a resultados contraditórios ou incompatíveis, se poderá duvidar da sua consistência. Ponte (1994), ao referir-se aos critérios de qualidade dos estudos de caso qualitativos, e tendo considerado os mesmos igualmente aplicáveis a toda a investigação qualitativa, discute também a questão da repetição das operações de um estudo poder conduzir a resultados semelhantes. Para este autor, uma das razões que dificulta o cumprimento deste critério é o facto de os objectos estudados serem multi-facetados e sempre em evolução. O autor chama ainda a atenção para o facto de a subjectividade do investigador desempenhar um papel relevante neste tipo de investigação, acabando por concluir "que os estudos de caso qualitativos, em comparação com outras abordagens, permitem ganhar em validade interna mas perdem irremediavelmente em fidedignidade" (p. 14). Tal como fiz referência atrás, validade interna, para este autor, é uma matéria de reconhecimento, pelos participantes no estudo, da realidade consubstanciada nos resultados apresentados.

Para Anderson (1990), as questões de validade interna e de validade externa prendem-se com as questões essenciais formuladas numa investigação educacional, as quais, por sua vez, determinam quatro diferentes tipos de investigação, associados aos níveis hierárquicos de investigação educacional, que o autor distingue. Assim, o nível mais básico de investigação é o descritivo orientado por questões relacionadas com a descrição dos acontecimentos. O segundo nível é o explicativo, associado pelo autor à validade interna, já que esta ajuíza das relações causais entre aquilo que se descreveu no nível anterior. No entanto, neste segundo nível, tal como o autor salienta, o interesse da investigação centra-se em questões relacionadas com as causas de acontecimentos e com a compreensão dos motivos dos eventos ocorridos no universo estudado (por exemplo, numa sala de aula, numa escola). As respectivas implicações para um universo mais vasto situam-se no terceiro nível de investigação, associado por Anderson à generalização e à questão da validade externa. O autor situa-se numa perspectiva quantitativa no modo como concebe o design de investigação: a medição e observações quantificadas e descritas em termos objectivos; relações causais que serão a base para uma generalização orientada por questões conducentes à previsão dos acontecimentos e, em última instância, ao controlo dos efeitos. Por fim, o quarto nível é designado pelo autor como sendo o nível básico ou teórico. Apesar desta designação, este nível é o que se encontra no patamar superior da hierarquia dos quatro níveis de investigação. No quarto nível, o interesse central é explicar por que razões ocorre a generalização, centrando-se assim na compreensão das leis ou princípios subjacentes em jogo. A designação de nível básico decorre, portanto, do facto de neste nível se teorizar acerca de quais os princípios através dos quais se baseia um dado fenómeno.

Todos estes níveis, apesar de poderem ser olhados de forma distinta, interagem mutuamente e são construídos a partir dos anteriores, de acordo com Anderson (1990). Assim, nenhum investigador conseguirá explicar sem antes ter conseguido descrever, nem poderá facilmente generalizar se não for capaz de explicar, nem poderá ainda descobrir ou compreender princípios teóricos se não tiver um conhecimento das generalizações relevantes e suas limitações. Por conseguinte, embora o autor tenha associado estes quatro níveis de investigação a diferentes tipos de investigação, poderá existir numa mesma investigação os quatro níveis em interacção. E de acordo com o seu ponto de vista, os investigadores educacionais deverão levar a sua investigação para níveis superiores ao estritamente descritivo. No entanto, Anderson (1990) refere que os investigadores principiantes na prática da investigação poderão conduzir a mesma percorrendo apenas os níveis inferiores da hierarquia por si indicada.

Embora Anderson (1990) se situe numa óptica quantitativa, o que me parece particularmente interessante, no que o autor afirma, são as relações entre os níveis de investigação. Se pensar numa abordagem de investigação qualitativa, poderei identificar também diferentes níveis de investigação, em interacção, tal como indicado por Anderson, embora concretizados por diferentes meios. Ou seja, um investigador qualitativo pretenderá sempre ir para além da apresentação descritiva dos dados, de forma a alcançar uma análise explicativa do fenómeno em estudo, não obstante esta explicação não se basear em relações causais mas em relações dialécticas mutuamente constitutivas. Embora o investigador qualitativo não lide com a generalização estatística, a sua análise aponta para uma generalização teórica no sentido em que o seu propósito é, efectivamente, obter uma compreensão do fenómeno, pensado em termos genéricos, e não estritamente associado às pessoas específicas envolvidas. É, pois, neste sentido, que o conceito de generalização analítica de Yin (1989) e o de generalização obtida por meio da análise conducente às ligações entre categorias conceptuais de Erickson (1986), bem como o terceiro nível de análise de dados apontado por Merriam (1991), se aproximam da ideia de Anderson (1990) quando se refere aos últimos níveis de investigação, o nível de generalização e o nível teórico. Contudo, será bom clarificar que numa abordagem qualitativa, os princípios teóricos alcançados na conclusão do estudo em causa não são princípios mecanicistas, deduzidos de relações causais, conforme perspectivado implicitamente por Anderson.

Para Winegar e Valsiner (1992, referidos por Matos, Carreira, Amorim e Santos, 1995), a metodologia tem um sentido mais amplo do que o habitual. Não se relaciona unicamente com os métodos de recolha e análise de dados, mas sim com os métodos de investigação com consideração explícita de todos os seus níveis, designadamente a meta-teoria, a teoria, a metodologia, os dados e o fenómeno. As crenças e as assunções do investigador incluem-se na meta-teoria cuja operacionalização ocorre, "pelo menos parcialmente, através de elementos de natureza estética, e portanto não explicitamente racional" (Matos et al., 1995, p. 166). Uma perspectiva semelhante a esta parece ser a perspectiva filosófica de Heidegger (1998; 1999) quando este defende que pode ser importante tentar ganhar uma maior compreensão das nossas crenças e assunções implícitas, mas dado ser impossível a sua explicitação, essa compreensão nunca será completa, ou objectiva. Anderson (1990), por seu lado, aborda esta questão referindo que os investigadores, ao transportarem as suas crenças e assunções acerca do mundo, não são neutros no que respeita aos seus valores e tendências e que a investigação reflecte toda essa bagagem de valores, perspectivas e crenças do investigador. No entanto, o autor clarifica que, no seu ponto de vista, isto não é sinónimo de afirmar que a investigação é subjectiva, dando vários exemplos, como o facto de numa investigação empírica se proceder a medições[58], ou o caso de um sociólogo que investigará sobretudo os padrões de grupos e não as suas próprias motivações individuais, salvo se estas se relacionarem com o comportamento desses grupos, ou ainda o caso de um antropólogo que estudará os significados dos participantes no estudo. Anderson (1990) aglutina estas duas ideias, referindo-se à subjectividade da objectividade presente numa investigação.

453

[58] Tal só acontece se se tratar de uma investigação de natureza quantitativa.

Para este autor, o investigador deve tentar compreender a interacção entre as respostas, as questões e a sua própria perspectiva enquanto pessoa que coloca as questões.

Winegar e Valsiner (1992, referidos por Matos et al., 1995) consideram de fundamental importância a explicitação das ligações entre os diferentes níveis da prática da investigação na concretização de uma via interpretativa em que existe uma progressão do conhecimento do fenómeno. Sublinham igualmente que esses níveis deverão manter-se distintos, para que não exista fusão entre eles, e simultaneamente relacionados, para que não exista autonomia entre os mesmos.

Procedimentos Adoptados e Fundamentação

Ética

De acordo com Anderson (1990), existe um conjunto de princípios éticos a observar numa investigação que envolva seres humanos e, portanto, neste âmbito, nunca se pode considerar que os fins justificam os meios, desde que os meios violem esses mesmos princípios. O princípio a que o autor confere uma maior relevância é o consentimento informado por parte dos participantes no estudo, sendo essencial que os mesmos sejam informados da natureza e do propósito do estudo, dos procedimentos a usar e dos eventuais riscos e benefícios. O consentimento deve ser dado sem qualquer tipo de coerção. Bogdan e Biklen (1991/1994) referem ainda que os sujeitos nunca deverão estar expostos a riscos superiores aos ganhos que possam advir, ou seja, deve ser garantida a protecção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos.

Embora a participação deva ser voluntária, sem estar sujeita a pressões externas, o autor chama a atenção para dois problemas que podem surgir quando o investigador pede voluntários para participarem directamente no estudo. Por um lado, os voluntários que se oferecem tendem a ser as pessoas que detêm menos poder na sociedade, desenvolvendo posições subalternas relativamente ao investigador, estando, portanto, sujeitas a coerção, mesmo que não seja essa a intenção efectiva do investigador. Por outro lado, as pessoas que se oferecem voluntariamente para participarem num estudo, poderão esperar serem ajudadas na resolução de problemas pessoais por via da investigação. Anderson alerta ainda para o risco do investigador afectar as vidas das pessoas ao atribuir-lhes determinados potenciais, défices ou atributos no acto de seleccionar e etiquetar os participantes. Todo o participante deve ter o direito de se retirar do estudo, seja em que momento for. Esta é, segundo o autor, uma salvaguarda para os sujeitos que sintam que os princípios éticos estão a ser violados.

O investigador deve informar os participantes acerca do estudo conduzido, assim que os dados sejam colhidos, ou esclarecer qualquer questão que surja, devendo estar sempre disponível para responder a qualquer pedido de esclarecimento por parte dos participantes no que respeita aos procedimentos usados. Por exemplo, em estudos que sejam usados questionários é aconselhável, sempre que possível, oferecer aos participantes um sumário dos resultados.

No que respeita ao princípio de confidencialidade, deve existir um entendimento claro entre todas as partes envolvidas—investigador e participantes—sobre o uso que se faz dos dados. A identidade dos participantes deve ser protegida e, portanto, deve manter-se anónima, o que implica que deve ser vedada a possibilidade de o leitor deduzir a respectiva identidade. Anderson (1990) afirma que os participantes têm direito à privacidade e que no caso de serem usados dispositivos como microfones ocultos ou câmaras de vídeo, potenciais violadores da privacidade, tal deve ser objecto de consentimento informado.

Relativamente aos princípios éticos que adoptei no presente estudo, posso afirmar que obtive o consentimento informado de todos os intervenientes. O modo como se processou a informação e esse consentimento diferiu entre a professora e os alunos participantes já que no primeiro caso, tal foi feito oralmente, e no segundo caso, por escrito. No que respeita ao Conselho Executivo da escola, este deu autorização, por via oral, para a minha entrada livre na escola e forneceu-me os dados relativos aos níveis que os alunos obtiveram no final do ano lectivo. Tive a preocupação, em ambos os anos lectivos correspondentes à recolha de dados, de informar, por escrito, os encarregados de educação de todos os alunos das duas turmas, dos objectivos do estudo, bem como dos processos metodológicos e procedimentos a adoptar, antes de iniciar a recolha. Pedi também autorização aos mesmos para proceder à recolha de dados, tendo recolhido as suas assinaturas (anexo 1). No primeiro ano lectivo, o encarregado de educação de uma aluna não deu autorização e no segundo ano lectivo, a encarregada de educação de um aluno não deu igualmente autorização. Ambos os alunos em causa não pertenciam aos grupos-alvo seleccionados, não tendo, portanto, sido alvo de registo vídeo nem áudio. Os seus trabalhos também foram excluídos do conjunto dos documentos a analisar. Todos os restantes encarregados de educação deram autorização para que eu procedesse à recolha de dados com os seus educandos.

Com o objectivo de observar os princípios éticos de anonimato dos alunos participantes no estudo, foram usados pseudónimos para os alunos do grupo-alvo seleccionado. No que respeita aos nomes dos restantes alunos das turmas, são por vezes usadas letras para os distinguir, não tendo existido necessidade de lhes atribuir um pseudónimo pois não existem registos em vídeo da sua actividade em grupo. São as suas produções que são analisadas, ou o seu discurso em momentos colectivos de grupo-turma. No que respeita às suas produções, como estas são realizadas em grupo, o que se identifica é o grupo através de letras do alfabeto. Relativamente aos momentos colectivos, consegue-se identificar falas de alunos mas não a autoria das mesmas, já que a câmara de vídeo esteve sempre, em todas as aulas, direccionada unicamente para o grupo-alvo, mesmo nesses momentos.

O uso da câmara de vídeo foi informado aos encarregados de educação, os quais concederam a respectiva autorização. Como esta foi usada unicamente nas aulas de Matemática, não violou qualquer aspecto da vida privada dos elementos do grupo seleccionado. Nos momentos em que a câmara captou algum aspecto das interacções entre os alunos, externo à actividade matemática por si desenvolvida na aula, tal não foi considerado na recolha de dados por se considerar que se relacionava com a vida pessoal dos alunos, e portanto com a sua privacidade, e não com os objectivos do estudo. Todos os dados obtidos serviram unicamente os propósitos da investigação, tendo sido observado para todos eles o princípio de confidencialidade.

Por outro lado, o facto de a metodologia adoptada não estar baseada em qualquer tipo de experimentação é, do meu ponto de vista, o principal garante de respeito pelos princípios éticos. Todas as aulas observadas decorreram de acordo com o modo habitual de a professora trabalhar e, por isso, os alunos não sofreram qualquer consequência que, eventualmente, poderia ocorrer caso se tratasse de um estudo experimental em que se manipulasse as diversas variáveis em jogo. Os alunos do grupo-alvo, apesar de terem sido alvo de um registo em vídeo e em áudio, registo este que, com a continuação, eles acabaram por ignorar e por se alhear, desenvolviam um trabalho idêntico ao dos restantes grupos da turma, não lhes tendo sido pedido qualquer tipo de actividade que os pudesse diferenciar dos seus colegas de turma.

Selecção dos Participantes

Desde logo pensei convidar para participar no meu estudo a mesma professora que já tinha colaborado comigo no trabalho empírico da minha tese de mestrado. Como nessa altura o trabalho de campo tinha decorrido de forma profícua e aprazível com essa professora, poderia esperar que o mesmo voltasse a acontecer na presente investigação. A minha experiência anterior de trabalho com ela assegurava-me o conhecimento de se tratar de uma professora bastante segura e experiente cujo desempenho não se altera pelo facto de as suas aulas estarem a ser videogravadas. Essa era, para mim, uma condição importante a ter em conta na selecção da professora participante, tanto mais que a minha observação de aulas incidiria agora num maior número de aulas do que acontecera na altura da tese de mestrado. Já que o meu estudo envolvia alunos, era minha intenção respeitar o princípio ético de os mesmos não serem prejudicados com a sua participação. Pretendia, pois, que as aulas decorressem como habitualmente, de forma a que a minha entrada na sala de aula, acompanhada do aparato da câmara de vídeo e tripé, fosse o menos perturbadora possível, e a pouco e pouco, fosse sendo integrada na espontaneidade e naturalidade das aulas de Matemática da turma. E para tal, era fundamental que os alunos sentissem que a sua professora de Matemática era a mesma de sempre, não vislumbrando na mesma qualquer sinal de alteração nas suas práticas habituais, no seu discurso, no seu modo de se relacionar com eles.

O meu conhecimento anterior do trabalho da professora assegurava-me ainda que a mesma teria um desempenho consonante com uma metodologia de trabalho baseada na inquirição, de modo a que os alunos tivessem um ambiente de trabalho favorável à exploração das tarefas de investigação propostas, à discussão matemática no seio do grupo, e ao desenvolvimento de uma explicitação de raciocínios fundamentada no uso de argumentos matemáticos. Por norma, a professora conduzia o trabalho na sala de aula por forma a levar os alunos a descobrir, por si próprios, os vários conceitos matemáticos, por via da sua experimentação matemática, muitas vezes, desenvolvida em trabalho de grupo. Era também habitual em si uma atitude questionadora quando circulava pelos grupos, sendo visível em si uma preocupação de apoiar o trabalho dos alunos, sem contudo lhes direccionar o caminho, ou antecipar-lhes o que deveria decorrer do seu trabalho exploratório. O modo como dirigia o discurso nos momentos colectivos quase sempre tinha o porquê como eixo orientador das questões que ia colocando aos alunos, levando-os a tentar explicitar as razões que fundamentam as várias propriedades matemáticas. Esta era uma característica importante a atender no que respeita ao discurso do professor a seleccionar. A professora usualmente incidia as suas questões nas razões explicativas das propriedades matemáticas estabelecidas como verdadeiras, colocando, portanto, o discurso matemático na sala de aula num nível superior de reflexão, decorrente da explicitação dos raciocínios e processos. Na entrevista, a professora assumiu essa sua característica como sendo reflectida:

> É reflectida, ou seja, eu faço intencionalmente, porque eu sei que se eu perguntar porquê, ele vai me tentar explicar. E se ele me tentar explicar, não sou só eu que vou perceber melhor se ele percebe, ele próprio vai perceber se percebe ou não.

Neste nível de discurso, a professora veicula na sala de aula normas sociomatemáticas, segundo as quais é suposto que pretendemos avançar para lá da constatação de que algo é verdadeiro, incidindo a nossa reflexão sobre porque é que algo é verdadeiro. E este nível superior de discurso matemático tinha, à partida, estreitas relações com os objectivos do estudo centrados nas várias formas de chegar a uma demonstração e respectivas funções, incluindo a explicativa. Por último, uma razão não menos importante que me levava a pensar nesta professora como participante no meu estudo era a amizade que nos unia e que faria prever um bom funcionamento em equipa em todo o trabalho que iríamos negociar e desenvolver ao longo do ano, o que efectivamente veio a acontecer em ambos os anos lectivos e principalmente, no segundo ano de recolha de dados, em que existiu um maior trabalho em conjunto no que respeita à preparação das aulas observadas.

Todas estas razões que atrás enunciei presidiram à minha escolha da professora participante no estudo, mais do que o nível de ensino da turma. Assim, como esta professora trabalha no 3º ciclo do ensino básico, seria este o nível de ensino sobre o qual incidiria a minha investigação. No primeiro ano lectivo de recolha de dados, a professora tinha apenas turmas de 9º ano. Considerei tratar-se de um ano de escolaridade adequado aos propósitos do meu estudo, embora tal não tenha sido objecto de uma escolha deliberada capaz de condicionar a selecção da professora. O que se passou foi exactamente ao contrário: a selecção da professora é que condicionou o nível de ensino concreto da turma em que iria recolher os dados. Para mim, a selecção da professora participante era assaz importante para a consecução dos objectivos do estudo, dada a natureza específica dos mesmos e uma vez que o trabalho empírico se iria desenvolver longitudinalmente no tempo, ao longo do ano lectivo. Assim, apesar de não ter sido objecto de uma escolha prévia, considerei que o facto de ir recolher dados numa turma de 9º ano poderia ser proveitoso para o estudo por ser um ano de charneira entre o ensino básico, vocacionado para uma abordagem mais informal da demonstração, e o ensino secundário, no qual se dá uma atenção mais explícita e formal à demonstração.

Pelos motivos que explanei, decidi convidar esta professora a colaborar de novo comigo na componente empírica de investigação. Nesse ano lectivo, a professora tinha compromissos relacionados com a sua vida profissional mas que eram concretizados fora da sua componente lectiva, e eu tinha receio que esse facto lhe tirasse disponibilidade para colaborar comigo no meu estudo. Estava, pois, preparada, à partida, para ouvir da sua parte a declinação do convite, por motivos de indisponibilidade. Mas tal não aconteceu. Assim que ouviu o meu convite, prontamente se disponibilizou para participar, exigindo simplesmente a garantia de que as suas aulas decorreriam como habitualmente e que poderia gerir os conteúdos programáticos ao longo do ano, independentemente da sua participação no estudo. Esta conversa ocorreu em Novembro de 2004 e combinámos que eu começaria a recolha de dados no início do 2º Período, e que observaria e videogravaria todas as aulas de Matemática até ao final do ano lectivo. Por motivos que à frente apresentarei, tive necessidade de voltar a recolher dados. Nessa altura, não me atrevi a reiterar o convite à professora, e comecei a pensar noutras possibilidades. No entanto, foi ela própria que, no final desse ano lectivo, se ofereceu para voltar a colaborar comigo, se eu estivesse interessada. Dada a experiência desse mesmo ano, considerámos que seria preferível então voltar a recolher dados numa outra turma de 9º ano. Para esse efeito, a professora teve de pedir o favor aos colegas de disciplina de lhe cederem uma das suas turmas e no ano lectivo seguinte, como um dos colegas lhe cedeu uma das suas turmas que tinham acabado de concluir o 8º ano, em vez de ficar unicamente com turmas de 7º ano, como era hábito, a professora ficou com turmas de 7º ano e com uma de 9º ano para que eu recolhesse os dados nesta última.

Do objectivo de fazer uma observação, em profundidade, que desse conta do fenómeno, tal como ele ocorre, seguindo o respectivo processo (Merriam, 1991), decorreu a necessidade de se proceder à selecção de um grupo de alunos para se fazer a gravação em vídeo das suas actividades, por forma, a captar, integralmente, todos os pormenores das suas actividades e interacções. No que se refere à selecção da turma e do grupo de alunos, deixei a mesma a cargo da professora já que era ela que conhecia os alunos e a sua dinâmica.

No primeiro ano lectivo, os critérios de selecção da turma foram: (a) o de ser uma turma com um desempenho razoável em Matemática que deixasse prever uma evolução em capacidades de ordem superior como é a de elaborar uma demonstração; e (b) também a de ser uma turma com hábitos de participar oralmente, embora este último critério tivesse um menor peso de ponderação. Na selecção do grupo de alunos sobre o qual incidiria a gravação em vídeo, e que portanto seria objecto de uma análise mais fina, estiveram igualmente presentes os dois critérios usados na selecção da turma, embora com um peso inverso de ponderação. O critério preponderante usado na selecção do grupo foi o de ser um grupo caracterizado por os seus elementos habitualmente discutirem entre si as suas ideias, e não tanto o seu desempenho matemático. Assim, grupos com um melhor desempenho ao nível da disciplina de Matemática não foram escolhidos por usualmente os seus elementos verbalizarem menos as suas ideias. A discussão matemática usual no seio do grupo facilitaria o meu acesso aos pensamentos e raciocínios matemáticos dos alunos através da análise documental dos registos em vídeo. Se eu tivesse que os interrogar constantemente sobre os processos usados, ou tivesse que manter constantemente a minha presença junto do grupo, tal poderia traduzir-se numa excessiva intrusão da minha parte na dinâmica do grupo, o que retiraria a naturalidade à vivência usual do grupo e inter-relações entre os respectivos membros.

Devo referir que, em ambos os anos lectivos, a formação dos grupos não foi feita propositadamente para os objectivos do estudo. A escolha da composição dos grupos foi da responsabilidade dos alunos, tendo sido feita no início do ano lectivo e mantida a respectiva composição em todo o ano. No caso do grupo-alvo do segundo ano lectivo, o Ricardo justificou, na entrevista, o facto de ele e o Bernardo se terem juntado à Maria e à Sara por estas serem "calmas", o que poderia ser benéfico, do seu ponto de vista, para que trabalhassem bem em Matemática, sem se dispersarem para outras conversas paralelas (o que poderia acontecer caso ele, Ricardo, se tivesse juntado aos seus maiores amigos na turma).

No segundo ano lectivo não existiu selecção de turma pois era a única que a professora tinha de 9º ano. E, ao pedir o favor de lhe concederem uma turma, a professora nunca poderia pedir que lhe dessem uma turma com um bom desempenho em Matemática. Por isso, a única turma que acabei por usar na análise de dados tinha características opostas no que se refere ao critério que acabei de referir. Era uma turma que, globalmente, no início do ano lectivo tinha uma má relação com a Matemática, revelava falta de hábitos de trabalho bem como dificuldades de aprendizagem nesta disciplina. Tinha decidido observar nesse ano lectivo unicamente as aulas em que os alunos explorassem as tarefas pensadas especificamente para servirem os objectivos do estudo. Assim, a primeira aula a que fui neste segundo ano de recolha de dados foi a 5 de Dezembro de 2005. No início do ano, antes da minha primeira observação, a professora teve que insistentemente trabalhar com os alunos as normas disciplinares a respeitar dentro da sala de aula bem como as normas de funcionamento do trabalho de grupo na aula de Matemática. Chegou a telefonar-me informando-me das características da turma, dizendo que tinha sérias dúvidas de que os dados recolhidos naquela turma pudessem ser aproveitados para o meu estudo, pois além da falta de hábitos ao nível de uma postura concentrada e trabalhadora na sala de aula, os alunos da turma manifestavam, na sua generalidade, também grandes dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Tenho por norma orientadora da minha vida considerar que, para além das opções que deliberadamente tomo e que, de certa forma, traçam o percurso da mesma, existe todo um conjunto de circunstâncias que eu não escolho e que, ao virem ao meu encontro, dão forma ao percurso da minha vida e ao que eu faço. Encaro-as sempre positivamente, considerando que o acaso associado a essas circunstâncias dita que foi preferível que isto ou aquilo acontecesse de acordo com esse acaso, mesmo que à primeira vista, pareça ou dê a sensação do contrário. Vem isto a propósito de que algo que ocorreu ao contrário do que inicialmente poderia pretender acabou por ser mais vantajoso para os propósitos do estudo, ao proporcionar que o estudo do desenvolvimento de capacidades de ordem superior incidisse numa turma de alunos que iniciava o seu ano escolar com um fraco desempenho a Matemática. Contrariamente aos nossos receios iniciais de que, eventualmente, os alunos dessa turma não conseguissem alcançar os níveis superiores do processo de pensar matematicamente, os alunos manifestaram uma competência matemática no domínio da capacidade de raciocinar matematicamente, e portanto, foi possível tirar ilações do estudo acerca das relações entre essas mesmas capacidades e os desempenhos de alunos que no seu percurso escolar evidenciaram dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Na entrevista, a professora referiu-se aos ganhos que obteve com a sua participação no estudo bem como aos ganhos da turma do segundo ano de recolha, por ter participado no projecto. Relativamente a si própria, considerou que o trabalho do segundo ano de recolha de dados tinha sido melhor e mais gratificante. Ouçamos as suas próprias palavras: “gosto muito de participar em projectos com outras pessoas”; “este projecto traz-me prazer”. Considerou ainda que o facto de eu ter procurado tarefas para os alunos explorarem nas aulas, de acordo com os objectivos do estudo, foi uma mais-valia e também lhe facilitou o trabalho. O tempo despendido na escola com as múltiplas actividades desenvolvidas na mesma não seria compatível com a disponibilidade necessária para procurar essas mesmas tarefas. A professora referiu que poderia fazer essa procura para duas ou três aulas mas não já não conseguiria fazê-lo para um trabalho continuado ao longo do ano. Como essa procura ficou a meu cargo, a professora sentiu-se, pois, disponível para pensar acerca das tarefas. Nesse ano, introduziu nas suas aulas de Matemática uma incidência na demonstração, o que antes nunca tinha feito, apesar de habitualmente levar os alunos a entender que a partir de muitos casos se pode fazer uma ilação para todos os casos mas que não se pode logo dizer, de repente, que o que acontece para muitos exemplos se verificará para todos os casos: "nunca tinha trabalhado propriamente a demonstração, isso nunca tinha feito, pôr os alunos a demonstrar como nós fizemos, isso eu realmente nunca tinha feito, e não pensei que eles chegassem lá tão bem".

No que respeita à turma, a professora chegou a comentar no decurso da entrevista: "esta turma saiu-lhes a lotaria, a sorte grande, terem entrado neste projecto neste ano. Acho. Acho. Acho. Porque eles tinham uma aversão muito grande à Matemática". Considerou que aquele tipo de tarefas provoca a discussão, o consenso e obriga a pensar, o que não era hábito nos alunos da turma.

> Colocaram mais questões acerca dos outros conhecimentos, dos outros conteúdos, porque se trabalhou a demonstração. Porque eles tiveram que pensar, porquê isto, o que se escreve a seguir. . . . Havia ali miúdos que lhes fez muito bem este tipo de trabalho. Miúdos que colocavam muitas questões.

O desenvolvimento da capacidade de aplicação e mobilização dos conhecimentos anteriores foi igualmente registado pela professora, lembrando uma das aulas observadas[59], em que os alunos a surpreenderam ao ver a forma como, naquela tarefa de geometria, eles tinham feito a conexão com a proporcionalidade inversa, sem que ela própria se tivesse lembrado de tal , nem o enunciado remetesse implicitamente para esse mesmo assunto. Assim, apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos daquela turma em Matemática, a professora considerou que a sua participação no estudo fez com que desenvolvessem muito o raciocínio e que, a pouco e pouco, fossem correspondendo muito bem.

Recolha de Dados

No presente estudo, foi utilizada a triangulação metodológica, tendo sido usadas as seguintes técnicas de recolha de dados: observação participante e naturalista, documentos e entrevistas. Antes de apresentar a forma como utilizei as referidas técnicas, irei primeiro clarificar o próprio conceito de *dados.*

Dados. Num estudo qualitativo, os dados, de acordo com Bogdan e Biklen (1991/1994), incluem todos os materiais recolhidos pelo investigador para constituir a base da análise, tais como notas de campo referentes às observações efectuadas e transcrições de entrevistas ou de registos em vídeo, ou ainda, documentos considerados pertinentes para o estudo em questão. Erickson (1986) tem um conceito um pouco diferente de dados: todo o material descrito atrás como dados, constitui material documental (fontes de dados) a partir do qual, e por meio de análise, se constroem os dados. É a análise que permite converter as fontes de informação em dados propriamente ditos. Partilho desta perspectiva uma vez que considero que é o olhar do investigador guiado pelas questões orientadoras do seu estudo que atribui significado ao

[59] Aula de 4 de Maio em que se explorou a tarefa "Investigações com espelhos II".

que vê, ao que lê, ao que ouve, construindo assim os dados que servirão, por sua vez, de base para uma análise mais fina e profunda no sentido da construção de resultados do seu estudo. Uma mesma fonte pode dar origem a dados riquíssimos se escrutinada por um investigador e simplesmente ser completamente ignorada por alguém cujos interesses não se situem ao nível da investigação. Apesar da definição de dados de Bogdan e Biklen (1991/1994), atrás apresentada, estes autores aproximam-se um pouco desta ideia quando referem que os dados não contemplam apenas aquilo que é recolhido no decurso de estudo, incluindo também "a maneira como as coisas aparecem quando abordadas com um espírito de «investigação»" (p. 200). Os autores salientam ainda que o investigador qualitativo tem sempre que levar os objectos e acontecimentos "ao instrumento sensível da sua mente de modo a discernir o seu valor como dados" (p. 200).

Observação. No que respeita à observação, o investigador pode assumir, desde uma posição completamente externa à situação a estudar, até a uma posição de total intervenção. A designação de observação participante reporta-se a um método de investigação em que o investigador assume um papel de participante nas actividades dos elementos da comunidade alvo da observação. É um método especialmente indicado para as investigações vocacionadas para o conhecimento: (a) das estruturas específicas dos acontecimentos ocorridos numa situação particular; (b) das perspectivas das pessoas envolvidas na situação a observar; (c) da localização de ocorrências naturais, em que não existe um controlo experimental sobre os factores de influência do fenómeno em estudo, com a identificação de padrões na organização social e cultural; e (d) da identificação dos factores que influenciam os padrões identificados nos dados (Erickson, 1986). Este método permite obter mais informação acerca dos eventos sociais do qualquer outro método (Patton, 2002).

Optei, portanto, por uma observação participante e naturalista do desempenho dos alunos sob condições normais de trabalho por permitir ter acesso aos comportamentos e aos acontecimentos no próprio momento em que se produzem. Ao assumir o papel de observadora participante, não manipulei as actividades para os fins da investigação, já que pretendia que aquelas ocorressem da forma mais natural possível, de acordo com a planificação estabelecida pela professora de Matemática da turma e negociada comigo de forma a integrar as tarefas a serem exploradas pelos alunos, que foram preparadas no âmbito dos propósitos do presente estudo. Assim, as tarefas constituíram um instrumento fundamental para recolha de dados, já que teriam que ser tarefas com uma natureza investigativa que levassem os alunos a conjecturar e a demonstrar as suas conjecturas. De qualquer modo, apesar de eu ter assumido alguma intervenção ao nível da escolha das tarefas, não desenvolvi qualquer tipo de intervenção experimental. As tarefas (anexo 6) foram, na sua maioria, retiradas, ou adaptadas na sua forma, de textos em que outros autores as usaram. A tarefa da exploração com números foi adaptada de Healy e Hoyles (2000), a das bissectrizes foi adaptada de Herbst (2002), as dos eixos de simetria e "Investigações com espelhos II" foram retiradas de APM (2000). A tarefa "Circunferência e Ângulos III" foi criada por mim.

De acordo com Erickson (1986), não se pode caracterizar os métodos do trabalho de campo como sendo radicalmente indutivos, ao contrário do que por vezes se pensa. Assim, o autor clarifica que se é verdade que as categorias específicas para observação não são determinadas antes da entrada em campo do investigador como observador participante, também é verdade que o investigador identifica sempre, previamente, questões conceptuais inerentes aos interesses da sua investigação. "In fieldwork, induction and deduction are in constant dialogue" (Erickson, 1986, p. 121).

Partilho desta perspectiva e considero que a mesma corresponde ao que sucedeu na presente investigação. Conduzi uma observação aberta sem definir rigidamente *a priori* os itens de observação, estando, portanto, disponível para captar o que pudesse emergir dessa observação e que tivesse relação com os objectivos do estudo, mesmo que tal não tivesse sido previsto por mim. No entanto, tanto a teoria como as questões impulsionadoras do estudo orientaram os processos de recolha e análise de dados. Não entrei no trabalho de campo completamente despida de ideias conceptuais, com a postura de retirar dos contextos de ocorrência dos eventos a observar o que quer que eles me oferecessem. Se os dados são construídos pelo investigador, tal significa que este, enquanto investigador em campo, persegue deliberadamente linhas de investigação, apesar dos termos específicos categorizados para efeitos de observação poderem mudar de acordo com as características distintas dos acontecimentos ocorridos nos contextos naturais onde decorre a observação, tal como defendido por Erickson (1986). O autor atribui principalmente aos antropologistas a visão mística e romântica do trabalho de campo inteiramente indutivo como aquele em que o investigador o inicia sem pré-concepções, aprendendo os métodos pelo simples facto de os praticar, e induzindo as categorias analíticas após o mesmo. Erickson sustenta que não existem induções puras já que levamos os nossos esquemas de interpretação para qualquer que seja a nossa experiência.

> From this point of view the task of fieldwork is to become more and more reflectively aware of the frames of interpretation of those we observe, and of our own culturally learned frames of interpretation we brought with us to the setting. . . . Framing research questions explicitly and seeking relevant data deliberately enable and empower intuition, rather than stifle it. (Erickson, 1986, p. 140)

A reflexividade existente numa investigação apresenta uma dupla vertente: física, pela presença do investigador, e epistemológica, por o investigador criar conhecimento acerca do fenómeno, ao procurar estudá-lo (Lerman, 1996). Esta reflexividade decorre do facto do investigador constituir um actor no processo de investigação, reflectindo o que é na situação estudada, e aprendendo em co-emergência com essa mesma situação. O investigador, no seu trabalho de campo, deverá estar consciente das suas próprias perspectivas, bem como das perspectivas das pessoas que observa e com quem fala (Erickson, 1986; Patton, 2002).

> Reflexivity calls for self-reflection, indeed, critical self-reflection and self-knowledge, and a willingness to considerer how who one is affects what one is able to observe, hear, and understand in the field and as an observer and analyst. The observer, therefore, during fieldwork, must observe self as well as others, and interactions of self with others. (Patton, 2002, p. 299)

Passo agora a descrever o modo como se processou a minha observação das aulas. Todas as aulas observadas tiveram a duração de 90 minutos. Quando os alunos trabalhavam em grupo utilizavam apenas uma mesa de trabalho, e os alunos da frente viravam-se para trás. Assim, os grupos na sua maioria tinham a composição de quatro elementos cada. A organização em grupo não implicava, deste modo, qualquer mudança na disposição das mesas. O trabalho em grupo poderia decorrer durante toda a aula ou apenas numa parte da aula e, neste caso, rapidamente, e sem barulho, os alunos se dispunham em grupo. O grupo-alvo encontrava-se sentado na zona de trás, do lado direito da sala de aula. Esta localização foi deliberada de forma a que a câmara de vídeo, dirigida sempre para o grupo-alvo, estivesse num local mais recatado da sala, com o objectivo de atenuar o seu carácter intrusivo e eventualmente perturbador do comportamento habitual dos participantes no estudo. A câmara foi fixa a um tripé e colocada ao lado do grupo-alvo de modo a captar os quatro membros do grupo.

No ano lectivo de 2004/05, observei quase todas as aulas de Matemática de uma turma de 9º ano durante os 2º e 3º Períodos, num total de 56 aulas, correspondendo a 28 blocos de 90 minutos. Antes de iniciar a recolha de dados, tinha acordado com a professora que, nalgumas dessas aulas, os alunos explorariam as tarefas que eu tinha preparado com o objectivo último de recolher dados para o presente estudo. No entanto, optei por observar as aulas de forma contínua para melhor me inteirar da ligação entre umas aulas e outras, para melhor me familiarizar com a turma e com o grupo-alvo, e também por pensar que poderia ser que surgisse algo relacionado com os objectivos do estudo numa aula usual, em que os alunos não explorassem nenhuma daquelas tarefas propostas por mim e negociadas com a professora. No entanto, a exploração da quase totalidade dessas mesmas tarefas ia sendo adiada sucessivamente pela professora, até que considerou não ter tempo para esse efeito e as mesmas acabaram por não ser concretizadas pelos alunos. Nesse ano lectivo, a professora teve de faltar por motivos diversos e alheios à sua vontade, o que dificultou a sua gestão do trabalho curricular envolvendo todos os conteúdos programáticos. Essa dificuldade obrigou-a a conferir um formato mais expositivo às suas aulas por forma a acelerar o tratamento de todos os tópicos programáticos. Além disso, o facto de nesse ano lectivo se ter introduzido pela primeira vez o exame de Matemática contemplando todos os conteúdos programáticos do 9º ano acabou por condicionar também o número de aulas disponíveis para o cumprimento do trabalho previsto no início do ano, já que o mês de Junho anteriormente destinado à leccionação das aulas, ficou praticamente reservado à realização dos exames. Por este motivo, a última aula das turmas de 9º ano foi a 9 de Junho.

Assim, acabado o meu primeiro ano de recolha de dados, eu via-me sem dados suficientes pois nas aulas observadas os alunos não tinham explorado tarefas com uma natureza tal que os colocasse face ao desafio de construírem demonstrações. Tal facto levou-me à decisão de fazer nova recolha de dados no ano lectivo seguinte. Por conseguinte, no ano lectivo de 2005/06, numa outra turma de 9º ano da mesma professora, observei de novo aulas de Matemática, tendo, desta vez, optado por acompanhar apenas as aulas em que seriam exploradas e discutidas as tarefas propostas por mim, de modo a rentabilizar o meu tempo no sentido de avançar um pouco mais na análise de dados no tempo sobrante ao da observação das aulas, uma vez que me sentia a atrasar a investigação com a repetição de mais um ano de recolha de dados. Assim, observei nesse ano lectivo um total de 30 aulas, correspondendo a 15 blocos de 90 minutos. Estas tarefas foram negociadas e trabalhadas previamente com a professora. Assim, apesar de ter observado as aulas de Matemática em dois anos lectivos, só se constituíram em dados as observações das aulas do segundo ano lectivo. No entanto, o trabalho de campo desenvolvido no primeiro ano lectivo proporcionou-me aprendizagens que me foram úteis na análise empírica dos dados do segundo ano lectivo. Das várias aulas observadas no último ano, apenas apresento na análise de dados as que foram mais relevantes para o propósito do estudo.

Em ambos os anos lectivos, a professora deu aulas suplementares além das previstas no calendário escolar. No ano lectivo de 2004/05, a razão destas aulas deveu-se ao facto de a professora ter sentido necessidade das mesmas como forma de garantir o trabalho curricular envolvendo todos os conteúdos programáticos daquele ano, uma vez que dispunha de um menor número de aulas do que habitualmente, pelas razões atrás expostas. A sua ansiedade com o cumprimento programático acentuou-se por se tratar de um ano terminal de ciclo e por os alunos terem no final do ano um exame que contemplava todos os conteúdos programáticos do 9º ano. Assim, entre 14 de Fevereiro e 12 de Abril, os alunos tiveram aulas suplementares de Matemática, em blocos de 90 minutos, uma vez por semana, num total de 10 aulas (cinco blocos). Essas aulas eram num dia da semana em que tinham igualmente aulas de Matemática: de manhã, tinham as aulas usuais e à tarde, tinham as aulas suplementares. Estas aulas foram igualmente observadas por mim e incluem-se no cômputo total das aulas observadas.

No ano lectivo de 2005/06, o motivo de a professora ter optado por aulas suplementares deveu-se às dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática apresentadas pela turma que a obrigou a despender mais tempo com os diversos assuntos de forma a colmatar essas mesmas dificuldades. Os alunos tiveram aulas suplementares em blocos de 90 minutos a partir de 4 de Maio, uma vez por semana, da parte da manhã, tal como as restantes aulas de Matemática, num total de 8 aulas (quatro blocos). Observei apenas o primeiro bloco de 90 minutos das aulas suplementares, as duas que se realizaram a 4 de Maio, uma vez que nas restantes aulas suplementares os alunos não exploraram as tarefas preparadas para o fim específico de recolha de dados. Nas aulas suplementares, a professora dava continuidade aos assuntos trabalhados antes e por isso, as mesmas eram encaradas como aulas normais.

Documentos. Os documentos que usei na presente investigação incluem os trabalhos de todos os alunos da turma, quer em suporte de papel quer em formato digital, bem como os registos áudio e vídeo obtidos nas aulas observadas e nas entrevistas, e ainda as notas de campo escritas por mim logo após as aulas observadas. Os documentos foram fontes de informação e é neste sentido que englobo como documentos os materiais que foram produzidos para os fins específicos da investigação, como é o caso dos registos áudio e vídeo e das notas de campo. De acordo com Merriam (1991), os materiais preparados pelo investigador poderão ser considerados documentos se os mesmos lhe possibilitarem reflectir, mais tarde, acerca do fenómeno em estudo, ao fornecerem dados detalhados que são complementares aos obtidos por intermédio de outros métodos, como sejam a observação e a entrevista, apesar de usualmente, este termo estar conotado com os materiais não concebidos de acordo com os propósitos do estudo. Assim, não obstante, as notas de campo resultarem da minha observação, elas reificaram essa mesma observação, tornando possível mais tarde analisar o respectivo conteúdo, uma vez que parte do mesmo poderia facilmente ter sido esquecida.

Estes dados foram cruzados e complementados com os restantes obtidos por outras vias. Os registos áudio e vídeo foram particularmente importantes pois não só constituíram um meio de lembrar acontecimentos, como forneceram dados únicos, ausentes nas outras técnicas de recolha, e em grande detalhe, permitindo uma análise de conteúdo qualitativa e substancialmente diferente, já que esses mesmos pormenores teriam sido pura e simplesmente ignorados se a câmara de vídeo os não tivesse captado. Efectivamente, a observação e a análise dos registos-vídeo permitem acompanhar, com maior profundidade, a actividade dos alunos e perceber melhor o seu pensamento e os processos que percorreram. O registo áudio teve a única função de complementar o registo vídeo permitindo tornar mais audível um ou outro excerto menos claro no registo vídeo. Por este motivo, apenas audiogravei os diálogos ocorridos no seio do grupo-alvo nos momentos da aula em que a mesma funcionava na modalidade de trabalho de grupo. Em contrapartida, a câmara de vídeo foi usada na totalidade da aula, mesmo nos momentos colectivos em que a professora se dirigia à turma na sua globalidade, já que esses momentos eram claramente audíveis.

Entrevistas. Quanto às entrevistas, elas são, usualmente, utilizadas sempre que se queira aceder às perspectivas das pessoas, não captáveis pela observação directa, ou seja, sempre que se queira aceder aos significados atribuídos pelos participantes à sua vida e mundo envolvente, às suas opiniões e sentimentos e aos seus relatos relativamente a acontecimentos passados (Merriam, 1991; Patton, 2002). Usei este método quer com os alunos do grupo-alvo quer com a professora com o propósito de recolher dados relativos às suas perspectivas pessoais sobre diversos domínios, incluindo a forma como os mesmos encaravam, no final do ano lectivo, a demonstração na aula de Matemática. A opção, no presente estudo, pelo carácter semiestruturado das entrevistas deve-se ao facto de pretender obter uma certa informação dos participantes, tirando partido da possível inflexão para eventuais novas ideias, no âmbito dos tópicos abordados, ou da maior ou menor profundidade que os entrevistados pudessem dar às questões colocadas (Merriam, 1991). Todas as entrevistas foram gravadas em vídeo.

Fiz em ambos os anos lectivos quatro entrevistas semiestruturadas aos quatro alunos do grupo-alvo (uma entrevista a cada um, com a duração de, sensivelmente, meia hora). Como o estudo apenas contempla os dados do segundo ano lectivo, optei por não analisar os dados provenientes das entrevistas feitas no primeiro ano lectivo. Assim, as entrevistas que foram usadas e analisadas na presente investigação foram efectuadas, primeiro aos alunos, no dia 9 de Maio de 2006 (primeiro a um dos rapazes, depois a outro) e no dia 16 de Maio de 2006 (às duas raparigas, separadamente) e depois à professora, no dia 13 de Junho de 2006, com a duração de uma hora e um quarto.

No que se refere às entrevistas efectuadas aos alunos, foi utilizado um guião (anexo 2) flexível com tópicos alusivos à modalidade de trabalho em de grupo, ao apoio prestado e/ou recebido na aula de Matemática, aos aspectos da aula de Matemática (ou assuntos) de que haviam gostado mais e menos, às disciplinas preferidas e à importância que atribuem à justificação e à demonstração. O guião de entrevistas deste tipo é, por conseguinte, uma lista de assuntos a serem explorados no decurso da entrevista (Patton, 2002), não apresentando uma estrutura rígida, com questões muito bem definidas, e o seu carácter flexível permitiu captar melhor as perspectivas pessoais de cada um dos alunos, seguindo a fluência própria de uma conversa. Embora tenha seguido sensivelmente a ordem dos tópicos constantes no guião, o modo como ia formulando e encadeando as questões ia assumindo uma forma própria e específica em cada uma das entrevistas, consoante as respostas que cada um dos entrevistados ia dando. Fui, pois, um instrumento de recolha de dados, tentando conduzir os sujeitos à expressão livre das suas opiniões (Bogdan e Biklen, 1991/1994; Merriam, 1991).

Após a conversa em torno dos assuntos atrás referidos, entreguei a cada um dos alunos entrevistados uma folha (anexo 3[60]) com três exemplos de argumentações escritas de alunos onde lhes era pedido que assinalassem quais (a) verificavam a veracidade da afirmação para a generalidade dos casos, (b) verificavam a veracidade da afirmação para alguns casos e (c) explicavam a razão de a afirmação ser verdadeira. Interessava-me perceber até que ponto os alunos se tinham apropriado da ideia de que um argumento empírico não comprova a veracidade de uma afirmação para a generalidade dos casos e se distinguiam vários tipos de argumentos de acordo com a sua função. Após terem assinalado na folha, aproveitei ainda o tempo de entrevista para conversar um pouco com eles sobre os motivos que os levaram a assinalar de um ou de outro modo, de forma a negociar os significados associados às suas escolhas.

A parte final da entrevista aos alunos do grupo-alvo da turma observada em 2005/06 foi ainda ocupada com a resolução de uma tarefa envolvendo explorações com números (anexo 4). Esta tarefa vinha na sequência da tarefa explorada no dia 20 de Janeiro de 2006, e eu e a professora tínhamos combinado que os alunos a explorariam na aula passado um tempo, de forma a recolher dados alusivos a uma eventual evolução dos alunos na sua competência em demonstrar em situações matemáticas envolvendo números, já que na aula de 20 de Janeiro, ninguém tinha cabalmente conseguido fazê-lo,

476

[60] Adaptado de Healy e Hoyles (2000).

e todas as restantes tarefas exploradas nas aulas observadas foram sobre Geometria. No entanto, tal acabou por não ser concretizado e, perante a dificuldade da professora em incluir a exploração desta tarefa numa das suas aulas, quando o seu objectivo prioritário era trabalhar outros assuntos, decidi propor eu mesma a referida tarefa a cada um dos alunos do grupo-alvo na parte final da entrevista. Foi por esta via que recolhi dados relacionados com a evolução da demonstração em situações numéricas. Todavia, perdi a dinâmica de grupo e todo o tipo de diálogos que pudessem ocorrer no seio do grupo através dos quais mais facilmente acedemos aos raciocínios dos alunos. Neste caso, após a concretização individual da tarefa, conversei um pouco com cada um deles sobre o seu trabalho, tentando perceber os seus pensamentos subjacentes.

Fiz uma única entrevista à professora já após o término das aulas do segundo ano lectivo de recolha de dados. O guião respectivo (anexo 5) incidia em aspectos relacionados com a vida profissional da professora, as duas turmas onde se efectuaram as observações das aulas, a sua evolução na forma de encarar a justificação e a demonstração na aula de Matemática e a sua participação no estudo. Os registos que fiz decorrentes desta entrevista foram entregues à professora para que ela verificasse se eu tinha interpretado adequadamente as suas afirmações. São vários os autores que advogam esta prática (por exemplo, Patton, 2002; Yin, 1989). Para além desta entrevista que teve, digamos assim, um carácter mais formal e que foi gravada em registo vídeo, ocorreram muitos outros momentos em que eu e a professora conversámos sobre os diversos aspectos inerentes às aulas observadas, seja no que se refere à discussão sobre as abordagens mais adequadas para a implementação das tarefas na sala de aula, seja sobre quais os materiais a fornecer aos alunos, ou ainda sobre as produções dos alunos, ou raciocínios evidenciados. Todas estas discussões tiveram lugar em encontros presenciais que marcávamos para determinados dias e horas. Alguns deles ocorreram na escola, outros na casa da professora. Outras vezes, discutíamos os assuntos pelo telefone. A troca de impressões mais rápida ocorria cada vez que eu ia à escola, antes e após as aulas observadas.

Resumindo, a recolha de dados foi feita através de: (a) notas de campo redigidas por mim, enquanto observadora participante das actividades escolares; (b) gravação em vídeo das actividades de um grupo de quatro alunos, na sala de aula; (c) gravação em áudio dos diálogos ocorridos no seio do grupo nos momentos da aula em que os alunos estavam organizados em grupo; (d) gravação em vídeo de entrevistas semiestruturadas feitas a cada um dos elementos do grupo e à professora; e (e) análise documental dos trabalhos realizados por todos os alunos da turma e dos registos escritos, áudio e vídeo. Entre os vários métodos que usei, considero que os mais importantes, por terem dado uma maior informação substantiva para o presente estudo, foram a observação participante e o documento dos registos vídeo das aulas observadas.

Os Papéis da Investigadora

Nesta subsecção, pretendo explicitar mais detalhadamente quais as opções que tomei relativamente ao meu papel (duplo) na sala de aula enquanto observadora participante e professora. Pretendo ainda descrever e explicitar o estatuto que assumi nas aulas de Matemática bem como os múltiplos papéis que tive durante a investigação. Tal como já fundamentei atrás, escolhi o método de observação participante para que pudesse viver a prática das aulas de Matemática da turma envolvida no estudo dando "*sentido* ao fenómeno do ponto de vista dos participantes" (Matos et al., 1995, p. 164), já que os significados locais das acções seriam dificilmente captáveis do exterior da comunidade a observar.

Esta é uma característica dos estudos de tipo interpretativo: o investigador deve estar envolvido na actividade dos participantes no estudo como um *insider* e simultaneamente ser capaz de reflectir sobre essa mesma actividade como um *outsider* (Eisenhart, 1988; Matos e Carreira, 1994; Merriam, 1991). Vivi na presente investigação esta tensão gerada pelo duplo papel de observador e de participante. Tive que, constantemente, fazer um balanceamento entre a minha proximidade e o meu distanciamento ao objecto de estudo. O facto de aqueles alunos não serem os meus alunos e de não ter que gerir a condução da aula, função esta desempenhada pela professora, dava-me uma maior disponibilidade para a reflexão concomitante com a própria observação e algum distanciamento para ser capaz de reflectir sobre as várias situações como alguém externo, que não está directamente comprometido com nenhuma das variáveis em jogo. No entanto, paradoxalmente, tal reflexão só foi possível graças à minha proximidade subjectiva com os participantes no estudo, pois foi esta proximidade que tornou possível captar os significados construídos por esses mesmos participantes. Portanto, ao contrário do que acontece numa investigação quantitativa, que prescreve o máximo distanciamento possível do investigador relativamente ao objecto de estudo, ao pressupor um mundo objectivado, eu assumi sempre a minha imersão e, consequentemente, a minha proximidade ao objecto de estudo, de modo a viver as aulas de Matemática como um *insider*, como uma outra professora de Matemática, disponível na sala de aula para circular entre os grupos de alunos e para lhes prestar apoio. Por outro lado, a reflexão feita durante as próprias aulas, e de forma mais aprofundada, após as aulas, ao analisar os dados, exigia de mim um distanciamento, totalmente distinto do distanciamento exigido por uma metodologia de natureza quantitativa, para que fosse capaz de olhar para as situações em causa com um olhar atento e desprendido, como se eu não tivesse feito parte das mesmas. Tal como é afirmado por Ponte (1994, p. 4), é "importante que o investigador possa tirar partido da possibilidade de se surpreender por não estar afectiva e intelectualmente comprometido com os resultados que nela possam sobrevir".

Erickson (1986) chama a atenção para a invisibilidade da *vida diária,* dada a sua familiaridade e as suas contradições (nem sempre enfrentadas), e cita o antropólogo Clyde Kluckhohn, para melhor ilustrar este ponto de vista: "The fish would be the last creature to discover water" (p. 121). De acordo com aquele autor, é extremamente importante problematizar o lugar-comum, nomeadamente nas investigações educacionais. Encontramos, de igual forma, esta ideia no pensamento filosófico de Heidegger (1999), tal como explanado no capítulo anterior. Segundo Heidegger, o mundo existente possui uma vertente invisível, quando não lhe reconhecemos consciente e explicitamente as suas propriedades. O mundo só se poderá tornar visível quando um processo de ruptura faz emergir essas mesmas propriedades. Assim, só poderemos tornar visíveis os padrões das acções do dia-a-dia, documentados sistematicamente, se nos colocarmos como alguém de fora a reflectir sobre o fenómeno que vivemos por dentro.

O envolvimento do investigador por dentro das situações a observar levanta, também, alguns problemas de que se deve estar consciente. E foi a consciência dos riscos inerentes ao meu papel de investigadora que me levou a sentir necessidade de tomar precauções na sistematização e organização dos dados recolhidos. Com efeito, ao assumir o papel de actor, o investigador corre o risco de se fixar apenas na sua própria perspectiva em vez de compreender o ponto de vista dos outros participantes. Por outro lado, essa participação retira-lhe alguma disponibilidade para tomar apontamentos no próprio momento em que ocorrem os acontecimentos. No meu caso particular, existiu uma outra razão que me levou a optar por não escrever notas de campo nas próprias aulas: temia que tal constituísse um factor perturbador do normal funcionamento das aulas pois o facto de os alunos poderem reparar que eu poderia estar a escrever algo sobre eles centrá-los-ia mais no meu papel de investigadora e poderia até inibi-los. Esta opção poderá ter as suas vantagens; também terá desvantagens. As notas escritas no próprio momento seriam com certeza mais frescas. Poderiam até ser mais completas e pormenorizadas do que escritas *a posteriori*. Bogdan e Biklen (1991/1994) sugerem que estas notas sejam redigidas após a observação directa, mas sem deixar passar muito tempo entre uma actividade e outra, de modo a que todas as impressões e factos observados se encontrem ainda bem frescos na memória. Foi o que efectivamente fiz. Nos dias em que fazia duas observações de aulas, a de manhã e a aula suplementar da tarde, escrevia na própria escola as notas de campo imediatamente a seguir à aula observada da manhã. Nos dias em que tal não acontecia, escrevia na minha casa as notas de campo referentes às aulas observadas no mesmo dia em que as observava.

Na minha qualidade de observadora participante, assumi a postura de uma professora, desempenhando nos momentos exploratórios das tarefas um papel semelhante ao da professora da turma, circulando como ela pelos diversos grupos e tentando apoiar os mesmos no desenvolvimento do seu trabalho. Claro que ao actuar deste modo, introduzi uma alteração na extensão do suporte dado aos alunos, uma vez que estes foram mais apoiados do que seria possível no caso de terem apenas a sua professora de Matemática na sala de aula. Apesar de o grupo-alvo ter um estatuto privilegiado no meu estudo, acompanhei de igual forma todos os grupos, tal como a professora o fez, não estando portanto colada ao grupo-alvo, tanto mais que pretendia captar pelo registo vídeo a sua actividade quer em autonomia, quer em interacção com a professora. A minha presença insistente e permanente perto dos alunos do grupo-alvo poderia ser inibitória da sua actividade e até do seu pensamento e raciocínio.

Interessava-me, pois, observar pelo vídeo, as suas interacções e relações dentro do grupo, sem a presença constante de um professor.

O meu papel distinguia-se perfeitamente do da professora nos momentos colectivos das aulas, em que era unicamente a professora que protagonizava o discurso quando se dirigia a toda a turma. Nesses momentos, eu posicionava-me na retaguarda da aula, encostando-me a uma parede lateral ou traseira da sala de aula, de modo a descentrar a atenção dos alunos da minha presença. Tomava nessas alturas um papel completamente passivo, não intervindo.

Todas as opções que descrevi atrás decorreram do meu objectivo de pretender minimizar o mais possível a perturbação que pudesse ocasionar a presença de um elemento estranho à turma. E avaliando agora o modo como os alunos reagiram à minha presença nas aulas de Matemática, poderei afirmar que os mesmos a encararam com muita naturalidade, naturalidade esta que se foi acentuando com o decorrer do tempo. Apesar de saberem que o facto de ali me encontrar tinha a ver com a investigação que eu estava a desenvolver, penso que quase ignoraram esse aspecto, tratando-me como uma outra professora quando se encontravam a trabalhar em grupo. Mais do que a minha presença, o equipamento de registo (câmara vídeo, respectivo tripé, e gravador áudio), pelos seu aparato e pela sua função, poderia ser, de facto, um elemento perturbador da naturalidade das aulas. Contudo, considero que não foi. Apesar de nos registos em vídeo existirem alguns momentos em que os alunos têm comportamentos em que ostensivamente olham e falam para a câmara, na maior parte do tempo, estão embrenhados no seu trabalho ou em qualquer outro aspecto das suas vidas sobre o qual falam e interagem, parecendo mesmo terem esquecido a câmara. Apesar do meu objectivo de perturbar o menos possível a naturalidade das aulas de Matemática, tenho consciência que eu e o equipamento vídeo invadimos as mesmas. Merriam (1991) defende a importância de o investigador ser sensível relativamente aos possíveis efeitos da sua presença na situação estudada, e de os mesmos serem tomados em consideração aquando da interpretação dos dados, já que a interacção entre o observador e o observado pode afectar ambos.

> [A] intrusão do investigador no mundo do sujeito é inevitável em investigação. (...) Os investigadores qualitativos pensam que o facto de abordarem as pessoas com o fito de compreenderem o seu ponto de vista ainda que não constitua algo de perfeito é o que menos distorce a experiência dos sujeitos. (Bogdan e Biklen, 1991/1994, p. 54)

O facto de ter vivido as aulas de Matemática durante uma extensão contínua de tempo foi muito importante para o estudo, uma vez que essa vivência fornece informação que complementa a observação do registo em vídeo, mais focado no grupo-alvo. Uma observação de tipo ‘parede de vidro’ (em que o investigador observa, mas não pode ser visto), além dos problemas éticos que levantaria, ficaria amputada de uma dimensão, bastante fértil no trabalho de campo que constitui a interacção com os alunos e a professora, através da qual se partilham significados e subjectividades. É esta relação directa que permite uma maior compreensão de processos ocorridos numa dada situação. É necessário que o investigador entre em diálogo com os actores humanos para conseguir compreender como é que os seres humanos actuam e quais os motivos das suas acções (Keeves, 1986).

A interacção com os participantes prende-se com os múltiplos papéis do investigador, desde o papel de inquiridor-ouvinte (assumido na observação participante bem como na entrevista), de intérprete até ao papel de instrumento (Matos e Carreira, 1994). O investigador qualitativo assume uma postura inquiridora e ouvinte na observação participante. Enquanto observador, é importante que o investigador seja um bom ouvinte, o que significa que será capaz de captar uma grande quantidade de informação. A postura inquiridora decorre do facto de as perguntas nortearem uma investigação de cariz qualitativo, no sentido em que cada pergunta colocada pelo investigador (seja a si próprio seja aos membros do grupo observado) gera um conjunto de novas perguntas (Matos e Carreira, 1994). Assume igualmente um papel de inquiridor-ouvinte durante a entrevista, cujo sucesso dependerá da capacidade do investigador em questionar no momento certo e em fazer boas perguntas, o que por sua vez, depende da habilidade de ouvir atentamente os entrevistados (Merriam, 1991). Nesta situação, o investigador assume ainda um outro papel, o de avaliador do discurso dos entrevistados, que lhe permite perceber que aspectos deverá aprofundar ou em que momento deverá redireccionar as questões (Matos e Carreira, 1994). A interacção com os participantes permite, portanto, uma maior compreensão dos seus significados, e o investigador, ao interpretá-los, constitui o principal instrumento de recolha e de análise de dados (Bogdan e Biklen, 1991/1994; Merriam, 1991). Por um lado, dadas as suas características humanas, o investigador tem a flexibilidade necessária para se adaptar às situações específicas, por forma a maximizar a produção e recolha de informações relevantes. E por outro lado, a sua capacidade de compreensão e de construção de conhecimento conduzirá a uma análise de dados de qualidade e à produção de resultados sólidos. Daí Patton (2002) considerar que parte da qualidade de uma investigação qualitativa e respectiva credibilidade dependem da experiência prévia, da competência e do rigor do investigador. Tal como é referido por Matos e Carreira (1994), também o papel de instrumento encerra contradições. Se a flexibilidade do ser humano é uma vantagem enquanto instrumento, a sua limitação, conducente à possibilidade de cometer erros ou de deixar escapar acontecimentos relevantes, poderá ser considerada uma desvantagem.

Em suma, poderei afirmar que vivi e assumi uma pluralidade de papéis: todos os que referi e discuti atrás. Tive também de gerir as contradições a eles inerentes. Um outro papel, indicado por Matos e Carreira (1994), e que também assumi durante a presente investigação, foi o de narradora-comunicadora. Este papel está intrinsecamente associado à análise de dados, que focarei na secção seguinte. A tensão deste papel reside no balanceamento que tive de fazer entre a descrição factual pormenorizada e particularista e a análise com interpretações mais gerais, de modo a conseguir um equilíbrio entre ambas. Tive, por conseguinte, que narrar a substância dos dados, utilizando descrições e transcrições, de forma a conferir evidência às minhas próprias interpretações, mas tentando não tornar as mesmas fastidiosas e triviais (Patton, 2002), e ao mesmo tempo, comunicar as inferências e interpretações que fiz, por forma a que os resultados se tornassem significativos em relação ao problema em estudo, produzindo novo conhecimento.

Análise de Dados

Como investigadora, realizo uma via interpretativa em dois níveis: as experiências dos participantes, nos quais estou incluída, são descritas e interpretadas em termos dos elementos culturais e relacionais próprios daquela comunidade, e as minhas experiências enquanto investigadora, no processo de aprendizagem que constitui a própria investigação, na análise de dados, são descritas e interpretadas em termos dos elementos culturais e relacionais da minha comunidade científica de referência (Eisenhart, 1988). O enquadramento teórico tem um lugar primacial na investigação e, em particular, na fase de análise de dados. A relação entre a teoria e os dados empíricos conduz a uma forte interacção entre dedução e indução numa investigação. A teoria ajuda a entender os dados e a análise de dados ajuda a entender os conceitos teóricos. Como afirma Merriam (1991), a revisão da literatura pode ajudar nas várias fases de uma investigação, desde a formulação do problema, a selecção da metodologia até à interpretação de resultados. Também Matos e Carreira (1994) referem o modo como o referencial teórico de uma investigação qualitativa inspira, inclusivamente, até o tipo de problema a formular, bem como a interpretação do fenómeno em análise. Os significados constituintes dos dados, são construídos dedutivamente com relação às questões que norteiam a investigação e aos conceitos teóricos mais universais. A análise dos aspectos particulares empíricos, ao ser integrada na prática da investigação, poderá fazer emergir indutivamente aspectos inicialmente não previstos e não contemplados na revisão da literatura feita antes, conduzindo a novo conhecimento teórico. Poderá ainda dar sentido à teoria, ilustrando-a e ampliando a sua compreensão. Tal como é referido por Matos et al. (1995), os estudos de natureza qualitativa colocam a ênfase nas descrições teóricas. Estas "descrições não são teorias mas ao mesmo tempo são teóricas na medida em que são construídas com base em conceitos e teorias" (p. 165).

Assumir, enquanto investigadora, que a realidade é subjectiva implica assumir igualmente, ao nível da análise de dados, que estes não são passíveis de serem interpretados da mesma forma por qualquer pessoa, e que portanto, neste processo epistemológico, apenas posso oferecer interpretações das interpretações dos participantes no meu estudo. Existe uma circularidade entre aquilo que é interpretado—o objecto de estudo—e aquele que interpreta—o investigador. Assim, o objecto de estudo é co-definido por si próprio e pelo investigador.

Os dados são, por conseguinte, construídos e validados intersubjectivamente. Para que se crie um vínculo de partilha com o leitor, que possibilite a validação intersubjectiva das minhas interpretações, incluo, nos capítulos da parte empírica, as transcrições dos episódios videogravados. São vários os autores que afirmam ser importante esta prática, na investigação qualitativa. Por exemplo, Bogdan e Biklen (1991/1994) afirmam que o investigador qualitativo está sempre "envolvido no balanceamento entre o particular e o geral" (p. 252), e que um bom trabalho deve evidenciar as asserções feitas (interpretações generalizáveis) com provas particulares retiradas dos dados, devendo, portanto, ser ricamente documentado com descrições, transcrições e citações, que ilustrem e substanciem o fundamento das generalizações.

A necessidade de criar um vínculo de partilha com o leitor levou-me também a usar a primeira pessoa do plural nos capítulos empíricos, em detrimento do uso da primeira pessoa do singular. Efectivamente, poderia perfeitamente usar a primeira pessoa do singular já que a análise e a interpretação são minhas. No entanto, tal como referi atrás, ao conferir evidência empírica a essa mesma interpretação, de modo a validá-la, senti necessidade de dar a mão ao leitor e em conjunto, e de forma partilhada, partirmos para esse desbravar que é a análise de dados, como se traçássemos estradas no meio de uma floresta. O *nós* cria pois um maior estreitamento e cumplicidade entre mim e quem me acompanha por meio da leitura.

A análise de dados foi feita essencialmente em três fases. A primeira fase coincidiu com o período de recolha de dados. A segunda fase decorreu após a recolha de dados e a terceira fase ocorreu no período final da investigação.

Na primeira fase, coincidente com o trabalho de campo, a análise foi mais superficial, foi pouco consistente, pouco pormenorizada e pouco sistematizada. Trata-se da análise que fui fazendo no período de recolha de dados, decorrente das minhas observações das aulas e da análise documental dos trabalhos dos alunos. Nesta fase, organizei os dados por tipo de material semelhante (Bogdan e Biklen, 1994), tendo mantido juntos os dados recolhidos das notas de campo, das entrevistas, dos trabalhos elaborados pelos alunos e dos outros documentos considerados para os fins da investigação.

Na segunda fase, após a recolha de dados, a análise ganhou profundidade, sendo ilustrada detalhadamente com transcrições e citações. Foi também nesta fase que procedi a uma redução dos dados, isto é, fiz uma selecção dos dados resultantes das notas de campo redigidas após as observações, dos registos vídeo e áudio e dos próprios trabalhos elaborados pelos alunos, no sentido de a análise ir ficando cada vez mais focada. Foi, pois, nesta fase que fiz transcrições da actividade matemática do grupo-alvo e também de alguns momentos partilhados em grupo-turma. As transcrições que fiz resultaram igualmente do processo de redução dos dados, já que, ao seleccionar determinadas aulas observadas, não transcrevi a totalidade das aulas mas apenas os episódios que considerei relevantes para serem analisados. Simultaneamente ia analisando essas mesmas transcrições e também ia fazendo uma análise mais fina dos registos escritos dos alunos, quer os do grupo-alvo quer os dos restantes grupos da turma. O processo de transcrever e o de analisar alimentaram-se um ao outro reciprocamente, tal como sucedera antes, na minha tese de mestrado. Não teria nunca podido delegar o trabalho de transcrição dos registos vídeo e áudio a outra pessoa. Apesar de morosa, e até fastidiosa, porque uma transcrição nunca é feita de uma vez só, obrigando a uma repetição da observação do mesmo excerto vezes sem conta—dada a minha postura ética de querer ser fiel aos diálogos dos alunos e da professora, fossem estes de natureza verbal ou não verbal, até ao mais ínfimo pormenor—é precisamente esse apuramento pormenorizado da transcrição, feito simultaneamente ao processo de análise de dados, que fez com que, de cada vez que observava e ouvia esses registos, conseguisse dar conta de novos aspectos, antes não identificados. E estou convicta que era a própria análise que ia fazendo que me fazia ficar cada vez mais desperta, mais disponível, para um ou outro pormenor que me tinha passado antes despercebido e que, depois, emergia em toda a sua importância e clareza, indo ao encontro, ou não, de algo que já tinha escrito analiticamente antes. Efectivamente, era a análise de dados, com toda a especulação que a acompanhava, que me levantava interrogações conducentes a uma verificação posterior nos registos vídeo. E quando ia observar de novo o vídeo para confirmar um ou outro aspecto interrogado, dava-me conta inesperadamente de outros que me tinham estado antes ocultos. Ia, então, de novo aos meus textos de análise rescrever, completar, aprofundar, corrigir um dado pormenor factual, interpretar. Daí que transcrição e análise sejam processos que se constituíram mutuamente e que, portanto, só eu os poderia concretizar.

A terceira fase de análise é uma fase de síntese conduzindo à escrita das conclusões do estudo. Nesta fase, são criadas relações entre as diversas categorias analíticas na procura da compreensão global do fenómeno em estudo, em clara articulação com os conceitos teóricos.

A análise de dados desenvolve-se, segundo Merriam (1991), em três níveis, apontados pela autora como sendo hierárquicos, desde o mais básico e inicial até ao que alcança uma compreensão integrada do fenómeno: (1) *a descrição,* através da qual os dados vão sendo organizados; (2) *a geração de categorias*, já que estas além de descreverem os dados, já os interpretam; (3) *a construção de teoria,* na qual a especulação joga um papel fundamental, ao gerar hipóteses que liguem as categorias entre si e expliquem o significado dos dados. A autora admite que, embora a análise de dados se faça, essencialmente, de forma indutiva, o raciocínio dedutivo está também presente, principalmente, no terceiro nível de análise, uma vez que as hipóteses e as categorias geradas continuamente devem ser testadas, para verificar se os dados existentes as suportam. Esta perspectiva é consentânea com a de Patton (2002), pois também este autor considera que a análise indutiva ocorre principalmente nos primeiros estádios da investigação, levando à descoberta de padrões e de categorias. O autor sustenta, ainda, que a análise dedutiva ocorre no último estádio, de acordo com um dado enquadramento teórico, testando e afirmando a autenticidade e a adequação do conteúdo da análise indutiva, levando à geração de proposições teóricas. Merriam (1991) considera o processo de análise de dados como sendo um processo complexo existindo no mesmo um movimento contínuo e interactivo entre a descrição e a interpretação, entre os dados concretos e os conceitos teóricos abstractos, entre a indução e a dedução. Brown e Dowling (1998) consideram dever existir na investigação uma abordagem dialógica entre os campos teórico e empírico em todas as fases da investigação. Na fase de análise, em particular, existe um movimento dialógico entre o problema e os resultados, "closing the discursive gap between them to generate the highest level of explicitness and coherence that is possible" (Brown e Dowling, 1998, p. 102).

No que concerne ao presente estudo, poderei afirmar que durante a segunda fase da análise de dados, percorri estes três níveis, de forma ascendente e simultaneamente de forma interactiva. O terceiro nível, embora iniciado na segunda fase, culminou na terceira fase de análise de dados, correspondendo a uma explicação global do fenómeno em estudo. As categorias analíticas foram essencialmente sugeridas pelas questões da investigação e definidas antecipadamente com base na revisão da literatura, mas foram também geradas interactivamente pelos dados, tomando assim uma especificidade descritiva dos mesmos: (a) formas de encarar diversos tipos de argumentos, (b) esquemas demonstrativos usados pelos alunos, (c) natureza da demonstração (forma algébrica ou narrativa), (d) funções da demonstração, (e) dificuldades na construção de demonstrações e (f) prática social da aula de Matemática.

Relativamente à apresentação de resultados, optei pela elaboração de dois capítulos, estruturados de modo diferente. No primeiro desses capítulos, o capítulo VI da presente dissertação, incido a minha análise na exploração de uma única tarefa—"Vamos Investigar-Matemática", relacionada com a descoberta de eixos de simetria em várias figuras geométricas—e no modo como foi a mesma depois discutida em grupo-turma, correspondendo a duas das aulas observadas (a totalidade de uma das aulas e parte de outra aula). A escolha dessa tarefa, em particular, deveu-se à riqueza de dados obtidos com a exploração da mesma pelos alunos, e que vislumbrei através de uma análise preliminar ao conjunto de dados. Nesse capítulo, começo por uma análise bastante abrangente, abarcando vários aspectos da aula e do trabalho dos alunos quer da turma na sua globalidade quer do grupo-alvo. Estes aspectos eram, por vezes, paralelos às questões do estudo, mas considerei importante dissecá-los de forma a dar uma ideia mais holística e contextualizada das aulas de Matemática onde se explorou e discutiu a tarefa, uma vez que muitos destes aspectos se relacionam com a cultura das aulas de Matemática da turma, sendo portanto comuns a todas as aulas de Matemática. É também nessa parte da análise que discuto o padrão de interacção existente entre os elementos do grupo-alvo e que caracterizo as respectivas relações de poder e os modos distintos de pertença, identificação e participação que os mesmos têm no grupo. Por se tratar, efectivamente, de um padrão continuamente observável em todas as aulas de Matemática, optei por não voltar a fazer referência ao mesmo no segundo capítulo de apresentação e discussão de resultados. A apresentação duma análise abrangente decorreu, portanto, da minha necessidade de fornecer um quadro ilustrativo da cultura vivida nas aulas de Matemática da turma. Nesse primeiro capítulo, após essa análise mais abrangente, afunilo então o foco de atenção para a negociação e a concretização da demonstração matemática na tarefa em questão. Trata-se de um capítulo que, além de analítico, é também muito descritivo, seguindo até uma certa ordem cronológica de sucessão de ocorrências nas duas aulas incidentes na tarefa. É, portanto, como se eu contasse nele a história daquelas duas aulas, onde é dada uma atenção mais detalhada ao trabalho do grupo-alvo e aos diálogos ocorridos no mesmo.

O segundo capítulo de resultados, o capítulo VII, segue uma estrutura completamente distinta da do capítulo anterior, ditada pelas questões do estudo. Em cada uma das secções, são inscritas subsecções designadas pelos nomes das várias tarefas de onde emergiram dados relacionados com as mesmas. Assim, uma mesma tarefa surge em mais do que uma secção. Este tipo de estruturação conduziu-me, por vezes, à necessidade de repetir algumas das transcrições, analisadas por diferentes prismas. Para evitar a repetição das transcrições, optei por lhes fazer referência, indicando os números das páginas onde se encontram, obrigando o leitor a saltar para outras páginas para ter acesso às transcrições em causa.

Estes dois capítulos, onde é apresentada a análise que fiz dos dados, apesar de estruturalmente diferentes, apresentam uma unidade coerente vistos em conjunto. Por meio deles, pretendi apresentar os elementos culturais daquela turma concreta, e em particular do grupo seleccionado, no seu trabalho diário nas aulas de Matemática com a sua professora, focalizando cada vez mais nas questões específicas do estudo, centradas na forma de encarar a demonstração matemática e na forma de a concretizar. Por último, pretendi produzir novo conhecimento sobre esta problemática, sustentado com evidência empírica e operacionalizado com instrumentos teóricos que foram mobilizados na reflexão feita por via da análise de dados.

Os Participantes

A Professora

A professora obteve a Licenciatura em Matemática, no Ramo de Formação Educacional, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em Junho de 1980. Tem ainda o Curso de Mestrado em Informática e Educação, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tendo sido o mesmo concluído em Novembro de 1998.

O seu primeiro ano de trabalho correspondeu ao estágio. No ano seguinte, trabalhou na sua escola actual, ainda sem ser efectiva. Efectivou-se no ano a seguir numa escola de Reguengos de Monsaraz, tendo regressado à escola actual no ano lectivo seguinte, e lá tem permanecido até aos dias de hoje, à excepção de dois anos lectivos em que esteve numa outra escola para orientar estágios. Nos primeiros anos da sua carreira, leccionou no 2º Ciclo, e quando a sua escola começou a integrar turmas do 3º Ciclo, começou a leccionar apenas no 3º Ciclo por ser das poucas professoras na escola que tinha habilitação para o fazer. Quando, em 1995, a escola abriu vagas de quadro para o 3º Ciclo, a professora concorreu, passando a partir dessa altura para o quadro do 3º Ciclo. Teve sempre uma participação activa na vida escolar, tendo desempenhado diversos cargos: Directora de Turma, Sub-delegada de Matemática, Delegada de Matemática, Coordenadora do grupo disciplinar de Matemática, elemento do Conselho Directivo, Coordenadora da equipa do Projecto Minerva, Coordenadora da equipa de elaboração dos horários escolares, Presidente do Conselho Pedagógico.

Desempenhou o cargo de Coordenadora da equipa, da sua escola, do Projecto Minerva, desde 1989, ano em que a sua escola ingressou no referido Projecto, até o mesmo se extinguir, em 1994. Realizou diversas experiências de inserção do computador em sala de aula, nomeadamente o estudo da geometria através do LogoWriter e do Cabri-Géomètre, o estudo de funções e sua representação gráfica e o estudo de regularidades numéricas. Divulgou estas experiências em reuniões de professores e em Encontros promovidos pela Equipa de Coordenação do Projecto Minerva da Escola Superior de Educação de Setúbal. Entre o ano de 2000 e 2003, foi Coordenadora da equipa de professores responsáveis pelo Clube de Informática, desenvolvendo formação e coordenação das actividades. Nessa altura, foi também formadora no Curso "Projecto 9.º+1– Operador de Informática", na sua escola, leccionando as disciplinas de "Aplicações de Escritório " e de Matemática. Desde o ano 2000 que desenvolvia actividade de formação creditada, dinamizando diversas acções de formação para professores, envolvendo as Tecnologias de Informação e Comunicação.

Era Coordenadora do Centro de Recursos Educativos no ano lectivo de 2005/06 em que se procedeu à recolha de dados, pela segunda vez. Era também Supervisora no processo de classificação das Provas de Exame Nacionais do 9º ano de escolaridade, Aplicadora de Testes do PISA 2006, estudo internacional patrocinado pela OCDE, e ainda responsável pela monitorização de reuniões das escolas atribuídas para a elaboração do Plano de Acção para o Combate ao Insucesso na Matemática.

A professora é autora de manuais escolares da disciplina de Matemática, quer do 2º Ciclo quer do 3º Ciclo, tendo desenvolvido trabalho neste âmbito entre o ano de 2000 e o de 2005. Tem ainda publicações na área da educação matemática, quer em Actas de Encontros nacionais e internacionais, quer em revistas como *Educação e Matemática* e *Quadrante*.

Relativamente ao seu desenvolvimento profissional, a professora, na entrevista, assumiu uma postura de contínua aprendizagem para quem um desafio é um estímulo, um gosto. Assim, de acordo com as declarações da professora, uma actividade de inovação nunca é sentida com muito desconforto pois a sua acção contínua de procurar e de avançar um pouco mais, leva-a a integrar o novo no que já ia fazendo anteriormente: "nunca salto para uma coisa, para um abismo. Sinto-me sempre às vezes com os pés a tremer mas não é uma coisa que me sinta assim desequilibrada". Trata-se, pois, de uma professora que assume o seu constante aprender como factor de desenvolvimento profissional, integrante duma reflexão retrospectiva e prospectiva, e que a faz gostar do risco do desafio, encarado como um avançar da caminhada anterior.

A Turma

A turma tinha 24 alunos, sendo 14 do sexo masculino e 10 do sexo feminino. As suas idades distribuíam-se entre os 13 e os 19 anos, sendo a mediana de 14,5, a moda, 14 e a média das idades era de 15. Três dos alunos da turma estavam a repetir o 9º ano de escolaridade no ano lectivo de 2005/06, tendo dois deles sido alunos da professora participante no estudo, no ano lectivo anterior, pertencendo cada um deles a turmas diferentes. Trata-se de uma turma que, embora perdendo e recebendo alguns alunos, se mantinha maioritariamente constante desde o 5º ano.

Em relação às avaliações académicas dos alunos em Matemática, no 1º Período desse ano lectivo, 12 alunos obtiveram nível 2 e 12 obtiveram nível 3. No 2º Período, verificou-se uma melhoria nos seus resultados escolares nesta disciplina, tendo oito alunos tido nível 2, 12 nível 3 e quatro nível 4. No 3º Período, foram sete os alunos que obtiveram, como classificação de frequência, nível 2, 13 tiveram nível 3 e quatro, nível

4. Entre os sete alunos que tiveram nível 2, no 3º Período, de classificação de frequência, apenas um deles foi admitido a exame, tendo tido no mesmo, nível 1, e ficado portanto com a classificação final de nível 2. Oito alunos da turma não foram admitidos a exame, tendo dois deles tido nível 3 a Matemática, como classificação de frequência. Assim, no exame, três alunos da turma tiveram nível 1, nove tiveram nível 2, três tiveram nível 3 e um aluno teve nível 4. Relativamente à classificação final dos alunos admitidos a exame, três alunos ficaram com nível 2 (os mesmos que tinham tido nível 1 no exame), 10 alunos tiveram nível 3 e três, nível 4. De entre os quatro alunos da turma que tiveram nível 4 de classificação de frequência, um deles teve nível 2 no exame, tendo portanto ficado com nível 3 de classificação final. Em suma, como classificação final a Matemática, sete alunos tiveram nível 2, 14 alunos, nível 3 e três, nível 4.

No que respeita às classificações finais, a maior parte dos alunos obteve nível 3, nas outras disciplinas. O número de níveis 2, em cada disciplina, era variável: um a Língua Portuguesa, a Inglês, a Geografia, a Educação Tecnológica e a Introdução às TIC, dois a Físico-Química e três a Francês. Houve um único nível 1 na turma, a Francês. Nas disciplinas de História, Ciências Naturais e Educação Visual, não existiram níveis 2. Apenas frequentavam a disciplina de Educação Visual seis alunos. Os restantes alunos da turma frequentavam Educação Tecnológica. Os níveis 4 distribuíram-se do seguinte modo: um a Geografia, a Educação Visual e a Educação Tecnológica, dois a Francês, três a Língua Portuguesa e a Físico-Química, quatro a História e a Ciências Naturais, cinco a Inglês e a Educação Física e seis a Introdução às TIC. Existiram níveis 5 de classificação final nas seguintes disciplinas: dois a Inglês, a Ciências Naturais e a Educação Visual, três a História, a Geografia e a Educação Física. Reprovaram nove alunos da turma. Destes, apenas um tinha sido admitido a exame (o facto de ter tido nível 1 no exame de Língua Portuguesa fez com que ficasse com nível 2 de classificação final nesta disciplina, apesar do nível 3 de classificação de frequência, e que reprovasse por ter nível 2 também a Geografia e a Físico-Química). Trata-se de uma turma com 62,5% de aprovações.

A turma manifestou uma evolução a Matemática ao longo do ano lectivo, que se evidencia nos próprios níveis atribuídos nos três Períodos. Na primeira aula do 3º Período, a professora chegou a comentar comigo que já notava os alunos diferentes, que já se sentiam à vontade para fazer perguntas quando não percebiam, perante toda a turma.

A professora referiu, na entrevista, que no início do ano lectivo, a turma revelava dificuldades de aprendizagem na sua disciplina, de concentração e de hábitos de trabalho. Indicou, ainda, que mais de metade dos alunos da turma tinha tido nível 2 a Matemática nos anos lectivos anteriores do 3º Ciclo. Referiu-se à forma como tinha ficado tão mal impressionada com a turma na primeira aula de Matemática naquele ano, ao vê-los a entrar na sala de aula a falar e ao ver que não trabalhavam em grupo as tarefas de resolução de problemas que lhes tinha proposto. Perante a tarefa que tinham em mãos, uns falavam duma ponta da sala para a outra ponta, e outros simplesmente estavam parados, ausentes do trabalho matemático. A professora teve que intervir nessa aula e ocupar a quase totalidade da mesma a falar com os alunos acerca dos seus comportamentos. Só na aula seguinte, conseguiu que os alunos trabalhassem, efectivamente, em grupo e explorassem as tarefas propostas na aula anterior. Assim, a professora afirmou que, ao longo do ano, a conversa paralela foi diminuindo e que, de um modo crescente, os alunos começaram a ficar mais atentos, a debruçar-se cada vez mais na Matemática, a estar mais envolvidos e a habituar-se a usar os conhecimentos. Era uma turma que, no início do ano, denotava estar triste com a Matemática, mas que foi modificando esse sentimento, revelando depois um entusiasmo crescente—“uma expressão que ouvi muitas vezes foi “Que espectáculo!”, até com um exercício normal”. A professora relacionou o facto de os alunos da turma, gradualmente, irem aguçando o seu raciocínio com o facto de o seu entusiasmo os fazer estar cada vez mais presentes nas actividades desenvolvidas na sala de aula. Registou ainda o facto de a maioria dos alunos da turma, na primeira aula do 2º Período, ter referido as tarefas exploradas na segunda aula bem como o trabalho de grupo como sendo o que mais lhes tinha agradado nas aulas de Matemática naquele ano. Este facto levou a professora a interpretar aquela aula como constituindo um marco significativo para os alunos, ao dar-lhes uma outra visão da Matemática. Referiu, ainda, que aquele foi o primeiro ano em que os alunos trabalharam em grupo na disciplina de Matemática. Foi também o primeiro ano em que os alunos desenvolveram actividades em Matemática com o recurso a computadores.

No que respeita à sua evolução da capacidade de demonstrar, a professora, na entrevista, considerou que os alunos entenderam bem o encadeamento de raciocínio—“ eu sei isto, então posso concluir aquilo”—e que já utilizavam muito bem a linguagem própria da demonstração em vários contextos, não apenas em situação de elaboração de uma demonstração mas até a propósito de qualquer exercício prático—“porquê isto? Ah! já sei, por isto e por aquilo, então…”; “a linguagem da demonstração invadiu o exercício prático”. Concluiu que a turma teve ganhos significativos na sua aprendizagem pelo facto de se ter feito um trabalho continuado focado na demonstração matemática, desenvolvendo bastante uma atitude interrogativa face à Matemática bem como o seu raciocínio matemático.

O Grupo-Alvo

O grupo seleccionado tinha quatro elementos, dois do sexo masculino e dois do sexo feminino. Três dos elementos—Sara, Maria e Ricardo—tinham andado sempre na mesma turma desde o 1º ano de escolaridade. O Bernardo integrou esta turma no 5º ano. Apesar de não ter pertencido à turma dos seus colegas de grupo no 1º Ciclo, já se conheciam nessa altura, uma vez que frequentavam a mesma escola. À excepção da Sara, com 13 anos de idade, todos os restantes alunos do grupo tinham 14 anos, não tendo, portanto, nunca nenhum deles reprovado. Passarei a referir, de uma forma sucinta, as características do grupo tais como foram apontadas pela professora. Um dos elementos do grupo, o Ricardo, destacava-se pelo seu interesse na Matemática em procurar relações, revelando um gosto especial pela disciplina, e sendo no grupo o aluno que provocava mais descobertas, pensando de forma muito rápida e estabelecendo facilmente conexões. Todos os outros três elementos não se destacavam na turma pelo seu trabalho, revelando mais dificuldades no trabalho matemático do que o Ricardo. Os vários elementos complementavam-se em termos do trabalho de grupo, pois se o Ricardo suscitava facilmente as descobertas, era, no entanto, muito desorganizado, sendo apoiado pelos colegas no que respeita à escrita, aos registos e à organização do trabalho. A professora realçou o facto de o Ricardo ter sido o único aluno da turma a ter tido nível 4 no exame de Matemática. Chamou ainda a atenção para o facto de o mesmo aluno ter tido nível 2 a Introdução às TIC quando revelou ser sempre um aluno bastante à vontade com a utilização do computador nas suas aulas de Matemática. A professora considerou que o à-vontade e o empenho com que o aluno trabalhou nas suas aulas com o computador se teria devido provavelmente ao gosto que o mesmo tinha pela Matemática.

Relativamente às suas classificações a Matemática, no 3º Período, o Ricardo manteve o nível 4 nas três classificações, de frequência, exame e final. A Maria teve nível 4 de classificação de frequência enquanto que o Bernardo e a Sara tiveram nível 3. No exame, estes três elementos do grupo obtiveram nível 2, tendo ficado com nível 3 de classificação final.

No que respeita à suas classificações finais nas outras disciplinas, o Ricardo teve dois níveis 2, a Francês e a Introdução às TIC, nível 4 a Ciências Naturais e nível 3 nas restantes disciplinas. A Maria teve nível 4 a História e nível 3 nas restantes disciplinas. O Bernardo teve dois níveis 4, a Educação Física e a Introdução às TIC, nível 5 a Inglês e nível 3 nas restantes disciplinas. A Sara teve quatro níveis 4, a Língua Portuguesa, a Francês, a Físico-Química e a Introdução às TIC, quatro níveis 5, a Inglês, a História, a Geografia, a Educação Visual e dois níveis 3, a Ciências Naturais e a Educação Física.

Na entrevista, todos os elementos do grupo indicaram o seu gosto por trabalhar em grupo nas aulas de Matemática, preferindo esta modalidade de trabalho à individual. E justificaram essa preferência pelo facto de se ajudarem mutuamente, possibilitando, assim, tirarem as suas dúvidas. A Sara dizia mesmo: "Muitas vezes, no trabalho individual, eu não consigo desenvolver as competências como no trabalho de grupo porque tenho a ajuda de três amigos que até são melhores ajudantes". Tanto o Bernardo como a Sara e a Maria apontaram o Ricardo como o elemento do grupo que sabia e percebia mais de Matemática, sendo, portanto, ele quem mais os ajudava e que mais contribuições fazia para o trabalho em grupo. A Maria fez a seguinte referência: "O Ricardo é aquele que percebe, faz mais coisas e depois explica à gente e isso é bom. O Bernardo também ajuda. Cada um tem o seu papel". E a Sara referiu: "Eu pergunto «Silva, isto aqui não percebo» e ele explica logo ali como sabe". O Ricardo, por sua vez, considerou que era o Bernardo que lhe tirava as dúvidas, justificando: "porque consigo perceber melhor se for o Bernardo a explicar”. Tanto o Bernardo como a Sara se referiram ao facto de o Ricardo ser um pouco desorganizado nos registos escritos, e que o papel de registar as conclusões do grupo era mais assumido pelos outros elementos do grupo e não tanto pelo Ricardo, confirmando, assim, uma ideia igualmente registada pela professora. Vejamos a referência feita pelo Bernardo:

> O Ricardo é… prontos [sic], é esperto. Então, qualquer coisinha, ele consegue mexer aquilo tudo e consegue arranjar uma solução para aquilo. Quando temos dúvidas, ele consegue sempre explicar-nos mas por assim, por palavras incertas; e depois com a ajuda da Sara, é que consegue-se, se calhar, assim, uma coisa assim… mais…”

O Bernardo, ao justificar o facto de ser o Ricardo quem mais o apoiava no trabalho de grupo em Matemática, qualificou como incertas as palavras do colega e indicou o papel preponderante da Sara na elaboração de registos mais organizados e sistematizados, embora tivesse tido dificuldade em exprimir a conclusão da sua frase, o que me levou a verbalizar a conclusão da mesma—“uma afirmação mais composta, é?”—tendo o Bernardo anuído afirmativamente com a cabeça. A Sara, a este propósito, explicitou: “[O Ricardo] vai pensando e nós vamos escrever”.

Todos eles consideraram que naquele ano evoluíram mais nas suas aprendizagens em Matemática, tendo sido o trabalho de grupo um dos factores que teria contribuído para esse facto. Consideraram ainda que tiveram mais oportunidade de aplicar os conhecimentos matemáticos, o que contribuiu para clarificar a compreensão dos diversos conceitos.

Relativamente às disciplinas preferidas, o Bernardo indicou Inglês e Educação Física, o Ricardo referiu Matemática, História e Ciências Naturais, a Maria disse preferir Matemática, Introdução às TIC, Educação Tecnológica e Química (mais do que Física, apesar de ambas pertencerem à mesma disciplina) e a Sara não conseguiu apontar disciplinas em particular mas referiu preferir as línguas. Os alunos referiram ainda que a preferência por estas disciplinas já datava do 5º ano ou mesmo do 1º Ciclo.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE MICROSCÓPICA DO TRABALHO COM UMA TAREFA

só através dos pormenores podemos perceber o essencial
(Márai, *As velas ardem até ao fim,* p. 122)

Neste capítulo, apresento a análise pormenorizada das aulas em que foi explorada e discutida uma tarefa, pela turma do segundo ano em que fiz a recolha de dados— "Vamos investigar – Matemática". Apesar de o objectivo do presente estudo se centrar na questão da demonstração matemática, analisei igualmente outros aspectos da actividade matemática dos alunos e da própria aula de Matemática pois esses resultados contextualizam e informam os resultados mais específicos directamente relacionados com as questões do estudo. O processo de demonstrar, quando existente, não pode ser desligado dos outros processos integrantes do trabalho dos alunos pois, efectivamente, são processos que se encontram intimamente relacionados. A eventual inexistência desse processo também só poderá ser cabalmente compreendida se dermos conta do modo como se desenvolveu o trabalho dos alunos. Por conseguinte, estruturei este capítulo em quatro secções orientadas para a estrutura das aulas incidentes na tarefa, para os momentos colectivos das aulas, para a exploração da tarefa pelos alunos e, finalmente, para a demonstração matemática. As últimas duas secções incluem as subsecções *A Turma* e *O Grupo-alvo*. A primeira subsecção apresenta o trabalho desenvolvido pela turma de uma forma mais superficial, com base nos trabalhos escritos dos alunos e nas minhas notas de campo decorrentes da observação das aulas. A segunda subsecção apresenta detalhadamente o trabalho desenvolvido pelo grupo-alvo com base nos registos vídeo. O modo como foi discutida a tarefa é analisado numa terceira subsecção incluída na secção *A Demonstração* pois revela como foi partilhada na turma a demonstração matemática efectuada pelos alunos.

A Tarefa "Vamos Investigar – Matemática" (Eixos de simetria)

Estrutura das Aulas

Estava previsto que a aula dedicada à exploração da tarefa fosse a penúltima do 2.º Período e que a discussão da mesma se efectivasse na aula seguinte, correspondente à última desse período. No entanto, devido à coincidência da realização de um corta-mato com a última aula de Matemática desse período, actividade essa que mobilizou a maioria dos alunos da turma, esta última aula não se realizou. A discussão da tarefa só teve lugar, portanto, na primeira aula de Matemática do 3.º Período, após as férias da Páscoa.

A aula de exploração da tarefa acabou por ser a última do 2.º Período e decorreu em trabalho de grupo. Teve um momento introdutório à exploração em que a turma ainda funcionou de forma colectiva, apesar de os alunos já estarem dispostos em grupo. Durante a exploração da tarefa, feita em grupo, a professora e eu circulávamos pelos grupos, acompanhando o seu trabalho, esclarecendo uma ou outra dúvida, incentivando-os para chegarem mais longe no seu raciocínio, apelando ao registo escrito das suas conclusões e fazendo um apoio mais insistente na alínea 2.c) da tarefa, alínea esta que foi a que suscitou mais dúvidas nos alunos e um pedido de apoio explícito da sua parte. A professora ainda introduziu dois momentos breves em que se dirigiu a toda a turma, durante a fase de exploração. No primeiro, logo no início da exploração, a professora esclareceu toda a turma relativamente ao traçado dos eixos de simetria. No segundo momento, a professora chamou a atenção de toda a turma, após os diversos grupos já terem feito o traçado dos eixos em alguns polígonos, entrando em diálogo com a mesma, em torno da explicitação da localização exacta do eixo de simetria relativamente ao lado do polígono.

A primeira aula do 3.º Período foi ocupada com o balanço avaliativo do trabalho desenvolvido pela turma nas aulas de Matemática, no qual foram referidas as aprendizagens e os progressos alcançados, seguido da discussão em torno da resolução da tarefa e das conclusões alcançadas pelos alunos, feita em grupo-turma, e numa segunda parte, os alunos exploraram uma outra tarefa.

Momentos Colectivos da Aula de Exploração da Tarefa

Os momentos colectivos da aula são marcados por uma forte negociação do significado matemático, mediada pelo discurso da professora e, por este motivo, darei agora aos mesmos uma atenção mais pormenorizada. A professora, como é seu hábito, parte da linguagem usada pelos alunos para, progressivamente, os levar a usar uma linguagem mais precisa e rigorosa própria da matemática. As suas intervenções orais nestes momentos prendem-se com aspectos do trabalho matemático dos alunos que ela considerou importantes e que quis garantir que todos se apropriassem. O momento concreto que escolheu para intervir para a turma globalmente prende-se com o momento que considerou adequado em termos da influência no desenvolvimento do trabalho dos alunos.

Depois de ter distribuído os materiais de trabalho impressos—a ficha de trabalho a cada aluno e a folha anexa, com os polígonos regulares nos quais os alunos deveriam traçar os eixos de simetria encontrados, a cada grupo—a professora incitou os alunos a lerem a ficha de trabalho antes de começarem a explorá-la para ficarem com uma ideia do que lhes era proposto fazer. Deu algum tempo para essa leitura silenciosa e, em seguida, estabeleceu um diálogo com toda a turma em torno do conceito de simetria[61], através do qual negociou o significado do mesmo, em termos informais. Aquela era a primeira aula, naquele ano, em que surgia o termo "simetria". A professora partiu do vestuário visível na sala de aula, o dos alunos e o dela, para estabelecer o que era ou não simétrico.

P- Então, temos aí uma ficha que vos pede (*pausa)* para fazermos uma investigação acerca de quê?
Vários alunos - Eixos de simetria.
P- Eixos de simetria. Chama até a atenção de que… hãa… os eixos de simetria… Naturalmente, se vocês pegarem na palavra ser simétrico, uma coisa que é simétrica, já devem ter alguma noção do que é… As nossas roupas geralmente são simétricas. A construção do meu casaco assim

506

[61] Embora na literatura actual sobre geometria, simetria seja considerada numa acepção lata como uma transformação geométrica que deixa a figura invariante, englobando, entre outras, as reflexões, as rotações e as translações (Veloso, 1998), quer a tarefa quer a discussão levantada pela professora reportam-se à simetria axial, isto é, à simetria entendida como simetria de reflexão.

como a dos vossos geralmente é simétrica.
Aluno A–É igual.
P- Não é igual.
Aluno B– Parecidos.
P- Pronto, não é igual. Não percebi o que disseste. Não te importas de repetir? Disseste que é igual ou que não era igual?
Aluno A- É igual.
P- Não é?
Aluno A– Stora, é e não é. É parecido, pois...
P – (*com uma voz enfática*) É parecido (*ligeira pausa*). Em que aspecto?
Aluno A– Na forma.
P – Na forma do casaco, não é?.. Portanto, todos os casacos são, por exemplo…
Alunos - (*imperceptível)*
P- Isso, tirando as mangas… As mangas não funcionam para vocês como sendo, como tendo a tal simetria? Como é que o meu casaco…? Olhem, o meu casaco tem aqui algo que faz com que ele no seu todo...
Os alunos indicam o enfeite que a professora tem na lapela do lado direito do casaco mas o que dizem é imperceptível.
P – Isso mesmo. Portanto, o facto de eu ter aqui o enfeite, não é? de repente eu posso dizer que a forma como eu estou vestida não está simétrica, não é? Porque para ser, eu tinha de ter agora outro igual deste lado, está bem? Está bem? Se eu tirar isto, se eu tirar isto, é simétrico, não é? Portanto, eu posso dividi-lo aqui ao meio, não é? Vocês podem olhar só para uma metade e são capazes de… de saber como é o outro lado. Para ele não ser simétrico, por exemplo, o que é que poderia acontecer?
Aluno – Não ter uma manga.
P- Os vossos blusões todos também são simétricos, não é? Mas ali o do vosso colega não é nada simétrico (*referindo-se ao blusão do Bernardo*).
Vários alunos (*falando ao mesmo tempo*)– Porque um lado é azul, e o outro (*imperceptível; o outro lado era cinzento).*
R (*falando ao mesmo tempo que os colegas*)- Uma metade é azul e a outra metade é… Todo trocado! Todo trocado!
P– Tem as riscas inclinadas… não é? Portanto, não é simétrico, tá [sic] bom? Também ali o do João também não, em termos do desenho que tem à frente (*situado no lado esquerdo do blusão*), também não é simétrico, está bem? Pronto, no dia-a-dia, a palavra “simétrico” tá [sic] situada convosco? Pronto, então já sabem que nós na Matemática devemos sempre relacionar os nomes—porque os nomes não aparecem por acaso—e a linguagem que nós utilizamos no nosso dia-a-dia é… tem, sob o ponto de vista matemático, tem ligações. É evidentemente uma forma de aplicar os registos mais informal, não é? E na Matemática nós não falamos, não nos debruçamos com essa informalidade mas o sentido que nós estamos habituados a trabalhar no dia-a-dia, a usar no dia-a-dia, no nosso quotidiano, não… não é desvirtuado, tá [sic] bem? Só que aqui na Matemática agora vamos apurar esse sentido e vamos ver até que ponto é que eu quero dizer, as consequências, as causas e por aí fora…

Um aspecto que pode merecer a nossa análise é a pessoa empregue pela professora logo na primeira frase quando se dirige aos alunos: "temos aí uma ficha que *vos* pede para *fazermos* uma investigação acerca de quê?" (linhas 1 e 2). Primeiro, a professora utiliza a segunda pessoa do plural—"uma ficha que vos pede"—numa clara afirmação de que o trabalho é para ser feito pelos alunos da turma. No entanto, logo depois muda para a primeira pessoa do plural—"para fazermos uma investigação"—o que denota que a professora se assume como uma companheira dos alunos nesse processo investigativo a ser realizado pelos alunos. Embora o seu papel não seja, efectivamente, o de colega dos alunos, tanto mais que foi afirmado, à partida, que o trabalho será feito pelos alunos, a professora, ao incluir-se, juntamente com os alunos, nesse *fazermos uma investigação,* está a disponibilizar-se para uma atitude de entrega e de partilha na jornada de trabalho a ser levada a cabo pelos mesmos.

Como vemos pelo excerto[62] apresentado, a professora negociou o sentido informal de simétrico através da exploração de exemplos e contra-exemplos o que corresponde, de facto, ao modo como todos nós construímos os conceitos: vemos o que há de comum a todos os exemplos que incluímos na categoria do conceito e vemos o que os distingue dos exemplos não incluídos nessa categoria. Aliás, conquista-se sempre uma maior compreensão do conceito ao explicitar o que *não é* em confronto com o que *é.*

O aluno A explicita o seu sentido informal de simétrico usando o termo "igual". E pressupomos que estará a querer dizer que uma metade do vestuário é igual à outra metade apesar de ter sido a professora que primeiramente usou o termo "metade" (linha 32). Existe neste termo "igual" a noção de uma constância que é, afinal, o que

[62] Usei apenas as iniciais P – professora e R - Ricardo. As falas dos outros alunos não estão identificadas com nomes pois trata-se de alunos que não pertencem ao grupo-alvo e nem sequer consigo identificá-los pois não surge a sua imagem nos registos vídeo; apenas se ouve a sua voz, e é pela localização da respectiva proveniência que consigo perceber se se trata do mesmo aluno ou de alunos diferentes. Usei letras para os distinguir.

caracteriza toda a transformação geométrica que seja uma isometria, tal como a origem etimológica da palavra o indica (isos = igual + metria = medida): a conservação dos comprimentos dos lados e das amplitudes dos ângulos das figuras sujeitas à transformação. No entanto, a professora vai negociando o sentido da linguagem utilizada pelo aluno A—"não é igual" (linha 10)—e questiona-o por não ter percebido bem o que ele tinha dito concretamente: "Disseste que é igual ou que não era igual?" (linha 13). O aluno continua a manter a sua resposta "É igual" (linha 14) sem acrescentar mais nada que pudesse justificar o uso deste termo. É curioso o modo como a professora formulou a pergunta, de imediato—"Não é?" (linha 15)—como se aquilo que ela própria estivesse a pensar a impedisse de ouvir claramente o aluno, dando-lhe a percepção de ouvir o que considera correcto. Só com esta ênfase na negativa por parte da professora é que o aluno A reformula a sua resposta: "Stora, é e não é. É parecido, pois..." (linha 16).

Sabemos que a razão que fundamenta a afirmação da professora "não é igual" (linha 10) tem a ver com a inversão que caracteriza uma simetria de reflexão, e ao mesmo tempo com o facto de que, mesmo na linguagem comum, é diferente afirmar-se a propósito de algo que é igual ou que é simétrico. No entanto, a característica de inversão não emergiu no diálogo com a turma. E talvez fosse também essa a razão que teria levado o aluno a reformular a sua resposta. De facto, se a sua preocupação fosse dar uma resposta consonante com a da professora, ele negaria simplesmente o que tinha dito e passaria a fazer coro com ela, afirmando que não era igual, mesmo que não fosse esse o seu entendimento. Contudo, ele continua a afirmar "É" mas simultaneamente considera que "não é", ou seja, exprime o entendimento de que figuras simétricas (neste caso, exemplificadas com as roupas) têm características que são iguais *e* outras que não são iguais. Poderemos pensar que o aluno entende que o que não é igual é a posição no espaço da figura simétrica, mas os dados nada nos dizem explicitamente sobre isso. O aluno, de imediato, resolve a contradição do "é e não é" com a expressão "É parecido". De qualquer modo, poderemos assumir que o aluno tem apropriada a ideia matemática essencial do que é uma simetria—uma transformação geométrica que deixa a figura invariante[63]. A professora repete a expressão proferida pelo aluno "É parecido" (linha 17), tornando-a sua e dando a devida ênfase—quer pelo tom de voz bem audível e afirmativo quer pela pausa subsequente—que levasse toda a turma, e em particular o aluno que a proferiu, a debruçar-se nela para reflectir sobre o seu significado. E é o apelo à reflexão que encontramos no seu questionamento feito a seguir "Em que aspecto?" (linha 17), ao que o aluno A responde sem hesitar "Na forma" (linha 18).

Mais uma vez, o aluno denota uma compreensão correcta do conceito de simetria pois, efectivamente, o que está em jogo numa transformação geométrica como a simetria é a forma quer no que permanece igual quer no que se transforma: a forma, em si mesma, mantém-se constante mas muda a sua posição espacial. Ou seja, e usando as palavras do aluno A, a forma é e não é igual: é parecido (contradição condensada). Imediatamente, a professora aprova, implicitamente, a resposta do aluno A "Na forma do casaco, não é?" (linha 19). Integrando numa frase formulada por si a expressão proferida pelo aluno, a professora veicula a validação que o poder institucional de professora lhe confere, dando simultaneamente a essa validação um carácter de acordo partilhado e negociado com todos os alunos: "não é?".

Vejamos como um outro entendimento diferente de simetria emerge pelas palavras de vários alunos a propósito da explicitação da razão de um determinado blusão não ser simétrico "Porque um lado é azul, e o outro (*imperceptível; o outro lado era cinzento)*"

510

[63] Passo a citar Veloso (1998, p. 182) na explicitação que faz do significado de *invariante:* "invariante significa aqui globalmente invariante—isto é, podem alguns ou todos os pontos da figura mudar de posição, mas a figura, como um todo, fica invariante".

(linhas 37 e 38); "Uma metade é azul e a outra metade é… Todo trocado! Todo trocado!" (linhas 39 e 40). O que entra aqui em jogo já não é a forma mas sim a cor: o que não é igual é a cor, e por isso não existe simetria. A professora intervém a complementar a justificação dos alunos mas a razão apontada por si é substancialmente diferente: "as riscas inclinadas" (linha 41) prendem-se com a forma e não com a cor, já que o blusão tinha riscas inclinadas em sensivelmente três quartos do blusão e na parte restante era liso. Ou seja, se imaginássemos um eventual eixo de simetria localizado na parte do fecho do blusão, situado a meio do mesmo, como este atravessa as riscas inclinadas, teríamos forçosamente que rejeitar essa hipótese, tal como se poderá ficar com uma ideia com a figura 13. Qualquer outra hipotética localização de um eixo de simetria no blusão teria que ser rejeitada, já que as riscas ocupam sensivelmente três quartos do blusão.

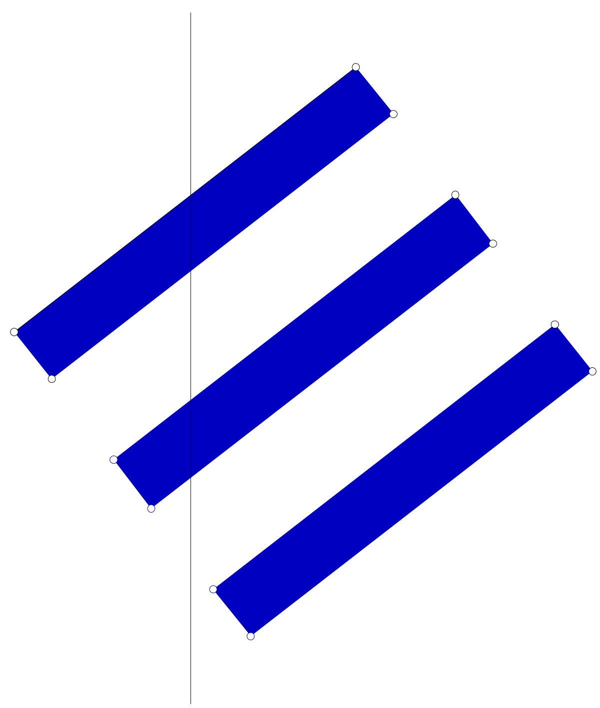


Figura 13. Modelo das riscas inclinadas de um blusão de um aluno

Também o outro contra-exemplo referido por si apela à forma: "Também ali o do João também não, em termos do desenho que tem à frente (*situado no lado esquerdo do blusão*), também não é simétrico" (linhas 42 e 43). Emergiram aqui dois critérios—forma e cor—para distinguir o que é simétrico do que não é simétrico. Estes dois critérios coexistiram sem conflito e não houve qualquer discussão em torno da aceitabilidade, ou não, de ambos, do ponto de vista matemático.

Um outro aspecto que nos pode merecer a nossa análise é a razão da introdução dos contra-exemplos pela professora. O seu próprio casaco tinha sido referido inicialmente como um exemplo de roupa simétrica—"A construção do meu casaco assim como a dos vossos geralmente é simétrica" (linhas 7 e 8)—já que era a respectiva construção que estava em foco. Quando a professora se apercebeu que persistia entre os alunos alguma confusão relativamente ao conceito de simetria, ao ouvi-los falar das mangas, voltou a referir o seu casaco mas agora chamando a atenção dos alunos para o pormenor que fazia com que ele não fosse simétrico. Apesar de ser imperceptível o que os alunos dizem a propósito das mangas, poderemos deduzir pela intervenção da professora—"Isso, tirando as mangas… As mangas não funcionam para vocês como sendo, como tendo a tal simetria?" (linhas 22 e 23)—que os alunos considerariam que teria que se tirar as mangas para os casacos serem simétricos. A primeira parte da intervenção da professora "Isso, tirando as mangas…" deve ser, pois, um refrasear o que foi afirmado pelos alunos pois o seu discurso tinha esta característica: partir do que os alunos dizem para questionar e fazer avançar na compreensão matemática. A sua interrogação "As mangas não funcionam para vocês como sendo, como tendo a tal simetria?" é mais uma constatação do que uma pergunta pois, efectivamente, a professora não dá tempo para ouvir qualquer resposta, prosseguindo imediatamente com a questão em torno do seu casaco. Isto é, a professora identificou que teria de introduzir um contra-exemplo para que os alunos entendessem que não eram as mangas que tornavam uma roupa sem simetria. Não voltou a referir a questão das mangas de forma explícita pois interiorizou que os alunos se tinham apropriado dessa ideia ao apontarem o enfeite na lapela esquerda como aquilo que fazia com que o seu casaco não fosse simétrico. A sua afirmação, sempre em tom interrogado para estabelecer o acordo com os alunos "Se eu tirar isto, se eu tirar isto, é simétrico, não é?" (linha 30) refuta, sem necessidade de referência explícita, a possibilidade de serem as mangas a determinar que o casaco não seja simétrico.

A professora fez ainda uma ponte entre o exemplo do casaco e o trabalho concreto visado pela tarefa: a descoberta e o traçado de eixos de simetria. Quando afirmou "Portanto, eu posso dividi-lo aqui ao meio, não é? Vocês podem olhar só para uma metade e são capazes de… de saber como é o outro lado" (linhas 30-32), tentou evidenciar que a simetria definida pelo eixo vertical de simetria do seu casaco era a simetria do plano do casaco que deixava o casaco invariante (tirando o enfeite)— "Vocês podem olhar só para uma metade e são capazes de… de saber como é o outro lado". A ligação com o trabalho a desenvolver na aula pelos alunos foi feita de forma implícita: a professora nunca referiu que a divisão ao meio do casaco corresponderia ao traçado de um eixo de simetria, já que cada um dos eixos dividiria, igualmente, ao meio o polígono em causa.

Este momento colectivo da aula terminou com a referência feita pela professora às ligações entre a linguagem comum e a linguagem matemática e respectivos significados: "mas o sentido que nós estamos habituados a trabalhar no dia-a-dia, a usar no dia-a-dia, no nosso quotidiano, não… não é desvirtuado, tá [sic] bem? Só que aqui na Matemática agora vamos apurar esse sentido" (linhas 50-53). A ligação que a professora faz entre o conhecimento comum e o conhecimento matemático entra em consonância com a perspectiva de Lakoff e Núñez (2000), segundo a qual, as ideias matemáticas baseiam-se nas ideias do dia-a-dia. Neste caso particular, a ideia de simetria é suportada por mecanismos cognitivos que são igualmente usados nas ideias comuns do dia-a-dia, como é o caso das relações espaciais básicas, o movimento, as orientações do corpo, ou as manipulações básicas de objectos de reflexão. Subentende-se pela conclusão deste momento que a professora sentiu que se tinha chegado a um consenso, na turma, relativamente ao sentido informal de simétrico, associado ao vestuário, e que este consenso seria suficiente para garantir um adequado ponto de partida para o trabalho dos alunos, no sentido de se desenvolver um apuramento matemático do sentido informal de um conceito usado no dia-a-dia.

Só então, leu a primeira questão e se referiu ao facto de os espelhos estarem unidos em forma de livro. Realçou que o uso em livro seria necessário para um outro trabalho a desenvolver noutra aula posterior e que nesta aula, os alunos deveriam colocá-los a direito ou usar apenas um dos lados de um dos espelhos. Seguidamente, procedeu à distribuição dos livros de espelhos, dois para cada grupo.

Após um pequeno período de tempo em que os alunos começaram a manusear os espelhos para determinarem os eixos de simetria pedidos, a professora dirigiu-se a toda a turma para esclarecer que deveriam traçar os eixos no local correspondente à posição do espelho que permitisse ver toda a figura, tal como ela se apresenta sem o espelho:

> P- Olhem, quando descobrirem a posição do espelho que pode ficar de maneira a que vocês vejam a figura toda, uma parte… uma parte no papel e outra parte dentro do espelho, mas que essa posição dê toda a figura que vocês vêem quando tiram o espelho (*fez um gesto com a mão direita de retirar o espelho para cima)*, tá [sic] bem? depois traçam o sítio onde é possível pôr o espelho, tá [sic]?

Assim que a professora elevou a voz para se fazer ouvir por toda a turma, os alunos do grupo-alvo interromperam o que estavam a fazer e viraram-se na direcção do sítio onde se encontrava a professora, prestando-lhe atenção. A segunda metade da intervenção da professora foi acompanhada pelo Ricardo através da experimentação por intermédio do espelho. Ou seja, o Ricardo deixou de se virar para a professora, debruçou-se no seu trabalho utilizando o espelho na estrela da ficha de trabalho e colocando-o na localização exacta à do eixo de simetria. Foi fazendo e experimentando que deu sentido às palavras da professora: a sua outra postura não significa alheamento dessas palavras; pelo contrário, concretizou com a sua acção a forma de obter com o espelho toda a figura, acompanhando de forma atenta o discurso oral da professora com a sua própria prática. Acenou afirmativamente com a cabeça por várias vezes enquanto manuseava o espelho, o que constitui uma manifestação de, por um lado, estar a conseguir concretizar o que era indicado pela professora, e por outro lado, de estar a compreender perfeitamente o que a professora dizia. Aliás, já tinha concretizado esta acção nalguns polígonos antes desta intervenção da professora, e exactamente no momento em que esta começou a falar para a turma, o Ricardo estava com o espelho na estrela a experimentar a localização dos eixos, tendo interrompido e levantado o espelho ao ouvir a professora para logo a seguir voltar a colocar o espelho na estrela. Poderemos portanto inferir que o Ricardo teria recebido as palavras da professora como uma confirmação e validação do que ele próprio fizera antes.

Esta intervenção influenciou o trabalho dos alunos pois foi imediatamente a seguir à mesma que os alunos da turma começaram a traçar com a régua os vários eixos de simetria. O enunciado da tarefa não pede explicitamente o traçado dos eixos. A utilização da régua foi igualmente solicitada pela professora, um pouco depois, quando se dirigiu novamente a toda a turma: "quando descobrirem os eixos, desenham logo com a régua, tá [sic] bem? para ficar, para não perderem de vista depois, para poderem generalizar…". Esta nova intervenção da professora funda-se mais num novo pedido de traçado dos eixos do que propriamente no pedido de uso da régua. Isto é, a professora solicita aos alunos a reificação do seu trabalho pois a fase mais complexa do seu trabalho—a generalização e a demonstração matemática—depende dessa reificação. Como reflectir acerca das características dos eixos em relação aos vértices e aos lados se eles não estiverem perfeitamente visíveis no papel, se eles não estiverem traçados? A reificação dos eixos transforma-os em objectos cujo carácter mais estático lhes confere alguma perenidade susceptível de ser alvo de uma visão posterior mais atenta ou demorada, acompanhada de alguma reflexão. É essa perenidade que transparece na expressão "para ficar", perenidade esta possibilitadora da objectificação que torna os objectos passíveis de serem olhados de novo—"para não perderem de vista depois"—, e observados do ponto de vista da existência de um padrão conducente à generalização—"para poderem generalizar…".

Vejamos agora como se desenvolveu o segundo momento colectivo no decurso da exploração da tarefa. Este momento ocorreu após um certo período de tempo no qual os alunos traçaram os eixos de simetria dos vários polígonos regulares que se encontravam na folha anexa e contaram-nos para completar a tabela incluída na ficha. A professora chamou então a atenção de todos os alunos e os que se encontravam de costas para ela viraram-se de modo a olhar para ela e a dar-lhe atenção.

P- Já vejo que vocês já estão a perceber onde é que devem colocar o espelho. Mas agora pergunto: quando colocam o espelho, como é que o espelho tem de ficar relativamente a um lado que ele possa ficar perpendicular?
Aluno- (*imperceptível*)
P- Tem de ficar como?
Aluno- (*imperceptível*)
P- (*com a voz mais baixa*) Toda a gente está a ouvir a pergunta que eu estou

a fazer? (*subindo de novo o tom de voz para ficar bem audível na turma*) Quando colocam o espelho em cima de um lado… Por exemplo, começando pelo triângulo, não é? que é o primeiro que lá pede, e quando colocam o espelho… que forma… que posição é que o espelho tem de ficar relativamente ao lado em que ele é perpendicular? Em que ele é perpendicular?

Aluno- O centro…

P- O que é que quer dizer esse centro?

Aluno- (*imperceptível*)

P- Esse ponto que tu tás [sic] a dizer que é o centro do lado, é isso que estás a dizer? esse centro do lado, vamos lá usar a palavra adequada, é o quê?

Aluno- (*imperceptível*)

R- (*virando-se para o grupo e baixando um pouco a cabeça*) Ah! Agora não me lembro do nome…

P- É o quê?

R- A mediatriz.

P- Diz.

R- (*com uma voz mais explícita e mais audível*) A mediatriz.

P- (*com uma voz enfática*) A mediatriz. Portanto, quando vocês têm um lado, é o ponto médio (*dando nova ênfase*). Aqui chama-se ponto médio. A mediatriz é a linha que passa por ele, tá [sic] bem? Ou seja, este lado aqui tem a mesma distância, tem o mesmo tamanho que este, tá [sic] bem? Portanto, vocês quando desenham depois o eixo, (…) (*referência a que os alunos deverão corrigir o traçado se ficar como um exemplo concretizado pela professora e em que o eixo não passava pelo ponto médio).*

P- É claro que não estamos a fazer medições. Porque se tivéssemos [sic], vocês tinham de usar o compasso (…) (*referência ao modo de usar o compasso na determinação do ponto médio).* Nós não estamos a fazer o processo da construção geométrica porque vocês agora têm é que reflectir acerca de quando os eixos se encontram correspondendo aos lados do polígono, tá [sic] bem? Mas de qualquer maneira, não ponham os eixos de tal maneira a que logo, a olho nu, se vê que os lados são diferentes, tá [sic] bem? Têm que acertar de maneira a dar a sensação de que aquele lado ficou dividido em duas partes iguais, tá [sic]?

Este excerto evidencia uma forte negociação do significado matemático pela qual se faz o encontro entre o entendimento que os alunos fazem das palavras da professora e o que a professora pretendia com a sua questão. Com efeito, a professora pretendia que os alunos tomassem consciência, ou explicitassem, que o eixo de simetria quando passa pelos lados dos polígonos, passa pelos respectivos pontos médios. Talvez a razão pela qual a professora introduziu este momento colectivo tenha a ver com o facto de, eventualmente, se ter dado conta de que alguns traçados dos eixos feitos pelos alunos não respeitariam essa condição. Tanto mais que a professora apelou a que os alunos corrigissem o trabalho se fosse esse o caso.

O modo como a professora formulou a questão—"como é que o espelho tem de ficar relativamente a um lado que ele possa ficar perpendicular? (linhas 2-4); "que posição é que o espelho tem de ficar relativamente ao lado em que ele é perpendicular?" (linhas 12 e 13)—poderia levar os alunos a entender a posição do espelho como um lugar geométrico e não como um ponto. Um dos alunos responde "O centro…" (linha 15) à questão formulada pela segunda vez. Não temos dados que nos evidenciem o que estaria ele a visualizar com o centro. A professora questiona-o, pegando nas suas palavras, no intuito de o levar a uma maior explicitação: "O que é que quer dizer esse centro?" (linha 16). Trata-se de uma pergunta com um carácter completamente diferente da pergunta anterior. Enquanto que na primeira pergunta, a professora sabe a sua resposta e o objectivo da mesma reside na condução dos alunos à explicitação da localização do eixo de simetria relativamente ao lado do polígono, nesta segunda pergunta, a professora desconhece a resposta: é uma pergunta genuína cujo objectivo é o esclarecimento sobre o pensamento do aluno em causa. Apesar da resposta do aluno ser imperceptível, poderemos deduzir pela fala da professora que terá respondido "O centro do lado". A professora associa a expressão "centro do lado", formulada pelo aluno, ao ponto médio—"Esse ponto que tu tás [sic] a dizer que é o centro do lado, é isso que estás a dizer? esse centro do lado, vamos lá usar a palavra adequada, é o quê?" (linhas 18 e 19) e negoceia o significado de uma expressão, que incorpora unicamente as palavras do próprio aluno na tentativa de traduzir uma dada propriedade geométrica, confirmando com ele se estariam a falar do mesmo—"Esse ponto que tu tás [sic] a dizer que é o centro do lado, é isso que estás a dizer?—e apelando à utilização do vocabulário matemático—"vamos lá usar a palavra adequada".

Face a este apelo, que é dirigido a toda a turma, apesar de o questionamento anterior visar um aluno em particular, é um outro aluno que responde, o Ricardo do grupo-alvo, utilizando um termo matemático aprendido no ano anterior: mediatriz. O Ricardo faz um certo esforço ao tentar recordar-se do termo: "Ah! Agora não me lembro do nome.." (linhas 21 e 22). É interessante notar a forma como foi este conhecimento mobilizado num novo assunto mas que tem com ele íntimas ligações. Efectivamente, cada eixo de simetria que passe pelo ponto médio dos lados dos polígonos é a mediatriz desses lados. Poderemos até pensar que o facto de a professora ter referido a perpendicularidade do eixo relativamente ao lado do polígono poderia ter influenciado nessa mobilização pois é a perpendicularidade associada à intersecção com o ponto médio de um segmento de recta que caracteriza a mediatriz desse segmento de recta. Possivelmente o que o Ricardo estaria a visualizar não era um ponto mas sim toda a recta na qual assentaria o espelho—"A mediatriz" (linhas 24 e 26)—e se assim foi, utilizou o termo matemático adequado. A professora, mesmo assumindo que se estariam a referir ao ponto, valorizou a resposta do aluno: o modo como repetiu a mediatriz proferida momentos antes pelo Ricardo, dando-lhe uma ênfase afirmativa, provocou na turma a percepção de validação dessa mesma resposta. Logo a seguir, a professora adiantou, ela própria, a expressão "ponto médio", distinguindo-a de mediatriz e esclarecendo o significado de ambos: "Aqui chama-se ponto médio. A mediatriz é a linha que passa por ele, tá [sic] bem? Ou seja, este lado aqui tem a mesma distância, tem o mesmo tamanho que este, tá [sic] bem?" (linhas 29-31). E subentende-se que a professora estaria a apontar para um caso concreto, possivelmente para o triângulo desenhado no quadro, pois é este o exemplo indicado pela professora (linha 11), primeiro para uma das metades do segmento formado pelo lado do polígono, metade esta que a professora referenciou como "este lado aqui", e depois para a outra metade—"tem o mesmo tamanho que este".

Um outro aspecto que mereceu a negociação explícita foi o rigor requerido para esta tarefa. Por um lado, a professora exige rigor matemático na consciencialização dos alunos de que o eixo de simetria passa pelo ponto médio dos lados dos polígonos e até na utilização da linguagem matemática, mas por outro lado, a professora não exige rigor ao nível da construção dos traçados dos eixos—"É claro que não estamos a fazer medições. Porque se tivéssemos [sic], vocês tinham de usar o compasso" (linhas 35 e 36); "Nós não estamos a fazer o processo da construção geométrica" (linhas 37 e 38). Ou seja, não se exige uma medição rigorosa do ponto médio mas exige-se que se dê evidência desse conhecimento matemático de tal modo que, a olho nu, se fique com "a sensação de que aquele lado ficou dividido em duas partes iguais" (linhas 42 e 43).

Quando a professora solicita aos alunos que reflictam "acerca de quando os eixos se encontram correspondendo aos lados dos polígonos" (linhas 39 e 40), está a utilizar cognitivamente o mecanismo do esquema de movimento fictício, sendo este um esquema de imagem (Lakoff e Núñez, 2000). Este mecanismo cognitivo permite conceptualizar os eixos de simetria tanto como objectos estáticos como processos de movimento ao longo de trajectórias, trajectórias estas que atravessam os lados dos polígonos. À medida que os eixos percorrem essas trajectórias, vão deixando o respectivo traçado, e num dado momento desse processo, ocorre o encontro dos eixos, encontro este materializado no seu ponto de intersecção.

Em síntese, a aula foi ocupada quase integralmente com a exploração da tarefa, em trabalho de grupo. Os momentos partilhados na turma serviram para se negociar aspectos matemáticos relevantes para a concretização da tarefa pelos alunos.

A Exploração da Tarefa

A Turma

Os alunos começaram por utilizar o espelho nos polígonos regulares da folha anexa e também na estrela, colocando-o onde supunham encontrar-se o eixo de simetria. A estrela não suscitou dificuldades mas nos polígonos, nem sempre o faziam de forma correcta.

Um exemplo de localização incorrecta do espelho surgiu no Grupo C, logo imediatamente a seguir à intervenção da professora relativamente a como posicionar o espelho nas figuras (p. 514). A professora interpelou o aluno em causa: "É igual? Não. Esta figura não é igual a esta figura toda que estás aqui a ver, pois não? Aqui não é, não é? (…) Vamos traçar aí".

Depois da intervenção da professora a orientar o trabalho relativamente à localização do espelho e a solicitar o traçado dos eixos (p. 514), os alunos começaram a traçar os eixos com a régua. De um modo geral, foram vários os grupos que conjecturaram que o número de eixos de simetria seria igual ao número de lados dos polígonos regulares, preenchendo a tabela da ficha mesmo antes de traçarem os eixos e de verificarem se assim era. Houve até grupos que chegaram a rejeitar essa conjectura quando não conseguiam descobrir com o espelho todos os eixos de simetria possíveis, principalmente no caso dos polígonos com maior número de lados. Um aluno de um dos grupos mostrou-me a tabela completa e correctamente preenchida—mas sem que tal tivesse sido acompanhado pelo traçado dos eixos de todas as figuras—e perguntou-me se estava certo. Passo a transcrever a anotação que fiz deste episódio nas notas de campo redigidas na altura:

> Como eu não quis responder, disse que eles é que tinham de verificar com o espelho se era ou não, ficou inseguro e decidiu apagar tudo na tabela dizendo que estava tudo errado. Depois, lá viram que afinal estava certo.

Esta reacção deste aluno prende-se com as suas características bastante particulares. De qualquer modo, é uma reacção tipicamente escolar em que se espera que *a professora* valide o seu trabalho e quando esta não o faz, tal é interpretado como uma validação negativa, uma mensagem implícita de que está tudo errado.

Existe uma nota comum nesta fase de trabalho dos alunos da turma que passarei a analisar. Colocaram o espelho nas primeiras figuras solicitadas na tabela e constantes na folha anexa, contaram os eixos, traçaram-nos e iniciaram o preenchimento da tabela. Aperceberam-se da existência de um padrão: os números que escreviam eram sempre iguais aos números inseridos na primeira linha da tabela. Esta percepção de um padrão levou-os a uma primeira generalização de que tal aconteceria sempre, qualquer que fosse o número de lados do polígono regular. E a formulação da generalização foi expressa através da conjectura escrita em 2. b). Quando prosseguiram o trabalho da verificação com o espelho para os polígonos com um maior número de lados, faziam-no na base de uma conjectura da qual já tinham alguma convicção. Isto é, o próprio enunciado da tarefa conduziu-os a testar a conjectura com outros casos particulares. A dificuldade de alguns grupos em fazer o traçado dos eixos para estes casos, cujo número elevado de lados aumenta o grau de dificuldade desse mesmo traçado, levou-os a considerá-los como contra-exemplos da conjectura formulada antes e a rejeitar essa mesma conjectura. No entanto, o apoio que foi prestado pelas professoras no que respeita ao traçado dos eixos contribuiu para a superação dessa dificuldade e esses grupos regressaram à adopção da conjectura anterior. Assim, todos os grupos acabaram por estabelecer a igualdade entre o número de eixos de simetria e o número de lados do polígono regular.

A alínea seguinte que solicitava uma explicação já suscitou um trabalho diferenciado por parte dos alunos que darei conta na próxima secção. As últimas três questões da ficha foram ainda realizadas pelos alunos nesta aula. Quase todos os grupos se limitaram a construir cerca de dois polígonos tanto na questão 3 como na questão 4, traçando os eixos quando existentes e indicando o seu número, ou fazendo unicamente o traçado, ou ainda indicando o seu número sem os traçarem. Dois dos seis grupos, formados na turma, construíram o quadrado, na questão 4, apesar de já terem traçado os respectivos eixos anteriormente na folha anexa, na questão 2. Dois dos grupos (um deles é o grupo-alvo) apresentam, por sua própria iniciativa, justificações para as suas conclusões relativas às últimas três questões, que apresentarei na secção seguinte. Relativamente à questão 5, o Grupo E escreveu: "Tem quantos eixos nós quisermos que tenha. Tem eixos infinitos". É uma resposta assaz interessante pois evidencia, de forma clara, o modo como o conceito de infinito é efectivamente uma construção mental. "Tem quantos eixos nós quisermos que tenha" aponta para esta capacidade nossa, enquanto humanos, com corpos finitos e experiências finitas, de imaginarmos uma contagem que se prolonga indefinidamente, sem parar. Mas se nessa contagem iterativa, admitirmos paragens intermediárias e resultados intermediários, podemos também admitir que um acto humano de contar é inerentemente finito—há um momento em que nos cansamos, ou temos de interromper para fazer uma outra coisa, e paramos—e é esse momento de paragem imposto pela nossa condição física humana que está subjacente em "quantos eixos nós quisermos que tenha". Mas, mentalmente, podemos sempre conceptualizar algo que nunca acaba: e o grupo acrescenta, de forma peremptória "Tem eixos infinitos".

O Grupo-alvo

Darei agora uma atenção mais detalhada ao modo como o grupo-alvo explorou a tarefa. Assim que os livros de espelhos foram distribuídos, o grupo utilizou-os para descobrir onde se encontravam os eixos de simetria das figuras dadas. O Ricardo começou por colocar o espelho num dos eixos do octógono (o eixo horizontal, relativamente à forma como estava disposta a folha, com o triângulo em cima) e comentou "Que fácil!". Em seguida, foi a Maria que o colocou no hexágono, de forma incorrecta, tendo sido corrigida pelo Ricardo. Passo a apresentar o respectivo episódio.

Antes da intervenção da professora relativamente ao posicionamento do espelho (p. 514), a Maria colocou o espelho no hexágono na localização indicada pela recta na figura 14, tendo-o largado nessa posição (como se tratava de um livro de espelhos, este aguentava-se sozinho):

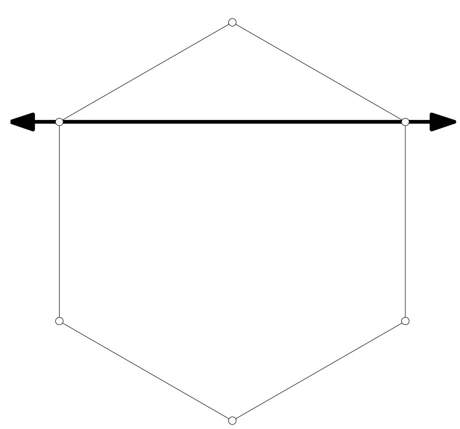


Figura 14. Localização do espelho

O Ricardo contestou esta localização e logo colocou o espelho numa posição oblíqua, tendo exclamado a seguir "Espectáculo, Maria!":

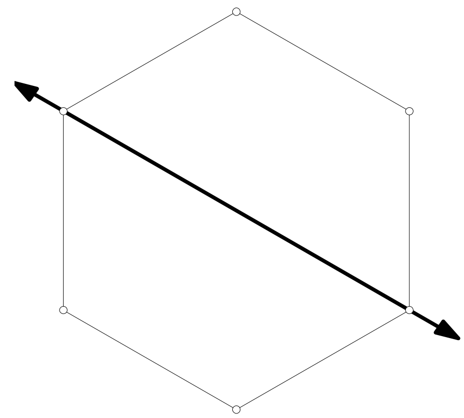


Figura 15. Correcção da localização do espelho

Esta foi a única vez que a Maria utilizou o espelho de modo intencional visando a exploração da tarefa. Após este episódio, quem se apropriou dos espelhos foram o Ricardo e a Sara, que tiveram igualmente uma participação dominante no grupo.

Depois, foi o Ricardo que colocou o espelho no triângulo. A forma de o grupo encontrar os três eixos foi suscitada por uma pequena discussão entre o Ricardo e a Sara. O Ricardo colocou o espelho num dos eixos do triângulo e a Sara, que se encontrava sentada do outro lado da mesa, de frente ao colega, e vendo, portanto, a folha, do lado contrário, replicou-lhe que o eixo era noutro lado, agarrando também no espelho e querendo-o levar para outra localização. O Ricardo não deixava levar o espelho, sustentando que era ali o eixo de simetria. Quando, por fim, deixou que a Sara levasse o espelho para outro lado, mas nunca largando o espelho, à afirmação da colega "Aqui." respondeu-lhe: "É igual, Sara. É ao meio.". Tanto um como o outro deveriam ter visualizado inicialmente apenas um eixo de simetria no triângulo equilátero, em diferentes localizações. A discórdia entre eles relativamente à localização desse eixo foi resolvida com a utilização do espelho que comprovou que ambos tinham razão, funcionando como um meio de descoberta dos três eixos deste triângulo. A resposta "É igual, Sara. É ao meio." mostra que o Ricardo aceita a sugestão da colega, percebendo que o eixo da Sara não iria substituir o seu mas sim coexistir com ele. O Ricardo explicita assim a sua compreensão de que o eixo de simetria divide a figura ao meio e que, dado o facto de ser regular, o triângulo teria três eixos a dividi-lo ao meio. Após este pequeno episódio, o espelho foi ainda colocado nos restantes polígonos da folha.

Imediatamente a seguir à intervenção da professora sobre a localização do espelho, em que solicitou o traçado dos eixos (p. 514), tanto o Ricardo como a Sara começaram a fazer o traçado dos eixos da estrela. A Sara, primeiro, olhou com atenção, vendo onde eram, e só depois é que pegou no espelho, confirmando a respectiva localização: deu pequenos saltinhos no próprio lugar, em manifestação de alegria por essa mesma confirmação, e indicou ao Ricardo, na ficha deste, onde se localizavam os eixos ainda não traçados (o Ricardo traçara até ao momento dois eixos de simetria): "Aqui e aqui. Aqui também dá.". Depois, traçou um dos eixos, voltou a pegar no espelho para o colocar num outro eixo e falou para a Maria "Vês? Mais um!" enquanto traçava o segundo eixo da estrela. Traçou, em seguida, os outros dois eixos da estrela. Depois, o Ricardo e a Sara começaram a traçar os eixos dos polígonos regulares com a régua: a Sara traçou no triângulo, a seguir foi o Ricardo, no quadrado, no hexágono e no pentágono; depois, a Sara começou no heptágono e passou-o ao Ricardo que o concluiu enquanto a Sara traçava simultaneamente no octógono. Nesta fase de trabalho de traçado dos eixos dos polígonos regulares, o espelho foi usado pela Sara unicamente para traçar o primeiro eixo do triângulo (depois de colocado e de confirmada a sua localização, usou-o para fazer o traçado que foi depois melhorado com a utilização da régua). Os restantes eixos, quer do triângulo quer dos outros polígonos, foram traçados sem qualquer auxílio do espelho.

O espelho foi, portanto, usado numa fase inicial do trabalho para descobrir, ou para confirmar, onde se encontravam os eixos e depois foi dispensado. Digo confirmar, pois, efectivamente, vê-se sempre o Ricardo a colocar o espelho no sítio correcto e também a Sara o colocou correctamente, por várias vezes, depois de visualizar a localização dos eixos. Ou seja, estes alunos tinham já desenvolvido um sentido da localização dos eixos pela construção de imagens mentais. Não andavam à procura da localização adequada do espelho. Já sabiam qual era antecipadamente e o espelho serviu-lhes de confirmação da sua própria visualização dos eixos de simetria dos diferentes polígonos. Deste modo, o espelho foi usado na concretização da tarefa num período muito breve da aula antes de começarem a traçar os eixos dos polígonos regulares na folha anexa. O traçado dos eixos foi feito unicamente por recurso à visualização: tanto o Ricardo como a Sara traçavam com a régua no local onde 'viam' mentalmente o eixo de simetria.

A visualização encontra-se evidenciada em dois pequenos episódios que passo a descrever. Logo no início da aula, ainda antes de os livros de espelhos terem sido distribuídos, enquanto a professora falava das ligações entre a Matemática e o dia-a-dia, o Ricardo pegou na folha dos polígonos que se encontrava no meio da mesa e, pondo-a à sua frente, começou a traçar os eixos com o lápis no ar, passando rapidamente por todos os polígonos, tendo feito o traçado imaginário de um ou dois eixos em cada polígono. Num dos polígonos, chegou a fazer um traçado leve com o lápis que se apressou, logo depois, a apagar, por sentir que se estaria a adiantar ao trabalho, de acordo com o estipulado pelo enunciado e pela professora. Este é um episódio que evidencia a visualização, feita pelo Ricardo, de alguns dos eixos de cada polígono. Um outro episódio reporta-se ao momento ocorrido pouco depois de o Ricardo ter traçado alguns eixos no hexágono. Nesse momento, a Sara diz-lhe "Há muitas mais maneiras.

Olha aqui.", enquanto vai apontando para outras localizações, ao que o Ricardo lhe responde "Calma, ainda não acabei.". Sem que necessitassem de usar o espelho, a Sara viu que o hexágono tinha mais eixos do que os já traçados pelo Ricardo e este também sabia da sua existência pois tinha a noção de que apenas tinha começado o traçado e que ainda não tinha acabado.

O Bernardo que, na tarefa, só traçou os eixos da estrela na sua ficha individual, utilizou o espelho para verificar onde se localizavam os respectivos eixos e, logo a seguir, traçou-os. E fê-lo enquanto o Ricardo se dedicava a traçar os eixos no hexágono. Este facto leva-nos a concluir que a existência de uma folha impressa com os polígonos regulares para cada aluno poderia ser um factor que poderia contribuir para a formação de uma identidade de participação (Wenger, 1998) por parte do Bernardo e da Maria. Tal como traçaram os eixos na estrela, teriam, assim, que traçar também os eixos nos outros polígonos regulares e apropriar-se, a seu modo, das suas propriedades geométricas relativamente à simetria por reflexão.

Durante a fase de traçado dos eixos, o espelho foi usado por duas vezes como comprovativo. Na primeira vez, a Sara, depois de contar o número de eixos do hexágono e do pentágono, colocou o espelho por cima dos eixos do pentágono, traçados pelo Ricardo, para comprovar da sua correcção. Na segunda vez, foi o Ricardo que o usou com esta mesma função no heptágono, como meio de demonstrar à Sara que tinha razão. Trata-se de um episódio que descreverei e analisarei a seguir.

No grupo-alvo, a dificuldade com o traçado dos eixos de simetria dos polígonos com maior número de lados manifestou-se na localização dos mesmos no caso do heptágono. A Sara, antes de começar a traçar o primeiro eixo no heptágono, olhou com alguma atenção para a figura, e só então fez o respectivo traçado com a régua. Nesta fase do trabalho, os elementos deste grupo dispensaram o espelho para determinar a localização do eixo, traçando os eixos unicamente por recurso à visualização. A Sara traçou com a régua, unindo dois vértices do heptágono, conforme se pode ver na seguinte figura:

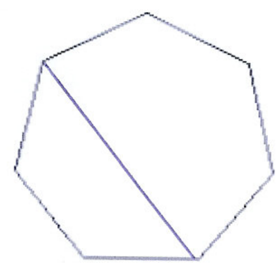


Figura 16. Traçado do primeiro eixo feito pela Sara

Depois de efectuado este traçado, a Sara manuseou a régua e colocou-a numa outra localização, unindo novamente dois vértices (figura 17), mas não chegou a traçar pois nesse instante, o Ricardo contestou a localização incorrecta, assim que olhou para o traçado: “Não é nada!...”.

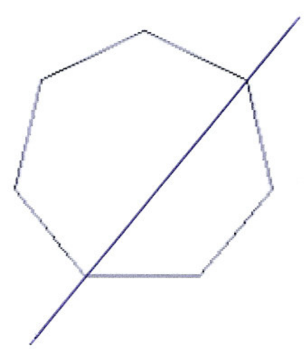


Figura 17. Localização do segundo eixo indicada pela Sara com a régua

A Sara ainda argumentou—“Se eu puser assim (*pondo a régua em cima do eixo traçado*), e eu puser assim… (*pondo a régua na outra posição correspondente ao segundo eixo imaginado*) isto vai medir”—mas o Ricardo nem a deixou acabar:

"Espelho!" exclamou ele enquanto pegava no espelho e se preparava para o colocar em cima do eixo traçado pela Sara. Como vemos, a Sara tentou defender a sua construção bem como o segundo eixo imaginado com um argumento matemático, embora não consigamos saber ao certo no que consistia o mesmo. A sua afirmação "Isto vai medir" induz a ideia de que possivelmente a Sara estaria a considerar que ambas as partes do polígono, à esquerda e à direita do eixo, mediriam o mesmo. O Ricardo brandiu o argumento do espelho, sabendo de antemão o que iria obter, usando-o como meio de comprovação. Assim que colocou o espelho sobre o eixo traçado pela Sara, o Ricardo exclamou em tom de vitória: "Yupii!". Logo de imediato, colocou o espelho na outra localização, correspondente ao segundo eixo visualizado pela Sara, e novamente exclamou "Yupii!". A Sara, então, decidiu largar o trabalho e deu a folha ao Ricardo: "Então faz tu. Já que sabes fazer!...". O espelho serviu, assim, de juiz, no seio da discussão entre os dois colegas: ao proporcionar uma imagem que não era igual à da figura impressa na folha deu, mudamente, razão ao Ricardo. De facto, essa era a condição enunciada na ficha—"Colocando um espelho sobre o eixo de simetria, conseguem, a partir de uma parte da figura, obter a figura completa"—e também explicitada pela professora numa das suas intervenções para toda a turma (p. 514), não sendo, pois, de estranhar que não tivessem sentido necessidade de chamar a professora no sentido de solicitar a sua validação para resolver o conflito entre ambos.

Esta pequena discussão matemática entre a Sara e o Ricardo enquadra-se no padrão de interacção do grupo. São dois elementos com níveis de poder semelhantes, embora o Ricardo tenha um pouco mais de supremacia. É o equilíbrio do poder entre ambos que permite a emergência da discussão. No caso ocorrido com a Maria, quando o Ricardo contestou a localização do espelho, ela nada ripostou e inibiu-se de voltar a manusear o espelho para qualquer acção relacionada com a tarefa, ou de ter a iniciativa na concretização do trabalho. Efectivamente, a Maria, nas vezes que voltou a pegar no espelho, usou-o para se ver a si própria, tendo-o colocado ainda uma vez por cima do octógono, numa altura em que os colegas dominantes, Ricardo e Sara, estavam atentos a outras coisas, sem ter feito qualquer acção de registo de traçado, como se estivesse a fazê-lo distraidamente. Talvez não fosse uma acção tão distraída quanto, à primeira vista, poderia parecer. Talvez a Maria tivesse aproveitado aquele momento em que o Ricardo estava virado ao contrário para ouvir a professora (quando esta abordava a turma a propósito do ponto médio) para poder, à vontade, sem risco de ser corrigida, experimentar a forma como se obtinha toda a figura com o espelho. No episódio da discussão entre a Sara e o Ricardo, apesar de ela se ter demitido de continuar a traçar os eixos do heptágono—"Então faz tu. Já que sabes fazer!..."—continuou a ter uma participação elevada na exploração da tarefa. Por exemplo, logo a seguir, enquanto o Ricardo traçava os eixos do heptágono, a Sara traçava os eixos do octógono, ao mesmo tempo e na mesma folha.

Sendo o grupo-alvo uma comunidade de prática (Wenger, 1998), tal como os outros grupos de trabalho existentes na turma, o envolvimento mútuo entre os seus elementos cria relações caracterizadas por uma mistura de poder e de dependência. O grupo-alvo pode ser definido como uma comunidade de prática através das três dimensões da relação entre a prática e a comunidade: envolvimento mútuo, empreendimento em conjunto e reportório partilhado. Por outro lado, o grupo-alvo possui os três elementos estruturantes de uma comunidade de prática (Wenger et al., 2002): o domínio (a definição do tópico partilhado), a comunidade (os relacionamentos entre os seus membros e o sentido de pertença) e a prática (o corpo de conhecimento que se acumula e dissemina).

Assim, embora todos os elementos do grupo-alvo se reconheçam mutuamente como participantes e como pertencendo ao grupo, e embora, à partida, os seus papéis devessem ser semelhantes, podendo sobrepor-se, o que levaria a situações de dar e receber ajuda, de facto, o que acontece é que existem relações de desigualdade que se reflectem nos diferentes graus de participação no empreendimento em comum, participação que constitui fonte de identidade. É, pois, no contexto do processo do reconhecimento mútuo que são negociados os significados de desigualdade. Ou seja, quando cada um dos alunos participa na realização da tarefa, em grupo, tal significa que está a dar forma ao que se faz em conjunto (sendo uma prática, uma forma de acção), e simultaneamente, está a construir a sua identidade (a sua forma de pertença) dando forma a quem é e a como interpreta o que faz. No entanto, a não participação é, ela própria, uma forma de prática. E a forma de prática está, inerentemente, ligada à forma como se processa a negociação de significados, e como é o significado apropriado por cada um dos alunos.

Enquanto a Sara e o Ricardo detêm no grupo uma identidade de participação, tendendo a ver as suas ideias adoptadas pelos restantes elementos, sem que seja necessário usar a persuasão, a Maria detém uma identidade de não-participação, aceitando, à partida, as ideias dos colegas, sem as questionar, e inibindo-se de proferir as suas próprias ideias sobre a tarefa a concretizar. As ideias matemáticas verbalizadas pela Maria são apropriadas por um processo de ventriloquismo, tornando suas as ideias dos colegas. O Bernardo balança entre um tipo de identidade e outro, registando nuns momentos uma identidade de maior participação e noutros momentos uma identidade de menor participação.

O rigor de construção negociado pela professora foi apropriado de diferentes maneiras pelos diversos elementos do grupo, tanto mais que as raparigas não tinham prestado atenção ao que a professora dissera nessa altura pois tinham estado embrenhadas na contagem dos eixos do hexágono. Quando a Sara estava a traçar os eixos já no último polígono, no octógono, o Ricardo interpelou-a:

R (*dirigindo-se à Sara*)- Isso está mal! Tem de passar ao meio.
M (*com um suspiro e tom de enfado*)- Faz de conta que passa.

O Ricardo não fez qualquer tipo de medição mas, a olho nu, tal como a professora referira, via que os eixos não passavam pelo ponto médio no caso dos eixos que uniam lados opostos. Considerou, portanto, que estava mal e que, consequentemente, deveria ser apagado e traçado com mais cuidado. Tal não era a opinião da Maria que considerou que esse rigor, exigido pelo colega, seria um preciosismo e totalmente acessório ao trabalho. E, de facto, foi o "faz de conta que passa" que prevaleceu e a Sara nada apagou, continuou calmamente o traçado dos eixos e aquela discussão morreu ali mesmo.

Ao contrário do que sucedeu com alguns grupos da turma, o grupo-alvo foi preenchendo a tabela à medida que iam fazendo o traçado dos eixos. No entanto, tal facto não significa que não tivessem feito uma conjectura logo no início do trabalho, tal como os restantes colegas da turma. De facto, a Sara formulou a conjectura oralmente assim que acabou de preencher a tabela para o número de eixos do triângulo e do quadrado: "Estou a ver que o número de lados e o número de eixos vai ser sempre igual". Trata-se da observação de um padrão—"Estou a ver"—que foi logo depois generalizado—"vai ser sempre igual"—e expresso pela conjectura. É curioso constatar que, no grupo, esta conjectura foi rejeitada pela Sara e pela Maria, face a um caso que a contrariava, mas essa rejeição foi feita com bastante resistência, como veremos no episódio que vou passar a descrever.

O Ricardo tinha acabado de traçar os seis eixos do hexágono quando fez a sua contagem, por três vezes. A Sara ripostou o seu modo de contar—"Não podes contar assim."—, talvez pensando que ele poderia contá-los em duplicado (uma vez num vértice e de novo no vértice oposto), e contou-os ela em voz alta, por duas vezes, confirmando a contagem feita antes pelo colega, enquanto encolhia os ombros: "Dá seis! É ou não é?". O Ricardo estendeu-lhe a mão como que para celebrar o acordo. A Sara não chegou a apertar-lhe a mão, parecendo ter ignorado este gesto do colega. E entretanto, a professora pediu a atenção de toda a turma para a questionar acerca do ponto médio mas a Sara e a Maria alhearam-se da questão colocada pela professora, perplexas com o facto de aquela figura, que elas supunham tratar-se do pentágono, ter seis eixos. A sua conjectura previa que uma figura com cinco lados tivesse cinco eixos. Foi esta surpresa que fez com que a Sara, apesar de ter contado o mesmo que o Ricardo, duvidasse—"É ou não é?"—e repetisse essa mesma contagem. Efectivamente, a Sara contou de novo, em silêncio (já que a professora estava em diálogo com a turma), mais três vezes. Entre uma contagem e outra, olhou para a Maria, levantando um pouco as duas mãos e abanando que não com a cabeça, em gesto de admiração por continuar a contar sempre o mesmo número. Após a última contagem, abanou a cabeça afirmativamente e olhando para a Maria que se encontrava a acompanhar, com o olhar e com o lápis na mão, a sua contagem, disse-lhe baixinho "É seis". Como não houvesse dúvidas que estavam ali seis eixos traçados, a Sara escreveu "6" na célula da tabela respeitante ao número de eixos do polígono de cinco lados, logo seguida da Maria. Como vemos, só se renderam à evidência de seis eixos num polígono de cinco lados, após um número considerável de contagens. Foi portanto oferecendo bastante resistência que acabaram por aceitar que a conjectura inicial não seria válida.

A sua confusão relativamente ao número de lados do hexágono—os nomes das figuras só foram referidos pelo grupo relativamente ao triângulo e ao quadrado—poderá fundamentar-se em dois motivos. Deveriam ter pressuposto que a ordem da localização das figuras na folha respeitava a mesma ordem da tabela e que, portanto, o pentágono estaria a seguir ao quadrado. Por outro lado, a própria disposição na folha do hexágono corresponde a uma posição pouco habitual, o que poderia ter dificultado o reconhecimento do mesmo pelas alunas. Neste caso, existe alguma evidência de que as alunas tiveram dificuldade em utilizar a capacidade de visualização espacial da constância perceptual (Del Grande, 1990), tendo, portanto, dificuldade em reconhecer o hexágono na folha, numa posição pouco habitual, tanto mais, que já vinham com a ideia construída implicitamente que aquela seria, pela ordem da tabela, a figura de cinco lados.

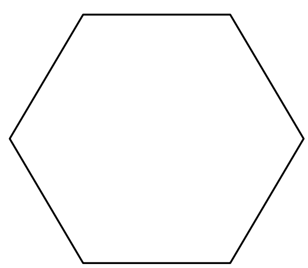


Figura 18. Posição habitual do hexágono

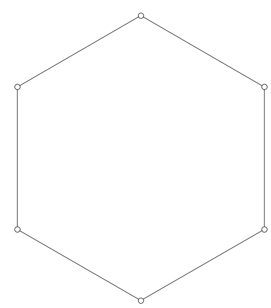


Figura 19. Posição do hexágono na folha

O Ricardo tinha estado atento ao diálogo promovido pela professora com toda a turma. Quando o momento colectivo terminou, o Ricardo virou-se para o grupo e, pegando na folha dos polígonos, entrou em diálogo com o grupo:

R- (*apontando para as figuras de cima, em particular, para o quadrado*) Este é igual. (*Conta os lados do hexágono*) Um, dois, três, quatro, cinco, seis. (*em tom de reclamação para a Sara*) Isto é de seis lados! Não percebes nada de eixos de simetria!... (*Conta os eixos*) Um, dois, três,

quatro, cinco, seis. (*E depois olha para a Sara*) Isto tem seis lados.
S- (*apontando para o heptágono*) Este é o de seis.
R- Não! (*apontando para o hexágono*) Este é o de seis! (*Aponta para a tabela da ficha da Sara*) É este. (*Aponta agora para o pentágono na folha dos polígonos*) Este é que é de cinco.
M- (*apontando para as células da tabela na ficha da Sara*) É este. Este seis é deste seis.

A Sara mostra que tinha pensado que a disposição das figuras na folha respeitava a ordem da tabela: a seguir ao quadrado, na linha abaixo, a figura com cinco lados e depois a figura com seis lados, fazendo uma leitura da esquerda para a direita. Quando aponta para a tabela, o Ricardo evidencia a troca feita e que o seis deveria estar por baixo do "6" e não por baixo do "5" por ser uma figura de seis lados, e quando aponta para a folha dos polígonos, evidencia a localização na mesma do pentágono. A Maria apropria-se da *voz* do Ricardo, num evidente *ventriloquismo* (Wertsch, 1991), corrigindo igualmente a Sara, ao evidenciar-lhe a troca das células: "este seis" (linha 10) dos eixos "é deste seis" (linha11) do número de lados. Di-lo como se não tivesse escrito na sua própria folha exactamente o mesmo que a Sara. E ao dizê-lo, empresta um pouco mais de poder à sua identidade, poder este que lhe advém do poder associado à autoridade natural do seu colega Ricardo.

Imediatamente após as intervenções do Ricardo e da Maria, as duas alunas apagaram o "6" e escreveram-no de novo mas agora por baixo do seis, correspondendo ao hexágono. Também aqui o Ricardo dá evidência de ter percepcionado a existência do padrão de igualdade de números quando diz "é igual" (linha 2) apontando para as primeiras duas figuras da folha. O facto de contar os lados do hexágono e logo depois os eixos de simetria tem a ver com a sua necessidade de verificação de algo que, de acordo com o preenchido pelas colegas, iria contrariar a conjectura já formulada anteriormente pela Sara. E, logo após, imediatamente antes de começar a traçar os eixos do pentágono com o espelho a servir de régua, alvitra “O de cinco tem mais cinco” o que denota a sua adesão a essa mesma conjectura: o polígono com cinco lados também teria cinco eixos de simetria.

Enquanto esta fase de trabalho era vivida pelo Ricardo, Sara e Maria, o Bernardo encontrava-se alheado da mesma, pois estava embrenhado a traçar os eixos da estrela na sua ficha. Foi só momentos depois, quando o Ricardo tinha acabado de traçar os eixos do pentágono, é que o Bernardo, ao querer preencher a tabela da sua ficha, quis confirmar, por si próprio, o número de eixos do hexágono:

> B (*dirigindo-se ao Ricardo*)- O de seis... Onde está o de seis? E eixos de simetria? Tem seis? (*com um olhar interrogativo, pega na folha e conta o número de eixos*) Tem sete.

Contou sete eixos, ao que a Sara o corrigiu, contando ela, mas requerendo a atenção do colega para a acompanhar nessa contagem. Depois, a Sara contou o número de lados e confirmou os dados da tabela “Tem seis. Tem seis lados. Por isso, é aqui.” enquanto apontava para a célula correspondente. E logo a seguir, a Sara contou os eixos e os lados do pentágono. O Bernardo evidencia, neste pequeno episódio, algum nível de participação no grupo e no trabalho. Apesar de não fazer traçados e de não usar o espelho, não se limita a confiar no que os colegas escrevem. Quer ser ele próprio a confirmar o que deve escrever na tabela. A conjectura de que uma figura com seis lados também terá seis eixos surge na interrogação do Bernardo, embora ainda tenha dúvidas acerca dela, o que o leva a manter uma atitude interrogativa e a querer contar para a confirmar.

Quando já tinham preenchido a tabela relativamente aos polígonos com três, quatro, cinco e seis lados, a professora chegou perto deles, e o Bernardo quis confirmar com ela o padrão percepcionado, apontando para a tabela—“Estes números são simétricos?”—ao que a professora e o Ricardo responderam, ao mesmo tempo, “Iguais”. Após uma pequena pausa, a professora repetiu “São iguais”. Existe no tom e no modo como a professora respondeu uma anuência relativamente à ideia subjacente à pergunta formulada pelo Bernardo pois efectivamente quando este usou o termo “simétricos” nada tinha a ver com o conteúdo de números simétricos mas com a ideia da constância da forma das figuras simétricas, agora transportada para o domínio dos números, também eles iguais na sua forma mas não no seu significado (uns respeitantes ao número de lados e outros respeitantes ao número de eixos). A professora anui, portanto, no significado expresso pelo Bernardo mas corrige-o no que respeita ao vocabulário usado: “Iguais”. O que é particularmente interessante na pergunta formulada pelo Bernardo é que a sua pergunta visa a validação da professora não só no que respeita à correcção do que já tinha sido preenchido na tabela mas também relativamente à conjectura de que estes números (os já escritos e os por escrever) são iguais aos números de lados dos polígonos regulares.

A convicção que os alunos colocaram na conjectura encontra-se bem patente num outro episódio posterior em que o Bernardo corrige o trabalho feito pelo Ricardo, após ter contado unicamente cinco eixos traçados no heptágono, e não sete, como conjecturado:

> B- Silva, isto está mal, Silva. Sete.
> R- Sete ou cinco?
> B- Ainda falta traçar…
> R- (*olhando para o heptágono*) Ah! Dá cá! (*traça mais dois eixos no heptágono).*

Como vemos, é a força da conjectura que fundamenta a correcção feita pelo Bernardo. Este não usou argumentos baseados na própria simetria da figura, nem tão pouco usou o espelho para indicar os eixos que faltavam. O que ele viu foi apenas que a contagem que fez não coincidia com a conjectura de que o número teria que ser igual, portanto, sete, já que a figura tinha sete lados. Momentos antes, o Bernardo evidenciava dúvidas acerca da veracidade da conjectura mas agora está totalmente convicto, depois de a mesma ser sustentada por quatro polígonos que a verificam e, sobretudo, depois de ter recebido a validação da professora quando esta afirmou "São iguais". E tal é a força que sustenta a convicção da conjectura partilhada no grupo que é o Bernardo, com uma participação menor no grupo, e concomitantemente detentor de um poder menor, que corrige o Ricardo, com uma relação de poder mais forte. Também o modo como a Sara traçou os eixos do octógono evidencia que é a conjectura que a guia no seu trabalho. Com efeito, ela traçou alguns e contou-os e só depois continuou o respectivo traçado. Ou seja, é a conjectura de que deverá traçar oito eixos que a faz perceber que tem de traçar mais eixos depois de contar um número menor que oito, e que a faz ver onde os mesmos se localizam.

Quando terminaram o traçado dos eixos e o preenchimento da tabela, todos escreveram a conjectura em resposta à questão enunciada em 2. b), sem qualquer hesitação, não existindo registos orais relativos a esta parte do trabalho, embora não o tivessem feito todos ao mesmo tempo: primeiro, foi a Sara que escreveu, tendo sido, instantes depois, seguida pela Maria, enquanto os dois rapazes falavam de assuntos paralelos à tarefa; um pouco depois, foi a vez do Bernardo se concentrar na escrita da resposta enquanto a Sara já dedicava a sua atenção à leitura da alínea seguinte. Vemos, portanto, que o grupo-alvo, tal como os restantes colegas da turma, conjecturaram acerca da igualdade do número de eixos e de lados dos polígonos regulares e desenvolveram uma forte convicção acerca da veracidade dessa conjectura. Esta foi registada por escrito do seguinte modo: "As conclusões a que podemos chegar é que o nº de lados do polígono regular é sempre igual ao nº de eixos de simetria." (citação da ficha do Bernardo[64]).

Analisemos, agora, os dois tipos de infinito referidos no capítulo IV, o infinito potencial e o infinito actual, presentes nesta conjectura, e o significado de *n* na tabela. A sequência de polígonos regulares com *n* lados é obtida pela construção efectiva dos primeiros polígonos e pela imaginação dos polígonos seguintes com, sucessivamente, cada vez maior número de lados. Trata-se de uma sequência inacabada e que tem subjacente o infinito potencial pois não podemos construir, na mesma, o último polígono que caracterize um resultado final.

Portanto, quando os alunos escrevem *n* na primeira linha da tabela, tal significa uma variável que pode ser concretizada com qualquer valor natural (desde que maior que 2) respeitante ao número de lados do polígono regular. É uma variável que generaliza para todos os polígonos regulares imagináveis nesta sequência. E esta generalização, construída conceptualmente por via do que se imagina, lida com o infinito potencial: os alunos tendem a imaginar, não os polígonos com 10, 12 ou 20 lados, mas sim os polígonos que têm um número tão elevado de lados que os mesmos tendem a ficar de tal maneira pequenos que, no limite, esses polígonos se aproximam, perceptivamente, de um círculo. Ou seja, embora *n* não seja infinito, neste caso, *n* tende para infinito, e poderá ser encarado pelos alunos como infinito. No entanto, o significado de *n* não suscitou qualquer tipo de discussão ou questionamento no seio do grupo uma vez que os alunos estão já habituados a este tipo de notação algébrica e não existem registos verbais em torno da notação de *n* na tabela: assim que viram que existia uma relação de igualdade, escreveram *n* na segunda linha para ser igual ao que constava

[64] Como as respostas no grupo-alvo eram idênticas, fiquei com a fotocópia da ficha já realizada apenas de um dos elementos do grupo, tendo escolhido a do Bernardo por ter uma caligrafia mais legível.

540

na primeira linha, sem hesitações ou dúvidas, dada a familiarização, em aulas anteriores, com a notação *n*.

Por outro lado, a segunda linha da tabela, respeitante ao número de eixos de simetria, ao ser conjecturado que é sempre igual ao número de lados, assume o significado de enumeração. O número de lados, na primeira linha, assume o mesmo significado, pois nesta fase de registo escrito, os alunos desligam-se da sequência concreta e física dos polígonos e centram-se na sequência dos números naturais (a começar em 3). Por conseguinte, tanto o número de lados como o número de eixos são expressos, na tabela, através da seguinte sequência: 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., *n*. Contudo, conceptualmente, a sequência, ao tender para infinito, não termina em *n:* 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., *n*, ..., ∞. *n* tanto é concebido como uma variável, assumindo qualquer valor natural (desde que maior que 2) como é visto como sendo a extremidade desta sequência, o infinito actual, concebido metaforicamente, por via da Metáfora Básica do Infinito (Lakoff e Núñez, 2000), como um estado resultante final e único: o 'natural' ∞ único e maior do que qualquer outro natural.

Esta conjectura parte, portanto, do infinito potencial de uma construção sequencial sem fim, e sem polígono final, para estabelecer uma relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria desses polígonos, relação esta que, ao estabelecer uma igualdade de sequências, configura o infinito actual da enumeração, quer dos lados dos polígonos quer dos eixos de simetria. O infinito actual é obtido graças à adição da completude metafórica, pela qual, o processo enumerativo que continua sempre é concebido como tendo um resultado final: o infinito.

O modo como o grupo explorou a alínea 2. c) é apresentado na secção seguinte. A concretização das últimas três questões da ficha ocupou um tempo menor da aula, relativamente à questão 2, que foi a que ocupou a maior parte do tempo da aula. A professora, quando faltava um quarto de hora para o término da aula, avisou toda a turma que tinha de ficar tudo terminado até acabar a aula. Este aviso influenciou, com certeza, o trabalho dos alunos deste grupo, pois imprimiram um ritmo mais célere ao seu trabalho, e deixaram de ter conversas paralelas aos assuntos directamente ligados à tarefa. Nesta fase de trabalho, não surgiu qualquer discussão matemática entre os alunos do grupo.

Na maior parte do tempo, cada um fazia as construções na sua folha e os respectivos traçados dos eixos. Na fase final do trabalho, colocaram a ficha do Ricardo no meio da mesa e copiaram algo das conclusões escritas por ele, principalmente a Sara, que ainda se encontrava a escrever, olhando sempre para a ficha do Ricardo, quando a aula terminou e já os outros alunos do grupo e da turma estavam a arrumar. Tal evidencia que é o Ricardo que detém o nível superior de poder no grupo relativamente aos conhecimentos académicos, pois é nele que depositam a maior confiança no que respeita à correcção do trabalho. Aliás, nunca se observa, em qualquer momento da aula, o Ricardo a ver o que os outros têm escrito ou a pedir-lhes ajuda sobre qualquer tópico. Ele escreve o que tem a escrever por si próprio, depositando confiança nas suas próprias conclusões. São os outros elementos que tendem a ver o que ele escreveu e a colocá-lo como modelo a seguir no grupo. Quando se lhe surge alguma dúvida sobre o trabalho a desenvolver, o Ricardo chama a professora, seja ela personificada por mim ou pela própria professora. Fá-lo muito raramente e de imediato, não abordando primeiro os colegas sobre a questão em causa. É como se partisse do princípio que os colegas não saberiam e portanto não valesse a pena discutir o assunto com eles.

Para a construção, na questão 3, do primeiro triângulo, o escaleno, partilharam as medidas dos comprimentos dos lados, sendo o Ricardo que, ao mesmo tempo que construía o seu, ia sugerindo aos colegas as diferentes medidas dos lados do respectivo triângulo. No entanto, as medidas não foram seguidas escrupulosamente pelos elementos do grupo. Apesar desta sugestão oral, a Maria mediu um dos lados do triângulo escaleno construído pelo Ricardo e utilizou os três centímetros medidos para medida do construído por si própria. Como não tivesse entendido que deveria construir um triângulo escaleno, construiu um equilátero com todos os lados a medir três centímetros. O Ricardo deu conta e corrigiu-a, explicando-lhe que teria que ter os lados todos diferentes.

O compasso foi usado pelo Bernardo, pelo Ricardo e pela Maria na construção do triângulo isósceles para marcarem o ponto correspondente ao terceiro vértice, por onde passaria o eixo de simetria, já que seria esse vértice que distaria o mesmo dos extremos do segmento traçado em primeiro lugar. Trata-se de uma acção que já foi apropriada quer nas aulas de Matemática quer nas aulas de Educação Visual cada vez que querem construir um triângulo deste tipo e que, de rotinizada, perdeu a reflectividade associada às propriedades matemáticas subjacentes à mesma, mantendo-se estas escondidas, como se se tratasse de objectos matemáticos necessários mas não visíveis, escondidos, num ecrã de computador em que se esteja a utilizar uma aplicação de *software* como o *Sketchpad* (ver Rodrigues, 1997, para ver esta questão analisada em pormenor a propósito do traçado da mediatriz).

A apropriação é de tal ordem que o Bernardo tem absoluta convicção de que os segmentos que unem esse vértice aos extremos do anteriormente traçado têm efectivamente o mesmo comprimento, e que portanto obtém, deste modo, um triângulo isósceles. Essa convicção, reforçada com o acto de medição, é revelada num pequeno episódio em que a professora, ao olhar para o triângulo isósceles construído pelo Bernardo, o contestou "Esse não é isósceles. É escaleno." ao que o aluno afirmou, com toda a certeza e serenidade, ser um triângulo isósceles. Questionado pela professora

"Este com este dá igual?", respondeu imediatamente sem fazer naquele instante qualquer medição "Quatro, quatro". O Bernardo encontrava-se a trabalhar com a régua quando a professora se aproximou e a sua resposta evidencia que já tinha feito as medições e, portanto, confirmado que tinha mantido a abertura do compasso na construção do triângulo, o que possibilitou obter dois lados iguais. Face à confirmação de se tratar de um triângulo isósceles, a professora incentivou o grupo a usar o espelho para detectar a existência de eixos e fazer o respectivo traçado: "Então, vá, os eixos desse, o espelho".

No entanto, o espelho não foi usado para o traçado do eixo de simetria do triângulo isósceles nem sequer foi usado nos quadriláteros. Para a realização destas três questões, o espelho foi usado uma única vez: foi o Ricardo que o usou para verificar a inexistência de eixos no triângulo escaleno. Na questão 4, a ficha do Bernardo apresenta a construção de dois quadriláteros, ambos sem eixos de simetria:

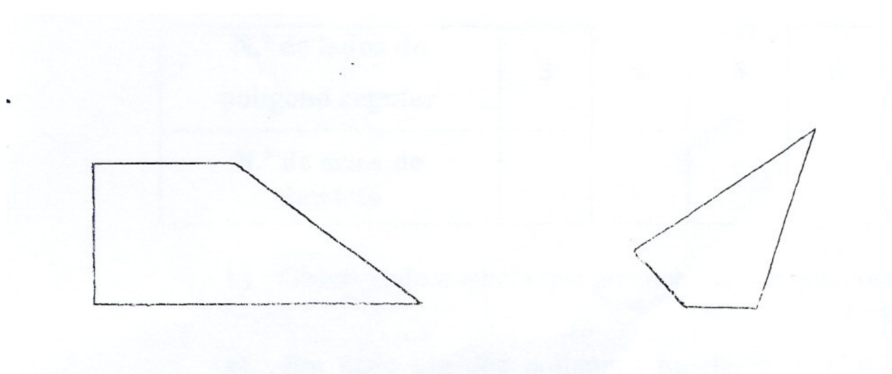


Figura 20. Os dois quadriláteros construídos

E embora o segundo quadrilátero não possua, efectivamente, eixos de simetria, a sua semelhança com um papagaio poderia induzir a que se pensasse na existência de um eixo de simetria. No entanto, nem por isso, foi o espelho usado para confirmar se tinha ou não eixos. Voltarei a esta questão, na secção seguinte, e então talvez se perceba a razão de o grupo não ter usado o espelho.

No que respeita à questão 5, vejamos o extracto do diálogo em torno da mesma:

S- (*depois de ler o enunciado da questão 5, olha para um ponto vago com um ar pensativo e depois olha para o Ricardo*) Olha lá, o círculo… Tem eixos… Tem, tem infinitos eixos de simetria… (*num tom hesitante)*

R- (*com uma entoação teatral e exagerada*) O círculo?? O círculo?? (*levando as mãos à cabeça)* Saaaaaaara!!! (*a Sara ri-se)* (*falando de forma muito rápida e pouco perceptível)* Claro que tem infinitos. O círculo é todo redondo. (*Faz um gesto com o dedo indicador de andar à volta várias vezes numa circunferência imaginária a acompanhar a última frase. Depois faz um gesto com a mão para cima e para baixo à frente dos olhos, como se quisesse dizer "Sara, estás tapada!"*)

M- (vira a folha da ficha para o lado do enunciado e depois vira de novo para a parte de trás) Quantos tem? Infinitos.

Pausa.

B- Como é que é o círculo?

R- A gente está a fazer a quatro. Não é a cinco.

B- Mas o cinco só tens de dar a resposta. (*lê o enunciado da questão 5 e o Ricardo olha para lá)* E um círculo, quantos eixos de simetria tem?

M- Infinitos.

R- Infinitos.

S- Então, foi o que eu disse!

B- Não sei se é infinitos. (*Imperceptível*)

Imediatamente a conversa cessa sobre esta questão e os alunos continuam a escrever.

Este extracto mostra que a infinidade de eixos do círculo foi fundamentada pelo Ricardo com o facto deste ser "todo redondo" (linha 7). Trata-se de uma ideia abstracta a da infinidade, e possivelmente teriam mobilizado este conhecimento até de anos anteriores pois é um assunto abordado no 2º Ciclo. De qualquer modo, o Ricardo apropriou-se, provavelmente, da ideia que pelo facto de o círculo não ser um polígono, não apresentar lados, já que é todo redondo (com a particularidade de todos os pontos da circunferência que o limita distarem o mesmo do centro), os eixos acompanham o próprio círculo, e ao unirem pontos diametralmente opostos, intersectam todos os pontos da circunferência, passando sempre pelo centro. Ou seja, desde que a posição do espelho no círculo passasse pelo centro da circunferência, obter-se-ia sempre a imagem completa do círculo, o que significa que cada um dos eixos contém cada um dos diâmetros. No entanto, o espelho, tal como já referi atrás, não foi aqui usado. A ideia de o círculo apresentar uma infinidade de eixos foi aceite no grupo e a própria discordância formulada de forma incipiente pelo Bernardo foi ignorada, não merecendo da parte dos restantes elementos qualquer tipo de atenção ou de argumentação que fundamentasse a posição contrária.

Mais uma vez, vemos a discussão matemática associada ao equilíbrio de poderes. Dado o estatuto implícito do Bernardo, as suas ideias são desvalorizadas de tal modo que são votadas ao desprezo, nem merecendo disputa. No grupo, o Ricardo discute apenas com a Sara. Provavelmente, se tivesse sido ela a discordar da infinidade dos eixos de simetria do círculo ter infinitos eixos de simetria, o Ricardo já assumiria um papel argumentativo, mesmo que sucintamente. Assim como a Sara quando pretende confirmar algo dirige-se directamente ao Ricardo—foi para ele que olhou e foi unicamente com ele que falou: “Olha lá” (linha 2)—pois é nele que deposita a necessária confiança que faz com que o que é afirmado e defendido pelo Ricardo lhe mereça credibilidade. O Bernardo acabou por assimilar a posição do grupo, num acto de ventriloquismo, e escreveu o mesmo que os restantes elementos: “Um círculo tem infinitos eixos de simetria”. Não temos dados que nos evidenciem até que ponto se processou esse ventriloquismo, se de um modo mais superficial, ao nível do registo escrito que se entrega à professora, ou se a um nível mais profundo de apropriação pessoal dessa ideia mesmo que não cabalmente entendida.

Este extracto é rico no que respeita à negociação de significados. Vemos aqui uma multiplicidade de sentidos pessoais diferentes e até um pouco divergentes. O Ricardo interpretou a intervenção da Sara como uma pergunta, como uma afirmação acerca da qual ela apresenta dúvidas e pretende obter uma confirmação. Daí que tenha encenado todo aquele espectáculo exagerado de incredibilidade acerca dessa mesma dúvida, ou seja, os eixos infinitos do círculo é um dado de tal modo evidente que ele nem admite que a Sara possa ter dúvidas acerca do mesmo. Claro que a encenação também tem a ver com a personalidade brincalhona do Ricardo e com o facto de ele saber que faz um certo charme com a produção de encenações. Tanto que a Sara, mesmo interpretando a intervenção do Ricardo como uma discordância relativamente ao que ela tinha acabado de afirmar, achou graça ao colega e riu-se da situação teatral montada pelo mesmo. A Sara evidencia não ter ouvido ou percebido a afirmação "Claro que tem infinitos" (linha 6) proferida pelo Ricardo e só entendeu que o colega estava de acordo com ela nesse ponto quando o ouviu responder ao Bernardo "Infinitos" (linha 19). Possivelmente não chegou a entender a razão de todo aquele teatro pois replicou "Então, foi o que eu disse!" (linha 20), revelando assim ter assumido uma posição afirmativa e não interrogativa, como julgado pelo Ricardo, e ter pensado que o Ricardo então não ouvira bem o que ela dissera pois tinha contestado algo com que afinal estavam de acordo. A Maria mostra ventriloquismo quando aceita, sem margem de dúvidas, a infinidade de eixos considerada pela Sara e pelo Ricardo, apropriando-se completamente da ideia, já que parece ser ela a autora da mesma quando responde "Infinitos" (linha 12) à pergunta lida no enunciado, como se estivesse a raciocinar e a falar sozinha, e novamente responde "Infinitos" (linha 18) à pergunta colocada pelo Bernardo. Teria sido a encenação do Ricardo e o seu gesto com o dedo a andar à roda interpretados pelo Bernardo como referências ao traçado desses mesmo eixos? Efectivamente, é para o carácter da questão que apenas pede uma resposta e não a construção que o Bernardo chama a atenção. Aqui, emerge de novo o carácter linear com que os alunos desenvolvem este processo: a um questionamento alusivo à questão 5, o Ricardo respondeu que ainda se encontravam a fazer a 4. E apesar de ter acedido a falar sobre ela, possivelmente o Ricardo só lhe deu resposta na sua ficha após ter concluído a questão anterior alusiva aos quadriláteros. O modo como concretizam as suas acções de acordo com o pedido explicitamente na tarefa também aqui ressalta. Só fariam a construção do círculo se tal fosse pedido. Nem essa mesma construção foi pensada como hipótese de concretização atendendo à discordância manifestada pelo Bernardo.

De qualquer maneira, não teria sido essa construção que ajudaria cabalmente o Bernardo na compreensão da infinidade dos eixos. Mesmo que colocasse o espelho num círculo construído por si, o número de vezes em que colocaria o espelho seria sempre um número finito. Mesmo que traçasse os eixos nesse círculo, esse traçado seria sempre uma representação de uma ideia que nunca poderá ser concretizada na prática: traçamos sempre um número finito de eixos. Efectivamente, esta ideia é uma abstracção e deveria ser esse carácter abstracto que fez o Bernardo duvidar que pudessem ser infinitos.

Mesmo concebendo que todos os pontos da circunferência, que limita o círculo, são intersectados por eixos, a tendência mais natural será considerar que esses pontos são em número finito, visto tratar-se de uma linha fechada e portanto limitada, já que na sua construção, o seu início é unido com o seu fim. Trata-se de um infinito actual que, como foi referido por Fischbein (2001), é difícil de conceber. Isto é, considerar a existência de eixos infinitos num círculo implica igualmente considerar a infinidade de pontos numa circunferência. E a ideia da infinidade, sendo uma ideia matemática abstracta, torna-se de mais fácil compreensão quando associada, por exemplo, ao conjunto dos números, em que poderemos conceber que eles nunca têm fim, ou por exemplo, ao objecto geométrico *recta,* em que poderemos conceber a mesma sem início nem fim, do que associada a um objecto que é limitador de outro e que apresenta um início e um fim.

Portanto, a evidência com que o Ricardo associa a infinidade de eixos ao círculo “todo redondo” prende-se com o facto de ele conceber que, num círculo, entre um eixo e outro é sempre possível ter um outro eixo e igualmente, numa circunferência, entre um ponto e outro é sempre possível ter um outro ponto. Isto é, surgem nesta tarefa dois tipos diferentes de infinito: (a) o infinito do conjunto dos números naturais, materializado com a variável n respeitante ao número de lados ou de eixos dos polígonos regulares (embora, neste caso, a sequência dos naturais se inicie no 3), e que está associado ao facto dessa sucessão ser ilimitada, já que por maior que se considere um dado número natural, existe sempre outro maior, sendo este infinito do tipo do numerável (Caraça, 1998); e (b) o infinito do conjunto dos pontos da circunferência do tipo do contínuo (Caraça, 1998) já que este conjunto, ao ser definido analiticamente como uma função real de variável real, se caracteriza pela sua densidade, traduzida no facto de que entre quaisquer dois elementos desse conjunto, existe uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, ou seja, entre dois pontos quaisquer da circunferência, por mais próximos que estejam um do outro, existe uma infinidade de pontos, o que é uma consequência de se tratar o ponto geométrico como não tendo dimensões. Por menor que se considere um dado arco de circunferência, é sempre possível obter outro menor, pela divisão do anterior ao meio, e se o acto de dividir ao meio pode parar, pensando em termos práticos, de um ponto de vista teórico, e portanto matemático, o acto de dividir ao meio torna-se uma construção mental que se pode repetir ilimitadamente.

Usando a metáfora neste caso especial, o acto de dividir ao meio um dado arco de circunferência, sendo um processo iterativo que continua indefinidamente e que produz n estados, é conceptualizado em termos de um processo completo com um estado resultante final, produzindo, assim, o infinito actual. A distância arbitrária significa que se está a quantificar todas as distâncias que satisfazem a condição enunciada. Vemos, portanto, como a ideia matemática da infinidade dos pontos da circunferência tem subjacente, do ponto de vista cognitivo, mecanismos presentes na cognição humana e usados no dia-a-dia como o esquema aspectual e a metáfora conceptual. No entanto, por mais que se divida o arco de circunferência, nunca conseguimos chegar ao ponto. Os próprios pontos da circunferência, ao poderem ser definidos analiticamente por uma função real de variável real, fazem uso da metáfora "Pontos duma circunferência são números reais". Vejamos detalhadamente a aplicação da Metáfora Básica do Infinito (Lakoff e Núñez, 2000) ao arco de circunferência, no seguinte quadro:

Domínio-alvo		*Caso Especial*
PROCESSOS ITERATIVOS QUE CONTINUAM SEMPRE		A Circunferência
O estado inicial (0)	⟶	A circunferência nula ABC_0
O estado (1) resultante do estado inicial do processo	⟶	A circunferência ABC_1 em que o comprimento do arco AB_1 é D_1.
O processo: A partir de um dado estado intermédio (n-1), produzir um novo estado (n).	⟶	Formar AB_n a partir de AB_{n-1}, tornando D_n arbitrariamente mais pequena que D_{n-1}.
O resultado intermédio depois dessa iteração do processo (a relação entre n e n-1)	⟶	$D_n < D_{n-1}$
"O estado resultante final" (infinito actual)	⟶	**D_∞ é infinitamente pequena. O arco AB_∞ é infinitamente pequeno.**
Consequência: O estado resultante final é único e surge depois de todos os resultados não finais.	⟶	**Existe um único arco AB_∞ (distância D_∞) menor do qualquer outro arco AB_n (distância D_n) para todos os finitos n.**

Quadro 13. A Metáfora Básica do Infinito para o arco de circunferência

Uma ideia matemática, de difícil compreensão, mas que não foi abordada pelos alunos é a da possibilidade de equivalência entre o todo e a parte. Esta equivalência entre o todo e a parte não existe no finito mas pode ocorrer no infinito. Se considerarmos duas circunferências com perímetros diferentes, por exemplo, um o dobro do outro, assumimos que os conjuntos infinitos dos seus pontos são equivalentes. O mesmo poderemos dizer a respeito de dois segmentos de recta em que, por exemplo, um tem o dobro do comprimento do outro. Ou ainda, a respeito do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números pares, em que este está contido no primeiro, e no entanto, ambos são equivalentes. Em todos estes casos, estamos a estabelecer uma equivalência entre o todo e a parte, mas respeitantes ao mesmo tipo de infinito, o contínuo, nos exemplos das circunferências e dos segmentos de recta, e o numerável, no exemplo dos conjuntos dos números naturais e dos números pares. Em todos estes casos, consideramos o todo e a parte equivalentes porque se pode estabelecer uma correspondência bijectiva entre os elementos dos dois conjuntos de tal modo que, a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um e só um elemento do segundo conjunto, e a cada elemento deste corresponde um e só um elemento do primeiro conjunto. Será que podemos estabelecer essa equivalência, quando nos reportamos a dois tipos diferentes de infinito, como acontece com o conjunto dos pontos da circunferência e o conjunto dos eixos de simetria do círculo? Efectivamente, não podemos. O infinito do conjunto dos eixos de simetria é, como referi atrás, do tipo do numerável, tendo uma natureza discreta, associada ao conjunto dos números naturais, e é da ordem do infinitamente grande. O infinito dos pontos da circunferência é do tipo do contínuo, tendo uma natureza densa associada ao conjunto dos números reais, e é da ordem do infinitamente pequeno. Não se pode estabelecer entre ambos os conjuntos uma correspondência bijectiva. E é também por essa razão que são infinitos de tipo diferente. Podemos, portanto, afirmar que o infinito dos números reais (o número de pontos de uma circunferência) é muito ‘maior’ do que o infinito dos números naturais[65] (o número de eixos de simetria do círculo). No entanto, é a natureza densa do infinito

551

[65] Daí que Cantor tenha designado o infinito dos números inteiros por Aleph 0 e o infinito dos números reais por Aleph 1, como forma de distinguir estes dois sentidos de infinito.

dos pontos da circunferência que faz com que o número dos eixos de simetria do círculo se estenda até ao infinito.

Em síntese, os alunos da turma usaram o espelho para descobrir os eixos de simetria ou para confirmar onde visualizavam encontrar-se os mesmos, ou ainda para confirmar da correcção do traçado feito sem o seu recurso. O manuseamento do espelho bem como a concretização do traçado dos eixos de simetria na folha entregue ao grupo foram apropriados pelos elementos do grupo que têm no mesmo uma identidade de participação. A discussão matemática, quando emergente, depende do equilíbrio de poderes de que são detentores os elementos do grupo. A discussão emerge da discordância entre os elementos do grupo e nunca de uma procura comum de qualquer aspecto relacionado com a tarefa que têm em mãos. Os alunos manifestaram uma maior dificuldade no traçado dos eixos de simetria nos polígonos com maior número de lados. Após observarem para os primeiros polígonos da tabela o padrão da relação entre o número de lados e o número de eixos, os alunos da turma generalizaram-no para todos os polígonos regulares e conjecturaram que nos polígonos regulares, o número de lados é sempre igual ao número de eixos de simetria. Esta conjectura levou a que alguns grupos preenchessem a tabela de seguida, antes de traçarem os eixos, e que a rejeitassem quando não conseguiam traçar nos polígonos com maior número de lados todos os seus eixos. Após o acompanhamento das professoras, estes grupos conseguiram traçar todos os eixos e voltaram a adoptar a conjectura pensada anteriormente. No grupo-alvo, existe evidência de à conjectura estar associada uma forte convicção. Os alunos desenvolvem um processo linear de trabalho e tendem a não avançar para lá do que é pedido explicitamente na tarefa.

A Demonstração

A tarefa está concebida de modo a contemplar a demonstração no trabalho dos alunos já que estes poderão, eventualmente, demonstrar a veracidade da conjectura formulada, por meio da explicação de por onde passam os eixos. Trata-se de uma demonstração com a dupla função de verificar e de explicar. A alínea 2. c) remete, pois, os alunos para a explicação de "como são os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados. (Por onde passam os eixos?)". A interrogação colocada dentro de parênteses visa uma maior explicitação do pretendido. A professora foi também intervindo junto dos grupos com o objectivo de ir negociando o significado desta alínea.

Um outro aspecto que nos merece alguma análise é o facto de os alunos desenvolverem um processo linear de trabalho. Concretizam a tarefa, alínea a alínea, e só se debruçam em cada uma delas quando terminam as anteriores. Não existe, portanto, qualquer evidência de percorrerem um processo cíclico, tal como é caracterizado na literatura o processo de investigação, ou o processo de conjecturação (Mason et al., 1984). A fase de revisão, considerada por estes autores, como uma das mais importantes em todo o processo pois corresponderia à fase em que se reflectiria acerca do trabalho anterior realizado, também aqui não se verifica. Os alunos não retomam nenhuma das questões respondida anteriormente para fazerem novas verificações ou reflexões acerca do que responderam, ou ainda ampliações e extensões das mesmas. No entanto, este facto não significa que a reflexão esteja ausente do seu trabalho, tal como veremos a seguir.

A Turma

Focando o trabalho da turma, constatei o seguinte que escrevi nas minhas anotações de campo:

> Quase todos conseguiram ver bem por onde passam os eixos de simetria, dividindo os polígonos em número de lados par ou ímpar. Nem todos conseguiram relacionar isso com o facto de dar igual. Aliás, não estava pedido no enunciado de forma explícita que o fizessem. No grupo do . . . , eles relacionaram a falar comigo mas depois não o escreveram. Quando eu lhes pedi que o fizessem, disseram que ali não estava pedido e por isso não tinham feito.

Olhando para os trabalhos escritos da turma, verifica-se que todos os grupos conseguiram ver por onde passam os eixos, efectuando a generalização para polígonos com número de lados ímpar e número de lados par, mas apenas dois grupos (grupo-alvo e Grupo F) efectuaram uma demonstração. Ou seja, todos responderam de forma correcta ao pedido na alínea 2. c)—apenas existe uma resposta, do Grupo C, que está incompleta relativamente a por onde passam os eixos pois apenas apresenta, para o caso dos polígonos regulares com número de lados par, o modo de passar dos eixos unindo os vértices—mas nem todos avançaram para além do explicitamente pedido. Houve ainda um grupo (Grupo C) que não efectuou a demonstração para os polígonos regulares (na questão 2) mas fizeram-no para as outras questões, tendo sido o único que se preocupou com a apresentação de uma justificação teórica para a existência de eixos de simetria para as figuras geométricas em geral.

Emerge aqui o carácter escolar da tarefa: os alunos estão muito agarrados ao enunciado da tarefa quer na ordem linear correspondente ao enunciado com que impõem ao desenvolvimento do seu trabalho quer no modo circunscrito com que entendem não dever extrapolar nem seguir caminhos alternativos aos indicados. O Grupo F tinha relacionado oralmente por onde passavam os eixos e a igualdade encontrada entre o número de lados dos polígonos regulares e o números dos eixos respectivos. No entanto, os alunos do grupo tinham assumido que não o deveriam registar pois tal não era pedido. Este facto levou-me a pensar na importância da explicitação de todos os aspectos que consideramos importantes que sejam abordados pelos alunos. A este propósito, pode ler-se nas minhas notas de campo: "Estão muito agarrados ao enunciado da tarefa; e por isso, se calhar nas próximas tarefas tenho de colocar o pedido explícito da explicação". Quando discuti esta questão com a professora, considerámos que teria sido preferível que o enunciado desta alínea tivesse, por exemplo, a seguinte redacção: "Em cada um dos polígonos regulares, expliquem como são os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados, isto é, verifiquem por onde passam os eixos. Relacionem esse facto com as conclusões da alínea anterior". Aqui a demonstração explicativa estaria pedida explicitamente na parte final da alínea "Relacionem esse facto com as conclusões da alínea anterior", embora sem o recurso ao termo "demonstrem" ou "provem".

Quando os alunos observam por onde passam os eixos, dão-se conta de que os mesmos têm diferentes comportamentos nos polígonos da folha anexa. Nalguns polígonos, os eixos unem os vértices aos pontos médios dos lados opostos e noutros, unem os vértices opostos e os pontos médios dos lados opostos. E começam a agrupar os polígonos consoante a localização dos eixos: colocam de um lado, o triângulo, o pentágono e o heptágono e do outro, o quadrado, o hexágono e o octógono. E esta observação é feita unicamente quando se propõem responder a esta alínea, ou seja, posteriormente ao acto de os traçar. Daí a importância da reificação desse mesmo traçado.

Quando identificam a propriedade comum a cada um dos dois grupos formados—número de lados par ou ímpar—e a associam aos eixos de simetria, fazem uma generalização: os eixos unem os vértices aos pontos médios dos lados opostos não só no triângulo, pentágono e heptágono mas em todos os polígonos com número ímpar de lados e, igualmente, os eixos unem os vértices opostos e unem os pontos médios dos lados opostos não só no quadrado, hexágono e octógono mas em todos os polígonos com número par de lados. Efectivamente, é a paridade do número de lados que determina a disposição da figura e a sua simetria. E é esta compreensão que possibilita que os alunos façam a generalização para todos os polígonos. Não se baseia apenas em observar exemplos e em assumir que os outros serão do mesmo modo. Baseia-se em compreender que um polígono com número ímpar de lados tem de ter sempre os vértices opostos aos lados e que num polígono com número par de lados, estes já irão ficar dispostos dois a dois, com vértices opostos a vértices e lados opostos a lados.

E esta generalização é um requisito da demonstração. Os alunos, em geral, fizeram esta generalização mas poucos deram o passo seguinte. E no sucesso deste passo, entra como factor a intervenção da *professora* no sentido de colocar questões que orientem o raciocínio dos alunos para esta etapa do pensamento matemático. Nesta fase, acompanhei mais o trabalho do Grupo F referenciado acima nas notas de campo do que propriamente o do grupo-alvo. A este respeito, escrevi nas minhas anotações: "Não fui muitas vezes ao grupo que estou a gravar de propósito pois dei-me conta que eles estavam a acompanhar a ficha e preferi ter o registo com pouca interferência minha". Assim, relativamente ao Grupo F, que conseguiu demonstrar a conjectura formulada antes, não possuo registos em vídeo, apenas as notas de campo e os seus trabalhos escritos. Quando digo que eles conseguiram relacionar falando comigo, é evidente que foi essencial essa mesma conversa. Tal como já referi atrás, este grupo considerou que o que tinha acabado de dizer não era para escrever, e para este registo escrito foi também fundamental o papel da *professora*, neste momento personificado por mim. Existe nesta consideração de omissão de escrita, para além da relação que estabelecem com o enunciado da tarefa, de que já falei atrás, uma desvalorização do que tinham acabado de proferir. Os alunos não encaram a demonstração acabada de fazer como uma demonstração da conjectura formulada. Aliás, a própria conjectura também não é encarada como conjectura: esta é uma conclusão tirada do trabalho feito anteriormente e a convicção que depositam na mesma é-lhes suficiente, dispensando qualquer outro tipo de comprovação. A relativa desvalorização da sua produção oral bem como o carácter prático da sua actividade matemática, que os leva a ter um propósito de eficiência económica (Balacheff, 1991) de cumprimento da tarefa, fizeram com que os alunos não vissem justificação para o registo escrito, quando tal não é pedido na ficha. Vejamos de novo as minhas notas de campo:

> Depois, escreveram mas eu dei uma ajudinha na expressão escrita do que eles tinham dito. Foi mais difícil explicar para os pares. Tivemos de concretizar para o quadrado. E quando estavam a escrever, já generalizando com n, o . . . ao responder que a soma da metade de n com a metade de n era 4, estava a responder no geral mas apoiando-se no exemplo do 4 do quadrado, e só depois emendou para n, e lá escreveu n.

A expressão escrita é mais exigente do que a expressão oral e, por isso mesmo, requer uma maior clarificação, provocando ganhos ao nível da compreensão matemática. Quando se fala, pode-se dizer as coisas mais ou menos, e mesmo o que não é dito de forma clara, entra na área da intersubjectividade e os seus significados partilhados são aceites. Escrevendo, temos de pensar melhor no que queremos dizer, não só para o tornar claro e perceptível a quem lê, mas também porque nos damos conta de que tal também, por vezes, não nos é muito claro. Ou seja, a escrita obriga primeiramente a que se faça uma maior clarificação pessoal e só depois é que entra a clarificação para os outros.

Portanto, apoiei a expressão escrita deste grupo e, face à sua dificuldade em explicar a relação de igualdade para os polígonos com número de lados par, sugeri que olhassem para o quadrado e que explicassem para o quadrado. É notório aqui a forma como o apoio dos alunos em valores concretos os ajudou a pensar em propriedades gerais. Estavam a redigir "metade de n + metade de n", reportando-se ao número de eixos de simetria de qualquer polígono, expresso na tabela sob a forma de n (a metade que passa pelos pontos médios dos lados opostos e a metade que passa pelos vértices opostos) mas sempre olhando para o caso concreto do quadrado que foi para eles o apoio para pensarem no caso geral. Um dos alunos então disse que essa soma dava quatro, e logo, logo a seguir, tanto ele como outro colega emendaram para n, e foi n que escreveram.

Este episódio é elucidativo da importância que o caso particular tem para os alunos mesmo nesta fase em que já se encontram a generalizar e a demonstrar. O quadrado assumiu aqui um estatuto de exemplo generalizável, pois as suas propriedades relativamente aos eixos de simetria não foram olhadas na sua particularidade mas sim na sua generalidade. O facto de ter poucos lados e, concomitantemente, poucos eixos facilitou a compreensão de que, sendo dois metade de quatro, o que acontece com todos os polígonos com número de lados par é que se os eixos unem pares de lados opostos e pares de vértices opostos, metade dos eixos (igual à metade do número de lados) passa de um certo modo e a outra metade (igual à metade do número de vértices) de outro modo, e portanto, a soma das duas metades dá o próprio número de eixos que é igual ao número de lados (ou vértices, sendo que um polígono tem sempre o mesmo número de lados e de vértices). A resposta oral do aluno relativamente à soma quatro e a forma rápida como ele e o colega a reformularam para n evidencia bem que lhes foi necessário apoiarem-se no caso concreto do quadrado para raciocinar e redigir a demonstração de uma propriedade geral e que, portanto, o recurso a este exemplo foi para o tratar como generalizável pois já tinham percebido que todos os outros polígonos com número de lados par tinham o mesmo comportamento relativamente aos eixos de simetria. Passo a citar o que escreveram como resposta à questão 2.c):

> Os polígonos com numero [sic] de lados impar [sic] tem [sic] como eixo lado-vértice e os polígonos com numero [sic] de lados par tem como eixo lado-lado; vértice-vértice.
> Impar [sic] - como vai passar por todos os lados e vértices, vai ter tantos eixos de simetria como lados.
> Par- Por cada n de vértices temos metade do nº de vértices. Por cada nº de lados temos metade do nº de lados.
>
> | Metade de n + Metade de n = n |
> |---|

O primeiro parágrafo é o que eles escreveram de acordo com o que entenderam que era pedido para fazer. Na sua folha, aparece, logo a seguir, a resposta à alínea b) e só depois, de acordo com o que lhes pedi, escreveram a continuação da resposta à alínea c) e que é a parte restante da citação acima. Apesar de na parte alusiva ao par, não surgir a expressão "eixos de simetria", subentende-se que é aos eixos de simetria que se referem quando aludem à metade do número de vértices ou do número de lados, ou seja, à metade de *n.* Outro facto curioso nessa mesma parte é o modo indiferenciado como os alunos se referem a *n* ou a "nº", evidenciando a compreensão de que o *n* pode ser qualquer número de lados (ou vértices) do polígono regular.

Como vemos, a demonstração efectuada por estes alunos, apesar de apresentar uma componente algébrica, já que a expressam com a variável *n* que constava no final da tabela da sua ficha, não tem por base, para o caso do número par, uma resolução algébrica do tipo $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=\frac{2n}{2}=n$. O modo como chegaram à soma *n* foi, como analisámos atrás, usando o exemplo generalizável do quadrado que lhes deu, simultaneamente, a certeza e a compreensão de que a soma de duas metades de um número é esse mesmo número. Assim, a sua demonstração, embora seja essencialmente de natureza narrativa, apresenta como proposição final uma aproximação à representação algébrica.

Esta foi a única parte da tarefa em que existiu uma negociação mais explícita da parte da *professora* para a efectuação duma demonstração. Vejamos agora, nas questões seguintes, o modo como os alunos lidaram com a fundamentação do que afirmam, por sua própria iniciativa. Apenas um grupo (Grupo C) efectuou uma demonstração nas últimas três questões da razão que possibilita uma dada figura geométrica ter eixos de simetria. O grupo-alvo apresentou uma justificação escrita na questão 4, alusiva aos quadriláteros.

Vejamos o que escreveu o Grupo C. Na questão 3, depois de construídos o triângulo escaleno e o triângulo isósceles, e de traçado o eixo neste último, escreveram:

> O triângulo escaleno (que tem os lados diferentes) não tem eixos de simetria, enquanto no triângulo isósceles (que tem dois lados iguais) tem 1 eixo de simetria, logo os eixos de simetria estão relacionados com os lados simétricos da figura.

Não só demonstraram, de forma explícita, através de uma explicação, por que tem o triângulo isósceles um eixo de simetria e o triângulo escaleno não tem nenhum eixo, como deduziram logicamente uma conclusão geral aplicável aos eixos de simetria de qualquer figura geométrica: “logo os eixos de simetria estão relacionados com os lados simétricos da figura”. O que entenderão os alunos por “lados simétricos”? Com base no que escreveram antes, poderemos inferir que utilizam essa expressão com um sentido sinónimo de “lados iguais”. E quando estabelecem a relação eixo-lados iguais, estão a concluir que a simetria depende da existência de lados iguais. De qualquer modo, do ponto de vista matemático, os lados podem ser considerados iguais e também simétricos relativamente ao eixo considerado.

Na questão 4, construíram três quadriláteros, dois convexos, o quadrado e o rectângulo, e um côncavo, o dardo. As figuras não foram identificadas com o nome e estão dispostas na folha pela seguinte ordem: quadrado, dardo e rectângulo. No quadrado foram traçados os seus quatro eixos, no dardo, foi traçado o seu único eixo e no rectângulo, não foi traçado nenhum eixo. Por baixo, escreveram o seguinte:

> Então quadriláteros com os lados todos iguais unem os eixos de simetria vértice para vértice, com os lados iguais dois a dois, unem os eixos de simetria de lado para lado, os quadriláteros com os lados todos diferentes não têm eixos de simetria.

Começam o seu registo em jeito de conclusão lógica: "Então". O que escrevem tem um carácter geral pois não se reporta unicamente aos casos concretos construídos: por exemplo, referem-se a quadriláteros com os lados todos diferentes e não construíram nenhum exemplo ilustrativo dos mesmos. Tal como já tinham feito para os polígonos regulares, em 2.c), também aqui explicam a forma como passam os eixos nos vários tipos de quadriláteros. Para os quadriláteros com os lados todos iguais, de que o quadrado é um exemplo, dão a mesma explicação enunciada antes para os polígonos regulares com número de lados par, de que os eixos unem os vértices, omitindo os eixos que passam pelos pontos médios dos lados opostos, no caso do quadrado, apesar de terem traçado todos os seus eixos. A explicação já estaria completa para o caso do losango propriamente dito mas este não foi referenciado concretamente pelo grupo. Para os quadriláteros com os lados iguais dois a dois, de que são exemplos todos os três quadriláteros construídos, a explicação apresentada, de que os eixos unem "de lado para lado", apenas se adequa ao rectângulo e ao quadrado. No entanto, o grupo não deveria estar a incluir nesta categoria o quadrado, já que não referira este modo de passar nas duas vezes anteriores. Deveria estar a pensar no rectângulo embora não se consiga perceber por que motivo não foram traçados neste os seus dois eixos. O outro modo de passar dos eixos de quadriláteros deste tipo, como é o caso do dardo, do papagaio ou do losango, unindo os vértices opostos não foi referido no grupo. Poderemos dizer que o grupo, nesta questão, não efectuou uma demonstração verificativa e explicativa do número de eixos em cada um dos tipos de quadriláteros, não tendo, portanto, relacionado o modo de passar dos eixos com o número de eixos. No entanto, voltou a afirmar, implicitamente, a relação já enunciada antes, a propósito da questão 3, alusiva aos triângulos, de que é necessário ter lados iguais para que uma figura tenha eixos de simetria. Tal como os triângulos escalenos, também os quadriláteros com os lados todos diferentes não têm eixos de simetria. Só têm eixos, os quadriláteros com pares de lados iguais. O facto de terem construído o quadrado, figura igual à que já tinham explorado na questão 2, pode dever-se a esta sua preocupação de atender a todo o tipo de quadriláteros e a estabelecer relações com as diversas questões da tarefa.

Relativamente à questão 5, escreveram: "No círculo o número de eixos é infinito. O círculo como não tem lados nem vértices, é tudo igual, ou seja, é tudo simétrico em cada pontinho há um eixo". Mais uma vez, este grupo denota a sua preocupação em fundamentar o que afirma, mesmo que tal não seja pedido explicitamente no enunciado da tarefa. Aqui, há mesmo uma explicitação do significado que o grupo atribui ao termo "igual", entendido como "simétrico". Poderemos pois afirmar que existe nesta resposta uma justificação lógica que explicita a razão de o círculo ter infinitos eixos de simetria. Partem de um facto e dele deduzem uma consequência lógica. Como no círculo "é tudo igual, ou seja, é tudo simétrico em cada pontinho há um eixo". Não temos dados que nos evidenciem se estarão a pensar nos pontos de todo o círculo ou apenas nos da circunferência que o limita, mas provavelmente será a circunferência que estarão a considerar pois a referência "tudo igual" remete-nos para a circunferência que se caracteriza por todos os seus pontos estarem a uma distância igual relativamente ao seu centro. O seu registo não explicita igualmente se estarão a considerar apenas o que afirmam textualmente—em cada ponto, um eixo—ou em cada ponto, um eixo diferente. De facto, em cada ponto, seja da circunferência ou do círculo, passa um eixo mas não um eixo diferente como a expressão parece querer indicar, já que cada eixo une dois pontos diametralmente opostos da circunferência. A expressão induz uma equivalência de tantos eixos quantos os pontos. Provavelmente, tal como apontado por Fischbein (2001) e Hanna e Jahnke (1996), as suas intuições levam-nos a considerar um único nível de infinito.

O diminutivo empregue para designar o ponto—“pontinho”—enfatiza a infinidade dos pontos da circunferência do tipo do infinitamente pequeno que, neste caso, é uma consequência destes terem dimensões nulas. Estamos no campo do infinitésimo; por mais pequena que seja a distância entre dois pontos da circunferência, podemos sempre encontrar uma outra ainda menor, dividindo ao meio o respectivo arco de circunferência. E simultaneamente, estamos a lidar com o infinitamente grande pois os eixos de simetria são discretos e não contínuos, e pensar no número de eixos de simetria, sejam eles de polígonos ou de círculos, é pensar na sucessão dos naturais que é infinitamente grande. Daí que o conceito de infinito nesta questão seja, ao mesmo tempo, complexo e maravilhoso, apesar de aparentemente tão simples. Temos de estabelecer relações entre domínios conceptuais distintos, ambos abstractos. Um é de natureza contínua e ao lidar-se com a respectiva densidade, entramos no infinitésimo: é o domínio dos pontos da circunferência e da distância entre eles. O outro é de natureza discreta e é da ordem do infinitamente grande: é o domínio dos eixos de simetria. Ao estabelecer-se relações entre estes dois domínios, é como se concebêssemos uma única sucessão de números reais, a convergir para 0, cujos termos correspondessem às distâncias cada vez menores entre os pontos da circunferência, e a ordem dos termos a crescer para o infinitamente grande correspondesse ao número de eixos de simetria. Assim, obteríamos uma função com domínio IN relativo aos eixos de simetria e imagens em IR relativas às distâncias entre os pontos sucessivamente mais pequenas. Uma sucessão deste tipo seria, por exemplo, a definida pelo termo geral $a_n = \frac{1}{n}$, a qual tem limite 0 quando n tende para infinito, ilustrada no seguinte gráfico:

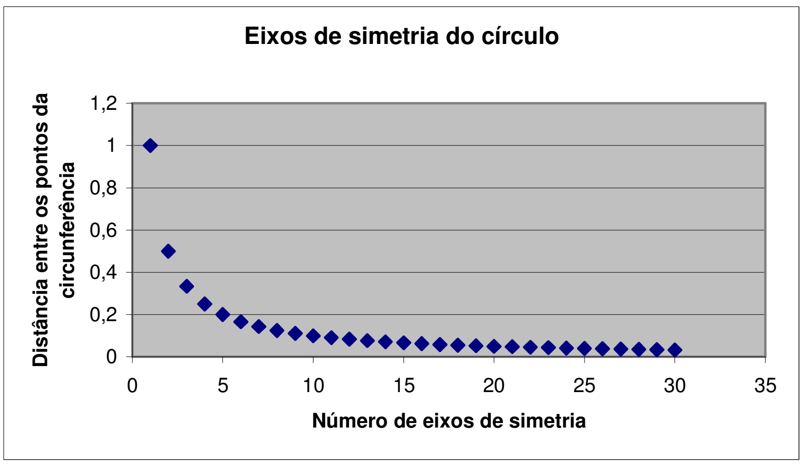


Figura 21. Gráfico da sucessão com limite 0 quando n tende para infinito

A demonstração, elaborada pelo Grupo C, à semelhança da anterior, apresenta características informais e narrativas. Depois de deduzida a consequência lógica de “em cada pontinho há um eixo”, os alunos tiveram que fazer outra dedução lógica, embora esta já não se encontre explicitada na demonstração: se os pontos são infinitos, então também os eixos são infinitos. Partiram, pois, de um resultado matemático já conhecido—a infinidade dos pontos da circunferência—para deduzir acerca dos eixos, estabelecida anteriormente a relação entre ambos. Esta dedução surge implicitamente nesta demonstração. Os alunos desenvolveram o raciocínio com estas deduções antes de começarem a escrever. O seu registo escrito é iniciado pela conclusão acerca da quantidade de eixos de simetria de um círculo, em resposta clara ao que, muito directamente, é questionado no enunciado. Só depois, e por sua iniciativa, fundamentam essa mesma conclusão.

A razão apresentada para os eixos infinitos do círculo tem uma linha condutora, em tudo, semelhante à da apresentada para a existência de eixos dos polígonos. Este grupo, nas suas três respostas diferenciadas, apresenta, afinal, uma nota comum que poderá corresponder a uma demonstração geral, conclusiva do processo desenvolvido com a realização de toda a tarefa, e que advém da compreensão de que um eixo de simetria divide, efectivamente, uma figura ao meio, de tal modo que se dobrássemos a figura por esse eixo, cada uma das metades ficaria sobreposta à outra. Daí a percepção de que as duas metades têm de ser iguais. Assim, o grupo explicitou sempre a necessidade do "igual"—lados iguais, o "tudo igual" no círculo—para a existência de eixos de simetria. O Grupo C evidenciou, portanto, uma preocupação em elaborar e redigir justificações teóricas para as afirmações que formulou e algumas delas, poderemos considerar demonstrações com características informais e narrativas, que são as que mais usualmente se fazem em contexto escolar.

O Grupo-alvo

Vejamos agora mais detalhadamente o modo como se processou a concretização da demonstração por parte do grupo-alvo. Ouçamos o que diz a professora ao grupo-alvo quando este ainda se encontrava a traçar os eixos do heptágono, tendo preenchido a tabela para os polígonos de três, quatro, cinco e seis lados: "Para além de contar a quantidade, quanto é que dá, não se esqueçam de observar como é que os traçaram—uniram o quê com o quê, está bem?—para poderem responder às questões seguintes".

A professora, deste modo, amplia a explicitação do próprio enunciado da alínea 2. c): explicar como são os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados significa observar como se traçaram os eixos, observar o que é que eles unem. Mais uma vez emerge aqui o carácter reificado do traçado dos eixos: a professora não solicita aos alunos que observem como traçam os eixos (no próprio acto de os traçar); solicita que observem como os *traçaram*—o tempo pretérito do verbo indica simultaneamente dois tempos, o passado e o futuro, o passado de uma acção realizada relativa ao traçar e o futuro de uma acção posterior de retorno relativa ao observar, apenas possível com um objecto para o qual posso olhar tantas vezes quantas queira e promover uma reflexão em torno dele. No entanto, estas palavras da professora acabaram por ser ignoradas, não funcionando portanto como fonte de explicitação da alínea, pois foram, de certa maneira, prematuras relativamente à fase de trabalho em que os alunos se encontravam. Nem existe evidência de os alunos atenderem ao solicitado pela professora nesta altura, talvez porque, de facto, ainda não tinham chegado às tais questões seguintes de que falava a mesma.

Por isso, só depois de ter respondido à alínea 2. b), é que a Sara dedicou atenção à leitura da alínea seguinte. O entendimento desta alínea não chegou a ser discutido no grupo. Só a Sara é que a leu naquele momento. Depois de ler a questão, olhou demoradamente para a folha dos polígonos, colocando a mão na testa, em ar de concentração e de esforço para entender a alínea. O Ricardo chamou a sua atenção para outro assunto e logo depois, surgiu a professora. Por isso, apesar de o grupo, usualmente, resolver as questões matemáticas, por si só, revelando autonomia relativamente à professora, neste caso, a Sara dirigiu-se-lhe imediatamente, sem consultar antes os colegas, já que a mesma se encontrava junto do grupo, por sua iniciativa. É evidente que, na altura em que leu o enunciado da questão, a Sara não se lembrou das palavras proferidas antes pela professora (citadas acima) nem estabeleceu qualquer ligação com elas. Atentemos no seguinte excerto da transcrição:

S- Stora, não tou [sic] a perceber a c).
P- Então, o que é que não percebe na c)? Vamos lá…
Faz-se uma pausa na qual a Sara balbucia algo do enunciado da alínea "lados" e os restantes elementos do grupo lêem a questão enunciada nesta alínea.
R- Então, é aqui que eu tava [sic] a dizer que era a mediatriz.
P- Vá… E são todas? Todas elas têm aquela posição que a gente tava [sic] ali a referir? (*aponta para o quadro*) Todos os eixos…
R- Todos os eixos vértice-lado…
P- (*falando quase ao mesmo tempo que o Ricardo*) Este número de eixos que vocês descobriram que afinal é igual ao número de lados, não é? Portanto, que, no geral, vocês puseram logo *n, n* lados tem *n* eixos de simetria. Mas a questão que se põe aqui é: será que a posição dos eixos de simetria é sempre a mesma, não é verdade? relacionando hãa… os vértices e os lados… sempre as mesmas posições? Ou as posições mudam consoante…
R- Mudam.
P- (*olhando para o Ricardo*) Como? Por exemplo, aqui (*aponta para o triângulo*) os eixos são diferentes ou são sempre nas mesmas…?
B- São diferentes.
P- Eu expliquei-me mal. É evidente que os eixos têm que ser diferentes senão era sempre o mesmo. Mas, por exemplo, une os mesmos elementos, sempre? O mesmo tipo de elementos? Ou une elementos diferentes?
B- Elementos diferentes.
P- (*olhando para o Bernardo*) Que é um vértice com o meio do lado oposto. (*apontando de novo para o triângulo*) E os três eixos são do mesmo tipo, não é? (*aponta agora com a régua para o quadrado*) Pronto, agora aqui, no quadrado, no quadrilátero.
R- (*intervindo de forma imediata*) Lado com lado. Vértice com vértice.
P- E quantos, quantos unem lados opostos, paralelos?
R- Dois.
P- (*quase simultaneamente*) Dois. E quantos é que unem vértices opostos?
R- (*abrindo dois dedos*) Dois.
P- (*quase simultaneamente*) Dois. (*olhando para o Bernardo*) (*imperceptível*) estás a ver? Acompanham o número de lados mas a maneira como eles são colocados já não é sempre com a mesma relação, tá [sic] bem? (*apontando para o quadrado e batendo com a régua por cima dos lados e dos vértices, acompanhando o que diz*) Há dois que são lado-lado. E há dois vértice-vértice, não é? (*Apontando para o triângulo e batendo com a régua por cima do vértice e do lado, acompanhando o que diz*) Aqui é vértice-lado.
B- (*abrindo três dedos*) Três.
P- (*repetindo, de forma imediata, o número pronunciado pelo Bernardo*)

Três. (*Aponta com a régua para o pentágono*) Agora aqui. Vamos para este de cinco.
B- É vértice-lado e lado-lado.
P- É sempre vértice… é lado-lado sempre?
R- Não. É vértice-lado.
P. É sempre vértice-lado, não é?
R- Stora, então os ímpares é vértice-lado e os pares vértice-vértice, lado-lado.
P- Então, vamos lá!... (*larga a régua*) Estás a pensar numa teoria, não é? Então, vamos lá a ver se essa teoria tem sentido. Vamos lá verificar. Vamos lá! Pronto. (*afasta-se*)

O Ricardo, lendo a questão, faz a ligação com a mediatriz que ele tinha referido, a propósito da discussão proposta pela professora relativamente ao facto de o eixo de simetria cruzar o ponto médio dos lados dos polígonos. À questão enunciada na alínea “Por onde passam os eixos?”, ele responde “Então, é aqui que eu tava [sic] a dizer que era a mediatriz” (linha 6). Esta resposta evidencia que o Ricardo transpõe as propriedades conhecidas e apropriadas da mediatriz para o eixo de simetria abordado nesta aula. Nessa transposição, o que ele, implicitamente, está a afirmar é que os eixos passam pelo ponto médio dos lados dos polígonos, sendo perpendiculares aos mesmos.

Tal é também o entendimento que a professora faz das suas palavras quando questiona o grupo: “E são todas? Todas elas têm aquela posição que a gente tava [sic] ali a referir?” (linhas 7 e 8). Assim, a professora tenta levar os alunos à constatação do outro modo de passar dos eixos, não contemplado na resposta do Ricardo e não visualizado no quadro, onde o exemplo do triângulo lá desenhado, aquando da discussão colectiva em torno do ponto médio, apenas registava um eixo a cruzar o ponto médio de um dos lados. Reparemos agora no género feminino empregue pela professora em “todas”, ao partir das palavras do Ricardo. Mais uma vez, vemos a professora apropriar-se das palavras dos alunos para melhor os orientar e questionar. E nesta apropriação, a professora funde os dois objectos matemáticos e os eixos passam agora a ser tratados como mediatrizes: todas as mediatrizes passam pelo ponto médio? ("Todas elas têm aquela posição que a gente tava [sic] ali a referir?"). Este é o único momento em que se verifica esta fusão, pois à medida que a professora continua o seu discurso, abandona o termo "mediatriz" para se focar unicamente nos eixos, sendo acompanhada pelos alunos, nesta utilização de vocabulário. Efectivamente, logo a seguir, a professora começa a referir-se a eixos "Todos os eixos…" (linha 8). O Ricardo tenta completar a frase iniciada pela professora—"Todos os eixos vértice-lado…" (linha 9)—mas é interrompido pela professora que pareceu não o ouvir, continuando o seu discurso. O Ricardo deve estar ainda a estabelecer a relação entre a posição do eixo e a mediatriz, parecendo querer afirmar que todos os eixos que unem o vértice ao lado são mediatrizes desses lados.

A generalização é abordada e negociada no seu significado pela professora logo numa fase inicial da sua intervenção junto do grupo. A professora parte da conjectura feita pelos alunos—"Este número de eixos que vocês descobriram que afinal é igual ao número de lados" (linhas 10 e 11)—baseada num padrão percepcionado e generalizado—"que, no geral, vocês puseram logo *n, n* lados tem *n* eixos de simetria" (linhas 12 e 13)—para tentar explicitar que esta alínea pretende que os alunos vejam agora como é que são obtidos os tais *n* eixos de simetria.

Vemos, pelo excerto atrás apresentado, que a explicitação pelos alunos do outro modo de passar dos eixos só é conseguido com o recurso a um exemplo, o exemplo do quadrado. Só quando, depois de analisarem o que acontece com o triângulo, a professora aponta com a régua, na folha dos polígonos, para o quadrado com os eixos traçados é que, muito rapidamente, o Ricardo refere como passam os eixos neste polígono concreto: "Lado com lado. Vértice com vértice" (linha 30). O facto de só neste momento o conseguirem fazer pode ter a ver com dois motivos.

Por um lado, é o questionamento dirigido para a observação do caso particular que faz com que se tenha uma maior consciência do que anteriormente se fez, sem se pensar muito nisso. É a emergência de algo que já se apropriou pela acção. A forma rápida com que o Ricardo responde mostra que não foi preciso agora reflectir sobre algo que está ali mesmo à vista—dado o carácter reificado do traçado—e que foi concretizado por si próprio (e embora não tivesse dedicado grande atenção à forma como se encontrava a traçar os eixos, no momento simultâneo de os traçar, foi-se apropriando desse modo alternativo de traçar, unindo lados opostos e vértices opostos).

Por outro lado, o que parece entrar também aqui em jogo é a negociação de significados, a negociação do questionado pela professora, numa tentativa de negociar o significado de um enunciado. Essa negociação está bem presente na questão colocada pela professora "será que a posição dos eixos de simetria é sempre a mesma?" (linhas 13 e 14), em termos gerais, e depois referindo-se ao triângulo "os eixos são diferentes ou são sempre nas mesmas…?" (linha 19). A professora tinha em mente o modo de passar do eixo quando empregava o termo "posição", e portanto, relativamente ao triângulo, estava a pensar no modo constante de os eixos unirem cada um dos vértices ao ponto médio de cada um dos lados opostos do triângulo. A professora não terminou a frase mas subentende-se que iria dizer "mesmas posições" com o sentido de o mesmo modo de passar em oposição a serem diferentes, com o sentido de terem vários modos de passar.

O Bernardo, respondendo à primeira parte da questão posta pela professora "os eixos são diferentes?", tomando à letra o que esta expressão significa e não o sentido atribuído pela professora, afirmou que os eixos, no triângulo, são diferentes. A professora, dando-se conta do sentido atribuído pelo aluno a "diferentes", e vendo rapidamente que esse é o significado textual do termo, dá razão ao aluno—"Eu expliquei-me mal. É evidente que os eixos têm que ser diferentes senão era sempre o mesmo" (linhas 21 e 22)—e reformula a questão, visando uma maior explicitação da mesma e uma apropriação de um significado comum e partilhado: "une os mesmos elementos, sempre? O mesmo tipo de elementos? Ou une elementos diferentes?" (linhas 22-24). Assim, a professora deixa de usar o termo "posição" para falar do que é que o eixo une. A segunda questão é a reformulação da primeira: os eixos não unem nunca os mesmos elementos mas poderão, sim, unir o mesmo tipo de elementos (por exemplo, unir vértices, que são, portanto, do mesmo tipo, mas não os mesmos; e o mesmo raciocínio pode ser feito relativamente à união de lados). O termo "diferente" é agora empregue a respeito dos elementos dos polígonos, dissociado do modo de passar do eixo. Vemos, portanto, a preocupação da professora em ser cada vez mais explícita, precisa e rigorosa, o que geralmente é difícil num discurso oral. Desta vez, ocorre uma convergência de significados, professora e alunos estão a visualizar e a entender o mesmo, e o Bernardo responde "Elementos diferentes" (linha 25), resposta esta corroborada e complementada pela professora ao explicitar "que é o vértice com o meio do lado oposto" (linha 26) que constituem os elementos diferentes unidos pelo eixo de simetria, no triângulo e que "os três eixos são do mesmo tipo" (linha 27).

É de sublinhar a importância da negociação de significados na procura de um entendimento comum e partilhado, que contribua para a emergência da compreensão matemática, de forma a tornar conscientes, reflectidas e clarificadas as aprendizagens matemáticas. Tal como Mason et al. (1984) referem, a aprendizagem não se faz pela experiência, por si só, mas pela reflexão sobre essa mesma experiência. Na minha tese de mestrado, os resultados do meu estudo, apoiados pela ferramenta analítica sustentada pela perspectiva filosófica de Heidegger (1998, 1999), foram convergentes com os do presente estudo neste aspecto: os alunos desenvolvem primeiro uma compreensão prática e só depois uma compreensão reflexiva:

> Os alunos desenvolvem: (a) primeiro, uma compreensão prática, em conjunção com as suas acções irreflectidas com os objectos matemáticos, através das quais conferem um sentido pessoal a esses objectos ligado ao contexto empírico; e (b) depois, uma compreensão teórica, de natureza reflexiva e consciente, pela qual eles efectuam generalizações. (Rodrigues, 1997, p. i)

Como podemos constatar, o Ricardo, que foi um dos elementos do grupo que teve um papel mais activo na experiência de colocar o espelho e de traçar os eixos, não tinha a consciência clara de por onde passavam os eixos pelo simples facto de ter tido essa experiência. Reportemo-nos a um momento da aula anterior, quando a Sara traçou incorrectamente um eixo no heptágono, ao assumir que teria um comportamento semelhante ao do já traçado no hexágono, mesmo ao lado, unindo dois vértices, e foi corrigida pelo Ricardo: ter-se-iam dado conta que, neste caso, os eixos nunca uniriam dois vértices? Tomariam algum tipo de consciência relativamente a por onde passam os eixos quando os estão a visualizar e a traçar? Talvez, já nesta fase, vão desenvolvendo essa compreensão e se apropriando da mesma. Mas é uma compreensão ainda pouco consciente e pouco reflectida. E nessa fase, não existem registos orais relativos a esta questão, nem depois da intervenção da professora com uma solicitação explícita no sentido de os alunos irem observando a forma como traçaram os eixos (p. 565).

E é por esse motivo que quando o Ricardo leu o enunciado da questão que pedia explicitamente para explicarem por onde passam os eixos em cada um dos polígonos regulares, o mesmo deu uma resposta que contemplava apenas um dos dois modos de passar os eixos. Foi de fundamental importância todo o questionamento feito pela professora para os conduzir à tomada de consciência que possibilitou a emergência do iceberg que se encontrava submerso. E temos de ter também sempre presente que o próprio questionamento carece de uma contínua e constante negociação: nunca poderemos assumir que os alunos entendem o mesmo que o professor, ou que todos os alunos entendem o mesmo ou estão a falar do mesmo. A língua portuguesa e as suas múltiplas interpretações atravessam a linguagem matemática, interferindo substancialmente na interpretação específica do que é inerentemente matemático, e à primeira vista, detentor de uma universalidade inter-fronteiras nacionalistas, que lhe poderia dar uma maior objectividade e portanto menor ambiguidade.

Observemos agora a forma como a professora, ao questionar sobre quantos são os eixos no quadrado que passam de um e outro modo—" E quantos, quantos unem lados opostos, paralelos?" (linha 31); "E quantos é que unem vértices opostos?" (linha 33)—direcciona os alunos para a fase de demonstração, colocando em clara distinção o caso do triângulo, explicitado anteriormente, em que os três eixos passam da mesma maneira, um eixo por cada lado, e o caso do quadrado, em que dois dos eixos passam pelos lados, um eixo por cada par de lados opostos, e dois dos restantes eixos passam pelos vértices, um eixo por cada par de vértices opostos.

Quando a professora direcciona a atenção dos alunos para um outro caso particular, o pentágono, o Bernardo enuncia dois modos diferentes de passar os eixos, tal como acontecera para o quadrado—"É vértice-lado e lado-lado" (linha 47)—ao que é, imediatamente, questionado pela professora—"É sempre vértice… é lado-lado sempre?" (linha 48)—e corrigido pelo Ricardo "Não. É vértice-lado" (linha 49). O Bernardo começa pelo modo como efectivamente os eixos cruzam o pentágono, integrando depois o modo como tinha sido enunciado como um dos modos de os eixos cruzarem o quadrado. A professora, depois da correcção feita pelo Ricardo, repete as suas palavras, validando-as—"É sempre vértice-lado, não é?" (linha 50)—e procurando, simultaneamente, não impor a sua validação, associada ao seu estatuto de professora, mas sim ganhar a adesão do Bernardo e das raparigas, que neste diálogo, nunca se pronunciaram, pela própria evidência empírica, já que os eixos do pentágono se encontravam correctamente traçados, à vista de todos. E por isso, a professora transforma, quase sempre, as suas afirmações em interrogações ("não é?") para que todas as afirmações matemáticas sejam acordadas e não impostas.

Após a explicitação de como eram os eixos de simetria para os casos particulares do triângulo, do quadrado e do pentágono, o Ricardo visualizou o que acontecia com os outros polígonos e rapidamente os agrupou e simultaneamente efectuou a generalização dos eixos nos polígonos com número de lados ímpar e número de lados par: "Stora, então os ímpares é vértice-lado e os pares vértice-vértice, lado-lado." (linhas 51 e 52). Face a esta generalização proferida pelo Ricardo, a professora valorizou-a, chamando-a de "teoria", e considerou que aquele era o momento de deixar o trabalho prosseguir por conta do próprio grupo. Os alunos, não só tinham já entendido o que era pedido na alínea c), como estavam num caminho produtivo de generalização. A professora não quis, intencionalmente, fazer qualquer tipo de validação relativamente à generalização feita pelo Ricardo para não cortar o trabalho seguinte do grupo. Incentivou o grupo a explorar esta ideia do Ricardo, estendendo-a como desafio a todos os elementos do grupo—"vamos lá" (linhas 53-55)—e colocando-a como passível de ser sujeita a exploração, como qualquer teoria que o seja "Estás a pensar numa teoria, não é? Então, vamos lá a ver se essa teoria tem sentido. Vamos lá verificar." (linhas 53 e 54). E foi com este repto lançado ao grupo que a professora considerou ter chegado o momento de o deixar para ir junto de outros grupos.

Analisemos agora o padrão de interacção no grupo com a presença da professora. A Sara, que no grupo tem um elevado nível de participação, com a professora, anula-se e apaga-se, tomando o Bernardo um papel mais activo do que é habitual no grupo. Os únicos que mantêm o mesmo tipo de comportamento são o Ricardo e a Maria. A Sara, que tinha tomado a iniciativa de colocar a dúvida à professora pois efectivamente naquele momento era a única no grupo que se tinha debruçado na questão, tentando compreendê-la, nunca mais voltou a intervir em resposta às questões que a professora ia colocando. O Bernardo mostra ter uma relação de à vontade com a professora, tendendo a entrar em diálogo directo com a mesma sempre que ela se aproxima do grupo. No início da aula, tinha, inclusive, dito à professora, quando ela estava a distribuir no grupo a folha e as fichas, que a tinha visto no fim-de-semana e falara da proximidade da sua casa relativamente à da professora. O próprio facto de esta olhar, por vezes, para o Bernardo enquanto fala poderá contribuir para o reforço de uma identidade de participação por parte do aluno: quando olhamos num grupo para alguém em particular estamos a dar-lhe um certo destaque, a dizer, implicitamente, que o valorizamos, e que esperamos dele um desempenho consonante com essa valorização; esse alguém, sentindo todo este tipo de mensagens implícitas, tende, pois, a corresponder de acordo com o esperado. Se o Bernardo sente que é esperado dele um comportamento participativo, desempenhará esse papel de maior participação. Assim, a sua identidade tem múltiplas facetas, de acordo com as pessoas em interacção e com a construção social da sua própria imagem.

Já sozinhos, o Bernardo levantou-se e saiu por momentos do grupo, e o Ricardo pegou logo na folha dos polígonos para testar a sua teoria: olhava com atenção para a mesma, e ia fazendo pequenos registos ao lado de cada um dos polígonos enquanto contava os eixos. Nesse momento, eu aproximei-me do grupo. Vejamos o extracto desse diálogo:

R- Agora tamos [sic] a ver uma teoria minha.
I- O quê? Qual é a tua teoria? (*agacha-se ao nível dos alunos*)
R- Que os ímpares têm sempre vértice-lado, os pares ou têm vértice-vértice ou lado-lado.
I- Repete lá outra vez. Falas tão depressa. Diz, diz.
R- Os ímpares que têm lados iguais são sempre vértice-lado e os pares têm sempre vértice-vértice ou lado-lado. (*a investigadora vai abanando a cabeça afirmativamente ao mesmo tempo*)
I- (*olhando para a Sara e abanando a cabeça afirmativamente)* E é, ou não é?
A Sara abana a cabeça que sim.
R- (*imperceptível)*
I- Se calhar escrevam isso, não?
S- (*imperceptível)*
I- Pronto, vocês estão a constatar que passa exactamente da maneira como tu tás [sic] a dizer. E é! (*aponta para os vários polígonos da folha*) Então vá! Agora tentem explicar, com base nisso, com base que passa de uma maneira para os ímpares e de outra maneira prós [sic] pares, porque é que é sempre o mesmo número (*apontando para a tabela da ficha*). Depois, tentem ver isso, tá [sic] bem? (*olha para os vários elementos do grupo*)
R- Nos ímpares…
I- (*olha para o Ricardo e vai apontando sempre para o triângulo com os eixos traçados na folha enquanto fala)* Nos ímpares…
R- Sim.
I- Tu dizes que é de vértice a lado. Portanto, vai sair… de cada vértice vai sair um eixo. Ou seja, vai ter tantos eixos como o número de (*aponta para os três vértices do triângulo* e *olha para a Sara*)
M- (*falando muito baixinho*) lados.
R- (*em tom de descoberta*) Aaaaaaaahh! (*a investigadora faz ao mesmo tempo um gesto de evidência, estendendo o braço)*
I- Portanto, prova-se que vai ser sempre igual ao número de lados.
R- (*olhando para os vários polígonos e mais demoradamente para o octógono enquanto abanava afirmativamente com a cabeça*) Têm sempre o mesmo número de vértices.
I- Então vá! Tentem lá ver isso. E escrever. E escrever. (*afasta-se*)

Assim que me aproximei, o Ricardo comunicou-me que tinha uma teoria, a teoria dos pares e dos ímpares. Comunicou-o falando no plural—"Agora tamos [sic] a ver" (linha 1)—mas assumindo a autoria da teoria—"uma teoria minha" (linha 1). Apesar da pluralidade referida pelo Ricardo, efectivamente, naquela fase ele era o único que estava a verificar a teoria, pois as colegas ainda não se tinham apropriado dessa ideia. É interessante observar como o Ricardo se apropriou da palavra "teoria" usada antes pela professora, denotando, assim, a auto-valorização trazida pelo facto de ser agora criador de uma teoria, como se fora um cientista, um matemático… Explicou-me no que consistia essa teoria, primeiro muito depressa—"Que os ímpares têm sempre vértice-lado, os pares ou têm vértice-vértice ou lado-lado." (linhas 3 e 4), e depois novamente mais devagar, a meu pedido, já que eu não tinha conseguido acompanhar o seu discurso.

Olhemos agora para a disjunção que o Ricardo usou para o caso dos pares: "os pares *ou* têm vértice-vértice *ou* lado-lado" (linhas 3 e 4). Esta disjunção, à primeira vista, parece querer indicar uma disjunção exclusiva: os eixos ou são de uma maneira ou de outra, não podendo ser as duas ao mesmo tempo. No entanto, pelo facto de o traçado dos eixos corresponder a ambos os modos e também pela evidência da forma de o Ricardo se exprimir anteriormente para a professora—"e os pares, vértice-vértice, lado-lado" (linhas 51 e 52 da p. 568)—poderemos considerar que o sentido atribuído pelo Ricardo à disjunção é um sentido inclusivo, tal como o modo como indicou (p. 568) os elementos unidos pelos eixos de simetria subentende uma conjunção: vértice-vértice e lado-lado. Assim, o facto de agora ter usado uma disjunção e não uma conjunção revela que o Ricardo queria de facto enfatizar os dois modos diferentes de passar dos eixos no caso dos pares, embora tivesse consciência que uns eixos passam de uma certa maneira *e* outros passam da outra maneira: a utilização do termo "ou" leva-nos a centrar a nossa atenção nessa dualidade alternativa.

Na repetição que fez, a meu pedido, foi mais minucioso na explicitação das características dos polígonos, referenciando agora os polígonos regulares com número ímpar de lados como "os ímpares que têm lados iguais" (linha 6). O Ricardo revela assim a sua compreensão de que os lados têm que ser iguais para existirem os eixos de simetria, explicitando os dados da própria tarefa, já que a conjectura foi formulada para polígonos regulares. Se fosse um polígono com número de lados ímpar mas com os lados diferentes, tal já não aconteceria, já não teria eixos de simetria. A sua explicitação foi a mesma, na sua essência, à que já tinha comunicado, momentos antes, à professora.

Face à explicitação do Ricardo, acabei por a validar. Embora não pretendesse dizer taxativamente se estava ou não correcta, tentando remeter essa acção para o grupo, através do meu olhar para a Sara e do tom interrogativo "E é, ou não é?" (linhas 9 e 10), o modo como eu abanava afirmativamente a cabeça e a minha solicitação para escreverem acabaram por afirmar a minha concordância com a teoria do Ricardo. Num momento pouco depois, substituí o tom interrogativo por uma validação afirmativa e textual "E é!" (linha 16) enquanto percorria com os dedos pelos vários polígonos na folha, como se nesse gesto quisesse colocar a evidência empírica da verificabilidade da teoria do Ricardo. Esta mudança para uma validação mais explícita ocorreu após a Sara ter manifestado a sua adesão à mesma, pelo abanar da cabeça, e por um registo oral que não consigo decifrar agora por ser imperceptível no registo vídeo. Daí que eu tenha partido do entendimento de que existia concordância relativamente à ideia do Ricardo partilhada no grupo: "Pronto, vocês estão a constatar que passa exactamente da maneira como tu tás [sic] a dizer" (linhas 15 e 16)—começo a frase falando no plural no que respeita à verificação da sustentabilidade do afirmado pelo Ricardo ("vocês estão a constatar") e termino-a no singular dirigindo-me ao autor que proferiu a dita teoria.

Tentei, em seguida, que os alunos avançassem para a demonstração, de modo a usarem essa mesma teoria para explicar porque é que o número de eixos é igual ao número de lados dos polígonos regulares: "Agora tentem explicar, com base nisso, com base que passa de uma maneira para os ímpares e de outra maneira prós [sic] pares, porque é que é sempre o mesmo número" (linhas 17-19). Os alunos tinham entendido o que era pedido na alínea, com o apoio da professora, mas não tinham sentido necessidade de estabelecer qualquer relação explicativa entre o constatado agora e a conjectura formulada antes. Nem possivelmente orientariam o trabalho nesse sentido pois tal não era pedido, de forma explícita, na alínea. Mais uma vez emerge aqui a importância da negociação de significados, neste caso, em torno do que é valorizado e do que é esperado dos alunos. Foi portanto a minha intervenção que contribuiu para que os alunos desenvolvessem o seu trabalho no sentido de efectuarem uma demonstração.

No entanto, aquele meu pedido, formulado, assim, em termos gerais, não foi compreendido pelos alunos. Partindo do caso dos ímpares proposto pelo Ricardo, já que o aluno dava sinais de algum impasse sobre como explicar para este caso, recorri a um caso concreto, o triângulo, para fazer sentido do que tinha acabado de solicitar, embora falando em termos gerais para todos os polígonos com número de lados ímpar. Tendo como suporte a imagem do triângulo com os eixos traçados na folha, acabei por construir eu mesma, com o acompanhamento dos alunos, a demonstração explicativa para os polígonos com número de lados ímpar. O triângulo tomou aqui um estatuto generalizável pois, embora nunca tenha sido referido o seu nome, a sua imagem serviu de ilustração e portanto de apoio à compreensão do que acontecia com os todos os ímpares: "Nos ímpares…" (linha 23); "Tu dizes que é de vértice a lado. Portanto, vai sair… de cada vértice vai sair um eixo. Ou seja, vai ter tantos eixos como o número de…" (linhas 25-27). É evidente que este meu discurso, dadas as suas características orais, enferma de correcção matemática—sendo uma recta, o eixo de simetria intersecta o vértice; não sai do mesmo—pois seguia de perto a própria construção dos alunos cujo traçado dos eixos apresentava a representação dos mesmos como segmentos de recta e não como rectas, facto este generalizado em toda a turma. Todos os eixos eram iniciados, neste caso, nos vértices e terminados nos pontos médios dos lados. Aliás, observa-se que a Sara, numa dada altura da exploração da tarefa, se preocupou em apagar todos os riscos dos eixos que passavam para fora do hexágono. Esta preocupação evidenciará o entendimento dos alunos dos eixos como segmentos de recta? No entanto, a associação feita pelo Ricardo entre eixo de simetria e mediatriz revela que entende aquele como uma recta, tal como a mediatriz o é. Não concluo a frase mas quer o raciocínio que exprimi quer os meus gestos a apontar os três vértices do triângulo indicam que seria "vértices" a palavra final da frase. A conclusão da frase —"lados" (linha 28)—apesar de feita com um tom de voz muito baixo pela Maria—e a exclamação imediata do Ricardo "Aaaaaaaahh!" (linha 29) denotam que os alunos estavam a acompanhar o meu raciocínio e a apropriar-se do mesmo. De facto, embora a Maria tenha concluído a frase com "lados" e não com "vértices", a sua intervenção revela que estava já a fazer a ponte com a própria conjectura formulada em termos de número de lados dos polígonos e não de vértices de polígonos, já que esse número é igual. O tom de voz com que o Ricardo fez a exclamação, como se tivesse exclamado "Eureka!", mostra que foi neste momento de apropriação que o Ricardo percebeu o meu pedido de explicação inicial, feito em termos gerais.

A seguir, negociei o significado desta fase de trabalho, afirmando que, deste modo, estaríamos a provar a relação de igualdade que eles tinham estabelecido, usando o termo "lados" tal como tinha sido referido pela aluna: "Portanto, prova-se que vai ser sempre igual ao número de lados." (linha 31). A dedução de que a um determinado número de lados num polígono corresponde o mesmo número de vértices foi explicitada, logo de seguida, pelo Ricardo, que teve necessidade, para tal, de se apoiar nas imagens dos polígonos e, em particular, de forma mais insistente, no octógono com um maior número de lados: "Têm sempre o mesmo número de vértices" (linhas 33 e 34). De facto, numa demonstração que utiliza um raciocínio baseado no número de vértices, tal como eu tinha feito, teria de se fazer a dedução de que a um determinado número de vértices num polígono corresponde o mesmo número de lados para se chegar à conclusão pretendida de igualdade entre o número de eixos e o número de lados. Claro que o Ricardo usou o raciocínio inverso, partindo, implicitamente, dos lados para concluir a respeito dos vértices, o que, dada a reversibilidade da situação, é equivalente. O modo como ia abanando afirmativamente a cabeça enquanto olhava mostra que estava a verificar com a observação dos polígonos essa mesma igualdade.

Um dado interessante relacionado com a natureza do discurso dos alunos prende-se com o facto de o seu discurso ser predominantemente sucinto, condensado e muito implícito. Esta afirmação do Ricardo—"Têm sempre o mesmo número de vértices"—é proferida como se estivesse a falar alto para si próprio, revelando, portanto, apenas o essencial do que está a pensar. Trata-se de um discurso implícito e como, neste caso, não se destinava a uma terceira pessoa, o que poderia justificar uma maior explicitação, o discurso emerge com um carácter sincopado. É, portanto, a minha interpretação analítica que explicita que o aluno estaria a comparar o número de vértices com o número de lados, verificando que eram sempre iguais.

É de salientar aqui a importância que a observação dos casos concretos ainda tem na aprendizagem matemática dos alunos. Não só foi importante a observação do triângulo para se perceber a razão de nos polígonos com número de lados ímpar os seus vértices/lados serem em número igual aos dos seus eixos de simetria como foi igualmente fundamental a observação dos vários polígonos e, particularmente daquele que por ter mais lados, mais perto estaria de um caso geral, para se estabelecer uma outra generalização de que os polígonos têm sempre o mesmo número de lados e de vértices. Trata-se de observações de casos particulares bastante peculiares pois, por um lado, são reflexivas, não se fundamentam apenas na visão, sendo acompanhadas pelo pensamento matemático, e por outro lado, visam os aspectos gerais comuns a toda a classe a que pertencem esses casos concretos e não os seus aspectos específicos. Isto é, a reflexão que acompanha e guia a própria observação está orientada para a generalização respeitante a um dado universo de que aquele caso particular é um exemplo ilustrativo.

Abandonei o grupo naquele momento, lançando o desafio de eles prosseguirem a demonstração para os polígonos com número de lados par, embora esse desafio não tenha sido cabalmente explicitado, e de registarem por escrito toda a demonstração: “Então vá! Tentem lá ver isso. E escrever.” (linha 35). Ao contrário do que tinha sucedido antes com o desafio colocado pela professora de verificarem a teoria do Ricardo, em que este imediatamente se embrenhou a fazê-lo, agora com o desafio colocado por mim para prosseguirem o trabalho de demonstração, os alunos do grupo (agora já formado por todos os seus elementos, pois o Bernardo acabara de regressar) começaram a brincar, formando uma casinha com os dois livros de espelhos, totalmente desligados do trabalho da tarefa. Ainda tiveram um momento de concentração subsequente ao meu afastamento em que o Ricardo pega na folha dos polígonos e a Sara se dedica a escrever a resposta à alínea, pedindo, logo a seguir, ao Ricardo a clarificação do que ele dissera antes—“Tu não disseste que nos polígonos…?”—mas com a chegada do Bernardo, depressa desviaram a atenção para brincadeiras paralelas à tarefa. Este facto evidencia a motivação intrínseca no Ricardo de verificar uma teoria, da qual se sentia autor, reforçada pela motivação social de lhe ser atribuída uma importância de autoria de uma teoria. O Ricardo revela uma completa apropriação do significado da ideia matemática em causa. A demonstração, cuja valorização foi negociada por mim, é-lhes externa, não revelando motivação para a sua efectuação. Não desenvolveram uma apropriação cabal das ideias subjacentes à mesma, por não se terem sentido autores dela.

Entretanto, os alunos começaram a escrever a tal teoria do Ricardo, ou seja, por onde passam os eixos nos polígonos regulares. Quem estava mais compenetrado nessa tarefa era a Sara que se mostrava alheada do grupo, concentrada na resposta escrita à alínea c). mas como não tinha apropriado por completo a teoria do Ricardo, sentiu necessidade de lhe voltar a perguntar pela mesma: “Ó Silva, diz… O que é que disseste?” O curioso é que, apesar da pergunta ser dirigida particularmente ao Ricardo, foi o Bernardo que primeiramente lhe respondeu, referindo-se ao caso dos polígonos com número de lados ímpar, já que tinha sido precisamente esse o caso sobre o qual se tinha pronunciado no diálogo anterior com a professora, mostrando portanto uma efectiva apropriação dessa propriedade: “Os ímpares é sempre vértice-lado”. Esta resposta foi imediatamente secundada pela do Ricardo que complementou a anterior: “ Os pares, vértice-vértice, lado-lado”. A Maria escreveu a resposta a esta alínea, olhando para o que a Sara tinha escrito, para utilizar o mesmo registo na sua folha. Nesse momento, passei pelo grupo e inteirei-me, na folha do Bernardo, do que já tinha sido escrito, complementando o Bernardo oralmente o que faltava ainda escrever, o que denota a apropriação do aluno das ideias que estavam ali a merecer um registo explicitado por escrito. Disse-lhes também para escreverem na parte de trás da folha, dando a entender que era esperada uma resposta com dimensões tais que não caberia no espaço diminuto disponível na parte da frente da ficha. E, apesar de parecer um pormenor, o que está a ser sujeito a negociação é a importância e o desenvolvimento esperado da resposta a uma alínea que, dado o seu carácter, prevê uma certa extensão que não se compadece com repostas sintéticas de uma única frase.

Antes de me afastar do grupo, voltei a negociar o pedido da demonstração “E tentem ver porque é que nos ímpares e nos pares dá sempre o mesmo número”. Este pedido foi recebido de diversos modos pelos alunos no grupo: o Ricardo tomou imediatamente a acção de escrita, a Sara fez uma expressão com a boca de quem não estava a entender tal pedido, a Maria virou a folha e o Bernardo também virou a folha e começou a escrever. Foi a este pedido que os alunos tentaram corresponder. O Ricardo e o Bernardo iam escrevendo e trocando impressões sobre o que iam escrevendo, tendo começado a explicar para o caso dos ímpares. A Sara, depois de apagar algo à frente da ficha, pegou na folha do Bernardo e copiou para a sua folha o que o colega já tinha escrito. A Maria fez o mesmo mas pegando na folha do Ricardo. É evidente neste momento o equilíbrio de poderes que se estabeleceu entre o Bernardo e o Ricardo: ambos merecem agora igual credibilidade e é a partir das suas palavras escritas que a Sara e a Maria efectuam o ventriloquismo. O facto de os dois rapazes irem trocando impressões acerca do que iam escrevendo deu a noção às raparigas que ambos estavam a partilhar o processo de escrita e eventualmente a escreverem o mesmo. Entretanto, os dois rapazes continuaram a escrever, agora sem trocarem qualquer palavra, possivelmente tentando explicar porque é que no caso dos pares dava o mesmo número de eixos pois, face à dificuldade sentida em fazê-lo, foi sobre este aspecto que falaram quando a professora se juntou ao grupo. A professora, assim que se aproximou, questionou acerca do ponto da situação, pensando que, à semelhança de outros grupos da turma, já estariam a finalizar a questão 3: "Já está? Os triângulos?". Posta ao corrente sobre o que incidia o trabalho dos alunos nesse momento, desenvolveu-se um pequeno diálogo em torno do mesmo:

P- O que é que vocês pretendem explicar?
R- O número de eixos.
P- A quantia? (*apontando para o quadrado*) Quantos são ali os que passam lado-lado?
Alunos e P- Dois.
P- Como é esse número em relação ao número de lados?
M- Quatro.
R- Ah! É metade!

P- E os que unem os vértices opostos?
R e P- (*ao mesmo tempo*) Também dois.
P- (*olhando para o Ricardo*) Agora verifica se essa teoria… Estás a verificar essa hipótese (a*ponta primeiro para o quadrado e depois para o hexágono e o octógono)* a relacionar com outros, com o de seis, com o de oito lados. (*afasta-se)*

Apesar de no primeiro diálogo entre a professora e o grupo sobre a alínea c), a mesma ter dirigido a atenção dos alunos para o número de eixos que no quadrado passa de um e outro modo (p. 567) tal não foi canalizado para a demonstração pois ainda se encontravam na fase de dar sentido a por onde passavam os eixos num caso e noutro. Era agora que os alunos estavam a raciocinar em termos de estabelecer uma relação entre esse facto e a conjectura da igualdade, que a mesma questão, colocada de novo pela professora—“ Quantos são ali os que passam lado-lado?” (linhas 3 e 4)—tomaria um novo significado pois ia ao encontro do procurado pelos alunos. A própria questão da professora foi agora orientada num sentido mais amplo de relação: “Como é esse número em relação ao número de lados?” (linha 6). Portanto o número dois, constatado unicamente antes como o número de eixos que passava de uma maneira e de outra, emergiu agora como uma relação em todo o seu dinamismo, como o que permanece constante no meio de tudo o que varia: “Ah! É metade!” (linha 8), descobre o Ricardo. Enquanto a Maria se reporta ao número de lados do polígono, respondendo directamente à parte final da questão incidente no mesmo, o Ricardo apreende o sentido genuíno da questão, vendo dois como a metade de quatro. E quando a professora e o Ricardo dizem “Também dois” (linha 10) querem dizer efectivamente “também metade”. Ou seja, é sempre metade o número de eixos que nos polígonos com número de lados par passam pelos pontos médios dos lados opostos e pelos vértices opostos. E a sua exclamação evidencia a surpresa e o entusiasmo da descoberta, como se dissesse “Eureka!”, perante algo que sempre lá esteve mas que só agora emergiu pelo acto de compreender (o que entra em consonância com os resultados de Rodrigues (1997) analisados por uma óptica heideggeriana).

E é essa relação, que a professora entendeu como tendo sido formulada pelo Ricardo, que a levou a incentivá-lo a verificar a mesma com os outros casos particulares de polígonos com número de lados par, isto é, a verificar se a metade se mantém constante quando varia o número par de lados: "Agora verifica se essa teoria… Estás a verificar essa hipótese a relacionar com outros, com o de seis, com o de oito lados" (linhas 11-14). O processo de demonstrar apela a um maior número de generalizações, tal como apontado por Mason et al. (1998) relativamente ao processo de produzir uma argumentação convincente. E o que estes resultados apontam é que, mesmo nesta fase, existe um movimento contínuo entre estes dois processos que constituem faces duma mesma moeda: a generalização e a particularização. Foi pelo processo de demonstrar explicativamente uma conjectura que os alunos efectuaram mais generalizações—neste caso, começaram pela generalização que estabelece a relação entre o número de eixos que passam de um certo modo e o número total de lados dos polígonos com número de lados par. No entanto, a generalização efectuada é apoiada pela particularização: foi olhando para o caso particular do quadrado que a relação geral emergiu. E o que a professora sugere é que os alunos verifiquem se os outros casos particulares constantes na folha sustentam essa generalização, ou seja que os alunos procedam à testagem da generalização com a particularização.

Assim que a professora se afastou, o Ricardo começou logo a escrever na sua ficha e todos os restantes elementos do grupo espreitaram a sua ficha para responder em conformidade com ele, em evidente uso de ventriloquismo. Apenas o Ricardo se tinha apropriado da relação explicativa procurada. Não surgiu mais nenhuma troca verbal sobre esta parte do trabalho. Passo a citar a resposta do grupo à alínea 2.c), tal como está na ficha do Bernardo:

> Nos polígonos regulares, os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados é que:
> Ímpares- os eixos de simetria passam de vértice-lado, tendo por isso o mesmo nº de eixos de simetria quanto ao [sic] nº de vértices.
> Pares- os eixos de simetria passam de lado-lado e vértice-vértice tendo por isso metade de eixos de simetria do que a soma de vértices com os lados.

Neste registo, está implícita a igualdade do número de vértices e de lados num polígono. Assim, no caso dos ímpares, é explicada a relação de igualdade do número de eixos de simetria e do número de vértices, o que implicitamente, explica, também, a igualdade com o número de lados. Além destas generalizações, surge ainda uma outra: a generalização que explica a igualdade do número de eixos e do número de lados dos polígonos com número de lado par. São apenas registados os aspectos essenciais necessários à explicação da relação de igualdade do número de eixos e de lados, e por isso são omitidas as propriedades que não entram em consideração nesta explicação, como o caso de os eixos passarem nos lados pelo seu ponto médio, ou o facto de os eixos unirem elementos opostos.

Trata-se de uma demonstração narrativa e informal. Apesar das suas características narrativas, a linguagem natural usada é sintética, quer na omissão de palavras (“vértice-lado”; “vértice-vértice”; “lado-lado”) quer na omissão de propriedades acessórias à demonstração. Também uma demonstração algébrica dispensa as propriedades acessórias, explicitando, em linguagem simbólica, apenas as relações essenciais à mesma. No caso dos pares, poder-se-ia traduzir a expressão usada pelo grupo por um argumento algébrico conciso e formal: $\frac{2n}{2} = n$. Como os eixos passam por todos os vértices e por todos os lados, estes são adicionados: n vértices + n lados =

$2n$ (porque há tantos vértices como lados). Mas como por cada par de vértices só passa um eixo de simetria (metade) e por cada par de lados, só passa um eixo de simetria (metade), à soma $2n$ corresponde metade de eixos de simetria. E isto está dito no seu registo. O que não está dito é que a metade de $2n$ é n, de modo a estabelecer, de forma dedutiva e fundamentada, a relação de igualdade enunciada na alínea anterior, ainda sob a forma de conjectura. No entanto, tal como já referi atrás, os alunos não assumem a conjectura como tal. Ela é encarada, logo, como uma verdade conclusiva. Partindo, portanto, dessa verdade, não sentem necessidade de a registar de novo. O que estão agora a fazer não é a concluir essa verdade, por meio da demonstração, mas sim a explicar a razão dessa verdade. E explicada a razão, os alunos pura e simplesmente deixam omisso que a metade dessa soma é afinal o número de lados de um polígono regular, deixando esta dedução no campo do subentendido. Embora a demonstração possa ter aqui uma dupla função de verificação e de explicação, para os alunos, ela serve unicamente a função explicativa. Logo, os alunos não precisam de deduzir uma verdade sobre a qual já estão convictos. Torna-se evidente que os mesmos não sentiram necessidade de verificar essa mesma verdade.

No que respeita às últimas três questões da ficha, oralmente, nenhum dos elementos do grupo-alvo fez uma justificação explícita acerca do número de eixos das diferentes figuras. Por escrito, apresentaram uma justificação na questão 4, alusiva aos quadriláteros.

Relativamente ao triângulo escaleno, não chegaram a explicar, talvez porque tal não era pedido explicitamente na ficha, a razão de o mesmo não ter eixos de simetria. No entanto, existe evidência de o Ricardo ter-se apropriado da compreensão dessa razão. Enquanto colocava o espelho no triângulo escaleno desenhado na sua ficha, o Ricardo afirmava “Três lados diferentes” e já com o espelho fora do triângulo, concluiu, com um tom peremptório: "São todos diferentes, este." Dito isto, começou logo a escrever a conclusão relativa a não ter eixos de simetria. Ou seja, estabeleceu a relação entre o facto de o triângulo não ter eixos e os seus lados serem diferentes. Enquanto colocava o espelho, falava como que para si próprio, sobre qual a característica do triângulo, construído por si, que determinava a inexistência de eixos. Quando retirou o espelho, o que disse com um tom conclusivo não foi o ter ou não eixos mas sim a confirmação de que aquele triângulo que ele tinha desenhado era de facto escaleno: a verificação obtida com o espelho de que aquele triângulo não tinha eixos dava-lhe a confirmação de que os seus lados eram todos diferentes e que portanto a sua construção pretendida de um triângulo escaleno estava correcta, pois se tivesse pelo menos um eixo de simetria, tal implicaria que pelo menos teria de ter dois lados iguais. Utilizou o espelho inicialmente para descobrir se o triângulo escaleno tem ou não eixos mas, de certo modo, foi-se apropriando da compreensão da inexistência de eixos à medida que ia verificando a mesma, e portanto o espelho acabou por servir mais de meio de comprovação de correcção de construção do que propriamente de meio de descoberta.

O número de eixos dos triângulos desenhados foi explicitado oralmente no grupo. Primeiro, foi o Ricardo que indicou à Maria que "este tem um eixo de simetria", apontando para o triângulo isósceles desenhado pela Maria, na ficha desta, e "este não tem nenhum", apontando para o escaleno, logo a seguir, na mesma ficha, quando a Maria, após as construções, se entreolhou acerca das conclusões a escrever requeridas no enunciado da questão 3. O eixo de simetria do triângulo isósceles foi determinado por visualização, sem recurso ao espelho. Depois, foi a vez da Maria dizer em voz bem audível e compassada, de forma a acompanhar o que ia escrevendo na ficha "Não tem eixos de simetria". Como esta o questionou "Fizeste bem, não fizeste?", logo a seguir, o Ricardo confirmou veementemente, debruçando-se um pouco sobre a Maria "O escaleno não tem!" ao que esta, rapidamente, replicou "Sei!". Afirmado o seu conhecimento, a Maria, virando-se para a Sara, disse-lhe, de forma bem explícita, com voz pausada e fazendo gestos com as mãos a acompanhar "O escaleno não tem eixos de simetria. O isósceles tem". Bastou que o Ricardo afirmasse esta propriedade para a mesma ser aceite sem qualquer tipo de comprovação. A sua afirmação ainda foi sujeita a uma certa réstia de dúvida expressa em "Fizeste bem, não fizeste?" que foi logo dissipada perante a veemência manifestada pelo Ricardo. Mais nenhum elemento do grupo sentiu necessidade de pegar no espelho para confirmar. Bastou a palavra do colega. A Maria faz um evidente uso de ventriloquismo quando se apropria dessa mesma palavra e a torna sua no modo confiante como tenta assumir uma identidade de participação e a transmite à Sara. A Maria tenta assim inverter o seu papel habitual no grupo, sacudindo a sua subalternidade quer em relação ao Ricardo, dizendo que sabe e que ele não precisa pois de lho reafirmar, quer em relação à Sara, tomando um papel de explicadora, de alguém que ensina o que esta deve escrever. Na ficha do Bernardo, relativo à questão 3, surge a construção de um triângulo isósceles e de um triângulo escaleno, com as respectivas identificações por baixo bem como as seguintes frases "O triângulo isósceles só tem um eixo de simetria" e "O triângulo escaleno não tem nenhum eixo de simetria".

O outro episódio revelador da apropriação do Ricardo da compreensão da razão de os polígonos terem, ou não, eixos de simetria, é o facto de me ter chamado para me questionar, assim que terminou a questão 3, se, na questão 4, "os quadriláteros têm de ter os lados iguais", usando um tom de voz com um misto de afirmativo e de interrogativo, ao que eu lhe respondi que não era preciso ter os lados todos iguais, pois o quadrilátero regular, o quadrado, já tinha sido feito antes na folha, e que poderiam fazer todos os quadriláteros que quisessem. O tom afirmativo deve-se à sua interpretação do enunciado da questão 4—“Descubram, para cada um deles, quantos eixos de simetria há”—que o levou a considerar que deveria contemplar apenas os quadriláteros que tivessem eixos e portanto lados iguais. O tom interrogativo tem a ver com o facto de, na alínea anterior, ter sido pedido um caso de triângulo com nenhum eixo de simetria. Ou seja, a sua dúvida reside na interpretação do enunciado da tarefa, revelando até, de um modo implícito, a compreensão matemática do Ricardo relativamente à justificação das conclusões escritas.

Os quadriláteros construídos foram partilhados no grupo, de um modo subtil. Na ficha do Bernardo, surgem dois quadriláteros sem eixos de simetria (figura 20, p. 544) com a seguinte frase por baixo: “Nenhum dos muitos equiláteros, não têm eixo de simetria, pois não são regulares”. O termo “equiláteros” está na vez de “quadriláteros”: presumo que o Bernardo, na frente do Ricardo, ao tentar ler o que este escrevera, e dada a caligrafia pouco legível do Ricardo, percebeu mal, escrevendo “equiláteros” em vez de “quadriláteros”. Portanto, o que o Ricardo deveria ter entendido da minha resposta é que nesta questão iria construir quadriláteros sem eixos de simetria. Só neste grupo é que a construção dos quadriláteros correspondeu a nenhum deles ter eixos; todos os restante grupos da turma construíram quadriláteros em que, pelo menos, um deles apresentava eixos de simetria.

E a justificação apresentada para a ausência de eixos—“pois não são regulares”—evidencia a compreensão de que só existe eixo de simetria relativamente a lados e ângulos iguais. Aliás, os lados menores do segundo quadrilátero, na ficha do Bernardo, medem ambos 1 cm mas ao fazerem diferentes ângulos com os lados adjacentes, estes têm diferentes comprimentos, o que faz com que a figura não tenha qualquer eixo de simetria, apesar de parecer, a olho nu, um papagaio. E esta compreensão foi suficiente para determinar a ausência de eixos, sem o recurso à experimentação com o espelho.

Claro que é uma compreensão que está no início do seu desenvolvimento pois ao associarem a regularidade de um polígono à condição necessária para existência de eixos, estão a excluir, à partida, todos os polígonos que, não sendo regulares, apresentam pares de lados com comprimentos iguais e fazendo ângulos iguais com os lados adjacentes, como é o caso do triângulo isósceles que, não sendo regular, tem um eixo de simetria. Mas como vimos já anteriormente, os alunos tratam as questões em separado, e na questão 4, não fizeram qualquer ligação com o estipulado na questão anterior. Aliás, essa ligação implicaria uma generalização para os polígonos em geral, e não sabemos se nesta questão os alunos estão agarrados unicamente à regularidade dos quadriláteros, em particular, ou se estão a considerar todos os polígonos. De qualquer modo, a resposta evidencia a exclusão de todos os outros quadriláteros não regulares como hipóteses de figuras com eixos, ao afirmar que nenhum dos muitos quadriláteros não regulares têm eixos de simetria.

Por conseguinte, nas últimas três questões, apenas a questão 4 suscitou a escrita de uma justificação, a qual apresenta lacunas ao nível da explicitação do que faz um quadrilátero ter ou não eixos de simetria. Apesar de os alunos não terem efectuado uma demonstração em nenhuma destas últimas três questões, o Ricardo evidencia, de várias maneiras e de forma implícita, uma compreensão da razão de uma figura ter ou não eixos de simetria.

Vemos ainda que não existe no trabalho dos alunos do grupo-alvo qualquer demonstração explicativa geral que abarque todo o trabalho desenvolvido relativamente a quando é que uma dada figura tem eixos de simetria e a razão do respectivo número. A tarefa não o pedia explicitamente nem as professoras o solicitaram, e os alunos também não sentiram necessidade de o fazer. No entanto, vemos que essa compreensão existe no Ricardo mas como não o explicita, tal não chega a ser objecto de análise e de reflexão no grupo.

Discussão da Tarefa

Tal como referido atrás, a tarefa foi discutida no seio da turma na primeira aula de Matemática do 3º Período, já que a aula em que tinha sido explorada a tarefa tinha sido a penúltima do 2º Período, sem que tivesse existido discussão no final e, devido a um corta-mato marcado para a última aula de Matemática do 2º Período, esta acabou por não se concretizar. A professora, depois de fazer um balanço do trabalho da turma, começou por discutir com os alunos o significado de polígonos regulares.

Em toda a discussão da tarefa, a professora direccionou o seu discurso no sentido de dar uma maior ênfase à explicação das propriedades matemáticas encontradas. Na segunda questão, indagou um aluno, em particular, sobre a relação encontrada, o qual verbalizou que o número de lados dos polígonos regulares é sempre igual ao número de eixos. Em seguida, leu a questão 2.c) e deu sinal ao Bernardo para que lesse a resposta do grupo já que o mesmo tinha levantado o braço para o fazer. À leitura da resposta a 2.c)[66] feita pelo Bernardo, a professora interpelou a turma e tentou precisar com o Bernardo o significado dessa mesma resposta: "Portanto... Embora o número fosse igual, não é?, a maneira como se chega àquele mesmo número era de maneira diferente. Era isso que estás a dizer? (*o Bernardo confirmou que sim*) Era? Então, vamos lá ver... Porquê?". Após algumas justificações avançadas por alguns alunos, entre elas a do Ricardo que referiu as diferentes posições dos lados dos polígonos, a professora pediu ao Ricardo que fosse desenhar no quadro esquemas ilustrativos de modo a tornar a ideia mais compreensível para toda a turma. O Ricardo desenhou um triângulo como exemplo

593

[66] Pode ler-se a resposta na p. 587.

dos polígonos com número de lados ímpar e um quadrado como exemplo dos polígonos com número de lados par. A professora chamou a atenção da turma para o estatuto de exemplo daqueles dois polígonos, acrescentando que pelo facto de o Ricardo ter o registo, tinha verificado que os eixos tinham o mesmo comportamento em todos os polígonos com número de vértices ímpar e em todos os polígonos com número par. O Ricardo explicou: "Stora, acho que é por causa da posição dos vértices e dos lados, aqui o vértice tá [sic] oposto ao lado (*apontando para o triângulo*). Aqui não, o lado está oposto a lado e o vértice oposto a vértice (*apontando para o quadrado*)". O Ricardo explicou a razão de os eixos passarem de diferente modo, de acordo com a forma como se encontram dispostos vértices e lados em cada um dos diferentes tipos de polígonos regulares, os ímpares e os pares. Nesta altura, ainda não tinha traçado os eixos e foi a professora que o incentivou a fazê-lo. Assim, enquanto o Ricardo traçava os eixos, a professora pegou na explicação proferida pelo mesmo mas explicitando agora a sua relação com o modo específico de passar dos eixos:

> P- Ou seja, quando são ímpares, quando o número é ímpar, o eixo, os eixos têm, estão sempre na mesma posição, não é? Portanto, como o próprio nome indica, não faz par, dois a dois, não é? Porque ser par é fazer grupos de dois a dois, e aqui, ali não faz, não é? Portanto, sendo assim, os eixos estão sempre na mesma posição, vão unir sempre um vértice a um lado. Quando são pares, como fazem pares de lados e pares de vértices, unindo dois lados, dois deles, e os vértices, então, outros dois, tá [sic] bem? Tá [sic]?

Com a expressão "mesma posição", a professora pretende referir-se ao modo de passar dos eixos, tendo explicitado o facto de nos polígonos com número de lados ímpar, os eixos unirem "sempre um vértice a um lado" e nos polígonos com número de lados par, os eixos unirem pares de lados e pares de vértices. Esta sua intervenção complementa portanto a do Ricardo que, anteriormente, já tinha referido como se encontravam opostos uns aos outros em cada um dos casos considerados, ímpar e par. O que não chegou a ser dissecado na turma foi a parte da resposta do grupo que foca precisamente a demonstração da conjectura, quando o grupo regista quer para os ímpares quer para os pares "tendo por isso (…)".

O foco na demonstração foi feito a seguir, a propósito de uma questão colocada por um elemento do Grupo D, questão esta imperceptível no registo vídeo. A professora interpelou-o então a ler a resposta à mesma questão. Pegando na ficha, o aluno leu a respectiva resposta escrita do grupo:

> Nos polígonos que têm nº ímpar de lados, os eixos de simetria passam pelo vertice [sic] ao lado oposto; por isso vai ter tantos vertices [sic] como nr [sic] de lados. Nos nr [sic] pares os vertices [sic] unem-se ao [sic] vertices [sic], e os lados aos lados.

Vejamos agora o esclarecimento dado pela professora:

> P- Por isso... falta essa parte que disseste dessa última, não é? Não é? (*dirigiu-se ao quadro para se apoiar nos exemplos construídos pelo Ricardo*) Portanto, vocês tinham escrito parte, não foi? Portanto, tinham visto, tinham visto a posição dos eixos. (*envolvendo agora toda a turma e dirigindo-se directamente à turma, solicita a sua atenção*) (...) Porque aquele grupo que ele agora acabou por ler tem a mesma observação que o Ricardo estava aqui a dizer, não é? E diz, aqui diz: por isso, não é? eles estão todos nesta posição, o número de eixos é igual ao número de lados. Aqui... mas já não concluíste, não é? Portanto, aqui, como uns vai [sic] de eixo a eixo e outros de lado a lado, há metade, não é? metade dos eixos unem lados e outra metade dos eixos unem vértices, não é? (*ouve-se o som do giz a riscar o quadro o que indicia que a professora faz um registo escrito a acompanhar a sua intervenção oral*) tá [sic] bem? Faltava a formalização da parte final. Tá [sic]? Já estás situado agora? Tá [sic]? (*dirigindo-se ao aluno*) mais alguma questão (*dirigindo-se à turma*).

A professora explicitou que o grupo tinha verificado por onde passavam os eixos nos ímpares e nos pares e que tinham explicado a razão de ser o mesmo número para os ímpares mas que não o tinham feito para os pares—"Faltava a formalização da parte final." Provavelmente a professora não ouviu bem a resposta, entendendo que o grupo estaria a justificar que eram tantos eixos como o número de lados, pois foi isso que afirmou ao parafrasear os alunos: “E diz, (...) por isso, (...) o número de eixos é igual ao número de lados”. E é de crer que deveria ser essa a justificação que os alunos estariam a pensar; deveria ter sido por lapso que escreveram “tantos vertices [sic] como nr [sic] de lados”. Pois embora esta relação de igualdade seja verdadeira, não decorre do modo como passam os eixos de simetria nos polígonos.

Por conseguinte, a professora negociou com os alunos que nesta questão não se pretendia unicamente que se descrevesse por onde passavam os eixos mas que se relacionasse esse facto com a relação da igualdade do número de eixos e o número de lados dos polígonos regulares. Foi a questão colocada pelo aluno do Grupo D que acabou por provocar uma maior explicitação, por parte da professora, da demonstração propriamente dita, relativamente a esta questão, de um modo informal e narrativo. Na primeira parte, no que respeita aos ‘ímpares’, a professora explicita o que lhe pareceu ouvir dos alunos e na segunda parte, no que respeita aos ‘pares’, a professora acrescenta o que faltava ao grupo—“metade dos eixos unem lados e outra metade dos eixos unem vértices”—partindo sempre da observação do modo diferente de como se posicionam os eixos num e noutro caso, embora, por lapso, tenha referido que nos ‘pares’, os eixos vão de “eixo a eixo” em vez de “vértice a vértice”. Percebe-se, igualmente, pela utilização que a professora faz dos termos como “aqui” e “nesta” que os exemplos desenhados no quadro estão no momento a funcionar como suporte da sua explicação e explicitação.

Na questão relativa aos triângulos, a professora tentou que os alunos explicitassem a razão do número de eixos de simetria de acordo com o tipo de triângulo considerado. Conduzindo o discurso em forma de questionamento, primeiro em termos gerais, a professora, após os alunos terem indicado o número de eixos de simetria do triângulo isósceles e do triângulo escaleno, explicitou que o eixo de simetria está associado aos lados iguais e, consequentemente, aos ângulos iguais. Esta conclusão decorria de um encadeamento de questões e respectivas respostas dos alunos. Depois, a professora indagou: "Porquê?". E para melhor apoiar os alunos nesta fundamentação, a professora recorreu ao triângulo equilátero, desenhado no quadro como ilustração dos polígonos com número de lados ímpar. Primeiro, referiu que os três eixos poderiam ser comprovados, usando o espelho, ou a dobragem, e depois questionou os alunos sobre o que acontece ao ângulo do triângulo, quando o eixo o atravessa ao unir o vértice ao lado oposto, e o que acontece aos lados quando atravessados pelos eixos. Assim, pegando nas respostas sucintas dos alunos, a professora explicitou mais uma vez que o eixo de simetria divide o ângulo em duas partes iguais e que também divide o lado oposto em duas partes iguais. Por outro lado, os lados adjacentes ao lado cortado ao meio pelo eixo têm de ser, forçosamente, iguais, e também os ângulos, formados por esse lado e seus lados adjacentes, têm de ser iguais. Embora este aspecto não tenha sido referido pela professora neste momento, foi explicitado, a seguir, quando questionou a turma sobre a razão de o triângulo escaleno não ter eixos de simetria. Vejamos o respectivo extracto:

P- Então, contem lá...
Aluno – (*imperceptível*)
P- Porquê? Aqui, aqui é escaleno. Tá [sic] ali que é zero.
Alunos- (*imperceptível*)
P- Ali não há nenhum, pois não? Vá…
Aluno- (*imperceptível*)
P- Porquê?
R- (*com uma voz pouco audível*) Não há nenhum lado… Não há nenhum ângulo igual.
P- (*olha na direcção do Ricardo*) Porquê? Vá lá...
Alunos - (*imperceptível*)
S- Ó Stora, não tou [sic] a perceber a pergunta. O que é que a stora está a querer dizer?
P- Porque é que aqui há só um, não é? Já vimos que este, dois lados iguais, dois ângulos iguais, não é? E este é diferente, não é? Este tem três lados diferentes, os ângulos são todos diferentes. Porque é que aqui nós conseguimos um eixo mas aqui não conseguimos nenhum? Porquê?
S- (*com uma voz bem audível e revelando segurança e convicção)* Ó stora, porque os lados são todos diferentes. Porque os lados são todos

diferentes.
P- E, portanto, não conseguimos sobrepor, não é? Não é verdade? Com o espelho, ele dá a imagem de um lado no outro, mas como o outro é de tamanho diferente, a imagem…
Aluno- Não dá.
P- Não dá, não dá o mesmo lado, não é? E se fôssemos sobrepor e dobrar, também não conseguíamos porque o lado era diferente. Tá [sic] bem? Tá [sic] entendido? Tá [sic]? Perceberam a razão porque é que aqui não conseguimos encontrar nenhum? Tá [sic]? E aquele é um só, porque só há um par, não é? Só há um par de lados que é igual, não é? Só há este par de lados que é igual e portanto, eu posso, ao sobrepor, montar este em cima deste, ou através do espelho, colocar aqui e visualizar a imagem deste no sítio daquele, tá [sic] bem? Entendido? Aqui tendo três, eu posso fazer quantos pares?
S- Três.
P- Três. (*o Bernardo olha para a Sara e ambos sorriem ligeiramente*) Este com este, este com este e este com este. Tá [sic]? Percebido?
S- Sim.

A indagação do porquê é uma constante da prática profissional da professora. Está intimamente ligada à própria demonstração se a virmos na sua função explicativa e não meramente verificativa. Por outro lado, este tipo de indagação poderá suscitar nos alunos ganhos ao nível da sua compreensão matemática, de forma a irem para além do mero enunciado de propriedades matemáticas—como por exemplo, o afirmar simplesmente que o triângulo equilátero tem três eixos de simetria, o isósceles tem um eixo e o escaleno não tem nenhum eixo de simetria—e entrarem no domínio da compreensão das razões que fundamentam essas mesmas propriedades. Esta fundamentação não era pedida explicitamente na ficha de trabalho e talvez por isso, apenas dois grupos (Grupo C e grupo-alvo), tentaram justificar as suas conclusões por escrito. Dado que temos evidência empírica de que os alunos tendem a estar muito agarrados ao enunciado das tarefas, circunscrevendo-se unicamente ao que é pedido para fazer, poderemos interpretar a justificação avançada por aqueles dois grupos, por sua própria iniciativa, como a apropriação da sua parte de uma norma matemática vivida na turma, nos momentos de partilha das resoluções das tarefas. Esta norma consiste na valorização da justificação de tudo o que é afirmado matematicamente e decorre precisamente do facto de a professora não se limitar a ouvir respostas certas ou erradas, o que é ou não é, nem ficar satisfeita com esse nível de discurso matemático na sala de aula: ela indaga pelo porquê, passando portanto a mensagem de que é preciso avançar um pouco mais, para lá da formulação das propriedades matemáticas; é necessário compreender a razão por que ocorrem essas mesmas propriedades; é necessário explicitar essa razão que se compreendeu. No respeitante a esta questão concreta, relativa ao triângulos, apenas o Grupo C redigiu uma justificação para o respectivo número de eixos. Foi, portanto, de primordial importância que a professora tivesse dedicado tempo e atenção dirigida intencionalmente para a actividade de justificar, actividade esta que pode conduzir à demonstração.

Se compararmos o discurso dos alunos e o da professora, vemos que o dos alunos é mais sucinto e ocupa um menor período de tempo do que o da professora, no que respeita a estes tempos colectivos da aula. É a professora que desenvolve mais a fundamentação do que se encontra em discussão explicitando as ideias em causa.

A justificação apresentada pelo Ricardo é semelhante à da Sara, baseada no facto de o triângulo escaleno ter os lados todos diferentes. O Ricardo referiu-se aos lados mas não terminou o raciocínio—“Não há nenhum lado...” (linha 8)—passando logo para os ângulos—“Não há nenhum ângulo igual” (linhas 8 e 9). Presume-se que a primeira frase terminaria do mesmo modo: não há nenhum lado igual. Por conseguinte, o Ricardo justificou a ausência de eixos no triângulo escaleno com a ausência de igualdade de lados e ângulos, o que corresponde à compreensão que já tinha evidenciado antes, na outra aula, durante a exploração da tarefa no pequeno grupo. A professora, face à justificação do Ricardo, proferida de forma pouco audível, continuou a questionar “porquê”, mostrando assim que a sua resposta não a satisfazia, talvez por não estabelecer a ponte, de modo explícito, com a noção de simetria. A resposta da Sara, proferida com um tom bastante convincente, embora idêntica à do Ricardo, foi agora aceite e validada pela professora que implicitamente a aceitou, dando-lhe continuidade de forma a complementar essa justificação com a relação com a simetria. Esta aceitação poder-se-ia dever ao facto de a Sara ter sido bastante afirmativa, ao contrário do Ricardo que falou de forma incipiente, o que poderia levar a não ser bem ouvido, e portanto ignorado, apesar do olhar da professora, na sua direcção denotar que considerou a resposta do aluno. Por outro lado, é natural que no início, altura em que o Ricardo apresentou a sua justificação, a professora quisesse dar mais tempo e espaço aos alunos para que estes conseguissem uma maior explicitação da razão questionada, e que, momentos depois, face à resposta da Sara, considerasse que os alunos se situariam ao nível das características do triângulo e que teria que ser ela a complementar esta resposta, fazendo uma ligação mais explícita entre essas características e os eixos de simetria.

A professora usou dois recursos empíricos—a dobragem e o espelho—para fundamentar a relação entre o número de eixos de simetria e os diversos tipos de triângulos. No entanto, fê-lo numa base teórica de compreensão e não através da manipulação propriamente dita. Os espelhos nesta aula já não se encontravam disponíveis na sala de aula mas como os alunos tinham explorado a tarefa com o recurso a este material, poderiam facilmente visualizar a reflexão proporcionada pelo mesmo e acompanhar o raciocínio da professora. Evidência disto encontramos no modo como um dos alunos da turma completa a frase iniciada pela professora: “Não dá.” (linha 24). A referência à dobragem também é suportada unicamente pela imaginação e compreensão de que só se consegue uma sobreposição de partes de uma dada figura por dobragem se as mesmas forem iguais. Só a propósito da questão 4 da tarefa é que a professora solicita a um dos alunos que construa em papel o quadrilátero, o recorte e faça as dobragens correspondentes à localização dos eixos de simetria.

Vemos portanto que, embora anteriormente não se tenha explicitado cabalmente a razão de os eixos de simetria estarem relacionados com os lados e ângulos iguais das figuras, nesta questão, essa razão foi bastante dissecada. A professora, com o suporte dos três tipos de triângulos desenhados no quadro[67], referiu-se aos pares de lados iguais, apontando directamente para os mesmos no triângulo equilátero: "Este com este, este com este e este com este" (linhas 35 e 36). É curioso observar o modo como o Bernardo olhou para a Sara quando esta respondeu "Três" (linha 34) e foi imediatamente secundada pela professora com a mesma resposta, em sinal de validação—"Três" (linha 35). O seu olhar e sorriso revelam apreço como se o Bernardo lhe dissesse: "Sim, senhor, muito espertinha, estás a perceber bem disto!". E o sorriso da Sara mostra o reconhecimento da mensagem do colega. Existiu aqui comunicação e entendimento, embora não verbal.

Para a questão 4, os alunos começaram por nomear diferentes quadriláteros, a pedido da professora. Os alunos que foram ao quadro desenhar os quadriláteros feitos no seu grupo e respectivos eixos de simetria, fizeram-no por sua própria iniciativa. Primeiro foi ao quadro um dos alunos do Grupo D desenhar o rectângulo e os seus eixos de simetria, e a professora questionou a turma sobre se o rectângulo também teria eixos a unir os vértices, como sucedia no quadrado, ali desenhado no quadro (pelo Ricardo, a propósito da questão 2. c)), e face à resposta negativa dos alunos, questionou porquê. Alunos e professora, em conjunto, apoiados na experiência desenvolvida com o espelho

601

[67] Ouve-se no registo vídeo o som do giz no quadro e subentende-se pelo extracto que teriam sido construídos pela professora os triângulos isósceles e escaleno no quadro, já que o equilátero já tinha sido desenhado pelo Ricardo.

na aula de exploração, explicitaram que o espelho, ao unir os vértices opostos, dava uma imagem diferente do rectângulo inicial.

Depois foi o Ricardo desenhar os quadriláteros que constavam na sua ficha de trabalho e que, no caso de serem os mesmos dos construídos pelo Bernardo (figura 20), não tinham eixos de simetria (a câmara estava virada para o grupo e não tenho registos do que foi feito no quadro). Constataram que o primeiro quadrilátero não tinha eixos e no que se refere ao segundo quadrilátero a construir, a professora sugeriu a construção do losango—"Falaram do losango há pouco, não foi?"—talvez por lhe parecer que o segundo quadrilátero seria o losango, ao olhar rapidamente para a ficha do Ricardo, que deveria estar na mão do mesmo. A professora questionou-o sobre a existência de eixos no losango. Apesar de não ser perceptível no registo vídeo, o Ricardo deveria ter respondido que não tinha eixos pois a professora replicou "Não existe? Vamos lá dobrar". A professora solicitou, portanto, a todos os alunos da turma que fossem verificar a existência de eixos de simetria através da construção, recorte e dobragem do losango. Entretanto, o Bernardo, ainda antes de começar a desenhar o losango, contestou o colega: "Dá, stora!".

Um aluno da turma sugeriu ao Ricardo que fizesse a diagonal, talvez por ter visto que a mesma coincidia com o eixo de simetria. E o Bernardo falou, então, directamente para o Ricardo: "Não, mas aquele também dá. Silva, mete assim. (*desenha no ar com os dedos*) Mete. Também dá". O Bernardo dirigiu-se ao colega de forma implícita mas subentende-se que quer transmitir-lhe a localização de um segundo eixo de simetria do losango, embora o gesto que faz com os dedos seja pouco revelador dessa mesma localização. A relutância inicial do Ricardo em admitir os eixos do losango poderá dever-se ao facto de ele se encontrar agarrado à sua construção (o segundo quadrilátero da figura 20, que não tem eixos.) No entanto, face à construção do losango, o Ricardo depressa passou da posição de afirmar que não tem eixos para a posição de considerar que o losango tem quatro eixos de simetria, tal como o quadrado. No registo vídeo, não existe evidência deste facto. Mas nas minhas notas de campo redigidas logo após a aula, pode ler-se "Houve dúvidas com os eixos do losango (o Ricardo achava que eram quatro como o quadrado)". Portanto, apesar de não ter verbalizado, o Ricardo deveria ter traçado no quadro quatro eixos no losango, o que provocou uma discussão generalizada na turma. Falavam vários alunos ao mesmo tempo, entre si, e entre os vários grupos e embora o conteúdo do que dizem não seja perfeitamente perceptível no registo vídeo, dá a ideia de que é alvo de discussão o facto de o losango ter ou não eixos a atravessar os seus lados; um aluno chegou a referir "Então, faz; põe o espelho" ao que outro aluno respondeu que não podia pois não havia ali espelho.

A professora deu algum tempo para a construção da figura. Efectivamente, a experimentação corresponde à primeira fase do trabalho matemático, em particular, no domínio da geometria, e é preciso dar tempo para a sua concretização. Neste caso, a experimentação, por dobragem, daria a resposta empírica à questão sobre a determinação dos eixos de simetria do losango, tanto mais que esta figura tinha sido construída apenas por um grupo, na aula da exploração, o Grupo E. Apesar do tempo concedido para este trabalho, o recorte das figuras construídas não chegou a ser feito por todos os alunos, nomeadamente os do grupo-alvo que se ficaram apenas pelo traçado da figura. Um aluno da turma comentou "Estou pouco crente". Talvez fosse o Ricardo, já que a voz provinha da zona do quadro. A professora respondeu-lhe: "Estás pouco crente? Vamos lá verificar. Não há nada como experimentar". Provavelmente esta afirmação de dúvida reportava-se ao facto de não existirem eixos a unir os lados paralelos do losango.

Depois, a professora, dirigindo-se à turma, primeiro, situou o trabalho desenvolvido com as actividades concretizadas pelos aluno, e em seguida, sistematizou as conclusões relativas ao que se encontrava em discussão no momento:

> P- Então, baseado até no trabalho que nós temos vindo aqui a fazer, vamos lá recapitular o que é que a gente tem vindo a fazer na Matemática... Todas as actividades que têm sido exploradas aqui têm sido sempre com base no pensar acerca, no experimentar, e no demonstrar para termos a certeza se aquilo é válido para todos, ou só para alguns casos, não é? tem sido a nossa tónica aqui na Matemática, que aliás é uma tónica do 9º ano, que é aquele salto que se pretende que se comece a dar quando vão para o Secundário. (*pega no losango construído por um aluno do Grupo D*) Então, temos aqui o exemplo. Estava a dizer "Vamos experimentar". O [*nome do aluno*] desenhou um polígono que neste caso estávamos a falar que fez-se a dobragem do tal eixo. (*levanta a figura e vai falando enquanto vai dobrando*) E dá vértice-vértice, também dá. Vamos aqui aos lados, e quando se faz a dobragem meio com meio, o que é que acontece? Este tem aqui uma ponta que não bate com aquela, o outro a mesma coisa. E se formos para o outro lado, precisamente a mesma coisa. Tá [sic] bem? Entendido? Quer dizer, então, que continua a ter dois, só que estão numa posição diferente da do rectângulo, não é? A do rectângulo, vai unir os dois lados paralelos, e no caso do losango, vai unir os vértices opostos, [tá] bem? E isto por causa da posição dos lados. Entendido? [Tá]?

Assim, embora o termo "demonstrar" não tenha sido referido na aula de exploração da tarefa, foi neste momento utilizado pela professora, de um modo genérico, como sendo um processo subjacente às actividades desenvolvidas nas aulas de Matemática, processo este conferidor da certeza validadora das propriedades matemáticas. A professora associa à demonstração a generalidade quando refere "para termos a certeza se aquilo é válido para *todos*". A expressão que completa esta frase— "ou só para alguns casos"—poderá querer significar a demonstração por contra-exemplo em que se prova que a propriedade não é válida para um caso, e portanto, é válida apenas para alguns exemplos, alguns casos, o que conduz à reformulação da conjectura e, consequentemente, à impossibilidade de a estabelecer como teorema. Ou poderá significar uma situação em que o universo a que a conjectura diz respeito se limita a "alguns casos" de um outro universo mais abrangente que contenha o anterior, já que uma propriedade só fica provada se se estabelecer a sua veracidade para todos os casos do universo em causa. A professora defendeu, ainda, perante os alunos, uma perspectivação da integração curricular da demonstração no 9º ano do ensino básico, referindo, implicitamente, que neste ano se encontravam a trabalhar um assunto que é abordado explicitamente no ensino secundário: "aquele salto que se pretende que se comece a dar quando vão para o Secundário". Fá-lo, efectivamente, de modo implícito, pois a alusão ao salto aquando da entrada no ensino secundário vem na sequência da listagem dos vários processos usados nas actividades de Matemática, em que a demonstração era um deles. No entanto, neste momento do seu discurso, a professora já estaria, com certeza, a pensar unicamente na demonstração, pois é no secundário que, usualmente, se dá um enfoque explícito à demonstração, colocando os alunos perante várias situações, até nos próprios testes, em que se lhes pede para provarem esta ou aquela propriedade matemática. Portanto, o que, em última análise, a professora estaria a considerar é que, desenvolvendo já no 9º ano um trabalho em torno do processo de demonstrar, os alunos estavam já a iniciar um trabalho mais exigente que a professora exprimiu como "aquele salto": efectivamente, a professora assumiu a tónica do 9º ano como sendo 'aquele salto' tradicionalmente reservado ao ensino secundário.

Por fim, a professora sistematizou o que estava ali em discussão, comprovando por recurso à dobragem do losango construído pelo aluno, a existência dos dois eixos de simetria a unir os seus vértices e a inexistência de eixos atravessando os lados. Estabeleceu ainda a comparação com o caso do rectângulo que, embora tendo o mesmo número de eixos, tem-nos em diferentes localizações. A professora fundamentou essa diferença numa base teórica: "E isto por causa da posição dos lados". Tanto o rectângulo como o losango têm os lados paralelos mas enquanto o rectângulo apresenta os lados paralelos precisamente lado a lado, desde o início até ao fim, já que os seus ângulos são rectos, os lados paralelos do losango não se iniciam no mesmo ponto do plano, estando um mais acima do que o outro, já que os seus ângulos não são rectos, e por essa razão, ao serem dobrados os lados pelo meio, o losango fica com “uma ponta que não bate com aquela” para um lado, e para o outro “a mesma coisa”.

Relativamente à questão 5, a Sara foi uma das alunas que justificou a infinidade dos eixos de simetria do círculo, dizendo “Porque é redondo”. Os alunos (entre eles, a Sara) responderam ainda que os eixos passavam pelo centro da circunferência, à pergunta feita nesse sentido pela professora. Esta, depois, formulou uma outra questão: “E passando pelo centro da circunferência, conseguimos vários eixos, um número infinito de eixos de simetria que coincide ou que passa por cima do quê? da circunferência também ou do círculo? por cima do quê?”. Alguns alunos responderam “diâmetro” e a professora sistematizou que os diâmetros eram igualmente infinitos. Poderá ser interessante analisar a forma como a professora reformulou o termo “coincide” para a expressão “passa por cima”, passando, assim, a mensagem implícita aos seus alunos de que os eixos num círculo, embora possam ser traçados de forma limitada, desde um ponto da circunferência até ao outro ponto diametralmente oposto, coincidindo, assim, na sua aparência de traçado, com os diâmetros, eles são, conceptualmente, rectas, sem início nem fim, passando, portanto, por cima dos diâmetros, mas não confinados aos mesmos. A forma de professora e alunos se referirem à infinidade dos eixos de simetria (ou dos diâmetros) foi usando a expressão “número infinito”, o que entra em consonância com a Metáfora Básica do Infinito para o caso especial da enumeração, em que o infinito é tratado como um número, apesar de não o ser, na sua função de enumeração: o infinito aqui considerado é único e maior do que todos os outros números naturais finitos, funcionando como a extremidade da sequência dos números naturais (Lakoff e Núñez, 2000).

Em toda esta parte da aula em que se fez a discussão da tarefa, a Sara teve um papel activo no seio da turma, intervindo bastantes vezes em voz alta, em resposta às questões colocadas pela professora, ou até para colocar, ela própria, alguma dúvida. Esta atitude manteve-se até ao final desta fase da aula, tendo existido evidência disso também na parte em que se partilhou a resolução da questão 5. Este elevado nível de participação contrasta com o papel mais apagado que a Sara tomou em pequeno grupo, nos momentos em que a professora contactou directamente com o grupo. Por outro lado, o Ricardo, apesar de ter tido a iniciativa por duas vezes de ir ao quadro apresentar o trabalho do grupo, tem tendência a ficar mais calado em situação de discussão na turma, o que poderá revelar alguma timidez, que no seio do pequeno grupo já não se faz sentir. A Maria que, em pequeno grupo, tem um papel apagado mas que, mesmo assim, ainda se faz ouvir relativamente a algumas questões matemáticas, usando essencialmente o processo de ventriloquismo, em grupo-turma, não fez qualquer intervenção em voz alta. O Bernardo assume na turma um papel semelhante ao que toma em pequeno grupo nos momentos em que a professora interpela o grupo, revelando algum nível de participação: como vimos, tomou a iniciativa de ler a resposta a 2. c) e contestou e orientou o Ricardo a propósito dos eixos de simetria do losango.

Em síntese, dois dos grupos da turma conseguiram demonstrar a conjectura formulada relativamente aos polígonos regulares, embora não tivessem tido a consciência de o fazer, nem existiu conversa explícita em torno do termo *demonstração* na aula em que foi explorada a tarefa. Foi na aula posterior em que a tarefa foi discutida que a professora usou o termo de um modo genérico, associando este processo às actividades desenvolvidas naquele ano nas aulas de Matemática e não especificamente ao trabalho desenvolvido com esta tarefa concreta. A própria conjectura não é assumida pelos mesmos como tal, nem sentem que, pelo facto de conseguirem explicar uma dada relação, estão a provar a veracidade da conjectura. À partida, já estão convictos acerca da sua veracidade e pelo facto de não duvidarem da mesma, não sentem necessidade de a provar. A convicção advém da sustentação feita pela particularização, e portanto do facto de a conjectura resistir aos testes empíricos, e também da validação feita pela *professora.* Torna-se, pois, de fundamental importância toda a negociação que é feita pela *professora* em torno da valorização da demonstração e o questionamento que tem na sua base a orientação para um raciocínio conducente à demonstração. Um dos grupos, o Grupo F, utilizou argumentos narrativos com alguma expressão simbólica. O grupo-alvo apresentou uma demonstração narrativa com características informais. Neste grupo, a demonstração foi apropriada e elaborada de forma cabal apenas por um dos elementos do grupo, o Ricardo, tendo os restantes utilizado o processo de ventriloquismo para redigir a mesma. No processo de demonstrar, têm lugar generalizações que interagem com particularizações, já que a generalização requerida para os polígonos regulares com número de lados par, é feita com o suporte de um exemplo generalizável (o quadrado) e é sustentada, verificada, com novas particularizações. Mesmo que revelem uma compreensão explicativa das propriedades matemáticas que pudessem sustentar uma demonstração matemática com características informais, próprias do contexto escolar, os alunos tendem a não avançar para a sua concretização, desde que não exista um pedido explícito para o fazer, ou no enunciado da ficha ou no discurso oral da *professora*, ficando essa compreensão no domínio do implícito e do pessoal. Nesta tarefa, nenhum dos alunos teria avançado para uma demonstração, por sua própria iniciativa. A própria concretização da mesma foi bastante orientada pela *professora,* junto dos grupos que corresponderam às solicitações iniciais que esta fazia no sentido de os incentivar para esta fase de trabalho. Ao não ser desenvolvido um trabalho de explicitação, algumas das ideias acabam por não ser partilhadas no grupo. Um dos grupos da turma, o Grupo C, revelou uma preocupação em fundamentar explicitamente as afirmações produzidas, tendo, por esse motivo, nas últimas três questões, elaborado demonstrações com funções explicativas e com um carácter narrativo e informal. Esta preocupação parece ser influenciada pela natureza do discurso da professora, na sala de aula, o qual integra o questionamento sistemático do porquê, a propósito das várias propriedades matemáticas partilhadas na turma. A indagação do porquê por parte da professora na discussão da tarefa levou a que se explicitasse a razão dos diversos polígonos terem ou não eixos de simetria, a razão de terem um determinado número de eixos e a razão da localização dos mesmos. As diversas explicitações podem ser consideradas demonstrações explicativas, narrativas e informais das diversas propriedades consideradas, e são potenciadoras de se alcançar níveis mais elevados de compreensão matemática.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

> *quero saber a verdade, e quem procura a verdade,*
> *só pode começar a busca dentro de si.*
> (Márai, *As velas ardem até ao fim*, p. 101)

Neste capítulo, apresento os resultados do presente estudo e discuto-os tendo como referência as perspectivas teóricas explanadas nos capítulos anteriores bem como as questões orientadoras do estudo. Cada uma das tarefas exploradas pelos alunos, e aqui invocadas para análise, estrutura cada uma das subsecções. Para se ter uma melhor compreensão relativa à exploração de cada uma das tarefas, dedico a primeira secção do presente capítulo ao enquadramento das mesmas.

A Exploração das Tarefas

Vamos Investigar – Matemática (Exploração com números)

Esta tarefa foi explorada na aula do dia 20 de Janeiro do ano lectivo de 2005/2006, sendo a segunda aula observada por mim a essa turma. Ocupou sensivelmente 35 minutos da aula. Os primeiros 35 minutos da aula foram dedicados à correcção do trabalho de casa. Neste período da aula, a professora relembrou os conteúdos trabalhados na aula anterior relacionados com a classificação de números, no âmbito do estudo dos números reais. Durante toda a correcção, foi clarificando determinados aspectos, nomeadamente a distinção entre número e a sua representação escrita. A solicitação aos alunos da justificação das respostas dadas foi também uma constante nesta parte da aula. Após a correcção do trabalho de casa, os alunos organizaram-se em grupo para explorar a tarefa, tendo sido distribuída uma ficha a cada grupo. A parte final da aula foi ocupada com a entrega de trabalhos, realizados pelos alunos e vistos em casa pela professora, e com o comentário da professora acerca dos mesmos.

A ficha de trabalho inclui três situações diferentes de exploração com números, e cada grupo deveria explorar apenas uma das situações. A professora, após a distribuição das fichas, indicou qual a actividade que cada um dos grupos deveria explorar: Actividade 1, Grupos A (grupo-alvo) e D; Actividade 2, Grupos B e F; e Actividade 3, Grupos C e E. A professora pediu ainda aos alunos que fizessem a exploração no caderno de tudo o que pensassem e que colocassem na ficha um registo definitivo. A ficha apresentava uma tabela com três linhas, com as três actividades, e duas colunas, a da esquerda, intitulada *Situação,* com a apresentação dos enunciados das actividades, e a da direita, intitulada *Demonstração,* encontrava-se em branco, de modo a ser preenchida pelos alunos. A tarefa visava não só que os alunos chegassem a uma resposta à questão colocada mas também que provassem a sua veracidade para a generalidade dos números em causa. Entretanto, o Ricardo questionou a professora acerca do que se pretendia com a demonstração. E logo de imediato, a professora fez a leitura das três actividades e negociou o sentido de *demonstração,* cuja construção era, nesta tarefa, solicitada aos alunos. Esta era a primeira aula com que os alunos contactavam com este termo e se confrontavam com o pedido explícito de elaborarem uma demonstração. Vejamos como negociou a professora o significado de demonstração e a intencionalidade da tarefa:

P- Eu vou ler as três situações. Vá! Vamos acompanhar. E diz assim. Reparem que tem uma coluna que tem situação e tem outra que diz demonstração. Vocês vão tentar, quando eu vos coloco, ou faço perguntas acerca de como vocês decidiam, vocês estão a demonstrar entre aspas porque é que pensaram, porque é que pensaram, porque é que escolheram aquele elemento, estão a justificar-se, tá [sic] bem? Uma demonstração matemática não é, não é equiparada a uma justificação. Mas é para vocês terem uma ideia de que tudo aquilo, que aliás é uma coisa que vocês têm uma certa dificuldade, eu já vou falar ali de umas coisas que tenho para entregar, é que vocês têm uma certa dificuldade em achar que a Matemática tudo o que nós pensamos tem de ser justificado, tem de ser demonstrado para os outros, para que os outros percebam não só o que nós fazemos mas aquilo que nós pensamos. Não basta chegar lá e pôr um resultado e terminou a conversa. Portanto, tem de ser comunicado o que se pensa, e daquilo que se pensa, para dizer aos outros, para eles terem a certeza que aquilo que nós pensamos estamos no caminho certo ou não estamos. Tá [sic] bem? E é isso que vocês vão fazer aqui neste ramo da demonstração. Ou seja, a Actividade I diz assim: "Como é a soma de quaisquer números pares?" Eu estou a falar de um número em especial?
Alunos - Não.
P- Não. Quaisquer é mesmo isso. Eu posso pensar… Por exemplo, um número par…
Aluno – Dois.
P- Dois. Posso pensar…
Alunos –(*dizem exemplos de vários números pares)*
P- Quatro. Posso pensar… Por aí fora, não é? Não interessa aquele em que eu pensei. Interessa é, para quaisquer números pares, como vai ser a soma desses dois?
R- Ahhhh! (*imperceptível; dá pulinhos no lugar de contentamento,*

mostrando ter percebido)
P- E vão pensar, podem pensar também para alguns específicos se isso vos der alguma ajuda. Mas depois para quaisquer, tá [sic] bem? (*o Ricardo pega no seu caderno e trá-lo para a mesa onde se encontra a trabalhar o grupo)* Depois, para a dois. (*Começa a ler a Actividade II)* Como é o produto de quaisquer três números inteiros positivos consecutivos? Que números são estes? Exemplos…
R- Um, dois, três?
P- Um, dois, três. São inteiros consecutivos, não é? O que é que quer dizer consecutivos?
Aluno - Seguidos.
P- Seguidos. (*começa a ler a Actividade III)* O que é que se pode dizer—isto é a três—acerca do número que resulta quando se subtrai um do quadrado de um número ímpar?
Aluna - Dá sempre… par.
P– Não sei. É isso que se pretende. Ela perguntou assim: será que dá sempre um número par? Já está a pensar: isto fez-me lembrar que se calhar vai acontecer dar sempre número par.
Aluno – Não.
P- Será verdade? Então, vamos ver. E se pensam que é verdade ou não que eu quero que cheguem, tá [sic] bem? Então, vá, vamos começar a trabalhar. Primeiro no caderno, depois quando estiver definitivo... Vamos lá! Vamos lá!

Para que os alunos entendessem o significado de demonstração, a professora começou por estabelecer uma relação com o que tinham vivenciado momentos antes na correcção do trabalho de casa, em que lhes pedia insistentemente que explicassem as razões das suas respostas: "quando … faço perguntas acerca de como vocês decidiam, vocês estão a demonstrar entre aspas porque é que pensaram …, porque é que escolheram aquele elemento, estão a justificar-se" (linhas 3-6). Apesar de distinguir demonstração de justificação—"Uma demonstração matemática não é … equiparada a uma justificação" (linhas 6 e 7)—colocando, implicitamente, a demonstração num nível superior ao da justificação, a professora negociou com os alunos a função de explicação que pode ter uma demonstração, ao fazer um paralelismo com algo que tinham acabado de viver na sala de aula. A professora colocou ainda a função de comunicação intimamente associada à explicação, negociando também essa função que uma demonstração pode ter: quando justificamos tudo o que fazemos ou pensamos em matemática é para servir o propósito de comunicar aos outros para que estes percebam o nosso raciocínio e assim obterem a certeza que "estamos no caminho certo ou não estamos" (linhas 16 e 17). Podemos encontrar aqui nitidamente a visão de demonstração de Mason et al. (1984), designada pelos mesmos de *justificação convincente,* pela qual a generalização passa do domínio pessoal para o domínio público, englobando quer a actividade de procurar porquê quer a actividade de explicar porquê, cujo último estádio culmina no convencimento de um inimigo das razões incorporadas nos argumentos produzidos. A generalização, no entanto, só foi negociada pela professora a seguir, através do recurso à leitura da primeira actividade, quando a mesma chama a atenção para o facto de a actividade não colocar a questão em torno de números pares particulares mas sim de *quaisquer* números pares, o que implica associar inequivocamente a generalização à demonstração. Esta associação encontra-se evidenciada na expressão usada pela professora: "Ou seja" (linha18). É como se a professora quisesse dizer tudo o que dissera antes mas usando agora a situação concreta a explorar pelos alunos: demonstrar é tudo o que disse atrás, ou seja, na Actividade I, é justificar convincentemente acerca da soma da generalidade dos números pares (introduzindo a generalização nesta negociação de significado, o que ainda não tinha sido feito anteriormente). A professora recorre à particularização quando pede exemplos concretos de números pares e quando a aponta como recurso para ajudar a pensar acerca de uma questão geral—"podem pensar também para alguns específicos se isso vos der alguma ajuda. Mas depois para quaisquer" (linhas 32 e 33).

O processo de conjecturação é também abordado pela professora a propósito da conjectura formulada por uma aluna—"Dá sempre… par" (linha 45)—como resposta à questão da Actividade III, acabada de ler pela professora. A aluna manifesta o que pressentiu ser verdadeiro; a pausa que fez revela a procura nesse instante de um padrão; por outro lado, o seu tom de voz não é revelador de total convicção. A professora não introduz o termo "conjectura" através da identificação da afirmação da aluna com essa designação. No entanto, mantém a conjectura da aluna com esse estatuto pois demite-se de a validar: "Não sei". (linha 46). Mas, de imediato, reforça a ideia que a tarefa visa que os alunos passem por este processo—"É isso que se pretende" (linha 46)—caracterizado pela expressão de um padrão identificado—"vai acontecer dar sempre número par" (linhas 47 e 48)—e pela averiguação da veracidade da afirmação expressa—"Será verdade? Então, vamos ver" (linha 50). Por fim, a professora negoceia a função de verificação da demonstração quando coloca a fase de demonstração, como a fase seguinte à da conjecturação e objectivo último da tarefa, pela qual os alunos deverão estabelecer a veracidade das afirmações conjecturadas antes: "E se pensam que é verdade ou não que eu quero que cheguem" (linhas 50 e 51).

Todos os grupos, perante as várias situações gerais que lhes eram colocadas, estudaram-nas através da particularização. Três dos grupos usaram quatro exemplos, dois dos grupos usaram cinco exemplos e um outro usou três exemplos, e pela observação dos mesmos, a maioria dos grupos induziu uma conclusão geral. Na turma, foi unicamente um grupo (Grupo B) que não registou por escrito qualquer conclusão geral no seu trabalho, e não possuo dados do processo oral de trabalho deste grupo que permitam revelar se o grupo chegou a observar algum padrão, eventualmente não registado por escrito, ou se a ausência de registo corresponde, de facto, à ausência de efectuação de generalização decorrente da particularização. Nenhum dos grupos sentiu necessidade de efectuar uma demonstração que estabelecesse a verdade da conclusão geral enunciada para o universo em causa. A abordagem empírica e indutiva da particularização foi suficiente para que os alunos tivessem total convicção acerca das generalizações que formularam. Passo a transcrever a conclusão enunciada pelo Grupo F a partir da observação dos produtos obtidos na Actividade II por ser ilustrativa do que acabei de referir:

> Os resultados (6, 120, 504, 1320) são todos números pares.
> Dão, sempre, sempre, sempre, sempre, sempre, sempre, sempre, sempre, par.

A observação do padrão existente nos quatro produtos obtidos com exemplos particulares—o de serem números pares—foi suficiente para estabelecer uma conclusão geral para quaisquer três números inteiros positivos consecutivos—dão sempre par—marcada graficamente pela abertura do parágrafo. A ênfase que o grupo colocou na generalização, expressa através da repetição do termo "sempre" oito vezes, evidencia a convicção nessa mesma generalização induzida de quatro produtos particulares.

Apesar de os alunos dispensarem a realização de uma demonstração, a sua necessidade foi negociada pela *professora,* que apelou a uma representação algébrica da situação em causa. Assim, como resposta a este apelo, verifica-se uma tentativa de demonstração no trabalho dos dois grupos que resolveram a Actividade I, talvez por esta apresentar uma menor complexidade do que as outras duas Actividades. Além disso, a manipulação algébrica envolvida numa demonstração quer da Actividade II quer da Actividade III reveste-se também de uma maior complexidade que dificilmente seria concretizada por alunos deste ano de escolaridade.

No que se refere à exploração das Actividades II e III, a primeira conclusão que os alunos enunciaram é que o resultado é sempre um número par pois corresponde à observação mais evidente quando se olha unicamente para os resultados obtidos. Para que os alunos pudessem refinar a observação do padrão de modo a constatar que na Actividade II, os produtos pares são também múltiplos de seis e na Actividade III, os números pares são também múltiplos de oito, a professora sugeriu aos grupos, no acompanhamento que fez aos mesmos, que fizessem a decomposição dos resultados em factores primos.

Na Actividade II, os exemplos usados pelos dois grupos foram os mesmos—1x2x3; 4x 5x6; 7x8x9 e 10x11x12—tendo seguido o critério de usar todos os números consecutivos, desde o 1 até ao 12, sendo o primeiro factor (de cada uma das multiplicações subsequentes à primeira) o consecutivo do último factor da multiplicação anterior. Após a particularização que foi idêntica nos dois grupos, o trabalho divergiu nas fases seguintes: o Grupo B decompôs os quatro produtos em factores primos, não tendo registado por escrito qualquer conclusão, como referido atrás; o Grupo F não fez a decomposição em factores primos, tentou uma representação algébrica e registou uma conclusão geral induzida dos produtos particulares, citada atrás (p. 623). Vejamos agora o registo da tentativa de representação algébrica por parte do grupo F:

$a + (a + 1) + (a + 2) =$
$10 + (10 + 1) + (10 + 2) =$

Provavelmente, os alunos serviram-se da última multiplicação—“10x11x12”—como recurso para tentarem uma representação algébrica da situação. Na necessidade de representar números consecutivos com uma única variável representativa de qualquer número inteiro positivo, olharam para a dita multiplicação com o intuito de escrever uma outra equivalente em que o número 10 fosse o exemplo generalizável da tal variável pretendida. Assim, os números 11 e 12 foram escritos à custa do 10, isto é, de forma a relacionarem-se com o 10: “10 + 1” e “10 + 2”, respectivamente. No entanto, na transposição para uma expressão equivalente falhou a equivalência operatória já que registaram o sinal aditivo e não o multiplicativo. A troca de sinais tanto poderá dever-se a uma distracção como a uma pretensão de simplificação de manipulação algébrica usando primeiro uma adição e só depois a multiplicação. No entanto, é mais provável que a troca tivesse sido motivada por uma distracção já que uma soma algébrica não representaria a situação referente ao produto. Após a escrita da expressão “10 + (10 + 1) + (10 + 2)”, os alunos simplesmente substituíram na mesma o número 10 pela variável *a,* traduzindo, assim, uma soma algébrica de três números inteiros positivos consecutivos—“a + (a + 1) + (a + 2)”—em que *a* é um número inteiro positivo qualquer (apesar de a referência ao estatuto de *a* ser omissa no trabalho do grupo, a mesma é implícita). A expressão escrita em função do número 10 constituiu o primeiro passo para a escrita de uma expressão algébrica genérica. O número 10 perdeu a particularidade anterior para ser um exemplo generalizável: quando escrevem a expressão “10 + (10 + 1) + (10 + 2)”, os alunos percebem que tanto poderiam escrever o número 10 como qualquer outro usado como primeiro factor nas suas multiplicações (1, 4 ou 7), ou ainda qualquer outro número natural, o que os leva rapidamente a representar essa variável por *a,* e a escrever a expressão algébrica “a + (a + 1) + (a + 2)”. Tudo indica, portanto, que esta expressão algébrica tenha sido escrita posteriormente à expressão com o exemplo generalizável 10, apesar de se encontrar, na folha de papel, localizada acima da outra. É mais fácil para os alunos trabalhar com um exemplo concreto para conseguirem traduzir algebricamente três números naturais consecutivos. Poderemos ainda questionarmo-nos acerca do sentido atribuído pelos alunos ao sinal “=”, colocado à frente de cada uma das expressões. Pretenderiam afirmar a equivalência de ambas as expressões? A colocação do sinal adviria da transposição genérica das multiplicações usadas como exemplos? E neste caso, teriam os alunos a intenção de registar algebricamente os produtos em causa (apesar de terem usado o sinal “+”, provavelmente, por distracção)? No entanto, não o fizeram e a sua conclusão geral decorreu directamente dos produtos particulares obtidos.

Na Actividade III, ambos os grupos fizeram a decomposição dos produtos obtidos em factores primos, tendo usado exemplos diferentes. O Grupo E utilizou os exemplos 7, 5 e 3, tendo-os indicado explicitamente, por escrito, como exemplos. O Grupo C usou os exemplos 9, 3, 5, 15 e 25, tendo escrito o sinal de igual à frente de cada um dos resultados obtidos, e o termo “PAR” à frente de cada um dos sinais de igual. Ambos os grupos percorreram um processo de trabalho idêntico, tendo concluído, primeiro, que o resultado é “sempre um número par”—“A conclusão que tirámos é que quando se subtrai 1 do quadrado de um número ímpar o resultado é sempre um número par” (Grupo E)—, pela observação dos resultados particulares obtidos, e que são múltiplos de oito, depois da decomposição em factores primos. Em ambos os registos escritos, os três primeiros factores “2” encontram-se circundados, em todas as decomposições, e surge também assinalado o factor oito nas expressões rescritas dos produtos (sublinhado duplo no trabalho do Grupo C e assinalado com uma seta no trabalho do Grupo E)— como é o caso da expressão “224=$\underline{\underline{8}}$x28”. Os alunos do Grupo C tinham escrito as expressões dos produtos decompostos em forma de produto de factores primos representados por potências—por exemplo, “24=2^3x3”. Tanto os produtos escritos como produtos com o factor oito como o traçado feito em redor dos primeiros três factores parecem ter sido feitos pela professora nos momentos em que a mesma acompanhou estes grupos pois as expressões escritas têm a sua marca caligráfica e o traçado em volta dos factores dois revelam um traçado feito com o vigor de quem pretende chamar a atenção dos alunos para os mesmos como sendo algo comum a todas as decomposições. O significado dos primeiros três factores “2” comuns como sendo um subproduto igual a oito deveria ter sido negociado pela professora junto dos dois grupos, o que a levou a rescrever as expressões representativas dos produtos particulares de forma a evidenciar esse mesmo factor oito como sendo comum a todos eles, isto é, de forma a evidenciar que todos eles eram múltiplos de oito.

A forma como os grupos exprimiram esta conclusão é diferente: enquanto o Grupo E escreveu "Tudo é múltiplo de 8", o Grupo C escreveu "Provavelmente são todos múltiplos de 8". Vemos, pois, que o Grupo C foi mais prudente na forma como exprimiu a generalização, revelando não possuir certeza se o padrão observado com os seus cinco produtos decompostos se se verificaria em todos os resultados possíveis. Talvez não seja por acaso que tenha sido este grupo que na turma mais exemplos particulares testou; talvez esse facto seja revelador de uma certa cautela no que se refere a formular generalizações a partir do que acontece com exemplos particulares. De qualquer modo, os alunos deste grupo depositaram total confiança na generalização da paridade dos resultados, a partir da particularização efectuada. Ou seja, enquanto que para a conjectura de que as diferenças entre o quadrado de um número ímpar e a unidade seriam todas múltiplos de oito, os alunos do Grupo C assumiram-na como tal, para a conjectura de que essas diferenças seriam todas números pares, os alunos deste grupo assumiram-na como uma conclusão, da qual estavam totalmente convictos, e não como uma conjectura, acerca da qual é sempre preciso duvidar.

Investigar Matemática – Bissectrizes…

Esta tarefa foi explorada no dia 10 de Março de 2006. Visava a descoberta da relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares através da demonstração. Para esse efeito, eu e a professora considerámos que seria preferível a exploração da tarefa com recurso unicamente a papel e lápis. Deliberadamente, optámos por não utilizar o

Sktechpad pois, os alunos, através da ferramenta que permite medir os ângulos, eventualmente poderiam ver que as bissectrizes eram perpendiculares mas não sentiriam necessidade de demonstrar. Assim, e apesar do dinamismo deste *software* gerar uma imensidade de exemplos, próxima da generalização, não quisemos que os alunos obtivessem apenas uma comprovação empírica. Pretendíamos que, através do desenvolvimento da sua competência em demonstrar, descobrissem essa relação, fundamentando-se em relações gerais e teóricas. Foi também por este motivo que decidimos que os alunos não deveriam utilizar instrumentos de medição, como o transferidor ou a régua, que os levassem a conclusões baseadas unicamente em medições aplicáveis a exemplos concretos de ângulos. O enunciado da tarefa incluía a sugestão de elaboração de esquemas dos ângulos e respectivas bissectrizes. O esquema pressupõe a ausência de rigor no traçado dos objectos geométricos em causa e, portanto, qualquer amplitude assinalada teria forçosamente que decorrer de uma propriedade teórica e não de uma medição que, pelo seu cariz, é sempre particular e transporta consigo, por inerência, um certo erro. Efectivamente, todas as medidas são afectadas de um certo grau de inexactidão já que os instrumentos que possamos utilizar na medida de grandezas físicas nunca nos permitem obter o valor exacto dessas mesmas grandezas. Embora os alunos possam depositar confiança nos resultados das suas medições e estabelecer conjecturas assumidas, à partida, como verdadeiras, baseadas em medições, é importante que se desenvolva todo um trabalho didáctico em sala de aula que os leve a compreender a incerteza associada a uma medição, por mais cuidadosa ou rigorosa que ela seja, e a importância do raciocínio fundamentado e justificado por relações e propriedades teóricas. Assim, o esquema serviria o propósito de apoiar quer a visualização dos referidos objectos geométricos, assumidos na sua generalidade e instanciados no esquema, quer a concretização do cálculo demonstrativo.

A professora introduziu a tarefa referindo que a mesma tinha dois objectivos. O de trabalhar e recordar conceitos já aprendidos anteriormente, tanto mais que o exame, que os alunos fariam no final do ano lectivo, incidiria em toda a matéria do 3º ciclo. O outro objectivo era o de ir desenvolvendo, a pouco e pouco, a competência de demonstrar, constando como conteúdo no final do 2º volume do manual de Matemática—dedução, demonstração—tendo a professora alertado os alunos para o facto de no exame de 9º ano do ano lectivo transacto ter sido pedida explicitamente uma demonstração, na qual dever-se-ia utilizar letras e não exemplos particulares.

Para recordar alguns conceitos abordados no ano lectivo anterior, a professora apresentou dois acetatos que incluíam as representações de ângulos suplementares e de bissectriz. O primeiro incidia em ângulos, apresentando, além dos ângulos suplementares, também os ângulos complementares, os correspondentes, os alternos internos e os verticalmente opostos. O segundo acetato incidia nos Lugares Geométricos e tinha a representação de um arco de circunferência, do raio e do centro, a partir da qual, a professora recordou, além dos elementos representados, os conceitos de círculo e de circunferência. Tinha ainda a representação da mediatriz de um segmento de recta. A professora questionou os alunos sobre as propriedades da mediatriz, e pegando sempre nas palavras formuladas pelos próprios alunos, foi negociando o seu sentido ao mesmo tempo que assinalava no acetato a localização da mediatriz, a notação do ângulo recto e a designação de ponto médio, bem como a respectiva localização. O acetato incluía também a representação da bissectriz de um ângulo e a professora registou igualmente a sua localização, traçando uma seta. Depois do diálogo em torno do significado de bissectriz—inicialmente, uma aluna definiu-a do seguinte modo: "A bissectriz é a igualdade dos ângulos"—a professora falou sobre as formas de nomear ângulos: ou utilizando letras maiúsculas, designativas dos lados e do vértice, sendo a do meio a referente ao vértice, ou usando letras do alfabeto grego. E com a caneta, escreveu as letras maiúsculas nos vários elementos do ângulo bem como a respectiva notação do ângulo usando maiúsculas. A notação com a letra *alfa* foi usada para designar cada um dos semi-ângulos definidos pela bissectriz, tendo sido objecto do diálogo com os alunos a razão de se usar a mesma letra para ambos os semi-ângulos. O conteúdo dos dois acetatos foi sendo registado individualmente pelos alunos nos seus cadernos, à medida que iam falando sobre os vários conceitos. Esta parte da aula ocupou sensivelmente meia hora.

Só depois é que os alunos se organizaram em grupo para concretizar a tarefa, tendo cada um recebido uma folha com o respectivo enunciado e espaço para a exploração da mesma. A concretização da tarefa ocupou pouco mais de meia hora da aula. Os alunos começaram por completar os espaços com a informação necessária para a realização da tarefa. Eu e a professora, à medida que circulávamos pelos grupos, fomos sugerindo que fizessem a notação dos ângulos no esquema e que escrevessem os dados que eles já sabiam, que eram ângulos suplementares. Foi também preciso negociar com eles o que significava a relação entre as bissectrizes.

Nesta tarefa, todos os grupos conseguiram concretizá-la com sucesso, chegando à conclusão, através de uma demonstração algébrica, de que as bissectrizes de ângulos suplementares formam um ângulo de 90º. Apenas um grupo, o Grupo F, descreveu a relação entre as bissectrizes registando que as mesmas "são perpendiculares" após terem obtido 90º na soma das amplitudes das metades de cada um dos ângulos suplementares.

Na última meia hora da aula, ocorreu a partilha das resoluções[68], tendo ido ao quadro apresentar e explicar a resolução do seu grupo, primeiro, um aluno do Grupo E (por se ter oferecido para tal) e, depois, uma aluna do Grupo F, por ter sido este o único

624

[68] As resoluções encontram-se no quadro 16 (p. 684).

grupo que utilizou as letras para designar os ângulos suplementares (e não os semi-ângulos como os restantes grupos). Relativamente à resolução do Grupo E, a professora questionou o aluno sobre a razão de o grupo ter registado a soma de α com β: "Porque é que vocês entendiam ficar só com um α e um β?". A esta questão, uma aluna da turma resolveu intervir, ao reconhecer que a resposta do seu colega, o aluno do Grupo E, tinha sido titubeante e pouco clara, tendo explicitado: "Porque as bissectrizes formam um ângulo que dá um α e um β". Relativamente à equação $\frac{2\alpha}{2}+\frac{2\beta}{2}=\frac{180º}{2}$, a professora questionou os alunos acerca da designação daquela ferramenta matemática. Após uma aluna ter identificado a mesma como uma equação, a professora chamou a atenção para o respectivo algoritmo: "Aquilo que eu faço a um termo, a um membro, tenho de fazer ao outro". No que respeita à apresentação da resolução da Grupo F, a professora justificou-a referindo que o grupo tinha seguido o mesmo raciocínio mas que tinha escrito de outra forma. Quando a aluna deste grupo começou por apresentar o esquema, a professora referiu-se ao seu papel: "O esquema tem que nos ajudar a pensar". Após as apresentações feitas pelos alunos, a professora sintetizou a aprendizagem realizada com a concretização da tarefa: "Se temos dois ângulos suplementares, as suas bissectrizes são perpendiculares porque verifica-se sempre, sempre um ângulo de noventa graus entre elas". A repetição do termo "sempre" e o tom de voz mais elevado e pausado com que foi proferido reforçaram a ênfase colocada numa relação geral que se verifica sempre para todos e quaisquer ângulos suplementares que se queira considerar.

Circunferência e Ângulos III

Esta tarefa foi explorada na primeira aula do 3º Período do ano lectivo de 2005/2006[69], antes de se abordar o assunto dos polígonos inscritos numa circunferência pois visava que os alunos descobrissem uma propriedade relativa aos quadriláteros inscritos numa circunferência—a soma das amplitudes dos seus ângulos opostos—através da demonstração, raciocinando dedutivamente a partir de propriedades já conhecidas, como a da relação entre ângulos inscritos e ângulos ao centro, ou entre ângulos inscritos e arcos compreendidos entre os seus lados. Ou seja, a ênfase da tarefa não incidia na inscrição de polígonos mas sim na aplicação de uma propriedade trabalhada na parte final do 2º Período. Assim, a informação alusiva ao que é um quadrilátero inscrito numa circunferência encontrava-se no enunciado da própria tarefa: "(todos os seus vértices pertencem à circunferência)".

A exploração da tarefa foi feita em papel e lápis, tendo os alunos usado o compasso para traçar a circunferência e a régua para traçar o quadrilátero. Foi distribuída uma única ficha de trabalho a cada um dos grupos. Eu e a professora optámos por não utilizar o *Geometer's Sketchpad* nesta tarefa pois, apesar do *software* permitir uma maior generalização no que respeita às múltiplas possibilidades de inscrição de quadriláteros, a resposta ao problema colocado seria feita de forma empírica, por medição e cálculo da respectiva soma, sem que sentissem necessidade de estabelecer qualquer relação dedutiva com o ângulo ao centro, ângulo inscrito e arco de circunferência. Considerámos, assim, que seria preferível uma menor concretização de diferentes quadriláteros inscritos na circunferência desde que a solução do problema

626

[69] Foi explorada depois da discussão acerca da resolução da tarefa "Vamos investigar Matemática" alusiva aos eixos de simetria de polígonos regulares e outras figuras geométricas (analisada no capítulo VI).

fosse encontrada por meio de uma demonstração que explicitasse o valor da soma das amplitudes dos ângulos opostos por intermédio de um raciocínio aplicável a qualquer ângulo naquelas condições, o que constitui, efectivamente, uma conclusão aplicável à generalidade de todos os quadriláteros inscritos numa circunferência. A forma genérica como são tratados os ângulos torna claro que a relação encontrada seria precisamente a mesma se, em vez de um dado quadrilátero, se tivesse desenhado outro. Após a formulação da conclusão, esta passa a constituir a condição imposta aos quadriláteros a inscrever na circunferência: só se pode inscrever numa circunferência os quadriláteros cuja soma das amplitudes dos ângulos opostos seja de 180º.

Nesta tarefa, a maior parte dos grupos da turma (quatro grupos de entre seis grupos) começou por desenhar um quadrado, talvez por esta figura lhes dar, à partida, uma certa convicção de que todos os seus vértices a igual distância pertenceriam à circunferência. Existe evidência até, no grupo-alvo, de que os alunos consideraram que o único quadrilátero que se poderia inscrever na circunferência seria o quadrado. Primeiro, foi o Bernardo que afirmou a sua interpretação, dirigindo-se ao Ricardo, assim que leu o enunciado da tarefa—"Meter um quadrado lá dentro."—e, um pouco depois, foi a vez da Sara afirmar, falando para a Maria, ao mesmo tempo que esboçava uma circunferência com o lápis na mesa e nela marcava os vértices do quadrado: "Tem de ser um quadrado, para bater tudo nos vértices…". Quando a Sara afirma "Tem de ser um quadrado" está, implicitamente, a excluir a hipótese de qualquer outro quadrilátero. E a justificação apresentada "para bater tudo nos vértices" pode ser interpretada como a convicção de que estando todos os pontos da circunferência a igual distância do centro, então teria que se traçar um quadrilátero cujos vértices estivessem também a igual distância. Ou seja, uma interpretação plausível deste facto é a transposição feita pelos alunos de uma propriedade relativa à circunferência para o domínio dos quadriláteros no que se refere à distância entre os vértices. De facto, tal transposição não se aplica aqui, pois o que tem de manter igual distância é o centro da circunferência relativamente aos vértices da figura inscrita, já que estes pertencem à circunferência. Supondo que os alunos teriam feito aquela transposição, a mesma levou-os a considerar o quadrado como o quadrilátero mais imediato que apresenta os lados iguais; no entanto, a mesma transposição teria que os levar a considerar o losango que não pode ser inscrito na circunferência. Tal consideração não ocorreu, ou porque os alunos não se lembraram do losango enquanto quadrilátero com lados iguais, ou porque poderiam, eventualmente, não ter feito a transposição que interpretei como hipótese do seu pensamento. Outra hipótese interpretativa do que os levou a traçar o quadrado, e até a considerá-lo como o único possível, é o terem visualizado o centro da circunferência exactamente no centro do quadrado inscrito nessa mesma circunferência pois efectivamente o centro da circunferência coincide com o ponto de intersecção das diagonais do quadrado localizado exactamente no centro do mesmo. Esta hipótese permite explicar por que os alunos não consideraram outro tipo de quadriláteros com lados diferentes em que o centro da circunferência não se localiza exactamente no centro dos mesmos mas já não consegue explicar a razão de não terem considerado, como hipótese de quadrilátero inscrito, o rectângulo cujo centro coincide, tal como no quadrado, com o centro da circunferência.

Um dos grupos (Grupo B) que não traçou em primeiro lugar um quadrado, traçou um rectângulo, o que foi equivalente, neste caso, a traçar o quadrado. A consideração inicial e única do quadrado, ou do rectângulo, como quadrilátero possível de se inscrever numa circunferência comprometia toda a intencionalidade da tarefa. Com o quadrado ou o rectângulo, os alunos rapidamente chegariam à conclusão de que a soma das amplitudes dos seus ângulos opostos é de 180º por saberem de antemão que cada um deles mede 90º de amplitude. Não teriam que fazer qualquer dedução nem mobilizar as propriedades anteriormente aprendidas respeitantes ao ângulo ao centro e ângulo inscrito. Ou seja, a conclusão seria completamente independente do facto de o mesmo se encontrar inscrito na circunferência. E deixaria sem resposta se esta soma apenas diria respeito a estes dois quadriláteros concretos ou se se aplicaria igualmente à generalidade dos quadriláteros inscritos numa circunferência.

Por este motivo, incitei os alunos a construírem outros quadriláteros distintos do quadrado, primeiro em pequeno grupo (foi o caso do Grupo C e do grupo-alvo) e depois, dirigindo-me a toda a turma. Habitualmente, era a professora que assumia a palavra cada vez que era necessário falar para toda a turma, e eu interagia com os alunos apenas em pequeno grupo. Nesta aula, esta minha intervenção foi feita para toda a turma, pois a professora tivera que se ausentar da sala de aula por momentos e fiquei eu na sala com a turma. Vejamos o respectivo extracto:

> I- (*situada perto do Grupo C e pegando na ficha deste grupo, levanta-a no ar para mostrá-la a todos os alunos da turma)* O que é que diz aqui? O quadrilátero tem que estar inscrito na circunferência, ou seja, todos os vértices têm que pertencer à circunferência. O que eu estou a ver é que vários grupos acabaram por fazer um quadrado inscrito na circunferência. E pode ser. Respeita aquilo que é pedido aqui na ficha. De qualquer modo, podem ainda experimentar um outro quadrilátero que tenha os ângulos diferentes para ver se a conclusão a que chegaram aqui (*aponta para o quadrado construído em primeiro lugar pelo Grupo C)*, se é a mesma que chegam com um quadrilátero com os ângulos todos diferentes. Tão [sic] a ver? Em vez de estarem com a preocupação de escolher vértices que estejam à mesma distância uns dos outros, podem escolher vértices, uns afastados e outros mais perto, de maneira a resultar daí um quadrilátero que, cujos ângulos opostos vão ser diferentes, mas continua a ser um quadrilátero inscrito na circunferência. Percebido? Portanto, depois de construir… Não quer dizer que não possam construir um quadrado, mas como o quadrado é um caso muito conhecido, convinha que fizessem uma outra circunferência e que tentassem construir um quadrilátero mais com este aspecto, percebido? (*aponta para o segundo quadrilátero construído pelo Grupo C em que não existe qualquer lado paralelo a outro)* e depois tentar ver se chegam a alguma conclusão acerca da soma das amplitudes dos ângulos opostos. (*aponta para os ângulos*) Este com este. E este com este, tá [sic]?

A ficha do Grupo C serviu-me de exemplo ilustrativo para o que queria transmitir aos alunos pois naquele momento era o único grupo que apresentava a construção de dois quadriláteros, tendo sido o segundo feito por minha sugestão. Convidei, portanto, os alunos a colocarem quatro pontos sobre a circunferência a diferentes distâncias uns dos outros e só depois os unirem. Esta acção difere da tomada anteriormente pelos alunos já que os mesmos tinham pensado previamente qual o quadrilátero a traçar e só depois é que passaram para a sua concretização. Segundo a minha sugestão, a localização dos pontos sobre a circunferência seria, de certa forma, aleatória, respeitando unicamente a condição de não estarem à mesma distância para que não se obtivesse de novo um quadrado, e seria o traçado de união dos mesmos que daria uma maior consciência de qual o quadrilátero obtido. Explicitei que se pretendia obter um quadrilátero com os ângulos diferentes, já que o desconhecimento das amplitudes dos ângulos seria a condição necessária para os alunos enveredarem para uma demonstração. Para se obter ângulos diferentes, sugeri como ponto de partida a diferente distanciação dos vértices uns em relação aos outros, embora não exista uma relação directa entre estas duas condições (por exemplo, o rectângulo tem os ângulos todos iguais a 90º e os seus vértices não se encontram todos a igual distância). O termo "diferentes" poderia, à partida, assumir diferentes significados: diferentes de 90º; só os ângulos opostos diferentes; ou ainda, todos os ângulos diferentes. Nesta tarefa, o que interessava realmente é que as amplitudes dos ângulos fossem desconhecidas, e portanto, diferentes de 90º. Claro que se os ângulos opostos forem diferentes de 90º, também serão, por consequência, diferentes entre si, pois um deles será obtuso e o outro agudo. Não seria necessário que todos os ângulos do quadrilátero fossem diferentes entre si. No entanto, na minha intervenção faço uma alusão a "ângulos todos diferentes" e depois a "ângulos opostos (…) diferentes", o que parece indiciar que usei os dois últimos significados de “diferentes”. E fundamentei o meu pedido na necessidade de elaborarem uma conclusão que fosse aplicável à generalidade dos quadriláteros inscritos numa circunferência: “podem ainda experimentar um outro quadrilátero que tenha os ângulos diferentes para ver se a conclusão a que chegaram aqui, se é a mesma que chegam com um quadrilátero com os ângulos todos diferentes”. Terminei a minha intervenção com a explicitação da localização dos ângulos opostos, apontando concretamente para os mesmos, pois este tinha sido um aspecto sobre o qual os alunos manifestaram algumas dúvidas.

Após esta minha intervenção, os alunos construíram mais um quadrilátero inscrito na circunferência distinto do quadrado e do rectângulo, à excepção do Grupo D que desenhou mais três quadriláteros e do Grupo E que apenas desenhou um quadrilátero pois este era, desde o início, um trapézio isósceles. De entre os seis grupos, três conseguiram chegar a uma conclusão através da demonstração: dois grupos (Grupo C e grupo-alvo) usaram uma forma narrativa e um grupo (Grupo D) utilizou uma forma algébrica. De entre os três grupos que não conseguiram fazê-lo, dois deles (Grupos B e F) concluíram para o caso do rectângulo (Grupo B) e do quadrado (Grupo F) que a soma das amplitudes dos ângulos opostos era de 180º, e para o caso do segundo quadrilátero construído, identificaram os ângulos opostos do mesmo como sendo ângulos inscritos mas não conseguiram estabelecer qualquer relação nem efectuar qualquer tipo de dedução. O Grupo E identificou igualmente os ângulos opostos como sendo inscritos e estabeleceu ainda a relação da sua amplitude com a do arco contido no mesmo mas não raciocinou em termos da soma das amplitudes e o seu trabalho ficou nesta fase. É provável que, caso a aula não tivesse terminado naquele momento, estes três grupos tivessem avançado mais na concretização da tarefa.

Como já tinha sido explorada anteriormente a tarefa “Investigar Matemática - Bissectrizes…”, na qual os alunos utilizaram uma notação algébrica para representar os ângulos, nesta tarefa, todos os alunos usaram letras dentro dos quadriláteros para nomear um par de ângulos opostos e a maior parte dos grupos (todos à excepção do grupo-alvo) recorreu a este tipo de notação para se referirem aos mesmos nas suas produções escritas.

Um outro aspecto que pode merecer a nossa atenção é o carácter reificado e um tanto definitivo que os alunos emprestam à apresentação do trabalho na ficha. Notemos que o esboço da circunferência com a inscrição do quadrado feito pela Sara como suporte do seu pensamento e da sua comunicação à Maria foi registado na mesa e logo apagado. Logo após a minha interpelação feita ao grupo-alvo de traçarem atrás um outro quadrilátero distinto do quadrado, a Sara apressou-se a apagar o quadrado inscrito, e consequentemente, tudo o que tinham feito até ao momento, mesmo com os protestos do Ricardo—“Isso não é para apagar!”. É como se os alunos se inibissem de apresentar à professora um registo revelador do seu processo de trabalho: o que é entregue corresponde àquilo que os alunos consideram o produto final.

A aula concluiu com a exploração da tarefa pelos grupos, não tendo existido tempo para a partilha de resultados, já que grande parte da aula tinha sido ocupada com a discussão em torno do trabalho desenvolvido com a tarefa relacionada com os eixos de simetria nos polígonos regulares e outras figuras geométricas. A professora decidiu que a discussão em torno da tarefa “Circunferência e Ângulos III” fosse remetida para mais tarde quando se tratasse o conteúdo dos polígonos inscritos. No entanto, dado o espaçamento de tempo, acabou por não voltar a centrar a atenção dos alunos nesta tarefa.

Investigações com Espelhos II

Esta tarefa foi explorada no 3º Período do ano lectivo de 2005/2006, na primeira aula suplementar dada pela professora à turma, no dia 4 de Maio. Antes desta aula, a professora tinha trabalhado a soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono convexo. Esta tarefa visava a descoberta da relação entre a amplitude do ângulo ao centro de uma dada figura geométrica e as características da mesma, utilizando o livro de espelhos como recurso. Contemplava duas partes. Na primeira parte (Questões 1, 2 e 3), pretendia-se que os alunos descobrissem a relação entre o ângulo formado pelos espelhos e o número de pontas das estrelas obtidas. Na segunda parte (Questão 4), pretendia-se que os alunos descobrissem como deveriam fazer o traçado para obter polígonos regulares em vez de estrelas e que a relação encontrada na primeira parte seria a mesma para os polígonos regulares (relação entre a amplitude do ângulo ao centro correspondente ao lado de um polígono regular e o número de lados).

A professora começou por distribuir uma ficha de trabalho a cada aluno e eu distribuí dois livros de espelhos por cada grupo de trabalho. A professora optou por não fazer qualquer leitura colectiva e os alunos começaram, de imediato, a trabalhar, assim que receberam os livros de espelhos.

A ficha apresentava o traçado de três figuras, cada uma com o traçado de uma ponta de estrela e a representação a tracejado de um ângulo. Na primeira figura, o ângulo era de 120º, na segunda, o ângulo era de 36º, e na última, de 72º de amplitude. Tal como era sugerido na ficha, os alunos começaram por colocar o livro de espelhos na zona a tracejado. Obtendo com o mesmo diferentes estrelas, consoante o ângulo representado, os alunos contaram o número de pontas das estrelas obtidas e fizeram o respectivo registo quer no espaço referente à questão 1 quer no da questão 2, organizando, neste, os dados numa tabela, de acordo com o solicitado.

Este três exemplos particulares foram suficientes para os alunos da turma encontrarem um padrão e explicitarem a relação funcional entre o ângulo e o número de pontas. Por um lado, todos os grupos viram que o produto da amplitude do ângulo pelo número de pontas era sempre constante e igual a 360º. E por outro lado, identificaram a relação descoberta como sendo uma relação proporcional.

Foi a relação descoberta que lhes serviu para corrigir um erro empírico: colocar 10 pontas e não nove, ou oito, como pareceria com o livro de espelhos. Com efeito, alguns dos grupos manifestaram alguma dificuldade na contagem das pontas da estrela que apresentava um maior número de pontas, registando para a mesma oito ou nove pontas. Foi ao darem-se conta que só 10 pontas manteria a relação encontrada do produto ser sempre 360º que voltaram a colocar o espelho sobre a representação do ângulo de 36º e a contar de novo o número de pontas, desde logo convencidos da relação teórica aplicável à generalidade das estrelas, pela qual, forçosamente a referida estrela teria 10 pontas. E depois, apagaram o registo do número nove, ou oito, e substituíram-no pelo "10". Alguns grupos (grupo-alvo e Grupo D) até fizeram uma tabela com mais exemplos de estrelas do que as que estavam desenhadas na ficha, sem, contudo, fazerem o respectivo traçado dos ângulos e a confirmação usando o livro de espelhos. Essa era a sugestão incluída no enunciado da Questão 3: "Procurem confirmar a relação que descobriram, experimentando com outros ângulos". Os alunos estavam perfeitamente convencidos da veracidade da relação conjecturada a partir dos três exemplos testados com o livro de espelhos, acrescentando, pura e simplesmente, na tabela, valores, correspondentes ao número de pontas e à amplitude dos ângulos, cujo produto fosse

360. Nunca sentiram, pois, necessidade de testar os mesmos com o livro de espelhos. Passo a apresentar as tabelas construídas por estes dois grupos:

Nº de Pontas	Ângulos
10	36º
5	72º
3	120º
8	45º
9	40º
4	90º
20	18º
12	30º

Quadro 14. Tabela feita pelo grupo-alvo

Ângulos	Pontas
36	10
72	5
120	3
45	8
30	12
24	15
20	18

Quadro 15. Tabela feita pelo Grupo D

Conforme podemos verificar, ambas as tabelas começam com as estrelas referentes às figuras da ficha, tendo existido uma preocupação de organização desses dados, já que esses três exemplos encontram-se ordenados na tabela, começando pela estrela com maior número de pontas e acabando na estrela com menor número de pontas. Essa preocupação na organização dos dados na tabela manteve-se no caso do Grupo D, já que todos os outros exemplos de estrelas incluídos na tabela encontram-se ordenados pelo critério contrário ao anteriormente utilizado: desde a estrela com menor número de pontas até à estrela com maior número de pontas. É como se a tabela tivesse uma divisória oculta separando dois modos distintos de elaboração. De facto, o Grupo D já tinha elaborado uma tabela na Questão 2 com os três exemplos propostos pela ficha, colocados pela ordem correspondente à das figuras: estrelas com os ângulos de 120º, 36º e 72º. Quando na Questão 3, o Grupo D elabora uma segunda tabela mais extensa, começa por transcrever a tabela construída anteriormente mas colocando os dados com uma certa organização, ausente na primeira tabela. Depois, prolonga a tabela para incluir exemplos propostos por si. Nesta fase em que é o grupo que tem de colocar mais exemplos, provavelmente os alunos, ao partir de um exemplo de estrela com oito pontas, decidiram seguir uma ordem ascendente, propondo exemplos de estrelas com, sucessivamente, maior número de pontas. O faseamento a que foi sujeita a construção da tabela levou a que este grupo tivesse tido dois critérios distintos de ordenação dos dados, já que na primeira parte, o grupo ordenou exemplos que lhe eram dados, enquanto que na segunda parte da tabela, teve de pensar em novos exemplos. No caso do grupo-alvo, já não se verifica a preocupação em ordenar os dados referentes aos exemplos propostos pelo grupo, dando a ideia de que os diferentes valores iam surgindo, linha a linha, aleatoriamente, conforme se iam lembrando dos mesmos e verificando, com o recurso à calculadora, se o produto do número de pontas pelo valor da amplitude do ângulo era 360. Podemos verificar igualmente uma maior preocupação com a notação por parte do grupo-alvo, já que a sua tabela apresenta a notação do sinal representativo dos graus em cada uma das amplitudes dos ângulos, enquanto que na tabela do Grupo D, essa notação está ausente.

A ordenação dos dados em tabela poderia ser um factor facilitador da identificação da relação de proporcionalidade ali existente. No entanto, essa identificação foi feita pela generalidade dos alunos da turma, mesmo pelos grupos que não elaboraram uma tabela extensa com novos exemplos de estrelas, numa fase inicial da exploração da tarefa, assim que começaram a experimentação com os livros de espelhos. Não encontrei, portanto, evidência de existir uma relação entre a identificação da relação funcional e a organização dos dados em tabela.

A identificação de existência de proporcionalidade inversa surgiu da parte dos alunos, sem que essa ideia fosse sugerida, mesmo que implicitamente, pelo enunciado da tarefa. Tanto eu como a professora, à partida, não previmos a possibilidade de os alunos pensarem na proporcionalidade inversa naquela tarefa, assunto que tinha sido trabalhado ainda naquele ano lectivo mas já há uns meses atrás. Não pusemos a hipótese antes da aula que os alunos estabelecessem a conexão entre a geometria e a função de proporcionalidade. Não é muito comum os alunos estabelecerem, por sua própria iniciativa, conexões com assuntos sobre os quais não se voltou a falar durante um certo período de tempo. Habitualmente, em contexto escolar, os alunos mobilizam, na resolução das suas tarefas, apenas os conteúdos programáticos que constituem objecto de estudo no próprio momento. Foi portanto algo que surgiu inesperadamente da acção exploratória dos alunos e que foi agarrado pela professora e sistematizado na fase final de partilha das conclusões decorrentes da exploração da tarefa. O questionamento feito pela professora contribuiu portanto para a tomada de consciência dos alunos e para a referida conexão. A este propósito, pode ler-se nas minhas notas de campo:

> Uns diziam que era proporcional e queriam usar a regra de 3 simples, como foi o caso do [aluno do Grupo C], mas a maior parte dizia que era inversamente proporcional; aliás, até antes de descobrirem a relação, essa constatação eles verificaram logo, quanto maior é o ângulo, menor o nº de pontas, e vice-versa, quanto menor o ângulo, maior o nº de pontas. Perante estas afirmações dos alunos, a [professora] começou a questioná-los no grupo para eles identificarem a estrutura matemática que estava por trás dessa relação.

Após a clarificação no Grupo C de que não se poderia usar a 'regra de 3 simples" visto não se tratar de uma proporcionalidade directa, este redigiu a resposta à Questão 3. Passo a citar a referida resposta:

> A relação que existe entre a amplitude dos ângulos e o número de pontas é que à medida que os ângulos aumentam, o número de pontas é cada vez menor.
> A proporcionalidade que se verifica aqui é a proporcionalidade inversa, ou seja, à medida que um valor aumenta outro diminui. Neste caso a constante de proporcionalidade é 360º, esta obtém-se através da multiplicação da amplitude dos ângulos pelo número de pontas e à medida que a amplitude dos ângulos aumenta, o número de pontas diminui.

Este grupo fez a tabela unicamente com os três exemplos das figuras e não lhe deu qualquer organização que evidenciasse a relação descrita atrás: os exemplos foram colocados pela ordem das figuras. Os Grupos B e E redigiram uma resposta semelhante à do Grupo C, embora tivessem sido mais sucintos e menos explícitos. Cito, em seguida, as respectivas respostas:

> *Grupo B* – A relação existente entre o ângulo formados pelos espelhos e o nº de pontas de estrela é que o ângulo ao multiplicar pelo nº de pontas é sempre 360º. À medida que o ângulo aumenta o nº de pontas diminui.

> *Grupo E* – Uma relação de proporcionalidade inversa.
> 36 x 10 = 360, 72 x 5 = 360   36 x 10 = 360, 360 é a constante de proporcionalidade.

Enquanto que o Grupo B não explicita tratar-se de proporcionalidade inversa, o Grupo E não explicita o que é que varia em função de quê, isto é, não explicita por que se trata de uma proporcionalidade inversa. A resposta do Grupo B encerra igualmente uma maior generalidade, falando dos ângulos e do número de pontas em geral e do facto de o seu produto ser "sempre 360º". O Grupo E, apesar de fazer referência a uma relação geral, usa os exemplos da ficha para ilustrar a mesma (repetindo, por lapso, o exemplo da estrela das 10 pontas em vez da estrela das três pontas). A resposta do Grupo F é ainda menos explícita: "Ao multiplicarmos o nº de pontas pelo ângulo vai dar-nos uma proporcionalidade de 360". Este grupo nem sequer identifica qual a proporcionalidade em causa.

As fichas de trabalho que apresentam as respostas mais condensadas à Questão 3, sem qualquer explicitação narrativa são as do grupo-alvo e do Grupo D, curiosamente, também as únicas que, nesta questão, apresentam tabelas com exemplos propostos por si. Vejamos como apresentaram estes grupos a resposta a esta questão:

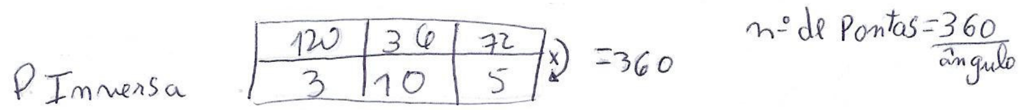


Figura 22. Parte da resposta do grupo-alvo à Questão 3

Grupo D:
120 x 3 = 360
72 x 5 = 360
36 x 10 = 360

PD y = kx
PI $y = \frac{k}{x}$

A resposta do Grupo D acima citada encontra-se à direita da tabela mais extensa por si construída. A sigla "PI", usada para abreviar "Proporcionalidade inversa", encontra-se na ficha de trabalho circundada por um círculo, como forma de assinalar qual a proporcionalidade presente naquela relação, anteriormente, ilustrada pelos alunos com os três exemplos constantes nas figuras. As últimas duas linhas foram escritas pela professora e deveriam ter resultado da interacção entre a professora e o grupo pela qual teria sido explicitada a relação em causa com o registo das expressões analíticas correspondentes a cada uma das funções de proporcionalidade (como se sabe, não possuo registos em vídeo do trabalho deste grupo).

A resposta do grupo-alvo acima citada encontra-se no pequeno espaço da ficha, imediatamente abaixo do enunciado da Questão 3. O grupo-alvo explicita tratar-se de proporcionalidade inversa. Apresenta os exemplos tabelados, pela ordem das figuras, explicitando simbolicamente que o seu produto é igual a 360. E, por fim, escreve a expressão analítica da função de proporcionalidade inversa, escrevendo na mesma os termos concretos associados a esta situação. É atrás da ficha que o grupo constrói a tabela mais extensa, na qual já dá alguma organização aos exemplos fornecidos pelas imagens, o que não sucedia na primeira tabela, seguindo, neste caso particular, um processo idêntico ao seguido pelo Grupo D. Como vemos, a resposta do grupo-alvo, apesar de apresentar características distintas da do Grupo C, acaba por estar tão completa e explícita quanto esta, já que o facto de uma variável aumentar em função da diminuição de outra está inerentemente associado ao significado da divisão expressa na própria expressão analítica: numa divisão em que o dividendo é constante, o quociente diminui à medida que aumenta o divisor, ou o quociente aumenta à medida que diminui o divisor.

Ao contrário do que eu e a professora supuséramos antes da aula, todos os grupos exploraram a Questão 4. Quando planificámos esta aula, considerámos que a ficha era muito extensa e que provavelmente nem todos os grupos a concluiriam. Enganámo-nos pois não apenas todos os grupos exploraram a totalidade da tarefa como ainda existiu tempo para se proceder à partilha e para a realização de exercícios de aplicação incluídos no manual.

Na Questão 4, os alunos teriam que descobrir como deveriam fazer o desenho inicial de forma a obter com o livro de espelhos um polígono regular. Alguns grupos viram, autonomamente, que para os polígonos teriam de traçar, não um bico, que daria origem à obtenção de estrelas, mas apenas um segmento de recta horizontal. Outros grupos foram ajudados pela *professora* nesse sentido.

Os alunos, nesta questão, abriram o livro de espelhos com diferentes ângulos, usando o transferidor, ou usando outros processos, na falta desse material, como foi o caso de um aluno do Grupo E, que foi até ao vidro da janela para copiar os ângulos tracejados no enunciado da ficha, registando-os no verso da folha. Outros, ainda, aproveitaram o tracejado dos três ângulos da ficha para traçarem ali os segmentos de recta e, depois, colocaram os livros de espelhos nesses ângulos. A maioria dos alunos da turma depressa viu que a relação era a mesma da já explicitada antes para as estrelas. Alguns dos grupos viram também que essa relação só era válida para os polígonos regulares.

Vejamos o trabalho concreto de cada grupo nesta questão. Os grupos que fizeram de novo tabelas para os polígonos regulares, apesar de o enunciado da questão não o solicitar explicitamente, foram o grupo-alvo, Grupo C, Grupo E e Grupo F.

Alguns grupos (Grupo C e Grupo E) fizeram uma tabela apenas com os exemplos testados, correspondentes aos ângulos marcados na ficha, organizando os dados na mesma, por ordem crescente (Grupo C) ou decrescente (Grupo E) do número de lados dos polígonos regulares obtidos. O Grupo C fez uma tabela em tudo idêntica à anterior, com a única diferença de que na primeira tabela, a segunda coluna se intitulava "Nº de pontas" e na segunda tabela, a coluna correspondente tinha como título "Nº de lados". Estes dois grupos exploraram esta questão tomando o mesmo ponto de partida anterior, não se preocupando em dar resposta concreta a todas as questões enunciadas na Questão 4, como por exemplo "Como poderão obter um hexágono regular?". No entanto, pode considerar-se que ambos os grupos incluíram o hexágono e os restantes polígonos regulares na sua resposta, pois apesar de não os terem registado em particular, escreveram explicitamente, à direita da tabela com os valores particulares, a relação de proporcionalidade inversa, usando termos gerais: "Fórmula proporcionalidade inversa – $y = \frac{k}{x}$" (Grupo C); "Proporcionalidade inversa; 360º é a constante de proporcionalidade" (Grupo E).

O grupo-alvo e o Grupo F fizeram uma tabela extensa, colocando os polígonos experimentados e outros, uma vez que foi a relação identificada que constituiu o recurso estruturante usado na elaboração da mesma—"A relação dos dois é igual." (grupo-alvo).

Ambos os grupos traçaram um único ângulo na sua ficha, com a amplitude de 60º, dando assim resposta directa ao solicitado no enunciado da tarefa, relativamente a como poderiam obter um hexágono..

A tabela do Grupo F não apresenta ordenação dos dados, encontrando-se em primeiro lugar o hexágono testado, e a seguir, e por esta ordem, os polígonos de 3, 10, 8, 5 e 4 lados. Este grupo optou por colocar na coluna dos polígonos o nome dos mesmos, tendo colocado o número de lados à direita, já fora da tabela. É esta a explicitação da relação feita pelo Grupo F: "Ao multiplicarmos o nº de lados pelo ângulo o resultado é 360º". Note-se que este grupo fez uma tabela extensa unicamente nesta questão; a anterior tinha apenas os três exemplos da ficha, ordenados pelo número crescente de pontas. A falta de organização da segunda tabela pode dever-se ao facto de os vários valores, eventualmente, terem sido colocados à medida que se lembravam e verificavam se o produto do número de lados pela amplitude do ângulo ao centro era ou não 360. A expressão "ângulo ao centro" não foi utilizada, no entanto, pelos alunos, nesta fase da aula.

O grupo-alvo fez a tabela de forma sistemática, colocando os polígonos por ordem crescente de número de lados, desde o número 3 até ao 12, inclusive. Aliás, esta segunda tabela tem o mesmo número de valores da primeira tabela, com a diferença que a primeira reportava-se ao número de pontas das estrelas e a segunda, ao número de lados dos polígonos regulares, existindo nesta última uma linha com 6 lados-60º, em vez de 20-18º. Esta sistematização permite interpretar que o grupo entendeu que não é possível encontrar qualquer polígono regular, apesar de não ter feito o respectivo registo narrativo, em resposta à questão concreta do enunciado: "Será possível encontrar qualquer polígono regular?". Efectivamente, o grupo, ao não incluir na tabela, os polígonos com 7 e 11 lados, revela que o processo que usou para encontrar os valores em ambas as tabelas foi o de determinar os divisores de 360, excluindo portanto os casos cujo quociente não fosse um número inteiro. Ou seja, para o grupo, seria impossível encontrar com o espelho estes polígonos em particular, já que estes números não são divisores de 360. Assim, o grupo estendeu a natureza discreta do número de lados de polígonos à amplitude de ângulos, não tomando consciência de que neste caso a grandeza é contínua e, portanto o registo da respectiva medição está associado aos números reais. Relativamente à questão sobre se é possível encontrar com o livro de espelhos polígonos irregulares, o grupo não se pronunciou por escrito. Isto é, nada escreveu sobre o facto de os polígonos obtidos serem ou não regulares.

Vejamos agora como responderam à Questão 4 os grupos que não concretizaram qualquer tabela para esta questão: Grupo B e Grupo D. O Grupo B apresenta, na sua ficha, apenas os traçado de dois ângulos, acompanhados dos segmentos de recta traçados na posição horizontal. O primeiro ângulo mede 65º de amplitude e o segundo mede 45º. Não tem qualquer outro registo narrativo de qualquer conclusão. Não sei, portanto, se este grupo percebeu se a relação era a mesma da identificada para as estrelas. Provavelmente o traçado do primeiro ângulo correspondeu à procura da forma de obter o hexágono, tal como era solicitado na ficha. Duas interpretações, situadas no campo especulativo, já que não tenho registos em vídeo deste grupo, são possíveis. Ou o grupo não entendeu, pelo menos nesta fase, de que a relação era a mesma da das estrelas e ensaiou esta hipótese, usando essencialmente a percepção. Ou o grupo admitiu que a relação era a mesma que já tinham explicitado para as estrelas, e neste caso, são possíveis duas ocorrências: ou engano no cálculo (6 x 65º = 360º) ou utilização pouco rigorosa do transferidor e consequente engano no traçado de um ângulo que se pretenderia que medisse 60º. De qualquer modo, não existe um registo que dê evidência de que os alunos tentaram de alguma forma corrigir uma hipótese ensaiada mas não válida. O segundo ângulo visaria a obtenção de um outro polígono regular? Ou seria um novo ensaio na procura do hexágono, se eventualmente os alunos não viram tratar-se aqui da mesma relação? O Grupo D não fez qualquer traçado nesta questão. O grupo respondeu directamente às perguntas enunciadas na ficha, na Questão 4, logo a seguir às mesmas. Assim, à pergunta "Será possível encontrar qualquer polígono regular?", o grupo respondeu "Dá". E à pergunta "E polígonos irregulares?", o grupo respondeu "Este não dá". E no verso da folha, imediatamente por baixo do registo da professora— "PD y = kx; PI $y = \frac{k}{x}$"—o Grupo D fez ainda o seguinte registo: "Angulo = $\frac{360}{N}$; N$\longrightarrow$nº de lados". Dá ideia, portanto, que este grupo, por meio da interacção com a professora, tenha entendido que a relação era a mesma nos dois casos e tenha expresso a expressão analítica da função de proporcionalidade inversa associada aos polígonos regulares, a partir da expressão geral escrita anteriormente pela professora na sua ficha.

Assim, os únicos grupos que registaram a conclusão acerca da questão se é possível encontrar polígonos irregulares foram os grupos D e E. O Grupo E escreveu o seguinte no espaço da ficha por baixo da Questão 4, após registar quais os polígonos experimentados com o livro de espelhos: "Pode-se encontrar polígonos regulares mas não se pode obter polígonos irregulares".

Como vemos, a turma, na sua globalidade, encontrou uma relação geral a partir da particularização efectuada com os três exemplos particulares fornecidos pela ficha, quer para as estrelas quer para os polígonos regulares. No entanto, nenhum dos alunos desenvolveu qualquer tipo de demonstração da relação descoberta, tendo total convicção na conjectura formulada em termos de conclusão. Aliás, os alunos não exprimiram por escrito qualquer ideia relacionada com a fundamentação de a constante de proporcionalidade ser 360º, apesar de terem expresso essa mesma constante referenciando-a com a unidade de medida da amplitude dos ângulos, o que denota a atribuição de significado a esse valor e, eventualmente, a compreensão de que essa constante significaria a amplitude da circunferência. Nem fundamentaram a razão de se relacionarem número de pontas/número de lados e ângulo formado pelo livro de espelhos. Apenas um grupo (grupo D) exprimiu por escrito que seria possível encontrar qualquer polígono regular mas não fundamentou porquê.

Mais uma vez, os dados dão-nos evidência de que a demonstração não emerge naturalmente no trabalho dos alunos quando a mesma não tem a função de descoberta. Efectivamente, nesta tarefa, a relação geral foi descoberta por intermédio da particularização e os alunos não sentiram necessidade de proceder à demonstração da sua descoberta. Neste caso, em que os alunos dispensam qualquer tipo de comprovação de uma relação em que confiam totalmente ser verdadeira, a demonstração poderia ter surgido se tivesse existido um questionamento explícito que os levasse a fundamentar as afirmações proferidas, cumprindo aquela, assim, um papel explicativo. Como tal questionamento não ocorreu, nem no enunciado da tarefa, nem por parte da *professora* durante a exploração da tarefa, a demonstração não foi feita por nenhum dos alunos.

Contudo, apesar de os alunos não terem enveredado pela demonstração, a turma teve um desempenho francamente positivo na exploração desta tarefa, superando as nossas expectativas e até surpreendendo nos caminhos que tomaram, nomeadamente, o de terem identificado a relação como sendo uma proporcionalidade inversa. A professora ficou visivelmente satisfeita com o trabalho da turma, atendendo sobretudo às características da mesma no início do ano lectivo, quando a professora a recebeu, e à evolução evidenciada ao longo do ano. Chegou até, na fase final da exploração da tarefa pelos alunos, a comentar comigo que experiências como esta deveriam ser divulgadas, pois são aulas-laboratório como a que tinham acabado de viver que permitem a aprendizagem da Matemática, pelo facto de os alunos construírem o seu conhecimento através da experimentação. Comentou ainda que considerava que a turma estava a pensar muito bem, tendo-se admirado do facto de eles terem mobilizado um assunto trabalhado já há tanto tempo, e terem-no aplicado bem, sem que o enunciado para ali remetesse. E, no final da partilha das conclusões relativas à tarefa, a professora fez um elogio colectivo à turma: "Trabalharam muito bem".

Após a exploração da tarefa pelos grupos, procedeu-se à discussão da tarefa, em grupo-turma. Nesta fase da aula, a professora foi questionando a turma para que fosse explicitada a relação em causa na tarefa. Depois, escreveu no quadro a expressão analítica da proporcionalidade directa e a da proporcionalidade inversa. E escreveu, ainda, a expressão analítica adaptada à situação explorada na tarefa: "$y = \frac{360º}{x}$" em que o x podia ser o ângulo e o y, o número de pontas, ou o número de lados dos polígonos regulares; ou vice-versa, consoante o que pretendêssemos saber, se a amplitude do ângulo, se o número de pontas/lados. Foi então que a professora estabeleceu uma ponte entre o trabalho que tinham acabado de concretizar e a matéria apresentada no manual que ainda não tinham abordado: polígonos regulares e polígonos inscritos numa circunferência. Mandou os alunos abrirem o manual para verem que o ângulo dos polígonos que eles tinham explorado era o ângulo ao centro correspondente ao lado de polígonos regulares inscritos na circunferência. Assim, apesar de os alunos não terem desenhado na ficha a circunferência, imaginaram a mesma nos seus trabalhos. Em seguida, a professora pediu aos alunos para registarem nos seus cadernos tudo o que ela tinha escrito no quadro e sugeriu ainda que copiassem também a relação enunciada no manual e que ela própria acabou por escreveu no quadro: "A amplitude do ângulo ao centro correspondente ao lado de um polígono regular de n lados é $\frac{360º}{n}$".

Ao estabelecerem uma conexão entre diferentes conteúdos matemáticos, os alunos superaram o próprio manual pois o mesmo não fazia alusão à proporcionalidade inversa a propósito desta relação. O manual registava ainda que nem todos os polígonos se podem inscrever numa circunferência mas que se podem inscrever na mesma todos os triângulos bem como os polígonos regulares com qualquer número de lados. A professora explicitou esta questão com a turma, um pouco depois, no momento imediatamente seguinte ao da partilha da resolução do primeiro exercício: "Alguns disseram que não era possível polígonos que não fossem regulares. Multiplicando, é evidente que todos os outros são do mesmo tamanho. O ângulo também vai ser sempre o mesmo. Só regulares."

No tempo restante da aula, os alunos fizeram dois exercícios do manual de aplicação deste assunto e também do conteúdo relativo à soma das amplitudes dos ângulos internos de polígonos, abordado numa das aulas anteriores. Começaram por um exercício que fornecia a informação do ângulo ao centro e solicitava a determinação do polígono. Logo após, foi feita a partilha da respectiva resolução no quadro. No exercício seguinte, era pedida a determinação do número de lados de um polígono regular cujo ângulo interno medisse (a) 140º e (b) 135º. Aqui, os alunos estavam induzidos a aplicar o que tinham acabado de explorar e de aplicar no exercício anterior, e diziam que não estava certo, pois não dava divisão certa dividindo 360º pelos números atrás referidos. A professora chamou então a atenção dos alunos para o enunciado e para o ângulo que ali era referido. E advertiu-os para tomarem atenção aos vários conceitos associados a ângulos: ângulos ao centro, "o que são ângulos inscritos, o que são ângulos internos, o que são ângulos externos". Foi importante ter-se misturado os exercícios para eles tomarem consciência dos dois tipos de ângulos: os ângulos ao centro de polígonos regulares para os quais deveriam usar a fórmula descoberta naquela própria aula, e os internos para os quais deveriam usar a fórmula aprendida na aula anterior. A professora acabou por ela própria concretizar o segundo exercício no quadro, enquanto dialogava com a turma de modo a que os alunos fossem participando nessa mesma concretização, ao dar-se conta da dificuldade dos alunos em fazê-lo autonomamente. Nas minhas notas de campo, pode ler-se o seguinte comentário: "Bom, a aula rendeu que se fartou. E este trabalho facilitou o trabalho do dia seguinte, pois nas rotações, usaram de novo esta relação".

Passo agora a apresentar a forma como o grupo-alvo explorou esta tarefa, dando conta igualmente das interacções estabelecidas com a *professora* durante esta fase da aula, mediante os dados recolhidos através de registos áudio e vídeo. No seguinte excerto transcrito, relativo à primeira parte da aula, pode verificar-se como foi descoberta a relação questionada para as estrelas:

Pouco depois de o grupo ter recebido dois livros de espelhos, o Ricardo colocou um deles sobre os ângulos a tracejado na folha.
R- (*ao mesmo tempo que ia colocando o espelho e contando*) Este tem três. E esta tem um, dois… um, dois, três, quatro, cinco, seis… oito. Este tem cinco.
O Ricardo explica ao Bernardo como é que ele deve colocar o livro de espelhos. A seguir, a Sara tira o livro de espelhos das mãos do Ricardo e coloca sobre o primeiro ângulo da sua ficha.
S- Aqui são três. Olha, tão giro!
A Maria pega agora no livro de espelhos que se encontrava com a Sara e coloca no primeiro ângulo.
B- (*coloca o outro livro de espelhos sobre o ângulo do meio de 36º*) Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito. Faz oito?... (*olhando para o Ricardo*)
R- Yaa.
B- São nove. São nove. (*observa atentamente a figura obtida com o espelho*) Olha, aqui fica nove. Aqui fica nove. Fica nove.
R- Oito.

B- Não. Nove.(*colocando de novo o livro de espelhos, volta a contar)* São oito. São oito, mas tens de contar com mais esse, são nove.
R- Calma, calma! Vou contar. (*voltando a colocar o livro de espelhos no ângulo de 36º e contando em silêncio por duas vezes, com um ar entreolhado*) São oito.
B- (*acenando negativamente com a cabeça*) Não.
R- Pera [sic], há uma maneira de saber. (v*olta a contar em silêncio)* São dez. O de lá de trás não se vê por causa desta pontinha (*aponta para a ficha da Maria onde se encontrava o espelho no segundo ângulo)*. Olha aqui. (*chamando a atenção da Maria*). Três. (*pega na calculadora e faz os produtos de modo a que a Maria, sentada ao seu lado, acompanhe os cálculos e o que ele digita na calculadora*). Aqui são três. Sete… (*falando para a Maria*) Estás a perceber? São dez. (*olha para os colegas da frente)* Trezentos e sessenta. Dez. Dez.
M- Dez, multiplicado, trezentos e sessenta.
R- Dá sempre trezentos e sessenta. Cinco, dez, três.

Como vemos, o Bernardo discordou do Ricardo no que respeita ao número de pontas. Enquanto o Ricardo contou oito pontas, o Bernardo contou nove pontas. Este interpretou esta discordância pensando que o Ricardo teria contado unicamente as oito pontas obtidas com o espelho, faltando-lhe portanto contar também com a ponta impressa na folha: "São oito, mas tens de contar com mais esse, são nove." (linha 20). Perante a refutação do Bernardo, o Ricardo decidiu voltar a colocar o livro de espelhos por cima do ângulo do meio para confirmar, tendo voltado a contar oito pontas, o que mereceu nova discordância do Bernardo.

Nesse momento, ocorre um salto qualitativo no seu trabalho: o Ricardo percebe que tem de encontrar uma outra forma de validar o respectivo número de pontas, já que o elevado número de pontas torna a sua contagem confusa—"Pera [sic], há uma maneira de saber." (linha 25). O Ricardo não chegou a explicitar que maneira era essa, mas a análise desse momento da aula e do modo como se desenvolveu a seguir leva-nos a interpretar que o aluno julgou ser preferível observar o que existia em comum nas outras duas estrelas para generalizar para a estrela do meio que tanta dúvida estava a suscitar. Estou convencida que neste momento ele verificou mentalmente que o produto de três pontas pelo ângulo de 120º dava 360. E pensou que se esta característica se mantivesse para a estrela do meio, esta teria que ter dez pontas, já que o ângulo era de 36º. Foi portanto com a convicção depositada nesta generalização que o Ricardo voltou a contar para confirmar empiricamente a relação teórica encontrada. E onde antes tinha sempre contado oito, contou, pela primeira vez dez pontas. Foi portanto o seu convencimento de que as pontas da estrela do meio deveriam ser em número de dez, que fez com que tivesse um cuidado redobrado a fazer a contagem de tal modo a conseguir observar o que ele teoricamente considerava que teria de ser.

Após a contagem, explicitou à Maria, que se encontrava também a contar o número de pontas dessa estrela, na sua própria ficha, a razão de serem dez: "São dez. O de lá de trás não se vê por causa desta pontinha. Olha aqui. São três". Primeiro, o Ricardo explicitou a razão empírica por que, sendo dez pontas, custava a observar essas mesmas dez pontas. Depois, o Ricardo explicitou qual o padrão que identificou nas estrelas da ficha e que o levou a ter a certeza de que seriam dez pontas, pegando nos exemplos que não suscitaram dúvidas para mostrar, com a calculadora, que os produtos dos respectivos números de pontas pelas amplitudes dos ângulos eram sempre iguais a 360. Apesar de não se ver no registo vídeo quais as teclas da calculadora que foram digitadas, dá a ideia de que o Ricardo apenas fez os cálculos para as estrelas de três e de cinco pontas. A seguir ao cálculo para a estrela de três pontas, o Ricardo verbalizou "Sete", o que deve corresponder à tecla que foi digitada a seguir, para colocar na calculadora a amplitude 72º da estrela de cinco pontas. E é a observação desse padrão que conduz o Ricardo ao processo de generalização—"Estás a perceber? São dez. Trezentos e sessenta. Dez. Dez." (linhas 31 e 32)—afirmando, implicitamente que se dava trezentos e sessenta para as outras duas estrelas, para a do meio também teria de dar. O elevado número de pontas, ao dificultar a percepção e a contagem correcta por parte dos alunos, e portanto causar discordância, no seio do grupo, relativamente ao número concreto a registar, constituiu um factor fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático, ao promover a deslocação do trabalho, de um nível empírico para um nível teórico, através de um processo de generalização decorrente da observação de um padrão em dois casos particulares. E foi a relação encontrada pelo facto de o produto ser constante e igual a 360º que fez com que, provavelmente, nenhum elemento do grupo tivesse duvidado do facto de a estrela do meio ter 10 pontas, quando momentos antes o Bernardo não se cansava de refutar com o Ricardo que eram nove pontas. A Maria, logo a seguir, exprimiu essa mesma relação aplicável à estrela do meio—"Dez, multiplicado, trezentos e sessenta"—dando, assim evidência de total convicção no número de dez pontas.

Um pouco depois, o Ricardo verbalizou para os colegas a relação encontrada: "Número de pontas vezes ângulo, igual a trezentos e sessenta". Foi esta mesma relação geral que levou o Ricardo a questionar-me, assim que me aproximei do grupo, se fariam a tabela "para todos, para *n*". Torna-se evidente nesta questão formulada pelo Ricardo a apropriação de um hábito de exprimir a generalização encontrada, recorrendo a *n.* Ou seja, a tabela aqui é um modelo generalizador, servindo o propósito de evidenciar um dado padrão, através da apresentação de exemplos que culminarão com *n* representativo de qualquer número de pontas de estrelas regulares. Eu respondi que se eles vissem uma relação, poderiam colocar exemplos que não estivessem representados na ficha. Logo de imediato, o Ricardo comunicou-me a relação que já tinham visto, usando exactamente os mesmos termos que tinha usado momentos antes, ao falar com os colegas: "Número de pontas vezes ângulo, igual a trezentos e sessenta". Assim que me afastei, o Ricardo usou a calculadora para fazer os cálculos necessários ao preenchimento da tabela de modo a incluir na mesma vários exemplos (ver quadro 14, na p. 641). Tal como já referi atrás, quando apresentei as resoluções dos vários grupos da turma, todos os exemplos colocados na tabela, distintos dos apresentados na ficha, já não estão a ser usados pelos alunos para particularizar, isto é, para estudar uma questão geral através de instâncias particulares. Os alunos apenas particularizaram com os três exemplos da ficha e que surgem nas primeiras três linhas de exemplos da tabela do grupo-alvo. Descoberto o padrão, fizeram de imediato a generalização, não sentindo necessidade de confirmar a conjectura com outros exemplos. Assim, todos os outros exemplos que figuram nas linhas posteriores ao terceiro exemplo são, para o grupo, exemplos generalizáveis, concretizações de *n,* instanciações da relação geral, obtidas à custa desta. Os alunos desenvolveram, portanto, o processo de generalização tanto no acto de verbalização da relação como no acto de registo dos vários exemplos constantes na tabela e que são da sua iniciativa, não estando representados na ficha. Para estes exemplos, o livro de espelhos não foi usado como comprovativo. O que os confirmou como correctos foi a relação geral conjecturada a partir dos três primeiros exemplos, e desde logo assumida como verdade indubitável.

Entretanto, a professora aproximou-se no momento em que o Ricardo se encontrava a usar a calculadora para preencher a tabela, e questionou-os no sentido de direccionar o seu raciocínio para a identificação da relação como sendo de proporcionalidade inversa:

1 P- Qual o conceito?
2 S- Proporcionalidade directa.
3 P- A directa é quando um aumenta, o outro também aumenta.
4 B- A inversa.

A referência à proporcionalidade inversa surgiu da iniciativa de alguns grupos da turma, sem que a professora o esperasse. No caso do grupo-alvo, tal identificação não surgiu do seu trabalho autónomo. Como a professora valorizou a identificação feita por alguns grupos da turma, a mesma acabou por direccionar o trabalho dos restantes grupos no mesmo sentido. Perante a indagação de qual o conceito matemático subjacente, a Sara identifica-o como sendo uma proporcionalidade directa. Clarificado o conceito da proporcionalidade directa pela professora, o Bernardo proferiu, de imediato: "A inversa" (linha 4). Ou fê-lo, por exclusão de partes—ou é directa, ou é inversa—ou por ter consciência de que na relação em causa, quando uma variável aumenta, a outra diminui. Enquanto que nalguns dos outros grupos, quer por escrito, quer oralmente, surgiu explicitamente a expressão narrativa do modo como uma variável variava em função da outra, tal não aconteceu com o grupo-alvo. Este foi o único momento em que tal foi aflorado implicitamente, por antítese à explicitação da proporcionalidade directa feita pela professora.

Vejamos agora um episódio revelador de que, para a inserção dos vários exemplos na tabela, os alunos apenas consideraram os divisores de 360. A professora afastou-se e o Ricardo prosseguiu os cálculos, com recurso à calculadora, para registar os valores na tabela. Quando obtém no visor o valor 12,41, o Ricardo rejeita essa hipótese. Este episódio evidencia que o Ricardo atribuiu propriedades idênticas a ambas as variáveis. Dado que o número de pontas está associado aos números naturais, tendo uma topologia discreta, o Ricardo acabou por atribuir uma mesma natureza à amplitude do ângulo, não aceitando, pois, um número representado na forma decimal, surgido no visor da calculadora. No entanto, poderemos questionarmo-nos sobre qual o significado concreto que teria para o Ricardo o quociente obtido com a calculadora. Seria a amplitude do ângulo ou o número de pontas? Se atentarmos na ordem com que o grupo colocou as colunas na tabela, é natural que essa ordem corresponda à ordem que o Ricardo ia digitando os números na calculadora: 360 a dividir pelo número de pontas (primeira coluna). Se for esse o caso, o quociente obtido é o da amplitude do ângulo (2ª coluna) o que fundamenta a minha interpretação, atrás explanada, de rejeição do Ricardo de um número decimal para amplitude de ângulo. Se for o caso contrário, o Ricardo estará a rejeitar um número decimal para o número de pontas o que corresponde de facto à natureza discreta dos naturais. Nesse caso, estaria, implicitamente, a considerar a amplitude um ângulo como sendo discreta, ao atender unicamente a exemplos de amplitudes que fossem números inteiros. Se analisarmos a expressão analítica da proporcionalidade inversa que o grupo escreveu mais tarde, por solicitação da professora—"nº de pontas = $\frac{360}{\hat{a}ngulo}$"—na frente da ficha, fora da tabela, o quociente corresponde ao número de pontas. No entanto, tal facto não quer dizer que tenha sido esse o significado atribuído ao quociente, no momento em que preenchiam a tabela, já que esses dois registos ocorreram em momentos diferentes da aula. Foi só depois de darem a tabela por concluída, no momento em que se preparavam para fazer a quarta questão, que a professora, ao aproximar-se de novo do grupo, os interpelou para que escrevessem a expressão analítica: "Já me tinham dito que era proporcionalidade inversa. A constante é trezentos e sessenta. Só falta pôr a relação. Qual a estrutura, a fórmula da inversa? O que significa o *k*?". À questão colocada pela professora, o Ricardo respondeu "Número de pontas igual a trezentos e sessenta sobre ângulo". A professora acenou afirmativamente com a cabeça e proferiu ainda, antes de se afastar: "Ou ângulo igual a trezentos e sessenta a dividir pelo número de pontas".

Apesar de o grupo não ter incluído uma última linha com *n* pontas, como tinha sido sugerido pelo Ricardo, poderemos afirmar que a expressão geral escrita pelo grupo fora da tabela (que correspondeu exactamente ao verbalizado pelo Ricardo e não à alternativa sugerida pela professora), poderia facilmente ter sido transposta para a tabela, se tivesse sido essa a intenção do grupo, e se o grupo não tivesse transposto a natureza discreta do número de pontas para a amplitude do ângulo. De facto, a expressão escrita pelo grupo é equivalente a uma outra: ângulo = $\frac{360}{n}$, sendo n o número de pontas, tal como verbalizado pela professora. Portanto, da sua expressão poderiam deduzir a forma de exprimir a relação geral na tabela, colocando, na última linha, n na coluna "Nº de pontas" e $\frac{360}{n}$ na coluna "Ângulo". No entanto, esta última expressão encerra, em si, a generalização para todos os números naturais, a partir do 3, e consequentemente a possibilidade de obtenção de uma sequência de estrelas com um número crescente de pontas, desde o 3 até ao infinito. Trata-se aqui de um infinito potencial já que não posso construir a última estrela, tal como não posso construir o último polígono regular de uma sequência de polígonos regulares com n lados. A expressão, na sua generalidade, ao admitir todo o n (maior que dois), admite também quaisquer números reais para a amplitude do ângulo. E, tal como vimos, esse não foi o entendimento do Ricardo cuja rejeição de um valor decimal, fosse ele atribuído à amplitude de ângulo ou ao número de pontas, leva à assumpção de que não é possível obter uma sequência de estrelas regulares com n pontas. No primeiro caso, ao eliminar-se todas as amplitudes não inteiras, elimina-se também os números de pontas correspondentes. No segundo caso, ao admitir-se unicamente valores naturais para a variável "ângulo", elimina-se todos os números de pontas que têm de ser multiplicados por números não inteiros para se obter um produto igual a 360. Portanto, para o grupo, na sua expressão escrita, o número de pontas não poderia ser substituído por n.

Após terem lido a Questão 4, os alunos ficaram num certo impasse, não tendo chegado a fazer qualquer tipo de experimentação que conduzisse à obtenção de polígonos regulares em vez de estrelas. Nesse momento, eu aproximei-me do grupo e ao ver que nenhum dos elementos estava a ver como deveria fazer o traço, sugeri que traçassem um dos lados de um polígono na própria ficha, por cima de cada um dos bicos, para aproveitarem o traçado dos ângulos representados na ficha. Foi o Bernardo que concretizou o traçado na sua ficha e acompanhei ainda um pouco o grupo nesta fase do trabalho. Depois, afastei-me. Pouco depois, o Ricardo comentou com os colegas do grupo: "Enganei-me. Fiz com sete lados".

Ao voltar a aproximar-me do grupo, sugeri ao grupo que fizesse igualmente uma tabela para os polígonos mas "mais sistemática. Podem começar por três lados, quatro, cinco… Em vez de ficar tudo desordenado, pode ficar ordenado". A inclusão desta tabela e a respectiva organização decorreu, portanto, da interacção com a *professora.* Apesar desta segunda tabela incluir a maioria dos valores da primeira tabela, tendo sido identificada uma relação igual para os dois casos—estrelas e polígonos—o Ricardo voltou a fazer cálculos com a calculadora, não tendo, portanto, copiado os valores da primeira tabela para a segunda. Por outro lado, o facto de a segunda tabela, organizada por ordem crescente de número de lados, não incluir as linhas com 7 e 11 lados, evidencia a interpretação que apresentei a propósito das estrelas, segundo a qual, o Ricardo considera que a relação não se aplica a quaisquer polígonos/estrelas regulares. A concretização da tabela foi levada a cabo pelo Ricardo após o que disponibilizou a sua folha aos restantes elementos do grupos para que registassem nas suas folhas os mesmos valores. Não surgiu qualquer discussão no grupo em torno da exclusão dos polígonos com 7 e 11 lados.

Em suma, todos os grupos estabeleceram uma relação geral entre o número de pontas/lados e o ângulo, tendo alguns identificado, por sua própria iniciativa, a mesma como sendo uma proporcionalidade inversa. Os restantes grupos chegaram à mesma identificação através do questionamento da professora. Mas nem todos os grupos entenderam que tal relação era aplicável a quaisquer estrelas ou polígonos regulares. Nenhum grupo identificou o ângulo como sendo um ângulo ao centro. Nenhum grupo, igualmente, efectuou uma demonstração da relação encontrada, não tendo registado narrativamente qualquer fundamentação relativa ao facto da relação se aplicar a polígonos regulares ou ao facto de a constante identificada ser igual a 360º, ou ainda ao facto de as duas variáveis se relacionarem.

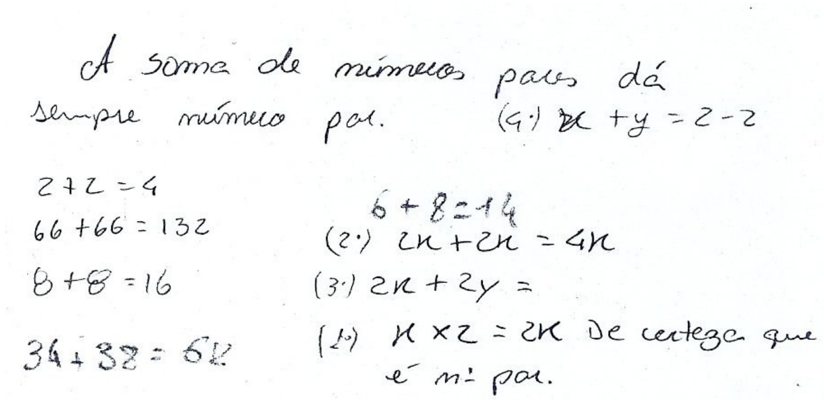
A Natureza da Demonstração na Sala de Aula

Habitualmente, quando os alunos demonstram determinadas propriedades matemáticas, fazem-no de modo narrativo e informal. Fazem-no com o propósito de explicitar o seu raciocínio e as suas descobertas, sem consciência de estarem a produzir uma demonstração. Apesar de a demonstração algébrica ser pouco usada pelos alunos, ainda assim, alguns grupos apresentaram demonstrações deste tipo nos seus trabalhos desenvolvidos em sala de aula.

Vamos Investigar – Matemática (Exploração com números)

Os dois grupos da turma que exploraram a Actividade I tentaram concretizar demonstrações de natureza algébrica, incentivados pelas sugestões da *professora.* Foi portanto uma concretização que teve um motivo social subjacente de corresponder ao que era solicitado pela *professora.* Tal como referi na secção anterior, os alunos, à partida, assumiam as suas conjecturas como conclusões verídicas, dispensando qualquer tipo de comprovação consubstanciada numa demonstração matemática.

Vejamos primeiro o registo escrito do Grupo D:


A soma de números pares dá sempre número par. (4.) $x + y = 2 - 2$

$2+2=4$
$66+66=132$
$8+8=16$
$34+38=62$

$6+8=14$
(2.) $2x+2x=4x$
(3.) $2x+2y=$
(1.) $x \times 2 = 2x$ De certeza que é nº par.

Figura 23. Resolução da Actividade I do Grupo D

Este grupo explorou cinco exemplos de somas de dois números pares, tendo usado nos três primeiros exemplos números pares iguais (2+2; 66+66, e 8+8). Dá ideia que só depois verificaram que estavam a colocar uma restrição que não tinha sido posta pela situação, explorando então mais dois exemplos de somas com números pares diferentes.

O trabalho deste grupo foi acompanhado e muito orientado por mim e a tentativa de concretização de uma demonstração foi claramente influenciada por essa mesma orientação. Como não possuo registos em vídeo do trabalho deste grupo, após a aula, escrevi uma súmula do diálogo ocorrido entre mim e os alunos do grupo, de acordo com o que me lembrava, ao mesmo tempo que ia comentando e analisando a sua produção. Passo a transcrever o que registei nessa altura, informalmente, de modo a funcionar como memorando futuro:

> Enganaram-se na soma 34+38=62 é 72.
> A conclusão que está em cima foi a que tiraram depois de fazerem a soma daqueles 5 exemplos. Não sentem necessidade de mais.
> Fui eu que os questionei e os levei à representação algébrica de qualquer número par.

Foi assim: (este grupo não foi gravado, por isso vou registar o que me lembro)
Eu – Fizeram com estes n^{os} pares, e a soma foi sempre par. Mas como a questão é "quaisquer n^{os} pares" como é que poderão representar qualquer número par? Quais são as características dos n^{os} pares?
Aluno A[70] – Acabam em 0, 2, 4, 6, 8, 10...
Eu – Sim, todos terminam em 0, 2, 4, 6, 8...
Aluno A – São 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...
(já não me lembro bem se foi isto que ele disse mas foi uma característica que não dava para pegar para representar algebricamente)
Eu – Vamos fazer um jogo. Eu penso num nº qualquer. E não vos digo qual. Agora vocês têm de o transformar num nº par. Como é que fazem?
Eles nada responderam. Eu resolvi concretizar.
Eu – Por exemplo, eu pensei no nº 3. Como é que fazem para o tornar num nº par?
Aluno A - 3+3=6
Aluna B - 3+7=10
Eu – Sim. Agora pensei no nº 5.
Aluno A - 5+5, 10.
Eu - 3+3, 6, 5+5, 10. Outra maneira de dizer estes n^{os} que somam com eles próprios.
Aluna C – É 2x3, 6, é 2x5, 10.
Eu – Então, como é que vou representar o nº que pensei e vocês não sabem qual é, não vos digo.
Aluna B – É uma incógnita. É x.
Eles; aluna C – x x $2 = 2x$. De certeza que é nº par.
(e foram registando no papel o que íamos chegando à conclusão, daí que esteja de baixo para cima e eles depois ordenaram com os n^{os} 1º, 2º, 3º, 4º)
Aqui só falta precisar que o x representa um nº natural.
Eu – Então façam lá a soma.
$2x+2x = 4x$ (era a aluna C que escrevia)
Eles - $4x$ é nº par.
Eu – E como é que têm a certeza que o $4x$ é nº par?
Eles nada fizeram. Faltava apenas decompor: $4x = 2$ x $2x$, logo nº par.
Eu – Mas vamos supor que eu penso em 2 n^{os} diferentes.
Aluna B – Então são duas incógnitas : x e y. Fica $2x+2y =$ ......
Não conseguiram fazer a soma, ou melhor, colocar o 2 em evidência: $2(x+y)$ logo nº par.
O que escreveram em 4º lugar: $x+y = 2 - 2$
não percebo o que pensaram com isto
Foi um trabalho que avançou também bastante mas foi muito orientado por mim. Caso contrário, teriam ficado apenas pelos exemplos.
E é a falta de bases em Matemática que os impediu de concluir a demonstração, de verem que $2x+2y = 2(x+y)$.

659

[70] No meu registo, encontram-se os nomes reais dos alunos em causa. Nesta minha citação, substituo-os por aluno(a) A, B ou C para manter o seu anonimato.

A representação algébrica de algo implica não só a compreensão da respectiva estrutura matemática como também a sua explicitação. Assim, enquanto os alunos indicassem os números pares pela sua característica descritiva e perceptiva como sendo os números que terminam em 0, 2, 4 ,6 e 8, seria difícil chegar a uma expressão algébrica que condensasse a estrutura geradora dos mesmos. Ou seja, representar algebricamente os números pares implica que se identifique os mesmos como sendo múltiplos de dois, e que, portanto, se reconheça que poderemos sempre obter um número par se multiplicarmos qualquer número natural por dois.

Foi visando este tipo de explicitação que me ocorreu no momento fazer com os alunos o jogo de transformação de um número em número par. Quando lhes coloquei a proposta de jogo, fi-lo em termos genéricos: penso num número qualquer, seja ele par ou ímpar (não explicitei aqui que esse número era natural mas essa condição estava implícita na situação em que os alunos estavam a explorar) e como é que, partindo desse número desconhecido, eles poderiam obter sempre um número par. Esta forma genérica de colocar o jogo visava que os alunos chegassem à expressão $2n$ como representativa de um número par, em que n é um número natural.

Como tivessem dificuldade em raciocinar assim de forma abstracta com um número qualquer sem concretizar qual, resolvi partir para exemplos de números ímpares de modo a que os alunos vissem como é que os mesmos poderiam ser transformados em pares. Mais uma vez se verifica a importância dos exemplos particulares para os alunos, mesmo deste nível de ensino, para ajudar a caminhar no sentido de uma generalização e de uma maior abstracção. Perante o exemplo “3”, os alunos usaram transformações aditivas, embora de natureza diferente: enquanto a aluna B usou uma transformação puramente aditiva (“3+7=10”), o aluno A usou uma transformação aditiva com uma base multiplicativa (“3+3=6”) ao optar por adicionar o mesmo número ao número dado.

A adição usada pela aluna B é perfeitamente particular na sua génese. Quando a aluna a enunciou, estava a pensar no exemplo específico, sem qualquer pretensão de generalidade. E mesmo que quiséssemos aproveitá-la para uma generalização, colocando o sete como uma constante, teríamos que restringir o número de partida aos números ímpares, já que sendo sete um número ímpar, só gera um número par se somado com outro número ímpar. Por outro lado, mesmo adoptando essa restrição, os números pares obtidos não coincidiriam com a totalidade dos números pares, pois apenas abarcariam os números pares superiores a seis. A estratégia usada pelo aluno A aproximava-se mais do objectivo visado pelo jogo. Embora na sua génese, fosse tão particular quanto a da aluna B, pois o aluno A estava a pensar unicamente no exemplo específico do número três, tratava-se de uma estratégia mais próxima do objectivo da generalização: rapidamente o número três poderia ser encarado como um exemplo generalizável a todos os números naturais (e não apenas aos números ímpares, como acontecia na adição usada pela aluna B), dando visibilidade ao facto de que se obtém sempre um número par se se adicionar qualquer número natural a si mesmo. A minha resposta afirmativa "Sim" às transformações sugeridas pelos dois alunos validou ambas de igual modo, não valorizando uma mais do que a outra.

E perante um novo exemplo, o cinco, transformado agora unicamente pelo aluno A, usando a mesma estratégia ("5+5, 10"), eu chamei a atenção dos alunos apenas para as adições usadas pelo aluno A, ignorando a enunciada pela aluna B: "3+3, 6, 5+5, 10. Outra maneira de dizer estes n^{os} que somam com eles próprios". Pretendia que eles vissem a multiplicação naquelas adições que particularizavam situações de dobro de um número, o que veio a acontecer, de imediato, pela voz de uma aluna que ainda não tinha falado antes, a aluna C: "É 2x3, 6, é 2x5, 10". A representação de um número qualquer desconhecido foi feita através da letra *x* que é a que os alunos, geralmente, identificam como representativa de uma incógnita. Apesar de, em matemática, se usar o x como uma variável real e o n como uma variável natural, considerei que naquele contexto isso era um pormenor irrelevante, e que x poderia ser perfeitamente usado na expressão algébrica de um número par, desde que tal designação significasse para os alunos um número inteiro positivo qualquer. A partir do momento que identificaram o número desconhecido como x, escreveram, de imediato, a expressão algébrica de número par: "x x 2 = 2x". É curioso observar que não a escreveram logo com o registo de 2x, tendo tido necessidade, primeiro, de traduzir fielmente o que tinham feito com os exemplos "2" e "5": "x x 2". Também é interessante verificar a convicção que os alunos colocaram nessa expressão algébrica como representativa de um número par, através do comentário escrito, logo a seguir: "De certeza que é nº par". Outra nota digna de assinalar é o facto de eu ter usado a primeira pessoa do plural em "e foram registando no papel o que *íamo*s chegando à conclusão", o que evidencia claramente que o caminho percorrido pelos alunos naquela fase de trabalho foi um caminho partilhado em conjunto comigo.

Conseguida a expressão algébrica de um número par, os alunos deveriam então traduzir algebricamente a situação proposta. Mais uma vez, fui eu que os orientei nesse sentido: "Então façam lá a soma". Como fizeram a soma com a expressão algébrica acabada de alcançar, $2x$—"$2x+2x = 4x$"—o que corresponderia a uma soma de dois números pares iguais, incentivei-os a traduzirem algebricamente a situação proposta enquanto soma de dois números pares quaisquer, não necessariamente iguais: "Mas vamos supor que eu penso em 2 n^{os} diferentes". Esta sugestão teve resposta pronta por parte da aluna B, a mesma aluna que tinha identificado a incógnita com x: "Então são duas incógnitas : x e y. Fica $2x+2y$ = ...". Enquanto a primeira soma não lhes suscitou dificuldades no que se refere à manipulação algébrica, esta com duas variáveis apresentava-se com uma maior complexidade e os alunos do grupo não conseguiram efectuá-la correctamente. A resolução dos alunos desta soma algébrica encontra-se na linha que eles identificaram como tendo sido feita em quarto lugar: "$x+y = 2 - 2$". No meu registo escrito, manifesto a minha incompreensão da altura acerca desta mesma resolução—"não percebo o que pensaram com isto". Analisando agora o trabalho destes alunos, vejo que os mesmos aplicaram aqui o algoritmo aplicável à resolução das equações através do qual os termos sem parte literal passam para o outro membro da equação com o sinal simétrico para os isolar dos termos com incógnitas que permanecem juntos no mesmo membro da equação. Esta resolução corresponderia à seguinte equação: $-2+x+2+y =0$. Os alunos não viram portanto que não poderiam separar o coeficiente da parte literal daquele modo já que os coeficientes encontravam-se a multiplicar por cada uma das incógnitas e não a somar (e mesmo do ponto de vista que bastaria passar a parte numérica para o outro lado trocando-lhe o sinal, só trocaram o sinal a um dos dois).

Vemos portanto que foi unicamente a dificuldade em concretizar a manipulação algébrica envolvida na demonstração da Actividade I que impediu os alunos deste grupo em concretizar a mesma pois todo o processo conducente a ela já tinha sido percorrido pelos alunos, sob orientação guiada da minha parte.

Analisemos agora a tentativa de demonstração algébrica efectuada pelo grupo-alvo. Os alunos deste grupo, à semelhança de todos os grupos da turma, começaram por adicionar quatro exemplos concretos de números pares—"2+2=4, 4+4=8; 8+8=16; 10+10=20"—tendo colocado uma chaveta à frente das quatro somas e escrito à frente da mesma "Vai dar sempre um número par". Nas suas somas, seguiram o critério de usar números pares iguais. Tal como os restantes alunos da turma, também o grupo-alvo induziu uma conclusão geral—"Vai dar sempre"—a partir dos exemplos particulares, estando convicto da mesma. Ou seja, tal como a restante turma, também os alunos do grupo-alvo não sentiram necessidade de avançar para uma demonstração após terem enunciado aquela conclusão geral. Fizeram-no por negociação com a professora. Vejamos pois o extracto alusivo ao primeiro momento de interacção do grupo com a professora, pouco depois de terem feito as somas referidas atrás:

P- O que é que vocês acham que vai acontecer?
Vários – Dá número par. Vai dar sempre par.
P- Que acham que o número vai ser par, também? Agora, vamos lá tentar convencer os outros ou convencerem-se a si próprios que a ideia que tiveram é a correcta. Vocês têm essa sensação…
B– É quase sempre divisível por dois.
R- É sempre, sempre. Sempre. Se é número par, é divisível por dois.
P- Então, vá, vamos lá, uma maneira de provar às outras pessoas que isso seja, quaisquer que forem os números que sejam envolvidos, isso que vocês estão a pensar que vai acontecer, provavelmente (*imperceptível*). Como é que hão-de provar isso?
Alunos – (*imperceptível*)
P- Pensem lá…
R – Por exemplo, seis mais seis igual a doze; doze a dividir por dois é seis…
(…)
P- Agora eu coloco uma questão. Será que existem alguns números pares que não esses que vocês colocaram aí no vosso projecto (*vê-se a cara do Ricardo com uma expressão intrigada*) que o resultado também é um número par, ou só tem acontecido para esses que vocês se lembraram e que por acaso o resultado era par?
R- (*imperceptível*)
B- (*imperceptível*)
(…)
R- Só dá par.
B- (*imperceptível*)
P- Só acontece quando (*imperceptível*) Vamos lá provar isso por miúdos para não existir uma pessoa que chegue aqui ao pé de vocês e diz assim: tudo bem, esses números que vocês puseram aí dava par, mas quem é que me garante a mim que não há aí um outro muito grande que não aconteça?
(…)
P- Estão a ver a minha questão?
B- (*imperceptível*)
R- (*imperceptível*)
P- É sempre específico, não é? É sempre um específico, não é? Quando vocês agarram num número e escrevem cada um já estão a particularizar, não estão? Tentem lá escrever isso, um número que não seja particular, uma maneira de escrever que vocês falem mas que não trate dum caso

específico, que fale dos números todos nessas condições. O que é que nós usamos na Matemática para falar de todos?
R- (*desenha uma chaveta no ar com os dedos*) Aquele, aquela… (*imperceptível*)
B- (*imperceptível*).
R- (o*lhando para o Bernardo*) chaveta.
P- Conjunto. Vá lá. Mais um bocadinho! (*afasta-se*).
R- (*olhando para o Bernardo*) Parênteses. Se calhar parênteses, número par mais parênteses, número par igual a número par. (*encolhe levemente os ombros e faz um trejeito com a boca).*

A professora tentou incentivar os alunos para uma demonstração que verificasse a conclusão induzida a partir dos exemplos particulares para a generalidade de todos os números pares. E o primeiro argumento usado pela professora nesse sentido é o do convencimento: “Agora, vamos lá tentar convencer os outros ou convencerem-se a si próprios que a ideia que tiveram é a correcta” (linhas 3-5). Trata-se de um argumento que corresponde aos estádios apontados por Mason et al. (1984) no desenvolvimento da actividade de convencimento. No entanto, pouco sentido fará aos alunos do grupo tal argumento pois eles estão absolutamente convencidos da veracidade da conclusão enunciada e a alusão a outras pessoas é puramente hipotética já que na sala de aula não existe qualquer pessoa que esteja a duvidar da sua afirmação e que eles necessitem de convencer das suas razões. E mesmo que esse alguém incrédulo existisse ali realmente, provavelmente, os alunos argumentariam com outros exemplos particulares. Ou seja, nesta fase de negociação de significado, os alunos não apreenderam ainda o estatuto epistemológico do conhecimento matemático inerentemente associado a uma comprovação genérica. Não assumiram ainda a distinção entre a natureza da matemática e a das outras ciências, no que respeita a este aspecto. Não tomaram ainda consciência de que em matemática não se fica satisfeito com a verificação de propriedades em casos particulares. Em matemática, tal é insuficiente, não chega: os alunos deverão avançar mais no seu trabalho no sentido de estabelecer uma demonstração que prove a propriedade induzida para a generalidade dos casos considerados, pois tal corresponde ao *modus fazendus* próprio da matemática. Portanto, no momento em que a professora usou o argumento de convencer, os alunos não estabeleceram qualquer relação com a demonstração nem com a necessidade de lidar com a situação de uma forma genérica, não tendo, pois, compreendido que argumentos particulares são insuficientes para estabelecer a veracidade de uma situação geral.

No entanto, o apelo ao convencimento por parte da professora fez com que, de imediato, emergisse no grupo a discussão acerca de uma característica observada: à afirmação do Bernardo "É quase sempre divisível por dois" (linha 6), o Ricardo contrapõe que é sempre, e não quase sempre—"É sempre, sempre. Sempre. Se é número par, é divisível por dois." (linha 7)—explicitando assim que essa é uma forma genérica de caracterizar os números pares. Esta forma genérica de descrever os números pares poderia ter sido agarrada pelo grupo no sentido de produzir uma demonstração narrativa: se um número par é divisível por dois, então é múltiplo de dois; a soma de dois números pares é a soma de dois números que têm em comum o factor dois, mantendo-se portanto o factor dois na soma; logo, a soma de dois números pares é também par. No entanto, tal não foi feito. Os elementos do grupo ficaram pela descrição genérica de um número par, não tendo desenvolvido o raciocínio baseado nessa premissa em termos da soma de dois números pares.

Entretanto, a professora, neste processo de negociação, continuou o seu discurso de apelo à demonstração. Desta vez, fez um uso explícito do termo "provar", estabelecendo, deste modo, uma relação directa com a actividade de convencer: "uma maneira de provar às outras pessoas" (linha 8). A resposta do Ricardo, ao particularizar o facto de um número par ser divisível por dois—" Por exemplo, seis mais seis igual a doze; doze a dividir por dois é seis…" (linha 14)—evidencia que, nesta fase, considerava que poderia usar um argumento empírico como meio de prova, neste caso, de que um número par é divisível por dois.

Só então é que a professora fez incidir a atenção dos alunos na particularização e na conclusão induzida da mesma: o resultado continuará a ser par para outros números pares ou tal só acontecerá com os números testados pelos alunos? ("Será que existem alguns números pares, que não esses que vocês colocaram aí no vosso projecto, que o resultado também é um número par, ou só tem acontecido para esses que vocês se lembraram e que por acaso o resultado era par?"; linhas 16-20). A utilização do termo "projecto" é revelador do sentido de algo em desenvolvimento atribuído pela professora ao processo de trabalho dos alunos. Ela veicula, portanto, a mensagem de que considera de que o que já foi realizado pelos alunos não é o trabalho definitivo mas sim a primeira etapa de um trabalho em desenvolvimento. De certa forma, diz, implicitamente, aos alunos do grupo-alvo, que espera algo mais deles, algo em processo de negociação. A expressão facial do Ricardo evidencia incompreensão do que pretenderia a professora alcançar com a sua questão. Para si, a questão tem uma resposta clara e indubitável, extraída dos exemplos particulares usados, pois parece-lhe legítimo que, em matemática, a particularização sirva para induzir conclusões gerais, estabelecidas logo como verdadeiras, isto é, assumidas, não como conjecturas, mas sim como verdades comprovadas: a soma é sempre par; os resultados pares obtidos com os seus exemplos não foram ocasionais, não foram por acaso—"Só dá par" (linha 24).

A professora, então, voltou a apelar à produção de uma prova que convença um inimigo, o que corresponde ao terceiro estádio do processo de justificação convincente, apontado por Mason et al. (1984). Os autores designam por inimigo alguém que duvida e questiona tudo quanto se afirma, considerando importante desenvolver a capacidade de cada um ser um inimigo de si próprio, no sentido referido atrás. Neste caso, os alunos já estavam convencidos e não tinham ninguém em particular para convencer. Daí que a professora colocasse como hipótese a existência de alguém que duvidaria que a soma par se manteria para todos os números pares possíveis, personificando assim a figura de 'inimigo'. A professora sentiu portanto que teria que orientar os seus alunos directamente para o terceiro estádio já que os anteriores tinham falhado no que respeita à motivação dos alunos para a produção de uma demonstração. E só a prova poderia anular a oportunidade de um inimigo poder questionar daquele modo a conclusão enunciada pelos alunos: "Vamos lá provar isso por miúdos para não existir uma pessoa que chegue aqui ao pé de vocês e diz assim: tudo bem, esses números que vocês puseram aí dava par, mas quem é que me garante a mim que não há aí um outro muito grande que não aconteça?" (linhas 26-30). E um pouco depois, a professora explicitou um pouco mais o que entendia por essa prova capaz de calar um incrédulo, avançando, na sua negociação, para o apelo ao uso de expressões gerais e não ao uso de exemplos particulares: "uma maneira de escrever . . . que não trate dum caso específico, que fale dos números todos nessas condições" (linhas 38 e 39).

Este apelo à escrita de expressões gerais foi entendido pelo Ricardo, não como uma representação algébrica, mas sim como a expressão de conjuntos. Quando a professora indagou "O que é que nós usamos na Matemática para falar de todos?" (linhas 39 e 40), o Ricardo pensou, de imediato, em conjuntos, fazendo com os dedos no ar o registo do sinal identificador de um conjunto definido por extensão ou compreensão, a chaveta. Apesar de algumas palavras deste momento do diálogo serem imperceptíveis, dá ideia que o Ricardo teria dado um outro nome à chaveta, que o Bernardo teria designado a chaveta pelo seu nome e que o Ricardo teria aceite a designação proposta pelo colega: "(*olhando para o Bernardo*) chaveta" (linha 44). A professora verbalizou o que ele estaria a tentar representar: "Conjunto" (linha 45). A professora afastou-se, tendo incentivado os alunos para a continuação do trabalho no sentido acabado de negociar: “Vá lá. Mais um bocadinho!” (linha 45). Logo de imediato, o Ricardo exprimiu o que entendeu do que estava a ser objecto de negociação com a professora: “Parênteses. Se calhar parênteses, número par, mais parênteses, número par, igual a número par” (linhas 46 e 47). Aqui, referencia a chaveta por “parênteses”, mostrando não se ter apropriado do termo “chaveta”, pronunciada por si, momentos antes. Coloca, pois, como hipótese que a forma de escrever genericamente sobre todos os números naquelas condições seria a da representação dos conjuntos por compreensão, pondo os sinais “+” e “=” entre esses mesmos conjuntos. No entanto, o Ricardo revela pouca convicção no que acaba de dizer, manifestada pelo uso da expressão “Se calhar” e pelos gestos que fez assim que acabou de falar (encolher dos ombros e a expressão facial). Este pequeno episódio é claramente elucidativo do facto de os alunos não terem entendido nem a necessidade de uma demonstração nem a forma de representar algebricamente a situação.

Se confrontarmos este episódio com o modo como o Grupo D chegou a uma representação algébrica, vemos que este tipo de representação significa para os alunos mais a expressão de uma situação envolvendo uma incógnita do que propriamente a expressão genérica de números em determinadas condições. Efectivamente, ambos os grupos tiveram dificuldade em representar algebricamente um número par, desde que a solicitação da *professora* fosse em torno de uma representação genérica: “como é que poderão representar qualquer número par?” (Grupo D) e “uma maneira de escrever . . . que fale dos números todos nessas condições” (grupo-alvo). O Grupo D necessitou da particularização para alcançar a explicitação da propriedade caracterizadora de um número par enquanto múltiplo de dois. E como essa explicitação foi conduzida por mim em forma de um jogo de transformação de um número natural de partida pensado por mim mas desconhecido dos alunos, a representação algébrica de um número par foi alcançada facilmente pelos alunos do Grupo D, a partir do momento em que a solicitação incidiu antes na forma de representar esse número desconhecido:

> Eu – Então, como é que vou representar o nº que pensei e vocês não sabem qual é, não vos digo.
> Aluna B – É uma incógnita. É x.
> Eles; aluna C – x x 2 = $2x$. De certeza que é nº par.

Ou seja, os alunos associam o significado de incógnita ao uso de uma letra para designar um número e não a uma forma de representar a generalidade de números. Enquanto incógnita, ela assume à mesma um valor particular de instanciação de um dado número pensado, embora possa ser variável e admitir vários valores particulares, não encerrando em si a ideia de representar todos os números possíveis, o que implicaria lidar com a ideia de infinito. No entanto, talvez essa ideia de generalidade fosse sendo, a pouco e pouco, interiorizada pelos alunos do Grupo D, à medida que avançavam nesse tipo de representação. Quando registam por escrito que $2x$ é de certeza número par, revelam uma consciência de que estão a representar qualquer número par, e o uso da expressão "De certeza" é indiciador que captaram a propriedade que caracteriza os números pares e que os faz distinguir de outro tipo de números.

Voltemos de novo ao trabalho do grupo-alvo para tentarmos perceber como é que o mesmo evoluiu.

A investigadora aproxima-se e escuta os alunos. O Ricardo e a Sara trocam impressões que são, em parte, imperceptíveis no registo vídeo.
R- Uma regra é ser todos. Em vez de ser só um. Dois mais dois. Número par mais número par. Ou seja, todos os números pares.
I- (*imperceptível*) uma letra. (*imperceptível*) Arranjem uma letra; com aquela letra representam todos os números pares (*falando em voz baixa, ao mesmo tempo que a professora)*.
P- (*fala alto para toda a turma*) Olhem, ouçam lá. Ouçam lá, se faz favor. A língua portuguesa como nós já temos aqui comentado imensas vezes, a

ordem às vezes é muito importante. Olhem, pares de números e números pares não quer dizer o mesmo. Pares de números são dois quaisquer. Dois só. Números pares são números que têm de ser todos pares. É outra coisa, está bem? (*falando agora mais baixo e dirigindo-se directamente para um aluno de um grupo)* Já percebeste a diferença?

A investigadora e o Ricardo continuam a falar, não ouvindo o que a professora diz; a voz desta abafa o seu diálogo tornando-o, em parte, pouco perceptível, no registo vídeo:

I- Para ser par, o que é que esse número tem de ser?

R- Tem de ser divisível por dois.

I- Então vá. Arranjaram uma característica. (*olha para o caderno do Ricardo e lê o que está escrito*) O *p* é par. O *p* pertence a este *n* natural (*aponta na direcção do quadro*) (*imperceptível*) natural, o que é que ele tem de ter, que número é que vocês têm que lá associar para garantir que esse número não é um número ímpar, é par? Pensem lá.

R- (*falando para a investigadora e apontando para o seu caderno*) Stora, pode ser cá em cima *p* igual a número par?

I- Mas se *p* for uma letra que represente um número natural (*aponta para o caderno do Ricardo*)

R- Sim.

I- (*continuando a frase iniciada antes)* vejam lá o que é que vocês têm de fazer a esse número natural para ele ficar par, percebem?

R- Número par, divisível por dois.

I- Por exemplo. Vejam lá como é que representam em termos numéricos o ser divisível por dois. Escrevam isso.

A investigadora afasta-se e o Ricardo escreve. Depois, tem um momento de brincadeira, falando directamente para a câmara de vídeo . Pouco depois, a investigadora volta a aproximar-se.

B- (*falando para a investigadora e apontando ao mesmo tempo para o cálculo registado no caderno do Ricardo)* Dois mais dois, igual a quatro, por exemplo.

I- Um exemplo, não é? Mas vocês estão já a ir para lá do exemplo. Já estão a tentar representar todos os números.

A investigadora afasta-se. O Ricardo escreve.

S- (*imperceptível*)

B- (*imperceptível*)

R- (*olhando para a Sara*) Se puseres um *n,* se puseres só um *n,* é números naturais, pode ser um, o dois, o três, o três e o um… (*imperceptível*) (*apontando para os restantes colegas da turma)* Os outros podem não perceber, (*imperceptível*) só o número natural, o três, quatro, cinco; só os naturais que são divisíveis por dois, ou seja, o dois, o quatro, seis, oito, dez, doze, percebes?

S- Não estou a perceber.

R- (*olhando para a Sara*) Não, pera [sic]. Ouve. Números naturais, um, dois, três, quatro, assim… (*vai registando ao mesmo tempo no caderno*) Se nós pusermos números naturais a dividir por dois, só podem ser estes aqui (*vai fazendo um círculo à volta de alguns dos números acabados de registar)* porque os outros são divisíveis por três.

M- (*falando para a Sara em tom explicativo*) Só números pares.

R- Se pusermos *n,* pode ser um, o dois, três, quatro, estás a ver? Pode ser todos os números. Mesmo os que não são divisíveis por dois.
A professora aproxima-se.

O extracto transcrito acima começa pela explicitação por parte do Ricardo da sua preocupação em encontrar uma forma de exprimir a situação genericamente—"Uma regra é ser todos" (linha 3)—em vez de a exprimir através da particularização—"Em vez de ser só um. Dois mais dois" (linha 3). E contrapõe a essa particularização, a expressão genérica, fazendo apelo à sua descrição narrativa: "Número par mais número par. Ou seja, todos os números pares" (linhas 3 e 4). Não existe nesta intervenção qualquer indício de que o Ricardo estivesse a pensar de que tal poderia ser feito por meio de uma expressão algébrica. Sou eu que, logo a seguir, sugiro que os alunos utilizem uma letra representativa de números. Primeiro, verbalizo que "com aquela letra representam todos os números pares" (linhas 5 e 6), o que poderia ter influenciado o Ricardo a registar no seu caderno "O *p* é par" (linha 21) e só depois é que tento orientá-los para a expressão da característica própria dos números pares: "Para ser par, o que é que esse número tem de ser?" (linha 18). A esta pergunta, o Ricardo responde prontamente: "Tem de ser divisível por dois" (linha 19). Mais uma vez, esta resposta revela uma caracterização narrativa de números pares. Tento orientá-los para uma expressão algébrica: "que número é que vocês têm que lá associar para garantir que esse número não é um número ímpar, é par?" (linhas 23 e 24); "Mas se *p* for uma letra que represente um número natural vejam lá o que é que vocês têm de fazer a esse número natural para ele ficar par, percebem?" (linhas 27; 30 e 31); "Vejam lá como é que representam em termos numéricos o ser divisível por dois. Escrevam isso" (linhas 33 e 34).

Assim que me afastei, o Ricardo fez um determinado registo no seu caderno. Como não fiquei com cópia do mesmo, neste momento poderei apenas induzir o que possivelmente ele teria lá escrito pela análise do diálogo entre os alunos. Vejamos primeiro o registo do grupo na ficha de trabalho. No espaço reservado à resolução da Actividade I, pode observar-se um traço horizontal que separa a particularização, já citada acima, da tentativa de demonstração algébrica, o que, por si só, evidencia alguma consciência de se tratar de resoluções com naturezas distintas e, por isso, separadas explicitamente por uma linha que dividiu, assim, uma célula da tabela em duas células. Passo a transcrever o conteúdo da segunda célula:

> n = números naturais
>
> $\frac{n}{2}$ = números naturais divisíveis por 2, logo números pares
>
> $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{2n}{2}$
>
> Conclusão: a soma de quaisquer números pares vai dar sempre número par, divisível por 2.

Atendendo ao diálogo acima transcrito, poderemos induzir que no seu caderno o Ricardo teria escrito algo semelhante ao que acabou por figurar na ficha—as primeiras duas linhas do registo[71]—mas colocando a letra *p* onde depois acabariam por representar por *n.* Aliás, o discurso do Ricardo desenvolve-se em torno da argumentação dirigida à Sara, fundamentando a razão porque não se poderia colocar o *n* e a razão pela qual se deveria colocar uma outra letra. O Ricardo exprimiu algebricamente o facto de os números pares serem divisíveis por dois através da divisão por dois, e para ele era claro que no numerador apenas poderiam estar os números pares, para que esse quociente fosse exacto. Se se colocasse o *n,* dado que esta letra é representativa de todos os números naturais, poder-se-ia também obter quocientes não

673

[71] A soma só foi efectuada momentos depois.

exactos resultantes da divisão dos números ímpares por dois, como é o caso de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{3}{2}$: “Se pusermos *n,* pode ser um, o dois, três, quatro, estás a ver? Pode ser todos os números. Mesmo os que não são divisíveis por dois” (linhas 59 e 60). A invocação de quociente exacto não é feita explicitamente pelo Ricardo; esta ideia está implícita na noção de ser divisível por um dado número. O Ricardo revela alguma preocupação com a comunicação, com a explicitação do registo de forma a que os restantes colegas entendam o que eles pensaram, e esse aspecto social é utilizado também por si como argumento da não colocação do *n*: “Os outros podem não perceber” (linhas 48 e 49) que esse *n* apenas representaria “os naturais que são divisíveis por 2” (linhas 49 e 50), caso colocassem o *n* com um sentido diferente do convencionado universalmente.

A particularização é usada pelo Ricardo como ilustração e reforço da sua argumentação com a Sara. Ele enuncia e escreve exemplos do início da sequência dos naturais—“Números naturais, um, dois, três, quatro, assim…” (linhas 53 e 54)—e assinala, depois, circundando com círculos os exemplos registados divisíveis por dois. A sua justificação “porque os outros são divisíveis por três” enunciada com o sentido de todos os ímpares não serem divisíveis por dois deve-se possivelmente ao facto de ter enunciado a propriedade alusiva ao último exemplo registado e não assinalado com um círculo, o três, e generalizado irreflectidamente a todos os ímpares.

Vemos portanto que para os alunos do grupo-alvo, uma expressão algébrica não é uma expressão geradora e funcional de algo, mas unicamente uma expressão descritiva. Assumindo *p* como um número par, incluído no conjunto dos números naturais, a expressão $\frac{p}{2}$ parte do número par, descrevendo a sua característica de ser divisível por dois. É uma expressão que gera a sequência dos números naturais. Os alunos não entenderam por conseguinte que para provar que uma soma de números pares continua a ser par teriam que obter uma expressão algébrica que gerasse os números pares e não os números naturais. E para tal, nunca poderiam partir do próprio número par; teriam que partir dos números naturais. A obtenção de uma expressão geradora de número par poderia ser facilitada pela explicitação de que ser divisível por dois é o mesmo que ser múltiplo de dois, pelo entendimento da divisão e da multiplicação como inversas uma da outra. Efectivamente, enquanto ser divisível por dois parte do número par para se obter um número natural, o ser múltiplo de dois parte do número natural para se obter um número par. Vejamos agora como é que depois de toda a argumentação do Ricardo contra a utilização da letra *n,* acabaram por a utilizar no registo definitivo. Vejamos a transcrição de parte do diálogo ocorrido entre o grupo-alvo e a professora assim que esta se aproximou:

> P- (*o Ricardo aponta para o seu caderno*) Então? Já descobriram uma fórmula geral, não é? Portanto, vamos dar, vamos falar duma letra, vamos falar duma letra, para usar na fórmula geral… (*fez uma pausa enquanto olha para outro grupo em frente)* O *n*.

Em seguida, a professora incentivou os alunos para efectuarem a soma, dizendo que eles sabiam somar fracções e mesmo quando estas não continham apenas números. A professora afastou-se e o Ricardo e a Sara continuaram a discutir o mesmo: "O três não é par. É ímpar. Só o quatro é que é par", afirmava o Ricardo. Em seguida, eu aproximei-me do grupo e depois de lhes sugerir que registassem todo o processo para a ficha, pronunciei-me a respeito da letra a usar: "O *n* é uma letra mais próxima de número natural. Mas pode ser uma letra qualquer. A letra não importa, desde que ponham o significado da letra". Afastei-me e o Ricardo escreveu algo no seu caderno, possivelmente a soma das fracções. A Sara começou a registar o processo efectuado para a ficha e o Ricardo ditou-lhe, depois, o que ela haveria de escrever na segunda célula: "Agora *N,* aquele *N* assim (*e desenha no ar com os dedos a letra maiúscula)* igual a número natural". Em seguida, a Sara olhou para o caderno do Ricardo e interpelou-o:

> S- Tu tens aqui *p* – números pares.
> R- Não, a stora disse que podíamos pôr logo *n,* que é mais fácil.
> *A Sara apaga. Os rapazes brincam um pouco. A professora aproximou-se.*
> P- Isto 2*n* sobre dois é o resultado? Então vá, que é que concluem acerca disso?
> R- Vai dar *n* par.
> P- Vocês há bocado… Podem pôr *n* mas é minúsculo, estão a tratar de números, quando é maiúsculo, é um conjunto. Tá [sic] entendido?
> B – (*imperceptível*)
> *A Sara apaga, provavelmente para mudar a letra maiúscula para minúscula.*
> R- Podemos pôr, por exemplo: (*dita a conclusão para a Sara registar na ficha)* a soma de quaisquer números pares vai dar sempre número par, divisível por 2.

Vemos, portanto, que o Ricardo abdica da sua posição em defesa da letra *p*, sob influência do seu entendimento das intervenções da *professora.* No entanto, há aqui sentidos pessoais diferentes, associados à letra: enquanto que para a *professora, n* assume o sentido de número natural, para o Ricardo *n* é um número natural—"Agora *N* . . . igual a número natural"—que vai sofrer a restrição de contemplar apenas os divisíveis por dois, levando-o a representar os números pares por $\frac{n}{2}$: "$\frac{n}{2}$ = números naturais divisíveis por 2, logo números pares". Assim, o Ricardo olha para esta expressão de forma descritiva e não como uma expressão geradora de números. O entendimento de *n* restrito aos pares está evidenciado na resposta do Ricardo—"Vai dar *n* par"—ao simplificar mentalmente a expressão $\frac{2n}{2}$, também ela descritiva de número divisível por dois, segundo a forma de pensar do Ricardo. Ou seja, apesar de ter substituído *p* por *n,* o significado deste último é o mesmo adoptado anteriormente para *p*.

Em suma, existe evidência empírica de os alunos (do grupo-alvo) encararem uma expressão algébrica como sendo descritiva de uma propriedade declarada previamente de forma narrativa, sem lhe associar o seu carácter funcional. Existe ainda evidência de os alunos (do Grupo D) encararem uma expressão algébrica como a expressão em que está envolvida uma dada incógnita, sem lhe associar o seu carácter generalizador. Vemos também que as tentativas de construção de uma demonstração algébrica por parte dos grupos que concretizaram a Actividade I resultaram das interacções estabelecidas com a *professora* que acabou por orientar o trabalho dos alunos nesse sentido, negociando com eles a necessidade de uma comprovação da conclusão alcançada com exemplos particulares para todo o universo em causa, o dos números pares, apesar de os alunos terem tendência a exprimirem-se através de um discurso narrativo.

Investigar Matemática – Bissectrizes…

Conforme já referi, nesta tarefa, todos os grupos concretizaram demonstrações algébricas. Todos eles preferiram a notação dos ângulos com letras do alfabeto grego, tendo a maioria dos grupos utilizado as letras α e β. De acordo com as notas de campo que redigi após a aula, a maioria dos alunos da turma apenas alcançou essa conclusão por intermédio da própria demonstração pois a simples observação do esquema não os fez ver qualquer relação entre as bissectrizes, não tendo identificado um ângulo recto formado pelas mesmas, talvez por este se encontrar, em todos os esquemas desenhados pelos alunos, numa posição oblíqua, pouco habitual relativamente à forma como os alunos usualmente vêem ou representam um ângulo recto. Analisando os registos escritos dos alunos (ver quadro 16), podemos concluir que o Grupo C teve uma percepção, pela observação do esquema, de que as bissectrizes faziam entre si um ângulo recto, previamente à construção da demonstração.

Passo a apresentar as demonstrações realizadas pelos grupos, as quais são bastante similares no que respeita ao raciocínio matemático subjacente, embora tenham algumas diferenças ao nível da forma:

Grupo-alvo: $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180º \\ \frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \frac{180º}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180º \\ \alpha + \beta = 90º \end{cases}$ R: A relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares é que formam sempre um ângulo de 90º.	**Grupo B:** $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180º$ $\alpha + \beta = 90º$ As bissectrizes formam um ângulo de 90º.	**Grupo C:** Através do esquema, as bissectrizes aparecem [sic] formar um ângulo de 90º. $\frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \frac{180º}{2}$ $\alpha + \beta = 90º$ A relação entre as bissectrizes dos ângulos suplementares é que dividem os ângulos suplementares vai dar um ângulo recto (90º).
Grupo D: $2\sigma + 2\delta = 180º$ $\sigma + \delta = 90º$ As bissectrizes de ângulos suplementares formam um ângulo de 90º.º	**Grupo E:** $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180º$ $\frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \frac{180º}{2}$ $\alpha + \beta = 90º$ Resposta: A relação entre as bissectrizes é que formam um ângulo de 90º.	**Grupo F:** $\alpha + \beta = 180º$ $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180º$ $\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 90º$ A relação entre as bissectrizes é que são perpendiculares.

Quadro 16. Demonstrações realizadas pelos diferentes grupos

Embora um dos grupos, o Grupo F, tenha feito um registo dos ângulos distinto dos restantes grupos da turma, todos seguiram o mesmo raciocínio e um processo similar.

Primeiro, fizeram o esquema que, tal como referi atrás, de uma forma geral, não foi revelador da relação entre as bissectrizes. O esquema consistiu na representação de um ângulo raso, colocado numa posição horizontal, e na representação de uma semi-recta que corresponde ao lado comum dos dois ângulos suplementares, cuja soma das amplitudes é a do ângulo raso representado. No esquema, foram também representadas cada uma das bissectrizes dos referidos ângulos suplementares. O traçado das bissectrizes foi feito a traço cheio, por alguns grupos, e a tracejado, por outros grupos, mas sempre feito, por todos os grupos, a olho nu, sem qualquer preocupação de medição rigorosa—o traçado está localizado em todos os esquemas sensivelmente a meio de cada um dos ângulos (menos bem conseguido perceptivamente no caso do Grupo D). Por fim, o esquema apresenta ainda o registo algébrico dos semi-ângulos definidos pelas duas bissectrizes, tendo todos os grupos usado a mesma notação para cada par de semi-ângulos iguais.

As demonstrações são similares envolvendo o mesmo tipo de passos e raciocínios. Todas elas partem da soma dos ângulos suplementares, a qual é rescrita depois como soma dos quatro semi-ângulos e, por último, é deduzida a soma dos dois semi-ângulos adjacentes como sendo metade da soma anterior. Esta dedução decorre do facto de os alunos terem identificado que esta última soma correspondia à amplitude do ângulo formado pelas duas bissectrizes, para o que contribuiu fortemente o apoio do esquema. O resultado de 90º surge explicitamente em várias das resoluções dos grupos como o resultado de uma mera manipulação algébrica, ou seja, resultando da simplificação da equação $\frac{2\alpha}{2}+\frac{2\beta}{2}=\frac{180º}{2}$. No entanto, a escrita desta equação pressupõe, por si só, ou (1) a compreensão da relação numérica envolvida numa adição, já que, ao somarmos dois números que sejam metades de outros, a sua soma irá ser igualmente metade da soma dos números anteriores, ou (2) a aplicação de uma técnica associada à resolução de equações, pela qual as operações efectuadas a um dos membros da equação têm de ser igualmente efectuadas no outro membro, isto é, ao dividir um termo por dois, terei de dividir todos os restantes termos por dois em ambos os membros da equação, para manter a relação de igualdade expressa pela equação. Os dados provenientes dos registos escritos da turma são insuficientes para nos darem evidência sobre o que teria estado na base da escrita da referida equação. De qualquer modo, poderemos concluir que foi o cálculo demonstrativo aplicável à generalidade de ângulos nas condições impostas pelo problema que deu a resposta aos alunos de que as bissectrizes em causa formavam um ângulo recto. O esquema não constituiu um instrumento perceptivo mas sim um instrumento ao serviço de um raciocínio geral. O esquema ajudou os alunos a pensar matematicamente e a dar sentido à própria formulação da questão para a qual teriam de encontrar uma resposta.

Apesar de ter optado por não incluir no quadro 16 os esquemas realizados pelos alunos, podemos considerar que os mesmos fazem parte integrante das demonstrações, sem os quais dificilmente os alunos teriam conseguido concretizar as mesmas. Por exemplo, se observarmos o esquema elaborado pelo Grupo F (figura 24) verificamos que os alunos estavam a considerar a soma das amplitudes dos ângulos $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\beta}{2}$ pois fizeram um traço curvo entre as bissectrizes, representadas a tracejado, abarcando com esse traço os dois ângulos, apesar, de, por lapso, terem registado a soma de $\frac{\beta}{2}$ com $\frac{\beta}{2}$.

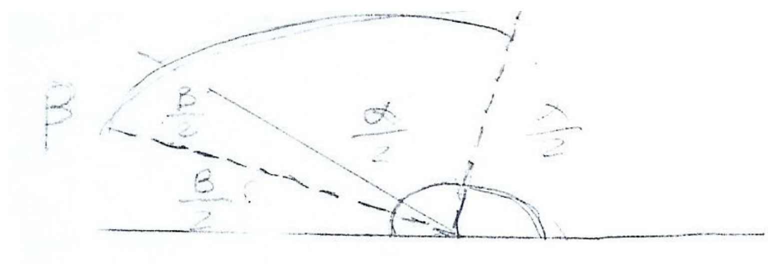


Figura 24. Esquema elaborado pelo Grupo F

O Grupo F foi o único que considerou α e β como representativos dos ângulos suplementares. Todos os outros grupos representaram pelas letras cada um dos semi-ângulos, repetindo a notação da letra para os semi-ângulos iguais. Assim, a expressão "$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90º$" teria, para o Grupo F, o mesmo significado que "$\alpha + \beta = 90º$" para os restantes grupos. Os grupos também se diferenciaram pelo modo como registaram o par de semi-ângulos iguais: ou imediatamente pelo produto por dois ("2α", por exemplo), ou como uma soma de parcelas iguais ("$\alpha+\alpha$").

Vejamos agora, de um modo mais detalhado, como se processou o trabalho no seio do grupo-alvo. Neste grupo, a demonstração que permitia descobrir a relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares foi alcançada de forma muito rápida pelo Ricardo. Foi descoberta através de um *insight* e expressa em modo narrativo.

Todos os elementos do grupo começaram a tarefa pelo completamento das frases colocadas na parte superior da ficha de trabalho. Entretanto, enquanto os colegas de grupo dialogavam em torno de quais as letras do alfabeto grego deveriam colocar na última frase a completar, o Ricardo desligou-se por completo desse mesmo diálogo e, de braços assentes em cima da mesa, olhava atento para a questão colocada na tarefa. Manteve-se assim totalmente absorto durante dezasseis segundos, parado, sem nada registar, até que, interrompendo os colegas que ainda enunciavam letras do alfabeto grego, exclamou subitamente: "Yaa!! Já sei! Bissectrizes de ângulos suplementares porque somados eles dão um ângulo de noventa graus". Dito isto, fez um gesto de entusiasmo e emitiu um som semelhante a um estampido, idêntico a uma rolha a saltar quando se abre uma garrafa de champanhe. Os colegas não reagiram, como que alheados. O Bernardo manteve-se a olhar para o Ricardo. A Sara pareceu não ter dado importância à descoberta do Ricardo, continuando a registar as letras do alfabeto grego na última frase que tinham de completar. Vejamos o extracto da transcrição alusivo ao momento seguinte:

R- Então, eu vou explicar. Vou explicar.
O Ricardo começa a fazer um esquema no seu caderno. A Sara escreve na sua ficha e não presta atenção ao Ricardo. O Bernardo e a Maria olham para o caderno do Ricardo.
R- (*olhando para o Bernardo, e apontando para o esquema que vai construindo enquanto fala*) Isto é dois ângulos suplementares. Dá cento e oitenta.
M- Pera [sic] aí que falta a Sara.
S- (*a Sara começa a olhar e a prestar atenção*) Diz.
R- Isto são dois ângulos suplementares, dá cento e oitenta. Quando dividimos, é isto e isto (*traça as bissectrizes enquanto fala*).
S- (*acenando afirmativamente com a cabeça*) É a bissectriz.
R- Tem calma!... (*a Sara sorri*) Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus.
Faz-se uma breve pausa.
S- Não tou [sic] a perceber. É o quê? É um matemático que temos aqui! A sério, não percebi.
R- Sei que não percebeste… Também eu. Nem eu percebi.
S- (*sorrindo*) Ah! Tu não percebeste?! Boa!
R- Eu tenho a certeza que tá [sic] bem. Mas agora não percebi…
O Ricardo apaga o esquema acabado de construir no seu caderno.
S- (*falando para a Maria enquanto esboça um esquema mas com o lápis no ar*) Usa os conhecimentos para descobrir isto… Ou seja… Aqui, algumas coisas, estas coisas têm de se aproveitar aqui…
M- Ângulos suplementares…
R- (*dando seguimento à frase iniciada pela Maria)* Cento e oitenta graus. Metade…
M- A bissectriz…
R- Dá noventa graus. A bissectriz, dá noventa graus. Usa a metade de um ângulo e a metade de outro. Logo, dá noventa graus.
A Sara olha para o Ricardo com uma expressão muito atenta.
R- (*falando para a Sara*) Não percebeste?
S- Percebi.
O Ricardo volta a fazer um esquema no seu caderno.

R- (*olhando para a Sara e depois apontando para o esquema enquanto regista valores numéricos*) Por exemplo, por exemplo, vou usar números assim marados, sei lá… Vá… Aqui é sessenta, aqui é cento e vinte. A bissectriz (*traça a bissectriz*) a fazer isto, dá aqui trinta e aqui sessenta (*traça a outra bissectriz*). Trinta mais sessenta, noventa. Ângulo recto. Percebeste?

S- (*aponta para o caderno do Ricardo*) Silva, (*imperceptível*) que isto tá [sic] uma grande confusão. Não tou [sic] a perceber nada.

O Ricardo apaga o esquema com os exemplos acabados de registar no seu caderno.

R- (olhando para o Bernardo em frente) É metade! Assim, dá um ângulo recto.

Na compreensão da relação entre as bissectrizes, o Ricardo não necessitou de qualquer esquema. Possivelmente, visualizou-o no curto espaço de tempo em que se fez luz no seu pensamento de procura de uma dedução lógica a partir dos únicos dados que possuía: ângulos suplementares e bissectrizes. Trata-se de uma demonstração com características narrativas, não resultando de qualquer manipulação algébrica, mas sim unicamente de um raciocínio lógico e dedutivo baseado em relações gerais e teóricas: se dois ângulos suplementares somados dão 180º e as suas bissectrizes os dividem ao meio, então a soma das metades de cada um dos ângulos suplementares é metade de 180º, é 90º; logo é um ângulo recto o ângulo entre as duas bissectrizes. O raciocínio claramente dedutivo do Ricardo encontra-se evidenciado até no modo como ele usa o termo conclusivo "logo": "Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus." (linhas 13 e 14). A expressão " metade de cento e oitenta por fora" pretende explicitar que a amplitude procurada é a do ângulo que está dentro das bissectrizes, colocando-a em confronto com a amplitude total dos dois ângulos suplementares—"cento e oitenta por fora"—de forma a estabelecer uma relação entre ambas.

No entanto, o registo escrito do grupo não apresenta qualquer marca desta demonstração narrativa e informal nos termos em que o Ricardo a comunicou oralmente aos colegas. Tal como os restantes grupos da turma, também este grupo produziu uma demonstração algébrica, incentivado e orientado pela *professora* a fazer o esquema e a proceder ao registo algébrico das relações entre ângulos encontradas. Eu não me tinha apercebido, nos contactos que tive com este grupo durante a aula, que o Ricardo já compreendera a relação procurada e que já a teria comunicado aos colegas.

Vejamos pois o que se passou após o momento transcrito acima. Depois de o Ricardo ter apagado o esquema no seu caderno, todos os elementos do grupo ficaram, nuns breves instantes, num certo impasse, sem nada fazer. A professora aproximou-se do grupo pela primeira vez e, de imediato, o Ricardo interpelou-a:

> R- Stora, dá um ângulo de noventa graus. A relação é que faz um ângulo de noventa graus. Agora, não consigo explicar aos outros. Os outros…
> P- Então, mas vamos fazer um esquema. Eu faço aqui uma nota, sugiro, não é? Sugiro… fazer um esquema… façam um ângulo…
> B- (*apontando para o caderno do Ricardo*) Ele já fez aqui, stora. Mas foi uma grande confusão.
> R- Sim, só que eu fiz sem régua…

O Ricardo comunicou a sua descoberta à professora sem explicitar o raciocínio que o conduziu à mesma. Comunicou igualmente a sua dificuldade em explicar aos colegas a razão que fundamentava essa mesma descoberta. A professora pareceu ignorar a descoberta do Ricardo e tentou dar resposta à dificuldade expressa pelo Ricardo em fazer com que todos os elementos do grupo compreendessem a relação em causa. Sugeriu portanto a elaboração do esquema de modo a que todos os alunos do grupo pudessem apropriar-se das relações focadas na tarefa. Foi uma intervenção didáctica que visava a apropriação do trabalho e da compreensão matemática por parte de todo o grupo e não apenas por um dos seus elementos, o Ricardo. De facto, para se compreender, tem de se 'meter a mão na massa', tem de se fazer; não basta ouvir os outros. E esta intervenção da professora como que fez 'tábua rasa' da descoberta prévia do Ricardo para remeter o trabalho ao grupo, exactamente para um ponto de partida inicial, como se ainda ninguém, no grupo, tivesse alcançado qualquer conclusão, visando assim que todos se envolvessem no trabalho matemático.

O esquema que o Ricardo construíra por duas vezes no seu caderno e, em ambas as vezes, apagara, tinha sido elaborado como suporte de comunicação do seu *insight* aos colegas. Não foi feito em resposta à solicitação expressa na nota incluída no próprio enunciado da tarefa—"Faz esquemas dos ângulos e respectivas bissectrizes para desenvolver a tua investigação"—e por isso, não foi assumido como parte integrante do trabalho a registar na ficha. Daí que, nessa fase inicial, o esquema tivesse sido rabiscado unicamente num suporte de papel pertencente ao Ricardo, ou seja, no caderno, sem qualquer pretensão de mostrar ou de entregar à professora como correspondendo ao trabalho final do grupo. Teve, pois, um carácter totalmente provisório, sem a presunção de ser reificado, o que culminou no acto de ser apagado. Tanto a Sara como o Bernardo exprimiram o seu parecer de que o esquema feito pelo Ricardo no caderno estava confuso.

A professora continuou a acompanhar um pouco o grupo, nomeadamente a elaboração do esquema na ficha de trabalho pelo Ricardo pois naquele momento foi o único elemento do grupo a encetar a concretização do esquema. A professora entregou uma régua ao Ricardo para que este traçasse a direito os lados dos ângulos e, em seguida, negociou explicitamente o sentido pretendido com o esquema que, tal como o nome indica, não constitui uma construção geométrica rigorosa, o que implicaria a utilização de instrumentos de medição de ângulos: "Como, não estamos a fazer construção, não é? (…) É só para nos ajudar a pensar". O esquema serviria, pois, o propósito de ajudar a pensar nas relações envolvidas na situação proposta. A professora fez por duas vezes sugestões de alterações ao esquema que estava a ser elaborado pelo

Ricardo na sua ficha de trabalho. Na primeira vez, ao ver que o Ricardo estava a colocar exemplos de amplitudes nos ângulos, tal como tinha feito no esquema elaborado pela segunda vez, no seu caderno, ripostou: "Mas não precisas de pôr os graus!... Não estamos a falar aqui em nenhum caso especial, pois não?". É curioso que o Ricardo tenha pensado que seria preferível colocar exemplos de amplitudes num esquema a reificar enquanto produto do trabalho do grupo quando o seu pensamento esteve sempre associado aos ângulos na sua generalidade, tendo o seu discurso integrado esses exemplos particulares apenas como recurso de explicação aos colegas. A segunda sugestão de alteração prendeu-se com o facto de o Ricardo ter representado graficamente um arco a abarcar todo o ângulo raso. A professora considerou que esse arco não ajudava a ver as relações em causa e que seria preferível colocar os vários arcos em cada um dos ângulos em questão. A representação do arco com a amplitude de 180º prende-se com a relação vista pelo Ricardo num ápice: "fica metade de cento e oitenta por fora." (linhas 13 e 14). De qualquer modo, estas sugestões foram acatadas e portanto foram apagados quer os exemplos numéricos de amplitudes quer o arco representativo da amplitude de 180º, tendo sido traçados em sua substituição dois arcos abarcando cada um dos ângulos suplementares. O seu esquema apresenta ainda a notação de ângulo recto entre as duas bissectrizes do qual sai uma seta até à expressão "ângulo recto" (ver figura 25). Após a sua segunda sugestão de alteração, a professora afastou-se do grupo.

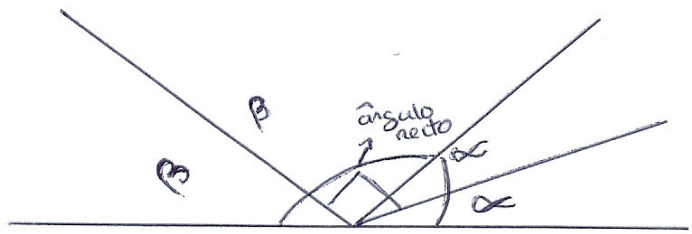


Figura 25. Esquema elaborado pelo grupo-alvo

No grupo, o Ricardo continuou a ser o único membro a realizar o esquema na ficha de trabalho. Entretanto, eu aproximei-me do grupo e olhei ostensivamente para o esquema do Ricardo, que já se encontrava concluído. O Ricardo disse-me: "Aqui, dá um ângulo recto". No momento, eu interpretei esta sua afirmação como tendo identificado o ângulo perceptivamente pela observação do esquema acabado de construir. E, no meu pensamento, sem o verbalizar, comparei este facto com o ocorrido com os restantes alunos da turma os quais, na sua maioria, mesmo olhando para o esquema, não viram no mesmo um ângulo recto. Pode ler-se nas minhas notas de campo escritas após a observação das aulas mas antes de efectuar as transcrições dos registos áudio e vídeo: "Só o Ricardo do meu grupo é que viu logo com o desenho que ia fazer um ângulo recto; os outros não estavam a ver à partida nenhuma relação". Nunca suspeitei na altura que o Ricardo tivesse chegado ao ângulo recto por um raciocínio lógico e dedutivo, sem o apoio do desenho do esquema. Dado que nos outros grupos, a conclusão foi alcançada por via da manipulação algébrica, neste momento talvez possa concluir que o Ricardo foi, efectivamente, o único aluno da turma a compreender a relação em causa através de uma demonstração com uma natureza informal e narrativa. Fê-lo sozinho, de forma completamente autónoma, e por um processo mental e repentino, sem proceder a qualquer registo, assim que leu a questão enunciada na tarefa. O seu *insight* ocorreu numa fase inicial do trabalho em que os seus colegas ainda estavam a apropriar-se do sentido da tarefa.

Logo após o Ricardo me ter comunicado a relação entre as bissectrizes, eu afastei-me do grupo. A Sara e a Maria fizeram também o esquema na sua ficha de trabalho individual, olhando de vez em quando para a folha do Ricardo. Assim que terminaram a elaboração do esquema, a Sara falou para a Maria: "Agora podemos escrever a resposta". Esta intervenção da Sara revela que, para ela, o esquema, por si só, seria suficiente na concretização da tarefa: prontificava-se para redigir a resposta o que significa que considerava a tarefa acabada. Não sentiu necessidade de fazer qualquer outro tipo de registo que comprovasse ou desse sustentabilidade ao esquema. Voltei a aproximar-me do grupo e, convencida de que a enunciação, feita pelo Ricardo, de que as bissectrizes formavam um ângulo recto, teria decorrido da percepção, resolvi intervir no sentido de negociar com os alunos a necessidade de procederem a uma demonstração: "Vocês já chegaram a uma percepção de que as bissectrizes vão fazer um ângulo recto, não é? E agora, se calhar, pelos cálculos, podem chegar a uma certeza completa sem ser apenas pela percepção". Em diálogo comigo, o Ricardo e o Bernardo verbalizaram a forma de representar a soma dos ângulos suplementares, usando as letras. Eu afastei-me e o Ricardo foi o único que escreveu o cálculo algébrico na sua ficha de trabalho enquanto simultaneamente ia falando em voz alta: "Podemos fazer dois alfa mais dois beta igual a 180". Logo a seguir, a Sara tirou-lhe a folha e, observando com atenção o registo do Ricardo, começou a fazer o mesmo registo na sua ficha. O Bernardo começou, nesse momento, a elaborar o esquema na sua folha. Entretanto, voltei a aproximar-me do grupo e novamente os interpelei no sentido de os fazer avançar na sua demonstração: "Agora, vocês querem chegar à certeza que este alfa mais beta vai dar aquilo que vocês dizem que é um ângulo recto. Ora vejam lá se dá ou se não dá". E deste modo, incentivado e orientado por mim, o Ricardo concluiu o registo escrito da demonstração algébrica, assim que me afastei do grupo. Após este ter acabado de escrever, os seus colegas de grupo colocaram a sua ficha no meio da mesa e escreveram o cálculo algébrico nas suas fichas de trabalho, copiando pela folha do Ricardo. Quando um pouco mais tarde, após todos terem terminado o registo escrito, eu voltei a aproximar-me do grupo, propus-lhes ainda que redigissem a resposta à questão colocada. No momento em que me afastava do grupo, ouvi o Ricardo a dizer aos colegas em voz alta o início da referida resposta: "A soma das bissectrizes". Voltei a aproximar-me do grupo e corrigi-o, de imediato, referindo que não era a soma das bissectrizes, que as bissectrizes eram semi-rectas, que eles estavam a somar ângulos e que a soma resultante correspondia a um ângulo cujos lados eram as bissectrizes. Após esta minha intervenção, os alunos corrigiram a resposta, começando-a pelos próprios termos da questão: "A relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares é que…". Fizeram-no em simultâneo e depois de um breve momento de impasse, o Ricardo verbalizou a conclusão da mesma—"formam sempre um ângulo de noventa graus"—que foi aceite, tacitamente, por todos e registada individualmente em cada uma das fichas de trabalho. O termo "sempre" evidencia a compreensão da relação geral que se mantém constante sejam quais forem os ângulos suplementares que se queira considerar.

O que se passou no grupo-alvo fornece-nos fortes evidências de que o Ricardo raciocinou por meio de uma demonstração com características narrativas e informais, embora não tenha procedido ao respectivo registo escrito. O facto de terem registado uma demonstração algébrica decorre da negociação com a *professora* nesse sentido. Ou seja, a demonstração com uma natureza narrativa está mais próxima da forma natural dos alunos pensarem. A demonstração algébrica tem um cariz marcadamente escolar, tendo sido conduzida e orientada pela *professora.*

Conforme podemos verificar pela imprecisão de linguagem usada pelo Ricardo na resposta à questão—"A soma das bissectrizes"—a explicitação por escrito daquilo que se pensa não é linear, envolve um processo de trabalho mais complexo, no qual importa não só utilizar uma linguagem clara e ilustradora do próprio pensamento mas também utilizar de forma adequada o vocabulário específico da matemática. O Ricardo, por *insight*, *viu* e compreendeu a relação questionada; no entanto, apresentou alguma dificuldade no registo escrito, nomeadamente ao nível da adequação do vocabulário matemático usado.

Em síntese, o Ricardo do grupo-alvo descobriu a relação entre as bissectrizes por *insight,* traduzido oralmente aos colegas por intermédio de uma demonstração narrativa e informal. Os restantes grupos da turma conseguiram concretizar demonstrações algébricas que lhes permitiu descobrir a relação questionada na tarefa. Também o grupo-alvo concretizou uma demonstração algébrica, sob orientação da *professora.* No entanto, ao contrário do que sucedeu com os restantes grupos da turma, a descoberta da relação não decorreu da manipulação algébrica pois já tinha sido alcançada previamente. O esquema foi um instrumento que ajudou os alunos a pensar com base em relações teóricas e gerais e não empíricas. Mesmo no caso do Ricardo que fez a sua descoberta repentinamente sem o suporte de qualquer registo esquemático, poderemos presumir que ele teria visualizado o esquema mentalmente, tendo sido portanto um recurso estruturante, pois foi o esquema que traçou por duas vezes, logo a seguir, assim que explicou aos colegas o seu pensamento. A própria relação entre as bissectrizes não foi alcançada, de um modo geral, perceptivamente, pela observação do esquema. A notação algébrica que usaram para nomear os ângulos, por um lado, simplificou o próprio cálculo demonstrativo, permitindo emergir a relação de igualdade entre ângulos, ao ser usada a mesma letra para os ângulos iguais (tal como a professora fizera momentos antes no acetato), e por outro lado, facilitou a generalização para quaisquer dois ângulos suplementares. Nas minhas notas de campo, pode ler-se o seguinte comentário:

> Chego à conclusão que todos os alunos, mesmo esta turma que está denotada como fraca, conseguem demonstrar desde que orientados para isso e se o professor estiver preocupado em tal. Sentem uma maior motivação para o fazer quando a demonstração constitui, ela própria, um meio de chegar à solução, e não é apenas algo para verificar a certeza de algo que já descobriram previamente. Foi também importante a algebrização do plano que facilitou e simplificou muito os cálculos e forneceu logo uma ferramenta de generalização da qual o desenho-esquema era apenas um suporte que ajudava a pensar e a entender.

Circunferência e Ângulos III

Os dois grupos (Grupo C e grupo-alvo) que enveredaram por uma demonstração narrativa e informal, apresentam um raciocínio semelhante nas suas produções escritas alusivas ao quadrilátero cujos ângulos opostos não tivessem de amplitude 90º cada um, relacionando a amplitude do ângulo inscrito com a do arco contido pelo mesmo:

> Grupo C- Os ângulos opostos são diferentes quando o quadrilátero tem lados diferentes, quando os quadriláteros têm lados iguais, os ângulos opostos são consequentemente iguais também.
> Quando os ângulos estão inscritos na circunferência a sua amplitude é metade da amplitude do arco em que estão inscritos.
> A soma dos dois arcos é igual a 360º; se cada ângulo inscrito é metade do arco a soma dos ângulos da [sic] 180º; a soma é sempre igual não dependendo de como os ângulos são.

> Grupo-alvo- Todos os ângulos opostos dos quadriláteros inscritos numa circunferência somados dão 180º, pois os arcos correspondentes aos ângulos inscritos de cada vértice dão sempre 360º, logo a soma dos dois ângulos

> inscritos é metade da soma dos seus arcos correspondentes, logo dão sempre 180º.

Ambos os grupos apresentam no seu trabalho o traçado de uma circunferência com o quadrilátero, que aqui estamos a considerar, inscrito na circunferência e a representação de um par de lados opostos com as respectivas letras de designação. Aliás, este foi um aspecto incentivado pela professora quando se aproximou do grupo-alvo, pela primeira vez: a representação dos ângulos por letras gregas. No entanto, na demonstração, dadas as suas características narrativas, os ângulos não são referidos pelas letras indicadas no desenho. É curioso assinalar que apesar de a professora ter sugerido que usassem uma linguagem simbólica no registo escrito, no segundo momento de contacto com o grupo-alvo, imediatamente anterior ao início desse mesmo registo, precisamente na altura em que a professora começava já a afastar-se—"Então vá! Vamos explicar aí (*imperceptível*) linguagem simbólica para demonstrar essa (*imperceptível*)"—os alunos não o fizeram.

Os alunos partiram de uma propriedade já aprendida antes e portanto estabelecida como verdadeira—a da relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a do arco que o ângulo contém—para deduzir uma outra propriedade relativa à soma dos ângulos opostos de um quadrilátero cíclico através da mesma relação: a soma das amplitudes dos ângulos opostos (inscritos) é também metade da soma das amplitudes dos arcos contidos nos referidos ângulos. Como os dois arcos formam a circunferência, a sua amplitude é conhecida dos alunos, e portanto, estes determinam a metade de 360º como sendo sempre a soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência. Os alunos destes dois grupos conseguem, portanto, por via narrativa, estabelecer uma propriedade matemática para a generalidade do universo em causa pois, tal como é explicitado pelo grupo C, “a soma é sempre igual não dependendo de como os ângulos são”.

Vejamos agora mais detalhadamente como se processou o desenvolvimento do raciocínio no seio do grupo-alvo conducente à produção escrita citada acima. Apesar de o seu registo incidir na relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a do arco contido pelo mesmo, não foi esta a relação por onde iniciaram o seu raciocínio, mas sim a relação entre as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro. Segue-se o extracto transcrito deste momento do trabalho do grupo:

O Bernardo traçou a circunferência com o compasso. A Sara traçou o quadrilátero com a régua. O Ricardo leu o enunciado, em silêncio, e olhou no vago em gesto evidenciador de que estava a pensar no pedido, e em seguida, tamborilou com os dedos na cabeça. Depois, é a vez da Sara pegar na ficha e trocar com a Maria impressões inaudíveis sobre a questão pedida, enquanto a Ricardo brinca com o Bernardo.

R (*falando em direcção à Sara*)- Se fosse um quadrado, dava cento e oitenta.

M- (*imperceptível*)

R- Pode não ser. Não sabemos. (*pausa*) Já sei… Vou procurar uma coisa. (*pega no seu caderno que estava na sua mesa atrás e folheia-o várias vezes para a frente e para trás*). Não encontro!... (*larga o caderno*) É assim… (*olha para a Sara*) Ângulo… Ângulo ao centro… (*aponta para a folha de papel*) É vértice aqui. (*a Maria aponta também*)

S- (*imperceptível*)

R- Deixa-me... (*leva as mãos à cabeça*)

S- (*imperceptível*).

R- Deixa-me pensar.

S- Não tem nada a ver.

R- Tem! Tem!

S- Como? Explica.

R- Lembra-te que o ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro. Então…

A Sara faz um gesto com a mão à frente da cara como que a tentar acompanhar o que diz o Ricardo.

M- Não percebi nada.

R- Dá-me uma régua. Preciso de uma régua! (*traça na folha o diâmetro da circunferência com o auxílio da régua*)

S- O que é que estás a fazer, Silva?

R- Pensa. Ângulo ao centro… (*passa com os dedos por cima do traçado da circunferência)* trezentos e sessenta, certo? O ângulo inscrito… O ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro.

S (*fazendo coro com o Ricardo*)- sempre metade desse ângulo ao centro.
R (*falando directamente para a Sara e apontando no papel para os pontos da circunferência intersectados pelos ângulos inscritos*)- Então, daqui até aqui é noventa. Daqui para aqui é noventa. Noventa mais noventa é cento e oitenta. Percebeste?
S- Não.
R- Então, descobrimos que a soma dos ângulos opostos é sempre cento e oitenta.
S- Não.
R- Tou [sic] a brincar. Não é assim.
B- (*fala algo imperceptível para o Ricardo e faz um gesto para chamar a professora*) Stora.
R- Não. Não é assim. Não é assim. Porque este de certeza não é ângulo de cento e oitenta graus. Este se calhar é. Este não é.
A professora aproxima-se.
S- Não. Nenhum deles está direitinho. Para ser direitinho,
R- (*falando ao mesmo tempo que a Sara)* Ya. Eu sei.
S- para ser noventa graus, (*traça no papel com o lápis*) tinha de estar aqui. Stora. (*desloca a ficha para a frente da professora*) Explica lá o que é. (*olhando para o Ricardo*)
R- Não. Não.
P- O que é que pergunta aqui? (*lendo*) O que poderão dizer acerca da soma das amplitudes dos ângulos opostos desse quadrilátero?

Face ao desconhecimento das amplitudes concretas dos ângulos opostos do quadrilátero que desenharam pela segunda vez, depois de apagarem o quadrado, o Ricardo intuiu que seria necessário aplicar alguma propriedade aprendida anteriormente, de modo a relacionar a generalidade dos ângulos naquelas condições, e não unicamente as amplitudes particulares dos ângulos opostos do quadrilátero específico que tinham traçado. Daí que ninguém no grupo se tivesse lembrado de usar o transferidor e medir aqueles ângulos específicos. Ao invés, o Ricardo socorreu-se do recurso do caderno e folheou-o numa tentativa de encontrar uma propriedade relacionada com ângulos em circunferências, já que o quadrilátero estava inscrito numa circunferência. Já tinha passado algum tempo desde que tinham trabalhado aquele assunto. Aquela era a primeira aula do 3º período e as férias da Páscoa poderiam justificar um certo esquecimento. De qualquer modo, o Ricardo sabia de antemão o que procurava no caderno—"Vou procurar uma coisa" (linha 10)—e a sua procura visava sobretudo uma confirmação. Ao não encontrar o pretendido—"Não encontro!..." (linha 12)—o Ricardo, mesmo assim, conseguiu, após algum esforço—"Deixa-me pensar" (linha 18)—enunciar correctamente a propriedade procurada: "o ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro" (linha 22).

O que nem o Ricardo nem nenhum elemento do grupo conseguiu foi, partindo do enunciado dessa relação, raciocinar no sentido de obter a soma dos ângulos opostos, isto é, concluir que se a soma das amplitudes dos dois ângulos ao centro é 360º, então a soma dos ângulos opostos tem de ser a metade desse valor pois são ângulos inscritos correspondentes aos ângulos ao centro. Os dois ângulos ao centro aqui considerados partilham do mesmo vértice e dos mesmos lados, conforme se pode ver na seguinte figura com a designação de α e β:

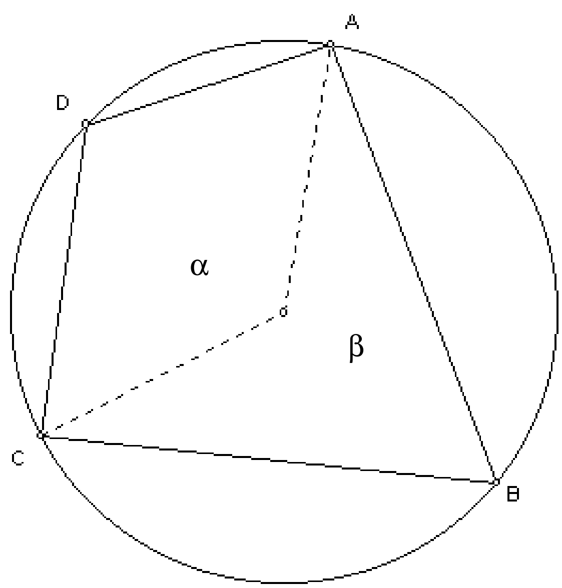


Figura 26. Os dois ângulos ao centro α e β

Apesar de, usualmente, de entre os dois ângulos formados pela união de duas semi-rectas no seu ponto de origem, se considerar apenas o ângulo convexo, neste caso, o ângulo α, este problema pode levar à consideração de ambos os ângulos, o convexo e o côncavo, por se tratarem de ângulos ao centro correspondentes aos ângulos inscritos opostos. Na figura 26, o ângulo α é correspondente ao ângulo ABC e o ângulo β é correspondente ao ângulo ADC. E o raciocínio que se pode fazer relacionando α e β com os ângulos ABC e ADC pode ser igualmente aplicável para os outros dois ângulos opostos DCB e DAB, relacionando-os com os respectivos ângulos ao centro correspondentes.

O Ricardo viu que a soma das amplitudes dos dois ângulos ao centro era 360º: "Ângulo ao centro… trezentos e sessenta, certo?" (linhas 30 e 31). Começou por se referir ao ângulo ao centro no singular, na sequência da relação antes enunciada, mas logo de imediato pensou na sua soma sem, contudo, verbalizar este termo, explicitando apenas o resultado da mesma. O seu gesto de passar com os dedos por cima da circunferência evidencia a sua compreensão de que a soma das amplitudes é a mesma da circunferência. Estava, portanto a um passo de estabelecer a última conclusão dedutiva. Não o fez provavelmente porque partiu duma assunção errada de ângulo ao centro correspondente a ângulo inscrito. O diâmetro traçado pelo Ricardo na horizontal foi apagado posteriormente mas na folha de papel ainda se consegue observar o respectivo vestígio, não visível contudo na figura 27, cuja imagem resulta da digitalização que fiz ao trabalho dos alunos. Vejamos primeiro o quadrilátero construído pelo grupo para se ter uma ideia de onde se localizariam os ângulos ao centro em questão:

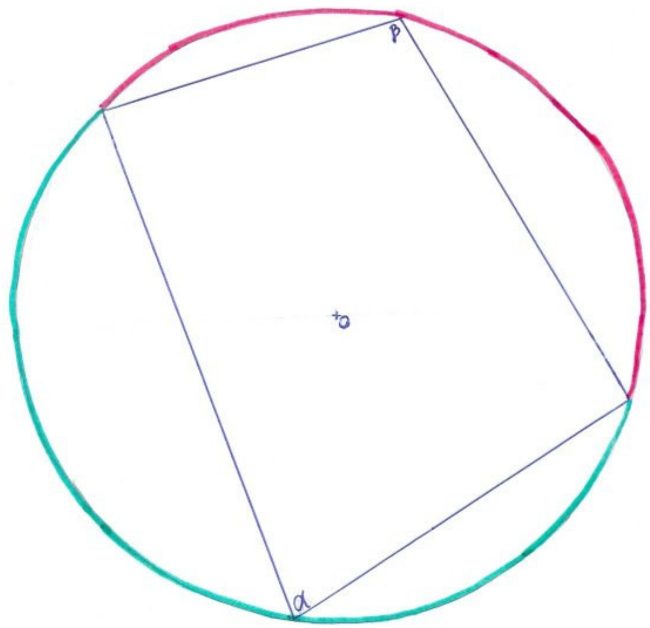


Figura 27. Quadrilátero inscrito na circunferência

O facto de o Ricardo ter traçado o diâmetro como representação de ângulo ao centro evidencia que reteve deste conceito o facto de o vértice do ângulo ao centro ser coincidente com o centro da circunferência, tendo sido esta a característica que verbalizou no seio do grupo: "É vértice aqui." (linha 14). No entanto, esqueceu que só poderia relacionar a amplitude do ângulo inscrito com a do ângulo ao centro, se os mesmos forem correspondentes. Isto é, não se lembrou que só poderia relacionar a amplitude do ângulo ao centro com a do ângulo inscrito se os seus lados intersectassem os mesmos pontos da circunferência intersectados pelos lados do ângulo inscrito. Esta questão não chegou a ser discutida no grupo: ninguém questionou aquela representação de ângulo ao centro. Assim, partindo do diâmetro que formava dois ângulos ao centro de igual amplitude—180º—o Ricardo concluiu que cada ângulo inscrito mediria metade desse valor, ou seja, 90º.

Talvez o facto de ter partido de semi-círculos para representar os ângulos ao centro tivesse sido influenciado pela conclusão anterior relativa à soma dos ângulos opostos do quadrado—“Se fosse um quadrado, dava cento e oitenta” (linhas 7 e 8). Apesar de consciente que agora poderia não ser o mesmo—“Pode não ser. Não sabemos.” (linha 10)—o que guiou o seu raciocínio foi a suposição de que daria sempre 180º: ao estabelecer a relação entre ângulo inscrito e ângulo ao centro, assumiu que cada ângulo ao centro mediria 180º para concluir que cada ângulo inscrito mediria 90º—“daqui até aqui é noventa. Daqui para aqui é noventa” (linhas 35 e 36)—e portanto a sua soma “é cento e oitenta” (linhas 36 e 36). No entanto, ao ser contestado pela Sara—“Não” (linha 41)—,o Ricardo deu-lhe razão—“Não é assim.” (linha 42)—apresentando uma justificação baseada na percepção das amplitudes dos ângulos ao centro: “Porque este de certeza não é ângulo de cento e oitenta graus. Este se calhar é. Este não é.” (linhas 45 e 46). Ora, tendo traçado na folha de papel um diâmetro, não se entende por que razão estaria a considerar, perceptivamente, que um dos ângulos não era de certeza ângulo de 180º. Custa também a entender esta consideração com a relação com a soma das amplitudes de 360º que tinha proferido antes: se a soma das amplitudes dos dois ângulos ao centro é sempre de 360º, então, para assumir que um de certeza não tem 180º, tem de se assumir também que o outro tem uma amplitude diferente de 180º. No entanto, o Ricardo admite a possibilidade de um ser igual a 180º—“Este se calhar é”—e o outro não ser de certeza um ângulo raso. A incompatibilidade gerada pela combinação destas duas condições não parece causar-lhe qualquer conflito cognitivo.

A justificação enunciada pela Sara fundamenta-se igualmente na percepção das amplitudes, mas neste caso, referentes aos ângulos inscritos: “Não. Nenhum deles está direitinho. Para ser direitinho, para ser noventa graus, tinha de estar aqui.” (linhas 48 e

50). Esta justificação fundamenta a falta de validade do raciocínio expresso antes pelo Ricardo e também a falta de validade da sua afirmação de que um dos ângulos ao centro “se calhar” era de 180º, o que implicaria que o ângulo inscrito correspondente fosse, então, de 90º. A Sara afirma que nenhum dos ângulos inscritos é de 90º baseando-se unicamente na observação dos próprios ângulos que perceptivamente são distintos de ângulos rectos.

Vemos, portanto, que apesar de o Ricardo ter começado a relacionar as amplitudes do ângulo ao centro e do ângulo inscrito, o grupo acabou por abandonar esta ideia ao não conseguirem estabelecer uma dedução dessa relação que os levasse à descoberta da propriedade questionada. Foi por perceber que estavam num impasse, com o próprio Ricardo a afirmar “Não é assim” (linha 42), que o Bernardo decidiu chamar a professora. Esta, desconhecendo o que já tinham pensado os alunos antes, uma vez que o Ricardo optou por nada dizer a esse respeito—“Não. Não” (linha 53)—por saber de antemão tratar-se de um raciocínio incorrecto, acabou por os orientar para as amplitudes dos arcos, influenciando, assim, o rumo do raciocínio dos alunos do grupo.

Primeiro, a professora incentivou-os a fazerem o registo da designação dos ângulos com letras gregas. Questionados acerca da natureza dos ângulos opostos do quadriláteros, o Ricardo identificou-os como sendo ângulos inscritos. A professora validou esta resposta, ao acenar afirmativamente com a cabeça, e ao considerá-la na questão seguinte “Sendo ângulos inscritos, o que é que vocês sabem dos ângulos inscritos da circunferência?”. Esta validação suscitou no Ricardo uma manifestação de que, afinal, tinha pensado bem: “Vês, tás [sic] a ver?”, dirigindo-se à Sara. A Sara interpelou o Ricardo para ele responder mas este recusou-se. Foi então a Sara que respondeu à questão colocada pela professora, afirmando que o ângulo inscrito era metade do ângulo ao centro, mas com algum atabalhoamento na sua expressão e na forma como ia inserindo pausas na sua fala. O final da sua frase foi acompanhado pelo Ricardo que também se referiu ao ângulo ao centro, interpelando a professora para a sua localização na folha de papel. No entanto, a referência ao ângulo ao centro não foi ouvida pela professora pois esta introduziu o termo “amplitude” completando a expressão da Sara “metade do”. A constatação de que a Sara não estava a usar os termos próprios levou a professora a falar ao mesmo tempo que os alunos e a não ouvir bem o final do que disseram: “A amplitude. Vamos lá a usar as palavrinhas… Faz-vos tão mal as férias, é terrível essas férias [sic]!…”. Em seguida, parafraseou o discurso da Sara, pensando que ela se tinha referido ao arco: “A amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude, é isso que estás a dizer?, da amplitude do arco correspondente, é?”. O Ricardo voltou a interagir com a professora passando com a régua na folha de papel, por cima do ângulo β: “Stora, daqui até aqui…”. A professora orientou-o para a localização do arco correspondente a esse ângulo: “Se olharmos para este ângulo, tás [sic] tu a dizer?, qual é o arco?”. Como não obtivesse logo resposta, a professora voltou a formular a questão mas fazendo agora a simulação do ângulo β com os seus próprios braços e, assim, o Ricardo apontou para o arco compreendido entre os lados do ângulo, passando com a régua por cima do mesmo, desde o seu início até ao fim. Fizeram depois o registo dos dois arcos. Primeiro, assinalaram as extremidades dos arcos. O Bernardo assinalou a extremidade esquerda do diâmetro como sendo a extremidade do arco correspondente ao ângulo β, tendo sido corrigido pela professora, enquanto apontava para as extremidades do arco: “Não! É desta ponta a esta.”. Logo de imediato, o Ricardo exclamou “Já sei!” e a professora olhou e sorriu para ele. A Maria fez o registo diferenciado dos arcos, passando por cima do traçado de cada um com canetas de diferentes cores. Começou por traçar a caneta o arco correspondente ao ângulo β.

Quando o Ricardo exclama “Já sei!”, manifesta o *insight* que teve no momento em que a professora apontou para o arco maior, desde uma extremidade à outra. Momentos antes, ele próprio tinha acompanhado esse arco com a régua. Precisou de algum distanciamento para ver a união dos dois arcos—“Stora, isto tudo é trezentos e sessenta.” (linha 1 do extracto incluído na p. 728)—e perceber a relação com a soma das amplitudes dos dois ângulos inscritos correspondentes aos arcos. Apesar de antes, raciocinando com os ângulos ao centro, também ter feito à referência da sua soma como sendo de trezentos e sessenta, o facto de os mesmos não corresponderem aos ângulos inscritos e terem sido traçados como medindo cada um 180º, fez com que se tivesse fixado nesta amplitude específica e ter ignorado a sua soma e o modo como esta se poderia relacionar com a soma das amplitudes dos ângulos inscritos.

A professora solicitou aos alunos que fizessem o registo escrito, negociando com eles o sentido desse mesmo registo: “Para ficar provado, demonstrado que aquilo que tão [sic] a pensar é correcto.” (linhas 3 e 4 do extracto incluído na p. 728). Um pouco depois, no final do segundo contacto que teve com o grupo, voltou a reforçar esta ideia: —“Então vá! Vamos explicar aí (*imperceptível*) linguagem simbólica para demonstrar essa (*imperceptível*)”. A professora referiu, portanto, explicitamente que o registo escrito dos alunos poderia constituir uma demonstração com a dupla função de verificação e explicação. No entanto, tal parece ter sido, de certa forma, ignorado pelos alunos que atentaram mais no pedido do registo escrito do que propriamente na sua função.

Situemo-nos de novo neste primeiro contacto da professora com o grupo. Em seguida, a professora afastou-se e o Ricardo tentou, de imediato partilhar o seu *insight* com os colegas do grupo, embora se tivesse dirigido sempre, mais intencionalmente, à Sara. A compreensão súbita do Ricardo fundamenta-se numa generalização que relaciona a soma das amplitudes de quaisquer ângulos inscritos de qualquer quadrilátero inscrito numa circunferência com a soma das amplitudes dos respectivos arcos correspondentes[72]. Após a partilha da ideia do Ricardo no grupo, os alunos dedicaram-se, então, ao respectivo registo escrito. Este registo foi executado pela Sara e ditado pelo Ricardo, que assumiu em todo o processo, não só a autoria da ideia expressa numa demonstração matemática, como também a inteira apropriação e compreensão da mesma. A forma como o Ricardo ditou, repetindo por várias vezes as expressões, por forma a acompanhar o ritmo de escrita da Sara, evidencia uma grande clareza de raciocínio e uma completa apropriação da ideia. Até os pormenores das vírgulas, o Ricardo ditou. As únicas discrepâncias entre o discurso oral do Ricardo e o que ficou registado por escrito consistem no facto de o Ricardo ter ditado "logo a soma dos dois ângulos inscritos é *sempre* metade da soma dos seus arcos correspondentes" e a Sara ter omitido o termo assinalado a itálico, e no facto de o Ricardo ter referido sempre os valores da amplitudes com a designação única dos respectivos números, sem o termo "graus" associado, e a Sara ter escrito o símbolo representativo dos graus. O Ricardo evita ser ele a escrever nos documentos que representam o grupo devido à sua caligrafia, preferindo, portanto, ditar a um colega que tenha a letra legível. Esta divisão de tarefas já deve ser habitual pois, muito naturalmente, sem que tivessem que falar sobre o assunto para chegar a um consenso, a Sara pegou no lápis e na ficha para escrever e o Ricardo começou a ditar, secundado por duas vezes, pelo Bernardo que repetia o que o Ricardo dizia, constatando que este dizia as coisas depressa demais, sem dar tempo à Sara para as escrever.

702

[72] A evidência desta afirmação pode ser encontrada mais à frente no extracto inserido nas pp. 728-9 e analisado a propósito do papel da demonstração matemática, na sala de aula.

Se analisarmos este mesmo registo escrito, vemos como a generalização está aí bem explícita: "Todos os ângulos opostos"; "logo dão sempre 180º". A soma das amplitudes dos ângulos é constante, seja qual for o ângulo em causa, já que também é constante a soma das amplitudes dos dois arcos, que unidos formam sempre uma circunferência.

O grupo-alvo não registou explicitamente a propriedade aprendida anteriormente e que serviu de ponto de partida para o encadeamento do raciocínio que produziu esta demonstração, deixando-a no domínio do implícito. Tal não aconteceu com o Grupo C, que a referiu explicitamente antes de formular o raciocínio deduzido da mesma—"Quando os ângulos estão inscritos na circunferência a sua amplitude é metade da amplitude do arco em que estão inscritos"—,voltando a integrá-la na exposição do raciocínio em si—"A soma dos dois arcos é igual a 360º; se cada ângulo inscrito é metade do arco a soma dos ângulos da [sic] 180º". No registo escrito do Grupo C, existe evidência de os alunos darem um significado próprio à expressão *ângulo inscrito num arco* que não corresponde ao significado matemático da mesma. Ou seja, quando os alunos escrevem "Quando os ângulos estão inscritos na circunferência a sua amplitude é metade da amplitude do arco em que estão inscritos", percebe-se que esse arco a que se referem como sendo o arco em que está inscrito um determinado ângulo, para os alunos não é efectivamente o arco em que o ângulo está inscrito, mas sim o outro arco que complementa este para formar a circunferência, isto é, o arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito. Trata-se, portanto, não de um erro de natureza conceptual ou de compreensão, mas sim um erro de falta de rigor no uso do vocabulário específico da matemática. Esta falha ao nível de rigor de linguagem, no contexto do registo em questão, acaba por ser um pormenor perfeitamente acessório, pois os alunos conseguem, efectivamente, transmitir com clareza o raciocínio lógico conducente à demonstração, de natureza narrativa e informal.

O Grupo D foi o único na turma que nesta tarefa chegou a uma demonstração algébrica. Este grupo, à semelhança da maioria dos alunos, construiu um quadrado em primeiro lugar e concluiu que “a soma dos ângulos [sic] opostos são [sic] de 180º”. Face ao meu pedido nesse sentido, construíram depois outros três exemplos de quadriláteros inscritos em circunferências com ângulos distintos do ângulo recto, tendo disposto os três de forma alinhada horizontalmente, e identificado os mesmos com alíneas “a)”, “b)” e “c)”. No espaço por baixo das construções, dividiram-no em três zonas, traçando dois riscos na vertical, entre as mesmas. E escreveram na parte superior à esquerda de cada uma das zonas as alíneas atrás referidas. Este tipo de registo indicia que os alunos, à partida, estariam a prever escrever uma conclusão para cada um dos três quadriláteros. No entanto, tal não aconteceu: só o fizeram para o primeiro exemplo. Ou seja, ao contrário do *insight* do Ricardo que, partindo dum exemplo concreto, estabeleceu de imediato um raciocínio geral, os alunos deste grupo não tinham qualquer ideia de generalização, prévia ao desenvolvimento do trabalho. A concretização de três exemplos e três zonas para o registo de conclusões evidencia que os alunos admitiriam perfeitamente que chegassem a somas diferentes para cada um deles.

No primeiro desses três exemplos, assinalaram os dois arcos com cores diferentes. E identificaram os ângulos na construção, escrevendo letras maiúsculas nos vários pontos de intersecção dos ângulos com a circunferência. Vejamos o registo escrito do grupo por baixo da construção identificada com “a)”, à esquerda da folha:

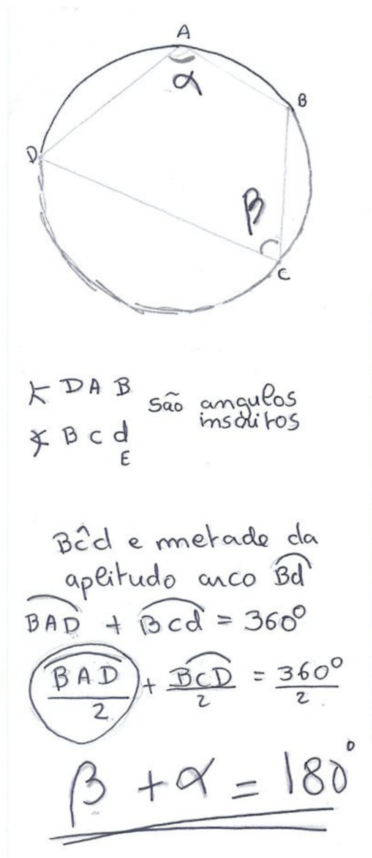


Figura 28. A demonstração algébrica do Grupo D

A parte final do registo está escrito com a caligrafia da professora: "β + α = 180º". Esta designação para os ângulos encontra-se igualmente na construção dos alunos, tendo sido também escrita pela professora. A linha circular à volta da primeira fracção, representativa da metade da amplitude do arco BAD, também parece ter sido feita pela professora, como forma de chamar a atenção dos alunos para o facto de este valor ser igual à amplitude do ângulo β.

A professora acompanhou a parte final do trabalho deste grupo. Antes, tinha sido eu que tinha estado perto dos alunos deste grupo. Pode ler-se nas minhas notas de campo, referente ao trabalho deste grupo:

> Pintaram os dois arcos de cores diferentes.
> Eu orientei muito esta primeira parte.

> Como os dois arcos ficariam BD resolveram representá-los com 3 letras, a letra do meio a diferenciá-los e eu apoiei a ideia.

Apesar de o trabalho deste grupo não ter sido videogravado, poderemos induzir dos dados retirados dos registos escritos que existiu uma influência do apoio prestado pela *professora* na forma como os alunos deste grupo concretizaram o seu trabalho e até na compreensão de que estariam a obter uma conclusão geral que os dispensava de concretizar as alíneas b) e c), identificadas por eles momentos antes.

O Papel da Demonstração na Sala de Aula

Vamos Investigar – Matemática (Exploração com números)

Foi na aula de discussão desta tarefa que a professora negociou explicitamente a natureza da matemática, distinguindo o estatuto de conjectura do de uma demonstração, realçando a função de verificação desta última. Esta aula concretizou-se apenas no dia 6 de Fevereiro, cerca de quinze dias após a aula de exploração da tarefa, pois foi sendo sucessivamente adiada quer pela professora, quer por mim, por razões diversas.

Nesta aula, a professora apresentou aos alunos acetatos (ver Anexo 4) que tinha preparado com as resoluções dos grupos (tendo escolhido uma de entre as duas de cada Actividade) e com as possíveis demonstrações, uma vez que nenhum dos grupos conseguiu efectivamente construir uma demonstração. O conteúdo de cada um dos acetatos ia sendo revelado, a pouco e pouco, à medida que ia falando com os alunos acerca do mesmo. O discurso que desenvolveu em torno dos acetatos e o diálogo estabelecido com os alunos, incluindo o registo por parte dos mesmos do conteúdo dos acetatos na caderno diário, ocuparam quase toda a aula (cerca de uma hora). A parte final da aula foi ocupada com a correcção do trabalho de casa. As fichas de trabalho com as resoluções dos grupos foram distribuídas no início da aula. A professora começou por esclarecer, em resposta a alunos que queriam saber se tinham tido algo de errado, que não se tratava de ver propriamente o que estava errado mas sim de ver o que tinham pensado acerca das situações propostas. E, em seguida, indicou então o que iriam fazer:

> Agora, vamos fazer um apanhado, do que é que na verdade… portanto, partindo dos trabalhos, dos pensamentos de cada um nos grupos, vamos ver como é que se podia ter trabalhado aquela actividade ao máximo, portanto, conseguir plenamente o objectivo da actividade. E ver até que ponto, como vocês já podem ver aqui, até que ponto é que nós conseguimos também daqui retirar novas aprendizagens que possam pró [sic] futuro já transformá-los, ou colocá-los como pessoas já mais destras, ou seja, mais rápidas a pensar neste tipo de actividade.

Começando pela Actividade I, a professora apresentou à turma, através do acetato respectivo, o trabalho realizado pelo grupo-alvo. Começou por referir que a situação não falava de nenhum número específico, já que a mesma era colocada no geral, mas que no entanto, os alunos sentiram sempre necessidade de partir para exemplos específicos. Validou essa abordagem considerando-a “um pensamento para aquecer o cérebro” de forma a que a mente possa começar a formular uma ideia para, depois, a partir daí, poder pensar numa forma geral. Chamou ainda a atenção dos alunos para o facto de o grupo-alvo ter utilizado sempre exemplos de números pares que somavam com eles próprios, talvez por terem pensado que a situação abordava somas de números pares iguais, não tendo utilizado outros exemplos de somas de números pares distintos um do outro, como seria o caso de 34+38, 6+4 (exemplos estes sugeridos por alunos da turma). Depois de ter referido a importância de se ler várias vezes o enunciado das tarefas para se entender bem o que é solicitado, preocupou-se em que os alunos entendessem o significado das duas fases de trabalho, a da particularização e a da demonstração—"Temos aqui duas etapas; vamos ver o que significam". Analisemos pois o extracto seguinte referente a este momento da aula:

P- Este grupo pensou assim; aliás, o outro grupo também: então, provavelmente, então, se calhar estes números que estão aqui, como eles são todos pares, se calhar, para quaisquer números pares, a sua soma também é um número par, não foi? (*o Ricardo acena levemente com a cabeça em sinal afirmativo)* E isto, quando alguém começa a pensar em termos concretos, neste caso, e depois surge uma ideia, ou seja, estabelece… ou pensa: será que para todos os números, para todos os números vai acontecer o mesmo que está a acontecer aqui? Ou seja, aqui todas as somas eram números pares; eles colocaram a questão: será que para todos os outros, também o resultado é da mesma natureza do que estou a ver aqui para estes? Ou seja, será que para qualquer par de números que são pares, que somados, o seu resultado também é um número par? Ou seja, vocês estão a estabelecer uma conjectura. Estão a lançar uma ideia de como é que será para todos. Mas já têm a certeza? Vocês tinham a certeza, neste momento, para todos que aconteceria isto?
O Ricardo abana a cabeça negativamente.
S - Não.
P- E porque é que nós não temos a certeza?
S – Porque não vimos todos os casos.
P- Não vimos todos os casos, não é? Quem nos diz a nós que não haverá um qualquer, não é? que nós não tenhamos utilizado, por mais que nós tenhamos… por mais exemplos que nós tenhamos ali colocado, ninguém nunca nos garante que não haverá um que nós não nos tenhamos lembrado e que, na verdade, não aconteça aquilo que nós estamos a pensar que irá acontecer para todos, não é? Então, sendo assim, precisamos, a matemática dá-nos essa ferramenta, precisamos de verificar e trabalhar este… este… esta relação de maneira a que tenhamos a certeza que aquilo, se afinal de contas está a verificar, ou se aquilo que nós pensamos que vai acontecer, acontece, ou se afinal aquilo que nós pensamos, não acontece. Nós podemos ter uma conjectura, podemos ter uma, uma ideia do que é que vai acontecer, e não ser isso, e depois termos de procurar outra ideia, outra hipótese de solução para aquele caso. Mas, neste caso, o grupo avançou então com um registo já mais relacionado com todos os números, e não para os casos específicos que estiveram a falar.

A professora utilizou explicitamente o termo "conjectura", negociando o seu significado, bem como a natureza da matemática, uma vez que em matemática, qualquer que seja o resultado, o mesmo tem de ser submetido a uma comprovação geral; uma conjectura estabelecida a partir da observação de um padrão em exemplos particulares nunca nos garante a sua verificabilidade em todos os casos. Este é um aspecto que a professora tenta que os alunos entendam. As próprias respostas dos alunos—a resposta gestual do Ricardo e a resposta verbal da Sara—resultam desta tentativa da professora bem como da forma como ela negociou este aspecto anteriormente na própria aula de exploração, ao nível de pequeno grupo. Isto é, ao particularizar, os alunos verificaram que as somas obtidas eram números pares e ficaram, de imediato, com a certeza que tal se verificaria sempre, o que os levou a escrever a conjectura "Vai dar sempre um número par", assumida por eles, não como uma conjectura, mas sim como uma conclusão verídica. Foi a intervenção da professora nessa mesma aula que os levou a avançar para um outro tipo de registo, mais geral, e não porque tivessem tido qualquer dúvida acerca da veracidade da sua conclusão. O discurso da professora, nesta aula subsequente, fê-los entender melhor o significado de conjectura que, nas palavras da professora, surge sempre em forma de interrogação—"será que para todos os outros, também o resultado é da mesma natureza do que estou a ver aqui para estes?" (linhas 9-11)—ou com um cariz probabilístico—"então, provavelmente, então, se calhar" (linhas 1 e 2)—exactamente para que os alunos a encarassem como hipótese e não como uma conclusão.

A professora fez igualmente referência ao processo de conjecturação, perspectivando-o como um processo contínuo de procura de novas hipóteses, caso as colocadas anteriormente não se verifiquem: "Nós podemos ter uma conjectura, podemos ter uma, uma ideia do que é que vai acontecer, e não ser isso, e depois termos de procurar outra ideia, outra hipótese de solução para aquele caso" (linhas 30-33). Esta situação de procura de novas conjecturas não se verificou durante a exploração desta tarefa, uma vez que os alunos formularam, desde logo, conjecturas que se verificavam em todo o universo em causa.

Clarificado o estatuto de conjectura, a professora negociou, em seguida, a necessidade de demonstração: "Então, sendo assim, precisamos, a matemática dá-nos essa ferramenta, precisamos de verificar e trabalhar . . . esta relação de maneira a que tenhamos a certeza que aquilo, . . . que nós pensamos que vai acontecer, acontece, ou se afinal aquilo que nós pensamos, não acontece" (linhas 25-30).

Após a intervenção da professora transcrita acima, esta abordou com os alunos o significado de uma representação algébrica, interpelando-os nesse sentido, e referindo que, em matemática, quando queremos representar qualquer número, utilizamos uma letra, já que "não está agarrada a nenhum e representa um número". Parafraseou o registo escrito do grupo-alvo, tentando que todos os alunos entendessem o raciocínio usado por este grupo que se centrou no critério de divisibilidade para caracterizar os números pares. Discutiu ainda com os alunos a necessidade de se usar duas letras para representar dois números pares, não necessariamente iguais. E depois, confrontou a resolução do grupo-alvo com uma outra forma de definir número par: número par como o dobro de um número natural. Explicitou, então, que se agarramos nesta última definição, qualquer que seja o número natural, par ou ímpar, o seu dobro é sempre par, o que leva à sua representação como $2a$ ou $2b$, tendo sempre a garantia de que "este resultado é sempre um número par" (expressão representativa e simultaneamente geradora de números pares), o que já não acontecia na representação usada pelo grupo-alvo, já que este grupo tinha partido de n como qualquer número natural, mas logo a seguir tinha restringido o n apenas aos naturais pares, divisíveis por dois, excluindo assim os ímpares. Por fim, a professora conduziu os alunos à manipulação algébrica envolvida na demonstração da Actividade I, utilizando de forma explícita o termo "demonstração", levando-os a identificar a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a descodificar o significado da expressão resultante $2(a+b)$ enquanto expressão representativa de um número par:

P- E então, isto que está aqui, o que é?
A professora dá um tempo para que os alunos respondam mas estes mantêm-se em silêncio.
P- Vamos lá a ver, o que é que significa o que está aqui?
Aluna – Qualquer número.
P- Mas o todo… do igual para cá!... O que é que quer dizer?
Aluna – Duas vezes *ab*.
P- E o que quer dizer duas vezes? O que vimos cá em cima?
R- Quer dizer que é par.
P- É o dobro, não é? (*o Ricardo acena afirmativamente com a cabeça*) E se é o dobro, já vimos que é uma forma de representar o quê?
Vários alunos – Número par.
P- Número par, não é? E é o dobro da soma. Então, ficámos a saber que também quando somámos dois números quaisquer, desde que eles sejam pares, não é?, o seu resultado também é um número par, estão a ver? E aqui temos a certeza que isto que nós chegámos, esta conclusão é válida para todos, enquanto que aqui em cima nós não tínhamos a certeza pois não tínhamos trabalhado para todos os números. Eu sei que isto, por si só, assim à partida, nas primeiras vezes que tamos [sic] a fazer, torna-se um pouquinho duvidoso para vocês. Mas vocês depois vão-se habituando e vão conseguindo pensar melhor.

Como vemos, nenhum aluno conseguiu de forma imediata atribuir um significado à expressão $2(a+b)$. Só quando a professora estabeleceu uma relação com o que tinham falado anteriormente—"E o que quer dizer duas vezes? O que vimos cá em cima?" (linha 8)—é que o Ricardo respondeu "Quer dizer que é par" (linha 9). A professora pareceu não ter ouvido a resposta do Ricardo e continuou no mesmo tipo de registo: "É o dobro, não é? E se é o dobro, já vimos que é uma forma de representar o quê?" (linhas 10 e 11). Perante esta formulação, foram vários os alunos que identificaram, então, aquela representação como a representação de números pares. É curioso que a própria professora, ao apresentar este resultado como um resultado que conferia a certeza de a soma ser sempre um número par—"E aqui temos a certeza que isto que nós chegámos, esta conclusão é válida para todos, enquanto que aqui em cima nós não tínhamos a certeza pois não tínhamos trabalhado para todos os números." (linhas 15-18)", reconheceu que se tratava de uma situação um pouco estranha para os alunos, a que estes não estavam habituados, e que provavelmente mais depressa os alunos confiariam nos resultados obtidos pela particularização do que pelo processo da demonstração: "Eu sei que isto, por si só, assim à partida, nas primeiras vezes que tamos [sic] a fazer, torna-se um pouquinho duvidoso para vocês. Mas vocês depois vão-se habituando e vão conseguindo pensar melhor." (linhas 18-21). Daí o seu comentário em que admite que os alunos possam duvidar do carácter generalizador daquela demonstração por ser a primeira vez com que se confrontavam com este tipo de trabalho e que portanto, com a continuação, começariam a entender melhor e a apropriar-se deste modo de obter uma comprovação de uma dada propriedade matemática.

Seguidamente, a professora apresentou como aprendizagens decorrentes da Actividade I, que os alunos deveriam assegurar, a expressão $2n$ enquanto representação de números pares, tomando o n como um número inteiro qualquer, e a expressão representativa de números ímpares que, face à interpelação feita pela professora, foi identificada por uma aluna como sendo $2n+1$.

Discutida a resolução da Actividade I, a professora seguiu o mesmo método para as Actividades II e III. No que respeita a estas duas Actividades, a professora dialogou com os alunos em torno do facto de que os exemplos concretos usados pouco ajudaram na formulação de uma ideia de como se comportam os números correspondentes aos resultados obtidos. Vejamos como é que a professora, no que respeita à Actividade II, introduziu a necessidade de, neste caso, se proceder à decomposição desses números em factores primos:

> Assim, a olhar logo para lá, era um bocadinho difícil de se encontrar alguma coisa que fosse comum a todos, não é? uma característica, . . . E assim, logo assim, à vista desarmada, não nos dava nenhuma pista, pois não? E então, a partir dessa primeira observação, a ideia seria utilizar aquilo que já conheciam, e aquilo que vocês já conheciam, neste caso, para ver como é o número, como é que ele está decomposto, será fazer ao contrário, a sua decomposição, não é? Os grupos foram fazer a decomposição em factores primos daqueles números. . . . Fomos observar, e eu digo "fomos" porque eu dei aqui uma sugestãozinha.

Efectivamente, observando simplesmente os resultados obtidos em qualquer uma destas Actividades, os alunos naturalmente conjecturarão de que os mesmos são números pares (como foi o caso do Grupo F, na Actividade II, e dos dois Grupos que concretizaram a Actividade III), mas dificilmente chegarão a outra propriedade comum, como é reconhecido pela professora. A descoberta de uma outra propriedade mais específica que a de ser número par foi conseguida, por sugestão da professora, pela decomposição desses números em factores primos. A professora assumiu, de forma explícita, perante os seus alunos, o papel de parceria na observação das decomposições efectuadas—" Fomos observar, e eu digo "fomos" porque eu dei aqui uma sugestãozinha". E em seguida, explicou no que consistiu essa sugestão: se já tinham $6= 2x\ 3$, teriam de ver se este produto surgiria também nos outros resultados, e assim, ao obter-se $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, poderiam decompô-lo de outra forma, de modo a ter o produto 2×3, ou seja, $120 = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5$. De facto, a decomposição pode ajudar na descoberta de uma propriedade mais específica que a encontrada, de modo mais imediato, pelos grupos, mas mesmo assim, é necessária uma certa perspicácia na observação das decomposições conducente a novas decomposições que dêem visibilidade a factores comuns.

O conteúdo do acetato respeitante à Actividade II corresponde, em parte, ao trabalho realizado pelo Grupo B: o uso de exemplos particulares e a decomposição em factores primos dos resultados obtidos. A fase seguinte de dar visibilidade ao produto 2 x 3 e a conjectura interrogada "Serão todos múltiplos de 6?" surge no acetato mas não no registo escrito do grupo. Apesar de não possuir registo em vídeo do trabalho desenvolvido por este grupo, quer o seu registo escrito quer a observação feita pela professora relativamente a ter acompanhado os alunos na observação das decomposições, fornecem-nos indícios de que esta fase de trabalho não foi de facto alcançada autonomamente pelos alunos, tendo sido, portanto, construída em conjunto com a professora.

Mais uma vez, a propósito das Actividades II e III, a professora discutiu com os alunos o estatuto da conjectura e a necessidade de se efectuar uma demonstração com expressões gerais de forma a averiguar se as propriedades conjecturadas se se verificariam para todos os números envolvidos nas situações propostas. Os alunos, através do diálogo conduzido pela professora, chegaram rapidamente às expressões gerais. No caso da Actividade II, a professora recorreu ao exemplo particular do 4 para os alunos chegarem às expressões gerais de números inteiros positivos consecutivos:

> P- *n* é um número inteiro positivo qualquer. . . . Quando utilizamos uma letra, temos sempre de definir o que ela significa. . . . Se o *n* é o número pelo qual nós começamos; vamos supor, se o *n* for o 4, como é que, com o *n,* eu escrevo o número que vem a seguir imediatamente?
> Alunos- $n+1$.
> P- E o outro ainda a seguir?
> Alunos - $n+2$.

No caso da Actividade III, os alunos simplesmente aplicaram a expressão algébrica de número ímpar, discutida anteriormente na síntese da Actividade I.

A apresentação das demonstrações destas duas Actividades foi sendo feita progressivamente, em contínuo diálogo com os alunos, de forma a serem eles a irem dizendo os vários passos da manipulação algébrica das mesmas. Quando, na Actividade

II, chegaram ao resultado $n^3 + 3n^2 + 2n$, a professora lembrou que teriam agora de ver se esta expressão poderia tomar outra forma, de modo a colocar em evidência o factor seis, já que pretendiam agora validar a conjectura de que todos os produtos seriam múltiplos de seis, formulada antes. E assim, orientados pela professora, os alunos foram dizendo quais as fracções que deveriam colocar como coeficientes de n^3, n^2 e n de forma a que o seu produto por seis fosse, respectivamente, 1, 3 e 2, coeficientes da expressão anterior. Na Actividade III, seguiram o mesmo processo.

Em suma, nesta tarefa, a demonstração, caso tivesse sido alcançada pelos alunos, teria tido uma função verificativa. A descoberta das várias soluções das situações propostas foi obtida pela particularização, tendo sido apoiada, no caso das Actividades II e III, pela decomposição dos resultados obtidos em factores primos, o que ajudou a revelar a propriedade comum aos mesmos. Nesta aula, a apresentação das várias demonstrações possíveis possibilitou à professora a negociação com os alunos da sua necessidade, dada a natureza própria da matemática.

Investigar Matemática – Bissectrizes…

Nesta tarefa, a demonstração teve quatro funções: a da verificação, a da explicação, a da descoberta e a da comunicação. Entre todas estas funções, a que se destaca por ter uma presença mais predominante nesta tarefa, é a da descoberta. Efectivamente, foi a demonstração que possibilitou aos alunos descobrir a relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares: o Ricardo do grupo-alvo descobriu a relação por intermédio de uma demonstração narrativa e os restantes grupos, por meio de uma demonstração algébrica. A concretização da demonstração algébrica, por parte do grupo-alvo, conforme vimos na secção anterior, foi acessória, tendo mais um papel de acordo social, no sentido de ir ao encontro do que é solicitado pela *professora,* do que propriamente um papel específico que, inerentemente, se lhe possa atribuir. Tal como referi nas minhas notas de campo (citadas na p. 697), a demonstração surge mais naturalmente no trabalho dos alunos se a mesma constituir um meio de descoberta. E tal acontece sempre que a exploração da tarefa tome como ponto de partida casos gerais e não casos particulares. Assim, nesta tarefa, a maioria dos alunos nem chegou a conjecturar. Foi unicamente um grupo, o Grupo C, que, pela observação do esquema, teve a percepção de que as bissectrizes formariam um ângulo recto, assumindo a mesma como uma conjectura acerca da qual não têm a certeza se é verdadeira. Daí que os alunos deste grupo tenham sido cautelosos no registo escrito da conjectura: as bissectrizes parecem formar um ângulo de 90º, ao observarem o esquema. Só depois da manipulação algébrica, os alunos ficam certos dessa relação, exprimindo essa convicção de forma peremptória: "vai dar um ângulo recto (90º)". A conjecturação, neste caso, não decorreu da particularização mas sim da percepção de um esquema elaborado com pouco rigor já que o mesmo pretendeu, desde o início, representar ângulos na sua generalidade e não casos particulares medidos rigorosamente.

Vemos, portanto, que, nesta tarefa, as duas funções—de descoberta e de verificação—ocorrem em simultâneo com a concretização da demonstração. Ao mesmo tempo que descobrem a solução do problema, os alunos ficam convictos que a mesma é verdadeira. O Ricardo manifesta a sua certeza à Sara apesar de sentir que tem dificuldade em explicar: "Eu tenho a certeza que tá [sic] bem. Mas agora não percebi…" (linha 20 do extracto transcrito na p. 688). Quando o Ricardo diz que não percebeu, tal deve-se à sua dificuldade em comunicar claramente o que pensou e não à sua falta de compreensão, conforme ele expressa. Aliás, é essa compreensão que lhe confere a certeza de que está a pensar bem, não duvidando nunca, em toda a aula, dessa mesma certeza. Mas é uma compreensão que ocorreu de forma muito súbita, e o seu pensamento, apesar de evidenciar traços de clareza lógica e dedutiva, é encarado pelo Ricardo como se estivesse em turbilhão, numa fase sincrética, e que necessitasse ainda de ser escalpelizado de forma a que todos entendessem claramente o que ele *viu* e tem a certeza que está bem. Entramos pois numa outra função da demonstração: a de comunicação. Quando o Ricardo comunicou a sua descoberta à professora, a sua preocupação residia na forma de melhorar a comunicação aos colegas: “Stora, dá um ângulo de noventa graus. A relação é que faz um ângulo de noventa graus. Agora, não consigo explicar aos outros”. Não transparece em nenhuma das suas palavras a tentativa de obter uma validação por parte da professora, já que a verificação obtida pela demonstração lhe tinha dado a certeza de que se tratava de uma propriedade verdadeira. A professora, conforme vimos atrás, não proferiu qualquer palavra de validação. E, como forma de ajudar o Ricardo na solicitação que lhe foi colocada, a de conseguir explicar aos outros colegas do grupo, a professora sugeriu que fizessem o esquema, partindo, portanto, do princípio de que os restantes colegas do grupo poder-se-iam apropriar do trabalho começando pela elaboração do esquema. Vemos, por conseguinte, que as palavras proferidas pelo Ricardo em dois momentos distintos, apesar de diferentes, têm um significado semelhante: “Mas agora não percebi…” tem uma relação directa com “Agora, não consigo explicar aos outros”. É curioso constatar que esta sensação de frustração associada ao facto de o Ricardo sentir que não consegue explicar aos outros se manteve mesmo depois de a Sara ter dito que tinha percebido (linha 33 do extracto transcrito na p. 688).

Vejamos mais pormenorizadamente como se processou a comunicação do Ricardo através da demonstração narrativa. Fê-lo oralmente, recorrendo ao suporte do esquema e explicitando narrativamente a relação descoberta. Esta explicitação narrativa põe a descoberto a explicação da razão por que se verifica a propriedade de as bissectrizes de ângulos suplementares serem perpendiculares. Assim, a função de explicação está naturalmente associada à natureza da demonstração. Enquanto a demonstração algébrica feita pelos restantes grupos da turma permitiu descobrir e verificar, sem colocar de forma evidente a explicação de por que é verdadeiro o que se está a afirmar—eventualmente, os alunos poderão chegar à soma dos dois semi-ângulos através da aplicação de uma regra habitualmente aplicada na resolução de equações (se se divide por dois, todos os termos de um membro da equação, também se divide por dois, o termo do outro membro da equação), sem compreender efectivamente a relação em causa—a demonstração narrativa do Ricardo evidenciou sempre, através da comunicação aos colegas, a explicação dessa mesma relação. Ou seja, a função de explicação esteve sempre presente no pensamento do Ricardo, desde o momento inicial do seu *insight* até aos vários momentos de partilha da sua descoberta no seio do grupo. A função de comunicação acabou por constituir uma motivação para o Ricardo para proceder à explicação da relação encontrada por si, e neste sentido, as funções de explicação e de comunicação encontram-se associadas nesta tarefa. Trata-se de um motivo social pois genuinamente o Ricardo estava interessado em partilhar com os colegas de grupo algo que ele descobrira e que nenhum dos outros ainda compreendera.

Por que motivo sentiu o Ricardo dificuldade em comunicar aos colegas do grupo a explicação da sua descoberta? Por que motivo custaram os colegas a entender o que era dito pelo Ricardo? Ter-se-ia ele expressado com pouca clareza? Se analisarmos as várias intervenções do Ricardo no extracto transcrito (pp. 688-9), verificaremos que o Ricardo se exprimiu com os termos adequados e com bastante clareza, indo ao cerne da questão e explicando cabalmente a relação encontrada, abordando-a sempre na sua generalidade. Esta foi a sua primeira explicação, apoiada pelo esquema: "Isto são dois ângulos suplementares, dá cento e oitenta. Quando dividimos, é isto e isto. (…) Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus". Esta é a sua segunda tentativa de explicação, já sem o apoio do esquema, que tinha sido apagado, perante a afirmação da Sara de que não entendera, a qual verbalizara o ocorrido também com os outros dois membros do grupo, tentativa esta que decorre da interacção com a Maria, de tal modo que podemos olhar para o diálogo entre os dois alunos como a formulação em sintonia de frases, em que as mesmas são iniciadas pela Maria e completadas pelo Ricardo:

> M- Ângulos suplementares…
> R- (*dando seguimento à frase iniciada pela Maria*) Cento e oitenta graus. Metade…
> M- A bissectriz…
> R- Dá noventa graus. A bissectriz, dá noventa graus. Usa a metade de um ângulo e a metade de outro. Logo, dá noventa graus.

Esta segunda tentativa parece ser mais bem sucedida pois, logo após, a Sara admitiu ter percebido. Mesmo assim, o Ricardo sentiu necessidade de reforçar a sua explicação com o recurso à particularização e à elaboração de um novo esquema, como se não tivesse ficado muito convencido que a Sara efectivamente tivesse compreendido bem:

> Por exemplo, por exemplo, vou usar números assim marados, sei lá… Vá… Aqui é sessenta, aqui é cento e vinte. A bissectriz (*traça a bissectriz*) a fazer isto, dá aqui trinta e aqui sessenta (*traça a outra bissectriz*). Trinta mais sessenta, noventa. Ângulo recto. Percebeste?

Assim, os exemplos particulares usados não serviram para estudar uma questão geral mas unicamente para ilustrar e, eventualmente, tornar mais compreensível, uma dada propriedade geral. Desta vez, a Sara não respondeu directamente à questão do Ricardo sobre se tinha percebido como se já não precisasse de reafirmar o que já tinha referido antes. A sua intervenção incidiu no esquema elaborado pelo Ricardo que ela considerava muito confuso: “isto tá [sic] uma grande confusão. Não tou [sic] a perceber nada”. Quando aqui a Sara refere não estar a perceber nada, tem a ver com o esquema que ela considera pouco claro e perceptível e não propriamente com a compreensão da relação entre as bissectrizes.

Voltemos às questões colocadas atrás. Se o Ricardo comunicou oralmente com clareza, por que razão essa mesma comunicação é tão difícil de se processar? A razão reside precisamente nos diferentes ritmos de apropriação da tarefa e nos diferentes modos de raciocinar. O Ricardo revela um raciocínio bastante perspicaz, lógico e dedutivo e também bastante rápido. Essa velocidade de pensamento reflecte-se igualmente na forma rápida como fala o que pode dificultar o acompanhamento das outras pessoas relativamente aos raciocínios expressos. Ou seja, os colegas de grupo do Ricardo teriam que passar por um processo mais lento de apropriação da propriedade da questão colocada na tarefa para serem capazes de entender o que o Ricardo compreendera num ápice. Não se trata pois de falta de clareza por parte do Ricardo mas sim da prematuridade do momento em que ocorreu essa mesma comunicação. É entre a primeira e a segunda tentativa de explicação do Ricardo que, pela primeira vez a Sara e Maria pensam na tarefa em si, tentando perceber a sua intencionalidade e o seu sentido. São da Sara as seguintes palavras: “Usa os conhecimentos para descobrir isto… Ou seja… Aqui, algumas coisas, estas coisas têm de se aproveitar aqui…”. Encontravam-se, portanto, numa fase muito inicial de apropriação da tarefa. E foi isso que dificultou a comunicação: o Ricardo e os restantes colegas estavam em diferentes ‘comprimentos de onda’, em diferentes patamares de apropriação da tarefa. O momento em que ocorreu a primeira explicação do Ricardo era tão prematuro que seria impossível aos outros compreenderem o que estava a ser dito pelo Ricardo, por mais claro que ele fosse.

Foi por essa razão que, como vimos atrás, a professora como que ignorou a descoberta anunciada pelo Ricardo e incentivou a elaboração do esquema. E não deixa de ser curioso que o Ricardo, mesmo após as suas três tentativas de explicação, a última das quais apoiada pelo recurso a exemplos particulares num esquema, mesmo após a Sara ter afirmado que tinha percebido, tenha continuado a sentir falhas de comunicação com os colegas, o que o levou a solicitar ajuda à professora nesse sentido: “Agora, não consigo explicar aos outros”.

Em suma, a demonstração envolvida na exploração desta tarefa teve múltiplas funções, associadas duas a duas: de descoberta e de verificação, por um lado, e de explicação e de comunicação, por outro.

Circunferência e Ângulos III

Nesta tarefa, a demonstração permitiu descobrir uma dada propriedade matemática—a da soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência—estabelecendo a respectiva veracidade e explicando a razão por que é a mesma verdadeira, simultaneamente. Por outro lado, foi por meio dela que os alunos comunicaram por escrito a descoberta dessa nova propriedade, usando dois dos grupos um discurso narrativo habitual na sua forma de comunicar os raciocínios desenvolvidos na aula de Matemática. Tal como de Villiers (2001) considera existirem múltiplas funções da demonstração em matemática, também nesta tarefa específica desenvolvida em contexto escolar, a demonstração teve quatro funções: a da verificação, a da explicação, a da descoberta e a da comunicação. Neste caso, a convicção não foi obtida pela testagem em diversos exemplos particulares, pois o único exemplo particular experimentado foi o quadrado (ou o rectângulo). Efectivamente, o segundo quadrilátero construído (sem ângulos rectos opostos) passa a ser encarado como objecto do pensamento, geral e abstracto: deixa de ser olhado na sua particularidade (daí que não o possamos considerar como mais um exemplo particular). A forma de raciocinar, usando uma relação entre qualquer ângulo inscrito com o arco que o mesmo contém, fez com que os alunos raciocinassem em termos gerais, e não sentissem necessidade de qualquer tipo de verificação empírica. Assim, por meio da demonstração, conseguiram logo descobrir uma propriedade e, simultaneamente, verificá-la quanto à sua veracidade para a generalidade dos casos.

Vejamos agora com mais detalhe o papel da demonstração, analisando o extracto do momento seguinte ao *insight* do Ricardo expresso em "Já sei!":

R- Stora, isto tudo é trezentos e sessenta.
P- (*levantando-se numa atitude de se afastar do grupo*) Agora escrevam, escrevam que vocês estão habituados a escrever, tá [sic] bem? Para ficar provado, demonstrado que aquilo que tão [sic] a pensar é correcto.
A professora afasta-se do grupo.
R- (*dirigindo-se à Sara)* Então, é assim. Ouve-me! Ouve-me, ouve-me! Senão, eu passo-me! (*leva as mãos à cabeça)*
S- Calma!...
R- Isto tudo dá trezentos e sessenta. (*aponta sucessivamente para cada um dos ângulos inscritos e respectivos arcos correspondentes)* O arco deste ângulo aqui é este. O arco deste ângulo é este.
A Maria passa a caneta por cima do arco menor, compreendido entre os lados do ângulo α.
R- Isto dá tudo trezentos e sessenta. Certo? (*olha para a Sara*)
S e M- (*em uníssono*) Sim!...
R- Calma!... Dá trezentos e sessenta, tudo junto.
A Maria apaga o traçado do diâmetro.
R- Vou usar coisas relativas, ok? Vou usar ângulos relativos. A gente não sabe, faz de conta que aqui é cem (*regista o número perto do arco menor)*, este aqui é duzentos e sessenta (*escreve o número ao pé do arco maior)*. O ângulo inscrito, este (*aponta para o ângulo* β) é sempre metade de duzentos e sessenta, logo… é…
B- Cento e trinta.
R- (*fazendo um gesto de concordância em direcção ao Bernardo)* Tá [sic] certo!
S- Não percebi o que disseste.
M- Explica lá outra vez.
R- (*olhando para a Sara)* Isto é o ângulo inscrito (*aponta para o ângulo* β*).*

O arco do ângulo inscrito é sempre o dobro. Logo, este ângulo inscrito é metade de duzentos e sessenta, porque o arco é o dobro. Dá números relativos só para tentar perceber. Então, é cento e trinta, certo? (*escreve "130" ao pé do ângulo* β) E este aqui é sempre metade, é cinquenta (*regista "50" na folha de papel ao pé do ângulo* α*).*
S- *(fazendo coro com o Ricardo)* Cinquenta.
R- Cento e trinta mais cinquenta dá cento e oitenta. (*a professora aproxima-se)* Logo, é cento e oitenta. Seja qual for.
S- (*pondo uma mão na fonte da cabeça)* É cento e oitenta, como?

Nesta tarefa, no que respeita ao trabalho do grupo-alvo, a validação do conhecimento matemático foi feita em momentos distintos da aula, unicamente por intermédio da demonstração. No primeiro momento, os alunos demonstraram por contra-exemplo que uma dada afirmação matemática não era verdadeira, tendo usado a percepção como forma de constatação do referido contra-exemplo. A percepção foi usada tanto pelo Ricardo como pela Sara como forma de invalidar uma afirmação matemática proferida, momentos antes, pelo Ricardo: cada ângulo ao centro mede 180º, logo cada ângulo inscrito mede 90º (ver extracto nas pp. 699-700). O próprio Ricardo chegou à conclusão de que era falso o que tinha acabado de afirmar pela percepção de um dos ângulos ao centro que ele considerou não ser de certeza um ângulo raso, apesar de ele os ter traçado como ângulos rasos, sem corresponderem aos ângulos inscritos— "Porque este de certeza não é ângulo de cento e oitenta graus". A Sara invalidou a referida afirmação do colega pela percepção dos ângulos inscritos que manifestamente não tinham o aspecto perceptivo de ângulos rectos. Poder-se-á dizer que a percepção de exemplos particulares, neste nível de ensino, é suficiente para demonstrar por contra-exemplo uma dada afirmação matemática.

No segundo momento, a validação fez-se por meio de uma demonstração baseada em relações gerais. Foi feita no singular já que apenas o Ricardo conseguiu vislumbrar a solução do problema por meio da demonstração matemática, raciocinando em termos gerais. Mas a demonstração foi suficiente para validar a correcção do que tinha acabado de descobrir: foi uma validade que adveio unicamente da evidência matemática emergente do raciocínio lógico, partindo de outra propriedade aprendida anteriormente e já estabelecida como verdadeira, especificamente a que afirma que a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. De facto, vemos que o Ricardo não sentiu necessidade de conferir com a professora se estava a pensar correctamente, tendo evidenciado, desde logo uma enorme segurança no seu pensamento matemático. Assumiu no grupo o papel de transmissor de uma verdade, obtida por meio do seu raciocínio. Nessa fase, não existe nele qualquer assomo de dúvida, residindo a sua preocupação unicamente na melhor forma de conseguir que os colegas, ou melhor, a Sara compreendesse também o que ele próprio já compreendera. Tal como um professor numa sala de aula assume o mesmo tipo de preocupação junto dos seus alunos.

Efectivamente, quando o Ricardo exclama "Já sei!", nada mais acrescenta à professora. Esta reparou na exclamação do aluno, olhou ostensivamente para ele e sorriu-lhe. Mas como a professora nada lhe perguntou, ele nada mais disse, nesse momento. No entanto, uns instantes depois, ainda tentou confirmar com a professora o que tinha acabado de verificar: "Stora, isto tudo é trezentos e sessenta." (linha 1). A professora pareceu não o ouvir pois começou a falar ao grupo sobre outro assunto, o pedido do registo escrito de tudo o que pensassem. A interpelação do Ricardo junto da professora não se baseia em qualquer tipo de dúvida; não é uma interrogação. É antes uma afirmação e uma partilha do que tinha acabado de *ver*. E nesse olhar para a soma das amplitudes dos arcos estava condensada a descoberta da questão em causa: então a outra soma seria a metade desta. E tal é a segurança revelada pelo Ricardo que, assim que a professora se afastou para ir junto de outro grupo, imediatamente começou a querer transmitir à Sara a sua ideia—"Então, é assim. Ouve-me!" (linha 6)—sem nunca mais solicitar a atenção da professora, o que evidencia que não sentiu necessidade de validar a sua descoberta com a mesma.

Vejamos agora como se processou oralmente a comunicação matemática no seio do grupo, e como foi negociado o significado da demonstração descoberta pelo Ricardo. Todas as interacções, transcritas acima, no seio do grupo resumem-se à tentativa de partilha do *insight* do Ricardo junto dos colegas do grupo, apesar de ele estabelecer um contacto mais directo com a Sara, como se o seu intento fosse unicamente que esta percebesse o seu raciocínio, não se importando muito com os outros dois elementos. Neste momento da aula, o Ricardo apenas tenta transmitir a ideia compreendida anteriormente, de forma súbita, no preciso instante em que exclamou "Já sei!", e é por isso que começa por pedir que o ouçam: "Ouve-me! Ouve-me, ouve-me!" (linha 6). Esta fase da aula contrasta com a anterior, na qual o Ricardo tentava raciocinar com base nos ângulos ao centro, em clara construção de raciocínio, pedindo, nessa altura, à Sara, que o deixasse pensar.

O Ricardo desenvolveu, por conseguinte, um discurso oral no grupo que visava a comunicação do que tinha descoberto e que ainda não tivera oportunidade de explicitar nem por escrito nem oralmente. Mas, apesar de o seu raciocínio se ter desenvolvido com base em relações gerais, não o apresentou desse modo aos colegas. Ou seja, não usou a demonstração para comunicar oralmente o seu pensamento. Fê-lo por meio da particularização.

A particularização que o Ricardo fez com exemplos concretos de amplitudes de arcos serviu, pois, o único propósito de se fazer compreender pelos colegas. Considerou que o uso de exemplos poderia ajudar a entender o seu raciocínio: "Dá números relativos só para tentar perceber." (linhas 30 e 31). É curioso observar a terminologia que ele utilizou: “números relativos”. O sentido de “relativo” aqui nada tem a ver com números inteiros positivos e negativos. O sentido atribuído aqui a “relativo” é o de os números estarem relacionados um com o outro (ambos têm de perfazer a soma de 360) e o de se relacionarem com o quadrilátero construído pelo grupo (a olho nu, e tendo por base um sentido numérico de amplitude de arco, poder-se-á perfeitamente estimar que o arco maior desenhado na folha poderá medir 260º de amplitude e o arco menor, 100º). Ou seja, os números escolhidos estão, de certa forma, adequados à construção efectuada pelo grupo (ver figura 27), embora, não seja essa adequação a que importa pois os exemplos são apenas ilustrações para compreender uma relação geral, e portanto quaisquer outros exemplos cumpririam o mesmo objectivo. De qualquer modo, o Ricardo, ao usar a particularização, começa pelo arco menor para lhe atribuir um número de referência, o número cem, e o outro é determinado por este, de forma a obter-se 360 quando somados os dois números. Vemos portanto que, neste caso, a particularização não antecedeu a generalização. Não foi usada no mesmo sentido do apontado por Mason et al. (1984) para aprender sobre uma dada questão geral, caminhando para uma generalização a partir da identificação de padrões relativamente à análise do que acontece com exemplos particulares. Aqui, o Ricardo usou a particularização como recurso de comunicação e recurso para obtenção, por parte dos colegas, de compreensão de uma relação geral. Partiu do princípio que se os colegas conseguissem perceber a relação com exemplos particulares, facilmente dariam o salto para generalizar para qualquer ângulo.

Efectivamente, o processo que foi usado em primeiro lugar pelo Ricardo foi o da generalização: o *insight* do Ricardo fez-se com base numa generalização para qualquer ângulo de qualquer quadrilátero inscrito numa circunferência. E exprimiu esta generalização na conclusão expressa no final: “Logo, é cento e oitenta. Seja qual for” (linha 36). Subentende-se que este “seja qual for” se refere a ângulo: seja qual for o ângulo inscrito (não apenas os ângulos do quadrilátero desenhado mas sim todos os ângulos opostos de todos os quadriláteros possíveis de se inscreverem numa circunferência), a soma das amplitudes de dois ângulos opostos é cento e oitenta. Apesar de não dizer explicitamente “é sempre cento e oitenta”, percebe-se que nesta generalização existe a ideia do sempre, de algo que permanece constante no meio de toda a variação possível de quadriláteros e respectivos ângulos. O termo “Logo” que o Ricardo usou é também evidenciador que o valor “cento e oitenta”, dito agora pela segunda vez, é um valor geral aplicável a todos os quadriláteros, distinto dos “cento e oitenta” particularizados como sendo a soma de 130 com 50, pois surge em tom conclusivo: é, efectivamente, a conclusão de um raciocínio dedutivo.

No entanto, apesar da particularização usada pelo Ricardo como forma de facilitar a sua comunicação, este não foi bem sucedido nos seus intentos. Durante o momento de partilha em pequeno grupo, a única intervenção do Bernardo tinha sido no sentido de efectuar o cálculo de metade de 260 (linha 23), e a Maria tinha pedido para o Ricardo explicar outra vez (linha 27), depois da Sara ter explicitado que não tinha percebido (linha 26). A Sara parece estar a acompanhar a particularização quando faz coro com o Ricardo na determinação da amplitude do ângulo inscrito correspondente ao arco de 100º—“Cinquenta” (linha 34)[73]. Mas no final da explicação do Ricardo, a Sara continuava a não entender a relação entre essa particularização e a generalização de dar sempre 180º, tendo exprimido a sua falta de compreensão: “É cento e oitenta, como?” (linha 37). Os outros colegas não se manifestaram mas poderá depreender-se, até pelo seu silêncio, que também não tinham acompanhado o raciocínio do Ricardo.

727

[73] Os valores hipotéticos das amplitudes escritas nesta fase da aula foram posteriormente apagados após o registo escrito da demonstração. Por esse motivo, os mesmos não aparecem na figura 27.

Foi neste preciso momento que a professora se aproximou de novo do grupo, desempenhando um papel ao nível da comunicação da propriedade descoberta pelo Ricardo. Tendo ouvido a interrogação da Sara (linha 37), interrogação esta fundamentada pela incompreensão, a professora foi colocando questões ao grupo, respondidas na sua maioria pelo Ricardo. A uma dada altura, a professora chamou a atenção para a soma dos dois arcos:

P- Fica alguma parte que não é contabilizada, ou …?
R- Não. Fica tudo.
P- Fica toda a …
R- (*fazendo um gesto circular como quem traça uma circunferência*) Haãããã…
P- Toda quê?
R- A circunferência.
P- A circunferência.
R- (*fazendo gestos a apontar para os elementos que vai nomeando*) Isto tudo dá 360. Se os ângulos inscritos dão metade… Dá 180º.
P- (*faz um gesto com a mão de concordância e olha para a Sara; o Ricardo também olha para a Sara)* Não é? (*pausa; fala directamente para a Sara e esta vai acompanhando a fala da professora com acenos afirmativos com a cabeça*) A soma total dá 360 nos arcos. Como os ângulos inscritos são metade dos arcos…
R- (*completando a fala da professora*) Dá 180.
A professora faz um gesto de concordância com a conclusão enunciada pelo Ricardo.

Como vemos neste extracto, desta vez toda a comunicação da relação encontrada é feita em termos gerais, sem qualquer recurso a exemplos particulares. Primeiro, é o Ricardo que enuncia a generalização: "Isto tudo dá 360. Se os ângulos inscritos dão metade… Dá 180º." (linhas 9 e 10). Depois, é a professora que parafraseia o discurso do Ricardo, falando directamente para a Sara, com a intenção de esta compreender o que poderia ainda não ter compreendido bem com as palavras do Ricardo: "A soma total dá 360 nos arcos. Como os ângulos inscritos são metade dos arcos…" (linhas 14 e 15). E é novamente o Ricardo que toma posse da palavra, completando a frase proferida pela professora: “Dá 180.” (linha 16). As conclusões enunciadas pelo Ricardo mereceram uma validação por parte da professora, visível quer na forma como exprime a sua concordância por gestos quer no modo como utiliza a paráfrase da expressão oral do Ricardo. O modo como a Sara vai acenando afirmativamente a cabeça ao longo da última intervenção da professora (linhas 14 e 15) evidencia que a mesma finalmente estará a compreender e a manifestar o seu acordo. Tal poderá levar-nos a concluir que uma comunicação baseada em relações gerais foi mais bem sucedida do que uma baseada em particularizações. Por outro lado, a voz pausada e clara da professora poderá também constituir um factor facilitador no acompanhamento de um dado raciocínio por parte da Sara. O Ricardo tende a falar de forma muito rápida. No entanto, os dados nada nos dizem até que ponto teria a Sara compreendido ou apropriado esta dedução lógica que conduziu à descoberta de uma determinada propriedade matemática. Efectivamente, a Sara acenou afirmativamente com a cabeça mas no momento seguinte em que o grupo passou à fase de registo escrito, foi ela própria que pegou na ficha e no lápis, sem , contudo, ter escrito uma única palavra da sua autoria, tendo-se limitado a escrever as palavras ditadas pelo Ricardo. De certo modo, este foi mais um momento que contribuiu para a compreensão da Sara da ideia em causa, através do processo de ventriloquismo escrito: a Sara tornou suas as palavras do Ricardo, escrevendo-as ela própria. Estou convicta que, no momento, a Sara ainda estaria numa fase de construção de compreensão sem uma completa apropriação da demonstração que ficou reificada pelo registo redigido pelo seu punho.

Sintetizando, a demonstração teve, no trabalho desenvolvido pelo grupo-alvo nesta tarefa, um papel comunicativo. No que se refere ao registo escrito, foi por seu intermédio que o grupo explicitou a descoberta de uma propriedade matemática. No entanto, esteve ausente na comunicação oral que o Ricardo fez no seio do grupo, tendo o mesmo optado por usar a particularização como recurso de ilustração, de elucidação do seu pensamento, e ganho de compreensão por parte dos colegas, apesar de a particularização ter estado ausente na génese da demonstração e no modo súbito como o Ricardo compreendeu a relação geral. Esteve presente no momento seguinte de interacção entre a professora e o grupo, no qual tanto o Ricardo como a professora se exprimiram por meio da demonstração, parecendo que uma comunicação baseada unicamente numa relação geral é mais efectiva do que uma comunicação que visa chegar a uma relação geral por intermédio de exemplos particulares.

Entrevistas

Esta subsecção destina-se a apresentar os resultados obtidos das entrevistas relativamente ao preenchimento da folha alusiva à generalidade e função de argumentos (anexo 3) e à exploração individual da tarefa "Explorações com números IV" (anexo 4). Apresento também alguns resultados relativos a algumas da questões que coloquei nas entrevistas.

Anexo 3. Passo a apresentar a forma como os alunos do grupo-alvo assinalaram as características dos diferentes argumentos sobre uma propriedade—a soma de quaisquer números pares. Esta propriedade já tinha sido discutida e explorada numa das suas aulas de Matemática (a aula de 20 de Janeiro em que se explorou a tarefa sobre exploração com números).

Consistindo a resposta do Sérgio, na folha apresentada aos alunos, uma demonstração algébrica e formal com a função verificativa, todos eles assinalaram neste argumento a função verificativa para a generalidade dos casos ("mostra que a afirmação é sempre verdadeira") mas à excepção da Sara, que apenas colocou uma cruz para esta resposta, todos os restantes alunos colocaram uma outra cruz para a opção relativa à função explicativa ("mostra por que é que a afirmação é verdadeira"). A Sara foi também a única a escrever justificações para as suas opções, no espaço por baixo do quadro onde eram registadas as cruzes. Relativamente a esta resposta, escreveu "Na resposta do Sérgio, a afirmação é sempre verdadeira, pois o Sérgio, para explicar, utilizou uma fórmula para concluir, ou seja, concluiu assim, que a sua resposta é para todos os casos".

Sendo a resposta da Ana uma demonstração narrativa e informal com as funções verificativa e explicativa, três dos alunos assinalaram essas mesmas opções para esta resposta. Apenas o Bernardo assinalou a opção relativa à função verificativa e a opção relativa ao argumento empírico ("mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares") o que acaba por ser uma escolha contraditória. Note-se que a primeira opção do Bernardo, relativamente à resposta da Ana, foi unicamente o argumento empírico, atribuindo-lhe, portanto, as mesmas características da resposta do Rodrigo. Quando eu lhe pedi para me ler a resposta da Ana, já depois de ter feito todas as cruzes, e voltei a questioná-lo relativamente às diversas características dessa resposta, o Bernardo referiu que considerava que aquela resposta mostrava ser verdadeira para todos os casos mas que não explicava porquê, tendo então colocado mais uma cruz na função verificativa. Provavelmente, a contradição deveu-se à minha intervenção de o levar a ler a resposta e a rever as várias possibilidades de opção, o que poderia tê-lo feito pensar que deveria acrescentar mais uma cruz. No caso do Ricardo, fiz uma solicitação explícita para ele colocar mais uma cruz. O Ricardo, inicialmente, tinha assinalado apenas a função explicativa. Pedi-lhe para ele ler em voz alta a resposta da Ana e colocar mais uma cruz, consoante ele considerasse que era uma resposta que explicava por que é que a afirmação era verdadeira para alguns números pares ou para todos os números pares. E só depois desta minha intervenção é que o Ricardo colocou uma cruz na primeira opção, relativa à generalidade, considerando que a resposta explicava para todos os números pares.

A Sara escreveu o seguinte: “Na resposta da Ana, ela mostra porque é que a afirmação é verdadeira utilizando palavras e não cálculos, mas conseguindo assim, também, mostrar que a sua resposta serve para todos os casos”. A Sara estabeleceu, assim, uma distinção entre estes dois tipos de argumentos quer na sua natureza quer na sua função. A natureza narrativa da resposta da Ana permitiu explicar por palavras as razões por que uma dada afirmação é verdadeira, englobando nessa explicação a generalidade dos números pares, sendo, portanto, simultaneamente verificativa para todos os casos. A resposta do Sérgio, ao usar fórmulas e cálculos, verifica a veracidade para todos os casos, mas já não explica as razões de a afirmação ser verdadeira. Tanto a Maria como o Ricardo atribuíram as mesmas características às respostas do Sérgio e da Ana, considerando portanto ambas verificativas e explicativas para a generalidade dos casos.

Em relação à resposta do Rodrigo, sendo um argumento empírico, três dos alunos assinalaram unicamente essa opção—“mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares”. A Maria foi a única a assinalar, além dessa, também a opção relativa à função verificativa, o que resulta numa contradição semelhante à do Bernardo, alusiva à resposta da Ana. E seguindo a mesma suposição anterior, sou levada a concluir que a Maria considera um argumento empírico como sendo um argumento geral que, ao mostrar que a afirmação é verdadeira para alguns números pares, também mostrará que o é para todos os casos. A Sara, para esta resposta, escreveu “Na resposta do Rodrigo, ele limita-se a explicar nalguns casos, não mostrando que a sua resposta serve para todos os casos".

Em suma, vemos que, à excepção da Maria, os alunos do grupo-alvo denotam uma compreensão do que é uma demonstração, distinguindo-a de argumentos empíricos. Optei deliberadamente nesta folha não usar o termo "demonstração" para que os alunos atendessem à sua essência (corporizada em argumentos escritos) e não ao significado que pudessem reconhecer à designação no momento. A visão de o argumento algébrico não se encontrar associado à função explicativa foi apenas alcançada pela Sara.

Anexo 4. Vejamos agora como exploraram os alunos a tarefa "Explorações com números IV". Esta tarefa apresenta três questões e eu pedi a cada um dos alunos para eles escolherem uma delas, assinalando-a com um círculo, e resolvendo-a em baixo. Só o Bernardo é que escolheu a questão 2. Os restantes elementos do grupo escolheram a questão 1. No entanto, por minha sugestão, os dois rapazes resolveram ainda uma outra questão após a eleita por si, acabando por resolver as duas primeiras questões.

No que respeita à primeira questão "Como é o produto de quaisquer números pares?", todos chegaram à conclusão de que o produto é sempre par, tendo usado argumentos algébricos, à excepção da Maria, que usou unicamente um argumento empírico. A Maria utilizou exemplos de produtos de 2 por outros números pares (2, 4, 6, 8 e 10), tendo chegado à conclusão que "se multiplicarmos 2x qualquer numero [sic] par ira [sic] dar sempre par, logo o produto é sempre par". Esta resolução da Maria mostra-nos que a aluna restringiu a própria questão aos dobros de quaisquer números pares.

Em relação às restantes resoluções da primeira questão, vemos que o facto de terem tido momentos antes, na sua frente, a folha com os diversos argumentos (anexo 3) suportou a sua resposta. Os três alunos usaram a resposta do Sérgio como modelo para a sua própria resposta, dada a similitude entre as questões: bastaria mudar a operação adição para a multiplicação. O facto de terem escolhido para modelo uma demonstração algébrica mostra a sua valorização deste tipo de argumento.

O Bernardo copiou, na íntegra, a resposta do Sérgio, com a única alteração da colocação do sinal "x" em vez do sinal "+". Conforme explicito um pouco mais à frente, foi na sequência da resolução da questão 2 que entreguei de novo ao aluno a folha com a resposta do Sérgio e o convidei a tentar resolver uma outra questão, a questão 1. Ao contrário do que sucedeu com os restantes alunos, que não tiveram a folha (anexo 3) na sua frente no momento da exploração da tarefa, o Bernardo recorreu à mesma para, deliberadamente, tentar produzir uma demonstração algébrica, já que não tinha conseguido na questão 2, apesar dos seus intentos. O facto de o Bernardo se ter limitado a copiar quase integralmente a resposta do Sérgio da folha conduziu-o a um erro de manipulação algébrica: "2*a*x2*b* = 2(*a*x*b*)". Não sabemos se o Bernardo teria dificuldade em calcular algebricamente aquele produto ou se estaria influenciado pela resposta alusiva à soma, não tendo reparado que no caso do produto, teria de multiplicar os coeficientes de *a* e de *b*.

Tanto o Ricardo como a Sara conseguiram produzir uma pequena demonstração algébrica para a questão 1. O Ricardo escreveu o seguinte: "2*a*x2*b* = 4*ab*". Pedi-lhe para escrever uma conclusão acerca da questão colocada, e ele escreveu "O produto de quaisqueres [sic] numeros [sic] pares dá sempre numero [sic] par". No final, dialoguei com o aluno no sentido de ele transformar 4*ab* numa expressão mais próxima da forma como ele tinha expresso número par, tendo então, registado "2x2*ab*" ("2*a*x2*b* = 4*ab*= 2x2*ab*"). Para chegar à expressão 4*ab*, o Ricardo fez alguns cálculos auxiliares, por baixo, que depois riscou. Apesar de riscado, consegue–se ver "*a*x*b*=*ab*" e por baixo, sem sinais operatórios, "2 2 4". A Sara seguiu mais de perto o modelo do Sérgio, embora não de forma tão colada como o Bernardo:

a = número inteiro positivo par qualquer
b= número inteiro positivo par qualquer
$2a$ = números pares
$2b$ = números pares
$2a\text{x}2b = 4ab$
$4ab$ = número par
Com esta fórmula, estou a mostrar que o produto é sempre par para o caso geral.

Na definição de *a* e de *b*, a Sara escreveu primeiramente, para ambas as variáveis, “número inteiro positivo qualquer”, tal como se encontrava na resposta do Sérgio, pois o termo “par” está encavalitado, sem espaço para o mesmo. A Sara revela, pois, alguma dificuldade na escrita das expressões gerais, evidenciando, assim, alguma inconsistência no seu registo final, já que o número par tanto é representado por *a* (ou *b*) como por 2*a* (ou 2*b*). A expressão de um número par como sendo 2*a* (ou 2*b*) não deveria estar completamente apropriada pela Sara, seguindo o modelo como suporte da mesma. Tanto a Sara como o Ricardo não sentiram necessidade de factorizar o 4, concluindo logo tratar-se de um número par, ao reconhecer um número resultante do produto de 4 por outro qualquer número natural como sendo par. A forma como a Sara redigiu a sua conclusão evidencia a clara consciência da comprovação geral conseguida por este tipo de argumento algébrico, não empírico.

Após a resolução da questão 1, convidei o Ricardo a escrever uma expressão para números ímpares. Primeiro, disse que não sabia mas logo recordou a abordagem ao assunto feita pela professora—“A stora ensinou-nos mas…”—e no instante a seguir, exclamou “Ah! Já sei!” e registou “2*a*-1”. Sugeri então que fizesse a segunda questão. Partindo da expressão, elaborou um argumento algébrico:

$2a$-1 = nº ímpar
$2b$-1
$2a-1 + 2b-1 = 4ab – 2 = 2\text{x}2ab - 2$
Dá sempre par

Conforme podemos verificar, o Ricardo cometeu um erro ao adicionar $2a$ com $2b$—em vez de adicionar, multiplicou—e seguindo a minha sugestão da questão anterior, factorizou também aqui $4ab$. No entanto, não chegou a obter uma expressão algébrica de um produto com o 2 em evidência.

O Bernardo, nesta questão, também tentou definir algebricamente o número ímpar, representando-o por x. Ficou um certo tempo num impasse, manifestando a sua vontade em resolver a questão por recurso a letras, sem, contudo, conseguir encontrar uma expressão representativa de quaisquer números ímpares. Ao vê-lo nesse impasse, decidi incidir a sua atenção na resposta do Sérgio, mostrando-lhe de novo a folha que, entretanto, eu já tinha guardado. A partir da expressão $2a$ de número par, o Bernardo sugeriu as expressões $3a$ e $4a$ para número ímpar. Experimentou, sob minha orientação, concretizar em $3a$ alguns valores naturais substituindo a pelos mesmos, e verificou que obtinha tanto números ímpares como pares. Como não conseguiu obter nenhuma expressão geradora dos números ímpares, acabei por lhe sugerir que utilizasse exemplos particulares. Assim o fez mas não escreveu qualquer conclusão geral a partir das somas obtidas. Em seguida, sugeri-lhe, então, que resolvesse ainda a questão 1, já que poderia usar nela a expressão de números pares.

Em suma, entre os alunos do grupo, apenas a Maria encara um argumento empírico como comprovativo da generalidade dos casos. Daí a sua resolução incorporar esse tipo de argumento e concluir do mesmo uma afirmação geral. Todos os restantes alunos, embora com diferentes níveis de perícia, tentam usar argumentos algébricos que verifiquem para a generalidade dos casos as propriedades conjecturadas a partir, provavelmente, de exemplos particulares calculados mentalmente. Trata-se de argumentos com a única função de verificarem a veracidade das propriedades descobertas por via da particularização (embora esta não tenha sido registada previamente à argumentação algébrica). A resolução do Ricardo é elucidativa da forma como ele procura obter como expressão final uma expressão com o factor 2, como se desde o início, já soubesse que iria dar um número par. Na folha onde assinalaram as cruzes, estes alunos colocaram o argumento empírico como verificativo apenas para alguns casos e não para todos. No caso do Bernardo, é evidente a sua procura em usar um argumento algébrico, só enveredando, na questão 2, por um argumento empírico, por ter sido essa a minha sugestão, dada a sua incapacidade de encontrar uma expressão geral para números ímpares. Ao ter a chance de usar um modelo orientador para a questão 1, o aluno preferiu utilizar um argumento algébrico, dada a sua consciência de que o argumento empírico não comprovaria a propriedade conjecturada para a generalidade dos casos. E talvez fosse essa a razão que o levou, na questão 2, a não registar qualquer conclusão geral depois de ter exemplificado várias somas de números ímpares, todas elas pares. A forma como os alunos assinalaram na folha as suas opções é consistente com a forma como abordaram a exploração da tarefa.

A análise destas resoluções leva-me a concluir que as maiores dificuldades dos alunos na elaboração de uma demonstração algébrica consistem em primeiro lugar, em encontrar uma expressão geral, e em segundo lugar, em dominar com eficiência a manipulação algébrica. Por outro lado, verifica-se uma franca evolução na capacidade de demonstrar por parte do Ricardo e da Sara, bem como na forma de encarar os argumentos matemáticos, relativamente à sua generalidade. Se confrontarmos o desempenho destes dois alunos em tarefas similares em dois momentos diferenciados do ano lectivo—na aula de 20 de Janeiro e no dia em que foi realizada a respectiva entrevista (9 e 16 de Maio)—verificamos diferenças substanciais. Note-se que estes foram os únicos momentos em que o trabalho sobre a demonstração incidiu em tarefas envolvendo números. Todas as outras tarefas enquadravam-se na Geometria, em que nunca era requerido o registo de uma expressão geral de uma certa classe de números. Portanto, os alunos contactaram com o registo de expressões gerais de números pares e ímpares unicamente nessa aula de 20 de Janeiro e na aula de discussão da tarefa que ocorreu a 6 de Fevereiro.

Enquanto que a 20 de Janeiro, os alunos não enveredaram, por sua própria iniciativa, por uma argumentação algébrica, no dia da entrevista, esta foi a sua primeira abordagem na resolução da tarefa em causa. Esta diferença relaciona-se essencialmente com a evolução da forma de encarar os diversos tipos de argumentos. Inicialmente, as suas conjecturas decorrentes da particularização efectuada assumiam um estatuto conclusivo e os alunos dispensavam qualquer outro tipo de comprovação. O trabalho conducente a uma argumentação algébrica desenvolvido nessa aula de 20 de Janeiro decorreu da interacção com a professora que insistentemente negociou com os alunos o significado e a necessidade de uma demonstração: "Como é que hão-de provar isso?"; "uma maneira de escrever . . . que fale dos números todos nessas condições". No dia da entrevista, tanto o Ricardo como a Sara revelam uma clara consciência do lugar que a demonstração ocupa em matemática, preocupando-se, desde logo, em produzir uma demonstração algébrica que comprove a sua conclusão para a generalidade dos casos, sem qualquer sugestão externa nesse sentido.

Relativamente à dificuldade em escrever uma expressão geral de números pares ou números ímpares, vemos também uma evolução no Ricardo. Não temos dados indicativos dessa evolução na Sara, já que esta aluna escolheu apenas a resolução da questão 1, cuja expressão geral de números pares podia ser encontrada na resposta do Sérgio, na folha onde assinalaram as suas opções. Além da questão 1, o Ricardo resolveu também a questão 2, onde conseguiu exprimir genericamente os números ímpares. Deduziu esta expressão geral, partindo da expressão de números pares, colocando todo o número ímpar como o antecessor de número par, obtido a partir da subtracção do número par por 1—$2n$-1. Assim, o Ricardo no dia da entrevista obtém uma expressão geral que, efectivamente, gera a sequência dos números ímpares (desde que n seja maior ou igual a 1) enquanto que na aula do dia 20 de Janeiro, a expressão geral (de números pares) era simplesmente descritiva sem conseguir gerar a respectiva sequência—a propriedade caracterizadora de número par como o número que é divisível por 2 foi expressa, descritivamente, como $\frac{p}{2}$, sendo p um número par.

Validação. O Bernardo, ao ser questionado, sobre a forma de obter a certeza em Matemática, nunca referiu a demonstração. Apontou as contas, os cálculos como meios de saber se algo estava certo, e no caso de ter dúvidas sobre a razoabilidade dos cálculos, pedia ajuda ao Ricardo, sendo esta progressivamente dispensada à medida que ia adquirindo mais confiança no seu próprio trabalho. Vemos pois, pelo que foi exposto nos pontos anteriores, que o Bernardo tem consciência da função verificativa da demonstração e do seu carácter geral. No entanto, não é um recurso que sinta necessidade de usar no seu trabalho diário em Matemática para obter a certeza sobre algo. A confiança que deposita no seu colega parece bastar-lhe para aferir acerca dos resultados alcançados. Também a Maria não referiu a demonstração, apontando o facto de se apoiar nos exercícios anteriores resolvidos para averiguar se algo estava certo, aferindo se a sua resolução segue o mesmo modelos dos exercícios anteriores. A Sara deu uma resposta diferente da Maria, embora ambas as respostas tenham semelhanças. A Sara referiu o livro e as fórmulas como recursos de apoio para averiguar se algo estava correcto.

Para a mesma questão, o Ricardo já apresentou uma resposta cabalmente diferente—é pelas “coisas que já aprendemos” que obtemos a certeza da validade das afirmações matemáticas. E, embora, não tenha igualmente referido o termo demonstrar, é o processo dedutivo de demonstrar, que está subjacente às suas palavras, processo este conducente a uma conclusão em que se pode confiar como válida, deduzida de um encadeamento lógico, a partir de factos matemáticos ou propriedades conhecidas.

Funções da justificação e da demonstração. No que respeita à forma como os alunos encaram a função da justificação na aula de Matemática, ouçamos o que eles disseram, na entrevista, a este propósito: "é importante [explicar porquê] porque assim a gente, para além de termos que pensar, temos que arranjar uma maneira explícita e fácil para os outros perceberem e assim até nós ficamos a perceber facilmente" (Ricardo). O aluno revela uma compreensão da forma como a explicação está intimamente associada à compreensão matemática e à comunicação matemática. A explicação do porquê obriga a uma maior reflexão e a um maior aprofundamento do conhecimento matemático que avança, para lá da constatação do que se verifica, para a compreensão dos fundamentos matemáticos ("termos que pensar"). Por outro lado, essa explicação tem uma função inerentemente social, não visa apenas a procura do porquê para si próprio: a explicação para os outros obriga a uma ampliação e a um novo aprofundamento da reflexão, pois a necessária explicitação requer uma maior clarificação conceptual que acaba por ser concomitante com o próprio processo de explicitação ("temos que arranjar uma maneira explícita e fácil para os outros perceberem e assim até nós ficamos a perceber facilmente"). A Maria apenas explicitou, a este respeito, a possibilidade de tirar dúvidas, quando questionada sobre o porquê dos factos matemáticos. A Sara considerou que não basta saber que algo está certo, por exemplo, conferir os resultados pelas soluções do manual, pois é importante saber explicar como é que se chegou ao resultado e explicar os porquês das afirmações matemáticas.

O Ricardo definiu o termo "demonstrar", da seguinte maneira: "é tentar explicar um resultado demonstrando factos que a gente já sabe para tentar provar como aquilo é verdade"; "muitas vezes, começamos pelos exemplos e depois tentamos, demonstramos para todos os casos possíveis, com letras e isso". Estas afirmações do Ricardo evidenciam a sua compreensão da noção de demonstração, no seu carácter geral e verificativo. Exprime igualmente a função da particularização como abordagem inicial da exploração de uma dada propriedade e até de descoberta da mesma: "muitas vezes, começamos pelos exemplos". A demonstração está aqui associada à generalidade (não alcançada pelos exemplos particulares) que poderá ser obtida algebricamente: "demonstramos para todos os casos possíveis, com letras". Por outro lado, o Ricardo atribui essencialmente uma função explicativa à demonstração: "é tentar explicar um resultado . . . para tentar provar como aquilo é verdade". De acordo com o aluno, a demonstração incide em factos já conhecidos como verdadeiros—"demonstrando factos que a gente já sabe"—estando, portanto, a sua função verificativa claramente subordinada à explicativa. Existe pois evidência de que o Ricardo já estará convicto da validade das afirmações que tenta demonstrar, visando com este processo apenas explicar os fundamentos por que são as mesmas verdadeiras. E, como vimos atrás, para o Ricardo, os argumentos algébricos também explicam. É igualmente a função explicativa da demonstração que o Ricardo elege para fundamentar a razão porque considera a demonstração importante, apontando as mesmas razões anteriormente apontadas para a importância de justificar: "É importante. Ficamos, como já disse, ficamos a perceber melhor as coisas. Que ajuda… Por exemplo, se for eu, por exemplo, a ir ao quadro, fico eu a perceber e ajudo os meus colegas também a perceberem". Trata-se de mais uma evidência no sentido da atribuição, por parte do Ricardo, de uma maior importância à função explicativa da demonstração, tanto mais que, ao colocar a questão de qual a importância da demonstração, eu pedira-lhe para ele ver se encontrava alguma relação com o que tinha referido antes sobre a forma de obter a certeza da validade de uma dada afirmação matemática. E, como podemos verificar, ele simplesmente ignorou esta minha alusão à função verificativa para se centrar na função explicativa, intrinsecamente associada à função comunicativa e ainda a uma função cognitiva de melhor compreensão matemática.

Ou seja, para o Ricardo, a demonstração tem o seu papel na aula de Matemática essencialmente pela sua função explicativa e, portanto, encontra-se intimamente associada à comunicação matemática, e a uma maior compreensão matemática, que, por sua vez, é alimentada pelos processos de explicitação a outrem e de procura do fundamento matemático de uma dada propriedade que foi descoberta previamente. Trata-se de processos distintos mas que se desenvolvem um em função do outro.

A Maria considerou que a demonstração se apoia em figuras, quando as afirmações em matemática "não são possíveis por escrita, e por figuras se calhar percebe-se melhor", podendo ter "frases associadas desde que se entenda e perceba-se [sic]", mostrando principalmente que uma afirmação é verdadeira, mas eventualmente poderá também mostrar "que não é bem assim como a gente pensa". Quando a questionei se a demonstração mostra que uma afirmação é verdadeira para todos os casos possíveis dessa afirmação ou se mostra apenas para alguns casos, a Maria considerou que a demonstração "é só quando é alguns exemplos específicos que é para a gente tentar perceber o que pede, o que tá [sic] a afirmar". Como vemos, o significado que a Maria atribui ao termo demonstrar tem a ver com figuras ilustrativas, exemplificativas, que ajudam a entender uma dada afirmação matemática, no sentido de que uma imagem vale mais do que mil palavras. A Sara atribuiu um mesmo significado ao termo demonstração, referindo dispositivos gráficos, como por exemplo, a utilização de cores diferentes nas cordas, que mostram como é que algo se faz. Quando lhe referi o caso de um encadeamento lógico, pelo qual se chegasse à conclusão de que algo é verídico, como tendo a designação de demonstração, e a questionei se considerava que essa verificação seria aplicável à generalidade dos casos ou apenas a alguns casos, ela referiu que achava que era para o caso geral.

Em síntese, entre os alunos do grupo-alvo, apenas o Ricardo tinha uma noção clara do que significa o termo demonstração. Foi também o único aluno que referiu o conhecimento anterior como recurso para obter a certeza sobre o que estamos a afirmar, podendo tal ser interpretado como a referência a um raciocínio dedutivo, partindo das propriedades já conhecidas. O Ricardo evidencia encarar a demonstração como uma justificação, já que, não obstante atribuir um carácter verificativo e geral à demonstração, é essencialmente uma função explicativa que lhe reconheceu. E portanto, atribuiu as mesmas funções à demonstração e à justificação—comunicativa e promotora de uma maior compreensão matemática (sendo estas mutuamente constitutivas)—, funções estas que fundamentam, do seu ponto de vista, a importância de ambas. No entanto, embora não designassem por demonstração nenhum dos argumentos que lhes apresentei (anexo 3), à excepção da Maria, todos conseguiram distinguir os argumentos demonstrativos dos argumentos empíricos pelo facto de os primeiros comprovarem para a generalidade dos casos e os segundos comprovarem apenas para alguns casos. A função explicativa de um dos argumentos analisados foi identificada por todos os alunos do grupo, à excepção do Bernardo. À excepção da Maria, todos eles tentaram elaborar demonstrações algébricas para responder à questão colocada acerca dos números. Na elaboração das mesmas, a maior dificuldade residiu na escrita de uma expressão geral. Outra dificuldade consistiu na manipulação algébrica.

A Demonstração e a Prática Social na Sala de Aula

Investigar Matemática – Bissectrizes…

Nesta tarefa, a descoberta da solução do problema foi feita por intermédio de uma demonstração narrativa e informal, construída individualmente pelo Ricardo, de um modo súbito, por *insight.* Não existiu qualquer relação entre essa mesma concretização e as interacções sociais no seio do grupo. Todo o esforço posterior do Ricardo em partilhar a sua demonstração com os colegas do grupo embateu nas dificuldades de comunicação inerentes à prematuridade do momento em que ocorreu essa partilha, já que os colegas de grupo do Ricardo ainda não tinham percorrido o seu próprio processo de apropriação do sentido da tarefa.

A *professora* influencia o rumo do trabalho a desenvolver pelos alunos. Neste caso, a orientação da *professora* levou a que o grupo enveredasse por uma construção de demonstração algébrica e que nunca chegasse a registar narrativamente o raciocínio expresso oralmente pelo Ricardo no seio do grupo, em momentos em que a *professora* não estava junto do grupo.

Esta construção de demonstração algébrica, apesar de orientada pela *professora*, teve uma participação mais dominante por parte do Ricardo. Assim, apesar da sugestão inicial da professora para que começassem pela elaboração do esquema visar, em princípio, a apropriação da tarefa por todos os elementos do grupo, existiu em todas as fases da exploração da tarefa (após esta intervenção da professora) um protagonismo do Ricardo, já que este foi o primeiro a elaborar o esquema e também o primeiro a construir a demonstração algébrica, sem receber dos colegas contributos para esse efeito. Até na elaboração da resposta, apesar de escrita simultaneamente por todos os membros do grupo, foi sempre ditada oralmente pelo Ricardo. Assim, a Sara, a Maria e o Bernardo elaboraram individualmente os seus próprios esquemas mas sempre com o apoio do esquema já construído do Ricardo, necessitando, de vez em quando, de olhar para a ficha do Ricardo para irem aferindo da correcção dos seus esquemas. Para o registo da demonstração algébrica, os colegas de grupo do Ricardo copiaram a mesma pelo Ricardo, colocando mesmo a sua ficha no meio da mesa.

Os colegas do Ricardo passaram, pois, por um processo de ventriloquismo, apropriando-se, pouco a pouco da sua *voz* e, decorrentemente, do significado matemático da demonstração narrativa e da demonstração algébrica presentes no trabalho do grupo com esta tarefa. Quando a Sara afirmou ter percebido as palavras do Ricardo, ainda antes da elaboração do esquema, já estava a entrar um pouco no território do Ricardo, fazendo suas as palavras daquele. Talvez por isso, quando acabou o esquema, a Sara já se sentisse capaz de dar uma resposta à questão: o esquema encerrava, em si, uma relação geral que lhe era compreensível e que ela pensava conseguir traduzir utilizando um modo narrativo.

O padrão de interacção do grupo também nesta tarefa se mantém: o Ricardo detentor de um poder superior ao dos colegas, logo seguido pela Sara, nessa hierarquia. A comunicação do Ricardo é dirigida essencialmente à Sara, sendo também um pouco dirigida ao Bernardo. O facto de ser a Sara a verbalizar a sua incompreensão das palavras do Ricardo constitui, de igual modo, um sinal evidenciador do grau elevado de participação da Sara no grupo. Tanto a Maria como o Bernardo, menos participativos, ao silenciarem a sua incompreensão, acabam por fazer uma caminhada de apropriação menor do que a manifestada pela Sara. No entanto, nesta tarefa, a Maria assume um maior protagonismo do que o habitual, o qual se torna sobretudo evidente no pequeno diálogo entre ela e o Ricardo, na altura em que ele tenta, pela segunda vez, comunicar a sua descoberta aos colegas: as palavras de ambos complementam-se, revelando uma clara sintonia e uma actualização de significado matemático por parte da Maria (extracto transcrito na p. 682). Ou seja, existiu em todos os elementos do grupo um crescimento de apropriação de significado matemático, embora em diferente grau. O Ricardo, apesar de manifestar uma compreensão por *insight,* percorre um caminho de aprofundamento dessa mesma compreensão, sempre que tenta explicitá-la aos colegas, tanto que é ele próprio que, inicialmente, afirma ter a certeza de que está bem mas que não percebe.

Circunferência e Ângulos III

Os dados dão-nos evidência de que as interacções estabelecidas entre a professora e o pequeno grupo podem influenciar o caminho tomado pelos alunos e o seu raciocínio. No caso particular da exploração desta tarefa, o Ricardo tinha começado a pensar numa relação entre ângulos inscritos e ângulos ao centro. Não foi muito bem sucedido no raciocínio que fez e esse facto foi reconhecido no grupo quer pela Sara quer por ele próprio. A professora, por à partida, ter em mente a relação entre ângulo inscrito e arco compreendido entre os seus lados, acabou por ser sugestionada pelo seu próprio pensamento e julgou ouvir da Sara o que ela própria estava a pensar (ver diálogo na p. 700). A Sara, ao ouvir o parafrasear da professora das suas próprias palavras, não negou que tivesse referido o arco. E depois desta interacção com a professora, os alunos abandonaram a ideia de ângulo ao centro e passaram a raciocinar com os arcos. Depois de descoberta a relação com os arcos, não chegaram a incidir o seu trabalho de novo nos ângulos ao centro para tentar perceber por que motivo o raciocínio estava incorrecto com os ângulos ao centro, e reformular o mesmo, fazendo um paralelismo com os arcos.

Ou seja, tal como é habitual no contexto escolar, os alunos não procedem a um trabalho de revisão, não voltam atrás para reflectir acerca de todo o processo anterior. Influenciados pelo rumo sugerido pela professora, simplesmente abandonam a ideia anterior. Com o registo correcto, na folha de papel, dos arcos correspondentes aos ângulos inscritos opostos do quadrilátero, o Ricardo conseguiu perceber a questão e dar a resposta por meio de uma demonstração narrativa e informal.

Aqui, existe um protagonismo centrado no Ricardo. Foi ele que conseguiu estabelecer uma relação e efectuar uma dedução lógica que deu resposta à questão colocada na tarefa. Todos os restantes elementos do grupo não *viram* o mesmo que o Ricardo. O Ricardo tentou transmitir a sua ideia aos colegas mas mesmo assim estes não o entenderam, tendo sido necessária a intervenção da professora para dar eco às palavras do Ricardo e promover o ganho de compreensão por parte, essencialmente, da Sara já que foi ela a única a manifestar-se abertamente relativamente a não ter entendido.

Os dados emergentes da análise da exploração desta tarefa dão-nos evidência de existir na fase inicial da construção do raciocínio dedutivo uma individualização protagonizada pelo Ricardo (ver pp. 681-2). O raciocínio que desenvolveu foi alcançado de modo súbito: um *insight,* um *clik*, um fazer-se luz, um ver de repente o que se andava à procura antes, um vislumbrar clarividente. As interacções com a professora influenciaram a mudança de rumo no trabalho, como vimos atrás, ajudaram a ver com clareza quais os arcos a relacionar com os ângulos inscritos, mas foi só. Todo o raciocínio lógico que incorpora a demonstração foi desenvolvido no pensamento do Ricardo, a título individual, sem qualquer troca verbal. Todas as interacções que se seguiram entre o Ricardo e os colegas, no seio do pequeno grupo, não serviram o propósito de estabelecer o raciocínio, mas sim o de se partilhar no grupo o que já tinha sido construído individualmente. E, tal como vimos, na secção *O Papel da*

Demonstração na Sala de Aula, a propósito da comunicação matemática, tal partilha é difícil de se fazer. Não é fácil conseguir que os outros raciocinem do mesmo modo que nós, que estabeleçam as mesmas relações que nós estabelecemos previamente, que pensem do mesmo modo, que compreendam o que nós estamos a ver de forma tão clara. Daí que a demonstração redigida por escrito como sendo trabalho de grupo tenha sido construída, não pelo grupo, mas sim por um único elemento do grupo. A apropriação que os restantes elementos fizeram da mesma foi, de certa maneira, incipiente, existindo diferenciação no grau da mesma entre os três restantes elementos do grupo. Os dados parecem indicar que existiu uma maior apropriação por parte da Sara, dado também o maior nível de participação da Sara em todo o trabalho, comparativamente com o Bernardo e a Maria.

À luz de Wenger (1998), podemos ver no grupo-alvo enquanto comunidade de prática, diferentes identidades de participação que correspondem igualmente a diferentes apropriações de significado. O Ricardo, sendo o autor da demonstração que soluciona o problema, teve uma grande identidade de participação nesta aula, como aliás já é habitual: é, de facto, esta a sua maneira de ser. O Ricardo, assumindo que está na posse da compreensão da ideia em causa nesta tarefa, desenvolve junto dos seus colegas uma persuasão empática, de modo a conseguir que os mesmos compreendam as suas ideias e se apropriem delas. Esta sua postura corresponde a uma entrega sua no grupo, visando uma efectiva partilha de significado matemático. Ele pretende tornar transparente o seu processo individual de construção de raciocínio, de forma a que os outros se apropriem dele. Poderia aproveitar-se da sua posição de supremacia no seio do grupo para 'fazer caixinha' do que ele descobrira, por si só, com o objectivo de ser o único detentor da apropriação de significado, levando à alienação de todos os restantes elementos, pela ocultação do significado matemático original de que ele seria o único detentor. No entanto, este nunca foi o seu modo de estar e de ser no grupo. Pelo contrário, o Ricardo imagina diferentes recursos de natureza matemática (como é o caso da particularização) e usa-os para conseguir os seus intentos de partilha e de transparência. Em suma, a apropriação integral da demonstração matemática produzida no âmbito desta tarefa foi feita unicamente pelo Ricardo e podemos ver essa apropriação no grau com que ele usou e afirmou como seus os significados que negociou com os colegas (Wenger, 1998).

Vemos ainda que a vontade de partilha não advém de qualquer pendor altruísta mas sim das relações de poder que se estabelecem no seio do grupo. Como vimos nas secções anteriores, o Ricardo dirigiu-se intencionalmente sempre à Sara, como que ignorando a presença do Bernardo e da Maria. Tal não se deve a qualquer razão de ordem afectiva pois os dados recolhidos dão-nos evidência de um bom relacionamento entre todos, e de maiores interacções entre o Ricardo e, por exemplo, o Bernardo em situações de brincadeira, não ligadas à discussão de assuntos matemáticos. Tal deve-se precisamente às posições que cada um ocupa na economia de significado contextualizada pela exploração de tarefas nas aulas de Matemática. Tivemos oportunidade de analisar as relações de poder no capítulo anterior e vimos como o Ricardo e a Sara ocupam, no grupo, uma posição sobranceira às dos outros dois colegas. Tanto o Ricardo como a Sara detêm uma relação de forças e de poder semelhante e um tanto ou quanto equivalente, embora o Ricardo ainda esteja numa posição um pouco mais de supremacia relativamente à Sara. De qualquer modo, é esta equivalência de poderes que faz emergir a discussão matemática, a discórdia, a argumentação, o querer convencer o outro de algo, o querer partilhar algo com o outro. Nesta tarefa, foi apenas a Sara que ousou discordar do Ricardo, dizendo que ele não estava a pensar bem. É ainda a Sara que manifesta abertamente as suas dúvidas, o que não está a compreender, mostrando assim uma preocupação sua em perceber efectivamente as ideias matemáticas e o pensamento do outro, o que corresponde, só por si, a um certo grau de envolvimento, e portanto, de participação. A Sara, apesar de reconhecer competência matemática no Ricardo, apesar de lhe conferir credibilidade, nunca aceita as ideias deste unicamente pelo seu estatuto: só as valida pela evidência matemática que as mesmas poderão ter, necessitando, pois, de as compreender.

Por conseguinte, o Ricardo só sente necessidade de partilhar o seu *insight* com a Sara, com quem considera que vale a pena fazê-lo. No entanto, os outros dois elementos estão presentes e a seu modo também vão acompanhando o que se encontra em discussão. Apesar da sua menor participação, vê-se que estão a seguir o discurso dos colegas, não estão alheados. E tal como é referido por Wenger (1998), quando a apropriação de significado é partilhada, verifica-se um crescimento de mesma em todos os participantes numa comunidade de prática. Também aqui se verifica um crescimento de apropriação do significado da demonstração matemática produzida nesta tarefa em todos os elementos do grupo, embora em diferente grau.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

é na linguagem que, revelando-se o ser, se pode revelar a verdade
(Carrilho, *Verdade, suspeita e argumentação*, p. 50)

Neste capítulo, apresento as principais conclusões do estudo, relacionando-as com a reflexão teórica que desenvolvi no mesmo e também com resultados empíricos obtidos por outros investigadores nesta área. Efectivamente, as conclusões de um estudo são mais do que a descrição e a síntese do que é analisado no campo empírico específico. As conclusões começam a fazer algum sentido e a emergir de um modo coerente e global quando se interligam com tudo o que discuti no presente trabalho. É como se diferentes perspectivas, diferentes teorias, diferentes campos de análise se juntassem agora, num movimento convergente, para emprestar enfoques particulares que se podem complementar, em vez de antagonizar, numa contribuição múltipla para a compreensão global da problemática em estudo. Ou seja, é como se as diferentes peças de um *puzzle,* que vistas em separado, não permitem perceber a que se referem (relativamente à imagem a compor), se fossem gradualmente encaixando até dar visibilidade à imagem global procurada.

Sendo a demonstração matemática o tema central do presente trabalho, a eleição do mesmo deveu-se essencialmente aos dados emergentes da minha tese de mestrado, uma vez que estes entreabriram uma porta, para lá da qual havia ainda muito a explorar. Nunca antes me interessara por este tema nem tão pouco reflectira suficientemente acerca da sua importância na matemática escolar. Assim, a demonstração, apesar de não contemplada nas questões do estudo que desenvolvi no âmbito da minha tese de mestrado (Rodrigues, 1997), acabou por emergir, aquando da análise de dados, enquanto aspecto inerente à natureza da matemática, como algo que (a) a professora teve de negociar em termos da sua necessidade, (b) decorria da actividade de argumentação dos alunos uns com os outros e (c) uma aluna se sentiu motivada para fazer ao não ter a certeza da veracidade de uma dada afirmação matemática, formulada em termos gerais. Tal emergência fez-me reflectir bastante sobre este domínio nessa altura, conduzindo-me, pois, à presente investigação, toda ela dedicada ao aprofundamento do que consiste a actividade de demonstrar dos alunos na matemática escolar.

Esta temática enquadrada no contexto escolar levou-me, no presente estudo, a outros domínios exteriores à educação matemática, nomeadamente o da filosofia. Se a demonstração marca de forma essencial a natureza da matemática, havia que mergulhar na forma como a filosofia tem questionado a noção de verdade, a forma como o sujeito obtém conhecimento do que o rodeia, a forma como os sujeitos argumentam. Havia que analisar a evolução da própria matemática e enquadrar na mesma a demonstração matemática. Havia que incidir uma atenção particular na história da filosofia da matemática, inserindo na mesma o lugar reservado à demonstração. O reduzido isomorfismo, que se verifica a nível internacional, entre a prescrição curricular, com ênfase na importância da demonstração na educação matemática, e o currículo realizado, com fortes evidências de desvalorização da demonstração e de existência de francas dificuldades na construção de demonstrações, por parte dos alunos, levou-me ao estudo do currículo e sua evolução, bem como dos factores concorrentes para a evolução curricular da Matemática, em particular, focando o lugar que é reservado à demonstração. Por fim, a focagem do campo empírico ao nível do currículo em acção, com algumas ligações ao currículo realizado pelos alunos, levou-me a debruçar em perspectivas teóricas sobre a aprendizagem e sobre a cognição. E todos estes investimentos teóricos que fiz ao longo do presente estudo emergem agora, de uma forma integrada, na sua fase de conclusão, em estreita relação com os dados empíricos que analisei, no âmbito das questões a investigar:

4. Qual é a natureza da demonstração no contexto escolar?
5. Qual é o papel da demonstração na actividade matemática escolar?
6. De que forma a concretização da demonstração se relaciona com a prática social desenvolvida na aula de Matemática?

Optei por organizar o presente capítulo de acordo com as três questões do estudo, apesar de ter sido difícil separar as conclusões nas várias secções, já que muitas delas estão intimamente relacionadas, o que fez com que tivesse, por vezes, de tocar em aspectos relativos às outras questões para apresentar as conclusões de uma dada questão.

Natureza da Demonstração na Aula de Matemática

O Papel dos Exemplos

Os resultados do presente estudo mostram que os alunos tendem a apoiar-se em exemplos particulares não só para estabelecer as suas conjecturas, como também a verdade acerca dessas afirmações gerais, constituindo para eles um meio de demonstração (esquema demonstrativo empírico indutivo, na terminologia de Harel e Sowder, 2007)—como aconteceu na exploração das tarefas *Vamos Investigar-Matemática* (eixos de simetria com recurso a espelhos), *Vamos Investigar-Matemática* (exploração com números) e *Investigações com Espelhos II*—embora não o tenham feito em todas as tarefas. Estes resultados são convergentes com o que tem sido vastamente documentado por inúmeros estudos empíricos (ver por exemplo, Boavida, 2005; Chazan, 1993; Hanna e Jahnke, 1993; Harel e Sowder, 2007; Healy e Hoyles, 2000; Machado, 2005; Recio e Godino, 2001; Rodrigues, 1997; 2000), correspondendo a uma situação generalizada internacionalmente e em todos os níveis de ensino, desde o mais básico ao superior, o que evidencia que o nível de desenvolvimento cognitivo não terá grande influência neste aspecto em particular.

Tudo indica que este seja o campo de argumentos (Toulmin, 1969) das situações quotidianas e que, de forma espontânea, os alunos transportam para a aula de Matemática. Tal como sustentado por Toulmin (1969), a validade de uma argumentação é interna ao campo respectivo, sendo os saberes e as normas do campo específico que fundamentam os raciocínios efectuados e avaliam, sob determinados critérios, os argumentos usados. Assim, se é lícito na argumentação do dia-a-dia generalizar uma situação a partir de alguns casos observados (por exemplo, concluir que o povo nortenho do país é cordial a partir da observação de vários casos em que ostensivamente as pessoas cumprimentam as outras, mesmo que não as conheçam) e essa generalização não precisa de mais fundamento do que os casos empíricos que a suportam, tal já não acontece em matemática, na medida em que se é lícito generalizar a partir de casos observados (isto é, conjecturar), já não será aceitável aceitar essa generalização como comprovada na base dos exemplos que a suportam, por mais exemplos que sejam. Se na argumentação do dia-a-dia, um contra-exemplo não invalida a generalização suportada por exemplos, sendo até habitual dizer-se que a excepção não fura a regra (no exemplo referido atrás, não iria deixar de qualificar o povo nortenho de cordial pelo facto de encontrar uma pessoa em particular que não cumprimentasse um desconhecido), tal já não acontece em matemática, uma vez que bastará um exemplo particular para invalidar uma dada afirmação.

Como vimos no segundo capítulo, o campo de argumentos em matemática tem evoluído ao longo dos tempos, não sendo o mesmo na matemática das civilizações antigas, antes dos gregos, e na matemática introduzida pelos gregos. Antes dos gregos, os objectos matemáticos eram objectos concretos, extraídos da realidade experimental—algo enumerável e contável, ou medidas de grandezas que podiam ser adicionadas ou subtraídas—e a demonstração, se entendida, de uma forma lata, como o meio usado para verificar a validade das afirmações, não incluía raciocínios dedutivos, sendo composta por explicações e justificações aplicáveis a um valor particular e que eram generalizadas a qualquer valor e a um conjunto de problemas similares (Joseph, 1990). Tratava-se de uma matemática algorítmica em que existia uma compreensão da generalidade das regras subjacentes, embora não dedutivas A noção de verdade estava ligada a um utilitarismo imediato, instrumentalista e empírico, sendo a mesma noção que encontramos nos esquemas demonstrativos empíricos dos alunos (Harel e Sowder, 2007). Foi a mudança operada ao nível da conceptualização dos objectos matemáticos na matemática grega, transformados em objectos do pensamento, que provocou uma concomitante transformação do campo de argumentos, ao assumir uma argumentação dedutiva, geral e resistente como meio de verificar a validade das afirmações matemáticas. Não obstante a evolução do conceito de demonstração até aos dias de hoje, a evolução da noção de rigor, a maior ou menor formalidade que uma demonstração possa ter, a evolução da noção de verdade e de certeza em matemática, o campo de argumentos introduzido pelos gregos ainda é, nos seus traços essenciais, o mesmo dos dias de hoje, correspondendo ao que actualmente se considera aceitável em matemática estabelecer como verdadeiro. Os matemáticos dos dias de hoje elaboram demonstrações com o recurso ao computador, o que no tempo dos gregos estaria possivelmente fora do alcance da sua imaginação. No entanto, a característica dedutiva e geral da argumentação é a mesma (Hanna e Jahnke, 1996).

O atrás exposto leva-me a concluir que o campo de argumentos em matemática é um produto cultural situado social e historicamente. Será, pois, natural que os alunos, não sendo matemáticos, desconheçam as características do campo de argumentos destes e que usem antes, na aula de Matemática, argumentos pertencentes a outros campos que lhes são familiares, como é o caso das situações do dia-a-dia. A introdução dos alunos ao campo de argumentos em matemática é uma tarefa do currículo.

No entanto, tal como vários estudos apontam, mesmo em situações curriculares valorativas da demonstração, em que os alunos começam gradualmente a compreender que uma demonstração é um argumento geral (Healy e Hoyles, 2000), os mesmos mantêm dificuldades em construir demonstrações e continuam a usar argumentos empíricos como meio de prova. Ou seja, os esquemas demonstrativos que lhes são conformes ao pensamento matemático não se alteram automaticamente com as situações de ensino direccionadas explicitamente para o desenvolvimento das competências em demonstrar. Há, pois, que equacionar que factores poderão concorrer para as dificuldades manifestas neste domínio e para a resistência generalizada dos alunos em adoptar um campo de argumentos próprio do que é aceite em matemática.

Entre os factores que poderão ser identificados, começo por destacar o dos exemplos. Uma das conclusões do presente estudo é precisamente o papel relevante que os exemplos desempenham quer na solidez dos esquemas demonstrativos actuais dos alunos quer na evolução para esquemas demonstrativos dedutivos, usando a terminologia de Harel e Sowder (2007).

Para discutir o papel dos exemplos na evolução dos alunos para um campo de argumentos específico da matemática, irei recorrer à análise histórica dessa mesma evolução. Um hipótese que se pode colocar é a de existir um paralelismo entre o desenvolvimento histórico de uma ciência e o desenvolvimento processual da aprendizagem dos alunos dessa ciência. Esta hipótese aponta para a reprodução evolutiva num ambiente de aprendizagem dos principais marcos históricos, ocorridos ao longo do tempo, relativamente ao desenvolvimento da ciência. Essa evolução reproduzida far-se-ia nas crianças de um modo bastante rápido, comparativamente ao tempo da história, devido à acção didáctica promotora da mesma, condensando em poucos anos de aprendizagem escolar o ocorrido historicamente em milhares de anos (Fosnot e Dolk[74], 2002). A hipótese da reprodução das etapas epistemológicas descritas pela história da ciência mantém-se em aberto, segundo Harel e Sowder (2007), não existindo suficiente fundamentação para a sustentar ou para a rejeitar. Os resultados do

757

[74] "By analyzing the historical origins we can gain insights into the landscape of learning" (Fosnot e Dolk, 2002, p. 43).

presente estudo sustentam esta hipótese relativamente à problemática em análise, como fundamentarei a seguir.

Se historicamente foi a mudança operada ao nível da natureza dos objectos matemáticos que provocou a mudança do campo de argumentos, a verificar-se esta hipótese, poderemos também assumir que a chave para a transição dos alunos ao uso de esquemas demonstrativos dedutivos residirá na mudança conceptual dos objectos matemáticos, passando de objectos materiais, com referências concretas e empíricas, a objectos do pensamento. A natureza abstracta dos objectos matemáticos conduz a uma argumentação dedutiva baseada em relações teóricas e gerais.

A evolução histórica da matemática processou-se por continuidade e não por ruptura[75]: a matemática grega foi elaborada com base na matemática empírica das civilizações antigas (Harel e Sowder, 2007). Os próprios gregos antigos reconheceram o legado intelectual no domínio da matemática que deviam aos egípcios (Joseph, 1990). A verificar-se esta hipótese, também os alunos farão uma evolução caracterizada pela continuidade e não pela ruptura, em que a sua base de trabalho evolutivo são os exemplos assumidos como objectos matemáticos. De um ponto de vista construtivista, é a continuidade que caracteriza o desenvolvimento cognitivo. As pessoas constroem novo conhecimento a partir do que já conhecem. Assim, se os alunos usam actualmente argumentos empíricos, o conhecimento de novas formas de argumentação irá ser construído com base na forma actual de argumentar. Não se argumenta em Matemática de um modo num dia, e no dia seguinte, de um modo radicalmente diferente. Os

[75] Esta ideia não é unânime entre os autores consultados. Por exemplo, encontramos em Balacheff (1991) a ideia implícita de que tal evolução se teria feito por ruptura e não por continuidade. O autor chega a designá-la por revolução e usa mesmo o termo ruptura quando compara esta evolução com a passagem de uma geometria prática, em que os alunos desenham e observam, para uma geometria dedutiva, em que os alunos estabelecem teoremas dedutivamente.

resultados do presente estudo permitem-me concluir da existência desta continuidade e da sua natureza lenta e gradual.

No meio do processo evolutivo, os alunos utilizam um misto de esquemas demonstrativos, parecendo que os mesmos convivem sem conflituosidade. Ou seja, numa mesma tarefa, os alunos poderão começar por usar esquemas demonstrativos empíricos e evoluir para a utilização de esquemas demonstrativos dedutivos com uma função explicativa, sem que os anteriores sejam destronados da sua função verificativa (por exemplo, na tarefa *Vamos Investigar-Matemática,* relacionada com a descoberta de eixos de simetria com recurso a espelhos). Numa outra tarefa (por exemplo, *Investigar-Matemática-Bissectrizes...*), poderão usar unicamente esquemas demonstrativos dedutivos mas tal não quer dizer que tenham estabilizado o campo de argumentos de tal forma a usar exclusivamente argumentos deste tipo pois numa outra aula posterior poderão voltar a usar esquemas demonstrativos empíricos. Os factores concorrentes para o uso de um ou outro tipo de argumentação serão discutidos na secção seguinte focada nas funções da demonstração. Vou utilizar o caso da tarefa *Vamos Investigar-Matemática* (eixos de simetria com recurso a espelhos) para ilustrar o papel crucial dos exemplos na evolução de um campo de argumentos para outro. A parte inicial desta tarefa remetia para a descoberta de eixos de simetria em polígonos regulares e é nesta parte que me vou centrar para ilustrar as conclusões relativas a este ponto.

Os exemplos foram usados pelos alunos para conjecturar e para se convencerem da veracidade da conjectura formulada (esquema demonstrativo empírico indutivo). A actividade de auto-convicção e a de persuasão (convencer os outros) ocorreram em conjunção durante a fase de conjecturação, o que é consonante com o afirmado por Harel e Sowder (2007), mas contrário aos resultados de Fonseca (2004) que apontam para uma actividade de auto-convicção anterior à de persuasão, ocorrendo separadamente e tendo diferentes fundamentos. A actividade de persuasão não saiu do âmbito do grupo de trabalho e tomou contornos muito difusos, quase que se fundindo com a auto-convicção, de tal modo que esta auto-convicção não constituiu uma actividade individual mas sim a de todo o grupo de trabalho enquanto comunidade de prática (Wenger, 1998), tendo o grupo mantido uma coesão relativamente a este aspecto e um acordo implícito, fundado nos exemplos concretos verificados. Ou seja, os exemplos foram de tal modo sentidos pelo grupo como evidentes—evidência é prova (Chazan, 1993)—de que o número de eixos de simetria seria sempre igual ao número de lados de polígonos regulares, que todos os desacordos que existiram no seio do grupo, relacionados com acções que contrariavam a conjectura assumida pelo grupo como verdadeira, foram rapidamente resolvidos pelo recurso ao poder e à força da auto-convicção do grupo na veracidade da conjectura. Esse poder originariamente fundamentado nos primeiros exemplos explorados (triângulo e quadrado) foi reforçado pela legitimação dada pela professora e procurada por um elemento do grupo, o Bernardo, consubstanciando-se no esquema demonstrativo autoritário de convicção externa (Harel e Sowder, 2007). O padrão pressentido com apenas dois exemplos foi rapidamente generalizado a todos os polígonos regulares, existindo, desde logo uma convicção forte no grupo na veracidade dessa generalização. Os resultados do presente estudo sugerem, portanto, que não são necessários muitos exemplos para os alunos estabelecerem a verdade de uma conjectura.

De acordo com Leont'ev (1978), o motivo de uma actividade corresponde ao nível mais elevado na estrutura da mesma. Assim, nos esquemas demonstrativos empíricos, a actividade predominante foi a de auto-convicção, motivada cognitivamente pela procura da verdade e obtenção da certeza, e assumida socialmente pela globalidade do grupo (comunidade de prática). A persuasão que existiu no seio do grupo foi motivada socialmente pela existência de desacordos (Boavida, 2005) mas não incidiu propriamente na veracidade da conjectura. Aliás, no âmbito do conjunto dos dados empíricos do presente estudo, não existiram desacordos substanciais relativamente às conjecturas formuladas. A persuasão incidiu antes no nível mais básico de uma actividade (Leont'ev, 1978), isto é, incidiu nas operações da actividade de concretização da tarefa—traçado dos eixos e preenchimento da tabela—que contrariavam a conjectura, tendo sido facilmente alcançada devido à força da auto-convicção. Efectivamente, na persuasão desenvolvida, nem os alunos referiram aspectos relacionados com a simetria da figura nem recorreram ao espelho, sendo suficiente a auto-convicção desenvolvida colectivamente pelo grupo para dissolver os desacordos existentes. Daí que possa afirmar que existiram motivos cognitivo-sociais (Harel e Sowder, 2007) na actividade de validação da afirmação matemática formulada pelos alunos que coincidiu com a fase de conjecturação do trabalho, a qual, aos olhos dos alunos, encerraria o trabalho.

Ao serem confrontados com questões promotoras de um trabalho de procura de razões explicativas das conjecturas formuladas, os alunos são compelidos a estender o trabalho para além da conjecturação, e a elaborar mais generalizações (neste exemplo, a generalização da formação de dois grupos de polígonos regulares pela localização diferenciada dos respectivos eixos de simetria, o dos polígonos com número ímpar de lados e o dos polígonos com número par de lados), fundadas em relações teóricas e gerais. E é aqui, neste momento-charneira, em que se processa a transição para esquemas demonstrativos dedutivos, que os exemplos assumem um estatuto genérico, enquanto representantes de todos os elementos da classe a que pertencem, desempenhando, assim, uma função primordial nessa mesma transição. Estas novas generalizações já não lidam com objectos matemáticos empíricos como a generalização anterior que os levou a formular a conjectura. São generalizações que se baseiam em relações teóricas entre objectos matemáticos, encarados como objectos do pensamento, objectos detentores de propriedades teóricas e gerais. No entanto, para a emergência de objectos do pensamento, os exemplos foram essenciais na sua intervenção ilustradora e generalizável.

Ilustrando com o exemplo da tarefa: a primeira generalização resulta de uma actividade de contagem em objectos concretos e materiais; a segunda generalização recorre à visualização dos exemplos para destacar neles quais as propriedades que justificam o modo como passam os eixos de simetria (é a paridade dos lados e a sua regularidade que determinam o modo como os mesmos se opõem—a outros lados ou a vértices—e a localização dos eixos). Em ambos os casos, os alunos usam exemplos. Em ambos os casos, os alunos recorrem a poucos exemplos, seja para generalizar um padrão, seja para generalizar uma relação teórica. Neste segundo caso, bastará a observação do que acontece com o quadrado para perceber que os eixos irão ter o mesmo comportamento em todos os outros polígonos com número de lados par, e o mesmo se passa com a observação do triângulo ou do pentágono. Contudo, foi fundamental ver os casos concretos, focados nas suas propriedades, para que os alunos tomassem consciência das mesmas e passassem a lidar com uma outra natureza de objectos matemáticos. Essa tomada de consciência foi tornada possível pela reificação (Wenger, 1998) de alguns actos feitos anteriormente pelos alunos, como seja o traçado dos eixos nos locais onde colocaram antes o espelho, ou onde visualizaram localizar-se os mesmos. Assim, os mesmos exemplos que primeiramente são instâncias particulares, comprovativas de conclusões gerais, evoluem, de uma forma contínua, para exemplos generalizáveis, suportes concretos auxiliares, passando a assumir, na sua essência, as relações teóricas e gerais. Sem a observação dos exemplos generalizáveis, os alunos nunca fariam a segunda generalização.

Ilustrativo de um objecto matemático abstracto, emergente nesta mesma tarefa, é o conceito de ponto, idealizado como não tendo dimensões (Fischbein, 2001). Este modo de imaginar o ponto, sem referente concreto material, transporta consigo a consequência dedutiva da conceptualização, por intermédio da Metáfora Básica do Infinito (Lakoff e Núñez, 2000), de uma infinidade de eixos de simetria num círculo. A dúvida do Bernardo relativamente a essa infinidade pode ser explicada pelo seu tratamento empírico do objecto *ponto*. O próprio conceito de infinito, enquanto construção da imaginação humana, decorre do tratamento dos objectos matemáticos como sendo objectos ideais do pensamento. Assim, por meio da metáfora que estabelece uma ligação entre o domínio referencial dos eventos processuais completos que se repetem iterativamente e o domínio dos processos iterativos que continuam sempre, é produzido o infinito actual (visto como tendo um resultado), pela adição do acabamento metafórico.

Em suma, os exemplos são essenciais quer na fase de conjecturação, permitindo descobrir propriedades matemáticas[76], sendo esta fase assumida pelos alunos como esquema demonstrativo empírico indutivo, quer na evolução para esquemas demonstrativos dedutivos, permitindo que os objectos matemáticos se desliguem gradualmente da sua materialidade e se tornem abstractos. A passagem dos alunos de um campo de argumentos para um outro equiparável ao que se considera aceitável em matemática, implica a evolução dos exemplos, quer no que respeita ao seu papel quer ao seu estatuto. Existe, pois, uma íntima relação entre a particularização e a generalização

763

[76] O papel dos exemplos concretos usados como recurso na própria invenção dos matemáticos profissionais é destacada por Romberg (1994): "These examples often serve as the actual source of the invention" (p. 296).

no processo de pensar matematicamente (Mason et al., 1984), nos seus vários níveis de complexidade. Os exemplos particulares intervêm no pensamento matemático mas só o que é geral é que verdadeiramente é característico do que é a matemática. "Abstraction is the heart of mathematics" (Henkin e Schwartz, 1994, p. 72). O carácter abstracto e teórico da matemática contempla não apenas os seus objectos mas também o seu método demonstrativo (Romberg, 1994). Assim, as sucessivas generalizações que os alunos vão elaborando complexificam-se progressivamente devido à mudança gradual da natureza da particularização que inicialmente abarca apenas instanciações e depois evolui para uma representação geral. Ou seja, se o desenvolvimento do pensamento matemático visa a generalização, esta necessita de beber da fonte alimentadora e ilustradora da particularização. São, pois, particularização e generalização, processos inseparáveis, cujo desenvolvimento passa pela sua contínua interacção. De acordo com a perspectiva vygotskiana, esta interacção corresponde à interacção entre conceitos espontâneos e conceitos científicos os quais, através da aprendizagem escolar, se vão aproximando até se fundirem, resultando formas de conhecimento mais complexas.

Demonstração Narrativa *Versus* Demonstração Algébrica

O facto de um dado registo ser considerado, no presente estudo, como uma demonstração não tem a ver com o facto de usar ou não o simbolismo matemático, mas sim com o facto de respeitar ou não os requisitos enunciados na terceiro capítulo, o da generalidade e o da dedução lógica. Assim, assumo que ambas as formas demonstrativas, narrativa e algébrica, têm igual validade, sendo meramente formas alternativas de expressão. Tal assunção não é completamente consensual entre os educadores matemáticos. Por exemplo, enquanto Hoyles (2008) parece assumir um ponto de vista convergente com o meu, ao referir que a álgebra não pode ser vista como um fim em si mesmo, mas sim como um meio, entre outros, de exprimir a generalidade, Recio e Godino (2001) assumem uma posição diferente no que respeita à hierarquização das argumentações produzidas pelos alunos. Estes autores, embora, ao usarem a terminologia proposta por Harel e Sowder, considerem que uma prova narrativa é, do ponto de vista dos alunos, um esquema demonstrativo dedutivo informal, colocam-na hierarquicamente num patamar abaixo de uma prova algébrica, designando esta última por esquema demonstrativo dedutivo formal, sendo, na sua perspectiva, a que corresponde a uma prova correcta. Os autores, embora identifiquem numa prova narrativa o uso de uma argumentação lógica correcta, incluem-na no grupo de respostas que utilizam procedimentos parcialmente correctos, dada a falta de simbolização.

Os resultados do presente estudo apontam para a utilização predominante, por parte dos alunos, de uma forma narrativa e informal para o registo das suas demonstrações, o que é convergente com os resultados de Healy e Hoyles (2000), e para a comunicação oral das mesmas no seio do grupo. O estilo narrativo usado pelo Ricardo para comunicar aos colegas de grupo o seu *insight,* que provava a relação procurada, no momento imediato à ocorrência do mesmo, sugere que o estilo narrativo corresponde ao seu modo de pensar. As formas algébricas usadas pelos alunos, umas vezes com sucesso e outras vezes sem completo sucesso, decorreram sempre da negociação com a professora que orientou nesse sentido. Os resultados empíricos evidenciam ainda que os alunos são mais bem sucedidos nas demonstrações narrativas do que nas algébricas, de carácter formal. A forma narrativa corresponde à forma com que naturalmente os alunos argumentam, e estes mostram sentir-se mais à vontade com este estilo de argumentação, parecendo existir uma continuidade entre as formas como pensam, como falam entre si e como registam, por escrito, as suas demonstrações. Por intermédio da forma narrativa de demonstrar, os alunos estabelecem uma ponte entre diferentes campos de argumentos, nomeadamente o das situações do dia-a-dia e o de matemática.

Na forma narrativa, os alunos utilizam exclusivamente a linguagem natural, exprimindo as relações teóricas gerais por meio de um raciocínio dedutivo. A sua linguagem é sintética, nem sempre explicitando todos os elementos do argumento usado, ficando, portanto, alguns deles omissos—por exemplo, a omissão da conclusão na demonstração de que o número de eixos de simetria de um polígono regular é sempre igual ao número de lados, ou ainda, a omissão da explicitação de que a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco contido pelo mesmo, correspondendo à *garantia* no modelo de argumento de Toulmin (1969), apesar de ter sido invocada oralmente no seio do grupo ("O arco do ângulo inscrito é sempre o dobro"). Não existe, portanto, por parte dos alunos, a preocupação com a explicitação, na sua argumentação narrativa escrita, dos *dados*, da *garantia* e da *conclusão*, considerados por Toulmin (1969) como elementos constitutivos básicos de qualquer argumento. No entanto, o seu trabalho revela que os mesmos os contemplam nas suas argumentações, principalmente na componente oral.

Pode acontecer, como foi o caso da tarefa *Circunferência e Ângulos III*, que os alunos comecem primeiro por pensar numa propriedade conhecida, julgada pertinente para aplicar na situação em causa, como garantia da conclusão a alcançar (embora desconheçam nesse momento qual é a conclusão), e que seja a garantia escolhida que condicione quais os dados do argumento a considerar. Assim, neste caso, os alunos não partem dos dados mas sim da garantia. E é a garantia escolhida que os faz olhar para uns ou outros dados, tornando-os visíveis. Esta escolha é intuída, uma vez que a demonstração se processa pela descoberta da solução. De acordo com Duval (1991), a organização dedutiva foca impossibilitada se se não tem qualquer ideia acerca da solução. Efectivamente, se os alunos não sabem, à partida, qual a afirmação a provar, não poderão conscientemente dizer qual a garantia que a justifica. No entanto, face à questão que é colocada, escolhem uma propriedade que se relaciona com a mesma, com o *feeling* de que a sua aplicação permitirá realizar uma inferência dedutiva que facultará a solução ao problema. Nesta tarefa, o Ricardo, depois de procurar no caderno alguma propriedade que fosse possível usar na resolução do problema, e de não encontrar o que pretendia, lembrou-se da garantia que ali era pertinente aplicar e explicitou "Lembra-te que o ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro". Escolhida a garantia, havia que tornar visíveis os dados, nomeadamente de que os dois ângulos opostos eram inscritos e que a soma das amplitudes dos dois ângulos ao centro correspondentes era 360º. Como não tivessem identificado o segundo dado, o seu argumento não foi bem sucedido. Após interacção com a professora que os direccionou para um outro dado, o da soma das amplitudes dos arcos, os alunos escolheram então uma outra garantia semelhante à anterior mas com relação com o dado dos arcos e não com o dado dos ângulos ao centro.

Assim, embora estes esquemas demonstrativos dedutivos se situem no campo de argumentos de matemática, usam a linguagem natural e as proposições implícitas próprias do campo de argumentos das situações do dia-a-dia (por exemplo, na demonstração relativa aos eixos de simetria, a proposição implícita *o número de vértices de um polígono é igual ao respectivo número de lados*). O registo de uma demonstração narrativa correcta implica algum grau de rigor no uso do vocabulário específico da matemática, e os alunos têm alguma dificuldade em explicitar com os termos adequados o que estão a pensar. Isto é, os alunos podem desenvolver um raciocínio dedutivo completamente correcto e apresentar um registo escrito com falhas e imprecisões relativamente às expressões e aos termos usados. A preocupação com o rigor do vocabulário matemático é menor numa demonstração algébrica, dada a economia própria da linguagem simbólica, o que não significa que não ocorra também na explicitação narrativa da conclusão (por exemplo, a expressão *a soma das bissectrizes* verbalizada pelo Ricardo para designar a soma das amplitudes dos semi-ângulos obtidos a partir das duas bissectrizes).

Na única tarefa de contexto numérico usada na análise de dados do presente estudo, os grupos de alunos que tentaram demonstrações algébricas não foram bem sucedidos, não tendo nenhum aluno enveredado por uma demonstração narrativa, e todos eles usaram, na fase inicial de exploração da tarefa, esquemas demonstrativos empíricos indutivos. As demonstrações algébricas feitas em tarefas de contexto geométrico foram bem sucedidas. Sendo a álgebra o estudo de estruturas definidas por relações matemáticas abstractas, envolvendo várias dimensões, entre as quais se incluem a simbolização e a modelação, as dificuldades evidenciadas pelos alunos na utilização de formas algébricas demonstrativas manifestam-se, principalmente, em duas vertentes: (a) expressão simbólica de uma dada expressão matemática e (b) manipulação algébrica das expressões registadas. Como os alunos manifestaram dificuldades na elaboração de demonstrações algébricas unicamente na tarefa de contexto numérico, é a esse contexto que me irei reportar. Seguidamente, confrontarei essas dificuldades com a ausência delas nas tarefas de contexto geométrico.

No domínio dos números, a dificuldade com a expressão simbólica prende-se com o facto de os alunos tenderem a caracterizar um dado conjunto descritivamente pela percepção superficial do mesmo, e não pela sua estrutura matemática (por exemplo, a caracterização dos números pares pelo modo como terminam—"Acabam em 0, 2, 4, 6, 8"). Quando os alunos conseguem descrever um conjunto pela sua estrutura matemática, fazem-no de forma narrativa—por exemplo, "se é número par, é divisível por dois"—e ao serem incentivados para a representar simbolicamente, encaram a expressão simbólica como sendo descritiva da propriedade enunciada narrativamente, sem lhe associar o seu carácter funcional—no exemplo atrás, os alunos não conseguem representar simbolicamente uma expressão condicional, pois nem têm conhecimento do respectivo simbolismo para o fazer; essa representação levá-los-ia à expressão *p é par* $\Rightarrow \frac{p}{2} = n$ e consequentemente à expressão $2n$ geradora de todos os números pares; no entanto, o registo descritivo que começam por fazer é "$\frac{p}{2}$" e, depois, pelas interacções verbais estabelecidas com a professora, registam "$\frac{n}{2}$", não conseguindo portanto escrever expressão simbólica geradora de todos os números pares. Quando orientados para o registo de uma expressão simbólica funcional, tal é conseguido com o recurso à particularização, sendo a letra dessa expressão entendida como a representação de uma incógnita que assume diversos valores particulares, enquanto variável. Neste caso, a expressão simbólica não é vista, à partida, como uma representação geral do infinito dos números em causa, mas sim como uma representação que é concretizada em várias instanciações.

No que respeita à manipulação algébrica, as dificuldades dos alunos residem essencialmente no carácter abstracto das expressões com que estão a trabalhar, o que os leva a perder o significado das mesmas e a aplicar, indiscriminadamente, regras e procedimentos aprendidos para determinadas situações, sem questionar o respectivo sentido operatório, se eventualmente concretizassem as letras por números particulares (é o caso, por exemplo, da aplicação da regra *parte literal para um membro da equação e parte numérica para o outro membro* em $2x + 2y$ que os conduziu a separar os coeficientes das letras, tratando a operação multiplicação como se fosse a operação adição). Este tipo de manipulação algébrica corresponde ao que Harel e Sowder (2007) designam por esquema demonstrativo simbólico não-referencial, que constitui um esquema demonstrativo de convicção externa. No presente estudo, as manipulações algébricas mal sucedidas pautaram-se igualmente pela ausência de um sistema de referentes coerentes mas não constituíram esquemas demonstrativos, já que a convicção dos alunos, nestes casos, decorreu dos exemplos particulares testados (esquema demonstrativo empírico indutivo), e não da manipulação simbólica. A compreensão deficitária da expressão simbólica como expressão funcional dificulta a antecipação da estrutura da expressão final a obter como conclusão da manipulação algébrica, comprovativa do que se quer demonstrar (no exemplo que tenho vindo a referenciar, a antecipação de que a expressão final resultante da manipulação algébrica da soma de quaisquer dois números pares deverá apresentar o factor dois para provar que a soma é sempre par). Essa antecipação é fundamental para guiar o próprio processo de manipulação algébrica, de forma a que os alunos percebam que propriedades deverão mobilizar e aplicar. A antecipação de resultados é própria do pensamento operacional que, segundo Harel e Sowder (2007), é uma das três características do esquema demonstrativo dedutivo transformativo.

Para analisar as razões que poderão estar na base da ausência de dificuldades manifestadas pelos alunos na elaboração de demonstrações algébricas nas tarefas de contexto geométrico, o que poderá iluminar também, pelo respectivo confronto, as razões justificativas da presença das dificuldades acabadas de discutir, irei recorrer a um caso ilustrativo, o da tarefa *Investigar Matemática-Bissectrizes...*. Nesta tarefa, em que todos os grupos foram bem sucedidos nas demonstrações efectuadas, tendo todos eles enveredado por uma forma algébrica, podemos verificar a ausência das dificuldades algébricas identificadas para o contexto numérico. No contexto geométrico, a dificuldade com o registo de uma expressão simbólica não se colocou já que esta não possui um carácter funcional—como acontecia no contexto numérico—mas sim unicamente um carácter descritivo. Os alunos lidam melhor com a simbolização quando esta descreve uma dada situação e não requer a identificação da estrutura matemática geradora de um dado objecto matemático.

Assim, na tarefa das bissectrizes, orientados pela introdução ao problema que solicitava o registo de possíveis letras do alfabeto grego designatórias de ângulos, os alunos optaram por tratar implicitamente as situações geométricas como se elas fossem algébricas, assumindo os ângulos como quantidades (Herbst, 2002), e designando-os por letras do alfabeto grego, ao invés da designação composta por três letras. A demonstração, nesta tarefa, independentemente de ser de natureza narrativa ou algébrica, requer uma linguagem quantitativa para relacionar os objectos geométricos, e portanto pressupõe um tratamento algébrico desses objectos. Por um lado, o facto de os alunos terem identificado cada um dos ângulos por letras únicas facilitou o seu registo, tornando-o mais simples e mais claro, e por outro lado, essas letras foram encaradas nas equações como se fossem as letras x ou y com que os alunos estão habituados a lidar, enquanto símbolos comuns algébricos, embora, neste caso, fossem representativas da generalidade dos ângulos sem que existisse a pretensão de determinar o seu valor, como acontece na resolução de uma equação. A adopção deste tipo de designação também foi importante para que os alunos mais facilmente registassem os elementos importantes observados no diagrama que esboçaram, permitindo-lhes simplificar essa mesma observação (por exemplo, ao designar cada um dos semi-ângulos de um dos ângulos suplementares por α, os alunos estão a registar, desde logo, que os mesmos são iguais, aplicando a premissa de que uma bissectriz divide um ângulo ao meio, levando-os a representar a sua soma como 2α) e simultaneamente concentrarem-se no essencial (os dois semi-ângulos que juntos formam o ângulo cujos lados são as bissectrizes), ignorando o acessório (os ângulos situados no exterior das duas bissectrizes). Assim, embora a expressão simbólica 2α assuma um formato funcional idêntico a $2n$ dos números pares e que acaba por ser fundamental na própria elaboração da demonstração bem como na descoberta da solução, o seu registo resultou unicamente da tradução descritiva da propriedade associada às bissectrizes: a de dividirem um ângulo em dois ângulos congruentes. Não se trata de uma expressão que faça gerar um dado conjunto de números ou uma sequência numérica.

À luz do modelo de Toulmin (1969), vemos que a demonstração algébrica, ao contrário do que sucede com a demonstração narrativa, explicita os seus elementos constitutivos, embora de um modo condensado, dada a economia de linguagem que a caracteriza, não sendo alheia a notação algébrica usada. Assim, nesta tarefa, a primeira proposição algébrica escrita pelos alunos—"$2\alpha+2\beta=180º$"—condensa a explicitação dos dois dados de que partiram, correspondentes às propriedades que tiveram de enunciar no início da ficha, aceites como verdadeiras sem questionamento: dois ângulos suplementares medem 180º de amplitude e uma bissectriz divide um ângulo ao meio. A segunda proposição—"$\frac{2\alpha}{2}+\frac{2\beta}{2}=\frac{180º}{2}$"—condensa a explicitação da garantia e prepara já a explicitação da própria conclusão. A garantia de que o ângulo entre as bissectrizes é formado pela soma das amplitudes do semi-ângulo de um ângulo suplementar e do semi-ângulo do outro ângulo suplementar torna possível a inferência que conduz à conclusão de que o mesmo medirá sempre 90º, expressa quer em termos algébricos quer, também, depois, em termos narrativos.

A manipulação algébrica, neste caso, também não suscitou dificuldades. Por um lado, não exigia um elevado domínio de procedimentos associados à manipulação algébrica. Por outro lado, os alunos nunca perderam o referencial simbólico, não efectuando erros operatórios completamente sem nexo quando ligados a um referente significativo e concreto. Como nesta tarefa, os alunos lidaram com os objectos matemáticos, desde o início, como entes abstractos e gerais—quaisquer ângulos suplementares—nunca perderam de vista o referente de que partiam, ou seja, o facto de a soma das amplitudes daqueles dois ângulos perfazer sempre 180º. Assim, o referente simbólico teve em todo o processo um carácter geral mas foi sempre significativo para os alunos.

Enquanto no contexto numérico, os alunos tendem a manipular abstractamente as expressões algébricas, sem lhe conferir qualquer significado numérico, no contexto geométrico, toda a manipulação algébrica efectuada assume sempre um sentido geométrico, embora de natureza generalizante, em consonância com a forma como os objectos matemáticos são aí tratados—objectos abstractos do pensamento. Existe, portanto, uma associação entre a natureza dos objectos matemáticos e o significado que atribuem à manipulação algébrica. Quando os alunos começam por trabalhar com exemplos, objectos matemáticos concretos, e fazem depois uma transição de trabalho para manipulação algébrica, essa transição é feita por ruptura, não estabelecendo qualquer ponte entre uns e outra. A manipulação algébrica é, nesse contexto, assumida como um puro jogo simbólico sem significado e sem sistema referencial coerente. Se, pelo contrário, os objectos matemáticos com que os alunos trabalham são, desde o início, objectos abstractos e gerais, a manipulação não perde o referente coerente, sendo assumida sempre com relação significativa com esses mesmos objectos matemáticos.

Neste caso, em que a demonstração surge com a função de descoberta de uma dada propriedade matemática, e em que os alunos partem logo para a demonstração sem chegar a conjecturar, pode acontecer que no decurso da manipulação algébrica, os alunos não façam qualquer ideia do que virão a provar e sendo assim, todo o processo dedutivo e simbólico é destituído de antecipação de resultados (por exemplo, a maior parte dos grupos ficou admirada com o resultado obtido—90º—uma vez que no esquema traçado não era perceptível a perpendicularidade das bissectrizes, dada a posição oblíqua do ângulo recto). Relativamente à demonstração produzida pelo grupo-alvo, vemos que assumiu primeiro uma forma narrativa e informal na voz do Ricardo, que tinha raciocinado sozinho por *insight,* e a forma algébrica, negociada com a professora, foi um meio de condensar e economizar o discurso narrativo, traduzindo-o descritivamente, existindo portanto previamente já uma ideia sobre o que iriam obter.

Dado o atrás exposto, parece existir influência do contexto numérico ou geométrico nas dificuldades evidenciadas pelos alunos ao nível da manipulação algébrica. A influência do contexto foi investigada por Recio e Godino (2001) mas em relação aos esquemas demonstrativos dos alunos, evidenciando a independência de um relativamente aos outros. Os autores, na sequência dos seus resultados empíricos que mostraram uma forte associação entre as respostas dos alunos de um e de outro contexto—cada um dos 429 estudantes do 1.º ano universitário concretizava o mesmo tipo de resposta quer no problema de contexto numérico quer no problema de contexto geométrico—interpretaram as respostas categorizadas dos alunos como constituindo esquemas demonstrativos pessoais, correspondendo a modelos de resposta estáveis a problemas de solicitação de uma prova. No entanto, os autores referem que os mesmos sujeitos, apesar do respectivo modelo estável, poderiam mudar para outro tipo de esquema demonstrativo, quando confrontados com problemas de maior complexidade, podendo começar com o esquema empírico indutivo e acabar a tarefa com o uso de um esquema mais ou menos formal e dedutivo. Uma vez que aparentemente existe uma disparidade de resultados entre os do presente estudo e os de Recio e Godino (2001) e dado que estes autores usaram para problema de contexto geométrico o mesmo da tarefa das bissectrizes, passo a discutir e a confrontar os resultados de ambos os estudos relativamente a este aspecto, cuja disparidade pode ser explicada pelo modo diferenciado como foi formulado o problema.

Em Recio e Godino (2001), é solicitada directamente uma prova—“Prove that the bisectors of any two adjacent angles form a right angle” (p. 85), sendo depois explicitadas as premissas de que os alunos deveriam partir, nomeadamente as noções de ângulos adjacentes, ângulo recto e de bissectriz—e na tarefa que usei, o problema consiste em descobrir a relação entre as bissectrizes de dois ângulos adjacentes quaisquer, sem pedir explicitamente uma prova. Tal como é sublinhado por Herbst (2002), apesar de se tratar da mesma questão, as tarefas são, uma e outra, substancialmente diferentes, já que a primeira, ao contrário da segunda, não só indica que é esperada uma prova como também formula a proposição a provar. Assim, na primeira tarefa, será natural que alunos, habituados a usar espontaneamente formas empíricas de argumentação, as usem novamente numa tarefa em que não é pedida a investigação de qualquer propriedade matemática mas unicamente a prova de uma afirmação cuja veracidade os alunos não duvidarão, recorrendo a exemplos como meios de prova. Na segunda tarefa, investiga-se uma questão cuja resposta é encontrada pela própria demonstração por um processo de trabalho—esboço de um diagrama, sem medição de ângulos—conducente a uma forma de lidar com os objectos matemáticos como entes gerais e abstractos, sendo assumidos como algébricos.

Os resultados do presente estudo sugerem existir influência do contexto não só nas dificuldades inerentes ao processo de construção de uma demonstração algébrica, tal como explanado atrás, mas também nos esquemas demonstrativos usados pelos alunos. Enquanto um problema de contexto numérico formulado nos mesmos termos do problema de contexto geométrico da tarefa das bissectrizes (como é o caso de *Como é a soma de quaisquer números pares?*) conduz à fase de conjecturação fundamentada numa abordagem empírica de testagem de números concretos, o problema geométrico das bissectrizes, como explicitado anteriormente, conduz os alunos a trabalhar com os objectos matemáticos como objectos abstractos do pensamento, o que constitui condição para a elaboração de esquemas demonstrativos dedutivos. No entanto, o contexto geométrico não é o único factor concorrente para essa forma de olhar os objectos matemáticos (como são exemplos as tarefas geométricas que apelavam ao recurso dos espelhos para experimentação em casos particulares e que conduziram os alunos a uma conjecturação que foi assumida como esquema demonstrativo empírico indutivo). É necessário também que a demonstração tenha a função de descoberta, o que será discutido na secção seguinte, e que seja sugerido o esboço de um esquema em que se releve as propriedades teóricas gerais e não as medições particulares empíricas.

Assim, os alunos do presente campo empírico não revelaram possuir esquemas demonstrativos pessoais estáveis ao longo do ano, mudando-os consoante a natureza da tarefa e a negociação estabelecida com a professora, através da conjugação dos múltiplos factores em jogo. No entanto, no seio do grupo-alvo, o Ricardo era o aluno que tendia mais a raciocinar de uma forma dedutiva, lidando mais facilmente com a generalidade matemática e com o trabalho matemático com objectos abstractos.

Funções da Demonstração

Os alunos elaboraram demonstrações com múltiplas funções (de Villiers, 2001; 2004; Hanna, 2000) embora nem sempre lhes atribuam todas as funções que as mesmas detêm, dependendo da fase anterior do trabalho, mais ou menos incidente na conjecturação. Vou passar a apresentar os dois casos ocorridos no âmbito do campo empírico do presente estudo—(a) existência de conjecturação e (b) ausência de conjecturação—discutindo para cada um deles as funções da demonstração, explicitando inclusivamente as funções atribuídas pelos alunos.

No que respeita às funções da demonstração que são atribuídas pelos alunos, há que distinguir duas situações: (a) evidência retirada dos seus trabalhos e do seu discurso ao longo das aulas e (b) evidência retirada do que é dito pelos alunos, nas entrevistas, incidente no uso explícito do termo *demonstração*. Como o trabalho que foi desenvolvido na sala de aula visou a demonstração mas sem a preocupação de se usar sempre o termo em si, nem sempre foi referenciado o termo em todas as demonstrações efectuadas pelos alunos. Nas entrevistas feitas aos alunos do grupo-alvo, apenas o Ricardo evidenciou ter uma noção clara sobre o que significa a palavra *demonstrar*, reconhecendo-lhe, explicitamente, a função primordial de explicar. No entanto, embora não lhe associando este termo, três dos alunos do grupo-alvo conseguem, nas entrevistas feitas no final do ano, distinguir correctamente a natureza de diferentes argumentos matemáticos. Assim, quando me refiro às funções atribuídas pelos alunos, estou a fundamentar-me, essencialmente, na evidência indicada em (a).

Conjecturação

Quando os alunos começam por utilizar exemplos, na exploração das tarefas, elaborando conjecturas a partir dos mesmos, os mesmos estabelecem a verdade de proposições gerais, para si e para os outros, com base nos exemplos verificados, correspondendo a esquemas demonstrativos empíricos indutivos (Harel e Sowder, 2007). A descoberta das relações matemáticas questionadas coincide com a fase de conjecturação. Do ponto de vista da verificação, tal é suficiente para os alunos e os mesmos não sentem necessidade de proceder a novos testes na procura de refutação das conjecturas formuladas, nem de construir demonstrações para provar a generalidade dos casos.

No presente estudo, não foram formuladas conjecturas falsas, não tendo surgido, portanto a demonstração por contra-exemplo. Aliás, quando, por exemplo, na tarefa *Investigações com Espelhos II*, os alunos se deparam com o que parece ser um contra-exemplo—oito ou nove pontas na estrela de 10 pontas—o que refutava a conjectura já estabelecida, aquele foi, desde logo encarado duvidosamente, o que levou os alunos a considerar, à partida, que poder-se-iam ter enganado a contar o número de pontas, dado o seu elevado número, e a voltar a colocar o livro de espelhos para proceder a nova contagem, que teve como pressuposto o facto de que deveria ser possível contar 10 pontas, dada a convicção na veracidade da conjectura. Assim, neste caso, os alunos usaram o método designado por Lakatos (1991) de *monster-adjustment* que conduziu à reinterpretação do contra-exemplo global, encarando-o como um erro empírico, e portanto a deixar de ser contra-exemplo. Não existiu nos alunos qualquer indício de dúvida na validade da conjectura formulada como aplicável à generalidade dos casos. Esta tarefa é também paradigmática do facto de que os alunos estabelecem a verdade de uma conjectura com base em poucos exemplos, neste caso, os três exemplos da ficha de trabalho. Todos os outros valores que introduziram no seu trabalho não serviram o propósito de testar a conjectura, tal como era pedido explicitamente na ficha, uma vez que os alunos não efectuaram o respectivo traçado que implicava a medição de ângulos. Trabalharam unicamente numa base numérica, pensando em números cujo produto fosse 360, enquanto instanciações da relação geral descoberta, como forma de concretizar a resposta a uma das questões da tarefa escolar que solicitava outros ângulos, já que lhes é suposto responder (linearmente) a todas as questões de uma tarefa escolar, mesmo que tal implique uma dada acção da qual não sentem necessidade de efectuar.

Incentivados pelo enunciado da tarefa ou pelo discurso da professora, os alunos elaboraram demonstrações que tiveram, aos seus olhos, essencialmente a função explicativa da razão subjacente à proposição conjecturada antes. Assim, embora fossem simultaneamente verificativas da generalidade, essa função não era reconhecida pelos alunos pois a verdade já se encontrava completamente estabelecida pela conjectura.

Os resultados sugerem, portanto, que a compreensão total da razão justificativa de uma demonstração, do ponto de vista da sua função verificativa, é dificilmente atingida pelos alunos pois, não obstante as contínuas interpelações da professora no sentido de negociar com eles a importância da demonstração e o seu carácter geral, essa razão é encarada como secundária, já que confiam inteiramente nos seus esquemas demonstrativos empíricos indutivos, tendendo a ignorar o estatuto de uma conjectura, assumindo-a como uma verdade comprovada. Essa compreensão vai sendo apropriada lentamente, o que é consonante com as conclusões de Brocardo (2001). Nas entrevistas realizadas no final do ano lectivo, à excepção da Maria, todos os restantes elementos do grupo-alvo evidenciaram uma progressão nessa compreensão (os três concretizaram uma tarefa de contexto numérico tentando, logo de início, elaborar demonstrações algébricas; a Sara registou que com a fórmula, mostra a conclusão "para o caso geral"; o Ricardo explicita "muitas vezes, começamos pelos exemplos e depois tentamos, demonstramos para todos os casos possíveis, com letras e isso").

Neste caso, a importância da demonstração surge com a necessidade de perceber porquê, de explicar, tal como defendido por vários autores (por exemplo, Hanna, 2000 e

Hersh, 1993; 1997), embora esta necessidade tenha surgido sempre de forma extrínseca, por meio do enunciado da tarefa e do discurso da professora, e não decorrente de um motivo cognitivo individual (Leont'ev, 1978), como tinha acontecido com o estudo conduzido por Rodrigues (1997), demarcando-se nitidamente da conjecturação que convence mas não explica porquê. Assim, tal como sugerido por de Villiers (1997), os alunos podem passar em primeiro lugar para a função explicativa da demonstração sem que a função verificativa da mesma seja um pré-requisito. No entanto, tal situação corresponde à teorizada por Mariotti et al. (1997), uma vez que os alunos, ao não duvidarem da veracidade das conjecturas que formularam, não se sentiram motivados, por si só, para proceder a uma demonstração explicativa, cuja introdução foi mediada externamente pela tarefa e pela professora.

A função explicativa está intimamente associada à função comunicativa e é o seu carácter público e social que faz com que seja impossível, na sala de aula, separar uma da outra. Aliás, alimentam-se reciprocamente, ao serviço da promoção de uma maior compreensão matemática que passa pela compreensão teórica, pela qual os alunos tomam consciência das propriedades matemáticas e das acções realizadas antes, ao nível da compreensão prática (Heidegger, 1999). É exemplificativa a situação em que os alunos tomam consciência do modo diferenciado de localização dos eixos de simetria, consoante os polígonos tivessem um número par ou ímpar de lados. O primado da compreensão prática, ocorrendo antes da compreensão reflexiva, é convergente com os resultados de Rodrigues (1997).

A conjunção destas duas funções com consequências claras na compreensão matemática é reconhecida pelo Ricardo quando explicitou na entrevista, com uma surpreendente clareza e consciência: "é importante [explicar porquê] porque assim a gente, para além de termos que pensar, temos que arranjar uma maneira explícita e fácil para os outros perceberem e assim até nós ficamos a perceber facilmente". Esta conjunção decorre directamente das modalidades de trabalho utilizadas na sala de aula. O facto de trabalharem primeiro em pequeno grupo, passando depois para a modalidade de partilha de conclusões em grupo-turma, favorece a comunicação dos raciocínios desenvolvidos e as tentativas de explicação dos mesmos. Esta conjunção é processual, desenvolvendo-se ao longo de todo o trabalho, mesmo na fase de estágio das ideias matemáticas, sendo conseguida uma maior articulação na fase final de registo do trabalho elaborado pelo grupo e na fase de discussão colectiva.

Em suma, nas tarefas que envolvem conjecturação, a principal função da demonstração na aula de Matemática é a de explicação, promovendo uma compreensão dos fundamentos matemáticos. Sendo o raciocínio matemático uma capacidade transversal a todo o currículo e a comunicação matemática uma outra capacidade transversal, na sala de aula, ambos entram em conjunção, quando o raciocínio incide na demonstração na sua função explicativa, sendo reforçados um pelo outro, e contribuindo ambos para uma maior compreensão matemática. Estas três vertentes—compreensão, demonstração explicativa e comunicação—estão intrinsecamente relacionadas e são mutuamente constitutivas.

A explicação, tendo uma função inerentemente social, não visa a explicitação do porquê apenas para si próprio, mas essencialmente para os outros, conduzindo a uma maior clarificação conceptual, que é concomitante com o próprio processo comunicativo de explicitação. Tal como apontado por Yackel e Cobb (1996), a explicação é um acto comunicativo que visa a clarificação de aspectos do pensamento matemático de um sujeito que podem não ser visíveis a outros. A comunicação é processada oralmente e também por escrito. A dimensão escrita assume um papel relevante no que respeita à ampliação da compreensão reflexiva, uma vez que exige uma maior clarificação e explicitação, tornando, inclusivamente, mais pertinente a adequação do vocabulário específico da matemática. Tal como apontado por Mason et al. (1984), a aprendizagem matemática requer experimentação mas implica também a existência de reflexão por parte dos alunos. Essa reflexão ocorre, quase sempre, após a experimentação, sendo concretizada, na sala de aula, através da comunicação e da demonstração explicativa, conducente à emergência cognitiva das propriedades matemáticas que se *acham à mão* (Heidegger, 1999), por uma acção de ruptura, "no modo da surpresa" (Heidegger, 1999, p. 152), saindo do seu estado anterior de invisibilidade de *ficar à mão* (Heidegger, 1999), em que as mesmas não eram reconhecidas conscientemente pelos alunos, ao nível da compreensão prática, desenvolvida na fase de experimentação. À luz de Leont'ev (1978), essas mesmas propriedades só entrarão no domínio da consciência do indivíduo quando corresponderem ao objectivo da actividade, o que implica que tenham que se relacionar com o motivo da actividade. Ou seja, a tomada de consciência de um dado objecto dependerá da posição que o mesmo ocupar na estrutura da actividade. Assim, enquanto um objecto matemático se relacionar unicamente com as operações, que constituem o nível mais básico da actividade (Leont'ev, 1978), as suas propriedades não serão explicitamente reconhecidas, o que é consonante com a compreensão prática teorizada por Heidegger (1999). É pela relação com o nível mais elevado da estrutura da actividade, o motivo social de formação de sentido de comunicar e de corresponder ao que é pedido pelo enunciado de uma tarefa escolar e pela professora, solicitadores de uma demonstração explicativa, que as propriedades matemáticas entram no domínio da consciência dos alunos.

Há que clarificar que pelo facto de o presente estudo mostrar que um trabalho curricular em torno da valorização da demonstração leva a que progressivamente os alunos consigam distinguir um argumento geral de um argumento empírico, tal não significa que façam acompanhar essa distinção pela adopção unicamente de esquemas demonstrativos dedutivos. Isto é, poderão desenvolver a consciência de que uma demonstração matemática válida deverá ser geral, e que uma argumentação empírica não comprova a generalidade dos casos, e no entanto, continuarem a usar, em certas tarefas, esquemas demonstrativos empíricos, confiando na veracidade das conjecturas que formulam, o que é convergente com os resultados de Healy e Hoyles (2000), e consonante com a auto-convicção gerada pelos testes empíricos, apontada por de Villiers (2001). Como consequência de um progressivo maior aprofundamento da compreensão do que significa argumentar em matemática, os alunos tenderão pois a tomar consciência que não será suficiente trabalhar com exemplos para garantir a verdade matemática (de Villiers, 2004) e que deverão desenvolver uma nova fase de trabalho incidente na demonstração.

Ausência de Conjecturação

Quando os alunos não chegam a conjecturar por não partirem de exemplos na fase inicial do trabalho, as demonstrações têm múltiplas funções e todas elas atribuídas igualmente pelos próprios alunos. Neste caso, o ponto de partida do seu trabalho não são exemplos particulares mas sim objectos matemáticos enquanto objectos abstractos do pensamento, assumindo, desde logo, um carácter geral.

O factor que decisivamente contribuiu para que os alunos começassem a lidar com os objectos matemáticos como sendo objectos do pensamento, desde o início da exploração da tarefa, foi o enunciado desta que, no âmbito de um contexto geométrico, pedia explicitamente para os alunos fazerem um esquema, e não um desenho construído rigorosamente com medições. O diagrama foi um *recurso estruturante* (Lave, 1997), suportando e dando forma estrutural à actividade matemática desenvolvida pelos alunos que se caracterizou pela sua base dedutiva e pelas relações teóricas entre objectos matemáticos do pensamento. Foi o que possivelmente o Ricardo usou (na tarefa das bissectrizes), espontaneamente, no seu raciocínio individual, sendo um instrumento que o ajudou a pensar e a resolver o problema envolvendo objectos assumidos na sua generalidade. A acção mental de visualização do esquema correspondeu, no caso do Ricardo, a um motivo cognitivo individual (Leont'ev, 1978) de procura de compreensão matemática e não a um motivo social e externo de corresponder ao que era solicitado no enunciado da ficha. Outros eventuais recursos estruturariam diferentes actividades, dando forma a diferentes estratégias de resolução do problema. Por exemplo, na tarefa das bissectrizes, o recurso do *Sketchpad* levaria à descoberta da solução pela medição da amplitude do ângulo entre as bissectrizes, pela verificação de que a mesma se mantém constante ao fazer-se variar as amplitudes dos ângulos suplementares.

Poderá ser pertinente analisar o modo como o esquema, igualmente elaborado pelos alunos na tarefa *Circunferência e Ângulos III* estruturou a sua actividade. Nesta tarefa, também caracterizada pela ausência de conjecturação, os alunos usaram um misto de esquemas demonstrativos empíricos perceptivos e de esquemas demonstrativos dedutivos. Ao elaborarem o diagrama nesta tarefa, os alunos começaram por traçar o quadrado ou o rectângulo como quadrilátero inscrito na circunferência. Estes quadriláteros em particular forneceram, de imediato, a solução do problema que visava a descoberta da soma das amplitudes dos respectivos ângulos opostos, quer de forma perceptiva quer de forma conceptual, já que tanto era perceptível tratar-se de ângulos opostos rectos, como era de conhecimento comum dos alunos a amplitude dos ângulos quer do quadrado quer do rectângulo. O objecto matemático por si, inicialmente, desenhado, acabou por constituir um caso particular de quadrilátero, levando à adopção de um esquema demonstrativo empírico perceptivo, sem que, a partir dele, fosse possível estabelecer um raciocínio dedutivo, a partir de propriedades conhecidas, aplicável à generalidade dos quadriláteros naquela condição. Só a intervenção da *professora* a solicitar o traçado no esquema de quadriláteros distintos levou a que os alunos começassem a lidar com a natureza abstracta e geral dos objectos matemáticos, o que fez com que metade dos grupos enveredasse, depois, por esquemas demonstrativos dedutivos. A análise desta tarefa permite-nos concluir que o traçado de um esquema favorece a emergência de raciocínios dedutivos desde que os alunos não possam inscrever no mesmo casos particulares que lhes são familiares e que as relações a descobrir não sejam perceptíveis, requerendo necessariamente a dedução para as descobrir. Foi o que aconteceu na tarefa das bissectrizes em que todo o trabalho se caracterizou pela incidência em objectos matemáticos abstractos, já que eram desconhecidas as amplitudes específicas de cada um dos ângulos e também não era perceptível o ângulo recto entre as bissectrizes. Pelo contrário, na tarefa *Circunferência e Ângulos III*, os alunos conseguiram particularizar, existindo neles até alguma dificuldade inicial em identificar a abrangência dos quadriláteros na condição imposta, sendo impossível, a partir dessa base de trabalho, transformar os casos esboçados em exemplos generalizáveis, já que as propriedades pertinentes a mobilizar ficariam sempre ocultas, em situação de *ficar à mão* (Heidegger, 1999).

Por conseguinte, quando o esquema é assumido com um carácter geral, as justificações encontradas baseiam-se em propriedades e não em medições empíricas ou informações perceptivas. A própria notação usada é crucial pois ao referir-se ângulos com letras gregas do alfabeto, algumas das relações importantes emergem (como o caso da relação de igualdade entre ângulos, ao fazer-se o registo de duas letras iguais), e os alunos desligam-se, desde logo, das amplitudes concretas que os mesmos possam ter.

A particularização surgiu como recurso de comunicação (por exemplo, o Ricardo usou exemplos de amplitudes para comunicar/explicar o seu raciocínio dedutivo considerando que os mesmos ilustrariam e fariam compreender as relações gerais) mas não como recurso de exploração ou descoberta. Assim, a função de descoberta esteve associada à demonstração em si. Foi por intermédio desta que os alunos descobriram a solução do problema, facultando-lhes simultaneamente a função verificativa que provava para a generalidade dos casos a veracidade da propriedade matemática descoberta.

A certeza sentida pelos alunos proveniente da demonstração dedutiva evidencia que esta é encarada pelos mesmos na sua função verificativa (ilustrativo disto é a afirmação do Ricardo "Eu tenho a certeza que tá [sic] bem. Mas agora não percebi...", ao assumir a sua certeza mas também a sua dificuldade em explicitar, em explicar, dada a natureza abstracta dos objectos matemáticos). Trata-se de uma certeza forte fundada unicamente na evidência matemática, e dispensando qualquer outro tipo de confirmação externa como seja a validação da professora. A utilização da demonstração é, efectivamente, anti-autoritária (Hanna, 1996), na medida em que a validade da conclusão é estabelecida pela própria demonstração, e não de uma autoridade externa. Esta certeza advém da força conferida à conclusão pelas garantias (Toulmin, 1969) justificativas usadas que autorizam os alunos a aceitar necessariamente e sem equívoco essa mesma conclusão. Assim, a força conferida pela garantia varia em função do campo de argumentos, uma vez que as garantias correspondem às normas de argumentação de um dado campo específico. Enquanto em matemática, a garantia leva a aceitar a conclusão na ordem do necessário, no campo de argumentos da vida quotidiana, a garantia poderá justificar a conclusão na ordem do provável ou do possível.

Os resultados sugerem igualmente que a convicção obtida por esta via, em que os alunos lidam com objectos do pensamento gerais, é superior à obtida pela conjecturação. Contudo, a comunicação é dificultada quando as ideias em jogo envolvem unicamente esses entes abstractos. Daí que os exemplos particulares tenham surgido nesta tarefa, não como meio de descoberta ou de conjecturação, mas simplesmente como meio de comunicação de um raciocínio dedutivo que nunca lidou com objectos matemáticos enquanto instâncias particulares. Neste caso, a explicação torna-se mesmo objecto de reflexão (Yackel e Cobb, 1996), uma vez que o Ricardo teve de atender à adequação da mesma para os colegas do grupo, de forma a ser entendida, operando uma mudança no pensamento de processo (participar numa explicação) para objecto (a explicação é tomada como objecto sobre o qual se tem de reflectir e agir em conformidade—“Stora, (...). Agora, não consigo explicar aos outros.”).

Em conjunção e em simultaneidade com as funções verificativa e de descoberta, as demonstrações possuíram também as funções explicativa e comunicativa. A simultaneidade decorre do facto de o trabalho se desenvolver numa única etapa na qual os alunos (a) comunicam, explicam os raciocínios verificativos e de descoberta e depois registam algebricamente o discurso narrativo anterior (no caso do grupo-alvo); ou (b) descobrem, verificam, comunicam e explicam no decurso e na sequência da própria manipulação algébrica (no caso dos restantes grupos da turma). Não existe, portanto, uma sequência linear de observação de um padrão, conjecturação e demonstração, como acontece nas tarefas cuja exploração se inicia com exemplos particulares—tal como em Brocardo (2001), também no presente estudo, os alunos não desenvolvem um processo cíclico nas suas actividades de investigação, mas sim um processo linear. Nas tarefas cuja exploração se inicia com o trabalho incidente em objectos abstractos, contrariamente à complementaridade entre exploração e demonstração (de Villiers, 2004; Hanna, 2000), a elaboração da demonstração ocupa todo o tempo de trabalho dos alunos, aglutinando em si todas as funções atrás indicadas, sem que, no entanto, exista nos alunos a consciência de que estão a construir uma demonstração, já que o objectivo explícito do seu trabalho é procurar uma solução a um dado problema. Neste caso, é a função de descoberta que ocupa um lugar primacial. Assim, os resultados do presente estudo evidenciam que a função de descoberta da demonstração existe apenas nas tarefas em que os alunos não chegam a conjecturar e em que lidam sempre com objectos matemáticos do pensamento.

É também por este facto que os alunos sentem motivação para demonstrar, já que, neste caso, a demonstração coincide com a procura de uma solução. Contudo, tal motivação não se relaciona com os níveis de motivação para a demonstração identificados por Mariotti et al. (1997), uma vez que a incerteza dos alunos não se prende com o facto de uma dada afirmação matemática ser ou não verdadeira mas sim com o completo desconhecimento da afirmação. Assim, os resultados do presente estudo apontam para o facto de a motivação dos alunos decorrer da incerteza que os conduz a uma procura da solução que se funde com a procura da verdade. Esta verdade fica, desde logo, estabelecida com a descoberta da solução uma vez que a mesma é alcançada por meio da demonstração.

Prática Social na Aula de Matemática

Identidade

Os diferentes poderes de cada um dos elementos do grupo, enquanto comunidade de prática, consubstanciam diferentes identidades (Wenger, 1998), influenciando o modo de os alunos se convencerem acerca da verdade das afirmações matemáticas. O envolvimento mútuo entre os diversos elementos do grupo cria relações caracterizadas por uma mistura de poder e de dependência.

O esquema demonstrativo autoritário de convicção externa (Harel e Sowder, 2007) surgiu no seio do grupo, em estreita ligação com a teia de relações criadas no mesmo, decorrente dos diferentes poderes existentes. Assim, este tipo de esquema, habitualmente associado à autoridade do professor ou do manual, esteve também associado à autoridade natural de alguns elementos do grupo, ao ser-lhes reconhecida competência pelos colegas. No presente estudo, a professora tentou sempre evitar a validação antecipada das afirmações, de modo a não coarctar o trabalho exploratório e demonstrativo dos alunos. No entanto, no decurso das interacções estabelecidas com o grupo, por vezes, o que era proferido pela professora era entendido, implicitamente, como legitimação das conclusões alcançadas pelos mesmos. E tal legitimação funcionou também como esquema demonstrativo autoritário de convicção externa.

O Ricardo é o aluno que, na aula de Matemática, detém um maior poder no seio do seu grupo. E à partida, os colegas depositam confiança nas suas asserções, tendendo a aceitá-las. No entanto, nem sempre o que é afirmado pelo Ricardo é aceite sem qualquer espécie de reserva ou questionamento. Quanto maior é o poder de um dado aluno relativamente ao detido pelo Ricardo, maior o questionamento feito pelo mesmo.

Efectivamente, o equilíbrio de poderes suscita a discussão matemática e os desacordos. No presente estudo, as discussões ocorreram quase sempre entre o Ricardo e a Sara, alunos com níveis de poder semelhantes. Daí que a Sara, apesar de conferir credibilidade ao Ricardo, nunca aceite as suas ideias unicamente pelo estatuto de que é detentor, precisando de as entender e validando-as pela respectiva evidência matemática.

A este equilíbrio de poderes talvez não seja alheio o facto de a Sara ter boas notas em todas as disciplinas, à excepção de Matemática. A Sara, apesar de ser uma aluna mediana a Matemática, tem uma atitude empenhada e participativa no trabalho desenvolvido na aula de Matemática, além de manter sempre uma atitude questionadora de gostar de compreender as diversas questões. O Ricardo é o aluno do grupo com melhores notas a Matemática, mas em contrapartida, é um aluno mediano nas restantes disciplinas. As notas académicas constituem projecções reificadas através das quais cada um dos alunos, em estreita relação com a sua participação, constrói a sua identidade enquanto experiência negociada de si próprio (Wenger, 1998).

Quando existe um grande desnível de poderes, os alunos de nível inferior tendem a aceitar de forma imediata tudo o que é afirmado pelo Ricardo, e não chegam a argumentar (por exemplo, a Maria ao ser corrigida pelo Ricardo quanto à localização do espelho no polígono, aceitou a correcção sem nada ripostar, inibindo-se de voltar a manusear o espelho para o colocar num polígono). Os desacordos, que existiram entre alunos com níveis de poder diferenciados, deveram-se ao facto de entrar em jogo autoridades superiores à detida pelo Ricardo, como a da professora (por exemplo, o Bernardo discordou do traçado feito pelo Ricardo com base no poder da conjectura, legitimada antes pela professora).

O Ricardo geralmente dirige-se ostensivamente à Sara quando pretende explicitar os seus raciocínios matemáticos, uma vez que é com ela que sente que vale a pena falar sobre assuntos matemáticos. Quando se dirige mais directamente ao Bernardo, habitualmente é sobre assuntos externos à tarefa matemática a explorar. Ou seja, o equilíbrio de poderes não só permite a emergência da argumentação como também a explicitação verbal das ideias matemáticas. Assim, apesar de o diálogo ocorrer no seio do grupo, ele toma especificidades individuais e simultaneamente sociais, consoante o poder social de cada um e a teia de interrelacionamentos desenvolvidos no grupo. Isto é, não se pode falar de discussão matemática no seio de um grupo em termos abstractos, sem atender às relações de poder existentes.

O Ricardo, detentor de um maior poder no grupo, não tira, contudo, partido dessa situação e não revela ter consciência desse facto. Por exemplo, na entrevista, referiu que era o Bernardo que o ajudava, apesar de eu nunca ter observado, nos registos em vídeo das aulas que analisei, esse pedido de ajuda. Pelo contrário, quando tem alguma dúvida, recorre única e imediatamente à *professora,* sem consultar previamente os colegas, partindo, portanto, do princípio de que eles não saberiam esclarecê-lo e que, portanto, não valeria a pena discutir o assunto com eles. A solicitação de ajuda da professora é muito rara, da sua parte, preferindo consultar o caderno em busca de alguma luz ou propriedade a aplicar numa dada tarefa. Aliás, é uma característica do grupo a sua autonomia no trabalho matemático, tendendo a resolver as questões no seio do grupo e a chegar a conclusões, solicitando pouco a ajuda da professora. O Ricardo evidencia ainda dispensar a legitimação da professora relativamente às conclusões demonstradas, revelando possuir certeza na validade das proposições demonstradas. Tal não significa que o Ricardo se demita de explicitar as suas conclusões à professora, mas fá-lo num sentido comunicativo e não num sentido de procura de legitimação ou comprovação externa.

À luz de Wenger (1998), a adopção pelos outros das ideias de um sujeito prende-se com o envolvimento enquanto modo de pertença à economia de significado. Assim, apesar de existir a tendência de as ideias do Ricardo serem adoptadas pelos restantes elementos do grupo, sem que seja necessário usar a persuasão através de palavras, o seu discurso é persuasivo, nunca tentando impor os seus pontos de vista. É um aluno que, habitualmente, argumenta, justifica, explica e fundamenta as suas afirmações, característica esta reconhecida pelos seus colegas, nas entrevistas. Como vimos atrás, essa sua acção persuasiva e explicativa tem reflexos positivos na sua própria compreensão matemática, conforme o Ricardo reconheceu de forma explícita.

O grau de participação no trabalho é também associado ao poder e identidade de cada um. Assim, os alunos com maior poder no grupo, como é o caso do Ricardo e da Sara, são também os alunos que têm uma identidade de participação na prática do grupo. A Maria detém uma identidade de não-participação, aceitando sem questionamento, e à partida, as ideias dos colegas—*condescendência*, no que respeita ao alinhamento enquanto modo de pertença à economia de significado, no dizer de Wenger (1998)—e inibindo-se de proferir as suas próprias ideias matemáticas. A verbalização de afirmações matemáticas feita pela Maria corresponde a um processo de ventriloquismo (Wertsch, 1991), pelo qual a Maria se apropria dessas mesmas afirmações, tornando suas as ideias dos colegas (por exemplo, como quando a Maria afirmou a infinidade dos eixos de simetria de um círculo, afirmada instantes antes pela Sara e pelo Ricardo, num tom de voz que parecia ter sido ela a autora dessa ideia). O Bernardo regista nuns momentos uma identidade de maior participação e noutros uma identidade de menor participação, balançando, portanto, entre um tipo de identidade e outro. Exemplificativo de um momento revelador de identidade de não-participação, respeitante ao envolvimento enquanto modo de pertença à economia de significado (Wenger, 1998), é o momento em que o Bernardo duvidou da infinidade dos eixos de simetria de um círculo, sendo a sua afirmação completamente ignorada pelos restantes elementos do grupo. Este aluno tem tendência a ter um maior grau de participação nos momentos em que a professora se encontra junto do grupo, em interacção directa. O facto de a professora, por vezes, olhar directamente para o Bernardo, é sentido, implicitamente, pelo mesmo como uma valorização, levando-o a corresponder a um desempenho participativo, esperado pela professora. Assim, a identidade do Bernardo tem múltiplas facetas, de acordo com as pessoas em interacção e a construção social da sua imagem. Os diferentes graus de participação na prática do grupo tornam-se mais visíveis e acentuados quando os recursos disponíveis para o grupo são limitados, não existindo um para cada aluno (por exemplo, os dois espelhos do grupo foram usados unicamente pelo Ricardo e pela Sara, bem como o traçado dos eixos de simetria na folha com os polígonos regulares, única no grupo).

Considerei o grupo-alvo como uma comunidade de prática, atendendo (a) aos seus elementos estruturantes—o domínio (a definição do tópico partilhado), a comunidade (os relacionamentos entre os seus membros e o sentido de pertença) e a prática (o corpo de conhecimento que se acumula e dissemina (Wenger et al., 2002)—; e (b) às três dimensões da relação entre a prática e a comunidade—envolvimento mútuo, empreendimento em conjunto e reportório partilhado (Wenger, 1998). Todos os elementos do grupo-alvo reconhecem-se mutuamente como participantes e como pertencendo ao grupo. A existência de relações de desigualdade reflecte-se nos diferentes graus de participação no empreendimento em comum, participação esta que constitui fonte de identidade (Wenger, 1998). Os significados de desigualdade são negociados no contexto do processo de reconhecimento mútuo. Quando cada um dos alunos do grupo participa na realização da tarefa proposta na aula de Matemática, dá forma à prática feita em conjunto, e simultaneamente, constrói a sua identidade (a sua forma de pertença) dando forma a quem é e a como interpreta o que faz. A não-participação é, ela própria, uma forma de prática. A prática está, pois, inerentemente, ligada à forma como se processa a negociação de significados, e como é o significado apropriado por cada um dos alunos.

O processo de ventriloquismo está também associado, no caso do grupo-alvo, à complementaridade de papéis (Wenger, 1998) assumidos pelos elementos do grupo. Assim, a facilidade em raciocinar matematicamente do Ricardo, aliada à sua desorganização nos registos escritos, é complementada pela organização e clareza que caracterizam os registos dos restantes elementos do grupo. Tal complementaridade levou a que o registo escrito, acordado no seio do grupo, fosse redigido, quase sempre, pala mão da Sara, sendo a sua ficha a que era considerada representativa do trabalho do grupo e entregue à professora. Esta distribuição complementar de papéis foi explicitamente reconhecida pelos alunos, nas entrevistas (a Sara proferiu "[O Ricardo] vai pensando e nós vamos escrever"). No entanto, mesmo na fase final de registo das conclusões, é habitualmente o Ricardo que as verbaliza, ditando à Sara o que esta deverá escrever. Apesar de o grupo-alvo se caracterizar, no que respeita às relações de parcialidade entre os seus membros, pela sobreposição de papéis, já que é esperado e pedido o mesmo tipo de contribuição a cada um deles, o que conduz à inter-ajuda, o modo como praticaram os seus papéis individuais, associado às suas competências individuais, levou a que assumissem, implicitamente, e sem que tal fosse objecto de acordo verbal, diferentes papéis, que podemos encarar como complementares, tirando partido do que cada um faz melhor. Tal como apontado por Wenger (1998), a parcialidade, enquanto característica inerente do envolvimento mútuo, constitui um recurso da prática, ao possibilitar lidar com as diferentes competências de cada um dos membros de uma comunidade de prática. Existe, pois, no processo exploratório das tarefas de Matemática, bem como no processo demonstrativo das conclusões alcançadas, um protagonismo evidente do Ricardo, e os restantes elementos tendem a apropriar-se do significado das afirmações matemáticas por um processo de ventriloquismo, em que, gradualmente, as suas *vozes* (Wertsch, 1991) vão incorporando a *voz* do Ricardo, que ocupa um lugar de supremacia relativamente às suas, tornando-a a sua própria voz.

Nas tarefas—*Investigar Matemática-Bissectrizes...* e *Circunferência e Ângulos III*—em que a demonstração cumpriu essencialmente a função de descoberta da solução do problema, o Ricardo alcançou a mesma, individualmente, por *insight*, sem que exista evidência de relação entre a prática social e o raciocínio dedutivo desenvolvido por si, e todo o trabalho em grupo decorre em torno da comunicação e da partilha desse mesmo raciocínio demonstrativo. Por meio desse processo difícil de comunicação e partilha, conseguido graças à equivalência de poderes entre o Ricardo e a Sara (já que aquelas dependem das posições ocupadas por cada um dos membros da comunidade de prática na economia de significado contextualizada pela exploração de tarefas na aula de Matemática), os significados matemáticos são negociados e vai existindo uma progressiva apropriação de significado, por ventriloquismo, que é diferenciada no que respeita ao seu grau, consoante a identidade de participação de cada um dos elementos do grupo. Efectivamente, a diferentes identidades de participação correspondem diferentes posses de significado (Wenger, 1998). Assim, apesar de, nestas tarefas, a origem da demonstração se colocar a título individual, ela é depois assumida enquanto prática social do grupo—comunidade de prática.

E sendo a aprendizagem uma característica da prática, a aprendizagem da demonstração, em particular, é feita pelo grupo, encarado no colectivo e na forma dos relacionamentos inter-grupo nos assuntos especificamente matemáticos. Ou seja, embora o Ricardo seja o único detentor do significado original da demonstração, na sua fase de estágio, nunca o ocultou dos restantes elementos do grupo, o que levaria à alienação destes; pelo contrário, o Ricardo joga mão de diversificados recursos, incluindo o da particularização e o esboço de esquemas, para tornar transparente o seu processo individual de construção de raciocínio. Segundo Hanna (1996), a demonstração enquanto argumento transparente, com a explicitação dos passos e regras de raciocínio, é o que conduz a que a utilização da mesma seja anti-autoritária. E nesse processo de explicitação e de partilha, o próprio Ricardo vai ampliando a sua compreensão matemática, e o modo integral como ele tomou posse do significado da demonstração é revelado pelo modo e grau com que usou e afirmou como seus os significados matemáticos negociados com os colegas. Quando a posse de significado é partilhada, verifica-se um crescimento da mesma em todos os membros de uma comunidade de prática (Wenger, 1998). É curioso que este resultado encontra eco nas próprias palavras dos alunos, nas entrevistas, quando referiram o gosto e a preferência em trabalhar em grupo nas aulas de Matemática e o facto de esta modalidade de trabalho constituir um factor de aprendizagem.

O Papel Fundamental da Professora

Embora o presente estudo incida na prática dos alunos, esta não pode ser dissociada da acção da professora, visto que esta acção integra, orienta, direcciona, constrange ou condiciona aquela mesma prática. No que respeita à demonstração em particular, em que é necessária uma intervenção curricular forte no sentido da sua introdução e da negociação da sua importância, a professora detém um papel fundamental, direi mesmo, decisivo, nesse processo, o que é convergente com outros estudos empíricos, como por exemplo, o de Machado (2005).

Por conseguinte, é a professora que, na qualidade de mediadora cognitiva e cultural, vai negociando, de uma forma progressiva, com os seus alunos, o estatuto de uma conjectura, a necessidade de procederem a uma demonstração, o estatuto da verificação empírica no que respeita à validação das afirmações matemáticas, e o significado de uma demonstração matemática. É também a professora que, através do seu discurso questionador, baseado na procura dos porquês, incentiva os alunos a justificar, a explicar, a fundamentar as proposições matemáticas. E este discurso pautado pela justificação corresponde, em primeiro lugar, a uma norma social (Cobb et al., 1993) que não é específica da aula de Matemática mas das aulas de qualquer disciplina caracterizadas por uma microcultura baseada na explicação, justificação e argumentação. No entanto, quando a professora negoceia com os alunos o campo de argumentos (Toulmin, 1969) próprio da matemática, está, efectivamente, a negociar na sua sala de aula normas sociomatemáticas (Yackel e Cobb, 1996) que são específicas da actividade matemática dos alunos e da aula de Matemática (Balacheff, 1991). Assim, o que é considerado uma explicação e uma justificação aceitáveis é uma norma sociomatemática, e o que é considerado uma validação aceitável de uma conclusão é uma outra norma sociomatemática, e embora o processo de constituição das mesmas viva da prática da professora e dos alunos, pela interacção das contribuições de uma e de outros, a natureza da contribuição da professora é fundamental, já que a mesma teve que se assumir representante de valores culturais próprios da matemática. Em particular, o hábito de a professora se demitir de validar e legitimar as conclusões dos alunos quando estes ainda se encontram numa fase de exploração da tarefa, acaba por se prender com a norma sociomatemática do que consiste uma validação aceitável, levando a que os alunos não tendam a adoptar o esquema demonstrativo de convicção externa baseado na autoridade da professora.

Durante o processo de negociação conduzido pela professora, esta tenta sempre que as suas afirmações matemáticas sejam acordadas e não impostas, transformando muitas vezes o que afirma em interrogações (concluindo as frases com “não é?”). Outro recurso que a professora usa, frequentemente, é a paráfrase da fala dos alunos. A professora volta a dizer o afirmado antes por algum dos alunos, fazendo eco das suas palavras, e contribuindo para que as mesmas sejam melhor entendidas pelos restantes alunos. A repetição é uma estratégia discursiva apontada por Boavida (2005) como sendo útil na orquestração de discussões colectivas, ao contribuir para que os colegas se debrucem numa dada contribuição de um aluno, ao conferir-lhe maior visibilidade. Outras vezes, inicia as suas frases com os termos acabados de usar pelos alunos, para que a partilha intersubjectiva dos significados tome como ponto de partida o sentido atribuído pelos alunos, e mais facilmente os alunos se apropriem do vocabulário matemático, e simultaneamente, ampliem a sua compreensão matemática relativamente às propriedades inerentes aos termos utilizados (foi o caso da forma como pegou no termo *mediatriz* como designação de eixo de simetria de um triângulo equilátero, possibilitando a emergência das propriedades desse objecto matemático, aplicáveis na situação em causa).

Em suma, tal como defendido por Yackel e Cobb (1996), revelou-se de fundamental importância o facto de a professora ter influenciado os esforços construtivos dos alunos (de demonstrações, neste caso, em particular), bem como o facto de ter direccionado o seu trabalho para uma base dedutiva, uma vez que os estudantes não podem ser deixados entregues a si próprios para construírem os modos de validação aceitáveis em educação matemática. A própria aula de Matemática constitui uma prática social, e o professor detém na mesma um papel essencial para a aprendizagem e valorização da demonstração.

Considerações Finais e Recomendações

Uma das razões, usualmente, invocada para a justificação do ensino da demonstração é a compreensão pelos alunos da natureza da matemática (de Villiers, 2004; Hanna, 2000; Hanna e Jahnke, 1993; 1999; Veloso, 1998). Considero que esta razão se justifica, uma vez que assumo que a demonstração, embora não abarque a globalidade da matemática, é o aspecto essencial que a distingue das outras ciências. É, pois, uma razão de ordem epistemológica.

No entanto, os resultados do presente estudo, e de muitos outros incidentes nesta temática, apontam para a dificuldade dos alunos em desenvolver essa compreensão que se vai fazendo de forma muito lenta e gradual, dado o arreigamento dos alunos em esquemas demonstrativos empíricos (Harel e Sowder, 2007), sendo a sua forma de lidar com a validação dos resultados alcançados semelhante à que têm noutros domínios, como sejam o da vida quotidiana, ou as ciências experimentais. O desenvolvimento desta compreensão passa, portanto, pelo desenvolvimento da compreensão do que consiste um campo de argumentos em matemática (Toulmin, 1969) que, na sala de aula, se traduz na negociação desta norma sociomatemática, em particular (Yackel e Cobb, 1996). Os resultados do presente estudo apontam para a exequibilidade de tal negociação. A turma envolvida no campo empírico era uma turma mediana, trazendo do ano lectivo anterior uma experiência de insucesso em Matemática. No entanto, os alunos da turma desenvolveram competências no domínio da demonstração ao longo do ano lectivo em que decorreu a recolha de dados, o que parece sugerir que o desenvolvimento deste tipo de competências estará ao alcance de todos os alunos.

A razão justificativa da integração curricular da demonstração, desde os níveis mais básicos da escolaridade, que, contudo, emerge, na sua primazia, é a promoção da compreensão matemática (Hanna, 2000; Hanna e Jahnke, 1999; Hersh, 1993; 1997; NCTM, 2000). É sobretudo esta a sua função: uma função explicativa que provoque um salto qualitativo nas aprendizagens dos alunos. Mais importante que validar ou conhecer certos factos matemáticos é compreender por que motivos eles ocorrem. Daí a defesa de uma integração transversal a todo o currículo, de forma a não ser tratada de forma independente dos vários conceitos matemáticos. Este tipo de compreensão facultada por uma demonstração explicativa coloca o pensamento matemático dos alunos num nível superior conceptual. A procura das razões que fundamentam um fenómeno matemático assenta em relações teóricas e gerais, fazendo deslocar o tratamento dos objectos matemáticos como objectos empíricos para objectos teóricos, gerais, abstractos—objectos do pensamento. Esta mudança operada ao nível da sua natureza permite lidar com conceitos que são específicos da matemática, como é o caso do infinito, estabelecendo entre eles relações de ordem teórica. Daqui decorre que qualquer justificação de uma proposição matemática deixa de ser empírica para se basear nessas mesmas relações teóricas e gerais.

Justificada a integração curricular da demonstração, quais os aspectos centrais para que esta seja efectivamente alcançada? Como ajudar os alunos a usar os esquemas demonstrativos que possuem no desenvolvimento de esquemas demonstrativos dedutivos? Não bastará prescrever esta integração, dado o elevado distanciamento entre a prescrição deste aspecto em particular e as práticas efectivas (Harel e Sowder, 2007). As implicações curriculares que apresentarei a seguir situam-se, pois, ao nível do currículo em acção.

Os resultados do presente estudo são descritivos. Permitem-me, contudo, extrair dos mesmos implicações de foro didáctico. Dada a minha preocupação com a aprendizagem em Matemática, interessa-me compreender como é que efectivamente se processa nos alunos o desenvolvimento de esquemas demonstrativos e de que forma se relaciona com a aprendizagem em geral desta disciplina. Um estudo descritivo das práticas sociais matemáticas ocorridas em sala de aula torna-se essencial para a partir dele, perspectivar o trabalho curricular incidente na valorização da demonstração, já que este não pode ignorar a forma como os alunos aprendem e desenvolvem este processo em particular. Esta secção visa, portanto, a apresentação dos principais aspectos a destacar nesse trabalho, com base na análise atrás apresentada, que constituem as recomendações para o ensino da demonstração, inferidas do presente estudo.

Assim, é de destacar a importância da:

1. valorização do papel dos exemplos, quer na fase de conjecturação quer na fase de demonstração, consubstanciada num trabalho que, partindo dessa base significativa para os alunos, vá evoluindo no sentido de os exemplos tomarem um estatuto progressivamente mais generalizável;
2. proposta de tarefas, no âmbito da geometria, promotoras de um trabalho com objectos matemáticos abstractos e gerais, nas quais o pedido do esboço de um esquema, construído com base em relações teóricas e não em medições, constitui um factor que contribui para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos;
3. formulação de questões focadas na explicação, nas tarefas que pressupõem uma fase inicial de conjecturação, pela observação de um padrão em casos particulares, que direccionem os alunos para a produção de demonstrações

explicativas, as quais facultam oportunidades de os alunos reflectirem, olhando com outros olhos para o que fizeram antes e procurando as razões que fundamentam as conjecturas que formularam; em contraposição com um enunciado mais aberto[77], a relevância deste tipo de questões justifica-se por

- os alunos não sentirem, habitualmente, necessidade de demonstrar, dando o trabalho por concluído com a sua fase de conjecturação,
- os alunos lidarem com os enunciados das tarefas escolares de uma forma estrita e linear, preocupando-se em responder a todas as questões, e simultaneamente sentindo-se dispensados de registar os seus raciocínios se não lhes for pedido explicitamente para o fazer,
- os alunos receberem uma mensagem implícita que se espera deles, não apenas a conjecturação, a constatação do observado, mas também o patamar superior de explicação que poderá concretizar-se numa demonstração;

4. implementação de um enquadramento de trabalho baseado em investigações e em resolução de problemas, de forma a que as demonstrações a construir pelos alunos sejam um meio de descoberta da solução ou permitam explicar as conjecturas formuladas, e não algo externo que é solicitado mediante um resultado matemático que é apresentado aos alunos;

5. valorização da forma narrativa das demonstrações dos alunos, uma vez que sendo esta (a) a forma preferencial com que os alunos argumentam em Matemática e (b) o tipo de demonstração em que são mais bem sucedidos, parece constituir um meio favorável ao desenvolvimento das potencialidades dos alunos no que respeita ao seu raciocínio dedutivo, partilhando neste ponto do que é defendido por Healy e Hoyles (2000);

6. ênfase na significância das expressões algébricas de modo a ser possível estabelecer a ponte entre os exemplos trabalhados anteriormente e as expressões gerais, conducente à manutenção de um sistema simbólico referencial (Harel e Sowder, 2007), o que poderá contribuir para um melhor desempenho dos alunos no que diz respeito ao registo de uma

802

[77] Também Balacheff (1991) refere que na negociação da aceitação das regras específicas da demonstração, é importante que a situação de ensino não seja conduzida de um modo aberto que faça com que os alunos se sintam perdidos e não compreendam o objectivo visado.

expressão simbólica e ao domínio da manipulação algébrica; tal como defendido por Hanna e Jahnke (1993), na sala de aula de Matemática, tem de se atender à base pragmática da prova, de forma a ajudar os alunos a sentirem-se mais seguros da relação, na demonstração, entre a dimensão dedutiva e a dimensão da aplicação (significado e relação com a realidade);

7. valorização da comunicação matemática na sua vertente escrita, dado o seu papel de clarificador conceptual; para uma melhor explicitação por parte dos alunos é essencial a contribuição do professor—dado o seu papel na *zona de desenvolvimento proximal*, segundo Vygotsky (1961/1995)—ao ajudar a usar um vocabulário mais adequado e preciso, partindo dos termos usados pelos alunos;

8. adopção de uma estrutura de aula que contemple modalidades de trabalho como a exploração de uma tarefa em pequeno grupo e a discussão das várias resoluções em grupo-turma (Alibert e Thomas, 1991; Boavida, 2005; Fonseca, 2004; Mariotti, 2000), tendo por pano de fundo uma cultura valorativa da justificação e da explicação, de forma a que a certeza associada à veracidade de uma afirmação não se baseie na autoridade externa do professor, mas sim na evidência retirada dos raciocínios apresentados e, eventualmente, da própria demonstração enquanto argumento transparente (Hanna, 1996); a fase de partilha assume particular relevância, não só como factor favorável à emergência do significado de demonstração, como também oportunidade para os alunos revisitarem o trabalho e fazerem do mesmo um objecto de reflexão, visto que os alunos não têm tendência para o fazer, de forma espontânea.

É de sublinhar ainda a centralidade do papel do professor em todos os aspectos atrás enunciados, tal como referi na secção anterior. Não se pode esperar, neste aspecto em particular, que os alunos, por sua própria iniciativa, sintam vontade e necessidade de demonstrar, ou que, de forma espontânea ou automática, desenvolvam campos de argumentos próximos do que é um campo de argumentos em matemática. A demonstração não entra na mesma linha metodológica que outros tópicos curriculares, pela qual se espera que, face a tarefas exploratórias ou investigativas, os alunos vão construindo os vários conceitos matemáticos, em conjunção com as discussões matemáticas orquestradas pelo professor. Os alunos nunca se apropriarão da demonstração se a mesma não for objecto de ensino explícito, de negociação relativamente à sua importância, à sua natureza e ao seu significado. E é o professor que, na sala de aula, procede a essa negociação que tem de ser insistente e sistemática, quer em pequeno grupo, quer em grupo-turma. Tem de ser o professor a negociar com os alunos os significados de conjectura, de demonstração, de contra-exemplo, de exemplo, fazendo ressaltar o que os distingue. O professor deverá ainda estar atento à composição dos grupos, dadas as relações de poder e de dependência que se criam nos mesmos. Não basta formar grupos de trabalho dentro de uma sala de aula para garantir uma efectiva comunicação matemática entre os respectivos membros. Há que atender às identidades de cada um dos alunos no seio de um grupo, de forma a potenciar a sua participação.

Sendo o professor um actor fulcral neste processo, e sendo a demonstração, efectivamente, um objecto curricular enquanto algo objecto de intencionalidade educativa, algo que se espera que os alunos se apropriem e desenvolvam as suas competências no que respeita à sua produção, são vários os instrumentos a usar pelo professor, ao serviço deste objectivo, nomeadamente (a) as tarefas e (b) o discurso matemático negociado como válido na aula de Matemática. Estas duas valências foram abordadas nas recomendações atrás indicadas. O discurso do professor assume uma particular importância, quer no que respeita à configuração do próprio discurso dos alunos, quer no que respeita à gestão e à orquestração da discussão colectiva, pelo tipo de questionamento a colocar e pelos cuidados a ter na gestão das participações dos alunos, em que o redizer as contribuições dos alunos assume um papel fundamental numa maior explicitação e partilha de significados matemáticos em toda a turma.

Como conclusão final do presente estudo, destacarei a importância de um ambiente de sala de aula caracterizado pelo desenvolvimento de uma cultura escolar onde se dê primazia à negociação de significados matemáticos, entre eles o da demonstração, de tal forma que esta seja sentida como significativa, o que poderá conduzir após um tempo considerável de negociação a que a mesma corresponda a uma compulsão interna dos alunos (Schwartz, 1994). Tal como apontado por Wenger (1998), os significados são a fonte da energia necessária à aprendizagem. E no âmbito da prática curricular, há que questionar quais as formas de participação dos alunos requeridas para dar significado ao seu conhecimento matemático, há que questionar de que forma o ensino e a aprendizagem da demonstração se podem tornar recursos estruturantes (Lave, 1997) um do outro, de forma a constituírem-se mutuamente, de forma articulada, com base nos recursos disponíveis e na negociação. Nesse questionamento, há que ter em mente que aprendizagem é mudança (Sfard, 2008) ao nível da participação, da pertença e da negociação de significados (Wenger, 1998). Um trabalho curricular investido na mudança dos alunos, nomeadamente no que diz respeito ao seu uso de esquemas demonstrativos, implica oportunidades de envolvimento dos alunos—é este envolvimento que providencia a forma recíproca como identidade e aprendizagem estão ao serviço uma da outra. Só por intermédio de envolvimento (Wenger, 1998), conseguiremos que o currículo em acção seja um itinerário de experiências transformadoras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projecto MAT789* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P. (2001). A gestão flexível do currículo: O ponto de vista da administração. In Texto Editora (Ed.), *Gestão flexível do currículo: Contributos para uma reflexão crítica* (pp. 23-30). Lisboa: Texto Editora.

Agudo, F. R. (1980). A matemática no mundo contemporâneo. In Academia das Ciências de Lisboa (Ed.), *Memórias da Academia das Ciências de Lisboa: Classe de Ciências* (Separata do Tomo XXIII, pp. 252-287). Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ambrósio, M. T. (2001). In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento nova aprendizagem* (pp. 51-57). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Anderson, G. (1990). *Fundamentals of educational research.* London: The Falmer Press.

Anscombe, E., & Geach, P. T. (1970/1637). *Descartes: Philosophical writings.* Middlesex: Thomas Nelson & Sons.

APM (Associação de Professores de Matemática) (1988). *A renovação do currículo de matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

APM (Associação de Professores de Matemática) (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

APM (Associação de Professores de Matemática) (2000). *Investigações Matemáticas na sala de aula: Propostas de trabalho.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Babai, L. (1994). Probably true theorems, cry Wolf? *Notices of the American Mathematical Society, 41*(5), 453-454.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1996). Heterogeneous logic. In G. Allwain e J. Barwise (Eds.), *Logical reasoning with diagrams*. New York: Oxford University Press.

Bastos, R. (1998). Métodos Quantitativos: Uma alternativa para o ensino artístico. In G. Cebola e M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 189-95). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Beauchamp, G. (1981). Basic components of a curriculum theory. In H. A. Giroux et al. (Eds.), *Curriculum & instruction: Alternatives in education* (pp. 63-68). Berkeley: McCutchan Publishing Corporation.

Benson, D. (1999). *The moment of proof: Mathematical epiphanies.* New York: Oxford University Press.

Bell, E. (1945). *The development of mathematics* (2ª ed.). New York: McGraw-Hill.

Bicudo, M. A. (1996). Possibilidades de trabalhar a educação matemática na ótica da concepção heideggeriana de conhecimento. *Quadrante, 5*(1)*,* 5-27.

Bisschop, J. (1998). Desenvolvimento no ensino da Matemática: matemática realista e aprendizagem autónoma. In G. Cebola e M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 179-188). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática, 63,* 11-15.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Boavida, A., Oliveira, H., & Saraiva, M. (2006). O caso da Suécia. In Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa e Associação de Professores de Matemática (Eds.), *Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal* (pp. 131-170). Lisboa: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação.

Boero, P., Garutti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. (1996). Challenging the traditional school approach to theoremes: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120). Valencia: Universitat de Valencia.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)

Borwein, P., & Jorgenson, L. (1997). Visible structures in number theory. Online: http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/node3.html

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'Histoire des Mathématiques.* Paris: Hermann.

Bourdieu, P., & Passeron, J. (1970). *La reproduction – Eléments pour une théorie du système d'enseignement*. Paris: Ed. de Minuit.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa. (retirado de http://ia.fc.ul.pt)

Brown, A., & Campione, J. (1994). Guided discovery in a community of learners. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice.* Cambridge: MIT Press/Bradford Books.

Brown, J., Collins, A., & Duguid, P. (1988). *Situated cognition and the culture of learning.* (Report Nº IRL 88 0008) Palo Alto: Institute for Research on Learning.

Brown, A., & Dowling, P. (1998). *Doing research/reading research: A mode of interrogation for education.* London: The Falmer Press.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for research in mathematics education, 15*(1), 35-49.

Burton, L. (1995). Moving towards a feminist epistemology of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 28*(3), 275-291.

Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners—and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal, 27*(5), 589-599.

Campbell, S. (1998). *Preservice teachers' understanding of elementary number theory: Qualitative constructivist research situated within a kantian framework for understanding educational inquiry.* Unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University, Faculty of Education, Burnaby.

Canavarro, A., Santos, L., & Serrazina, L. (2006). O caso da Espanha. In Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa e Associação de Professores de Matemática (Eds.), *Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal* (pp. 15-46). Lisboa: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Caraça, B. (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática* (2ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Carrilho, M. (1990). *Verdade, suspeita e argumentação*. Lisboa: Editorial Presença.

Carvalho, A. (2001). Conhecer, pensar e educar: Os desafios de uma interpelação antropológica. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento nova aprendizagem* (pp.35-50). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Chalmers, A. (1990). *What is this thing called Science?* (2ª ed., revista). Buckingham: Open University Press.

Chazan, D. (1993). High school geometry students'justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cipra, B. (1993). New computer insights from 'transparent' proofs. *What's Happening in the Mathematical Sciences, 1,* 7-12.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick e C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts* (report of The Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools). London: Her Majesty Stationery Office.

Coll, C. (1987). *Psycologia y curriculum*. Barcelona: Laia.

Cook, T., & Reichardt, C. (1986). Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos. In T. D. Cook e C. S. Reichardt (Eds.), *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa* (pp. 25-58). Madrid: Ediciones Morata. (Obra original em inglês publicada em 1982)

D'Ambrosio, U. (1994a). Avaliação: Eliminar ou manter? ou reconceituar? In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 94* (pp. 137-141). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

D'Ambrosio, U. (1994b). Cultural framing of mathematics teaching and learning. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 443-455). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 333-344.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva. (Obra original em inglês publicada em 1981).

Davis, P., & Hersh, R. (1997). *O sonho de Descartes: O mundo segundo a Matemática*. Lisboa: Difusão Cultural. (Obra original em inglês publicada em 1986).

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW&OC.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 14-20.

De Villiers, M. D. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 196-198). Helsinki: University of Helsinki.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 63*, 31-36.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science,* 397-418.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Newburry Park: Sage.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

DES (1996). *Métodos Quantitativos: Programa para as escolas secundárias especializadas do ensino artístico*. Porto: Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação.

DES (1997). *Matemática. Programas 10º, 11º e 12º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DES (2001a). *Programa de Matemática A, 10º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica_A_10.pdf)

DES (2001b). *Programa de Matemática B, 10º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/260/matematica_B_10.pdf)

DES (2001c). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/263/mat_aplicada_cien_soc.pdf)

DES (2002a). *Programa de Matemática A, 11º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf)

DES (2002b). *Programa de Matemática B, 11º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/261/matematica_B_11.pdf)

DES (2002c). *Programa de Matemática A, 12º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/259/matematica_A_12.pdf)

DES (2002d). *Programa de Matemática B, 12º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/262/matematica_B_12.pdf)

Deus, J. (2003). *Da crítica da ciência à negação da ciência.* Lisboa: Gradiva.

Dewey, J. (1967). *Experiencia y educación*. Buenos Aires: Losada.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* ME, Departamento da Educação Básica (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Dieudonné, J. (1939). Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques. *Revue Scientifique, 77,* 224-232.

Dirichlet, P. L. (1837). Über die Darstellung Ganz Willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. In H. W. Dove e L. Moser (Eds.), *Reportorium der Physik* (I, pp. 152-174).

D'Hainaut, L. (1980). *Educação: Dos fins aos objectivos.* Coimbra: Livraria Almedina.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld e J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, pp. 239-286). Providence: American Mathematical Society.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3)*,* 233-261.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x 31*, 37-61.

Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 99-114.

Eisner, E. W. (1991). Objectivos educativos: Ajuda ou estorvo?. In F. A. Machado e M. F. Gonçalves (Eds.), *Currículo e desenvolvimento curricular: Problemas e perspectivas*, (pp. 184-187). Lisboa: Edições Asa.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Ernest, P. (1993). *The philosophy of mathematics education* (2ª ed.). Bristol: The Falmer Press.

Figueiredo, A. (2001). Novos media e nova aprendizagem. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento nova aprendizagem* (pp.71-81). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Filho, R. (2001). Novos currículos, novas aprendizagens: Um novo sentido. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento nova aprendizagem* (pp. 137-152). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Firestone, W. A. (1987). Meaning in method: The rhetoric of quantitative and qualitative research. *Educational Researcher, 16*(7), 16-21.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18, 24.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 309-329.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa. (retirado de http://ia.fc.ul.pt)

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Formosinho, J. (1991a). Prefácio. In F. A. Machado e M. F. Gonçalves (Eds.), *Currículo e desenvolvimento curricular: Problemas e perspectivas*, (pp. 7-10). Lisboa: Edições Asa.

Formosinho, J. (1991b). Currículo e cultura escolar. In F. A. Machado e M. F. Gonçalves (Eds.), *Currículo e desenvolvimento curricular: Problemas e perspectivas* (pp. 43-44). Lisboa: Edições Asa.

Formosinho, J. (1991c). Currículo uniforme—pronto-a-vestir de tamanho único. In F. A. Machado e M. F. Gonçalves (Eds.), *Currículo e desenvolvimento curricular: Problemas e perspectivas* (pp. 262-267). Lisboa: Edições Asa.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth: Heinemann.

Francis, G. (1996). Mathematical visualization: standing at the crossroads. Online: http://www.cecm.sfu.ca/projects/PhilVisMath/vis96panel.html

Freitas, C. V. (1988). O planeamento na estruturação dos curricula. In Comissão de Reforma do Sistema Educativo, *Planeamento educativo* (pp. 33-40). Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento/Ministério da Educação.

Freitas, C. V. (2001). Novos currículos para o sucesso educativo. In Texto Editora (Ed.), *Gestão flexível do currículo: Contributos para uma reflexão crítica* (pp. 9-14). Lisboa: Texto Editora.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and na investigative approach. In A. Orton e G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). London: Cassel.

Fundação Calouste Gulbenkian (2002). *Potências de dez: O mundo às várias escalas*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Garnica, A. V. (1996). Da literatura sobre a prova rigorosa em educação matemática: Um levantamento. *Quadrante, 5*(1), 29-60.

Gay, G. (1985). Curriculum development. In *The International Encyclopedia of Education*, (pp. 1170-1172). Oxford: Pergamon.

Gödel, K. (1931). On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems. Online: http://home.ddc.net/ygg/etext/godel/godel3.htm

Gödel, K. (1944). Russell's mathematical logic. In P. A. Schilpp (Ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell* (pp. 123-154). Evanston and Chicago: Northwestern University.

Godino; J. D., & Recio, A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 313-320). Helsinki: University of Helsinki.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Goldwasser, S., Micali, S., & Rackoff, C. (1985). The knowledge complexity of interactive proof-systems. *Proceedings of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing,* 291-304.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research: Research for the sake of educational change. In G. Cebola e M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em*

Matemática (pp. 41-66). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Grundy, S. (1987). *Curriculum: Product or praxis?* London: The Falmer Press.

Guillen, M. (1987). *Pontes para o infinito: O lado humano das matemáticas.* Lisboa: Gradiva. (Obra original em inglês publicada em 1983)

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Guimarães, F., & Brocardo, J. (2006). O caso da França. In Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa e Associação de Professores de Matemática (Eds.), *Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal* (pp. 47-87). Lisboa: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Guimarães, H., & Ponte, J. (2006). O caso da Irlanda. In Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa e Associação de Professores de Matemática (Eds.), *Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal* (pp. 89-129). Lisboa: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Hacking, I. (1980). Proof and eternal truths: Descartes and Leibniz. In S. Gaukroger (Ed.), *Descartes' philosophy, mathematics and physics* (pp. 169-180). Sussex: The Harvester Press.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: Universitat de Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 73-80). Haifa: Israel Institute of Technology.

Hannaford, C. (1998). Mathematics teaching in democratic education. *Zentralblatt fur Didaltik der Mathematik, 98*(6), 181-187.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Hass, G. (1983). Eighty years of curriculum theory. In G. Hass (Ed.), *Curriculum planning: A new approach* (pp. 299-302) (4ª ed.). Boston: Allyn Bacon, Inc.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4)*,* 396-428.

Heidegger, M. (1998). *Ser e tempo – Parte II* (6ª ed.). Petrópolis: Editora Vozes.

Heidegger, M. (1999). *Ser e tempo – Parte I* (8ª ed.). Petrópolis: Editora Vozes.

Henkin, L., & Schwartz, J. (1994). A discussion of Alan Schoenfeld's chapter. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 71-75). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3)*,* 176-203.

Hernández, F., & Ventura, M. (1998). *A organização do currículo por projetos de trabalho: O conhecimento é um caleidoscópio* (5ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1996)

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Hofstadter, D. (1986). *Metamagical themas: Questing for the essence of mind and pattern.* London: Penguin Books.

Hofstadter, D. (1999). *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid* (2ª ed.). New York: Basic Books.

Hofstadter, D. (2001). *Gödel's proof.* New York: New York University Press.

Horgan, J. (1993). The death of proof. *Scientific American, 269*(4), 74-82.

Hoyles, C. (2008, Julho). *Technology and mathematics education.* Comunicação apresentada em 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey.

Hoyles, C., & Küchemann, D. (2002). Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51,* 193-223.

Husserl, E. (1976). *La crise des sciences européennes et la phénoménologie transcendantale.* Paris. Galimard.

Irvine, A. D. (2003). Russell's paradox. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy.* Online: http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox

Jacquard, A. (1998). *A equação do nenúfar: Os prazeres da ciência.* Lisboa: Terramar.

Jaffee, A., & Quinn, F. (1993). Theoretical mathematics: Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 29*(1), 1-13.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry.* London: The Falmer Press.

Johnson, M. (1980). Definições e modelos na teoria do currículo. In R. Messick et al. (Eds.), *Currículo: Análise de debate* (pp. 13-32). Rio de Janeiro: Zahar.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 55-85.

Jones, J., & Wilson, W. (1995). *An incomplete education.* New York: Ballantine Books.

Joseph, G. (1990). *The crest of the peacock: Non-european roots of mathematics.* London: Penguin Books.

Joseph, G. G. (1993). A rationale for a multicultural approach to mathematics. In D. Nelson, G. G. Joseph e J. Williams (Eds.), *Multicultural mathematics: Teaching mathematics from a global perspective* (pp. 1-24). Oxford: Oxford University Press.

Kant, I. (1985). *Crítica da razão pura.* Lisboa: Edições da Fundação Calouste Gulbenkian. (Obra original em alemão publicada em 1781)

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77-156). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kemmis, S. (1988). *El curriculum más allá de la teoría de la reproducción.* Madrid: Morata.

Keeves, J. P. (1986). Social theory and educational research. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching.* New York: Macmillan.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Kubrusly, R. S. (2005). Uma viagem informal ao teorema de Gödel ou (O preço da matemática é o eterno matemático). Online: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/godel.htm

Lakatos, I. (1967). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the philosophy of mathematics* (pp. 199-203). Amsterdam: North-Holland.

Lakatos, I. (1991). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery* (J. Worrall e E. Zahar, Eds.). Cambridge: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Lam, L., & Shen, K. (1984). Right-angled triangles in ancient China. *Archive for History of Exact Sciences, 30,* 87-112.

Lave, J. (1997). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. In P. Light e G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 74-92). Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

Lave, J., & Wenger, E. (1994). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lawton, D. (1981). Models of planning. In P. Gordon (Ed.), *The study of curriculum* (pp. 105-113). London: Batsford Academic & Educational, Ltd.

Lawton, D. (1988). Ideologies of education. In *The National Curriculum.* University of London: Institute of Education.

Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality.* New Jersey: Prentice Hall.

Lerman, S. (1996, Novembro). *Alguns problemas da investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática numa abordagem socio-cultural.* Comunicação apresentada no VII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Almada.

Lin, F., Lee, Y., & Yu, J. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. In N. Pateman, B. J. Dougherty e J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 443-449). Honolulu: University of Hawaii.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad.* Tese de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Lisboa.

Machado; F., & Gonçalves, M. (1991). *Currículo e desenvolvimento curricular: Problemas e perspectivas*. Lisboa: Edições Asa.

Manin, Y. (1998). Truth, rigour, and common sense. In H. G. Dales e G. Oliveri (Eds.), *Truth in mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments*,* 25-53.

Mariotti, M., Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Helsinki: University of Helsinki.

Marques, L., & Praia, J. (1991). Ensino-aprendizagem das ciências: Possíveis contributos para reflexão. *Aprender, 14,* 11-18.

Marsh, C. (1997). *Perspectives: Key concepts for understanding curriculum, Vols. I, II.* London: The Falmer Press

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59-81). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Mason, J. (1996). O "quê", o "porquê" e o "como" em Matemática. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados* (pp. 15-23). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Mason, J., Burton, L, & Stacey, K. (1984). *Thinking mathematically.* London: Addison-Wesley Publishing Company.

Mathematics and Computer Science Division (2003a). Robbins algebras are boolean. Online: http:/www-unix.mcs.anl.gov/~mccune/papers/robbins/

Mathematics and Computer Science Division (2003b). A sample Otter proof. Online: http:/www-unix.mcs.anl.gov/AR/otter/robbins-sample.html

Matos, J. F. (2002). Educação matemática e cidadania. *Quadrante, 11*(1)*,* 1-6.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1993, Junho). *Processos cognitivos e problemas de representação na resolução de problemas de aplicação da Matemática.* Comunicação apresentada no Simpósio Novas Perspectivas no Ensino das Ciências e da Matemática, Lisboa.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante, 3*(1), 19-53.

Matos, J., Carreira, S., Amorim, I., & Santos, M. (1994). *Ferramentas computacionais na modelação matemática.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Matos, J. F., Santos, M. P., Carreira, S. P., & Amorim, I. M. (1995). Matemática e realidade: Pensar a aprendizagem. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *VI Seminário de Investigação em Educação Matemática: Actas* (pp. 149-172). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Maturana, H. (1975). The organization of the living: A theory of the living organization. *International Journal Man-Machine Studies, 7,* 313-332.

Maturana, H. R. (1978). Biology of language: The epistemology of reality. In G. A. Miller e E. Lenneberg (Eds.), *Psychology and biology of language and thought: Essays in honor of Eric Lenneberg.* New York: Academic Press.

Maturana, H. (1987). Everything said is said by an observer. In W. Thompson (Ed.), *Gaia: A way of knowing* (pp. 65-82). Hudson: Lindisfarne Press.

Maturana, H., & Varela, F. (1980). *Autopoiesis and cognition: The realization of the living.* Dordrecht: Reidel.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Meyer; M. (1982). *Logique, langage et argumentation* (2ª ed.). Paris: Hachette.

MEN (1973). *A reforma do sistema educativo.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação Nacional.

Morin, E. (2001). L'enseignement des conaissances. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento nova aprendizagem* (pp.25-33). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 12-19.

Nagel, E., & Newman, J. (2001). *Gödel's proof* (2ª ed., revista). New York: New York University Press.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1980). *An agenda for action.* Reston: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas - Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar, Colecção de Adendas – Anos de Escolaridade 9-12.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original em inglês publicada em 1991)

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1994a). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (2ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Obra original em inglês publicada em 1989)

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1994b). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Obra original em inglês publicada em 1991)

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Núñez, R. E., Edwards; L. D., & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 45-65.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1996). Non-Euclidean geometry. Online: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa. (retirado de http://ia.fc.ul.pt)

Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 25-40). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Oliveira, H.; Segurado, M. I.; & Ponte, J. P. (1998). Tarefas de investigação em Matemática: Histórias da sala de aula. In G. Cebola e M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 107-125). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Pacheco, J. (2001). *Currículo: Teoria e práxis* (2ª ed.). Porto: Porto Editora.

Pacheco, J., Alves, M., Morgado, J., & Viana, I. (1999). Objectivos. In J. A. Pacheco (Org.), *Componentes do processo de desenvolvimento do currículo* (pp. ?). Braga: Livraria Minho.

Pacheco, J., & Flores, M. (1999). Estratégias. In J. A. Pacheco (Org.), *Componentes do processo de desenvolvimento do currículo* (pp. ?). Braga: Livraria Minho.

Pacheco, J., Flores, M., & Paraskeva, J. (1999). Marco epistemológico. In J. A. Pacheco (Org.), *Componentes do processo de desenvolvimento do currículo* (pp. ?). Braga: Livraria Minho.

Pacheco, J., Paraskeva, J., & Morgado, J. (1999). Conteúdos. In J. A. Pacheco (Org.), *Componentes do processo de desenvolvimento do currículo* (pp. ?). Braga: Livraria Minho.

Palais, R. S. (1999). The visualization of mathematics: Toward a mathematical Exploratorium, *Notices of the AMS 46*(6)*,* 647-658.

Parlett, M. (1975).Evaluation innovation in teaching. In M. Golby e J. G. West (Eds.), *Research unit on intellectual development* (pp. 414-424). London: Croom Helm e Open University Press.

Pavelle, R., Rothestein, M., & Fitch, J. (1991). Álgebra por computador, *O Computador na Educação Matemática, 2,* 11-27.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3ª ed.). Thousand Oaks: Sage.

Pea, R. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 47-87). Cambridge: Cambridge University Press.

Penrose, R. (1990). *The emperor's new mind.* London: Vintage.

Perelman, C. (1987). Argumentação. In *Enciclopédia Einaudi: Oral/Escrito Argumentação* (Vol. 11, pp. 234-265). Lisboa: Imprensa Nacional.

Perrenoud, P. (1999). Construir competências é virar costas aos saberes? *Pátio. Revista Pedagógica, 11,* 15-19.

Perrenoud, P. (2000). Construindo competências. *Nova Escola, 31,* 19-31.

Phenix, P. (1962). The uses of disciplines as curriculum content. In A. Passaow (Ed.), *Curriculum crosswords* (pp. 57-65). New York: Teachers College Press.

Pires, M. I. (1992). *Processos de resolução de problemas: uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário* (tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Poincaré, H. (1970). *Ciência e hipótese*. Lisboa: Galeria Panorama. (Obra original em francês publicada em 1902)

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1)*,* 3-18.

Ponte, J. P. (2003a). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, 2,* 93-169.

Ponte, J. P. (2003b). Investigar, ensinar e aprender. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 2003* (pp. 25-39). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Costa, C., Rosendo, A. I., Maia, E., Figueiredo, N., Dionísio, A. F. (2002). Introdução. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 1-4). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário do Ministério de Educação.

Ponte, J. P., Matos, J., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Pope, M., & King, T. (1981). *Personal construct psychology and education.* London: Academic Press.

Postic, M. (1990). *A relação pedagógica* (2ª ed.). Coimbra: Coimbra Editora. (Obra original em francês publicada em1982).

Popper, K. (1992). *O realismo e o objectivo da ciência: Pós-escrito à lógica da descoberta científica, Vol. 1*. (2ª ed.). Lisboa: Publicações Dom Quixote. (Obra original em inglês publicada em 1956).

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(3), 5-41.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29.

Resnick, L. (2001). Changing knowledge, changing schools: Creating intelligence for the 21st century. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento nova aprendizagem* (pp. 125-135). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Restivo, S. (1992). *Mathematics in society and history*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Resweber, J. (1979). *O pensamento de Martin Heidegger.* Coimbra: Livraria Almedina. (Obra original em francês publicada em 1971)

Rocha, A. (2002). Os alunos de matemática e o trabalho investigativo. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 99-124). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, M. (2000). Interacções sociais na aprendizagem da Matemática. *Quadrante, 9*(1), 3-47.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context.* New York: Oxford University Press.

Roldão, M. C. (1998). Currículo – Um processo de construção, gestão e formação reflexiva centrado na escola. In G. Cebola e M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 31-39). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Roldão, M. (1999). *Os professores e a gestão flexível do currículo: Perspectivas e práticas em análise.* Porto : Porto Editora.

Roldão, M. C. (2001). Currículo e políticas educativas: Tendências e sentidos de mudança. In Texto Editora (Ed.), *Gestão flexível do currículo: Contributos para uma reflexão crítica* (pp. 59-68). Lisboa: Texto Editora.

Roldão, M. C. (2003). O lugar das competências no currículo – ou o currículo enquanto lugar das competências? In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 2003* (pp. 41-48). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Romberg, T. A. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: Connections between theory and practice. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 287-304). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosa, J. (2001). *Deontologia* (2ª ed.). Lisboa: Escola Superior de Educação João de Deus.

Russell, B. (1919). *Introduction to mathematical philosophy*. London: Allen & Unwin.

Russell, B. (1950). *Logic and knowledge.* London: Allen & Unwin.

Sacristán, J. (1986). *Teoria de la ensenãnza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya.

Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1991)

Säljö, R. (1991). Introduction: Culture and learning. *Learning and Instruction, 1,* 179-185.

Santos, J. (1992). *Antes de Sócrates.* Lisboa: Gradiva.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C.

Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Saxe, G. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Schawb, J. (1978). The practical: A language for curriculum. In D. E. Orlosky e O. B. Smith (Eds.), *Curriculum development: Issues and insights* (pp. 18-27). Chicago: Rand MacNally College Publishing Company.

Schoenfeld, A. H. (1994a). A discussion of Bruce Reznick's chapter. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 39-51). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1994b). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados* (pp. 61-71). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Schwartz, J. L. (1994). The role of research in reforming mathematics education: A different approach. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 1-7). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Seely, C. (2008, Maio). *Improving K-12 school mathematics: Issues, callenges, and possibilities.* Comunicação na Conferência Internacional sobre o Ensino da Matemática, Lisboa.

Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa. (retirado de http://ia.fc.ul.pt)

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validation of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Sfard, A. (2008, Julho). *Learning mathematics as developing a discourse: Oulining a commognitive perspective on thinking.* Comunicação apresentada em 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. In A. Sierpinska e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 2, pp. 527-548). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Silva, T. (2003). Goldbach Conjecture Verification. Online: http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(2), 197-210.

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. In Institute of Education (Ed.), *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 39-46). London: University of London.

Sfard, A. (2008, Julho). *Learning mathematics as developing a discourse: Oulining a commognitive perspective on thinking*. Comunicação apresentada em 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey.

Skovsmose, O. (1995). Competência democrática e conhecimento reflexivo em Matemática. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e M. Santos (Eds), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 137-169). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14,* 66-91. (retirado de www.educ.fc.ul.pt/docentes/ jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf)

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002). Quebrando a neutralidade política: O compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia. *Quadrante, 11*(1)*,* 7-28.

Smith, J. K., & Heshusius, L. (1986). Closing down the conversation: The end of the quantitative-qualitative debate among educational inquirers. *Educational Researcher, 15* (1)*,* 4-13.

Solomon, J. (1994). The rise and fall of constructivism. In E. Jenkins (Ed.), *Studies in science education.* Yorkshire: University of Leeds.

Sousa, L (2001). O Teorema das Quatro Cores. *Millenium, 24,* 125-151. (retirado de http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf)

Stenhouse, L. (1981). *An introduction to curriculum research and development.* London: Heinemann Educational Books Ltd.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum.* Madrid: Morata.

Swetz, F., & Hartzler, J. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum.* Reston: NCTM.

Szombathelyi, A., & Szarva, T. (1998). Ideas for developing students'reasoning: A Hungarian perspective. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 677-681.

Taba, H. (1962). *Curriculum development: Theory and practice*. New York: Harcourt Brace and World, Inc.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127*, 28-32.

Thompson, D. (1996). Learning and teaching indirect proof. *The Mathematics Teacher, 89*(6), 474-482.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 29-37.

Toulmin, S. (1969). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Traldi, L. (1984). *Currículo: Conceituação e implicações; metodologia de avaliação; teoria e prática; formas de organização; supervisão* (2ª ed.). São Paulo: Editora Atlas S. A.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Treffers, A., e Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education: The Wiskobas Program. Em L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-122). Utrecht: OW&OC.

Trotignon, P. (1982). *Heidegger.* Lisboa: Edições 70. (Trabalho original em francês publicado em 1965)

Tyler, R. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction.* Chicago: The University of Chicago Press.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa. (retirado de http://ia.fc.ul.pt)

Varela, F. (s.d.). *Conhecer as ciências cognitivas: Tendências e perspectivas.* Lisboa: Instituto Piaget. (Trabalho original em francês publicado em 1988)

Veloso, E. (1995). Software dinâmico: Uma abordagem estimulante no ensino da geometria. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 95* (pp. 53-64). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vieira, M. M. (2001). A gestão flexível do currículo: Abordagem sociológica. In Texto Editora (Ed.), *Gestão flexível do currículo: Contributos para uma reflexão crítica* (pp. 15-22). Lisboa: Texto Editora.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 275-298.

Vygotsky, L. (1982). *Sobranie sochinenii, Tom vtoroi, Problem obshchei psikhologii.* Moscovo: Izdatel'stvo Pedagogika.

Vygotsky, L. (1994). The development of academic concepts in school aged children. In R. V. Veer e J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 355-370). Cambridge, Massachusetts: Basil Blackwell Ltd.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamento e linguagem* (5ª ed.). São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda. (Obra original em inglês publicada em 1961)

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. (2002). *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge.* Boston: Harvard Business School Press.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action.* Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

Wheeler, D. (1967). *Curriculum process.* London: University of London Press.

Wilder, R. (1967). The role of the axiomatic method. *American Mathematical Monthly, 74,* 115-127.

Wiles, A. (2000). Solving Fermat: Andrew Wiles. Online: http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/wiles.html

Winegar, L. T., & Valsiner, J. (1992). Contextualizing context: Analysis of metadata and some further elaborations. In L. T. Winegar e J. Valsiner (Eds.), *Childrens's development within social context: Research and methodology.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Winograd, T., & Flores, F. (1993). *Understanding computers and cognition: A new foundation for design* (8ª ed.). Reading: Addison-Wesley Publishing Company.

Wolf, R. (1998). *Proof, logic, and conjecture: The mathematician's toolbox.* New York: W. H. Freeman & Company.

Zabalza, M. (1994). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola* (2ª ed.). Porto: Edições Asa.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children´s understanding of mathematical argumentation.* Hammond: Purdue University.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior, 19,* 275-287.

Yin, R. (1989) *Case study research: Design and methods.* Newbury Park: Sage.

ANEXO 1

Pedidos de Autorização aos Encarregados de Educação para a Efectuação da Recolha de Dados

Exmº(ª) Sr(ª)
Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)
____
Nº____ Turma____ 9º Ano

Sendo aluna de Doutoramento em Educação, na especialidade de Didáctica da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação, cujo tema incide na demonstração matemática na actividade matemática escolar, e sua relação com as interacções sociais. Trata-se de um tema pertinente e actual na área da Didáctica da Matemática, tal como tem vindo a ser reconhecido quer por professores quer por investigadores nacionais e internacionais.

Para esse efeito, preciso de recolher e analisar dados empíricos do trabalho dos alunos, nas aulas de Matemática. O contexto de trabalho estará centrado na actividade de investigação, uma vez que é particularmente adequada para analisar a demonstração matemática, além de ser reconhecidamente essencial à experiência matemática dos alunos. A recolha de dados será feita por intermédio da observação das aulas dos 2º e 3º Períodos, com a minha presença, e com o recurso ao registo vídeo. Os trabalhos dos alunos, elaborados nas aulas, serão fotocopiados (ou gravados em disquetes, no caso de serem desenvolvidos no computador), para serem objecto de análise posterior. Estão, ainda, previstas, algumas entrevistas, conduzidas por mim, e em horário extracurricular, a alguns dos alunos, com vista a um maior entendimento do trabalho realizado pelos mesmos. A entrevista será também gravada em vídeo.

Assim sendo, solicito que me autorize a proceder à recolha de dados, descrita atrás, ficando desde já garantido que não será desenvolvido qualquer tipo de experimentação. Garante-se igualmente o anonimato dos alunos, bem como a estrita confidencialidade dos dados obtidos, que apenas serão utilizados para os objectivos da investigação.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os meus cumprimentos,

Barreiro,___de_Dezembro de 2004

Margarida Rodrigues

-- --
-- -

Declaro que autorizo/não autorizo o(a) meu(minha)
educando(a)____ a participar na recolha de dados conduzida pela Dr.ª Margarida Rodrigues, no âmbito da sua dissertação de Doutoramento.

Data

Assinatura

Exmº(ª) Sr(ª)
Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)
____
Nº____ Turma____ 9º Ano

Sendo aluna de Doutoramento em Educação, na especialidade de Didáctica da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação, cujo tema incide na demonstração matemática na actividade matemática escolar, e sua relação com as interacções sociais. Trata-se de um tema pertinente e actual na área da Didáctica da Matemática, tal como tem vindo a ser reconhecido quer por professores quer por investigadores nacionais e internacionais.

Para esse efeito, preciso de recolher e analisar dados empíricos do trabalho dos alunos, nas aulas de Matemática. O contexto de trabalho estará centrado na actividade de investigação, uma vez que é particularmente adequada para analisar a demonstração matemática, além de ser reconhecidamente essencial à experiência matemática dos alunos. A recolha de dados será feita por intermédio da observação de aulas ao longo do ano lectivo, com a minha presença, e com o recurso aos registos áudio e vídeo. Os trabalhos dos alunos, elaborados nas aulas, serão fotocopiados (ou gravados em disquetes, no caso de serem desenvolvidos no computador), para serem objecto de análise posterior. Estão, ainda, previstas, algumas entrevistas, conduzidas por mim, e em horário extracurricular, a alguns dos alunos, com vista a um maior entendimento do trabalho realizado pelos mesmos. A entrevista será também gravada em vídeo.

Assim sendo, solicito que me autorize a proceder à recolha de dados, descrita atrás, ficando desde já garantido que não será desenvolvido qualquer tipo de experimentação. Garante-se igualmente o anonimato dos alunos, bem como a estrita confidencialidade dos dados obtidos, que apenas serão utilizados para os objectivos da investigação.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os meus cumprimentos,

Barreiro,___de_Outubro de 2005

Margarida Rodrigues

-- -

Declaro que autorizo/não autorizo o(a) meu(minha)
educando(a)____ a participar na recolha de dados conduzida pela Dr.ª Margarida Rodrigues, no âmbito da sua dissertação de Doutoramento.

Data

Assinatura

ANEXO 2

Guião das entrevistas aos alunos

- grupos de trabalho: formação dos mesmos; comparação com os dos anos anteriores e com os das outras disciplinas, se porventura existirem; o que apreciam mais e menos no trabalho de grupo, comparativamente ao trabalho individual; quem é que costumam ajudar no grupo, e são auxiliados por quem (ou pelo quê) nas aulas de Matemática

- a Matemática: quais as disciplinas preferidas; aspectos e/ou assuntos de que tivessem gostado e não gostado numa aula de Matemática (deste ano ou anterior)

- a importância da justificação e da demonstração; confronto com exemplos de validação de afirmações matemáticas e juízo fundamentado acerca de quais provam as mesmas

- resolução de uma tarefa sobre exploração com números

ANEXO 3

Escolha de argumentos pela generalidade e função

Foi pedido ao Sérgio, ao Rodrigo e à Ana que tentassem provar se a seguinte afirmação era verdadeira ou falsa.

A soma de quaisquer números pares é sempre par.

Resposta do Sérgio	*Resposta do Rodrigo*
a é um número inteiro positivo qualquer b é um número inteiro positivo qualquer $2a$ e $2b$ são dois números pares quaisquer. $2a + 2b = 2(a+b)$ $2(a+b)$ é par. *Portanto, o Sérgio disse que era verdadeira.*	2+2=4 4+2=6 2+4=6 4+4=8 2+6=8 4+6=10 *Portanto, o Rodrigo disse que era verdadeira*
Resposta da Ana Os números pares são números divisíveis por 2. Ao adicionar-se números com um factor comum, 2 neste caso, a soma vai ter o mesmo factor comum. *Portanto, a Ana disse que era verdadeira.*	

Assinala com cruzes, de acordo com as características das respostas apresentadas acima:

	Resposta		
	Sérgio	Rodrigo	Ana
mostra que a afirmação é sempre verdadeira			
mostra apenas que a afirmação é verdadeira para alguns números pares			
mostra por que é que a afirmação é verdadeira			

ANEXO 4

Tarefa explorada no final das entrevistas

Explorações com números IV

1. Como é o produto de quaisquer números pares?

2. Como é a soma de dois números ímpares?

3. Como é o produto de um número par por um número ímpar?

ANEXO 5

Guião da entrevista à professora

- formação académica; percurso e desenvolvimento profissional
- desempenho de cargos na escola
- metodologias de trabalho e seus fundamentos
- o papel da justificação e da demonstração
- apreciação global das duas turmas envolvidas no estudo
- a sua participação no estudo: referência aos dois anos lectivos

ANEXO 6

Tarefas usadas na análise de dados

ESCOLA BÁSICA 2-3 C de ÁLVARO VELHO
VAMOS INVESTIGAR - MATEMÁTICA

	Situação	Demonstração
Actividade I	Como é a soma de quaisquer números pares?	
Actividade III	Como é o produto de quaisquer 3 números inteiros positivos consecutivos?	
Actividade III	O que é que se pode dizer acerca do número que resulta quando se subtrai 1 do quadrado de um número ímpar?	

ESCOLA BÁSICA 2-3 C de ÁLVARO VELHO
VAMOS INVESTIGAR - MATEMÁTICA[78]

<table>
<tr><th>Actividade I</th><th>Demonstração</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Como é a soma de quaisquer números pares?</td><td>2 + 2 = 4
4 + 4 = 8
10 + 10 = 20
...
n número natural
n/2 é divisível por 2 então número n par
n/2 + n/2 = 2 n/2</td></tr>
<tr><td>a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2a e 2b são dois números pares quaisquer.

2a + 2b = 2(a+b)
Logo, é verdade. 2(a+b) é par</td></tr>
</table>

Novas aprendizagens:	**Número par qualquer: 2n** **Número ímpar qualquer: 2n +1**

845

[78] [78] Acetatos utilizados na aula de discussão da tarefa

<table>
<tr><th>Actividade II</th><th>Demonstração</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Como é o produto de quaisquer 3 números inteiros positivos consecutivos?</td><td>

$1\times2\times3=6$
$4\times5\times6=120$
$7\times8\times9=504$
....
$6=2\times3$

$120 = 2^3\times3\times5 =$
$= (2\times3)\times 2^2\times 5$

$504 = 2^3\times3^2\times7 =$
$= (2\times3)\times 2^2\times3\times7$

Serão todos múltiplos de 6 ?

</td></tr>
<tr><td>

n é um número inteiro positivo qualquer

$n(n+1)(n+2) = (n^2+n)(n+2) =$

$= n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n =$

$= n^3 + 3n^2 + 2n =$

$= 6\left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n\right)$

</td></tr>
</table>

Novas aprendizagens:	**Dois números consecutivos: n e (n+1)**

<table>
<tr><th>Actividade III</th><th>Demonstração</th></tr>
<tr><td rowspan="2">O que é que se pode dizer acerca do número que resulta quando se subtrai 1 do quadrado de um número ímpar?</td><td>3^2-1 = 9 -1= 8
$5^2 - 1 = 24$
$7^2 - 1 = 48$
$15^2 - 1 = 224$

$8 = 2^3$
$24 = 2^3 x3$
$48 = 2^4 \text{ x } 3 = 2^3 \text{x } 2\text{x } 3$
$224 = 2^5 \text{ x } 7 = 2^3 \text{x } 2^2 \text{x } 7$

Será que são todos números múltiplos de 8?</td></tr>
<tr><td>n é um número inteiro qualquer
$(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n+1-1 =$
$= 4\,(n^2+n) =$
$= 8\,(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n)$

OU:

$(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n+1-1 =$
$=4\,(n^2+n) =$
$=4n\,(n+1)$

Como n ou n+1 é um número par, obtemos um factor 2 adicional o que mostra que o número tem de ser múltiplo de 8.</td></tr>
</table>

Escola Básica 2/3 C De Álvaro Velho

Investigar Matemática

Bissectrizes…

Nome: ____________________________________ Nº : ______ Turma: ________Data:_______

Recordaste que:

- Ângulos suplementares são aqueles que________________________________
- A bissectriz de um ângulo____
- Para registar ângulos se devem utilizar letras maiúsculas no vértice e nos seus lados ou letras do alfabeto grego. Por exemplo: __________________________

Usa estes conhecimentos para descobrires:

Qual a relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares?

Nota: Faz esquemas dos ângulos e respectivas bissectrizes para desenvolver a tua investigação.

ESCOLA BÁSICA 2-3 C de ÁLVARO VELHO

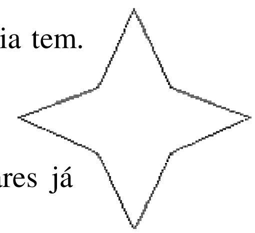
VAMOS INVESTIGAR - MATEMÁTICA

Nome: ______________________________________ Nº : __________ Turma; ____________

Os símbolos de algumas marcas de automóveis são figuras com eixos de simetria.

Colocando um espelho sobre o eixo de simetria, conseguem, a partir de uma parte da figura, obter a figura completa.

1. Observem a estrela aqui desenhada e descobre quantos eixos de simetria tem. Façam um desenho que explique o que concluíram.



2. A seguir usa a folha onde estão desenhados alguns polígonos regulares já vossos conhecidos.

a) Descubram todos os eixos de simetria de cada polígono. (Experimentem e registem).

N.º de lados do polígono regular	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	...	**n**
N.º de eixos de simetria							...	

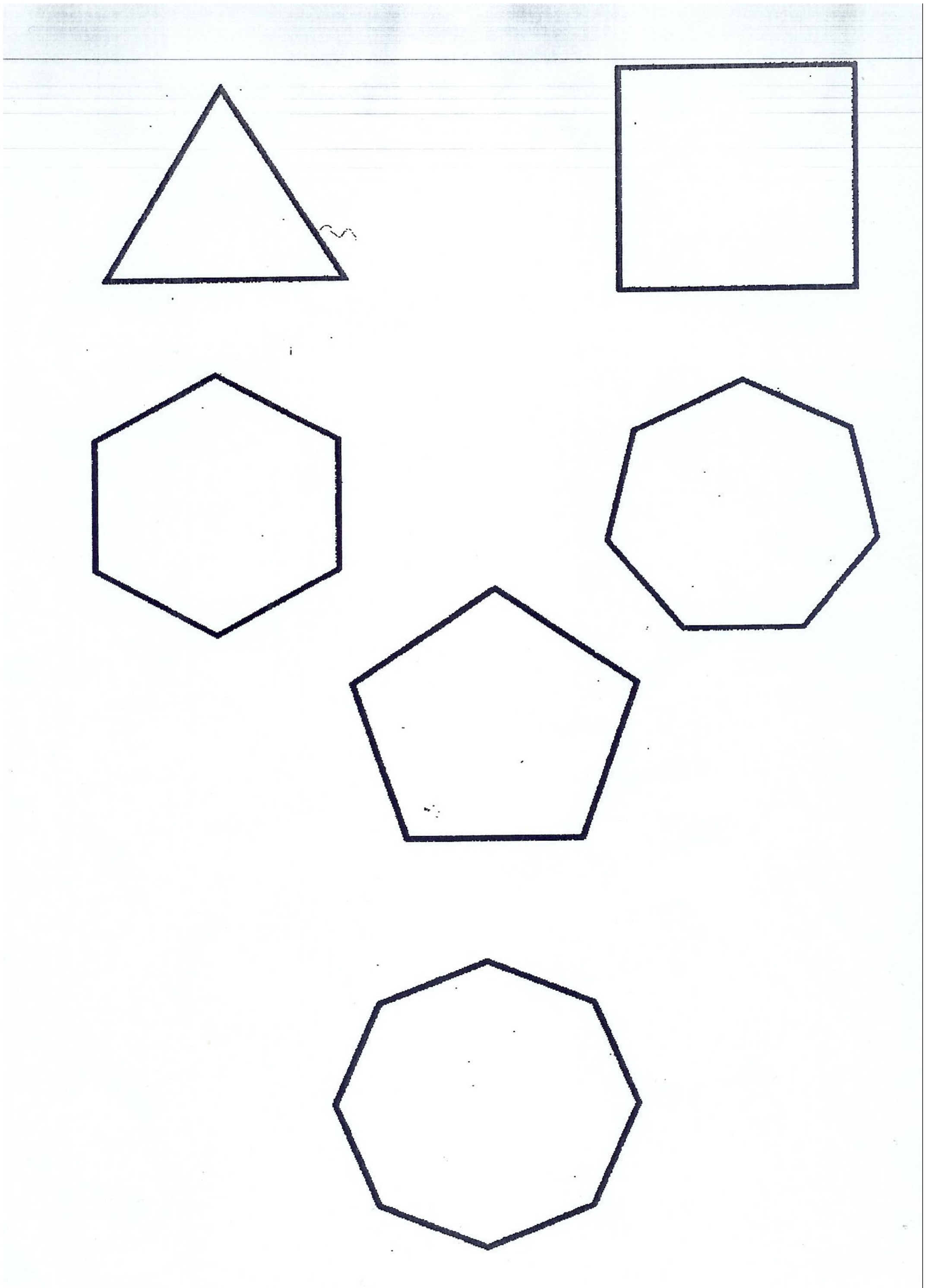
b) Observando a tabela que preencheram, a que conclusões podem chegar?

c) Em cada um dos polígonos regulares, expliquem como são os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados. (Por onde passam os eixos?)

3. Já viram na questão anterior quantos eixos de simetria possui um triângulo equilátero. Experimentem agora para outros tipos de triângulos e escrevam as vossas conclusões acerca do número de eixos de simetria de cada um deles.

4. Também existem muitos quadriláteros. Descubram, para cada um deles, quantos eixos de simetria há. Façam um esboço das vossas descobertas.

5. E um círculo, quantos eixos de simetria tem?



Escola Básica 2/3 C de Álvaro Velho

Investigar Matemática

Circunferência e Ângulos III

Nome:________________________Nº:____Turma:_____ Data:______

Construam um quadrilátero inscrito numa circunferência (todos os seus vértices pertencem à circunferência).

O que poderão dizer acerca da soma das amplitudes dos ângulos opostos desse quadrilátero?

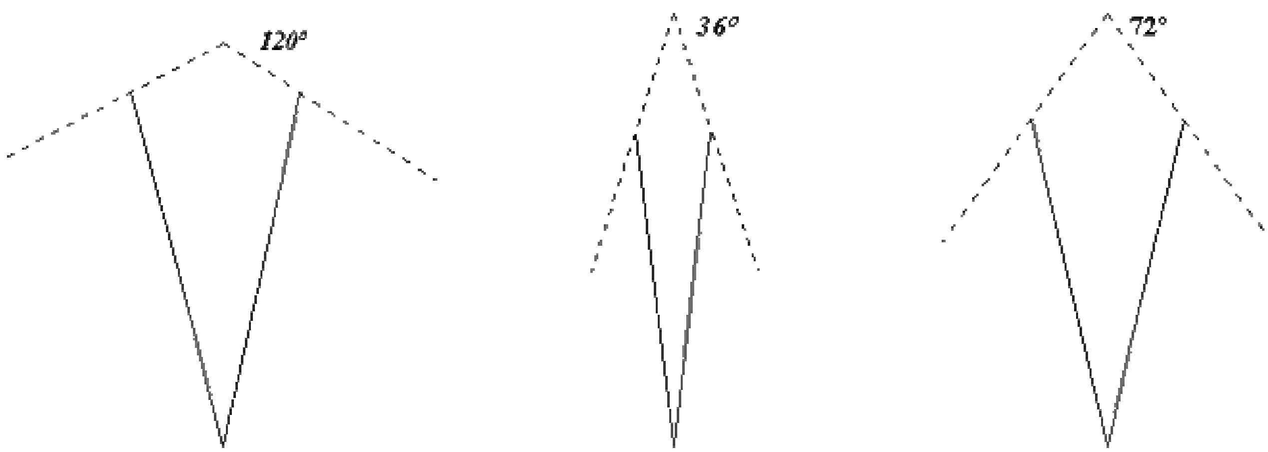
ESCOLA BÁSICA 2-3 C de ÁLVARO VELHO
VAMOS INVESTIGAR - MATEMÁTICA

Nome: ____Nº : _____ Turma; _______

Investigações com espelhos II

Com um livro de espelhos podemos obter uma sequência de várias imagens que formam uma nova figura.

Coloquem o livro de espelhos na zona a tracejado das figuras e observem as estrelas que se obtêm.



1. Quantas pontas de estrela obtêm para cada ângulo?
2. Organizem os dados que obtiveram numa tabela que indique para cada ângulo o número de pontas.
3. Que relação existe entre o ângulo formado pelos espelhos e o número de pontas de estrela? Procurem confirmar a relação que descobriram, experimentando com outros ângulos.
4. Façam agora outras explorações. Por exemplo, a partir do desenho inicial obtiveram estrelas. Como poderão obter um hexágono regular? Será possível encontrar qualquer polígono regular?
   E polígonos irregulares?

impressão e encadernação
REPRO 2000
CENTRO DE CÓPIAS
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
Tel. 21 758 55 04 Fax 21 757 76 52 e-mail: repro2000@sapo.pt