

DESARROLLO DEL
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO
DE LOS FUTUROS PROFESORES
DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE
LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL
Y LOS SISTEMAS DE
REPRESENTACIÓN

PEDRO GÓMEZ

Universidad de Granada

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL Y LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN¹



PEDRO GÓMEZ

Universidad de Granada

RESUMEN

Presentamos los primeros resultados de un estudio exploratorio sobre el desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas con respecto a las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación. Estos resultados se obtuvieron al codificar y analizar las grabaciones de clase y las producciones de estudiantes del último curso de Matemáticas en una asignatura de didáctica de las matemáticas. Se encontró que las producciones y las actuaciones de los alumnos pasan por diferentes estados que permiten identificar tanto algunas dificultades, como momentos en los que surgen reorganizaciones conceptuales.

ABSTRACT

We present the first results of an exploratory study on the didactical development of mathematics pre-service teachers concerning the notions of conceptual structure and representation systems. These results were obtained from the codification and analysis of class audio recordings and the productions of last year Mathematics students in a methodology course. We found that the students' productions and actions go through different states from which it is possible to identify some of their difficulties and the moments in which conceptual reorganizations take place.

FORMACIÓN DE PROFESORES, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

En su revisión de la investigación sobre conocimiento del profesor y formación de profesores de matemáticas, Cooney (1994) promueve la formación de profesores como un campo de indagación sistemática que se está basando en la importancia de la cognición, el contexto y el paradigma constructivista y hace dos preguntas con respecto al conocimiento del profesor de matemáticas y a su formación: “¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?” (p. 608). Simon (1995), con el propósito de “con-

¹Agradezco a Consuelo Cañadas y Antonio Codina por sus comentarios a una versión previa de este documento.

tribuir al diálogo acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento” (p. 115) propone el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas como una posible respuesta a estas preguntas.

Como investigadores en formación de profesores, nos interesamos por tener un constructo que aborde las cuestiones anteriores, de tal forma que fuese posible configurar y justificar el diseño curricular del programa de formación a nuestro cargo. Éste es una asignatura para estudiantes de matemáticas de último año que quieren llegar a ser profesores de matemáticas de secundaria. Nos centramos en el propósito de la asignatura de formar estos futuros profesores en un aspecto particular de su futura práctica docente: la planificación de unidades didácticas. Por lo tanto, esta parte de la asignatura se centra en el diseño curricular. El desarrollo curricular y la gestión de clase se trabajan en otra asignatura de prácticas que está parcialmente relacionada con la nuestra. Trabajamos entonces dentro de una visión local del diseño curricular en la que hay un diseño global que enmarca el problema y el foco de interés es en un tópico matemático específico (que permite mayor profundidad en el análisis).

Se pretende que, al terminar la asignatura, los futuros profesores tengan un conocimiento y unas capacidades que les permitan realizar estas actividades de planificación de manera eficiente (con respecto al aprendizaje de los estudiantes). Por lo tanto, es necesario determinar qué conocimiento deben tener los profesores para que esto sea posible. Y para ello, es necesario postular una descripción de lo que consideramos que debe ser el proceso de planificación de una unidad didáctica. Vemos esta planificación como la secuenciación de actividades de aprendizaje (incluyendo la evaluación) por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático. El ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon nos dio ideas para postular el *análisis didáctico*² como nuestra propuesta de la manera como el profesor debe llegar a producir la planificación. En ella distinguimos la relación entre el diseño global y el diseño local; las actividades que son necesarias para realizar el diseño local; y el papel que juega el conocimiento didáctico en el proceso.

En el análisis didáctico registramos cuatro de actividades que el profesor debe realizar para el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza. El *análisis cognitivo*, como la consideración y especificación de las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden cometer al realizar las tareas que componen las actividades de instrucción. El *análisis de contenido*, como la descripción estructurada del tópico en el que se basa la actividad de instrucción desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, su análisis fenomenológico y sus posibilidades de modelización. El *análisis de instrucción*, como la descripción de las actividades que se propondrán a los alumnos teniendo en cuenta la variedad de tipos de tareas que surgen del análisis de contenido, las necesidades de los alumnos (con motivo del análisis cognitivo), y los materiales y recursos disponibles. El *análisis de actuación*, como la descripción del estado cognitivo de los alumnos con motivo de las actividades, información que alimenta un nuevo ciclo del análisis didáctico. Desde esta perspectiva, el diseño y puesta en práctica de actividades de enseñanza es un proceso sistémico, dinámico y cíclico.

² Utilizamos el término “análisis didáctico” de manera genérica, aunque existe una tradición alemana que ya lo ha utilizado con el significado que pretendemos darle aquí (Klafki, 1958/2000, comentado en Van Driel et al., 2001)

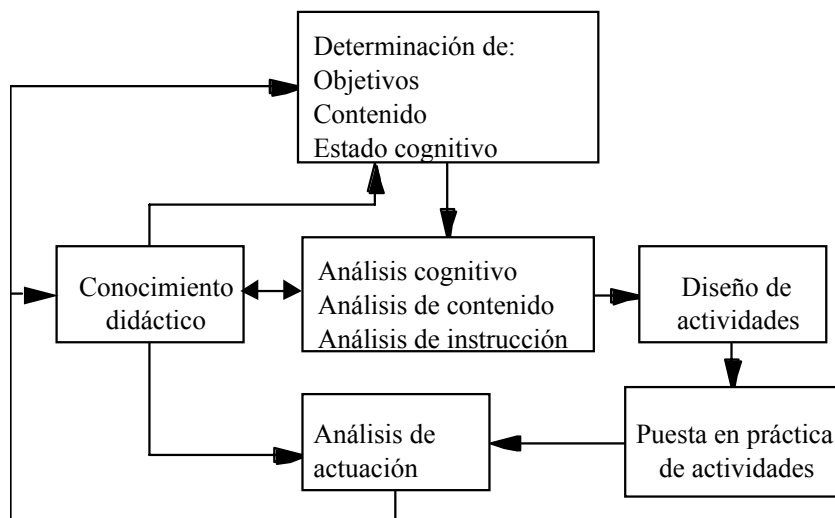


Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

La gráfica de la Figura 1 ubica los cuatro análisis que se acaban de describir y los relaciona con el diseño curricular global, el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades de aprendizaje, y el conocimiento didáctico del profesor. Recordemos que nuestro interés se centra en el diseño curricular local que considera una estructura matemática específica. A partir del diseño curricular global y de su conocimiento del estado cognitivo de los estudiantes, el profesor determina unos objetivos y un contenido. Con esta información y su conocimiento didáctico, y realizando los análisis cognitivo, de contenido y de instrucción, el profesor produce el diseño de una o más actividades de aprendizaje que lleva a la práctica. El análisis de la actuación de los estudiantes cuando ellos abordan las tareas que componen las actividades de aprendizaje produce información que, por un lado, le permite al profesor reformular su percepción del estado cognitivo de sus estudiantes y, por el otro, puede llevarlo a adaptar algunos aspectos de su conocimiento didáctico.

La postulación del análisis didáctico como la descripción de la manera “ideal” de realizar actividades de diseño curricular a nivel local nos permite determinar algunos de los conocimientos que pueden ser necesarios para realizarlo. Podemos organizar estos conocimientos en tres categorías: a) sobre la noción de currículo; b) sobre nociones de la didáctica de la matemática que consideramos relevantes en el problema; c) sobre la utilización de a) y b) en una estructura matemática particular para efectos de realizar el análisis didáctico. En el plan de formación en el que trabajamos se pretende que los futuros profesores construyan un conocimiento sobre a) y b) y desarrollen capacidades para realizar c). El conocimiento didáctico es la integración de a), b) y c). El conocimiento didáctico es un constructo psicológico que tiene un conocimiento disciplinar de referencia (en este caso, la didáctica de la matemática); que tiene una utilidad práctica (el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas); y cuya puesta en juego se enmarca dentro de una estructura analítica (el análisis didáctico). Las nociones de la didáctica de la matemática a las que se refiere este conocimiento en nuestro caso han sido denominadas *organizadores del currículo* por Rico et al. (1997) quienes las consideran como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45). En Gómez (2001) hemos presentado con algún detalle la descripción de las

nociones que hacen parte del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelización.

SIGNIFICADOS, CARACTERIZACIONES, DIFICULTADES, REORGANIZACIONES Y FACTORES

Vemos el desarrollo del conocimiento didáctico como la construcción por parte del futuro profesor de significados cada vez más técnicos a partir de significados parciales e intuitivos con los que él llega al plan de formación. Los futuros profesores construyen significados personales cuya reorganización constituye el conjunto de procesos sociales del grupo de futuros profesores que a su vez condicionan la construcción de significados individuales. Para cada concepto (o relación), los significados (individuales o sociales) evolucionan en el tiempo de significados parciales a significados más técnicos. Suponemos que es posible hacer un seguimiento de estos estados de conocimiento a partir de las actuaciones de los individuos y los grupos. Para ello introducimos la categoría *caracterizaciones* con la que pretendemos registrar la expresión, en las producciones y las actuaciones de los futuros profesores, de los significados parciales que ellos van construyendo en la medida en que utilizan los conceptos para realizar tareas que se les asigna en el plan de formación. Mientras que las caracterizaciones surgen de los datos, el registro de las dificultades y las reorganizaciones se origina en las caracterizaciones. Con *dificultades* nos referimos a dificultades de los futuros profesores al hacer la transición de significados intuitivos y parciales a significados más técnicos y completos. Las dificultades se identifican, por lo tanto, con significados (que se registran como caracterizaciones) que permanecen en el tiempo a pesar de estímulos que pretenden hacerlos evolucionar (principalmente esfuerzos de la instrucción). Por lo tanto, las dificultades se identifican en un juego en el que interviene, por un lado, la comparación de dos producciones sucesivas de un grupo de alumnos (y sus correspondientes caracterizaciones) con la que es posible determinar las caracterizaciones que permanecen estables y, por el otro, aquellos aspectos de la instrucción que han tenido lugar en el periodo entre las dos producciones y que han pretendido hacer evolucionar esas caracterizaciones. Con *reorganizaciones* nos referimos a transiciones de un significado parcial a otro. Por lo tanto, las reorganizaciones surgen de la comparación de las caracterizaciones de dos producciones sucesivas de un grupo.

Denominamos *factores* a aquellos aspectos del programa de formación y de los participantes que pueden afectar (y ayudar a explicar) el proceso de construcción de significados. Caracterizamos este proceso en base a las caracterizaciones de las producciones de los grupos y a las dificultades y reorganizaciones que se deducen de ellas cuando se comparan en el tiempo. Tanto la evolución de las caracterizaciones (dificultades y reorganizaciones), como las caracterizaciones mismas pueden ser producto de diferentes factores. Los organizamos, de acuerdo a las dimensiones del currículo, en cuatro categorías:

Los *aspectos de instrucción*, como expresión del diseño curricular del programa y de su puesta en práctica. El propósito de la instrucción es precisamente el de lograr que los futuros profesores construyan significados cada vez más técnicos. Aquí incluimos aspectos como la exposición en clase por parte de los formadores y la reacción y comentarios de los formadores a las actuaciones y producciones de los futuros profesores.

Los *aspectos sociales*, en los que se incluyen la interacción entre futuros profesores y formadores en clase, junto con el trabajo en grupo de los futuros profesores. En este factor se expresa explícitamente la manera como los significados sociales se construyen a partir del trabajo colaborativo en base a los signi-

ficados individuales y la manera como estos significados individuales cambian con motivo de y se adaptan a los significados sociales.

Los *aspectos cognitivos* de los futuros profesores. Los futuros profesores llegan a la asignatura con una cierta experiencia docente, con unos conocimientos (esencialmente matemáticos) y con unas creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (entre otros). Todo este bagaje intelectual sirve de base cognitiva para la construcción de los significados individuales.

Los *aspectos conceptuales* relacionados con cada una de las nociones cuyo significado técnico se busca construir. Éstas son nociones complejas y la manera como los futuros profesores construyen sus significados depende de la estructura conceptual de cada una de estas nociones.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Nuestro problema de investigación se centra en la exploración y caracterización de algunos aspectos del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores dentro de un esquema específico de formación inicial. La pregunta que abordamos para el estudio que reportamos aquí es la siguiente:

¿Cuáles son las cuestiones (caracterizaciones, dificultades, reorganizaciones) significativas que emergen en el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores con respecto a las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación?

El estudio se realizó en el marco de la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* de la Universidad de Granada que cursan estudiantes de último curso de la licenciatura de matemáticas. Participaron dos profesores, uno como investigador y el otro como observador. Los alumnos se organizaron en ocho grupos (de tres a cinco alumnos por grupo) que escogieron diversos tópicos de las matemáticas de Secundaria.

El tratamiento de cada uno de los conceptos del análisis de contenido buscó seguir un esquema general común, en el que los grupos produjeron nuevas versiones de la estructura conceptual de su tópico y mejoraron la descripción del mismo en la medida que avanzaban en el desarrollo de su conocimiento didáctico. Cada grupo presentaba su nueva versión en clase y los compañeros y profesores criticaban y hacían aportes a la misma. Se usaron dos fuentes de información: las grabaciones de audio de las clases y las producciones de los diferentes grupos.

Estas dos fuentes de información nos permitieron identificar episodios de las grabaciones y aspectos particulares de las producciones que caracterizan el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores en base a las caracterizaciones y factores mencionados anteriormente. La construcción y consolidación de los factores factores por un lado, como de las caracterizaciones por el otro, se realizó en un proceso iterativo y cíclico de codificación, análisis y reformulación de las dimensiones en cuestión. La Figura 2 presenta un ejemplo de una estructura conceptual propuesta por el grupo *Iniciación a la probabilidad*.

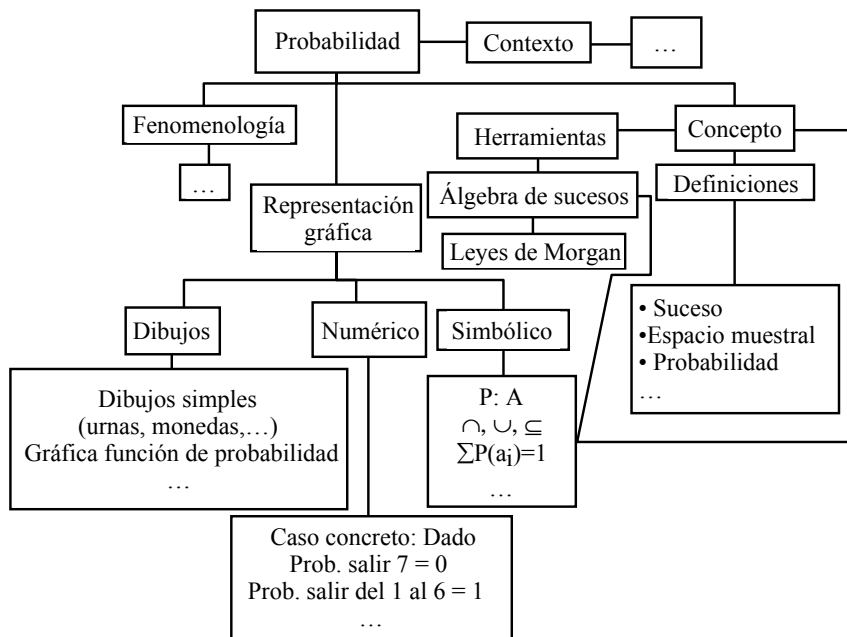


Figura 2. Estructura conceptual del grupo Iniciación a la Probabilidad

ALGUNOS RESULTADOS

Los resultados que se presentan aquí son producto del análisis en curso que se hizo de la transcripción y codificación de las grabaciones de audio de las clases y de las producciones que los alumnos realizaron para ser presentadas en clase. Estos análisis nos permitieron identificar una serie de caracterizaciones, dificultades y reorganizaciones de acuerdo con lo descrito más arriba. Presentamos a continuación una descripción esquemática de algunas caracterizaciones con respecto a los conceptos de estructura conceptual y sistemas de representación:

- A.- La estructura conceptual se presenta como un listado de temas sin organización.
- B.- La estructura conceptual se organiza en base a los organizadores del currículo.
- C.- La estructura conceptual se organiza en base a la historia.
- D.- Aparece una estructura conceptual más compleja, pero no se encuentra organizada en base a sistemas de representación.
- E.- Los sistemas de representación aparecen como algo complementario a la descripción “conceptual” de la estructura matemática.
- F.- Se crea una conciencia de que “todo está relacionado”.
- G.- Los sistemas de representación organizan la estructura conceptual.
- H.- Hay algunas conexiones globales, pero no hay conexiones puntuales.
- I.- Aparecen algunas conexiones puntuales externas.³

³Una conexión es puntual externa si conecta dos elementos de sistemas de representación diferentes (traducciones entre sistemas de representación en el sentido de Kaput (1992)). Es interna si conecta dos elementos del mismo sistema de representación (en algunos casos esto implica una transformación sintáctica en términos de Kaput).

J.- No se hacen explícitos los procedimientos de transformación sintáctica y, por lo tanto, no aparecen conexiones puntuales internas.

K.- La estructura conceptual queda completamente organizada por sistemas de representación.

L.- Se propone una jerarquía en los sistemas de representación.

M.- Aparecen conexiones puntuales internas.

Podemos describir la estructura conceptual de la Figura 2 con las caracterizaciones D, E, H e I. Es evidente que esta estructura conceptual tiene más características que se pueden considerar relevantes desde el punto de vista de los significados de estructura conceptual y sistemas de representación puestos en juego por el grupo. Aquí la clasificamos de acuerdo a la lista parcial de caracterizaciones propuesta arriba.

Es posible organizar esta lista de caracterizaciones en niveles como lo muestra la tabla 1.

Tabla 1. Niveles de caracterizaciones

Nivel	Caracterizaciones			
1	A			
2	B	C		
3	D	E		
4	F			
6	G			
7	H	I	J	K
8	M			

La determinación de estos niveles es, por ahora, arbitraria, dado que no se presenta aquí el análisis correspondiente a la dimensión factores. Sin embargo, al tener en cuenta los momentos en que aparecen algunas de estas caracterizaciones y al analizar los esfuerzos de la instrucción por hacerlas avanzar, podemos determinar algunas de las dificultades de los alumnos con respecto a los conceptos de estructura conceptual y sistemas de representación. De la misma manera, podemos identificar momentos en que se dan reorganizaciones en estas producciones. Por ejemplo, los alumnos no tienen, al comienzo del ejercicio, criterios que les permitan organizar estructuradamente la descripción de la estructura matemática; ellos utilizan conceptos previos de la asignatura para darle una estructura a la descripción (paso de A a B o C). La instrucción insiste en que se organice la estructura conceptual en base a sistemas de representación, pero esto no se logra fácilmente y constituye una dificultad para los alumnos. Esto se aprecia en las producciones y actuaciones de los alumnos que se ubican en el nivel 3. No obstante, el trabajo con los sistemas de representación genera, en diferentes momentos para diferentes grupos, la conciencia de que “todo está relacionado”, produciéndose una reorganización (paso al nivel 4) como se aprecia en el episodio 24⁴:

Ramón: Tanto en la función de segundo grado, como en el tema de las cónicas, hay muchos problemas que tú planteas que se pueden resolver tanto gráfica, como analíticamente. Es decir, yo gráficamente puedo hallar la solución y analíticamente también y coinciden [...]. Es decir, yo soy capaz de gráficamente dibujar una parábola y saber dónde están los cortes con el eje y también hacerlo con la fórmula [...].

⁴Hemos reducido la transcripción por razones de espacio.

[...]

Jorge: Todo está relacionado.

Formador: Que dos cosas estén relacionadas, no implica necesariamente que son el mismo concepto.

Jorge: Pero es que todas parten del mismo concepto.

Formador: ¿Qué quieres decir con que parten de un mismo concepto?

Jorge: Tomamos la función de segundo grado, y ya sabes la representación gráfica, y [no se entiende] la representación analítica. Luego todas parten de la función de segundo grado.

Sofía: Yo lo que quiero decir es que siempre la gráfica es una manera de representar un concepto que tú tienes escrito en expresión matemática formal. Es una manera de representar las cosas [...]. Se refieren al mismo concepto, pero con distintas maneras de destacarlo.

DISCUSIÓN

Hemos tratado de mostrar que es posible caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas. Las producciones y actuaciones de estos alumnos (y, por consiguiente, los significados parciales que ellos van construyendo) pasan por diferentes estados que permiten identificar tanto algunas de sus dificultades, como los momentos en los que surgen reorganizaciones conceptuales. Es evidente que estos estados, dificultades y reorganizaciones dependen, tanto de las características de los alumnos como del diseño y puesta en práctica del plan de formación en el que participen. Hemos propuesto los primeros esbozos de algunos modelos descriptivos del desarrollo del conocimiento didáctico de estos futuros profesores para el caso de una asignatura basada en el modelo de los organizadores del currículo.

La experiencia que, como formadores e investigadores, hemos tenido al hacer esta primera exploración nos deja ya algunas enseñanzas que parecen evidentes, pero que pueden ser importantes para la mejora y evolución del programa de formación en cuestión. Las nociones de la didáctica de la matemática son nociones complejas. Su comprensión y puesta en práctica por parte de futuros profesores que tienen una experiencia didáctica reducida es un proceso lento que pasa por diversas fases en las que se pueden encontrar obstáculos difíciles de superar. Los alumnos no superan estos obstáculos si lo único que se les ofrece es la definición de estas nociones y algunos ejemplos de las mismas. Ellos tienen que vivir experiencias en las que pongan en práctica sus significados parciales y puedan comparar sus producciones con las de sus compañeros y recibir críticas a sus trabajos.

Sin embargo, una visión de la formación inicial de profesores de matemáticas en base a las ideas constructivistas se enfrenta con dificultades aún mayores que aquellas a las que se enfrentan los profesores de matemáticas en sus clases. En el caso de la formación inicial de profesores resulta mucho más difícil diseñar situaciones de enseñanza en las que los alumnos pongan en juego sus significados parciales de tal forma que se generen perturbaciones. Esto es producto al menos de los siguientes factores. Primero, al tener muy poca experiencia docente, los futuros profesores no perciben la utilidad de las nociones en cuestión para efectos de su futura práctica docente. Segundo, la mayoría de las nociones son producto de una clasificación analítica de fenómenos matemáticos y didácticos, clasificación ésta que en algunos casos puede parecer arbitraria y en otros producir diferentes significados para la misma noción (como es el caso de la noción de sistema de representación). Tercero, la didáctica de la matemática, como campo conceptual y práctico, no tiene una estructura formal coherente y sólida que permita fácilmente la generación de contradicciones cuando sus nociones se ponen en práctica dentro de situaciones particulares.

Al no ser posible diseñar con facilidad situaciones de enseñanza que generan perturbaciones, el

desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores se hace más difícil de lo que aparenta en un principio. Para poder mejorar los programas de formación inicial se hace necesario mejorar nuestra comprensión del desarrollo del conocimiento didáctico del futuro profesor.

REFERENCIAS

- Cooney, T.J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 6, 608-636.
- Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, & J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258 Vol. 2). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Klafki, W. (1958/2000). Didaktik analysis as the core of preparation of instruction. En I. Westbury, S. Hopmann, & K. Riquarts (Eds.), *Teaching as a reflective practice: The German Didaktik tradition* (pp. 139 –159). Mahwah, NJ/ Mahwah, NJ/ London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Rico, L. (Coord.), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 2, 114-145.
- Van Driel, J.H., Veal, W.R., & Janssen, F.J.J.M. (2001). Pedagogical content knowledge: an integrative component within the knowledge base for teaching. *Teaching and Teacher Education*, 17, 8, 979-986.