¿POR QUÉ USAR LOS SÓLIDOS COMO CONTEXTO EN LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA? ¿Y EN LA

Guillén, G.

Universidad de Valencia

Resumen

Este trabajo centra su atención en geometría espacial. Se contemplan dos grandes líneas con sus ramificaciones correspondientes. Por un lado, se muestra el origen y desarrollo de una de ellas, referida a la geometría de los sólidos, que centra su atención en la observación de procesos de enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos. Por otro lado, al considerar la representación de los sólidos y 'el problema de visualización', nos introducimos en otra línea que ha despertado gran interés en los investigadores en Educación Matemática, como muestra la revisión realizada en revistas y congresos de carácter internacional.

Abstract

This work focuses in spatial geometry. We contemplate two big lines with their corresponding ramifications. On the one hand, we show the origin and development of one of them, referred to the geometry of solids, which focuses on the observation of processes of teaching/learning of mathematical processes. On the other hand, when considering the representation of solids and 'the problem of visualization', we get into another line of research that has generated great interest among researchers in Mathematics Education, as shown in the review we have done in journals and congresses of international character.

Palabras clave: Geometría de los sólidos, procesos matemáticos, investigación en geometría espacial, visualización, representación.

Key words: Geometry of solids, mathematical processes, research in spatial geometry, visualization, representation.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM

Presentación

La geometría es un tema rico en historia que puede ser abordado desde una gran variedad de puntos de vista. En este trabajo nos acercamos a ella desde los sólidos y vamos a centrar la atención en la investigación relativa a la geometría espacial.

Contemplo dos grandes líneas con sus ramificaciones correspondientes. Una de ellas centra su atención en la observación de procesos de enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar, probar, y, la otra, se fija en la representación de los sólidos y otras formas tridimensionales y en 'el problema de visualización' al considerar su enseñanza/aprendizaje.

Como sugiere el título del trabajo, en éste podemos distinguir dos partes. En un intento de reflejar el marco teórico de mi investigación, en la primera parte, comienzo haciendo referencia a concepciones que se pueden tener sobre esta materia y su enseñanza y a continuación indico mi posición ante diferentes dicotomías que pueden presentarse relativas a la organización de los contenidos geométricos, por dónde comenzar el estudio, el tipo de contenidos que pretendemos desarrollar y/o las diferentes posibilidades que se tienen para diseñar un currículo de geometría. Con la sección siguiente pretendo mostrar la riqueza que ofrece el mundo de los sólidos como contexto para la enseñanza/aprendizaje de la geometría a nivel escolar, aproximándonos a su estudio con múltiples acercamientos, desde diferentes contextos y desde diferentes enfoques. Este análisis permite vislumbrar un amplio abanico de problemáticas que se pueden considerar como objeto de investigación en Educación Matemática.

Centrados ya en la investigación, en la segunda parte del trabajo, intento responder a las cuestiones siguientes: ¿Qué problemáticas podemos plantearnos como objeto de investigación? ¿Hacia dónde se orienta la investigación que se ha realizado? ¿Hacia dónde se orienta la investigación actual?

De esta manera, presentaré lo que ha sido el origen y desarrollo de mi línea de investigación y nos adentraremos también en las problemáticas de 'la representación' y 'la visualización'.

Acerca de creencias, concepciones y tomas de postura relativas a la geometría escolar

Hay una gran diversidad de opiniones sobre la geometría. Cabe preguntarse: ¿Qué es para nosotros la geometría? ¿Qué oportunidades se nos han ofrecido en nuestra experiencia anterior con ella?

Desde luego, un profesor que sólo haya tenido experiencias con la geometría poniendo el énfasis en el proceso deductivo, en la terminología correcta o destacando su aspecto estructural puede ser que tenga una visión muy estrecha de la geometría escolar. Puede que llegue a la conclusión de que la geometría en este nivel es una materia estéril, no interesante a la que se debe dar muy poco énfasis en el aula. Sin embargo, un profesor que tenga un punto de vista más equilibrado, en la geometría escolar puede: i) poner el énfasis en el aspecto creativo, porque la ve como una primera introducción a cómo "hacer matemáticas"; ii) considerar su aspecto lógico, centrando la atención en los razonamientos lógicos de describir, clasificar, en diferentes métodos de probar y los diferentes niveles de rigor en la prueba; iii) presentarla como una herramienta que modeliza la realidad porque conoce algunos ejemplos de cómo se aplica; y iv) dar la oportunidad de aproximarse al simbolismo geométrico, de un modo experimental y directo, a partir de problemas concretos que se simbolicen o manipulen.

Situémonos ahora en la práctica escolar y pensemos en la idea que tenemos sobre la geometría de este nivel. Posiblemente queramos evitar precisar esta concepción y lo que hagamos sea indicar distintas "ideas" que provienen de diferentes maneras de mirar: desde la materia, desde los referentes institucionales y/o desde las prácticas que se dan al enseñar/aprender la geometría escolar. Por ejemplo:

- Corresponde a un desarrollo informal de la geometría euclidiana, se presentan los elementos de ésta en un orden intuitivo.
- Aporta un conocimiento empírico de figuras y sus elementos, conocimiento que se obtiene por observación informal, física y razonamiento y que permite sacar conclusiones de esta observación.
- Conecta con el espacio en el que el niño vive y se mueve; permite organizar experiencias espaciales intuitivas del niño.
- Es una colección de procedimientos para realizar cálculos prácticos para medir, para clasificar, para predecir, para contar, etc.
- Es una herramienta para resolver problemas prácticos.
- Tiene un sistema de signos, algunos gráficos, otros simbólicos que se entrelazan con el lenguaje natural.
- Es una materia donde se hacen descripciones, clasificaciones, se expresan generalizaciones, abstracciones y permite representaciones.
- Permite desarrollar habilidades mentales como la habilidad espacial, la capacidad de razonar hipotética y deductivamente, etc.
- Permite la internalización de las propiedades de acciones que se realizan con los objetos reales.
- Tiene unos contenidos que se muestran en las diferentes unidades didácticas a través de las introducciones y actividades propuestas por los libros de texto para cada uno de los niveles de enseñanza correspondientes.

La lista anterior, que no es exhaustiva, sí que ilustra lo que quiero destacar. Si la geometría escolar se ve como una colección de hechos establecidos que se tienen que aprender, marcada por los libros de texto, o si se considera como un desarrollo informal de la geometría euclidiana, entonces su enseñanza se desarrollará de muy diferente manera a si se concibe como medio para organizar las experiencias espaciales del estudiante y/o como medio para modelar la realidad.

Una concepción de la geometría y su enseñanza. Tomando postura

En esta sección ya me sitúo en una concepción de la geometría y su enseñanza que ha fundamentado teóricamente Freudenthal (1971, 1973)[1]. Con los siete puntos que enumero a continuación doy cuenta de esta concepción y de las posiciones que adoptamos ante diferentes dicotomías que pueden presentarse, que tienen que ver con el orden de aparición de los contenidos (plano/espacio), con la organización de éstos (axiomática/organización local) y con el tipo de razonamientos que se vehiculan (intuitivo-experimental/deductivo, pensamiento lógico inductivo/lógica formal). Asimismo indico aspectos de la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos que he contemplado en el desarrollo de mi trabajo y que se verán reflejados en la sección siguiente.

1. Considerando que los estudiantes necesitan fundamentalmente una comprensión geométrica del espacio, concebimos la geometría como ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico.

La geometría en los niveles elementales la entendemos como un sencillo nivel de actividad para preparar a los estudiantes para niveles superiores. Como ha expresado Freudenthal (1973, p. 408), el material que se aporta a los estudiantes para desarrollar las clases pretende que éstos actúen con lógica, pensando. Las manos y el cerebro trabajan conjuntamente para responder la cuestión de cómo está hecha una cosa concreta. Si en ese nivel se dan definiciones, éstas serán genéticas, esto es, se expresa cómo está hecha la cosa que se define. Si después esta definición se reformula de un modo más formal, la nueva definición deberá conectar con la anterior. El último desarrollo lógico deberá quedar grabado en los estudiantes con el uso del material concreto.

2. Esta concepción de la geometría conlleva que su enseñanza comience por el espacio. Numerosos autores han manifestado la conveniencia de ello. Bishop (1992, p. 29) señala como necesario extender las ideas espaciales que tienen los niños cuando llegan a la escuela, que provienen de su propio mundo espacial, y lograr introducir las habilidades básicas de matematización, clasificación, descrip-

---

[1] Dado que el legado de Freudenthal ha sido y sigue siendo un referente fundamental en mi investigación, voy a mencionarlo en repetidas ocasiones en este trabajo.

ción y relación. Lang & Ruane (1981) al plantear el tratamiento de la geometría en la escuela inglesa como ciencia experimental señalan también como consecuencia necesaria el comienzo por el espacio.

Freudenthal ha defendido en múltiples ocasiones la iniciación en la geometría a partir de los sólidos. En sus trabajos se encuentran diferentes razones que lo explican; una de ellas proviene de la concepción que se tiene de la enseñanza de la geometría en el nivel elemental. Otra se apoya en lo que este autor denomina "el encaje"; el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras; en el espacio hay multitud de relaciones; en el plano el camino hacia el análisis lógico es más corto; el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas. Una tercera la encontramos al considerar los sólidos como una de las aproximaciones para las figuras planas o las líneas. En el análisis fenomenológico de "planos" y "rectas" que se expone en Freudenthal (1983, pp. 297-313) los objetos del entorno y los sólidos figuran como contextos a partir de los que se pueden constituir objetos mentales iniciales sobre estos conceptos y sus relaciones (igualdad, paralelismo, perpendicularidad).

Freudenthal llama también la atención sobre las consecuencias que tiene en los estudiantes el haberles ejercitado sólo en la geometría plana:

> "No es de extrañar que los estudiantes que trabajan satisfactoriamente en la geometría plana, fallen en la espacial. Su imaginación espacial ha ido pereciendo por la demasiada ejercitación con la geometría plana" (Freudenthal, 1973, p. 408).

3. En mi primer trabajo sobre geometría de los sólidos realizado conjuntamente con Luis Puig (Puig y Guillén, 1983) ya aclarábamos nuestra posición respecto de las relaciones que existen entre los contenidos geométricos; esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza pretendemos desarrollar como objetivo de primer orden. Siguiendo a Fielker (1979), para nosotros razonamientos lógicos no significa lógica formal sino procesos matemáticos como analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar[2].

Esta toma de postura se muestra claramente, entre otras cosas, en la forma como se plantean definiciones, clasificaciones y pruebas. Hay autores que la expresan claramente:

Castelnuovo (1963), recogiendo las ideas de Pestolazzi, señala que:

> "las descripciones deben preceder a las definiciones. Si cualquier cosa no está clara para mi, esto no significa que yo no pueda definirla, sino que sólo puedo describirla; puedo decir con precisión cómo está hecha, pero no qué cosa es".

---

[2] Con el término *procesos* nos referimos a *analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer;* al hablar de *procesos matemáticos* nos fijamos "en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática" (Puig, 1996, pag. 15).

Freudenthal (1973) insiste en ello:

> "Cómo definir una cosa antes de saber que debes definirla? (…) Más aún en las matemáticas donde las definiciones están relacionadas con cadenas deductivas. ¿Cómo poder ver esta relación hasta que no se vea la cadena en la que se enlaza tal relación? (…) No se pueden dar definiciones hasta que uno no se encuentra familiarizado con todos los objetos de su clase. Muchos niños saben describir figuras o sólidos pero no saben dar una definición de ellos. Sí, lo saben, pueden descubrir sus propiedades. Esta colección de propiedades requiere una organización. En este punto comienza la deductividad. Esto nos explica por qué una definición es compleja y por qué un cuadrado es un rombo y un rombo un paralelogramo" (pp. 417-418).

Polya (1954) expone de forma contundente la concepción sobre las demostraciones:

> "Las matemáticas han sido consideradas como una ciencia demostrativa. Sin embargo, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante esta ciencia se parece en su desarrollo a cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba, antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero éste es a su vez descubierto mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición".

4. En trabajos previos, realizados con Luis Puig (Guillén y Puig, 2001, 2006), subrayábamos como características fundamentales de nuestro trabajo la organización local frente a, por un lado, la ausencia de toda organización y, por otro, la organización global o axiomática, y el comienzo por las tres dimensiones para ir desde ellas a menos dimensiones. Hemos expresado que nuestro interés por el mundo de los poliedros deriva de que es un mundo de tres dimensiones que admite con flexibilidad organizaciones locales y los objetos de dos y una están presentes de forma perspicua. Esto es, como veremos a continuación, el mundo de los poliedros ofrece diversas posibilidades para desarrollar un trabajo intuitivo-experimental que permite desarrollar el pensamiento lógico inductivo. Se comienza con un estudio intuitivo de formas (el estudio de las figuras planas está inmerso en el de los sólidos) donde la estructura deductiva aparece muy poco. Paulatinamente esta se refuerza pero nunca hasta el grado de llegar a una organización global. Nos limitamos a organizaciones locales, lo que significa que las proposiciones no evidentes se reducen mediante razonamientos a otras que se suponen evidentes pero que nunca se elevan a la categoría de axiomas.

5. Nuestra concepción de la geometría también conlleva una posición respecto del énfasis que se da a la geometría que se aprende/se ha de enseñar en los diferentes niveles cognitivos y respecto al punto de partida del desarrollo del currículo; esto es, si se comienza con ¿cómo enseñar las matemáticas? o con ¿cómo aprende el niño las matemáticas?

Comparto las ideas que expresó Freudenthal en las III Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Zaragoza (Freudenthal, 1984), en su ponencia:

"En todos los niveles: ¡geometría!".

Con el título quería acentuar no sólo que se debe enseñar la geometría en todos los niveles, sino más bien, que en cada nivel del desarrollo cognitivo -escolar o no- hay una geometría que se aprende por sí misma, siempre que se le de la oportunidad de desplegarse, siendo un componente esencial de este desarrollo. Al expresar "en todos los niveles geometría" quería centrar la atención también en que muchos temas pueden entenderse por alumnos de diferentes niveles y a niveles diferentes.

En este trabajo presentó ricos ejemplos de lo que él llamaba "historias simples", que encontramos también en todos sus trabajos, que correspondían a observaciones de procesos de aprendizaje en la actividad libre del niño, e hizo notar cómo a partir de ellas podemos averiguar 'cosas' que ya se saben y 'cosas' que deben enseñarse. Aclaró que con las observaciones que hacía no pretendía concluir la edad o manera de adquirirse una idea u otra. Los ejemplos estaban encaminados a mostrar que se necesitan procesos de aprendizaje para cosas para las que no esperaríamos que se necesitaran tales procesos. Según este autor, en estas "historias simples" había encontrado su fuente más fecunda para ello[3].

6. Cabe destacar también la importancia que damos a los múltiples acercamientos para constituir objetos mentales geométricos relativos a la geometría de los sólidos. Como señala Freudenthal:

> En repetidas ocasiones he enfatizado cómo los niños a una edad joven y en muchos casos se enfrentan con cosas que sugieren objetos mentales geométricos. Como productos ellos son el resultado de producción e invitan a reproducción, ocupación, manipulación, transporte – acciones concretas que pueden mentalmente ser repetidas con los correspondientes objetos mentales, y este elemento mental es el único que cuenta en el contexto geométrico. Nosotros estamos enseguida satisfechos si hemos introducido un objeto mental concretamente de una forma. Por otra parte nosotros pedimos al niño que sea receptivo para una multiplicidad de acercamientos si en la situación didáctica preferimos estrechar nuestro punto de vista.

[3] En Freudenthal (1983) llama la atención sobre ellas y cuestiona: "¿Por qué la gente no busca tales cosas simples, que merecen tanto la pena ser aprendidas? Porque la mitad de ellos no se preocupan de las cosas que piensan que son tonterías, mientras que los que se preocupan temen parecer tontos si lo muestran. Weeding & Sowing está lleno de historias simples como esas. Las he contado en conferencias. No me preocupa que una gran parte del público interprete mi discurso como senil, con tal de que con mi ejemplo una pequeña parte del público se anime a hacer lo mismo que yo -esto, claro está, requiere coraje. (Freudenthal, 1983, p. 30).

> La característica didáctica de la fenomenología presente es la multiplicidad de los acercamientos concretos. Entre los numerosos términos que describen las acciones concretas ninguno es redundante; por lo contrario, estoy seguro que no hay suficientes. (Freudenthal, 1983, p. 296-297)

Acentúo también el papel de los contextos en estos enfoques diferentes. El significado que le doy al término *contexto* lo voy a aclarar desde el trabajo de Puig y Cerdán (1988) quienes dedican un apartado para explicar y diferenciar los distintos usos que hacen los currículos de este término tan polisémico. Distinguen:

i) para la producción de un sentido determinado,

ii) como modelo para la construcción de conceptos, y

iii) para organizar el material y la programación de las actividades.

En mi línea de investigación lo usamos con el primer uso mencionado. Los contextos se utilizan para producir significados. Se es consciente de la restricción que el uso de un contexto trae consigo en el campo semántico, y es por ello que no se pretende construir el concepto, sino ampliar este campo semántico con la finalidad de que el concepto se pueda utilizar para dotarse de poder sobre otros fenómenos. Por ejemplo, en Guillén y Puig (2006) se tratan los procesos matemáticos de describir, clasificar… utilizando como contexto las relaciones de inscripción y dualidad de los poliedros regulares. Al ser conscientes de las limitaciones semánticas que conlleva el uso de un solo contexto para la enseñanza/aprendizaje de estos procesos matemáticos, en López y Guillén (2009, 2010) consideramos la *exploración con espejos* como un nuevo contexto para ampliar este campo semántico.

En lo que sigue puede notarse también que los contenidos geométricos se tratan desde contextos; en ellos se plantean los problemas que están al servicio de un esquema de matematización progresiva.

Tal y como señala Treffers (1987), la matematización implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático, proceso que se entiende por *matematización horizontal*. Una vez traducido el problema a una expresión matemática, se puede continuar procesando dentro del sistema matemático, proceso que se entiende como *matematización vertical*. Así pues, la *Matematización horizontal* es la fase en la que interviene la aproximación empírica, la observación, la experimentación, el razonamiento inductivo y que se concreta en el momento en que se ataca un problema. La *Matematización vertical*, agrupa las actividades que llevan a la solución de un problema: resolución, generalización, formalización o revisión. Se está refiriendo al procesamiento matemático, dentro del sistema matemático, y al nivel alcanzado en la estructuración del problema en consideración (Treffers, 1987, p. 247).

7. Por último, voy a hacer referencia al trabajo de Vollrath (1976). Como indicamos ya hace tiempo (Puig y Guillén, 1983), este trabajo nos introdujo en distin-

tas posibilidades de diseño de un currículo de geometría que aún en la actualidad sigue siendo un referente importante para ello. Los materiales elaborados en trabajos previos se han situado básicamente en el punto de vista que considera la geometría *como un inventario de conceptos y teoremas para construir teorías* incorporando elementos de otros dos puntos de vista: *la geometría como un inventario de formas* y *la geometría como un inventario de teorías del espacio*.

Considerar la geometría *como un inventario de conceptos y teoremas para construir teorías* supone que el énfasis se pone en el aspecto creativo. Significa que organizamos el trabajo desde el punto de vista de los procesos matemáticos. Actividades importantes en esta dirección son: la definición de conceptos, la búsqueda de los conceptos primitivos, la formulación de teoremas, pruebas y análisis de pruebas y la comparación de definiciones diferentes de un concepto. Se organiza localmente a la manera de Freudenthal.

Ver la geometría *como un inventario de formas*, esto es, el punto de vista de las artes plásticas, supone que la secuencia de actividades se organicen al centrarse en la observación y análisis de formas que se presentan en la naturaleza (cristales,…), en la arquitectura (simetría de las iglesias góticas...), en el arte (ornamentos), etc. Actividades importantes en esta dirección son: la descripción, análisis y generación de formas; se contemplan también discusiones históricas acerca de la sección áurea, el dibujo en perspectiva, etc.

Y mirar la geometría como *un inventario de teorías del espacio* supone que el énfasis se pone en los objetos geométricos como modelos del espacio físico. La secuencia de actividades está centrada en la matematización del entorno de los estudiantes. Se contempla el estudio de los objetos geométricos y sus interrelaciones y la ejecución de experimentos con sólidos –que da a los alumnos experiencia con formas, superficies y sólidos.

Los sólidos constituyen un contexto muy rico

En esta sección vamos a acercarnos al estudio de la geometría desde diferentes contextos en los que se pueden presentar los sólidos y desde diferentes enfoques. En todos ellos se da prioridad al aspecto creativo de la geometría en vez de al receptivo. Lo voy a hacer:

i) centrando la atención en la descripción, análisis, generación y representación de formas que se presentan en el entorno cotidiano;

ii) considerando como contexto los diferentes procedimientos de generar sólidos y las transformaciones que realizamos en ellos, en un intento de tratar los contenidos curriculares correspondientes (conceptos, procesos matemáticos de describir, clasificar, conjeturar, particularizar y generalizar, establecimiento de relaciones,…;

iii) explorando una situación, para abordar, por un lado, los contenidos curriculares relativos a la enseñanza de conceptos y de procesos matemáticos, por otro, la resolución de problemas que se refieren a una problemática determinada centrando la atención en estrategias de resolución;

iv) matematizando el entorno de los estudiantes aplicando la geometría para resolver algunos problemas de física, tecnología, comunicación visual, …

Dado el tiempo que tengo para esta ponencia, sólo voy a considerar algunos acercamientos matizando con algún ejemplo parte de la actividad matemática que se puede desarrollar con ellos.

Los objetos están colocados en un contexto topográfico

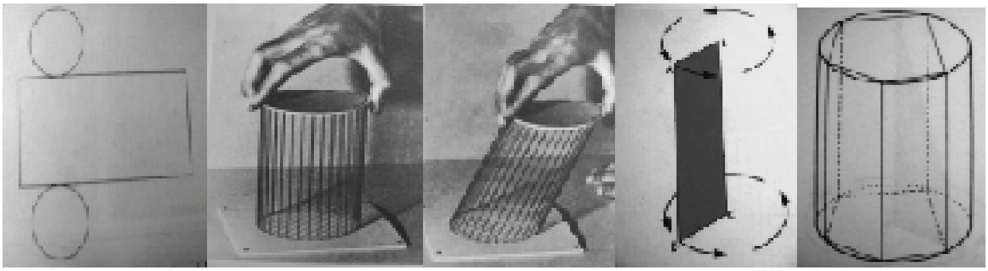
Topografía significa literalmente "descripción de lugar". El contexto topográfico se refiere a la captura de espacio (o del espacio) como una coexistencia mental de los lugares, es decir: de lugares de objetos, de lugares de objetos y los perceptores, de lugares de los perceptores, en sus relaciones mutuas físicas y mentales. En relación con este contexto remito a la exploración fenomenología didáctica que realiza Freudenthal (1983) en el capítulo 10 para hacer consciente el contexto topográfico como un medio didáctico.

Además de la problemática que se refiere a los medios de expresión en un contexto topográfico, centra la atención en diferentes polaridades (arriba-abajo, de un lado a otro, desde dentro, hacia fuera, enfrente de, delante de, detrás de, izquierda-derecha, aquí-ahí), en las conexiones que se consideran para estructurar, en los puntos de vista desde los que se mira, esto es, lugares donde uno puede estar; la reciprocidad de cambio con respecto al lugar del objeto y el punto de vista desde el que se mira, a los obstáculos (para el oído y el ojo, para caminar y actuar) así como a la vecindad al considerar línea, plano y el espacio dotados con la estructura combinatoria. En Coriat (2010) se pueden ver algunos ejemplos de este tipo de cuestiones, orientadas a maestros de educación infantil.

Los sólidos invitan a reproducción

Las familias de sólidos implicadas en contenidos curriculares son los cuerpos de revolución, los prismas y pirámides y los poliedros regulares. Como ejemplo, para mostrar parte de la actividad que podemos desarrollar usando los diferentes procedimientos de generar sólidos como contexto, voy a utilizar la familia de los cilindros y me fijaré también en la transformación que permite obtener prismas rectos a partir de ellos. Similarmente uno puede analizar los conos (y los conos truncados) y su relación con las pirámides (pirámides truncadas) así como las relaciones entre estas familias.

Representaciones físicas de los cilindros se pueden tener a partir de objetos del entorno o generándolas a partir de su desarrollo plano, modelando ejemplos con plastilina, superponiendo círculos iguales, a partir de dos discos circulares y gomitas, girando un rectángulo alrededor de uno de sus lados (véase la figura 1). Cada uno de estos procedimientos permite despegar actividad matemática si se orienta en el proceso con cuestiones adecuadas. Ahora voy a considerar sólo como ejemplo "modelar con plastilina".



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 1

Al generar representaciones de esta manera se pueden plantear cuestiones como:

¿Cómo hacer un corte en el cilindro para obtener un rectángulo como sección? ¿Qué ocurre si seguimos haciendo cortes paralelos al que proporciona la sección rectangular? ¿Qué forma tienen las secciones al cortar paralelamente a las bases (los círculos)? ¿Qué forma tienen las secciones cuando los cortes no son paralelos a las bases?

Para llegar a un prisma, uno remodela la superficie lateral del cilindro: cortando perpendicularmente al círculo, para conseguir un prisma recto (véase la figura 1d). Esta construcción implica una descripción conceptual: base congruente y polígonos arriba y abajo conectados por paredes rectangulares. Preguntas que pueden plantearse son:

¿Cómo se pueden obtener algunos prismas rectos a partir de los cilindros? ¿Qué analogías y diferencias encontramos entre los prismas obtenidos y el cilindro? ¿Pueden obtenerse prismas oblicuos a partir de cilindros oblicuos? ¿Cómo describes el proceso? ¿Analogías y diferencias entre los sólidos de partida y los obtenidos? ¿Y entre los cilindros/prismas rectos y los cilindros/prismas oblicuos?

Apilar cilindros y/o prismas rectos de la misma base o serrar paralelo a las bases produce nuevos prismas. Estos cortes transversales paralelos son círculos y/o polígonos congruentes relacionados cada uno por traslaciones. Una relación que lleva a una nueva definición de prisma y/o cilindro: en los prismas/cilindros rectos el polígono/círculo se desplaza perpendicularmente a su propio plano. En una etapa posterior este análisis conceptual lleva a la definición del prisma/cilindro como el producto cartesiano de un polígono/círculo plano y un segmento de línea, o incluso una línea infinita. En un nivel superior cabe plantearse cómo se puede aprovechar esta idea del cilindro/prisma para hallar su volumen.

En el cilindro todo corte que hagamos que pase por el eje (plano que trazamos conteniendo al eje) divide a éste en dos mitades de las que cualquiera de ellas es la imagen reflejada de la otra. Estos cortes pueden funcionar como un espejo: lo que queda a un lado del corte es lo que reflejaría el espejo- corte de lo que queda a la otra parte. Cabe ahora cuestionarse: ¿Ocurre lo mismo en los prismas rectos? ¿Y en los cilindros/prismas oblicuos? ¿Qué podemos decir al respecto para algunas familias de prismas?

La construcción de prismas y pirámides

Los prismas y pirámides también se pueden construir con diferentes procedimientos. Y también se pueden introducir a partir de objetos del entorno y desde la papiroflexia. La actividad que se puede desarrollar a partir de estas familias se puede relacionar con la manera de conducirnos en los cilindros.

Aquí vamos a centrar la atención en sus características numéricas relativas al número de elementos para mostrar, con un ejemplo, que hay una gran variedad de tópicos geométricos que pueden entenderse por alumnos de diferentes niveles y a niveles diferentes.

En otro trabajo (Guillén, 2004) ya he explicado que los modelos de ejemplos concretos de prismas pueden utilizarse para enseñar a contar de manera estructurada su número de caras, vértices, aristas y otros elementos de los poliedros (ángulos de las caras, ángulos diedros, diagonales de las caras, diagonales del espacio).

He remarcado también que registrar en una tabla los datos obtenidos con esa manera de contar, y extenderla a un prisma imaginado del que no se ha visto previamente el modelo (por ejemplo, de un prisma cuyas bases tienen 20 lados) facilita expresar a nivel verbal y/o simbólico el número de elementos para un prisma n-agonal (sus bases tienen n lados).

Así, se puede llegar a establecer que el número de caras de un prisma n-agonal viene dado por n+2, siendo n el número de lados de las bases.

Desde luego hay un gran recorrido desde contar los elementos en un modelo de prisma concreto hasta poder “contarlos” en un prisma general intentando establecer una expresión que sea válida para todos ellos. Expresar la generalización a nivel simbólico todavía conlleva más dificultad.

Cabe destacar también cómo diferentes estrategias de construcción que centran la atención en diferentes elementos, pueden llevar a utilizar diferentes estrategias para hallar los elementos. Por ejemplo, si se construyen los prismas fijándose en las dos bases y las aristas que las juntan, el número de aristas de un prisma n-agonal se puede obtener como: A=n+n+n=3n. Mientras que si uno se fija en los vértices de cada una de las dos bases y observa que en todos ellos confluyen dos aristas de la base y una lateral, su número de aristas se puede calcular como: A=(3n+3n)/2=3n. Se divide entre dos porque cada arista se cuenta desde dos vértices.

El número de aristas de un prisma se puede determinar también sin tener como referencia la construcción, apoyándose en la fuerza de los razonamientos deductivos y en el conocimiento que se tienen de las propiedades de los prismas: Un prisma n-agonal tiene sus vértices de orden 3 y tienen 2*n*vértices. Como cada arista corresponde a dos vértices: A=3(2n)/2=3n.

Fijémonos en esta prueba: ¿Qué es lo que se supone? Que un prisma n-agonal tiene sus vértices de orden 3 -luego hay poliedros en los que no todos los vértices son de orden 3. Que un prisma n-agonal tiene 2n vértices -lo cual es cierto para todo prisma. Estas suposiciones están lógicamente encadenadas para demostrar la proposición enunciada.

No es necesario aclarar cómo diferentes estrategias requieren de razonamientos de diferente nivel.

El problema resulta también interesante cuando se trata en nuevas familias. Por ejemplo, se puede determinar el número de aristas de una pirámide a partir del número de aristas del prisma correspondiente, y viceversa, al fijarse en la transformación que convierte uno en otro. Esto es: Si un prisma n-agonal tiene 3n aristas (n en una base, n en la otra y n laterales), la pirámide n-agonal sólo tiene 2n aristas porque las n de una base del prisma desaparecen en la transformación (se convierten en un vértice).

La adaptación de la estrategia deductiva de los prismas a las pirámides requiere tener en cuenta la distinción de los dos tipos de vértices que tiene una pirámide y el orden de los mismos: Las pirámides tienen n vértices de orden 3 y 1 vértice de orden n por lo que A=(3n+1n)/2

Los sólidos invitan a la manipulación: juntando, descomponiendo, recomponiendo

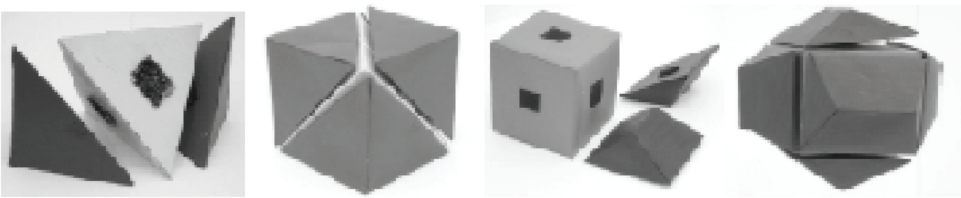
Ya hemos dicho que, debido a la gran diversidad, los poliedros ofrecen un contexto rico. Los poliedros regulares son especialmente interesantes. En otros trabajos (véase Guillén y Puig, 2006) ya hemos dado cuenta de cómo generar sólidos juntando sólidos, trabajar con determinados *puzzles y truncamientos* o intentar convertir en rígidas algunas estructuras de sólidos sencillos permite explorar relaciones entre sólidos que remarcan los milagros del “encaje” en el estudio de los sólidos y hemos enfatizado que estas relaciones se pueden expresar en diferentes niveles (Guillén, 2004).

Por ejemplo, se pueden trabajar, entre otras, las composiciones y descomposiciones que se muestran en la figura 2. Así, podremos enunciar relaciones como: 6 pirámides iguales forman un cubo y al despegarlas sobre las caras del cubo forman un rombododecaedro; el cubo se puede descomponer en tres (o seis) pirámides iguales; un octaedro (tetraedro) y 8 tetraedros (4 tetraedros) forman una estrella octangular, un tetraedro y 4 pirámides forman un cubo; un cubo y 6 casquetes iguales forman un dodecaedro; el tetraedro se puede inscribir en un cubo;…

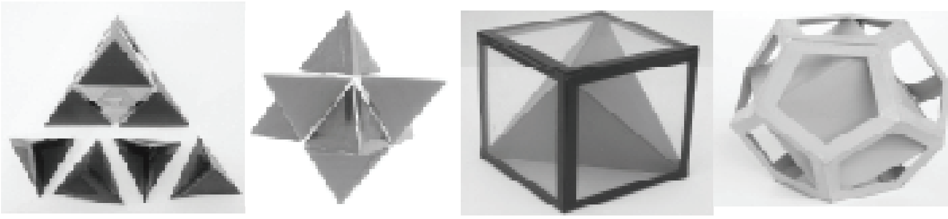
Estas observaciones pueden llevarnos a conjeturar otras inscripciones entre poliedros regulares (por ejemplo, el cubo podemos inscribirlo en el dodecaedro) y a plantearnos nuevas cuestiones: ¿Podremos inscribir el tetraedro en el dodecaedro? ¿Y el tetraedro en el octaedro?

Determinar las piezas de los puzzles y los modelos de pares de poliedros regulares inscrito uno en otro es también una actividad interesante.

(a) (b) (c)



(d) (e)

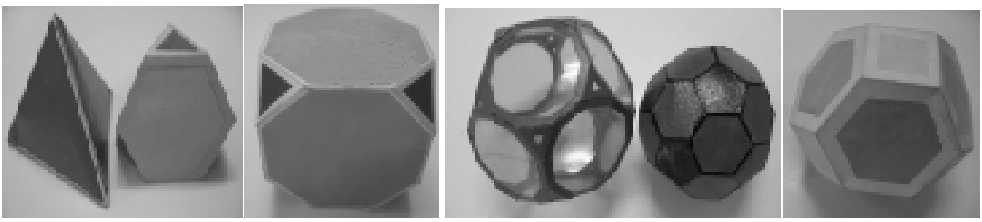


(f) (g) (h)

FIGURA 2

Transformando

En este punto nos vamos a fijar en los sólidos arquimedianos que se obtienen truncando las esquinas de los poliedros regulares. En la figura 3 mostramos los 5 que se han obtenido truncando las esquinas de manera que por cada cara del poliedro de partida se obtiene un polígono regular con doble número de lados. Uno de ellos es conocido; corresponde a la forma utilizada para algunos balones de fútbol.



(a) (b) (c) (d) (e)

FIGURA 3

Planteando tareas de descripción y de buscar analogías y diferencias los estudiantes pueden observar que se diferencian unos de otros en el número de caras, vértices y aristas y el tipo de caras que los forman. Lo que tienen todos ellos en común es que están formados por caras de dos clases, que son polígonos regulares y en todos sus vértices se juntan 3 caras. Además, las caras que tienen menor número de lados están bordeadas por caras de la otra clase y las que tienen mayor número de lados están bordeadas alternativamente por caras de ambas clases. También hay otros.

En relación con este punto y con el anterior remitimos a: *http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/ ~descubrirymat*, siguiendo el itinerario: *para reflexionar cómo se aprende- qué relaciones se establecen*. En diferentes opciones se muestra la actividad que puede desarrollarse cuando se juntan varios sólidos, o descomponen poliedros regulares, para obtener otras formas y cuando se truncan las esquinas de los poliedros regulares convexos para generar poliedros arquimedianos. En todos los casos se centra la atención en las relaciones que hay entre los sólidos implicados o entre sus elementos.

Los sólidos invitan a la reproducción en el plano: dibujándolos, fotografiándolos, con desarrollos planos

Bishop (1992, p. 34) llama la atención sobre los obstáculos que se encuentran para representar las ideas geométricas dado que existe un vocabulario visual muy complejo, con muchas convenciones y símbolos que deben comprender quienes aprenden, si se espera que les den sentido a las figuras geométricas. Usando las etiquetas 'objetos' (espacio real a grande y pequeña escala), 'figuras' (diagramas, fotografías) y símbolos (palabras, letras y números también), este autor subraya la necesidad que de que quienes aprenden practiquen con todas estas clases de representaciones y con las 'traducciones' de una a otra.

Propone 'el dibujo' como la última de una serie de actividades de representación, posterior a la construcción con diferentes procedimientos, y sugiere que se explore en dos direcciones: la primera tiene que ver con mapas y el diseño de ellos y la otra con las fotografías y el uso de la cámara fotográfica de manera general.

Para explorar en la segunda dirección, Bishop (op. cit) remite a los materiales del IOWO (1978) donde explotan el valor de la fotografía como una representación intermedia entre la realidad y el dibujo de ella. Freudenthal (1983, pp. 307-308) también hace referencia a este material y enuncia algunos ejemplos de cuestiones fundamentales y estimulantes.

Tomándolas como referente, hemos diseñado algunas que se refieren a los sólidos y que centran la atención en:

- i) el número de caras, vértices y/o aristas que pueden verse simultáneamente y en la dependencia o no de la respuesta del lugar desde dónde se mira,
- ii) la fotografía que se obtiene cuando se hace la foto de un sólido desde una determinada posición,
- iii) la posición del sólido y/o de la cámara para obtener la mejor foto del mismo,
- iv) la forma de las caras en el sólido y en la fotografía, v) la ordenación de fotos de un sólido y/o varios realizadas cambiando la posición de la cámara.

A continuación listamos algunas:

¿Cuántas caras de un cubo se pueden ver simultáneamente? ¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas? ¿Se puede explicar la respuesta desde las propiedades del cubo? ¿Las respuestas a las preguntas anteriores dependen de cómo se coloque el cubo? ¿Qué respuestas damos a las preguntas anteriores para cualquier otro poliedro regular?

¿Qué se ve cuando 'este sólido/estos sólidos' lo/s colocamos 'de esta manera' y permanecemos en un sitio fijo? ¿En qué punto nos tenemos que colocar para ver esto o aquello? ¿Cómo se mueve un objeto con respecto a otro, si nos movemos de esta forma? ¿Dónde estaba situado el fotógrafo para hacer esta foto? ¿Estaba más cerca o más lejos cuando tomó estas otras fotos? ¿Estaba más a la derecha o a la izquierda al tomar éstas? ¿Hizo la foto desde arriba, desde abajo, desde el frente, o estaba detrás del sólido? ¿Dónde deberíamos habernos puesto para conseguir una foto determinada?

¿De qué lado se ha tomado esta fotografía de los bloques de edificios (cubos apilados) que se han construido previamente? ¿Y esta otra? ¿Puede haber más cubos detrás de éste? ¿Cómo debería parecer desde atrás, desde la derecha, desde la izquierda?

¿Desde dónde puedes ver mejor el cubo, octaedro y dodecaedro en esta situación conjunta?

¿Dónde estaba el avión desde el que se hizo esta fotografía? ¿En qué dirección volaba?

Estas cuestiones nos introducen en diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos (vistas desde distintas posiciones y dibujo en perspectiva) que pueden requerir atención en la enseñanza.

Juntar cubos no sólo permite simular la construcción de edificios desde los que tratar las diferentes 'vistas' de ellos. Diferentes investigadores (p. e. Gaulin, 1985; Ben Chaim, Lappan, & Houang, 1989) han utilizado actividades en las que se pide a los niños que se construyan formas juntando cubos y después se explique la forma construida a un amigo ausente para que éste pueda construirla y/o reconocerla y tareas en las que se han de construir las formas que corresponden a determinadas vistas ortogonales codificadas.

Las respuestas de los niños les han llevado a concluir que éstos tienen gran seguridad para "comunicarse" sus formas espaciales; cuando se les estimula a ello, intentan y en ocasiones inventan muchas formas de representación que no han aprendido en la escuela. Éstas incluyen descripciones verbales, dibujos de diferentes vistas planas del modelo, intentos de dibujos en perspectiva, descripciones por pisos, vistas ortogonales codificadas y estrategias mixtas. Se pueden aprovechar las representaciones espontáneas de los estudiantes para introducirlos en diferentes tipos de representación de los sólidos y/o para centrar la atención en propiedades de éstos.

Otra manera de conseguir apretar el espacio sobre el plano es mediante los desarrollos planos. Éstos se obtienen desdoblando planos; cuando se realiza sucesivamente conduce a los desarrollos de poliedros, los cuales pueden ser reconstruidos con ellos. Las líneas más cortas de un poliedro son reconocibles en el desarrollo como las más cortas, esto es, líneas rectas y como tales pueden reconstruirse en los poliedros mismos. La actividad matemática que se puede despegar considerando los desarrollos como contexto es también interesante. En Guillén (1991) pueden consultarse actividades que lo muestran.

Rayos de luz: Los sólidos y sus sombras

De nuevo remito a Freudenthal (1983, pp. 310-311), donde realiza un análisis de los "Rayos de luz"[4] y el principio de la sombra con sus consecuencias y propone cuestiones estimulantes que indico a continuación. Según este autor, éstas son tan significativas para los estudiantes de 18 años como para los de 8 años; son trozos significativos de geometría incluso para los adultos, que muestran la enseñanza/aprendizaje de la geometría como una exploración- reflexión sobre la realidad en la que vivimos:

> Las sombras consiguen llegar más lejos si el sol se pone o los objetos están más lejos de la lámpara de la calle - ¿cuál es el elemento común en estos fenómenos?,
>
> la sombra elíptica de un círculo, la imagen perspectiva de un círculo, el truncamiento de un cono - ¿cuál es el elemento común?,
>
> la imagen solar de un agujero en la pared opuesta, la huella de polvo en un rayo de sol, los círculos de luz del sol bajo el follaje - ¿cómo están conectados?
>
> el aumento de imprecisión de la sombra sobre la tierra con el aumento de la altura del objeto,
>
> las nubes en el cielo y el cambio de iluminación del paisaje - ¿cómo está relacionados?,
>
> las fases de la luna - ¿dónde está el sol?,
>
> ¿en que lado de la luna empieza un eclipse solar?,
>
> siluetas e imágenes de la sombra - ¿cómo están relacionadas? (Freudenthal, 1983, pp. 310-311)

Los fascinantes trabajos de Castelnuovo y sus colaboradores son también de referencia obligada. Éstos muestran cómo pueden encontrarse trozos de la realidad que se modelan con instrumentos geométricos diversos; entre ellos, las transforma-

[4] Por "Rayos de luz" queremos decir las líneas entre una fuente primaria de luz, como el sol o una lámpara, el objeto y su sombra, que es proyectada porque el objeto tapa la fuente luminosa.

ciones afines (Castelnuovo, 1969, 1979) y la geometría proyectiva (Castelnuovo, 1979; Castelnuovo et al., 1976). Asimismo revelan algunos experimentos en los que se explora esta realidad en la que vivimos, planteando algunas cuestiones para poder interpretarla. Me voy a entretener en ellas, extendiendo la situación al estudio desde los sólidos.

Castelnuovo (1979) propone observar cómo cambia la sombra que produce una rejilla cuadrada a medida que pasa el día. De esta manera, se observa que en el mundo de las sombras hay efectos diversos y, en consecuencia, propiedades diferentes. También podemos explorar con armazones del cubo y/o de otros sólidos.

Esta autora propone experimentar primero desde el espacio iluminado por los rayos del sol y después por una fuente de luz artificial. De esta manera, la sombra de algo a la luz del sol puede llevar a las propiedades de la *afinidad* como transformación que conserva el paralelismo. También mantiene constante la relación entre segmentos correspondientes que pertenecen a la misma recta o a rectas paralelas y la relación entre las áreas de figuras correspondientes. Cuestiones que pueden surgir al realizar el experimento son:

¿Qué propiedades de las caras de un objeto no se mantienen en la sombra? ¿En todas las caras pasa lo mismo? ¿Al experimentar con el armazón de un cubo, qué caras sufren la misma modificación? ¿Qué relación guardan con respecto a la posición del foco? ¿Qué propiedades mantiene la afinidad? Se puede también llegar a establecer la igualdad como afinidad particular “cuando se observa algo a la luz del medio día”.

El experimento de iluminación de objetos con fuentes de luz artificial puede llevar a la conclusión de que cuando la sombra de algo se produce por una luz puntiforme ya no hay afinidad. La transformación que pasa del objeto a la sombra, en este caso es la *proyectividad*. Cuestiones que pueden surgir en la exploración son:

¿Qué propiedades de las caras del objeto no se mantienen en la sombra? ¿En todas las caras del sólido pasa lo mismo? ¿Qué propiedades mantiene la proyectividad? ¿Puede considerarse la afinidad un caso particular de proyectividad? ¿Dónde colocamos (con la imaginación en este caso) el foco de luz artificial?

¿Qué ocurre si mantenemos fijo el foco de luz pero movemos el objeto para que su sombra se forme en un plano paralelo? ¿En todas las caras del sólido pasa lo mismo? ¿Cómo se obtiene la imagen de una diapositiva en un retroproyector? ¿Qué se observa al comparar la diapositiva y la imagen que se refleja?

Exploración con caleidoscopios: La actividad de matematizar

La exploración con caleidoscopios voy a utilizarla como ejemplo para remarcar otra característica fundamental de nuestro marco de referencia: Al principio de la exploración se va del ‘mundo real’ a las matemáticas, al estudiar la descripción de los modelos a nivel local y en términos de simetrías que comparten, para pasar después de las matemáticas al mundo real; en este caso, los fenómenos situados en el contexto real se usarán como campo de aplicaciones.

Centrémonos en los caleidoscopios que denominamos tetraédrico (figura 5a), octaédrico (figura 5b), cúbico (figura 5c), dodecaédrico e icosaédrico. Están formados por las caras laterales de pirámides de espejos; se obtienen juntando el centro de cada uno de estos poliedros con los vértices de una cara. La figura 4 lo muestra para el cubo.

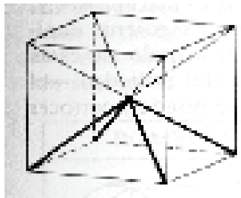


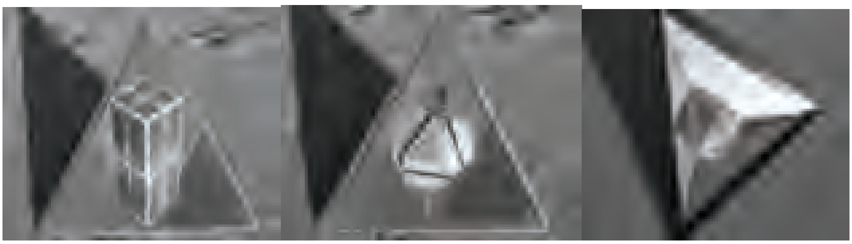
FIGURA 4

(a) (b) (c)

FIGURA 5

Cuando a partir de cada uno de estos caleidoscopios se realizan exploraciones colocando diversos objetos, o módulos de ellos, en diferentes posiciones, se puede establecer que:

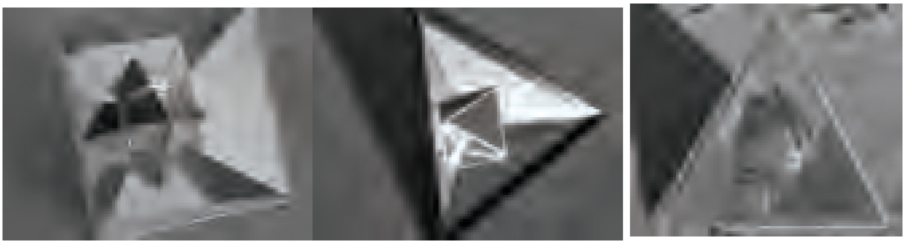
- La forma resultante depende del módulo que se incrusta (véase las figuras 6a y b) y del caleidoscopio de partida.



(a) (b) (c)

FIGURA 6

- El módulo que genera un poliedro dado depende del número de espejos que forman el caleidoscopio (véase las figuras 5b y 7a) y/o de la abertura de los espejos, es decir, del ángulo del triángulo isósceles que concurre en la esquina del caleidoscopio (véase las figuras 5a y 5b).



(a) (b) (c)

FIGURA 7

Se pueden formular observaciones concretas de estas relaciones. Así se puede observar el número de veces que un caleidoscopio multiplica cualquier objeto que se introduzca en él. Si se hace con el caleidoscopio tetraédrico, el módulo se repite 4 veces (véase las figuras 5a, 6c y 7b). El calidoscopio octaédrico reproduce el módulo 8 veces (véase las figuras 5b, 6a y b y 7c) y el caleidoscopio cúbico 6 veces (véase la figura 5c y 7a). También se pueden hacer descripciones de los caleidoscopios de partida, de los poliedros obtenidos y de los módulos que los generan.

Estas mismas problemáticas se pueden tratar suponiendo que se conocen los planos de simetría de los poliedros con los que se trabaja y que determinados planos de simetría se corresponden con los espejos de un caleidoscopio establecido (véase Guillén, 1991, pp. 193-208). Las conclusiones que se establecen se pueden verificar después usando los caleidoscopios y módulos correspondientes. Por ejemplo, conociendo los planos de simetría de los poliedros regulares y dibujando en el cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro los tres planos de simetría perpendiculares entre sí, se delimita para cada uno de estos poliedros el módulo correspondiente para el caleidoscopio octaédrico.

Cuando se conoce además que hay una gran variedad de poliedros que entre sus planos de simetría incluyen 3 planos perpendiculares entre sí, se puede establecer que el caleidoscopio octaédrico puede generar una gran variedad de poliedros. Las figuras 5b, 6a, 6b, 7a, 7c muestran algunos ejemplos.

Y si se conocen las simetrías que comparten determinados poliedros, se pueden delimitar caleidoscopios que permiten generar un determinado poliedro. Por ejemplo, se puede concluir que el cubo y el octaedro, por ejemplo, pueden generarse a partir de los caleidoscopios tetraédrico, octaédrico y cúbico dado que el cubo y octaedro tienen las mismas simetrías y las simetrías del tetraedro también las tiene el cubo.

El problema del espacio

Quiero acabar esta sección con la reflexión que hizo Vollrath (1976) ya hace tiempo, muy vigente también en la actualidad.

Precisamente en la era de los viajes espaciales, la geometría esférica se ha sumido en el olvido en la Educación matemática. Esta puntualización no tiende a que se restablezca la excesiva enseñanza de geometría esférica, pero sí a sugerir que siga cultivándose una buena relación con la astronomía.

Un curso de geometría organizado desde el punto de vista de las teorías del espacio puede hacer contribuciones importantes a la educación superior, la cual puede presentar a los estudiantes una mejor comprensión del entorno. Puede convencer al futuro no matemático de que la geometría es una herramienta importante para describir y comprender la naturaleza.

La geometría de los sólidos como línea de investigación

En la sección anterior he pretendido mostrar la riqueza que proporcionan los sólidos para reflejar diferentes aspectos de la geometría (de la forma, constructivo, de relación, topológico, de cálculo, de las transformaciones, de lenguaje, lógico, histórico) y para tratar los contenidos curriculares referidos a conceptos, procesos matemáticos, establecimiento de relaciones y resolución de problemas. En las secciones que continúan la geometría de los sólidos la contemplamos como una posible línea de investigación en Educación Matemática.

Investigación en el nivel elemental

Comencemos el recorrido colocándonos en el nivel elemental en las matemáticas con el propósito de realizar investigaciones. Freudenthal ha subrayado en múltiples ocasiones la importancia que tiene la actividad que se puede desarrollar en este nivel (p.e. Freudenthal, 1971, p. 417). Sus trabajos pueden ser un referente en la investigación que realicemos.

Por un lado, ya hemos destacado la exploración fenomenología didáctica que se presenta en Freudenthal (1983) para hacer consciente el contexto topográfico como un medio didáctico. Remito pues a este trabajo para tratar problemáticas referidas a diferentes polaridades, a las conexiones que se consideran para estructurar, los puntos de vista desde los que se mira,...

Por otro lado, también he hecho referencia a las “historias simples” que contienen sus trabajos que le permiten obtener información sobre “cosas” que se saben y sobre “cosas” que tienen que enseñarse. Así, por ejemplo, en Freudenthal (1978, p. 167) se aporta información sobre lo que se puede hacer o no en relación con la identificación de ciertas estructuras geométricas y en Freudenthal (1983, p. 296) se indican determinados tipos de abstracción que los niños son capaces de realizar a una edad muy temprana al realizar una actividad de clasificar según la forma y el tamaño. Cabe pues investigar sobre procesos de aprendizaje/enseñanza de “cosas” que se ha comprobado que se aprenden por sí mismas en este nivel y/o que requieren de procesos de enseñanza.

Una línea de investigación con diferentes ramificaciones

El origen y desarrollo

La investigación relativa a la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, conjeturar,…desde los sólidos ofrece un abanico de posibilidades considerando que:

i) hay una gran variedad de familias de sólidos que pueden usarse como soporte para desarrollar actividad (los cuerpos de revolución, las familias de prismas, antiprismas, pirámides y/o bipirámides, los poliedros regulares,…),

ii) hay diferentes maneras de generar representaciones que también pueden usarse como contexto, y

iii) se puede centrar la atención en diferentes procesos matemáticos (descripción, clasificación, definición, prueba, generalización y/o particularización).

Mi trabajo se ha realizado en su mayor parte en esta línea de investigación.

El estudio teórico realizado hasta 1997 se centró en la caracterización de los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos (Guillén, 1996), el análisis teórico sobre la descripción, clasificación, generalización y particularización (Guillén, 1991, 2004, 2005), la elaboración de secuencias de actividades para el estudio de esta materia, organizadas según este modelo de razonamiento, y la observación de procesos de aprendizaje (Guillén, 1997).

Para ello utilizamos como soporte familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y también “las relaciones de inscripción y de dualidad en el mundo de los poliedros regulares y semirregulares".

Dando un pequeño salto en el tiempo, con un marco teórico readaptado al considerar la evolución que tuvieron las ideas del modelo de Van Hiele en el Instituto de Freudenthal (véase Guillén, 2004), retomamos la problemática de la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos a partir de las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares y precisamos diferentes enfoques para su estudio que corresponden a diferentes estratos en el nivel de matematización (Guillén y Puig, 2001, 2006).

Para la observación experimental tomamos como referente los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy et al., 1999). Nos propusimos reorganizar los datos y resultados obtenidos en la investigación previa a través de los cuatro componentes del MTL (Componente de competencia, enseñanza, cognitivo, comunicación) y realizamos un diseño experimental para que ilustrase sobre las interrelaciones y contraposiciones que hay durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada uno de los 4 componentes.

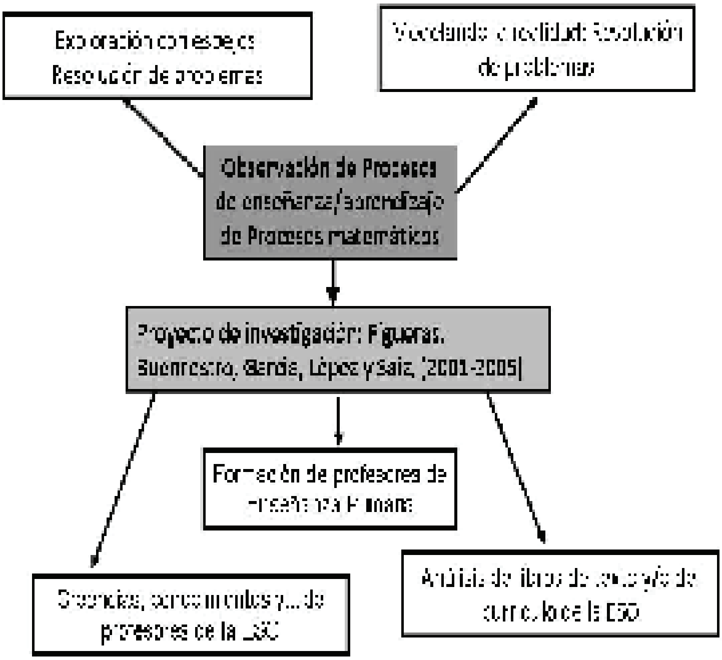
Diferentes ramificaciones

La línea de trabajo se ha bifurcado en diferentes direcciones como consecuencia de mi colaboración en el proyecto de investigación "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas" desarrollado en México (Figueras, Buenrostro, García, López y Sáiz, 2001-2005) y la incorporación en la línea de investigación de alumnos del programa de doctorado de la Universitat de València.

Los estudios llevados a cabo hasta el 2000 tenían como ámbito de estudio niños de 12 años y estudiantes de Magisterio de València. Al colaborar en el proyecto de investigación al que me acabo de referir, se sintió ineludible realizar diferentes trabajos sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos tomando como ámbito de estudio maestros de primaria de algunas escuelas mexicanas, así como analizar los libros de texto de este nivel educativo y algunos materiales usados para la evaluación. Pretendíamos obtener información sobre la enseñanza de esta materia en este nivel y en este país y determinar algunas causas que pudieran explicar su situación.

Resultados obtenidos en este estudio los hemos publicado en diferentes simposios (Guillén y Figueras, 2004, 2005); también se ven reflejados en la página Web que elaboramos para la enseñanza de la geometría desde los sólidos, nombrada como *Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas:* http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat, a la que ya me he referido en la sección anterior, y de cuyo proceso de elaboración ya he hablado en otra ocasión (Guillén, 2007). La página en la actualidad puede considerarse como un trabajo de diseño curricular para la formación de maestros de primaria que aún tiene pendiente realizar un estudio de usuarios. Para realizar este estudio se siente necesario construir itinerarios que orienten en la navegación y remitan al uso de otros recursos si se considera necesario.

Como refleja el cuadro I, este trabajo realizado en México ha continuado con otros estudios exploratorios; en ellos hemos complementado nuestro marco de referencia con el de otras líneas de investigación muy afianzadas en el Área de Didáctica de la Matemática: la formación de profesores, sobre creencias, análisis del currículo y/o de libros de texto.



CUADRO I

En uno de ellos centramos la atención en la formación de maestros de enseñanza primaria; pretende realizar el estudio de usuarios, al que me he referido en el párrafo anterior, centrando la atención en el establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos relativos a los sólidos. Hasta ahora se ha elaborado un Modelo de competencia[5] que sirve de referencia para interpretar Modelos de Enseñanza en Planes de formación para maestros (González, 2006) y se han analizado libros de texto de diferentes editoriales muy usadas en la Comunidad Valenciana, en un intento de encontrar elementos para el Modelo de Enseñanza (ME) que se quiere utilizar en la experimentación con maestros de primaria de esta Comunidad. En

[5] En el caso particular de este trabajo, el modelo de competencia inicial contiene elementos de los conocimientos de un individuo ideal, capaz de realizar tareas relacionadas con la enseñanza de la geometría de los sólidos a nivel escolar.

comunicaciones para diferentes simposios hemos dado cuenta del trabajo desarrollado (González, Guillén y Figueras, 2006, 2008; Guillén, González y García, 2009). En la actualidad se está elaborando este ME; con su desarrollo se pretende observar procesos de aprendizaje de maestros de primaria en relación con los contenidos geométricos en los que se centra el trabajo y realizar el estudio de usuarios mencionado.

Los otros dos trabajos tienen como ámbito de estudio profesores de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) de la Comunidad Valenciana y libros de texto de la ESO publicados por las 3 editoriales más usadas en esta Comunidad.

Así, en Pérez (2006) se ha utilizado una encuesta como técnica de obtención de datos para obtener información sobre contenidos geométricos y de medición del currículo de la ESO en la Comunidad Valenciana que los profesores expresan que han impartido o impartirían en sus clases, sobre los que no han impartido o no impartirían y sobre los contenidos a los que se asigna mayor o menor importancia. Se han analizado también las razones expresadas por los profesores para explicar sus respuestas (Pérez, 2006; Pérez y Guillén, 2007, 2008). El estudio continúa en la actualidad considerando la misma problemática como objeto de estudio pero usando seminarios y/o cursos con profesores de la ESO como técnicas de obtención de datos.

En García (2009) se ha elaborado un modelo para categorizar el contenido relativo a la geometría de los sólidos que se propone en los textos analizados, considerando las introducciones y actividades que contienen. El estudio se ha basado en el currículo de la Generalitat Valenciana para el desarrollo de la LOGSE y la LOE, lo que ha permitido observar, por un lado, las carencias o deficiencias presentes en los libros de texto de los dos planes de estudio, por otro, las propuestas que se hacen en ellos para la enseñanza/aprendizaje de la geometría en la ESO desde los sólidos y comparar estas propuestas según la editorial y/o el currículo que regula los textos. En Guillén, González y García (2009) y García y Guillén (2010) se han adelantado algunos resultados. En la actualidad el estudio se está enmarcando también en las líneas de investigación correspondientes, con la intención de que lo que inicialmente ha sido un estudio exploratorio, pueda desarrollarse hacia una tesis doctoral.

El cuadro I muestra también otras dos orientaciones que se han concretado en proyectos de investigación en marcha. Puede notarse que en ellos se requiere complementar nuestro marco de referencia con estudios desarrollados en la línea de resolución de problemas.

Estas direcciones corresponden a dos caminos posibles de la gran bifurcación que podemos imaginar si tenemos en cuenta las posibilidades que ofrece:

i) explorar desde diferentes situaciones-contextos (los caleidoscopios, el mundo de las sombras, diferentes artefactos como computadores, etc),

ii) aproximarnos al estudio desde diferentes enfoque/s (por ejemplo, desde la resolución de problemas "reales") y/o

iii) derivar hacia diferentes contenidos geométricos (por ejemplo, la resolución de problemas, la medición, la geometría descriptiva, la geometría combinatoria, etc).

En López (2009) se usa la exploración con espejos para desarrollar actividad matemática. En un principio se pretendía explorar la enseñanza/aprendizaje de procesos matemáticos (describir, clasificar,…), si bien el estudio se reorientó al estudio de la resolución de problemas ligados a la construcción de módulos que generan determinados poliedros a partir de un caleidoscopio dado. Como indicamos en López y Guillén (2009, 2010), esta parte del estudio lo realizamos desde la heurística al centrar la atención en los métodos de resolución con contenido heurístico. Usamos los MTL como marco metodológico para la experimentación y el ámbito de estudio lo constituyen alumnos de 2º y 3º de la ESO. La experimentación se hizo en contexto de clase y en contexto laboratorio. En la actualidad, los datos obtenidos en el estudio exploratorio se están reorganizado para obtener un MTL reelaborado que suponga el punto de partida de una nueva investigación que pueda dar lugar a una tesis doctoral.

El otro trabajo se desarrolla desde la resolución de "problemas reales prácticos" en los que determinados sólidos son los conceptos geométricos que modelan la realidad a la que se hace referencia en el problema. El uso de fórmulas trigonométricas y/o del teorema de Pitágoras para hallar determinadas relaciones numéricas entre los elementos de las formas implicadas es también una constante en todos los problemas que se proponen. El estudio exploratorio está muy avanzado pero aún no se ha publicado ningún resultado.

Hasta aquí he descrito brevemente trabajos de investigación desarrollados en mi línea de investigación. El análisis realizado en la primera parte, al explorar la riqueza de los sólidos, permite vislumbrar muchas otras posibilidades. Por ejemplo, en esa sección ya he propuesto la exploración en el mundo de las sombras y, como buenos referentes para comenzar, he remitido al análisis que realiza Freudenthal (1983) para "los rayos de luz" y al trabajo de Castelnuovo y sus colaboradores. Como subraya Freudenthal, las sombras así como los reflejos se perciben pronto, si bien no podemos indicar cuándo este fenómeno se descubre, se aplica operacionalmente, se hace consciente, se verbaliza, o cuándo se puede comprender "algo de geometría" que se puede producir desde las sombras. Puede ser interesante también indagar en esta dirección.

Y desde luego, merecen atención especial problemáticas objeto de investigación desde los sólidos que aún no hemos contemplado, centradas en la enseñanza/aprendizaje de habilidades (para comunicar, visualizar) y/o destrezas (dibujo, representación).

De esta manera, nos introducimos en una problemática más general: "la de las habilidades espaciales", "la capacidad espacial", "la visualización". De ella me ocupo en la siguiente sección.

Otro abanico de posibilidades: visualización, representación,…

Numerosos autores han destacado el aspecto de la visualización como el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la geometría (Bishop, 1992; Clements & Battista, 1992; Gal & Linchevski, 2010; Presmeg, 2006). Es un tema que ha despertado gran interés en los investigadores en Educación Matemática desde hace más de 100 años, no sólo desde la perspectiva de la enseñanza de la geometría misma, sino también desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas y del aprendizaje en general. Adentrarse en esta problemática lleva consigo familiarizarse también con otros términos como imaginación visual, orientación espacial, pensamiento espacial, relaciones espaciales, imágenes espaciales, imágenes mentales, imágenes visuales, representaciones,…

Diferentes significados para los términos y diferentes tipos de habilidades espaciales. En busca de un modelo teórico

En diferentes trabajos se ha hecho notar la falta de acuerdo en el significado que se da a los términos que acabo de mencionar. Como subraya Gorgorió (1998, p. 208), "esto reafirma la necesidad de establecer claramente las conceptualizaciones en que se basa la investigación, para no conducir a interpretaciones erróneas de los resultados". La diversidad de significados se muestra también en estudios recientes. Por ejemplo, en Gal & Linchevski (2010) podemos constatarlo. En relación con la visualización e imagen visual indica:

> Visualización, que "generalmente se refiere a la capacidad de representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual" (Hershkowitz et al. 1990, p. 75), juega un papel importante en la comprensión de la geometría. Duval (1998) se refiere a la visualización como uno de los tres procesos cognitivos independientes que llenan las funciones epistemológicas específicas en geometría: visualización, construcción y razonamiento. Presmeg (1997) considera la visualización como "el proceso involucrado en la construcción y transformación de imágenes mentales visuales..." (p. 304), mientras que una imagen visual es "una construcción mental que representa la información visual o espacial" (Presmeg, 1992, p. 596). Nótese que la visualización en el contexto de las matemáticas pueden tener figuras y estímulos no figurales (Bishop, 1983) (Gal & Linchevski, 2010, p. 165).

En este trabajo también podemos encontrar una revisión de significados con los que se usan otros términos utilizados en la literatura de esta línea de investigación.

Igualmente, merece la pena prestar atención a los tipos de habilidades espaciales y procesos implicados que se han distinguido. Desde luego la lista podría ser muy larga si el tema lo contemplamos desde el punto de vista psicológico. Centrando nuestra preocupación en el proceso de aprendizaje de la geometría, cabe referirse a estudios de diferentes autores soviéticos de la década de los cuarenta (p. e. Vladimirskii, 1949). Ya centrados en la geometría de los sólidos, quiero destacar el trabajo de Ranucci (1952). En su tesis doctoral ya se planteaba la cuestión de si el estudio de la geometría sólida afectaba en el desarrollo de las habilidades de percepción espacial, medidas a partir de ciertos tests que se describían en el estudio.

Los factores espaciales que él proponía son: i) un factor que depende de la habilidad para reconocer objetos que se ven desde diferentes posiciones; ii) un factor que implica percibir las imágenes de un espejo o relaciones invertidas; iii) un factor en que el punto de vista del observador es importante; iv) un factor en que se tiene que imaginar el movimiento de las partes de una configuración (Ranucci, op. cit., p. 18).

Investigaciones más recientes desarrolladas en las décadas de los 70 a los 90 (p. e. Hoffer, 1977; McGee, 1979 y Del Grande, 1990) siguen siendo referentes importantes en los estudios realizados en el siglo XXI, que han centrado la atención en la visualización y/o representación en el contexto de la geometría (p.e. Maldonado, 2005; Sarasua, 2010); remito a los listados que proporcionan para las habilidades espaciales.

Por otro lado, considero ineludible mencionar el amplio trabajo desarrollado por Bishop (p.e. Bishop, 1980, 1983, 1992). Este autor centra la atención en que “hay una distinción importante entre el ‘sustantivo’ visualización –el cual lleva nuestra atención al producto, el objeto, el ‘qué’ de la visualización, las imágenes visuales– y el ‘verbo’ visualizar, el cual nos hace centrar la atención en el proceso, la actividad, la destreza” (Bishop, 1992, p. 36). Distingue dos habilidades distintas: La habilidad de la interpretación de la información figurativa (IFI, Interpreting Figural Information) y la habilidad del procesamiento visual (VP, Visual Processing). La IFI es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. En cambio, el VP sería el proceso de conversión de información no figurativa en imágenes y de la conversión de unas imágenes en otras (Bishop, 1980).

Ya en nuestro país, cabe mencionar el trabajo de Gutiérrez (1992, 1996). Este autor realiza un estudio sobre el desarrollo de habilidades de visualización a partir de objetos tridimensionales usando software dinámico, pasando de unos tipos de representación a otros (cuerpos, imágenes de pantalla de ordenador, imágenes mentales). Después de realizar una revisión de la bibliografía, propone una síntesis unificadora de la terminología. Considera el término visualización como una clase de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto a nivel mental como físico, para la resolución de problemas. En la visualización distingue 4 elementos diferentes:

> 1) Imágenes mentales, 2) representaciones externas, 3) procesos de visualización y 4) habilidades de visualización. (Gutiérrez, 1992).

En el elemento 4 incluye las habilidades fisio-psicológicas reconocidas por Hoffer (1977) como relevantes para el aprendizaje de las matemáticas y las que determinó McGee (1979), recopilando resultados de investigaciones previas en habilidades espaciales, realizadas desde este punto de vista. Concluye que:

> si nos limitamos al entorno de la geometría, sólo son pertinentes parte de las habilidades mencionadas. (Gutiérrez, 1996, pp. 8 y 9)

Si además de lo precisado hasta ahora, consideramos que para evaluar estas imágenes/representaciones/habilidades/procesos se plantean cuestiones/problemas que los estudiantes pueden responder utilizando diferentes estrategias, que a su vez requieren de diferentes capacidades espaciales, resulta complicado realizar una interpretación conjunta de los diferentes estudios desarrollados en esta línea de investigación. La falta de un modelo teórico unificado ha dificultado considerablemente el avance en esta línea. Presmeg (2006, p. 226) sitúa la década de los 90 como aquella en la que se reconoció la necesidad de teorías generales que unificaran a todo el campo de la visualización en Educación matemática y hace referencia a algunos estudios (p. e. Gutiérrez, 1996) que dan cuenta de ello. Concluye que es clara la necesidad de continuar con el desarrollo de esta investigación en curso.

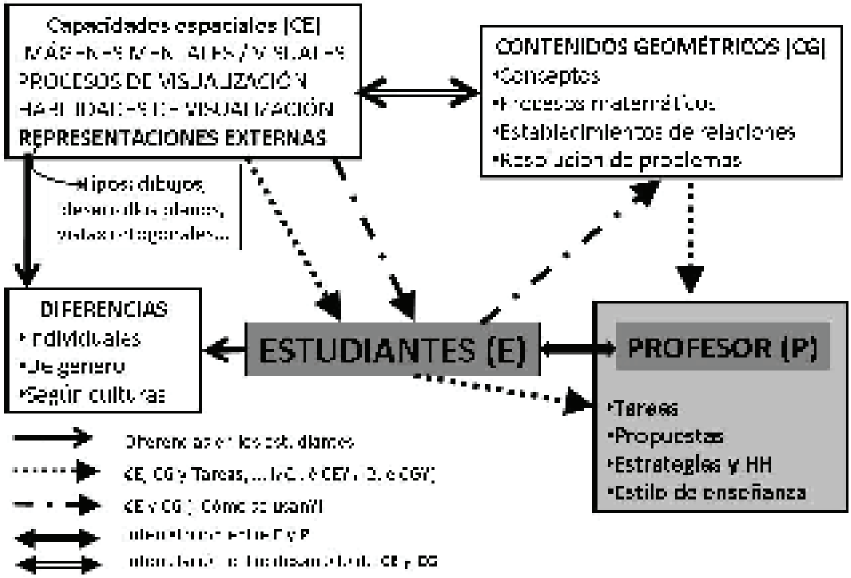
Orientaciones y preguntas de investigación

Con lo dicho hasta ahora, ya me he referido a la dirección de esta línea de investigación que se orienta hacia la búsqueda de un modelo teórico para la visualización, un modelo en el que en los últimos años se han incluido también aspectos semióticos (Duval, 1998; Radford et al., 2005).

En el cuadro II he intentado sintetizar otros temas de interés. Una orientación surge al considerar que la visualización es una actividad individual que:

> Depende de la interacción entre el estímulo y el individuo al que le concierne. Por ejemplo, nunca hay una manera única de llevar a cabo una tarea particular, debido a que cualquier tarea debe ser interpretada por cada individuo. Lo que suceda después dependerá de la preferencia de la persona, de la memoria para las visualizaciones, de la habilidad para recordar o generar visualizaciones apropiadas y, finalmente, de su habilidad para operar apropiadamente con las visualizaciones escogidas. Una implicación clara de este análisis es que la visualización y el uso de las imágenes visuales es un asunto muy personal (Bishop, 1992, p. 38).

Así, en la investigación se ha centrado la atención en las diferencias individuales en relación con la visualización (Bishop, 1980; Gorgorió, 1998; Hegarty & Waller, 2005; Kozhevnikov, Hegarty & Mayer, 2002), en las diferencias de género (p. e. Gorgorio, 1996) y/o según diferentes culturas (p. e. Bishop, 1979).



CUADRO II

Una nueva orientación sale al considerar que los objetos geométricos (las ideas espaciales, las ideas matemáticas) podemos representarlos de varias maneras, y desde esta distinción podemos hablar de la enseñanza/aprendizaje de los objetos geométricos. Además el centro de atención se puede poner en las propias representaciones, en el trabajo de los alumnos, en el proceso de enseñanza y/o en la interrelación que puede existir. Cabe plantearse cuestiones como las siguientes:

¿Qué habilidades/procesos visuales se ponen en juego al realizar determinadas tareas? ¿Cómo influye el que en las tareas se usen diferentes representaciones (modelos, armazones, dibujos, desarrollos,…)? ¿Qué contenidos geométricos están implicados en estas tareas?

¿Los estudiantes de primaria/secundaria frente a las tareas de habilidades espaciales y/o cuestiones geométricas que implican figuras de dos/tres dimensiones y/o representaciones planas de éstos, muestran la misma capacidad en todos los casos y/o se comportan de manera diferente? ¿Cómo influye que las tareas se planteen en un entorno dinámico?

¿Cómo se utilizan/interpretan las representaciones y/o imágenes visuales en el proceso de aprendizaje/enseñanza de determinados contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos, resolución de problemas)? ¿Cómo se utilizan/interpretan en los diferentes niveles educativos?

¿Cómo influye el estilo de enseñanza del profesor en la habilidad de los estudiantes para visualizar y/o en el uso y/o dificultad para utilizar determinadas estrategias para resolver problemas?

Clements y Battista (1992, p. 456) subrayan la necesidad de que se siga investigando en esta dirección; esto es, en la interacción que puede haber en lo relativo a la visualización en el énfasis de los profesores en la instrucción y la preferencia de los estudiantes. En trabajos de los que he hablado antes hemos centrado la atención en esta problemática. La experimentación con profesores de enseñanza primaria conlleva que nos fijemos en el aprendizaje/enseñanza del establecimiento de relaciones entre diferentes objetos geométricos (sólidos, figuras planas y sus elementos, desarrollos planos, …) usando representaciones planas de los sólidos como contexto y cuando se realiza una exploración con caleidoscopios en el contexto de la resolución de problemas, nos fijamos en la transferencia que hacen los estudiantes de los procedimientos y estrategias usados por el profesor así como en dificultades relativas a visualización y/o representación (López y Guillén, 2008; 2009).

La doble relación que se establece entre el aprendizaje de contenidos geométricos y el desarrollo de las habilidades espaciales/procesos de visualización puede derivar en otra posible dirección. Por ejemplo, se puede plantear la problemática de si el estudio de la geometría de los sólidos puede mejorar el desarrollo de habilidades espaciales (como en el trabajo de Ranucci, 1952) o de que es la visualización[6] la que constituye gran parte de la dificultad del aprendizaje de la geometría, con lo que se supone que el desarrollo de habilidades espaciales podría mejorar el aprendizaje de la geometría de los sólidos. Cabe plantearse:

¿Cómo se relaciona el nivel de la habilidad espacial de los estudiantes con el rendimiento en tareas geométricas? ¿Qué subcomponentes de las habilidades espaciales predicen con mayor probabilidad el rendimiento de los estudiantes en tareas que implican figuras geométricas? ¿Qué relaciones existen, si existen, entre las tareas para las habilidades espaciales y las tareas de geometría?

Al centrar la atención en esta comparación podemos también plantearnos como problemática de estudio si hay correspondencia entre el desarrollo de determinadas habilidades espaciales y el desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes y su manera de avanzar en la progresiva matematización, o viceversa, cuando el de-

[6] La *visualización* incluye determinadas habilidades espaciales. Siguiendo a McGee (1979), distinguimos dos grupos: Habilidades de visualización espacial y de orientación espacial. Define las primeras como “la habilidad de manipular mentalmente, rotar, girar o invertir dibujos que representan un objeto”.

sarrollo de las habilidades espaciales se evalúa con instrumentos que se diseñan en el estudio y también se diseña la manera de evaluar el avance en la progresiva matematización.

El problema se ha desarrollado recientemente en el contexto de la geometría plana (Sarasua, 2010). Para la geometría de los sólidos, si se centra la atención en el tipo de razonamiento de los estudiantes y en el desarrollo de habilidades espaciales, las características delimitadas para los niveles de Van Hiele aplicada a esta área de la geometría (Guillén, 1996, 2004), así como los listados de habilidades espaciales, pueden ser buenos referentes para comenzar. El trabajo puede ser interesante al centrar la atención en la elaboración de los instrumentos de evaluación considerando que las metodologías cualitativas son necesarias para obtener información más precisa sobre los procesos que tienen lugar en la mente de los individuos. Si bien se puede disponer de una gran batería de test para evaluar las habilidades espaciales[7] y también se dispone de trabajos para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes en relación con la geometría de los sólidos (Guillén, 1997; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991), considero interesante seguir investigando en esta dirección.

Ahora bien, como sugiere Freudenthal (1983, p. 244), en este tipo de estudios hay que ser cauto en las conclusiones que se extraen. Advierte de que dibujos imperfectos no pueden considerarse sin más como indicativos de objetos mentales defectuosos, pues por el contrario, quizás estén reflejando Objetos mentales mejores que cuando reproducimos el sólido en perspectiva sólo por imitación. Dibujos muy mediocres pueden ser la base de razonamientos que tienen un gran poder de convicción. Asimismo, un dominio analítico de los sólidos puede distorsionar algunas conclusiones que establezcamos sobre el dominio que se tiene en determinadas habilidades espaciales, cuando éstas las extraemos sólo de respuestas a determinadas cuestiones.

Con las orientaciones que he indicado en los párrafos anteriores no he pretendido ser exhaustiva en la enumeración de problemáticas de investigación sobre visualización en Matemáticas. El listado que proporciona Presmeg (2006, p. 226) como grandes preguntas de investigación en esta línea sugiere otras problemáticas de gran interés. Yo voy a finalizar esta sección volviendo a los sólidos y centrando la atención en las representaciones de los mismos. Su riqueza como posible dirección en la investigación se hace patente. Tenemos diferentes tipos de representaciones físicas y diferentes representaciones planas sobre las que explorar y, además, se

---

[7] Ranucci (1952) ya se enfrentó con la problemática de la elaboración de varios tests a partir de los que se iba a evaluar el desarrollo de estas habilidades espaciales en los dos grupos con los que se realizó la experimentación (se tomó un grupo como grupo de control), considerando una extensa batería de los mismos. Ranucci explica que en elaboración de los tests consideraron deseable que con ellos fuera concebible cubrir la mayoría de los factores espaciales comúnmente aceptados y que pudieran administrarse en un periodo corto de tiempo.

puede tratar la problemática con diferentes tipos de tareas. Asimismo, el estudio puede estar enfocado para obtener información sobre las propias representaciones, el uso que se hace de ellas por parte de los estudiantes o sobre la enseñanza de las mismas y/o de contenidos curriculares. Es claro que en un mismo estudio se pueden tener varios propósitos.

Las representaciones planas de formas tridimensionales

En un trabajo anterior (Guillén, 1991) indicaba que uno de los problemas que aparecen cuando se quiere hablar sobre poliedros reside en el hecho de que éstos son objetos tridimensionales. Para hablar de ellos se tienen que representar o describir, y para comprender lo que se dice se tiene que comprender la representación o descripción que se utiliza para hablar de ellos. Dado que cualquier representación bidimensional de objetos tridimensionales implica la distorsión de alguna de las propiedades del objeto, en el paso del espacio al plano, la comprensión de las representaciones requiere visión espacial y el conocimiento de convenciones que hay que utilizar, en el paso de la representación al modelo y viceversa. En este trabajo describía brevemente investigaciones desarrolladas en la época de los 80 que centraban la atención en cómo interpretan y/o usan los estudiantes diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos y en las relaciones/conexiones/posibles vínculos que se establecen con los objetos geométricos, las representaciones físicas y las imágenes visuales correspondientes. De nuevo voy a referirme a ellas y voy a incorporar otras que se han realizado posteriormente.

Antes de introducirme en ello voy a aclarar que al hablar de representaciones de los sólidos distingo las representaciones físicas (objetos del entorno, modelos y armazones) y las representaciones planas y para referirme a representaciones internas hablo de imágenes visuales.

Quiero también acentuar los usos diferentes que pueden tener las representaciones (físicas y planas):

i) se consideran como maneras de "comunicarse" los sólidos;

ii) se usan como un contexto que permite encajar las cuestiones que se plantean para describirlas, compararlas con otras representaciones (físicas y/o planas), en un intento de crear variedad de significados asociados a los conceptos que representan;

iii) se miran como representaciones del sólido que lo sustituyen; esto es, se utilizan como medio para estudiar el concepto correspondiente (éste es más abstracto).

Cuando la problemática se ve desde la resolución de problemas, las representaciones pueden considerarse para favorecer el razonamiento (éste se apoya en las representaciones) y/o para verificarlo y/o comprobarlo.

Hay otros trabajos que distinguen los tipos de representaciones según su eficiencia para la enseñanza de contenidos curriculares. Mesquita (1998) diferencia las representaciones según la función que desempeñan y por su propia naturaleza. Entre las primeras separa las que tienen *función descriptiva,* pues ilustran relaciones y propiedades implicadas en el problema pero sin sugerir procedimientos de resolución, de las que tienen *función heurística,* porque sugieren transformaciones que pueden conducir a la resolución del problema y/o a transformarlo en otro. Al fijarse en la naturaleza de las representaciones, Mesquita diferencia las que denomina representaciones *Objeto,* en las que ciertas relaciones o propiedades utilizadas en su construcción se pueden usar para resolver el problema, de las representaciones *ilustrativas,* desde las que no se puede determinar información relevante para resolver el problema.

Centrados ya en las representaciones, consideradas como medio para realizar el trasvase de la información espacial a información plana y a la inversa, a continuación voy a referirme a trabajos que han delimitado dificultades que tienen los estudiantes para relacionar conceptos con diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico y/o éstas entre sí, interpretan estas dificultades, distinguen etapas que siguen los niños en el desarrollo de la comprensión del esquema de representación correspondiente y/o dan sugerencias y/o propuestas para la instrucción.

En la selección he tenido en cuenta que se refieran a diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos y/o que se utilicen diferente tipo de tareas en la experimentación. De esta manera, con nuestra propia elección para explorar, podemos tomar como punto de partida la información que aportan las investigaciones correspondientes y desde ahí derivar hacia nuestra propia investigación.

Centrar la atención en los dibujos que los niños realizan para determinados sólidos puede remitirnos al trabajo de Mitchelmore (1976, 1980) y de Parzysz (1988, 1991). El primero sigue vigente en la actualidad, como se constata en estudios recientes desarrollados con niños de la escuela elemental de Taiwán; en ellos se han tomado los niveles que estableció Milchemore para clasificar los dibujos que hicieron los niños de ese país de algunos sólidos (Ma et al., 2009; Wu, Ma, Chen, 2006). Parzysz ha realizado diferentes estudios con niños franceses de 6º grado. En ellos ha detectado dificultades al “codificar” y “descodificar” dibujos de sólidos y ha señalado como posibles causas de estas dificultades el hecho de que las reglas implícitas en un dibujo no se refieren a convenciones más o menos ‘vagas’ sino a propiedades de la geometría proyectiva; además expone algunas propuestas para la enseñanza que van más allá del estudio de las representaciones desde dibujo técnico.

La interpretación de dibujos de objetos tridimensionales puede remitirnos al trabajo de Burton et al. (1986) realizado con futuros profesores. También nos podemos fijar en uno de los test prácticos de la primera encuesta de la APU sobre Educación Primaria (véase Dickson, Brown & Gibson, 1984) que consistía en observar cómo trasladaban los alumnos dibujos de construcciones tridimensionales a modelos hechos con cubos de madera. Informan de los problemas que surgieron con algunas construcciones y de la manera de proceder de los alumnos que hicieron las construcciones correctamente.

Cabe mencionar también trabajos que se han centrado en otras representaciones de los sólidos, por ejemplo, en las *vistas planas,* en los dos sentidos (Lappan y Winter, que se resume en Dickson, Brown & Gibson, 1984), en las vistas ortogonales de las formas tridimensionales (Ben Chaim, Lappan, & Houang,1989; Gaulin, 1985; Gorgorio, 1998), en los desarrollos planos (Cohen, 2003; Mezquita, 1992, Potari & Spiliotopoulou, 2001), y/u en otro tipo de tareas, por ejemplo, la descomposición de sólidos, (Obara, 2009). Desde estos estudios se vislumbra de manera amplia la línea de investigación referida a la representación en el contexto de las formas tridimensionales.

Finalizo el apartado planteando como problemática la exploración a partir de las actividades del IOWO, a las que nos hemos referido en la primera parte del trabajo, al mostrar la riqueza del mundo de los sólidos. Freudenthal (1983, p. 307) ha expresado que en vano ha buscado alguna investigación sobre estas cuestiones pero ha observado que el proceso de aprendizaje para tales actividades es posible con los niños de siete años y puede ser necesario para los de dieciocho años. Tenemos pues otra problemática sobre la que valdría la pena indagar.

Con lo expuesto hasta podemos pensar que hemos encontrado una fuente inagotable de problemáticas para la investigación en las que se usan los sólidos y/o sus representaciones como situación-contexto para la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos curriculares. Ahora bien, ¿estas problemáticas han despertado interés en la investigación? ¿En cuáles parece que se está investigando en la actualidad?

La investigación en geometría espacial en revistas y congresos de carácter internacional

No ha sido mi intención hacer una revisión exhaustiva para calibrar la cantidad de investigación desarrollada en torno a la geometría de los sólidos a nivel internacional. Centrándome primero en la investigación realizada en nuestro país, he examinado las actas de todos los simposios de la SEIEM y números de las revistas Enseñanza de las Ciencias (EC) y Educación Matemática (EM), donde no se tiene que superar la barrera de la lengua para publicar y son medios con gran impacto en los que podemos difundir nuestros trabajos de investigación. Para hacernos una idea de algunas temáticas que se priorizan en la actualidad que puedan tener relación con la investigación en geometría de los sólidos, he consultado el Programa del último ICME 11, celebrado en el 2008, y las actas de los PME30 a PME33, celebrados desde el 2006 al 2009. Para las revistas, he elegido los números de los últimos 3 años de Educational Studies in Mathematics (ESM) y Journal for Research in Mathematics Education (JRME). La elección ha estado motivada simplemente por intereses personales. Comentando esta revisión intentaré explicar cómo ha evolucionado esta línea de investigación en España y hacia dónde se dirigen otros trabajos que se han realizado fuera del país.

La geometría de los sólidos en EC, EM y en los Simposios de la SEIEM.

Si bien no ha sido muy numerosa la presencia de artículos en las revistas de Enseñanza de las Ciencias (EC) y de Educación Matemática (EM) que versen sobre la geometría de los sólidos, cabe hacer referencia a los dos artículos que se publicaron en EC (Guillén, 2000, 2001) y a los otros 3 que se publicaron en EM (Guillén, 2004, 2005; Guillén y Puig, 2006). Así pues, el trabajo se distribuyó de manera bastante regular entre estas dos revistas desde el 2000 al 2006. Desde entonces se han publicado 2 artículos en EC, que se refieren al volumen y a la noción de dimensión respectivamente (Garbin y Mireles, 2009; Fernández, Solano y Jiménez, 2007).

Al fijarnos en los simposios de la SEIEM, la geometría tuvo un lugar señalado en el tercer simposio, en 1999, pues uno de los seminarios se organizó en torno a la enseñanza/aprendizaje e investigación en esta materia. Sin embargo, la investigación relacionada con la geometría de los sólidos no ha tenido un lugar destacado hasta este simposio. Ahora bien, su presencia en comunicaciones sido bastante regular desde el 2001, año en que se reorganizó la estructura del congreso y se empezó a dar esta posibilidad; las referencias que hemos indicado en la sección anterior, al describir mi línea de investigación con sus ramificaciones, dan cuenta de ello. También han sido muy frecuentes las presentaciones que se han realizado en el grupo de trabajo de Geometría. Si bien cabe aclarar que en todos estos años sólo se ha presentado una comunicación relativa a los sólidos que no se desarrolla en mi línea de investigación. En ella se tratan problemas de visualización (Fernández, Cajaraville, Godino, 2007).

Consultando en ESM, JRME, ICME y PMEs

En los números de las revistas revisadas he seleccionado un artículo (Mashietto & Bartolini, 2009) en el que se describe un experimento de dibujo en perspectiva en clases de 4º a 5º grado de la escuela primaria y tres artículos sobre visualización (Gal & Linchevski, 2010; Kotsopoulos & Cordy, 2009; Nemirovsky & Ferrara, 2009), si bien estos últimos no se centran en la geometría de los sólidos, plantean el problema desde un punto general.

Los 3 trabajos que se presentaron en el Topic Study Group “Research & development in the teaching & learning of geometry” del ICME11 que contemplaban los sólidos de alguna manera centraban la atención en:

i) habilidades espaciales (entre las que se incluía las vistas ortogonales) de estudiantes de 7 a 11 años,

ii) el desarrollo de destrezas espaciales y visuales de profesores de la escuela elemental usando modelos físicos y dinámicos (se exploran relaciones en formas bi y tridimensionales) y

iii) la enseñanza de la geometría de los sólidos en la escuela elemental (se observan maestras en su planificación y práctica).

Considerando que este último trabajo (Olvera, Guillén, Figueras, 2008) se desarrolla en mi línea de investigación, cabe señalar que los temas preferentes en relación con los sólidos se refieren al desarrollo de destrezas y habilidades visuales en los estudiantes o en el profesor.

Cabe señalar también que uno de los Topic Study Group que se distinguen en ICME11 se denomina “Visualization in the teaching & learning of mathematics”, y al contemplar los trabajos que se presentan en las actas de los PMEs examinados, se corrobora el ínterés que sigue despertando esta línea de investigación.

Ello se constata también en la revisión que hace Presmeg (2006) de la investigación en visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde los trabajos que se han presentado en los PME. Su revisión comienza en 1988. En este trabajo se da cuenta de cómo ha re-emergido la investigación en ‘imágenes’ desde la psicología después de la interrupción causada por el predominio del conductismo en la primera mitad del siglo 20 y de cómo la investigación sobre visualización en Educación Matemática comenzó lentamente desde esta base psicológica a finales de los 70 y principios de los 80.

Quiero destacar cómo el mundo de los ordenadores ha ampliado considerablemente el rango de ayudas para la visualización: su presencia en las clases de matemáticas está fomentando también el desarrollo de la investigación en esta área. En relación con los sólidos, la revisión que hemos realizado de los PMEs constata que esta orientación es la que ocupa un lugar dominante, bien centrada en la visualización bien en la representación. No me voy a centrar en esta problemática considerada desde un entorno dinámico en 3D; la geometría con las nuevas tecnologías se trata en otro trabajo de este seminario.

A modo de conclusión. Algunas reflexiones

¿Qué podemos concluir pues de esta revisión? ¿Hay poca investigación relativa a la geometría de los sólidos?

Es claro que si miramos la investigación desde los sólidos, al igual que si la miramos desde otra área de la geometría, podemos concluir que no es suficiente. Sin embargo, en este final del trabajo, el énfasis no voy a ponerlo en ello.

Quiero insistir, por un lado, en la gran variedad de problemáticas relativas a los sólidos sobre las que se podemos investigar. Aquí hay una invitación para ello.

Por otro lado, quiero hacer hincapié en los diferentes espacios que tenemos en la actualidad donde podemos difundir el trabajo realizado. Es claro que lo que se considera como objeto de investigación no lleva normalmente a una distinción por materias. Observando los Seminarios que se han propuesto en los distintos Simposios de la SEIEM puede notarse cómo se ha conjugado este tipo de organización con la inclusión de otras líneas de investigación con gran peso en la investigación en Didáctica de la Matemática. Los grupos de trabajo que existen en estos Simposios también dan cuenta de ello.

Esta distinción también puede notarse, por ejemplo, en los Topic Study Group del ICME11. La investigación descrita en este trabajo como referida a la geometría de los sólidos puede encajar en diferentes Topic Study Group; entre ellos, en los denominados: “Research & development in the teaching & learning of geometry”, “Reasoning, proof & proving in mathematics education”, “Visualization in the teaching & learning of mathematics”, “Mathematical applications & modelling in the teaching & learning of mathematics”, “New technologies in the teaching & learning of mathematics”, “Research & development in the teaching & learning of advanced mathematical topics, “Learning & cognition in mathematics: Students’ formation of mathematical conceptions, notions, strategies, & beliefs”,… Y la lista puede continuar.

En lo que quiero centrar la atención especialmente es en el proceso de transferencia de resultados de las investigaciones en las clases del nivel correspondiente. En la década de los 90 proliferaron a nivel internacional las reformas curriculares y en todas ellas la geometría era un valor en alza. Actualmente hay una gran variedad de investigaciones realizadas en didáctica de la geometría de los sólidos cuyos resultados se pueden aplicar en las clases, bien por los modelos de enseñanza propuestos, bien porque estos trabajos han subrayado dificultades y errores de los estudiantes. También se debe mencionar el impacto tecnológico. Los ordenadores actuales y el *software* desarrollado, han permitido alcanzar unos grados de visualización y mecanización que no podemos desestimar. Sin embargo, el gran reto sigue siendo que la geometría de los sólidos vuelva a “todas” las clases. Estudios que hemos realizado en México y en Valencia informan de que todavía queda mucho camino por recorrer.

A mi entender, una posible explicación al panorama actual del estudio de esta materia en los diferentes niveles escolares la encontramos en la formación que tienen los profesores en relación con la enseñanza de la geometría de los sólidos. La mayoría de los profesores no se sienten preparados para dirigir experiencias de descubrimiento, para animar a explorar las ideas geométricas utilizando construcciones, el laboratorio de materiales, para trabajar ideas prácticas, pues ellos mismos no tuvieron experiencias similares en su papel de estudiantes. Los libros de texto que se ofrecen desde las diferentes editoriales no reflejan los cambios de enfoques sugeridos en algunos currículos ni otros resultados de la investigación relativos a procesos de enseñanza/aprendizaje de la geometría desde los sólidos.

Tampoco proporcionan experiencias de descubrimiento para desarrollar la geometría de los sólidos ni centran la atención en los aspectos creativos de la materia. Desde luego, no muestran la riqueza que proporcionan éstos como contexto para tratar diferentes contenidos curriculares y diferentes aspectos de la geometría. Aunque se es consciente de la necesidad de poner énfasis en el aspecto creativo y en la resolución de problemas, los cursos que predominan son los sistemáticos. El gran reto puede ser la formación de los profesores en relación con la geometría de los sólidos en el master en Profesor/a de Educación Secundaria (Matemáticas) y en otros cursos de formación o desarrollando otros planes de perfeccionamiento.

Ya para finalizar voy a referirme a los encuentros entre compañeros como un medio que puede permitir avanzar en esta dirección; reuniones entre los que están investigando en una misma línea de investigación, en didáctica de la geometría, o encuentros como éste favorecen la sensibilización ante determinadas problemáticas de investigación, en este caso referidas a la geometría de los sólidos, al captar la riqueza que conlleva este contexto para la enseñanza/aprendizaje de la geometría.

Referencias

Ben-Haim, D.; Lappan, G.; Houang, R.T. (1989). Adolescents' Ability to communicate Spatial Information: Analyzing and Effecting Students' Performance. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20, pp. 121-146.

Bishop, A. J. (1979). Visualising and Mathematics in a Pre-Technological Culture. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, pp. 135-146.

Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education –A review. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11 (3), pp. 257-269.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh & Landau, (eds). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press, pp. 175-203.

Bishop, A. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización. En Antología de Educación Matemática. *Grupo de estudios sobre Enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato. México: Centro de Investigación y estudios Avanzados del IPN*, pp. 29-42.

Burton, L.; Cooper, M. & Leder, G. (1986). *Representations of three-dimensional figures by mathematics teachers in-training.* In Univ. of London Inst. of Education., (eds), pp. 81-86.

Castelnuovo, E. (1963). *Didactica della Matematica Moderna*. Firenze: La Nuova Italia. [Trad. castellana, Didáctica de la matemática moderna. México: Trillas, 1970].

Castelnuovo, E. (1969). Les transformations affines dans le 1er cycle de l'ecole secondaire. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 1 (3), pp. 274-288.

Castelnuovo, E. (1979). *La Matematica. La geometria*. Firenze: La nuova Italia. [Trad. catalana: La matematica. La geometria. Barcelona: ketres, 1981].

Castelnuovo, E.; Gori-Giorgi, D. & Gori-Giorgi, C. (1976). La Géométrie projective à L' École. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7 (4), pp. 443-463.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Grouws, D. A. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, pp. 420-464.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In Paterman, N.; Doughery, B. J. & Zillox J. (eds). *Proceedings of the 27th International Conference of Psychology in Mathematics Education*. Volume 2, pp. 229-236.

Cooper, M. & Sweller, J. (1989). Secondary school students' representations of solids. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20 (2), pp. 202-212.

Coriat, M. (2010). *Educación Matemática Infantil*. Materiales de estudio para la asignatura del mismo nombre. Granada: Universidad de Granada.

Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*. Oxford: Holt, Rinehart & Winston. [Trad. castellana: El aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 1991].

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In Mammana, C. & Villani, V. (eds). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. Dordrecht: Kluwer, pp. 37–52.

Fernández, E.; Solano, I. y Jiménez E. (2007). ¿Tamaño o volumen? *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 25 (3), pp. 341-355.

Fernández, T.; Cajaraville, J.A.; D. Rodino, J. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En Bolea, P.; Camacho, M. y Flores, P. (eds). *Investigación en Educación Matemática. XI Simposio de la SEIEM.* Tenerife: Universidad de La Laguna, pp. 189-197.

Fielker, D.S. (1979). Strategies for Teaching Geometry to Younger Children. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, pp. 85-133.

Figueras, O; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y Sáiz, M. (2001). Diseño del proyecto Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas. Co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) (con clave G37301-S).

Filloy, E. y col. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Investigaciones en Matemática Educativa. México, D. F: Ed. Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 3 (2/4), pp. 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1984): *En todos los niveles: ¡Geometría*!. En I.C.E. de la U. de Zaragoza, pp. 15-34.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74 (2), pp. 163-183.

García, M.A. (2009). *Modelo para categorizar el contenido de la geometría de los sólidos en la ESO. Su aplicación a tres manuales escolares*. (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

García, M. A. y Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la ESO a libros de texto de tres editoriales. (Aceptada para su publicación en el XIV simposio de la SEIEM).

Garbin, S. y Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la noción de dimensión en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 27 (2), pp. 223-241

Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-Dimensional shapes and relations. In Streefland, L., (ed). *Proceedings of the 9th International conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Holanda: State Univ. of Utrech, pp. 53-71.

González, E. (2006). *Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría de los sólidos a profesores de primaria en formación*. (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

González, E.; Guillén, G.; Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. En Bolea, P.; González, M.J. y Moreno M. (eds). *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca, pp. 195-204.

González, E.; Guillén, G.; Figueras, O. (2008). Algunos elementos del Modelo de Competencia inicial para la Enseñanza de la geometría de los sólidos en Primaria. Análisis de un Modelo de Enseñanza en Magisterio, En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M. y Blanco, L.J. (eds.). *Investigación en Educación Matemática Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Badajoz, pp. 295-305.

Gorgorió, N. (1996). Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. En Puig, L. y Gutiérrez, A., (eds). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia: Universitat de València, vol. 3, pp. 19-26.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in mathematics*, vol. 35, pp. 207-231.

Guillén, G. (1991). *Poliedros.* Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. En Puig, L. y Gutiérrez, A., (eds). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia: Universitat de València, pp. 43-50.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis doctoral, (Publicada en 1999 en la Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes). Valencia: Universitat de València.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18 (1), pp. 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, vol.19 (3), pp. 415-431.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, vol. 16 (3), pp. 103-125.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, vol. 17 (2), pp. 117-152.

Guillén, G. (2006). *Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas*. [http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat] [Recuperada el 15 de junio de 2010].

Guillén, G. (2007). Investigación sobre formación de profesores en geometría de los sólidos. Una pagina web con el mundo de los sólidos como contexto. *Texto actualizado de la ponencia impartida en el departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*. México D.F. (Sin publicar).

Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta. En Castro, E. y De la Torre, E. (eds). Investigación en Educación Matemática. *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).*. A Coruña: Universidade da Coruña, pp. 219-228.

Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso taller como técnica para la obtención de datos. En Maz, A.; Gómez, B,; Torralbo, M. (eds). Investigación en Educación Matemática. *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Córdoba: España, pp. 227-234.

Guillén, G. y Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudio de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En Gil, F.; Godino, J.D.; Moreno, M.F. y Socas, M. (eds). Investigación en Educación Matemática. *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Almeria, pp. 183-188.

Guillén, G. y Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. *Educación Matemática,* vol. 18 (3), pp. 65-102.

Guillén, G.; González, E. y García, M.A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En González, M.J.; González, M.T. y Murillo, J. (eds). Investigación en Educación Matemática *Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Santander, pp. 247-258.

Gutiérrez, A. (1992a). Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional Geometry. *Structural Topology,* vol. 18, pp. 31-48.

Gutiérrez, A. (1992b). Procesos y habilidades en visualización espacial. En Gutiérrez, A. (ed). *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.* Geometría. México: CINVESTAV-PNFAPM, pp. 44-59.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a framework. In Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, 4 vols. Valencia: Universitat de València, pp. 3-19, vol. 1.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21 (3), pp. 237-251.

Hegarty, M. & Waller, D. A. (2005). *Individual differences in spatial abilities*. In Shah, P. & Miyake, A. (eds). The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking. Cambridge: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Ben Haim, D., Holes, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (eds). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 70–95.

Hoffer, A. (1977). *Mathematics resource project: Geometry and visualization. Palo Alto: Creative Publication.*

IOWO (1976). Five years IOWO. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7 (3), pp. 189-367.

Kotsopoulos, D. & Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol 70 (3), pp. 259-274

Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R, E. (2002). Revising the visualizer/verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction*, vol. 20, pp. 47-77.

Lang, B. & Ruane, P. (1981). Geometry in English Secondary Schools. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 121-132.

López, L. (2009). *La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria.* (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

López, L. y Guillén, G. (2009). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. Estudio exploratorio. En Murillo, J.; González, M.T. y González, M.J. (eds). Investigación en Educación Matemática. *Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Santander, pp. 273-283.

López, L. y Guillén, G. (2009). Exploración con espejos y enseñanza/aprendizaje de la geometría en la educación secundaria obligatoria. Sobre la actuación de la profesora y la transferencia de procedimientos. (Aceptada para su publicación en el XIV simposio de la SEIEM).Lérida

Ma, H.L., Wu, D., Chen, J.W., Hsieh, K.J. (2009). Mithelmore's development stages of the right rectangular prisms of elementary school students in Taiwan. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H. (eds). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).* Thessaloniki, Greece, pp. 57-64, vol. 4.

Maschietto, M. & Bartolini, M.G. (2009). Working with artefacts: gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid. *Educational Studies in mathematics*, vol 70 (2),pp. 143-157

Maldonado, S. (2005). *Indicadores de diagnóstico para la implementación de una web geométrica con alumnos deficientes auditivos en aulas inclusivas.* Tesis doctoral. Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica: Barcelona.

Mesquita, A. L. (1992). The types of apprenhension in spatial geometry: Sketch of a research. *Structural Topology*, vol. 18, pp. 19-30.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 17 (2), pp. 183-195.

Mitchelmore, M.C. (1976). Cross-Cultural Research on Concepts of Space and Geometry. In Martin, J.L. (ed). *Space and geometry*. Columbus, Ohio, USA: ERIC, pp. 143-184.

Mitchelmore, M.C. (1980 a). Prediction of Developmental Stages in the Representation of Regular Space Figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 11, pp. 83- 93.

Mitchelmore, M.C. (1980 b). Three-Dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11, pp. 205-216.

N.C.T.M. (1973). Geometry in the mathematics curriculum, 36th Yearbook. Reston, VA, USA: N.C.T.M.

Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in mathematics*, vol 70 (2), pp. 159-174

Obara, S. (2009). Decomposign solids to develop spatial sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 14 (6), pp. 336-343.

Olvera, F. J.; Guillén, G. & Figueras, O. (2008). Teaching geometry in elementary school. *En 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11).* Monterrey, Nuevo Leon, México. http://icme11.org. (Recuperada el 9 de junio de 2010), Topic Study Group 12, Abstracts and Schedule.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “Seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 19 (1), pp. 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of Space and Students’ conceptions at High School Level. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, pp. 575-593.

Pérez, S. (2006). *Algunos resultados sobre la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria.* (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En Bolea, P.; Camacho, M. y Flores, P. (eds). Investigación en Educación Matemática. *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).*. Tenerife: Universidad de La Laguna, pp. 295-305.

Pérez, S. y Guillén, G. (2008). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M. y Blanco, L.J. (eds). *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Badajoz, pp. 307-319.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2vols. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. castellana: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos, 1966].

Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (2001). Patterns in children’s drawings and actions while constructing the nets of solids: the case of the conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 23(4).

Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 23, pp. 595–610.

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In English, L. (ed*). Mathematical reasoning—analogies, metaphors and images.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 299–313.

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In Gutiérrez, A. & Boero, P. (eds). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 205-235.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Guillén, G. (1983). *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en la EGB y Escuelas de Magisterio*. Valencia: ICE de la U. Literaria.

Radford, L., Bardini, C., Sabena, C., Diallo, P., & Simbagoye, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: A semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (eds). *Proceedings of the 29th PME International Conference*, pp. 113–120, vol. 4.

Ranucci, E. R. (1952). *Effect of the Study of Solid Geometry on certain aspects of Space Perception Abililities.* Doctoral dissertation, [Publicada en 1983 by University Microfilms Internacional. USA: An Arbor, Michigan]. New York: Columbia University.

Sarasua, J. (2010). *Hacia una categorización de los objetivos geométricos. Propuesta de nuevos descriptores de los niveles de Van Hiele para la representación externa de figuras planas*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales: Bilbao.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction)* - the Wiskobas Project. Dordrecht: D. Reidel.

Vladimirskii (1949). An experimental verification of a meted and system of exercises for developing spatial imagination. In Kilpatrick, J.; Wirszup, (eds.) (1969-1975). *Soviet Studies in Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. Vol. V. The development of Spatial Abilities. Chicago: University of Chicago, pp. 57-118.

Vollrath, H.J. (1976). The place of geometry in mathematics teaching: An analysis of recent developments. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, pp. 431-442.

Wu, D.B., Ma, H.L. & Chen, D.C., (2006). The developmental stages of representations of simple regular space figures of elementary school students. In Novotna, J. (eds). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mahtematics Education (PME).* Prague, Checz Republic, pp. 430-437, vol.1.