

EXPERIENCIAS DE DESARROLLO PROFESIONAL  
EN MATEMÁTICAS

UN APOYO PARA LA REFORMA  
EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Editora

PATRICIA PERRY

Colaboradores

LUISA ANDRADE

CRISTINA CARULLA

MAURICIO CASTRO

FELIPE FERNÁNDEZ

PAOLA VALERO



una empresa docente®

Bogotá, 1998

## PRIMERA EDICIÓN, ENERO DE 1998

Experiencias de desarrollo profesional en matemáticas. Un apoyo para la reforma en la escuela secundaria

Editora: Patricia Perry

D. R. © 1998 una empresa docente®.

Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, archivada o transmitida en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico, de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro, sin el previo y expreso permiso por escrito de “una empresa docente” y de la editora.

Diseño carátula: una empresa docente®

una empresa docente®

Universidad de los Andes

Cra. 1 Este # 18 A - 70

Apartado Aéreo 4976 Tel.: (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 3520466 ext. 2709

Servidor WWW: <http://ued.uniandes.edu.co>

Bogotá. Colombia

ISBN 958-9216-14-5

Impreso en Colombia

# TABLA DE CONTENIDO

Prólogo .....	v
Introducción .....	vii

## ARTÍCULO DE “UNA EMPRESA DOCENTE”

Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares <i>Paola Valero, Patricia Perry, Mauricio Castro, Pedro Gómez y Cecilia Agudelo</i>	3
---	---

## ARTÍCULOS DE DIRECTIVOS

Visión institucional de las matemáticas <i>Ana Guerra y Julio C. Peñaranda</i>	41
Una propuesta para la consolidación del área de matemáticas <i>Luz Bernal y Martha Garzón</i>	49
Cambios en la organización del área de matemáticas para mejorar la comunicación <i>Miguel A. Rodríguez</i>	57
Incidencia de las relaciones interpersonales en la vida de la institución <i>Marlén Montaña y Mariela Santamaría</i>	65
La comunicación didáctica entre profesores de matemáticas: un elemento para el cambio <i>Francia Castrillón y Alicia de Cobo</i>	71
Ideas y acciones para la reunión de área de matemáticas <i>Cecilia Castillo</i>	78

## ARTÍCULOS DE PROFESORES

Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita <i>Inés de Moreno y Lilia de Castellanos</i>	89
Aproximaciones al concepto de variable <i>Mónica Mena y Eduardo Moreno</i>	101

Representación geométrica de expresiones algebraicas . . . . .	112
<i>Priscila Nieto y Magdalena Oliveros</i>	
Una propuesta para la enseñanza de ecuaciones algebraicas . . . . .	118
de primer grado	
<i>Hernán Rivera y Guillermo Barón</i>	
Una estrategia didáctica para la enseñanza de la función coseno. . . . .	125
<i>Margarita Lascano y Rosa Ramírez</i>	

## PRÓLOGO

En los últimos años ha cobrado mucha fuerza la concepción del profesor como un profesional reflexivo que tiene entre sus tareas más importantes la toma informada de decisiones y la resolución de problemas. Ligados con esta nueva concepción del papel del profesor en la enseñanza aparecen los conceptos de “investigación en el aula” o del “profesor como investigador”. Se abre así una perspectiva desde la cual es posible y tiene sentido que el profesor aborde su práctica docente no como la reacción rutinaria a lo que le va deparando su quehacer diario, sino como una búsqueda consciente e intencional de respuestas y alternativas para comprender y mejorar la propia práctica y sus resultados.

Por otro lado, la literatura relacionada con la organización y la administración escolar enfatiza el liderazgo del rector como factor relevante para el funcionamiento de la institución y la puesta en marcha de procesos de cambio en su interior. Así, pues, también para el caso de directivos-docentes se reconoce la necesidad de que ellos asuman su práctica directiva de una manera reflexiva, utilizando herramientas conceptuales y metodológicas que les ayuden a comprender la realidad de la institución que dirigen y a ejercer las funciones de su cargo efectiva y eficientemente.

En la actualidad varios programas de desarrollo profesional están propiciando la participación de profesores y directivos-docentes en investigaciones acerca de la realidad en la que trabajan; en particular, se está promoviendo que profesores y directivos indaguen sobre su propia práctica laboral para mejorarla. Ese es el caso del proyecto cuyos resultados presentamos en este libro. Dos de las tres secciones de este libro recogen los trabajos de indagación sobre su propia práctica realizados por algunos directivos-docentes y profesores de matemáticas en el marco de una estrategia de desarrollo profesional, cuyo objetivo fundamental era involucrar a los participantes en la vivencia de un proceso completo de indagación educativa. De ahí que se haya enfatizado más el hecho mismo de llevar a cabo la experiencia que los criterios de rigurosidad científica en el estudio del problema o su solución.

Dado el contexto anterior es realista y explicable esperar que se presenten deficiencias —tanto desde el punto de vista del contenido como desde el punto de vista metodológico— en los trabajos realizados puesto que para la mayoría de los participantes, esta fue su primera aproximación a la indagación sistemática de su práctica. La situación es natural y no tiene por qué preocupar si se ve como el comienzo de un proceso mediante el cual profesores y directivos van construyendo su experiencia y su conocimiento para adelantar el tipo de tarea que es la indagación.

Pero si la realización de la investigación es una tarea ardua porque exige de los participantes una serie de actitudes y comportamientos que no

necesariamente les son familiares, no lo es menos, la comunicación de los resultados y conclusiones obtenidos de sus estudios. Reconstruir el proceso vivido, elegir qué es lo que puede resultar interesante de contar, organizar toda aquella vivencia en forma tal que resulte comprensible para un lector ajeno a la situación y justificar los resultados que se hayan obtenido, son tareas que abren una oportunidad excelente para la reflexión de los participantes acerca de lo sucedido, pero también ponen en juego habilidades que no siempre ellos han desarrollado en la medida en que sería necesario.

Sin embargo, el proceso de reflexionar a posteriori con miras a producir un artículo que comunicara la experiencia fue de suma importancia. Para llevarlo a cabo, se formaron equipos de trabajo constituidos por los profesores o directivos de un mismo colegio y un investigador de “una empresa docente”. El proceso inició con una revisión del reporte final de investigación y progresó a través de la producción de versiones escritas en las que los docentes iban mejorando y completando sus reflexiones acerca de la experiencia vivida, con base en las discusiones realizadas en el equipo. Cabe destacar el papel importante que en esas discusiones jugó el investigador que apoyaba el proceso de elaboración del artículo. El investigador fue un interlocutor crítico que se involucró tanto como le fue posible en el proyecto ya realizado, con tres objetivos fundamentales: impulsar una reflexión final en los participantes, apoyar el proceso de elaboración de los artículos y editarlos.

Quiero agradecer de manera especial a mis colegas Luisa Andrade, Felipe Fernández, Paola Valero, Mauricio Castro y Cristina Carulla la dedicación y empeño que pusieron para hacer posible esta publicación.

*Patricia Perry*  
*Editora*

## INTRODUCCIÓN

Este libro es el resultado de la experiencia vivida por un grupo de investigadores<sup>1</sup> de “una empresa docente” —centro de investigación en educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes en Colombia— y un grupo de directivos-docentes<sup>2</sup> y profesores de matemáticas de quince colegios de Bogotá, en el marco del proyecto PRIME I. Este hace parte del proyecto *Potenciación de las Matemáticas Escolares a través de Red de Instituciones Educativas* (PRIME) que, en el largo plazo, pretende consolidar una red de universidades y colegios colombianos que trabajen mancomunadamente para generar y mantener en los colegios participantes una dinámica de funcionamiento que propicie y apoye las acciones tendientes a mejorar la calidad de la formación matemática de sus estudiantes.

En la fase exploratoria del proyecto, conocida como el proyecto MEN-EMA<sup>3</sup>, se realizó desde una perspectiva institucional, una primera aproximación a la problemática de la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes en los colegios participantes. Además, se puso a prueba una estrategia de desarrollo profesional. Durante 1994, esta fase congregó a diez colegios distritales de Santafé de Bogotá, con el fin de involucrar a dos de sus directivos (el rector y el coordinador de los profesores de matemáticas) y a dos de sus profesores de matemáticas de secundaria en una estrategia de desarrollo profesional basada en la realización de pequeños proyectos que siguieron el enfoque de investigación-acción. Los resultados de este proyecto exploratorio —en cuanto a la identificación y comprensión de problemas que constituyen la problemática de estudio y en cuanto a la aplicación y evaluación de la estrategia de desarrollo profesional para profesores y directivos— se encuentran en varias publicaciones nacionales e internacionales<sup>4</sup>.

PRIME I<sup>5</sup>, primera fase del proyecto PRIME, reunió a otros quince colegios de Bogotá, entre distritales y privados, para realizar una mirada más cuidadosa y metódica sobre algunos elementos que pueden ser factores

---

1. Este grupo estuvo conformado por Patricia Perry, Paola Valero, Mauricio Castro, Cecilia Agudelo y Pedro Gómez.

2. Las personas que en la institución escolar ejercen un cargo administrativo o directivo se denominan directivos-docentes pues, por lo general, han comenzado su carrera profesional como docentes. En este artículo usaremos la denominación directivos para referirnos a tales personas.

3. Esta fase exploratoria estuvo financiada por el Ministerio de Educación Nacional y la Fundación Corona.

4. Las publicaciones producidas con motivo de este proyecto, donde se podrán encontrar detalles de los diferentes aspectos del mismo, son Perry, P. et al. (1995), Valero, P. et al. (1996), Gómez, P. y Perry, P. (1996), Perry et al. (1996a), Perry et al. (1996b). Las correspondientes referencias se encuentran en el artículo “Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares” de este libro.

relevantes para la calidad de la formación matemática que los colegios dan a sus estudiantes. Uno de los objetivos era ganar un mejor entendimiento acerca del funcionamiento y relaciones de dichos elementos y de la naturaleza de algunas dificultades que se habían detectado en la fase exploratoria. Otro objetivo era diseñar en detalle la estrategia de desarrollo profesional que se siguió en la fase exploratoria, aplicarla y evaluar sus efectos en los participantes.

La naturaleza de la problemática que se aborda en este proyecto requiere que en los colegios se genere una dinámica que favorezca los procesos de reforma educativa para el mejoramiento de la calidad de la educación matemática en secundaria. Para ello es necesario involucrar tanto a directivos como a profesores de matemáticas en actividades que promuevan la reflexión de ellos acerca de su propia práctica —directiva y docente, respectivamente— y que potencien su capacidad para ser gestores y participantes activos del cambio. El anterior es uno de los supuestos que fundamentan la estrategia de desarrollo profesional aplicada en el proyecto.

El propósito de este libro es presentar una visión completa de la estrategia de desarrollo profesional implementada con el grupo de directivos y profesores de los colegios participantes en el proyecto PRIME I. El libro está organizado en tres secciones. La primera presenta las bases que sustentan el esquema de desarrollo profesional, describe con algún detalle en qué consistió la estrategia y cómo estuvo secuenciada, y discute algunas de las tensiones que se presentaron en la aplicación de la estrategia al involucrar a los participantes en actividades de investigación e innovación. La segunda sección del libro incluye los artículos producidos por algunos de los directivos de los colegios participantes, y la tercera contiene los artículos de algunos de los profesores acerca de su experiencia de indagación e innovación en sus aulas de clase.

---

5. Este proyecto ha sido financiado por el Ministerio de Educación Nacional, la Fundación Corona, la Fundación Restrepo Barco, Colciencias, el Banco Interamericano de Desarrollo y el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico. Hasta el momento se cuenta con las siguientes publicaciones acerca de este proyecto: Perry et al. (1996c), Valero et al. (1997a), Perry et al. (1997), Valero et al. (1997b), Castro et al. (1997). Las correspondientes referencias se encuentran en el artículo “Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares” de este libro.





# DESARROLLO PROFESIONAL DE DIRECTIVOS Y PROFESORES: MOTOR DE LA REFORMA DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

PAOLA VALERO, PATRICIA PERRY, MAURICIO CASTRO,  
PEDRO GÓMEZ Y CECILIA AGUDELO

*No hay duda de que existe una problemática alrededor de la deficiente calidad de las matemáticas escolares en Colombia. La reforma educativa que se inició con la Ley General de Educación de 1994 requiere que se adelanten acciones concretas para que dicha problemática se pueda superar y se pueda entonces llevar a cabo exitosamente la reforma. El proyecto PRIME I, en el que participaron colegios oficiales y privados de Santafé de Bogotá, adelantó una estrategia de desarrollo profesional para directivos-docentes y profesores de matemáticas que buscaba potenciar sus capacidades de investigación e innovación como herramienta para generar una dinámica de reflexión al interior de la institución educativa. Dicha estrategia se centraba en que tanto profesores como directivos realizaran un proyecto de investigación-acción en sus colegios, con el fin de modificar un aspecto problemático de sus quehaceres. La puesta en marcha de una estrategia de desarrollo profesional como esta desencadena una serie de tensiones entre los participantes, por implicar una actividad que se aleja de los esquemas tradicionales de capacitación de maestros y directivos.*

## INTRODUCCIÓN

Las matemáticas escolares han sido en Colombia un cuello de botella del sistema educativo. De numerosas maneras se ha corroborado que existe una problemática alrededor de la forma como se llevan a cabo en el colegio, desde la primaria hasta el bachillerato, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. También ha habido diversos esfuerzos para abordar la problemática, y el caso de los programas de capacitación de los profesores de matemáticas ha sido uno de ellos. A pesar de que esta alternativa de solución contribuye a subsanar algunas de las deficiencias que se asocian de manera más fuerte con la problemática, los efectos reales sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje y sobre la formación matemática de los estudiantes, es decir, sobre lo que ellos terminan sabiendo y pudiendo hacer en matemáticas, son pocos.

La explicación a tal falta de efectividad podría asociarse con el hecho de que el profesor de matemáticas está inmerso en todo un contexto social

que sobrepasa los límites de su actuación dentro del salón de clase. Si bien el conocimiento matemático de los estudiantes se construye en el salón de clase a través de la interacción entre ellos y el profesor, este ámbito no es el único que tiene una influencia en lo que terminan comprendiendo los estudiantes. Existen factores y actores que inciden en la organización y funcionamiento de los directivos, del grupo de profesores de matemáticas de secundaria de la institución y de los profesores como individuos en su salón de clase. Por esta razón, lograr una transformación en lo que sucede en los colegios con respecto a la enseñanza de las matemáticas implica *potenciar*<sup>1</sup> las capacidades de los diversos actores para que se involucren en la identificación de problemas presentes en su práctica que afectan la calidad de los resultados de ella, y en la búsqueda de soluciones a dichos problemas.

Este artículo presentará la estrategia de desarrollo profesional para directivos y profesores de matemáticas que se llevó a la práctica a lo largo del proyecto PRIME I. Para ello se hará en primer lugar una reflexión acerca de cuál es la problemática de las matemáticas escolares en secundaria y cómo puede modelarse para comprenderla y tratar de influir en ella. En segundo lugar, se justificará por qué es necesario adelantar una formación basada en la idea del desarrollo profesional y se establecerán cuáles fueron los supuestos que guiaron la actitud de los “formadores de profesores”<sup>2</sup> tanto en el diseño como en la puesta en marcha de la estrategia. Enseñada se describirán los principios de acción de la estrategia y los diferentes componentes de ella. Y por último se discutirán algunos de los problemas enfrentados al involucrar a los participantes en ese tipo de actividades de desarrollo profesional.

## LA PROBLEMÁTICA DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES EN SECUNDARIA

Quienes tienen una relación cercana con las matemáticas escolares —estudiantes, padres de familia, profesores, investigadores en educación, directivos y profesionales que manejan la política educativa— saben que existe una problemática alrededor de la calidad de la formación matemática que se da en los colegios a los estudiantes colombianos. Hay evidencia de distinta índole que muestra que esta problemática existe. En primer lugar, en el sistema educativo se presentan fenómenos indicadores de la problemática como son, entre otros, la alta mortalidad académica y la deserción

---

1. El término *potenciar* significa crear un estado, bien sea en un individuo, institución o sistema, que permita a ese ente autogenerar las capacidades necesarias para abordar un problema y darle solución (Gómez y Valero, 1995, p. 2).

2. En este proyecto un grupo de investigadores de “una empresa docente” participó como coordinador de la formación y desarrollo profesional de los directivos y profesores participantes.

escolar de los estudiantes motivadas por la pérdida de las materias de matemáticas; el rechazo generalizado hacia esta materia a lo largo de todo el currículo escolar; la incapacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos de matemáticas en la solución de problemas tanto de matemáticas como de áreas afines o de la misma vida cotidiana y las dificultades para tener un desempeño adecuado en los cursos de matemáticas en los estudios universitarios. Estos indicadores son reconocidos por profesores y directivos, cuando se les pregunta por la problemática en sus colegios. Ellos la asocian con los siguientes elementos (Perry et al., 1996c, p. 50):

*El profesor de matemáticas: es reacio al cambio; es muy tradicional; le falta actualización; no sabe cómo transmitir sus conocimientos al estudiante; es autoritario y vertical; y no motiva a los estudiantes a sentir gusto por las matemáticas.*

*El estudiante: es perezoso, no tiene las bases suficientes, tiene baja competencia matemática que se refleja en su baja capacidad de formalización; a los estudiantes no les gustan las matemáticas.*

*Las matemáticas: son el “coco” del colegio; no hay conexión entre las matemáticas y la realidad.*

En esta visión se aprecia que hay una tendencia hacia la sobresimplificación de lo que es la problemática, en el sentido de que ella se asocia con elementos y factores aislados (la culpa de que exista un problema es de los estudiantes, o los profesores o las matemáticas). Y también se presenta la tendencia a identificarla con sus indicadores. Esos indicadores en sí no son la problemática, sino los síntomas de que ella existe.

En segundo lugar, hay evidencia que proviene de estudios acerca del desempeño de los estudiantes en matemáticas. Para su primer estudio acerca de la calidad de la educación básica primaria en matemáticas y lenguaje, el Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación definió la calidad de la educación como “el grado de cercanía entre el ideal humano de una sociedad dada y su expresión educativa. Más específicamente, se la considera como el grado de aproximación entre lo establecido en los fines del sistema educativo nacional y el logro de la población estudiantil”. La calidad académica<sup>3</sup>, en particular, “establece el grado de aproximación entre unos niveles de logro, considerados como mínimos aceptables en ciertas áreas curriculares, y los niveles de logro real de la

---

3. En este estudio también se consideró la calidad en términos no académicos. Este tipo de calidad “intenta aproximarse a aquellos factores que el individuo requiere para su proceso de adaptación al contexto social, cultural y político del país, no incluidos en los programas curriculares de un área específica” (MEN, 1992, p. 25).

población estudiantil” (MEN, 1992, pp. 23-25). Los resultados encontrados muestran que, con respecto a las habilidades para ejecutar algoritmos y para resolver problemas, se presenta:

*[...] una seria deficiencia en la calidad de la educación matemática en relación con la resolución de problemas aplicables a la vida diaria. En este contexto, el logro que el estudiante obtiene en la correcta ejecución de algoritmos, usuales y nuevos, se ve francamente desvirtuado. El estudiante puede seguir el algoritmo, pero no puede plantearlo en la resolución de un problema concreto (MEN, 1992, p. 61).*

Si bien en este estudio se consideraron factores no académicos del estudiante, del hogar, de los docentes y del plantel, asociados con la calidad de la educación, no se llega a conclusiones contundentes ni se establecen relaciones fuertes acerca de la influencia de ellos en la calidad académica de la formación matemática de los estudiantes.

En tercer lugar, los resultados del Tercer Estudio Internacional sobre Matemáticas y Ciencias (TIMSS), recientemente realizado, han mostrado que, en comparación con otros 44 países del mundo, los estudiantes colombianos de grados séptimo y octavo poseen un rendimiento académico en matemáticas y ciencias que los ubica en el penúltimo lugar de la clasificación mundial, muy por debajo del promedio. Sin embargo, cuando se miran con detalle los resultados discriminados en algunos temas, se puede ver que los estudiantes obtuvieron resultados satisfactorios en temas que tienen un énfasis notorio en los libros de texto escolares como son cálculos de perímetros y áreas de figuras geométricas y números reales y racionales (Sánchez y Mompotes, 1996, p. 16A).

Estos resultados sugieren que existe la necesidad de atender algunas áreas prioritarias como son la evaluación constante de la calidad de la educación, la investigación acerca de los diversos problemas y dificultades de los estudiantes en su desempeño en las áreas evaluadas por el estudio, la difusión de los resultados y análisis de la prueba hecha en Colombia y la atención a las condiciones de enseñanza de las matemáticas y las ciencias en el país, en especial en lo concerniente a la profesionalización y al estatus social del profesor de matemáticas (ibid).

### **Caracterización de la problemática**

La evidencia anterior resalta distintos aspectos de la problemática. Sin embargo, hasta ahora no se ha precisado lo que por ella entendemos. Para comenzar, valdría la pena resaltar algunas de sus características:

*Complejidad.* En ella intervienen múltiples actores y factores que se relacionan de maneras intrincadas y en diferentes ámbitos. La complejidad no sólo surge del hecho de que, como en todo problema social, hay grupos

humanos involucrados, con toda su carga cultural, social, política e incluso económica. También tiene que ver con que los actores y factores toman características especiales si se relacionan en el ámbito de la interacción entre profesor, estudiantes y conocimiento matemático en el salón de clase, o si se dan en el ámbito de las relaciones al interior del cuerpo de profesores que construyen el currículo, o si se encuentran en el espacio de la toma de decisiones institucionales sobre aspectos académicos y administrativos. Por otro lado, algunos de los elementos que hacen parte de la problemática no se pueden controlar fácilmente, aunque se conozcan y se legitimen como restricciones fuertes del contexto social a los procesos educativos (por ejemplo, la influencia del medio social y económico en el desempeño de los estudiantes, el estatus de la profesión del maestro, la escasez de los recursos económicos disponibles para la inversión en educación, etc.).

*Diversidad.* Aunque hay aspectos comunes de la problemática en las distintas instituciones, también se podría decir que existen tantas problemáticas como instituciones educativas. El papel de cada actor, la influencia de cada factor y la concreción de las relaciones entre ellos es el resultado de lo que es cada uno de manera aislada y de lo que son por el hecho de pertenecer a un grupo social. Así, el estilo de dirección, la forma de comunicación dentro de la comunidad de profesores de matemáticas, la concepción que se tenga de las matemáticas a nivel institucional y también individual, entre otros, establecen diferencias significativas en la formación matemática que terminan construyendo los alumnos.

*Dinámica.* Los problemas varían cuantitativa o cualitativamente a través del tiempo, dependiendo de cambios que se operan no sólo al interior de las instituciones, sino también en el contexto social y educativo en el que se encuentra la institución. Esa dinámica tiene que ver con el hecho de que, por ser un fenómeno social, la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tiene vida. Además, el entorno se transforma frecuentemente, lo que se manifiesta en los cambios de las reglamentaciones educativas generales y en las modificaciones que ellos imprimen al funcionamiento general de la educación. El caso de la reforma educativa de 1994 es un claro ejemplo de esto.

Las características que se acaban de señalar constituyen los rasgos esenciales de la problemática de las matemáticas escolares. Podríamos avanzar diciendo que ésta, en últimas, se manifiesta en la deficiente calidad de la formación matemática que reciben los estudiantes colombianos en el colegio, y se refiere a aquel conjunto de problemas de distinto nivel que determina el hecho de que los estudiantes no logren una formación matemática de buena calidad. Ese conjunto incluye:

- los problemas relacionados con la calidad de los procesos de aprendizaje donde los estudiantes se apropian del conocimiento matemático que se pone en juego en el salón de clase,
- los problemas asociados con la calidad de los procesos de enseñanza donde el profesor lleva a cabo una interacción con los estudiantes para la construcción del conocimiento matemático,
- los problemas vinculados con la calidad del entorno institucional donde se dan los dos procesos anteriores.

Por esto, se requiere realizar una mirada profunda que abarque la complejidad del asunto. Además, en este momento, la problemática de la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes en la educación secundaria adquiere un significado particular que está dado por el contexto de reforma educativa que se vive en Colombia. Precisemos en qué consiste tal particularidad.

## **La problemática en el contexto de la reforma educativa**

### *El marco legal*

A la problemática ya existente se suman, en esta coyuntura, las condiciones de la reforma de 1994 a la educación. La reforma educativa, que se inició en Colombia con el cambio constitucional de 1991 y se ha manifestado con la Ley 30 de 1992 (de la educación superior) y la Ley 115 de 1994 (del servicio educativo nacional), concretiza el rumbo que debe tomar el sistema educativo para sustentar los procesos de internacionalización de la economía y de democratización política que se están llevando a cabo en el país. Los puntos claves de esta reforma son los siguientes:

*La calidad de la educación.* Si bien en épocas anteriores se habían enfatizado aspectos cuantitativos de la educación (cobertura, retención, repitencia, entre otros), ahora la atención se centra en la calidad. Este concepto abarca no solamente los aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje y enseñanza dentro de los salones de clase, sino también una serie de factores que antes no se tenían en consideración, como son la estabilidad social y económica de los maestros, la estabilidad administrativa y docente de las instituciones educativas, las dotaciones de materiales educativos y la influencia del entorno social y familiar en la formación de los educandos.

*La institución educativa.* El interés por resaltar la institución educativa como elemento clave en el logro de las metas de calidad de la educación se asocia con factores como el esquema de descentralización del servicio educativo. Las instituciones educativas juegan un papel fundamental en la definición de proyectos educativos acordes con las necesidades de la población

escolar que cobijan. En este ambiente de descentralización, se resalta la importancia del equilibrio entre lo administrativo y lo pedagógico al interior de los planteles. Los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) son una muestra de esto.

*El aprendizaje por encima de la enseñanza.* Si bien se da importancia al maestro, a su formación y a su estabilidad económica y social, también se subraya la importancia del estudiante en el proceso educativo. El estudiante como centro del proceso implica una adecuación de las metodologías de enseñanza para potenciar sus capacidades; un cambio en las concepciones de los maestros sobre su papel en el proceso educativo; una adecuación de los contenidos de la enseñanza frente a las necesidades prácticas que éstos encontrarán en su desempeño posterior, bien sea dentro de la educación superior o dentro del mercado laboral; y una reformulación de la presentación compartimentalizada de los saberes escolares para el logro de un saber unificado que ofrezca a los estudiantes una formación integral en los aspectos “físico, psíquico, intelectual, moral, espiritual, social, afectivo, ético, cívico y demás valores humanos” (Ley General, Art. 5).

#### *El significado de la calidad*

Con estos derroteros, tanto la adecuada calidad de la educación, en general, como de la educación matemática, en particular, adquieren significados precisos. Con respecto a la primera, podemos decir que la calidad de la educación se refiere a:

*[...] la coherencia de todos los factores de un sistema educativo que colma las expectativas de una sociedad y de sus más críticos exponentes. Por lo tanto incluye la calidad de los **insumos** materiales y financieros que entran a él, la de los **agentes involucrados**, entre los cuales los educandos y los educadores son los más importantes, aunque no los únicos, la de los **procesos** que ocurren día a día, la de los **ambientes** en los que ocurren esos procesos y la de los **productos** del sistema medidos de múltiples maneras y no sólo por indicadores de rendimiento académico (Aldana et al., 1994, p. 89).*

Y la apropiada calidad de la formación matemática se refiere a cómo esta serie de elementos institucionales se conjuga coherentemente para lograr que los estudiantes (NCTM, 1991, p. 5):

- 1) aprendan a valorar la matemática,
- 2) se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas,
- 3) lleguen a resolver problemas matemáticos,
- 4) aprendan a comunicarse mediante las matemáticas, y
- 5) aprendan a razonar matemáticamente.

Estas capacidades generales se manifiestan en la potencia matemática de los estudiantes. Una educación matemática de buena calidad, en el contexto del colegio, debería construir una potencia matemática que refleje (ibid.):

*[...] la capacidad que tiene un individuo de explorar, formular hipótesis y razonar lógicamente, así como la capacidad de usar de forma efectiva diversos métodos matemáticos para resolver problemas imprevistos. Esta noción se basa en el reconocimiento de que la matemática es algo más que un conjunto de conceptos y destrezas que hay que dominar; también comporta métodos de investigación y razonamiento, medios de comunicación y nociones sobre su contexto. Además, la potencia matemática supone para todo individuo un desarrollo de la confianza en sí mismo.*

Esta potencia matemática debe permitir a los estudiantes-ciudadanos colombianos tener una participación activa en diversos procesos de la sociedad, como son (Gómez y Valero, 1995, pp. 4-5):

*El desarrollo económico.* El proceso de apertura económica requiere que se mejoren y aumenten las capacidades productivas del sistema económico. Para lograr las metas de producción y crecimiento es necesario que se haga un uso más eficiente de los adelantos científicos y tecnológicos, y que se cualifique la mano de obra para maximizar su trabajo. La potencia matemática del ciudadano colombiano debe no sólo apoyar el desarrollo de la ciencia y la tecnología, sino también permitir la comprensión de los procesos productivos donde las matemáticas están involucradas.

*La participación política.* La Constitución Política de 1991 abre un nuevo espacio para que el ciudadano participe en las decisiones y acciones que lo afectan. Para esto, el ciudadano debe desarrollar una competencia democrática que le permita juzgar las acciones y decisiones de los gobernantes y su propia acción. La potencia matemática contribuye a la formación de una competencia democrática, en tanto la aplicación de las habilidades matemáticas permite modelar situaciones reales y matematizarlas para encontrar una solución viable a los problemas cotidianos que enfrenta el ciudadano. Por otro lado, la formación matemática y la misma capacidad de modelaje se asocia con una capacidad crítica del ciudadano para juzgar si las decisiones y acciones que toman sus dirigentes y él mismo son las mejores posibles.

*Los nuevos valores sociales.* La potencia matemática crítica construye en los estudiantes-ciudadanos una capacidad para actuar colectivamente en la resolución de problemas de la vida cotidiana. De esta manera puede desarrollar al máximo sus capacidades individuales para establecer relaciones

armónicas y cooperativas con los demás en el logro de metas colectivas. Así, se fomentan y se viven los valores del diálogo, el pluralismo, el respeto y la paz.

De esta manera, el logro de una formación matemática de alta calidad para los estudiantes colombianos depende de la manera como se generan ambientes propicios para que los actores institucionales, asociados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se articulen para lograr que los estudiantes adquieran y desarrollen la potencia matemática necesaria para su participación en la sociedad.

### *Los retos de la reforma*

Por todo lo anterior, la reforma abre un espacio significativo para que se den los procesos necesarios de cambio y de mejoramiento de la calidad de la educación matemática. Pero, el hecho mismo de la reforma también genera una situación paradójica: si bien por un lado se favorece la mejora de la calidad de la educación, también se crea otra serie de problemas que atentan contra la posibilidad del mejoramiento y aumento de la calidad. La implementación efectiva de la Ley 115 de 1994 requiere que al interior de los colegios se genere una dinámica que permita a los distintos actores institucionales asumir un papel activo para llevar de manera exitosa a su institución la descentralización curricular. Esto, a su vez, implica que dichos actores puedan conectar el currículo general propuesto por el Ministerio de Educación Nacional en los indicadores de logro (Resolución 2343 del 5 de junio de 1996) con la planeación de su Proyecto Educativo Institucional (PEI).

En el caso concreto de las matemáticas, es necesario que los directivos (el rector del colegio y el coordinador del grupo de profesores de matemáticas) y los profesores de matemáticas asuman el reto de generar una coherencia entre los planteamientos del PEI y los planteamientos específicos del área de matemáticas del colegio sobre la formación matemática de sus estudiantes. Más aun, los profesores deben lograr una conexión estrecha entre lo anterior y las acciones concretas de enseñanza que adelantan en el aula. El gran problema al que se enfrenta la institución en general dentro de este proceso de articulación de diferentes instancias se centra en el diseño, desarrollo y evaluación de un currículo de matemáticas, propio de cada colegio.

El término currículo aquí adquiere una connotación amplia y distinta a la que hasta hace unos años predominaba en Colombia<sup>4</sup>. En el nuevo contexto, el currículo necesita enfocarse como el conjunto coherente de visiones y supuestos que sustentan tanto las decisiones que se toman como las acciones concretas que se ejecutan en la educación (Stenhouse, 1991). Estas visiones y supuestos se ubican en tres niveles interconectados que son (Rico, 1997):

- el *nivel macro o social* donde intervienen los factores sociales, políticos, económicos y culturales que definen las visiones, valores y tradiciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y también las necesidades y expectativas de la formación matemática de los ciudadanos;
- el *nivel intermedio o institucional* en el que se ubica la institución educativa como espacio donde se encuentran elementos como las concepciones institucionales acerca del profesor, el estudiante y las matemáticas como saber cultural y saber a enseñar;
- y el *nivel micro o didáctico* donde se relacionan el profesor y el estudiante —con sus conocimientos y creencias— en la construcción del conocimiento matemático, a través del desarrollo de un currículo.

Toda la serie de visiones con respecto a los elementos propios de cada uno de estos niveles se concreta en un *diseño curricular* que explicita el papel que toma cada uno de los elementos mencionados y que define el “plan operativo de enseñanza que explica en detalle qué deben saber los alumnos de matemáticas, cómo deben alcanzar las metas curriculares identificadas, qué deben hacer los profesores para ayudarles a desarrollar sus conocimientos matemáticos y el contexto en el que tiene lugar el aprendizaje y la enseñanza” (Romberg, 1991, p. 324). Este diseño se lleva a la práctica a través del desarrollo curricular, es decir, la implantación que hace el profesor del diseño en su salón de clase. En este proceso, tanto directivos como profesores de matemáticas se convierten en actores participantes en el diseño, desarrollo y evaluación posterior de los efectos y resultados del currículo aplicado.

Un proceso de diseño, desarrollo y evaluación del currículo en las condiciones de calidad esperadas y mencionadas anteriormente requiere que:

- exista una dinámica al interior de la institución que le permita planear, ejecutar acciones y evaluar sus resultados,
- tanto directivos como profesores cuenten con la capacidad para “aterizar” en sus PEI y proyectos de área de matemáticas todas las formulaciones generales de la reforma, y

---

4. En la mayoría de los profesores se puede percibir una visión de currículo como aquella estructura y organización de los programas temáticos que se deben desarrollar en la serie de grados de la educación formal básica primaria, secundaria y media. Esta visión de currículo como programa pudo haber surgido de la interpretación errónea de la serie de documentos de la Renovación Curricular adelantada por el Ministerio de Educación en la década de los años 80. Estos documentos, la mayoría de las veces, se tomaron como la prescripción del programa a seguir en todas las áreas y en todos los grados de la educación básica primaria y secundaria.

- logren poner en práctica los planes en su quehacer al interior de la institución.

El logro de estas condiciones, a su vez, depende de la manera como se conciba el funcionamiento de las matemáticas escolares dentro de la institución educativa y de la manera como se aborde la problemática para tratar de generar una dinámica en ella.

## **UNA VISIÓN DE LA PROBLEMÁTICA AL INTERIOR DE LA INSTITUCIÓN ESCOLAR**

La reforma educativa introduce un cambio, al menos de carácter legal, en el funcionamiento de la educación. Igualmente, abre espacios adecuados para que se adelanten acciones que concreten la reforma, en particular en lo que a las matemáticas escolares se refiere. Por esto, en esta coyuntura surgen iniciativas que pretenden contribuir y apoyar el cambio. El proyecto PRIME I fue una iniciativa que propuso abordar la problemática de las matemáticas escolares de secundaria, a través de la implantación de un esquema de desarrollo profesional para directivos y profesores de matemáticas de diversas instituciones escolares de Bogotá. Poner en marcha dicha iniciativa implicó realizar una intervención sobre la problemática en la institución educativa, con base en un modelo que se había elaborado. Este modelo resaltaba los elementos relevantes del funcionamiento de las matemáticas de secundaria y las relaciones entre ellos que, según nuestra visión como formadores de directivos y profesores, influían en que se pudiera o no dar una educación matemática de calidad adecuada. A continuación se presenta dicho modelo y se hacen explícitas las bases que dieron sustento a la estrategia de desarrollo profesional propuesta y aplicada.

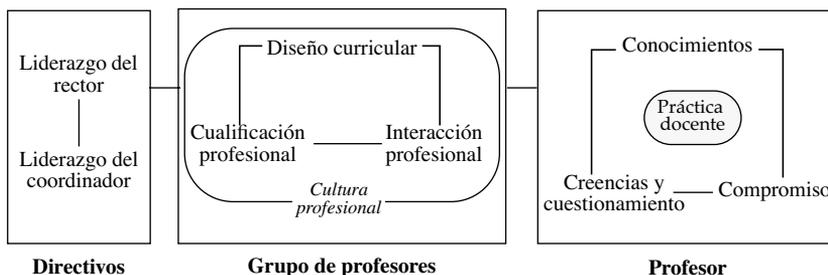
### **El modelo del Sistema Institucional de la Educación Matemática (SIEM)**

La institución escolar es una organización compleja que tiene fundamentalmente dos funciones: preservar y mejorar la sociedad misma a través de la transmisión de aspectos y valores predominantes en la cultura de la que hace parte la escuela, y guiar la educación de los jóvenes de la comunidad a la que pertenece, lo cual se refiere a la formación integral que ellos requieren para lograr su propia realización como seres humanos y para ser agentes de cambio en la sociedad en la que vivirán cuando sean adultos (Novak, 1982; Romberg, 1991; Kemmis y McTaggart, 1992).

De acuerdo con las disposiciones gubernamentales vigentes en Colombia, un establecimiento educativo es la unidad operativa más simple del sistema educativo y constituye un subsistema ubicado en un contexto determinado, con una orientación filosófica y unos objetivos definidos de

acuerdo con las características de los alumnos. En cada institución escolar oficial existe una estructura administrativa interna integrada por las siguientes unidades: rectoría, coordinación académica, coordinación de disciplina, departamentos académicos, servicios de bienestar, servicios de aprendizaje y servicios administrativos (Báez, 1991, pp. 103-105).

De esa estructura así definida por el Ministerio de Educación Nacional, interesa resaltar el papel de algunos de los distintos elementos y relaciones que se encuentran asociados de manera más fuerte con la problemática de la baja calidad de la enseñanza de las matemáticas al interior de la institución.



*Modelo del SIEM*

Para construir el significado de las matemáticas escolares, en una institución educativa entran en relación los directivos, el grupo de profesores de matemáticas y el profesor como individuo. Los directivos, dado su papel de líderes en la institución, poseen el poder no sólo para ejecutar acciones, sino también para delegar responsabilidades y potenciar la actuación y toma de decisiones de los profesores en su ejercicio docente. Los profesores, por su parte, cuentan con el marco de referencia que se establece al interior del grupo de profesores de matemáticas y que obedece a la manera como en ese grupo se tejen los significados y valores de la cultura profesional del grupo. Esta cultura hace referencia a las connotaciones que toman el diseño curricular, la cualificación profesional y la interacción profesional entre los profesores que son miembros del grupo. A su vez, cada profesor interpreta ese marco de referencia y lo expresa en su práctica docente al interior del aula. En el ejercicio de la práctica docente de un profesor intervienen sus creencias sobre las matemáticas y su didáctica y el cuestionamiento que el profesor hace de ellas, sus conocimientos tanto de matemáticas como de la didáctica de las mismas, y el compromiso del profesor con todas las responsabilidades que su trabajo conlleva.

En una institución donde se presente una dinámica propicia para el mejoramiento de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los elementos mencionados adquieren unas determinadas características. Allí, el liderazgo facilitador del rector promueve la comunicación estrecha entre él y el coordinador del grupo de profesores de matemáticas

con respecto a las políticas y lineamientos generales de la institución. También potencia la capacidad de liderazgo del coordinador para que éste pueda llevar al grupo de profesores ideas, que deben desarrollarse colectivamente, sobre cómo concretar en el área las políticas institucionales. El coordinador, en ejercicio de su papel de líder del grupo de profesores, debe organizar y proponer una serie de actividades colectivas que promuevan la interacción entre los colegas del área. Al abrir espacios para tal interacción, él puede dinamizar el proceso de diseño curricular y, en especial, el de la cualificación profesional, entendido como el proceso colectivo que promueve la pertenencia de unas personas a un grupo que comparte conocimientos y prácticas propias de la disciplina que ejercen. La interacción profesional, por su parte, es la dinámica que permite al profesor, como individuo, comenzar a autocuestionar sus creencias acerca de lo que son las matemáticas, cómo se enseñan y aprenden. Este cuestionamiento da lugar a que el profesor se interese por fortalecer su conocimiento tanto matemático como didáctico. Por otro lado, el compromiso del profesor con su práctica también es un motor para que el profesor se preocupe por el mejoramiento de su práctica docente. De esta manera se da en la institución escolar un funcionamiento de las matemáticas escolares que se revierte en una mejora de la calidad de la formación que en últimas recibe el estudiante.

El modelo que se ha construido corresponde a una visión sobre lo que se considera importante en la problemática de la deficiente calidad de las matemáticas escolares. Si bien se establecen unos elementos y las relaciones entre ellos, el modelo que resulta es **un posible modelo** de los muchos que podrían delimitarse desde otras perspectivas. Por ejemplo, otro modelo podría considerar de forma natural al estudiante. Pero, si bien el estudiante es un actor de la problemática en quien se termina volcando el funcionamiento de las matemáticas escolares, él no se considera como parte del modelo antes presentado. Y no hace parte de él, porque en este modelo se presentan los elementos sobre los cuales sería rentable y eficiente influir para lograr una mejora sustancial de la calidad de la formación matemática de los estudiantes. Si el objetivo del proyecto PRIME I es intervenir en las instituciones educativas participantes para dinamizar las matemáticas escolares, entonces resulta más conveniente hacerlo a través de los elementos más estables y permanentes, como son los mencionados, y no directamente a través de los estudiantes.

Como se verá a continuación, este modelo sirvió para tomar las decisiones acerca de la manera como se quería intervenir en los colegios y sobre lo que se esperaba de dicha intervención.

### **El modelo como herramienta para la toma de decisiones**

La utilidad del modelo anteriormente presentado radica en que, por ser una simplificación de la complejidad de la realidad abordada y por definir los actores y relaciones importantes dentro de la institución educativa con res-

pecto a los distintos ámbitos donde se focalizan la serie de problemas que hacen parte de la problemática más general, permite tomar decisiones acerca de cómo se puede intervenir en un colegio para tratar de que se genere una dinámica en su interior.

En experiencias anteriores habíamos constatado cómo en los colegios se presenta una situación que dista de ser la más favorable para la mejora de la calidad de las matemáticas escolares (Perry et al., 1996a, pp. 29-41). Con base en esta evidencia establecimos tres supuestos que sustentaron nuestra acción en el proceso de formación de directivos y profesores:

*La institución como un todo es importante.* El colegio es el espacio donde se construyen y manifiestan las relaciones entre los actores estrechamente vinculados con la problemática que se está abordando. Al interior de la institución educativa confluyen la labor de los directivos y la de los profesores, en el logro de unas metas de formación de sus estudiantes. Nos interesaba influir especialmente en cinco de los elementos estructurales del modelo: el liderazgo del rector, el liderazgo del coordinador del grupo de profesores de matemáticas, la interacción entre los profesores, las creencias de los profesores y su compromiso. De esta manera podíamos esperar influir indirectamente en los otros elementos.

*El cambio se hace a través de la transformación de las personas.* Para que en una institución se inicie un proceso de cambio, es necesario influir en las concepciones que ellos tienen sobre sí mismos, sobre sus posibilidades de actuación y sobre su práctica efectiva. Sólo un cambio personal de los directivos y profesores en relación con su práctica administrativa y docente puede motivar una reorganización dinámica de toda la estructura institucional para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Esta transformación personal es lenta y exige un cuestionamiento fuerte a las creencias que ellos poseen. Además se realiza por medio de la vivencia de experiencias que les permita ver que los cambios que introducen en sus prácticas tienen efectos positivos.

*La investigación-acción es una herramienta para generar procesos de cambio.* El cuestionamiento y, como consecuencia la transformación, se logra a través de la participación en experiencias de formación profesional no tradicionales, donde se fomente la reflexión crítica y se potencie la capacidad de cada individuo y del conjunto de ellos para detectar y proponer soluciones a los problemas que dependen de ellos. La investigación-acción ofrece una metodología apropiada para iniciar el proceso de innovación e investigación.

## EL DESARROLLO PROFESIONAL COMO FORMA DE POTENCIACIÓN DE DIRECTIVOS Y PROFESORES

La naturaleza de la problemática de la deficiente calidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares exige que las posibles alternativas de solución que traten de implementarse toquen los puntos claves del SIEM, de tal manera que se pueda producir una desestabilización que allane eventualmente un camino para el cambio. Esa desestabilización debe crear las condiciones necesarias para que el sistema pueda enfrentar y llevar a cabo su propio proceso de transformación, a su ritmo, según su contexto, condiciones, restricciones y fortalezas. Por esta razón, la alternativa de solución<sup>5</sup> seleccionada consiste en potenciar a los profesores de matemáticas y directivos de los colegios para que ellos, a su vez, potencien su sistema y le provean las condiciones para un cambio progresivo y continuo.

La potenciación de profesores de matemáticas y directivos consiste básicamente en fomentar sus *capacidades* para reflexionar sobre su propia práctica y poder transformarla. Así, ellos deberían disponer de herramientas que les permitieran verse a sí mismos y proponer maneras alternativas de realizar su práctica con base en una reflexión profunda acerca de las razones para cambiar y del impacto del cambio, es decir, realizar una *innovación reflexiva*<sup>6</sup>. Además, ellos también deberían poseer herramientas que les permitieran realizar una indagación sistemática sobre su práctica y los problemas a los que en ella se enfrentan, con miras a abordarlos y darles solución, es decir, realizar un tipo de *investigación*.

Así, la mejor manera de iniciar dicha potenciación es involucrar a directivos y profesores en experiencias que cuestionen su práctica, al enfrentarlos con el problema de realizar pequeños proyectos de investigación e innovación dentro de sus salones de clase o instituciones educativas. El

---

5. Hablamos de alternativa de solución como **un** posible camino entre muchos otros que podrían tomarse para abordar la problemática. Por ejemplo, se podría escoger dar clase a los estudiantes, o ir a los colegios a “arreglar” el problema dándole instrucciones precisas a directivos, profesores y alumnos sobre qué hacer y cómo hacerlo en matemáticas. Sin embargo, se escogió una alternativa que como tal en el corto plazo no conduce a una solución. La problemática, por su dinámica, complejidad y diversidad, no tiene como tal una solución que se pueda alcanzar. Más bien, se puede lograr un estado de movimiento intencionado que acerque cada vez más a las metas de calidad de la formación matemática deseadas (Fullan, 1987, pp. 1051-1061).

6. En la historia de la educación matemática se han presentado grandes debates sobre la innovación. Artigue (1995, p. 34-35) señala cómo se ha criticado la creencia de que la innovación por sí sola trae efectos positivos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, la “innovación compulsiva”, es decir, el cambio por el cambio, en realidad no se constituye en una característica favorable para la labor del profesor. Por oposición a ésta, la *innovación reflexiva*, es decir el proceso de acción consciente y sistemático que es capaz de juzgar los efectos de los nuevos productos de la enseñanza y el aprendizaje, sí es la característica que debe primar en un profesor de matemáticas (Gómez y Valero, 1995, p. 6).

desarrollo profesional, proceso colectivo que promueve la pertenencia de unas personas a un grupo que comparte conocimientos y prácticas propias de la disciplina que ejercen, se convierte entonces en el motor de la dinámica que genera interacciones efectivas entre los miembros de la institución para que, colectivamente y de manera colegiada, con un intercambio profesional informado, se aborde la problemática de las matemáticas escolares.

### **Principios de acción**

Con base en todo lo anterior, también determinamos una serie de principios que tenían que ver con dos dimensiones diferentes de la estrategia de desarrollo profesional: nuestro comportamiento como coordinadores de un grupo de directivos y profesores de matemáticas que trabajaban para su formación profesional, y las tareas mismas que proponíamos a los participantes para que ellos las llevaran a cabo en sus instituciones.

Con respecto a nuestro papel como coordinadores, establecimos que deseábamos:

- Asumir una posición cuestionadora frente al trabajo de los participantes, más que una posición de “detentadores de la verdad”. Nosotros no teníamos la verdad y por esto no podíamos asumir una posición de validadores del trabajo de los profesores, sino más bien una posición de interlocutores que cuestionan a los profesores para hacerlos reflexionar sobre sus propios trabajos.
- Recurrir a y explotar el conocimiento práctico de los profesores. Partíamos de la base de que ellos poseen una serie de conocimientos didácticos, unas veces más intuitivos y menos explícitos que otras, que son el resultado de su experiencia como profesores. Nosotros no queríamos llenarlos con teorías ni formalizaciones acerca de los fenómenos que ellos podían observar. La necesidad de leer bibliografía especializada debía surgir de ellos y no provenir de una imposición ni posición nuestras.
- Tener éxito en guiar a todos los participantes hasta la finalización de sus proyectos. Esto implicó querer asumir una actitud de constante motivación para que los profesores y directivos superaran las dificultades que se les presentaran en el camino, con el fin de que pudieran culminar lo comenzado.

Con respecto a las actividades propuestas a los participantes como parte de su desarrollo profesional, decidimos articular una serie de tareas alrededor de la investigación-acción, como instrumento para iniciar en los participantes un proceso de cambio. La investigación-acción en todo el proyecto PRIME se entiende como una metodología para llevar a cabo una indagación crítica, reflexiva y metódica sobre la propia práctica, y cuyo objetivo es com-

prenderla e implementar cursos de acción que conduzcan a su modificación y mejoramiento.

Algunas de las características de la investigación, como la describen Kemmis y McTaggart (1992), que mejor guiaron nuestra acción fueron:

- El objeto de estudio de un proyecto de investigación-acción debe surgir de las necesidades reales y sentidas del investigador. De ahí que los profesores y directivos tuvieran que seleccionar sus problemas de investigación de acuerdo con lo que su contexto les indicaba que era prioritario estudiar.
- La investigación-acción permite realizar estudios pequeños cuyos objetivos se puedan lograr de manera fácil. De esta manera, los participantes deberían abordar un problema muy preciso que pudiera manejarse en los ocho meses de los que disponían para realizar la etapa de investigación e innovación.
- La interacción entre los participantes —en este caso, los intercambios al interior de los grupos de directivos y de profesores— es una fuente de colaboración, realimentación al trabajo, y mejora del mismo. Por lo tanto, se debía enfatizar el intercambio entre los colegas de los diferentes colegios participantes y hacer de él un recurso para el desarrollo profesional de los participantes.
- La adopción de este estilo colectivo de trabajo favorece el nacimiento y consolidación de una comunidad crítica que comenta, juzga y valida sus propuestas y actividades de investigación. Se debía, entonces, favorecer la creación de un debate profesional al interior del grupo de participantes.

De estos dos tipos de principios de acción se desprendió el diseño del esquema de desarrollo profesional que se describe a continuación.

## **LA ESTRATEGIA DE DESARROLLO PROFESIONAL**

En este apartado describimos de manera general la estrategia de desarrollo profesional para directivos y profesores, implementada en el proyecto PRIME I, en el que participaron quince colegios de Bogotá, once de los cuales son oficiales. Puesto que la realización de trabajos de investigación-acción fue la actividad central de la estrategia exponemos en detalle qué se hizo en las diferentes fases de ese proceso, qué aspectos enfatizamos y qué sugerencias hicimos para guiar el proceso de los participantes.

## Descripción general

La estrategia de desarrollo profesional para directivos y profesores, realizada a lo largo de catorce meses, se concretó a través de cuatro actividades complementarias de distinta naturaleza: el desarrollo de un trabajo de investigación-acción, la participación en una serie de seminarios, la participación en reuniones individuales de asesoría y la participación en un proceso de reflexión para escribir un artículo acerca del proyecto y sus resultados. El proyecto de investigación-acción fue el eje articulador de las otras tres actividades. En términos generales el trabajo propuesto a los participantes buscaba que ellos tuvieran una oportunidad para reflexionar sobre su propia práctica: los directivos, acerca de la complejidad de la problemática de las matemáticas en sus instituciones y del papel que ellos podían jugar en la búsqueda de soluciones institucionales; los profesores de matemáticas, acerca de sus visiones sobre las matemáticas escolares, su enseñanza y aprendizaje.

Para la aplicación de la estrategia se conformaron dos grupos de trabajo, el de los directivos —rector y coordinador del grupo de profesores de matemáticas<sup>7</sup>— y el de los profesores de matemáticas. Aunque en sus colegios, directivos y profesores podían interactuar tanto como quisieran en relación con sus proyectos, las actividades planeadas por PRIME I para ambos grupos fueron independientes.

A continuación presentamos una descripción general de los cuatro componentes de la estrategia.

### *Trabajo de investigación-acción*

Este trabajo que tomó ocho meses, propició un espacio para que los participantes realizaran pequeños proyectos de investigación-acción. Los dos directivos y los dos profesores de cada institución identificaron sendos problemas relacionados con su propia práctica, sobre los cuales tenían injerencia directa. Con base en un análisis del problema identificado planearon acciones concretas que podían solucionarlo de alguna manera, las llevaron a la práctica e hicieron una observación de los efectos derivados de la implementación de tal solución, después de lo cual procesaron y analizaron la información para llegar a tener algunos resultados y el respectivo reporte del trabajo. Más adelante, en el siguiente apartado, expondremos detalles relacionados con la forma como se coordinó este trabajo de investigación-acción en los dos grupos de participantes.

---

7. Aunque en el proceso de selección de los colegios se solicitó la participación del jefe del departamento de matemáticas, al proyecto asistieron personas que tenían diferentes funciones dentro de la institución. Según la estructura organizacional del colegio, en especial, del tamaño y la agrupación de los profesores por departamentos, áreas o simplemente grupos de profesores, quien asistió fue el jefe del departamento, el jefe del área, o el coordinador académico.

### *Participación en seminarios*

Para apoyar la realización de los proyectos de investigación-acción se llevaron a cabo seminarios con cada uno de los grupos de trabajo. Fueron reuniones en las que se abrió espacio para satisfacer a dos propósitos. Por un lado, consolidar los dos grupos como comunidades de investigación-acción, en la medida en que allí se dieron oportunidades para presentar avances de los proyectos y para dar y recibir comentarios, críticas y sugerencias a los diferentes trabajos. Por otro lado, exponer las bases conceptuales para el desarrollo de los proyectos: la investigación-acción como metodología que posibilita la indagación y reflexión sistemática acerca de la propia práctica; temas relacionados con aspectos generales de la educación matemática como, por ejemplo, la noción de currículo; y, temas específicos de la educación matemática como, por ejemplo, la relación entre creencias del profesor acerca del conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje y la práctica en el salón de clase, los sistemas de representación y su influencia en la enseñanza y el aprendizaje, etc.

Para directivos se realizaron ocho seminarios, distribuidos a lo largo de los primeros ocho meses del proyecto, cada uno de los cuales se llevó a cabo durante cuatro horas de un mismo día, en la jornada de la tarde. Asistieron los dos directivos representantes de cada colegio participante y tres investigadores de “una empresa docente” en calidad de coordinadores. Para profesores se realizaron tres seminarios, distribuidos a lo largo de los primeros ocho meses que duró el proyecto: concretamente ocurrieron en el primero, el quinto y el octavo mes. Cada uno de los seminarios se llevó a cabo durante veinte horas semanales, cuatro diarias, en la jornada de la tarde. Asistieron los dos profesores de matemáticas de cada colegio participante y tres investigadores de “una empresa docente” en calidad de coordinadores.

### *Participación en reuniones individuales de asesoría*

Otra forma de apoyar la realización de los trabajos de investigación-acción se llevó a cabo a través de reuniones individuales de asesoría de los coordinadores del proyecto con directivos y profesores de cada uno de los colegios participantes, por separado. En la mayoría de los casos hubo tres reuniones que coincidieron con tres momentos importantes del trabajo: la definición del problema, la elaboración de un plan de acción y de observación, y la reflexión acerca de los resultados y la elaboración del reporte final del proyecto. En unos pocos casos se hicieron más o menos reuniones de asesoría de acuerdo con las necesidades de los participantes. Para lograr que esas reuniones fueran lo más eficientes posible se trabajó siempre sobre la base de un documento de avance del proyecto: se hacía una lectura crítica del documento antes de la reunión y los comentarios que surgieran servían para iniciar una discusión entre coordinadores y participantes.

### *Participación en una reflexión para elaborar artículos*

Esta actividad desarrollada a lo largo de los últimos seis meses que duró el proyecto, giró en torno a la comunicación de resultados, fase que no por ser la última dentro del proceso de investigación deja de ser importante. Profesores y directivos de cada colegio participante debían escribir un artículo para ser publicado en alguna revista de circulación nacional o como parte de un libro<sup>8</sup>. Este trabajo se presentó como una oportunidad muy interesante dentro del proyecto en dos sentidos. En primer lugar, para que los participantes pudieran reflexionar sobre el proceso vivido y reelaborar a posteriori su experiencia y los resultados de ella. En segundo lugar, para que pudieran completar su vivencia al enfrentarse a la problemática de escribir un texto coherente, estructurado, con un mensaje claro y sustentado.

En el proceso para elaborar sus artículos, los participantes de un mismo colegio fueron apoyados por un investigador de “una empresa docente” que no necesariamente había estado involucrado en la implementación de las otras tres actividades de la estrategia de desarrollo profesional. Para este efecto se estableció una dinámica de interacción en la que el investigador se comportaba como un interlocutor interesado en el proyecto. De esa manera, a partir del reporte de investigación, se hicieron y revisaron entre cuatro y cinco versiones de cada artículo hasta llegar a una calidad aceptable para la publicación.

### **Desarrollo de los trabajos de investigación-acción**

A continuación se presentan detalles de la manera como se dirigió la realización de los trabajos de investigación-acción.

#### *Identificación del problema*

De acuerdo con la metodología de investigación-acción, el proceso se inició con la identificación de una situación problemática. Debía tratarse de problemas que los participantes quisieran abordar con la intención de mejorar la situación identificada. Además, las personas debían estar en condiciones de poder proponer y llevar a la práctica una alternativa de solución. En esta fase se insistió enfáticamente en aspectos tales como:

- Identificar un problema de interés para quien lo fuera a abordar y delimitarlo tanto como fuera posible.
- Asegurarse de que el problema dependiera en alguna medida de quien lo fuera a abordar para que pudiera actuar efectivamente sobre él.

---

8. Los artículos que componen la segunda y tercera parte de este libro son producto de este trabajo.

La importancia de lograr una definición precisa del problema radicaba en que los participantes podían llevar a cabo un proceso investigativo completo dentro de las limitaciones de tiempo y recursos que tenían para hacerlo. Además, el hecho de que para muchos de los participantes este trabajo fuera su primera experiencia de investigación imponía la necesidad de abordar un problema muy puntual.

El problema de estudio de los proyectos de los directivos estaba asociado con aquellos aspectos que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al interior de los colegios, pero que se ubican en ámbitos diferentes a los del salón de clase. La comunicación entre los profesores del área de matemáticas, la forma de trabajo al interior del área, la estructura organizacional del área, la formación de los profesores del área son algunos ejemplos de los tipos de problemas que están bajo dominio de los directivos.

Para iniciar una reflexión que contribuyera a identificar los problemas que se abordarían en los proyectos de directivos, se sugirió hacer un análisis acerca de tres asuntos:

- cuál era la problemática de las matemáticas al interior de cada institución y los factores y actores con participación directa en esa problemática y las relaciones entre ellos;
- sobre cuál de esos factores o actores era deseable influir para iniciar un proceso de cambio en la problemática;
- cuál era la capacidad real de influir positivamente en ese actor o factor dado el papel de directivos de las personas que realizaban el proyecto.

El problema de estudio de los proyectos de los profesores se concretó en la identificación de errores típicos de los estudiantes y de dificultades asociadas con esos errores en relación con un tema específico de alguno de los cursos que estuvieran realizando los dos profesores de cada colegio. Esto buscaba impulsar una reflexión y un cuestionamiento sobre aspectos específicos de la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático. Era una oportunidad para que el profesor se asomara a la complejidad implicada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para iniciar una reflexión que contribuyera a identificar los problemas que se abordarían en los proyectos de los profesores, se sugirió el análisis de algunos aspectos relacionados con:

- el contenido matemático implicado en el tema (conceptos básicos, relaciones entre ellos, procedimientos asociados y formas usuales de representación de dicho conocimiento);
- el proceso cognitivo que requiere la comprensión del tema por parte del estudiante (conceptos pre-requisitos, relación entre

esos conceptos y el tema por aprender, y, errores típicos **propios** del tema y dificultades<sup>9</sup> asociadas);

- el proceso de enseñanza del tema (forma usual de presentar el tema para su enseñanza y relación hipotética entre esa forma de presentación y los errores y dificultades percibidos en los estudiantes).

### *Diseño de un plan de acción y de un plan de observación*

El proceso para diseñar un plan de acción y de observación fue otra de las experiencias vividas por los participantes durante el desarrollo de sus proyectos. Tanto para directivos como para profesores, la tarea de esta etapa se centraba, por un lado, en diseñar una serie de acciones con las que se buscara solucionar el problema planteado y, por el otro lado, en determinar la manera de recolectar información acerca de la ejecución de las acciones, con miras a poder determinar el impacto de éstas sobre el problema identificado. El tipo de acción que podían proponer los profesores se restringió al diseño de una secuencia de actividades de enseñanza que se pudiera desarrollar en máximo tres horas de clase, con el propósito didáctico de tratar uno de los errores detectados con la correspondiente dificultad asociada.

El diseño del plan de acción y del plan de observación tuvo restricciones fuertes relacionadas con las limitaciones de recursos, de tiempo y de conocimientos para llevar a la práctica las acciones. Además, tanto para directivos como para profesores asumir una actitud de reflexión anterior a la puesta en marcha de una acción exige alejarse de la manera como por lo general trabajan y adoptar una posición de “investigadores-actores”. Por esta dificultad, fue necesario recalcar puntos tales como:

- la coherencia entre el problema que se quería abordar y los objetivos planteados para el estudio,
- la factibilidad de los objetivos con relación a las condiciones existentes y los recursos disponibles,
- la pertinencia y viabilidad de las acciones planeadas para lograr los objetivos propuestos en el estudio.

Para el diseño del plan de acción se sugirió puntualizar lo siguiente:

- el objetivo del estudio,

---

9. Entendemos en este proyecto que los errores típicos cometidos por los estudiantes en relación con un tema matemático pueden tener causas de diversa índole. Por ejemplo, puede tratarse de causas matematicadas con la naturaleza misma del conocimiento matemático (epistemológicas), con la forma en que se presenta y enseña el conocimiento a los estudiantes (didácticas) y con la comprensión que tienen los estudiantes para enfrentarse al nuevo conocimiento (ontogénicas). Las dificultades a las que nos referimos en este proyecto tienen que ver con la comprensión del estudiante.

- una descripción general del plan global junto con la justificación de por qué ese plan era adecuado para lograr el objetivo propuesto,
- los objetivos específicos de cada actividad,
- la descripción tan detallada como fuera posible de las diferentes actividades que componían la estrategia de acción,
- la distribución cronológica de las actividades,
- los recursos necesarios para llevar a cabo la acción,
- la consideración de posibles imprevistos y la correspondiente forma de actuar en esos casos.

En cuanto al plan de observación, se requería establecer cuál era la información relevante que se quería recoger en el transcurso de la aplicación del plan de acción y cómo se haría la recolección. Acerca de esto se enfatizó en los siguientes puntos:

- La información que se recogiera debía estar relacionada directamente con el problema y con el objetivo que se hubiera planteado. Con base en esa información se debía poder decir si el objetivo propuesto se había logrado o no.
- La decisión sobre las fuentes de dónde se obtendría la información implicaba ser realista en pensar el tiempo del que se disponía para el análisis de resultados. De acuerdo con eso se debían elegir fuentes fáciles de manejar.

Para el diseño del plan de observación se sugirió a los participantes que para cada actividad planeada establecieran:

- qué información querían recoger,
- para qué querían tener esa información,
- cómo obtendrían la información,
- y cómo la registrarían.

#### *Aplicación del plan de acción y observación de sus resultados*

La tercera etapa de los proyectos fue la puesta en práctica de los planes de acción y de observación. Uno de los problemas que mostraron profesores y directivos está relacionado con el manejo del tiempo disponible: al planear actividades no consideran que el tiempo con el que cuentan para realizarlas es una condición dada que no pueden modificar. Para abordar esta dificultad se insistió enfáticamente en:

- Establecer un período en el que todos los participantes debían implementar sus planes; con esta exigencia se quería asegurar

que habría tiempo disponible del proyecto para una reflexión acerca de los resultados obtenidos y para la elaboración del reporte del trabajo realizado.

Con respecto a esta fase del proyecto fueron pocas las sugerencias que se dieron a los participantes. Quizás la más importante tiene que ver con:

- Registrar detalladamente las modificaciones que hagan a los planes cuando los implementen, junto con la justificación de tales cambios.

### *Evaluación de resultados y reflexión a posteriori*

En esta fase del proyecto, el trabajo de los participantes se centró en la organización y análisis de la información recogida durante la observación, con el propósito de establecer los efectos de la acción implementada sobre el problema que estaban tratando de solucionar. La mayoría de profesores y directivos no tenían ninguna experiencia en este tipo de trabajo y además los planes de observación fueron poco elaborados; por estas dos razones, se decidió dar una cierta cantidad de sugerencias que pudieran guiar muy de cerca el trabajo para obtener los resultados de los proyectos. Algunas de tales sugerencias se presentan a continuación:

- Describir los cambios hechos sobre la marcha con respecto a los planes de acción y de observación y explicar por qué fueron necesarias esas modificaciones.
- Establecer si los objetivos propuestos por el proyecto se lograron y determinar qué información de la obtenida les permite sustentar la aseveración sobre tal resultado.
- Evaluar (destacar aciertos y desaciertos) el funcionamiento de la acción implementada en relación con los objetivos propuestos por el proyecto, es decir, determinar si la acción que se llevó a cabo contribuyó a lograr los objetivos propuestos por el proyecto y qué información de la obtenida les ayuda a apoyar su aseveración.
- Determinar si la comprensión que tenían inicialmente del problema se modificó de alguna manera y en caso de que así hubiera sido, hacer una redefinición del problema.
- Establecer qué cambios harían a la acción implementada si fueran a aplicarla nuevamente con el mismo objetivo y explicar las razones para hacerlos.

En estrecha relación con el proceso para establecer resultados de los proyectos, también se llevaron a cabo los procesos para elaborar un documento de

reporte del proyecto y la presentación oral de los trabajos ante un grupo de personas interesadas en el tema.

## **CUESTIONES DERIVADAS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA ESTRATEGIA**

La implementación de la estrategia de desarrollo profesional fue un proceso difícil que demandó un esfuerzo importante tanto de parte de directivos y profesores como de los coordinadores del proyecto. Esa dificultad se puede ver en términos de tensiones entre dos visiones y dos formas de actuar que aunque no siempre se oponían, en ocasiones se distanciaban significativamente: las de los participantes y aquéllas sobre las que se basa y trata de promover la estrategia implementada<sup>10</sup>. Por ejemplo, directivos y profesores tenían determinadas concepciones acerca de temas tales como: el desarrollo profesional y la manera de concretarlo; el significado y sentido de hacer investigación educativa; la problemática que viven en las instituciones en torno a las matemáticas, la forma de abordar la solución de los problemas y el papel que juegan como actores principales; etcétera. En ocasiones, tales concepciones eran algo rígidas y, en todo caso, distantes de las correspondientes concepciones sobre las que se basaba la estrategia en la que se involucraron. Con respecto a las diferencias en la forma de actuar, la mayoría de directivos y profesores, usualmente actuaban y tomaban decisiones en su práctica laboral como respuesta inmediata a las necesidades que se les presentaban y no como resultado de un análisis de la situación; esta forma de actuar divergía claramente del comportamiento que les pedíamos tener. Por razón de diferencias sustanciales como las anteriormente nombradas, la estrategia fue una experiencia nueva y cuestionadora para los participantes, situación que resultó incómoda e inmanejable para varios de ellos.

En lo que sigue vamos a discutir tres de esas situaciones de tensión que nos parece que ilustran puntos claves en la conducción de directivos y profesores para que asuman una posición diferente frente al desarrollo profesional y, en particular, para que adopten la investigación como herramienta en su práctica profesional.

### **Visión acerca del desarrollo profesional**

Como ya se mencionó, la visión de lo que es el desarrollo profesional y la forma como éste se puede llevar a cabo es fuente de tensión, sobre todo, al

---

10. Con esto no se quiere significar que los participantes tuvieran la misma visión y la misma forma de actuar frente a asuntos relacionados con la estrategia en la que se involucraron. Sin embargo, sí se puede afirmar con cierta confianza que ellos compartían en buena medida la visión y la forma de actuar, y, sobre todo, que había diferencias relativamente fuertes entre su visión y forma de actuar y las implicadas en la estrategia.

iniciar la implementación de la estrategia. Veamos cómo se caracterizan las dos visiones y cómo se manifiesta la tensión entre ellas.

En el proyecto PRIME I, el desarrollo profesional es un proceso que tiene lugar en dos niveles. Es un proceso personal dentro del cual y por medio del cual docentes en ejercicio, profesores de matemáticas y directivos, se ocupan de cualificar —ampliar y profundizar— su conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal sobre temas de la profesión que ejercen. Según esta visión, profesores y directivos en ejercicio aprenden por razón de vivir experiencias ligadas de manera real a su práctica en las que encaran la solución de problemas específicos y ponen a prueba las alternativas de solución que consideran viables y pertinentes. Además, aprenden a través de la propia reflexión, de la discusión y confrontación de sus ideas con las de sus pares.

Sin embargo, el desarrollo profesional también es un proceso colectivo dentro del cual y por medio del cual el grupo de profesores de matemáticas de una institución se consolida como una comunidad de profesionales. Esto significa que llegan a compartir un conocimiento especializado propio de la profesión y además llegan a compartir visiones, valores y prácticas en relación con tal conocimiento y la forma como se adquiere y se utiliza dentro de la práctica docente.

De acuerdo con lo anterior, el desarrollo profesional es asunto que concierne a profesores y directivos en ejercicio, a nivel individual; pero, también concierne fundamentalmente a la institución misma. Así entendido, en su dimensión institucional, el desarrollo profesional no se reduce a cursos de capacitación o actualización. Tampoco requiere imprescindiblemente de la presencia de alguien externo al grupo de profesores o directivos de la institución. Es posible concretarlo, entre otras formas, a través de la actividad intencionada y realizada sistemáticamente para abordar una situación específica del quehacer docente; al involucrarse como equipo en un proceso de diseño curricular; a través de la participación en prácticas propias de la comunidad nacional de docentes, en la que se inscribe, tales como la asistencia a eventos, la comunicación de experiencias de trabajo a sus colegas, etcétera. Para que el desarrollo profesional se convierta en una práctica de la vida académica del colegio, éste debe percibir o crear, y utilizar circunstancias en las que el desarrollo profesional sea una necesidad sentida por el equipo de profesores y directivos, debe abrir espacios y favorecer condiciones propicias, debe aportar a sus miembros herramientas que les ayuden a concretarlo (por ejemplo, la metodología de investigación-acción, recursos bibliográficos, oportunidades para confrontar sus ideas con investigadores en el campo de la educación, etc.) y debe impulsar y fomentar en los individuos, profesores y directivos, actitudes y comportamientos positivos con respecto a su desarrollo profesional.

Muy alejada de esa visión estaba la que compartían directivos y profesores, que considera el desarrollo profesional como un asunto que con-

cierne fundamentalmente a los individuos. Según esta visión, aquél se concreta esporádicamente a través de cursos de capacitación ofrecidos y organizados por instituciones encargadas de la formación permanente de docentes. Mediante tales cursos se pretende actualizar el conocimiento teórico de los participantes acerca de aspectos relacionados más o menos estrechamente con su quehacer docente, y son la vía para el ascenso en el escalafón docente. Además, tienen muy poca relación con la práctica de los docentes en sus instituciones. Profesores y directivos mejoran su conocimiento especializado al participar en un proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que el formador de profesores que tiene a su cargo el curso expone su conocimiento frente a sus alumnos, les propone tareas que considera relevantes y las evalúa de acuerdo con su criterio.

Eventualmente las instituciones propician algún tipo de apoyo a la capacitación de sus profesores, como por ejemplo conseguir conferencistas o asesores para algún trabajo concreto, o, como en el caso de PRIME I, permiten la participación en proyectos liderados por agentes externos a la institución. No obstante, el desarrollo profesional no es una práctica propia de la vida del colegio. Esto se puede corroborar, por ejemplo, al examinar la carga académica de los profesores y la forma como está distribuida: tienen muy poco tiempo disponible para leer, reflexionar, preparar sus clases, hacer seguimiento a las posibles innovaciones que hagan, discutir con sus colegas sobre asuntos propios de la enseñanza de las matemáticas, realizar proyectos con los colegas, etc. todo lo cual hace parte vital del desarrollo profesional como asunto propio de la institución. Incluso, de manera más contundente, se corrobora la afirmación al considerar de qué manera se emplean en la mayoría de los colegios las reuniones de área que semanal o quincenalmente efectúan los profesores. En lugar de aprovecharlas como oportunidades a favor del desarrollo profesional, allí se dan mensajes generales de la institución, se planean actividades generales y se aborda la práctica de manera anecdótica (Castro et al., 1997).

La tensión surgida por razón de las diferencias de visión con respecto al desarrollo profesional se manifestó fuertemente al comenzar a trabajar según el esquema que se les propuso y en algunos casos fue cediendo a medida que lo comprendieron y experimentaron que era una alternativa válida que les permitía progresar profesionalmente. Inicialmente, esperaban que su participación girara en torno a exposiciones magistrales de los coordinadores y a lecturas sobre diversos temas; que los coordinadores dieran respuestas y soluciones a los problemas que ellos planteaban. Esto se puede sustentar con comentarios de dos profesores que señalaban (Perry et al., 1996c):

*Yo pensé que esto iba a ser diferente... esperaba que ustedes nos dijeran que íbamos a seguir un determinado camino y que íbamos a estudiar lo que dice alguna escuela acerca de un determinado tema...*

*Yo quería leer, estudiar [...] pero ahora sé que el propósito de ustedes también es válido.*

*La interacción con los coordinadores ha sido buena porque he tenido la oportunidad de hacer consultas, plantear situaciones que la mayoría de veces se quedan sin respuesta, pero he entendido que así debe ser para que el aporte sea realmente nuestro.*

La estrategia pretendía impulsar la idea de que el desarrollo profesional es asunto de la institución. Es muestra de ello que para aceptar la participación de un colegio en el proyecto fuera requisito indispensable contar con el interés del rector y con su compromiso de participar directamente; además, la institución debía apoyar decididamente la participación de las cuatro personas en el proyecto, para lo cual debía conceder a los participantes el tiempo de asistencia a los seminarios previstos y también facilitar algunas condiciones para el desarrollo de su investigación. Con respecto a este punto, cabe anotar que la tensión latente entre la visión de las instituciones y la que subyace a la estrategia acerca del desarrollo profesional se concretó en situaciones conflictivas que condujeron a que algunos colegios o algunos de los miembros participantes se retiraran del proyecto. A pesar de que casi todos los colegios participantes hicieron un esfuerzo grande por apoyar a sus representantes en el proyecto — permitiendo la asistencia a los seminarios previstos y a las reuniones de asesoría —, probablemente en algunos casos, los participantes no midieron la magnitud del compromiso que estaban adquiriendo, la cual podía implicar incluso la necesidad de realizar cambios en la organización de los horarios de clase y otras actividades de los profesores, en la distribución de carga académica, etc. Quizás ellos vieron la participación en este proyecto como la simple asistencia a cursos; no vieron la importancia y necesidad de facilitar el trabajo colegiado de la pareja de profesores y de los dos directivos. Es el caso de seis colegios en los que no fue posible, por diversas razones, que ambos directivos participaran sistemáticamente, situación que tuvo consecuencias en la calidad misma del proyecto y en la dinámica interna del colegio para relacionar el proyecto de los directivos con el de los profesores y para compartir los dos proyectos con toda el área de matemáticas. También es el caso de uno de los colegios que no apoyó adecuadamente a sus profesores en el sentido de que el único tiempo que les permitía para reunirse a trabajar en el proyecto coincidía con sus horas de clase, modalidad que los profesores no aceptaron y por ello se retiraron del proyecto.

### **Visión acerca de la investigación educativa**

Otra fuente de tensión al aplicar la estrategia fue la visión acerca de lo que es la investigación. Para la mayoría de directivos y profesores, la investigación era una actividad exclusiva de personas preparadas para hacerla. Se

requería estar entrenado en el paradigma empírico-analítico y ser capaz de diseñar y aplicar una serie de métodos cuantitativos para recoger y analizar la información.

En oposición a esa visión, se les introdujo en el paradigma crítico y, en particular, en el enfoque de la investigación-acción. La descripción detallada de la forma como se condujo el desarrollo de los proyectos de investigación-acción evidencia en buena medida que el significado que asignamos en este proyecto a la expresión “directivos y profesores como investigadores” está estrechamente ligado con el propósito de involucrar a estas personas en la dinámica de un tipo especial de práctica profesional. Este tipo de práctica destaca entre sus elementos más importantes la reflexión y la indagación sistemáticas como fundamentos para la toma de decisiones que le conciernen, la planeación de acciones en estrecha relación con el contexto en el que se da la práctica, la ejecución intencionada y reflexiva de unos planes no rígidos, y el seguimiento y la evaluación de las acciones ejecutadas con miras a establecer la efectividad que pueden tener y las modificaciones necesarias para ocasiones posteriores.

La tensión surgida a raíz de las diferentes visiones sobre la investigación tuvo varias manifestaciones en las actitudes y el comportamiento de los participantes a lo largo del desarrollo del proyecto. Sentían que no eran capaces de sacar adelante sus proyectos porque hacer investigación era muy difícil para ellos. El comentario de uno de los directivos al respecto evidencia ese sentimiento (Perry et al., 1996c):

*Siendo [como somos] el producto de una educación conductista nos ha quedado difícil encarar la tarea de investigadores.*

En algunas ocasiones había la tendencia a pensar que era suficiente aplicar una prueba y hacer un diagrama para ilustrar los porcentajes de respuestas encontradas. Fue el caso de varios profesores que evaluaron el efecto de sus diseños curriculares señalando sólo los porcentajes de alumnos que respondieron correcta e incorrectamente las preguntas que les fueron propuestas. Sin embargo, otros participantes consideraron que el trabajo que se les pedía realizar era un ejercicio rutinario que no merecía que se le dedicara tiempo adicional y esfuerzo por parte de ellos. Así ocurrió con varios profesores que abandonaron el proyecto durante el primer seminario. Uno de ellos que, con alguna frecuencia, se había preocupado por el problema del aprendizaje de sus alumnos y en consecuencia había realizado algunos “experimentos” para mejorar los resultados, vio la estrategia que se le proponía como repetición de lo que él había hecho en ocasiones anteriores. Así lo expresa en el siguiente comentario (ibid):

*[...] decidí no volver porque creí que iba a realizar las mismas cosas en las que he estado trabajando [...].*

Sin embargo, cuando se le preguntó por los resultados de los experimentos que había realizado fue clara para él la diferencia entre lo que proponía la estrategia y lo que él había hecho en casos anteriores.

### **Ejecución versus reflexión**

Una tercera fuente de tensión que vale la pena mencionar se ubica en el nivel de la actuación de directivos y profesores. Por un lado, ellos en su práctica laboral se ven obligados a encarar un sinnúmero de situaciones a las que deben dar solución inmediata sin que medie necesariamente un análisis de la situación, de las alternativas posibles de actuación, sin que haya una planeación cuidadosa de la acción y luego el correspondiente seguimiento y evaluación de los resultados. Por ejemplo, es usual que dentro de la carga académica de los profesores no se asigne tiempo para la preparación de sus clases, y puesto que ellos, frecuentemente tienen varios cursos que atender, la realidad es que dedican muy poco tiempo a una reflexión sistemática acerca de la enseñanza y aprendizaje en sus cursos. En lo que respecta a los directivos, específicamente a los rectores, la diversidad y cantidad de asuntos que deben atender es una de las causas para que ellos no ejerzan su liderazgo en los procesos académicos generales de la institución. Por ejemplo, el conocimiento parcial que la mayoría de los rectores tienen acerca de la problemática de las matemáticas en sus instituciones evidencia poco contacto con esa realidad. Por otro lado, con frecuencia deben realizar prácticas que vienen impuestas desde fuera sin que ellos vean la necesidad o el sentido que tiene tal realización (e. g. dar cuenta de la planeación y del desarrollo de las clases de acuerdo con formatos preestablecidos, realizar reuniones de área en las que el contenido no es del interés propio del área, etc.). En resumen, el quehacer laboral de directivos y profesores está marcado por una tendencia fuerte hacia la ejecución mecánica y muy débil hacia la reflexión.

En oposición a lo que es usual en las instituciones educativas con respecto a la forma de actuación de directivos y profesores, la estrategia aplicada en PRIME I pretendía que los participantes vivieran una experiencia donde la reflexión sistemática sobre la propia práctica y la indagación metódica fueran las características principales. En realidad, no era la solución de un problema lo que considerábamos la parte fundamental de la estrategia propuesta. En cambio, era la vivencia completa e innovadora de una experiencia de trabajo para abordar e intentar la solución de un problema lo que considerábamos más valioso del proyecto.

La tensión entre lo que efectivamente realizaron profesores y directivos —como resultado de sus visiones, conocimientos y experiencias— y lo que los coordinadores del proyecto queríamos que ellos realizaran en términos de la calidad del proceso de reflexión vivido por cada quien, se manifestó, por ejemplo, en el significado limitado que dieron a las actividades que debían realizar y en el sentimiento de incomodidad cuando cuestionábamos

sus propuestas. En el caso de los profesores, se puede destacar la comprensión limitada que tuvieron acerca de la utilidad de las actividades que estaban “forzados” a realizar como paso previo a la elaboración del diseño de la secuencia de clases. No se imaginaban qué razón estratégica y qué interés de investigación podría existir detrás de la restricción que impusimos de abordar un tema que se pudiera desarrollar en máximo tres horas de clase. Les resultaba bastante sorprendente que pudieran emplear tanto tiempo — ocho meses — en desarrollar significativamente un proceso que usualmente hacen en unas pocas horas. Cabe también señalar la desmotivación frecuente debida a los comentarios que hacíamos al trabajo de ellos y el sentimiento de que no tenían toda la libertad para desarrollar sus intereses genuinos. Los comentarios de dos profesores en la evaluación final del proyecto ilustran claramente lo dicho (Perry et al., 1996c):

*Los primeros días fueron frustrantes; entendimos con dificultad lo que ustedes nos pedían que hiciéramos; por eso no sabíamos qué hacer.*

*Al comienzo, yo trataba de hacer lo mejor a pesar de que no tenía claro lo que debía hacer, pero ustedes siempre me decían que eso no era y yo debía volver a pensar en la cosa.*

Aunque al terminar el proyecto, la mayoría de los participantes fueron conscientes de que la investigación-acción representa para ellos una herramienta de trabajo que les puede ayudar a abordar los problemas y su solución, esto no les fue evidente desde el principio. El énfasis que profesores y directivos dieron al desarrollo del proyecto estaba mucho más centrado en el problema identificado y su resolución que en la metodología de trabajo que estaban aprendiendo a utilizar. Esta interpretación de cuál podía ser el propósito principal de la participación en PRIME I, estuvo en la base de la tensión de la que estamos hablando y se puede ilustrar con la magnitud del problema que los directivos de un colegio querían abordar y la cantidad y complejidad de las acciones que querían realizar en el tiempo disponible para el proyecto:

*[El problema es] La heterogeneidad de conocimientos en matemáticas de los alumnos del grado sexto.*

*[El plan de acción consiste en] Hacer una evaluación diagnóstica del estado de conocimiento con que llegan los alumnos que ingresan al grado sexto, analizar los resultados de la evaluación, clasificar a los alumnos de acuerdo con los resultados obtenidos, elaborar programas estratégicos de nivelación y hacer ajustes de los programas durante el desarrollo de los mismos.*

## REFLEXIÓN FINAL

Como una forma general para manejar las situaciones de tensión decidimos explicitar y explicar suficientemente los supuestos sobre los que se basaba la estrategia y además, siempre justificar nuestras decisiones. Considerábamos que de esa manera los participantes podrían dar sentido a la vivencia que estaban teniendo y se podrían comprometer más fácilmente con ella. También procuramos ser más conscientes del estilo de interacción personal con los participantes y nos ocupamos de cuidarlo de manera especial pues vimos que para el éxito de PRIME I era necesario establecer una relación cercana y afectuosa con los participantes. Durante las sesiones de asesoría dedicamos una buena proporción del tiempo a cuestionar a los participantes y a encontrar ejemplos que les ayudaran a ver posibles deficiencias o fortalezas de sus propios trabajos. Los coordinadores del proyecto logramos una herramienta fructífera para impulsar en los profesores reflexiones más profundas en el proceso de investigación al asumir el papel de alumnos no brillantes que debíamos desarrollar las tareas propuestas por aquéllos. Frente a los profesores, expresábamos en voz alta nuestro pensamiento a medida que realizábamos la tarea. Al ver las posibles reacciones de los estudiantes, muchas de ellas inesperadas, se lograba que el profesor cuestionara en profundidad la pertinencia y coherencia de la tarea y también surgían ideas con respecto a la forma de mejorar los diseños.

Una vez que los participantes decidieron involucrarse en la estrategia de desarrollo profesional y comprometerse con ella trataron de dar lo mejor de sí mismos. La mayoría de ellos invirtió mucho tiempo no sólo pensando en las cuestiones que nosotros les planteábamos sino también en lo que ellos consideraban que debían hacer. Quienes llegaron hasta el final del proyecto reconocieron la importancia de la experiencia vivida, en términos de lo que ésta les aportó en su vida profesional. Varios de los directivos consideraron que el proyecto les dio ideas y metodologías para la elaboración de sus proyectos educativos institucionales y para la ejecución de experiencias y, en general, para mejorar la gestión administrativa. El siguiente comentario de uno de los coordinadores académicos, al finalizar el proyecto, muestra el valor dado a la metodología de investigación-acción como herramienta de trabajo (Perry et al., 1996c):

*[El proyecto] Me acercó a la investigación-acción lo que aporta una nueva manera de encarar los problemas y una forma de solucionarlos, aprendí sobre investigación-acción (aunque creo que me falta mucho), me permitió investigar a partir de las situaciones de la vida cotidiana en la institución.*

También los profesores reconocieron que el proyecto les abrió oportunidades interesantes para reflexionar sobre su actuación en clase y para hacerse

más conscientes de la complejidad implicada en el proceso de aprendizaje de sus alumnos. Así lo muestran comentarios de dos profesores, al finalizar el proyecto:

*Logré ampliar mi visión sobre cómo aprenden los estudiantes al estimular la reflexión más detenida sobre causas de dificultad en la formación de procesos matemáticos.*

*Los aportes han sido valiosos para mi quehacer educativo en la actitud frente a las respuestas de los estudiantes, detenerme un poco más a atender sus dificultades con mayor disposición, también al planear las actividades que quiero realizar.*

A partir de la evaluación que hicieron directivos y profesores sobre el proyecto, de la evaluación que de manera informal pero continuada hicieron los coordinadores sobre el mismo y sobre la base de los reportes y artículos elaborados por los participantes —que reflejan que directivos y profesores despertaron su consciencia acerca de la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en sus colegios y del papel que ellos juegan en la problemática que allí se vive— consideramos que los resultados obtenidos en PRIME I son aceptables. Sin embargo, al comparar la situación al terminar PRIME I con la que se tuvo al terminar MEN-EMA nos surge un cuestionamiento en torno a los resultados finales en relación con la dinámica de interacción de coordinadores y participantes.

Concretamente nos preguntamos cuál ha de ser el punto de equilibrio en nuestra interacción con los participantes en lo que respecta a sus proyectos para lograr motivarlos, mantener esa motivación, y además iniciar un proceso de auto-crítica con respecto a la propia práctica. En lo que sigue, a través de un ejemplo, pretendemos explicar la esencia de la situación que nos cuestiona.

En la fase exploratoria MEN-EMA establecimos de manera muy general la tarea para los profesores: enfatizamos el propósito de diseñar, aplicar y evaluar el currículo de un tema, de alguno de sus cursos, que ellos consideraran problemático. Los resultados vistos a través de los reportes y de los artículos elaborados por los profesores evidenciaron algunas deficiencias relacionadas con la pertinencia y calidad de las secuencias diseñadas para abordar y tratar el problema identificado, con el contenido matemático de las tareas propuestas, y con la profundidad y la sistematicidad de las reflexiones de los profesores como “investigadores”. Ellos se sintieron orgullosos de sus trabajos y estaban muy motivados para continuar haciendo “algo diferente” en sus clases<sup>11</sup>. A pesar de que consideramos que lograr ese estado de motivación fue un éxito en el inicio de un proceso de cambio, también encontramos que los participantes construyeron una concepción parcial y superficial de lo que es la investigación-acción y de la

relación que ella tiene con la práctica de la enseñanza. Como consecuencia de lo anterior, en PRIME I, no sólo modificamos la forma como enunciamos y presentamos la tarea a los profesores participantes, sino también, diseñamos una serie de actividades conducentes a lograr el tipo de definición de problemas que queríamos. Tal como se puede ver en la descripción de la estrategia, presentada en la sección anterior, en esta ocasión guiamos muy de cerca a los participantes en su trabajo. A pesar de que queríamos potenciarlos más que conducirlos según nuestras visiones, y queríamos darles libertad para desarrollar sus proyectos, las condiciones y restricciones que impusimos nos llevaron a empujar inconscientemente en dirección de lo que nosotros pensábamos que se debía hacer.

Si se compara la experiencia del proyecto MEN-EMA con la del proyecto PRIME I en términos de la calidad de los proyectos de los profesores, el segundo supera al primero. Pero si el criterio para compararlos es el sentimiento de comodidad proporcionado por el proyecto y el número relativo de profesores que terminaron el proyecto<sup>12</sup>, el primero supera ampliamente al segundo.

Después de la aplicación de las dos versiones de la estrategia de desarrollo profesional y de tener en los correspondientes resultados algunos elementos de juicio somos conscientes de la complejidad que rodea el inicio de un proceso de cambio en los profesores y directivos de colegios y la necesidad de indagar acerca de cómo se pueden llevar a cabo tales procesos cuando la meta a largo plazo es la potenciación de las personas.

## REFERENCIAS

- Aldana, E. et al. (1994). *Colombia: al filo de la oportunidad. Informe conjunto de la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo*. Bogotá: MEN.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: una empresa docente - GEI.
- Báez, J. (Comp.) (1991). *Legislación Educativa*, vol. 1. Bogotá: MEN.
- Castro, M., Perry, P., Valero, P., Gómez, P. y Agudelo, C. (1997). La interacción profesional como elemento dinamizador en el desarrollo profesional de los pro-

11. Consecuencia de tal motivación es que después de terminar el proyecto, profesores de matemáticas de siete de los diez colegios participantes en MEN-EMA están desarrollando otros proyectos de investigación-acción dentro de un esquema en el que los profesores mismos son responsables directos de sus trabajos y "una empresa docente" los asesora.

12. En el proyecto MEN-EMA, 80% de los profesores terminaron sus proyectos de investigación-acción y asistieron a todos los seminarios. En PRIME I, 50% de los profesores llegó hasta el final del proyecto, 33% abandonó hacia la mitad del proyecto y 17% se retiró al principio.

- fesores de matemáticas. En R. Farfán (Ed.), *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (p. 74). Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Fullan, M. (1987). Planning, doing, and coping with change. En R. Carlson y E. Ducharme (Eds.), *School Improvement-Theory and Practice. A Book of Readings*. Boston: University Press of America.
- Gómez, P. y Perry, P. (Eds.) (1996). *La problemática de las matemáticas escolares. Un reto para directivos y profesores*. México: una empresa docente - GEI.
- Gómez, P. y Valero, P. (1995). La potenciación del sistema de educación matemática en Colombia. En P. Gómez et al., *Aportes de "una empresa docente" a la IX CIAEM* (pp. 1-9). Bogotá: una empresa docente.
- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1992). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- MEN (1992). *SABER. Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación. Primeros resultados: matemáticas y lenguaje en la básica primaria*. Bogotá: MEN.
- NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.
- Novak, J. (1982). *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza Editorial.
- Perry, P., Valero, P. y Gómez, P. (1995). Proyecto MEN-EMA: exploración de la problemática de las matemáticas escolares en colegios oficiales de Bogotá. En P. Gómez et al., *Aportes de "una empresa docente" a la IX CIAEM* (pp. 19-44). Bogotá: una empresa docente.
- Perry, P., Valero, P. y Gómez, P. (1996a). La problemática de las matemáticas escolares desde una perspectiva institucional. En P. Gómez y P. Perry (Eds.), *La problemática de las matemáticas escolares. Un reto para directivos y profesores* (pp. 3-54). México: una empresa docente - GEI.
- Perry, P., Gómez, P. y Valero, P. (1996b). The teaching of mathematics from within the school. Teachers and principals as researchers. En L. Puig y A. Gutiérrez, (Eds.), *Proceedings of the 20th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 123-130). Valencia: Universidad de Valencia.
- Perry, P., Valero, P., Castro, M., Gómez, P. y Agudelo, C. (1996c). *Reporte de investigación del proyecto PRIME I*. Disertación no publicada, "una empresa docente" - Bogotá.
- Perry, P., Castro, M., Valero, P., Gómez, P. y Agudelo, C. (1997). A look at teachers' professional knowledge through the analysis of classroom activities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 257). Lahti: Universidad de Helsinki.

- Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Editorial Síntesis.
- Romberg, T. A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*, 294, 323-406.
- Sánchez, M. y Mompotes, A. (1996). Colombia se rajó en ciencias. *El Tiempo*, diciembre 2 de 1996, p. 16A.
- Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.
- Valero, P., Perry, P. y Gómez, P. (1996). Educación matemática en secundaria y desarrollo profesional. Una visión institucional. *Revista Educación y Cultura*, 40, 42-47.
- Valero, P., Gómez, P. y Perry, P. (1997a). School mathematics improvement: Administrators and teachers as researchers. En V. Zacks, J. Mousley, y C. Breen, C. (Eds.), *Developing practice: teachers' inquiry and educational change* (pp. 113-121). Geelong, Australia: CSMEE; Universidad de Deakin.
- Valero, P., Gómez, P., Perry, P., Castro, M. y Agudelo, C. (1997b). School structure influence on administrators' actions upon mathematics staff development in schools. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 266). Lahti: Universidad de Helsinki.





# VISIÓN INSTITUCIONAL DE LAS MATEMÁTICAS<sup>1</sup>

ANA GUERRA Y JULIO C. PEÑARANDA  
COLEGIO DISTRITAL ANTONIO JOSÉ URIBE

*Este artículo presenta el trabajo que dos directivos del Colegio Distrital Antonio José Uribe, jornada de la tarde, realizaron para indagar acerca de las visiones de los distintos estamentos de la comunidad educativa con respecto a la utilidad de la formación matemática que se les proporciona a los estudiantes en el colegio. Este fue un primer paso para abordar el problema de la desmotivación y el bajo rendimiento de los alumnos en el área de matemáticas. Los resultados obtenidos sugieren que la falta de coherencia entre las visiones de los diferentes estamentos con respecto a la utilidad de la formación matemática de los estudiantes puede ser una de las causas de la problemática que se vive en el área de matemáticas del colegio. Por tanto, se hace necesario realizar esfuerzos colectivos y coordinados que se encaminen a mejorar o corregir la situación.*

## DIAGNÓSTICO DE LA PROBLEMÁTICA

Consideramos de gran importancia hacer una breve descripción de la comunidad educativa donde desarrollamos nuestro proyecto, por considerar que posee características muy específicas que pueden influir considerablemente en el problema que abordamos. El plantel educativo está ubicado en el centro de la ciudad de Bogotá, en un sector popular con alto grado de descomposición social: allí hay delincuencia, prostitución, consumo de drogas, homosexualismo, etc. En su conjunto, la comunidad educativa es de un nivel socioeconómico y cultural bajo; en ella se presenta todo tipo de violencia, abandono, pobreza, carencia de afecto y un alto índice de desintegración familiar. Esto trae consigo una despreocupación casi total por el estudio de parte de los alumnos, puesto que no ven en él salida a su situación económica. Este hecho incide notablemente en el rendimiento académico en el área de matemáticas, que en el año 1995 alcanzó niveles de mortalidad realmente alarmantes.

---

1. Este artículo fue editado por Paola Valero, investigadora de “una empresa docente”.

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La situación descrita en el diagnóstico había sido motivo de preocupación para directivos y profesores desde tiempo atrás, pero no se había formulado o desarrollado estrategia alguna para abordar y tratar el problema. Por esta razón decidimos aprovechar la oportunidad que nos brindó la Universidad de los Andes de participar en el proyecto PRIME I, en cuyo marco vivimos la experiencia de planear y ejecutar un trabajo de investigación-acción que nos llevó a conocer más a fondo las causas de la desmotivación y el bajo rendimiento académico en matemáticas de nuestros alumnos.

Después de una serie de reflexiones y discusiones con los coordinadores del proyecto, como medio para llegar a concretar y definir el problema, encontramos que la falta de explicitación de las visiones que sobre la formación matemática tienen los diferentes estamentos de la comunidad educativa del colegio y la falta de discusión acerca de las mismas podían ser factores determinantes del problema que vivimos en la institución alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia, planteamos como objetivo de este proyecto concretar la visión de los diferentes estamentos de la institución, acerca de la utilidad de enseñar y aprender matemáticas en el colegio, para lo cual sería necesario aplicar encuestas a directivos, profesores y alumnos, con preguntas apropiadas de las que se pudiera obtener la información deseada.

## LA ACCIÓN Y LA OBSERVACIÓN

Concebimos nuestro plan de acción desde dos objetivos básicos: primero, queríamos establecer un acercamiento entre directivos, profesores y alumnos en torno al proyecto para motivarlos y así lograr una participación activa en la aplicación de la encuesta; segundo, deseábamos dar a conocer los resultados de la misma para generar un debate acerca de lo obtenido. A continuación se describe brevemente tanto el plan de acción como el plan de observación que seguimos para lograr nuestros objetivos.

Para comenzar, planeamos una reunión con directivos y profesores en la que pretendíamos dar a conocer el proyecto para lograr su aceptación y participación. Efectivamente, en una jornada pedagógica la rectora informó sobre el proyecto y los posibles alcances que podría tener su desarrollo en el colegio. Este anuncio despertó gran interés en los profesores, inclusive en los de otras áreas quienes propusieron hacer extensiva dicha iniciativa a todas las áreas. En dicha reunión se seleccionó un grupo de profesores — que se puede considerar representativo— tanto de matemáticas como de otras áreas para que participaran directamente en el proyecto respondiendo la encuesta. También allí se acordó que el grupo de alumnos debía ser

seleccionado por los profesores de matemáticas de acuerdo con el rendimiento demostrado en el área.

Se observó en profesores y alumnos presentes en la reunión actitudes de buena disposición, aceptación e interés hacia el trabajo, con lo cual creímos haber logrado la suficiente motivación y por consiguiente la participación activa como elementos esenciales para iniciar nuestro proyecto. Captamos estas actitudes a través de la observación directa y el registro escrito sobre algunos detalles de la reunión.

Lo siguiente fue el trabajo para crear las preguntas que nos dieran información acerca de la visión que tienen directivos, profesores y estudiantes sobre lo que debe ser la formación matemática de los estudiantes del colegio. Llegamos a tener un banco de preguntas bastante amplio que consideraba una diversidad de aspectos relacionados con las matemáticas pues quisimos tener en cuenta la parte operativa, cognitiva, afectiva, metodológica y profesional. Sin embargo, al interactuar con los coordinadores del proyecto PRIME I, se hizo evidente la dificultad que podríamos llegar a tener para codificar e interpretar la información que recogeríamos. Entonces, caímos en cuenta de que aquel cúmulo de interrogantes se podía reducir a tres preguntas, dirigidas respectivamente a los cuatro estamentos, a saber, alumnos, profesores de matemáticas, directivos, orientadores y profesores de otras áreas. Estas preguntas fueron:

- ¿Para qué aprendemos matemáticas los estudiantes?
- ¿Para qué enseñamos matemáticas en el colegio los profesores de matemáticas?
- ¿Para qué se enseña matemáticas en el colegio?

Cuando estuvo preparada la encuesta, la aplicamos. La experiencia se realizó con un grupo de 116 personas entre alumnos, profesores, directivos y orientadores, distribuidos así:

Estamentos	Grupos	Niveles	Nº Cursos	Total
Alumnos	G1	5°, 6°, 7°	8	48
	G2	8°, 9°	4	24
	G3	10°, 11°	4	20
Profesores	M	Matemáticas		4
	OA	Otras áreas		6
	P	Primaria		3

Estamentos	Grupos	Niveles	Nº Cursos	Total
Orientadores	D			2
Directivos				1

Los alumnos fueron seleccionados por los profesores de matemáticas de acuerdo con el rendimiento mostrado en el área: bueno, regular y deficiente. Esta selección se hizo en forma discreta para que los alumnos no se sintieran clasificados. La aplicación de la encuesta a los alumnos se realizó en la biblioteca en tres momentos diferentes, teniendo en cuenta las distribuciones por grupos. En primer lugar se aplicó al grupo de alumnos más pequeños. La actitud de ellos fue de expectativa e inquietud hacia la actividad que iban a realizar. Estuvieron atentos a la explicación sobre el trabajo que debían realizar y demostraron haber entendido todo, puesto que no hubo ninguna clase de pregunta. Al empezar se miraban, se reían y cruzaban palabras entre sí. Algunos se manifestaron pensativos y, posteriormente, sin demostrar ningún tipo de temor, empezaron a contestar la pregunta. Ellos manifestaron agrado y simpatía y se sintieron importantes por haber sido elegidos para realizar este trabajo. El tiempo empleado para contestar la encuesta fue de 10 a 15 minutos. Los alumnos de octavo y noveno, que conformaban el segundo grupo de alumnos, se mostraron también muy nerviosos al principio pero, después de la charla y la explicación de la razón por la cual estaban allí y de la importancia que tenía su respuesta para el proyecto, cambiaron su actitud. Hablaron entre ellos 2 ó 3 minutos, se miraban y reían; después se concentraron en contestar la encuesta y al mismo tiempo no querían dejar ver o leer lo que estaban escribiendo a los demás compañeros. Se les notó muy tranquilos al final y también muy interesados, ya que querían averiguar cuándo obtendrían los resultados de la encuesta. Los alumnos del tercer grupo, conformado por personas de los grados décimo y undécimo, recibieron con atención la explicación sobre el trabajo a realizar, no hicieron preguntas ni tampoco demostraron mucho agrado o interés para contestar; se mostraron indiferentes. Al comenzar algunos hicieron comentarios, otros empezaron a escribir. La gran mayoría empleó de 8 a 10 minutos en contestar.

En lo que hace referencia al grupo de profesores y directivos, la encuesta se aplicó en momentos diferentes. El grupo de profesores de matemáticas respondió la encuesta durante una hora de reunión de área; los profesores de primaria y de otras áreas la respondieron de acuerdo con la disponibilidad de tiempo de cada uno, lo mismo que el directivo; los dos orientadores respondieron la encuesta durante el mismo tiempo. En general, los profesores encuestados tuvieron una actitud de aceptación hacia la encuesta. No hubo preguntas, manifestaron buen agrado para contestarla pues estaban muy de acuerdo con los directivos para participar en este tipo

de proyecto. Es así como todos procedieron a responder la encuesta y lo hicieron en forma inmediata a pesar de que no se les determinó el tiempo.

## LOS RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS

Las encuestas se organizaron por grupos teniendo en cuenta la distribución de la muestra que se presentó en el cuadro correspondiente. Se procedió a leer las respuestas y a clasificarlas en las siguientes categorías sobresalientes (ver Apéndice A y Apéndice B):

- en relación con el estudio actual,
- en relación con la formación del alumno,
- en relación con el futuro del alumno,
- en relación con otros aspectos.

Al examinar los Apéndices A y B se ve que una proporción alta (45.87%) de respuestas de los alumnos afirma la utilidad que para su futuro tiene el aprendizaje de las matemáticas en el colegio. Sin embargo, esa alta proporción está constituida por respuestas de diversa índole, de las cuales la expectativa de continuar estudios universitarios tiene una frecuencia relativa baja comparada con la que expresa la importancia que se da a la formación matemática para la vida laboral (49.11% del total de respuestas que se ubican en la categoría “En relación con el futuro del alumno”). Contrasta de manera importante la baja proporción (16.66%) de respuestas dadas por profesores y directivos encuestados que enfatizan la utilidad de enseñar matemáticas en el colegio en relación con el futuro del alumno. En cambio, una proporción alta (73.32%) de las respuestas de ellos centra la importancia de enseñar matemáticas en el colegio en aspectos formativos para el alumno.

Para los alumnos su visión sobre la formación matemática en el colegio, es más de carácter práctico: la ven como un medio para progresar y llegar a ser importantes en el futuro bien sea a través de actividades cotidianas, o a través de desempeñarse bien en una empresa o negocio, y porque el saber matemáticas da mayor oportunidad de conseguir un empleo. La visión que tienen acerca de la utilidad de la formación matemática en el colegio los profesores de matemáticas, está estrechamente ligada con el desarrollo del pensamiento lógico del alumno. Para profesores de otras áreas y orientadores, la visión está ligada con la formación académica en busca de una preparación para continuar estudios universitarios. Para el único directivo encuestado, la formación matemática que el colegio da a sus alumnos debe lograr un dominio y conocimiento de las operaciones básicas con miras a alcanzar un mejor desempeño tanto en sus actividades cotidianas como en su vida profesional.

## UNA REFLEXIÓN

El estudio que hemos realizado nos permite formular hipótesis con respecto a la visión de los diferentes estamentos de nuestra comunidad educativa sobre la utilidad de la formación matemática que se da en el colegio. En primer lugar, los profesores no tienen una visión unificada sobre la formación matemática que se implementa en el colegio. En segundo lugar, existe una gran diferencia entre las visiones de los alumnos y las de los profesores.

Los hallazgos que hemos obtenido en este proyecto nos dan indicios para pensar que la falta de unificación de visiones, con respecto a para qué se aprenden y para qué se enseñan las matemáticas en el colegio, puede incidir de manera importante en la desmotivación y el bajo rendimiento de los alumnos en el área de matemáticas. Los hallazgos también nos impulsan a iniciar acciones concretas y coordinadas no sólo para abordar tales problemas, sino para establecer criterios unificados desde la formulación de objetivos, selección de contenidos, metodología, materiales didácticos, etc. con el fin de lograr que la enseñanza de las matemáticas responda a las verdaderas necesidades, intereses y expectativas de nuestros alumnos.

## APÉNDICE A

Aspectos sobresalientes	G1	G2	G3	Porcentaje
En relación con el estudio actual				
Diferenciar el valor entre letras y números	0	11	2	5.32
Obtener buenas calificaciones y sobresalir en clase	5	2	0	2.86
Tomar base para el estudio de otras áreas	0	0	6	2.45
Terminar el bachillerato	2	9	0	4.50
En relación con la formación del alumno				
Desarrollar y agilizar facultades mentales	3	4	6	5.32
Lograr una formación intelectual más completa	7	5	8	8.19
Dominar las operaciones básicas	11	10	1	9.01
Tener buen desempeño en actividades cotidianas	10	9	14	13.52
En relación con el futuro del alumno				
Salir de la ignorancia para no ser rechazado	1	2	1	1.63
Adquirir importancia en la vida o futuro	18	10	5	13.52
Continuar estudios universitarios	5	4	11	8.19
Tener acceso a un trabajo o empleo	11	5	8	9.83
Tener buen manejo de un negocio o empresa	15	8	8	12.70
En relación con otros aspectos				
Por ser de su agrado	2	3	2	2.86
Totales	90	82	72	99.9

*Tabla N° 1. Resultados de la encuesta aplicada a los alumnos*

## APÉNDICE B

Aspectos sobresalientes	M	OA	P	D	Porcentaje
En relación con el estudio actual					
Dar base fundamental a otras áreas	1	2	0	0	10.00
En relación con la formación del alumno					
Ubicar al alumno en el tiempo y el espacio relacionándolos con los demás objetos	0	0	1	0	3.33

*Tabla N° 2. Resultados de la encuesta aplicada a profesores y directivos*

<b>Aspectos sobresalientes</b>	<b>M</b>	<b>OA</b>	<b>P</b>	<b>D</b>	<b>Porcentaje</b>
Desarrollar el pensamiento lógico y la comprensión	4	0	2	1	23.33
Desarrollar la capacidad para resolver problemas cotidianos	3	0	0	0	10.00
Desarrollar el manejo de procesos operacionales y cuantitativos	0	2	0	1	10.00
Contribuir a una formación académica e integral	2	3	0	3	26.66
<b>En relación con el futuro</b>					
Prepararlo para una carrera universitaria	0	4	0	0	13.33
Lograr buen desempeño en actividades cotidianas y el trabajo profesional	0	0	0	1	3.33
<b>Totales</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>99.98</b>
M: profesores de matemáticas; OA: profesores de otras áreas; P: profesores de primaria; D: directivos (orientadores y jefe de departamento)					

*Tabla N° 2. Resultados de la encuesta aplicada a profesores y directivos*

# UNA PROPUESTA PARA LA CONSOLIDACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS<sup>1</sup>

LUZ BERNAL Y MARTHA GARZÓN  
COLEGIO GABRIEL ECHAVARRÍA

*Este artículo presenta los resultados de un proyecto de investigación-acción realizado por el colegio Gabriel Echavarría, en el marco del proyecto PRIME I. El proyecto tuvo como centro de interés la consolidación del área de matemáticas, desde dos dimensiones: la dimensión de la interacción y comunicación entre profesores y directivos de la institución y la dimensión de la construcción de una propuesta de área compartida. El proyecto fue realizado a lo largo de ocho meses y fue liderado por el rector y el coordinador del área de matemáticas del colegio con la participación del grupo de profesores de matemáticas. Entre los resultados encontrados vale la pena mencionar la recuperación de espacios conjuntos para la discusión de tareas y proyectos, la incorporación de nuevos docentes, el establecimiento de actividades pedagógicas de refuerzo, la reestructuración de la propuesta de área centrada en el proyecto educativo institucional y la planeación y realización de actividades extraclase.*

## INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta la experiencia del Colegio Gabriel Echavarría (CGE) en relación con su participación en el proyecto PRIME I. Inicialmente se hace una descripción de los antecedentes y del problema que se abordó, luego se establecen los objetivos propuestos para el estudio y finalmente se describen las acciones realizadas y los resultados encontrados.

El Colegio Gabriel Echavarría pertenece a la Compañía Colombiana de Cerámica Colcerámica S.A. de la Organización Corona. Funciona en Madrid, Cundinamarca, con 34 años de historia. En la actualidad es un colegio de educación preescolar, básica y media académica, para hijos de empleados de Colcerámica y otros niños y jóvenes del municipio. Cuenta con 395 alumnos y 28 profesores en la jornada diurna. La contratación de docentes es a término indefinido para 90% del personal.

En un momento como el actual, cuando pasamos de la economía de los bienes a la economía del saber, el conocimiento se constituye en premisa fundamental de trabajo tanto para el sector educativo como para el produc-

---

1. Este artículo fue editado por Mauricio Castro, investigador de “una empresa docente”.

tivo. Ya no se trata sólo de su apropiación y uso; también es asunto de generar nuevo conocimiento y de desarrollar la capacidad de las personas y las organizaciones para construirlo. Se trata de generar la capacidad de aprender y adaptarse a nuevas situaciones y de lograr que la construcción de conocimiento se constituya en motor de mejoramiento continuo, de innovación. Sobre estos principios se constituye la experiencia del CGE, se fundamenta la relación con un entorno y se adelanta este proyecto de “Consolidación del área de matemáticas”.

## DIAGNÓSTICO DE LA PROBLEMÁTICA

En septiembre de 1995, “una empresa docente” centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes, nos invitó a participar en un proyecto de investigación-acción que permitiera abordar la problemática de las matemáticas escolares en algunos colegios de la capital. Entre las exigencias planteadas estaba manejar la situación a través de medidas conjuntas entre rectoría y coordinación de matemáticas de tal manera que pudieran esperarse resultados observables en un lapso máximo de ocho meses.

Entre enero y febrero de 1996, un nuevo equipo directivo había asumido la conducción del colegio y enfrentaba el reto de consolidar equipos y metodologías de trabajo para la gestión del plantel. Se encontraba apenas en formulación el Proyecto Educativo Institucional, PEI, que había sido no sólo una tarea pendiente ante las autoridades educativas, sino la oportunidad de formular conjuntamente el deber ser de la institución y la organización del camino para lograrlo. Ante esa perspectiva la propuesta de “una empresa docente” resultaba del máximo interés y pertinencia.

Al identificar la problemática específica del área de matemáticas se encontraron bajos niveles de logros generalizados en los diversos grados y baja motivación frente a la asignatura. Se hallaron factores asociados a esta problemática en relación con los estudiantes, con los maestros y con la institución misma.

Con respecto a los estudiantes se apreciaron dificultades en el manejo de las operaciones matemáticas y en la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático. También se detectaron deficiencias en la identificación de un problema y en las estrategias de solución al mismo.

De otra parte, en algunos profesores se notó falta de compromiso o limitaciones para enfrentar su desempeño profesional, al persistir en una baja actividad para superar las dificultades y para proyectar acciones preventivas y remediales en el funcionamiento del área de matemáticas. También se evidenció en algunos casos una resistencia para abordar nuevas metodologías de enseñanza o enfoques conceptuales sobre las matemáticas, que fueran diferentes a los que ellos tenían. Algunas clases de matemáticas eran dictadas

por profesores no especializados en el área, algunos de los cuales, las asumieron más impositiva que voluntariamente.

Se encontró que durante 1994 el colegio careció de profesor de matemáticas para secundaria durante un bimestre. En 1995 ocurrió lo mismo por un mes. Durante esos períodos hubo actividades semidirigidas por otros profesores del área pero faltó orientación y apoyo directivo a los alumnos. Esto señaló cierto nivel de responsabilidad institucional en la problemática identificada.

Aunque los principios pedagógicos del colegio nos orientan a la integración, aplicación y transferencia de los saberes escolares, aún hay limitaciones importantes en las estrategias metodológicas que desarrollamos para estos fines (unidades integradas, proyectos pedagógicos, bitácoras, proyectos tecnológicos, etc.) De otra parte, hay demasiadas demandas para la mayoría del personal docente y directivo del colegio, debido a la intensa actividad de innovación y proyección que se promueve en el plantel.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Al puntualizar el problema que queríamos y podíamos tratar en este proyecto, se decidió optar por un problema de carácter estratégico, cuyo abordaje permitiera, por una parte, mejorar las relaciones entre los profesores de matemáticas y los directivos y, por otra parte, posibilitar caminos para la solución de la problemática específica del área en el colegio.

La estrategia fue la consolidación del área de matemáticas. Desde el punto de vista de la relación se tomó como problema la ausencia de una dinámica propia, continua y fluida entre profesores del área y directivos de la institución. Desde la perspectiva de la tarea se consideró relevante la existencia de una propuesta de área que fuera compartida por los profesores entre sí y por ellos y los directivos.

En consecuencia se definió el problema de la siguiente manera: el equipo de profesores y directivos no se ha consolidado para enfrentar sistemáticamente la problemática de las matemáticas en el colegio y además no existe un proyecto de área compartido que garantice el continuo desarrollo y mejoramiento de la misma.

## **OBJETIVOS DEL PROYECTO**

Se formuló como objetivo general del proyecto, la consolidación del área de matemáticas mediante el establecimiento de una dinámica entre directivos y profesores del área que permitiera la formulación y adopción de un proyecto común para el desarrollo del área. Dado este objetivo general se propusieron como objetivos específicos:

- 1) Generar una visión y un enfoque del área que sean compartidos por directivos y profesores de matemáticas y que sean coherentes con la misión y la visión del colegio y con los lineamientos generales del currículo nacional común.
- 2) Promover una dinámica de equipo para que el área de matemáticas cumpla con su visión y alcance los objetivos que de ella se derivan. Esta dinámica ha de traducirse en compromiso personal con el trabajo de grupo, en asesoría y capacitación mutua entre los integrantes, en experiencias de aula sistemáticamente orientadas a mejores logros y a servir como realimentación a los procesos formativos del colegio.
- 3) Concebir el área de matemáticas en el CGE como un proyecto de investigación-acción en continuo desarrollo que debe ser dinamizado por su equipo de profesores en coordinación con los directivos del plantel.
- 4) Constituir la experiencia del CGE en PRIME I en modelo de gestión que debe ser transferido a las demás áreas académicas del colegio.

## PLAN DE ACCIÓN

En concordancia con la perspectiva estratégica prevista, el plantel se desarrolló en las dos dimensiones propuestas. Así, se generó una dinámica en que la consolidación del equipo contribuyó a formular una propuesta de matemáticas compartida por el grupo y a la vez, la realización de este trabajo facilitó la integración entre los participantes en torno a objetivos y esfuerzos comunes. A continuación se describen las acciones realizadas para abordar el problema en cada una de las dos dimensiones:

### **Consolidación del equipo**

En función de consolidar el equipo se propusieron tres acciones centrales:

*Organización del grupo.* Implicó la reasignación de la carga académica para el año lectivo de 1995 a los profesores ya vinculados y la incorporación de nuevos profesores para el área.

*El fortalecimiento de la coordinación del área.* Como punto de enlace, comunicación y movilización de doble vía entre el equipo directivo, el colegio y el equipo de matemáticas se optó por fortalecer la coordinación del área en el desarrollo de su gestión académica. Aunque algo similar se hizo para todas las áreas fundamentales y obligatorias del plan de estudios, se tomó como modelo de referencia el área de matemáticas y su participación en el proyecto PRIME I.

*Establecimiento de demandas y compromisos al equipo de matemáticas.*

Este establecimiento se realizó a nivel tanto individual como de grupo, generando una dinámica en ambos sentidos. De la misma manera se buscó promover el liderazgo del grupo de profesores.

## **Formulación y adopción de una propuesta de área compartida**

Nos propusimos reformular y adoptar una propuesta para el desarrollo del área de matemáticas que, en esta primera etapa, permitiera satisfacer los requerimientos de la ley 115 de 1994 en términos del plan de estudios.

Para ello tanto el área de matemáticas como las demás áreas académicas tomaron como referencia la misión y la visión del colegio y formularon respectivamente su misión y su visión, previendo la factibilidad de su logro y su coherencia. Posteriormente se tomaron como puntos de mira los objetivos generales para cada ciclo de la educación preescolar, primaria, básica y media, y se definió la contribución que el área debería hacer para permitir que ellos fueran alcanzados. Cada área estableció luego sus ejes estructurales y definió sus indicadores de logro por ciclo y por grado, procurando mantener un adecuado equilibrio entre los diversos ejes. Finalmente, se definieron metodologías generales y pautas de evaluación del rendimiento, acordes con la propuesta del colegio para estos efectos.

## **RESULTADOS**

En lo que sigue exponemos los resultados obtenidos en las dos dimensiones de trabajo definidas para este proyecto.

### **Consolidación del equipo de profesores de matemáticas**

En cuanto a la organización del equipo de trabajo, la coordinadora de área fue encargada de esta responsabilidad y de 30 horas semanales de clase en los grados 1° a 5° en una jornada semanal de 40 horas. Fue liberada de otras responsabilidades particulares, como dirección de cursos y coordinación de proyectos pedagógicos. Para todos los demás profesores se estableció una carga máxima de 22 horas de clase en jornada de 40 horas semanales de clase. Se dispuso de 2 horas a la semana en las que todos los profesores del colegio pudieran participar simultáneamente, a modo de jornadas pedagógicas, en actividades de capacitación, difusión, planeación, coordinación, seguimiento o evaluación académica, actividades estas que debíamos adelantar conjuntamente o en grupos pequeños organizados por áreas, cursos, consejo académico, etc.

Se incorporaron dos nuevos docentes, uno exclusivamente para matemáticas y física de grados 10° y 11°, y otro para matemáticas y tecnología en secundaria. Para su selección se tomaron como referencia criterios de cuali-

dades personales y profesionales y su concordancia con la filosofía y prácticas institucionales.

Podemos afirmar que se logró mayor conciliación del equipo, apreciable en las realizaciones conjuntas desarrolladas durante el primer semestre del año lectivo. Estas realizaciones se describen posteriormente al hacer referencia a la propuesta de área compartida. La coordinación de área operó como punto de encuentro real entre profesores, alumnos, directivos y padres de familia; esto refleja el liderazgo que asumió y los esfuerzos intencionales realizados para enriquecer algunos aspectos de la cultura institucional.

Entre el equipo de matemáticas y el equipo directivo se acordaron dos tareas fundamentales para el primer trimestre del año lectivo y se cumplieron satisfactoriamente. En primer lugar, un plan de corto plazo para garantizar un adecuado funcionamiento del área como grupo de trabajo y en términos de logros de estudiantes. En segundo lugar, un plan de largo plazo reestructurando la propuesta de área para el Proyecto Educativo Institucional (PEI) del colegio.

Aunque esta fue una estrategia institucional adoptada para todas las áreas académicas, consideramos que el hecho de tomar esta estrategia como una de las claves en el proyecto de consolidación del área de matemáticas favoreció que la planeación y el seguimiento exigido por PRIME I contribuyera a afinar y sistematizar esta experiencia.

### **Propuesta de área compartida**

En lo que se refiere a la propuesta de área compartida, también se lograron algunos resultados importantes. Como equipo de profesores de matemáticas iniciamos el año lectivo con una serie de reuniones para tratar temas de interés común que nos condujeran a nuestros propósitos. Llegamos entonces al siguiente plan de trabajo:

*Establecimiento de acuerdos para regir la dinámica del equipo.* En la búsqueda de una dinámica favorable para el logro de los objetivos propuestos se establecieron diversos acuerdos entre los que se destacan la búsqueda de una cualificación profesional permanente, la responsabilidad (puntualidad y continuidad) frente al trabajo, el nivel de compromiso personal y no un “acatar normas”, la disciplina de diálogo evitando supuestos, la visión compartida acerca del ¿qué?, ¿para qué? y ¿por qué? de las matemáticas, y la elección de un espacio de tiempo para discutir, revisar y producir documentos del área.

*Presentación de la propuesta de desarrollo del área en un estado actual.*

Se expuso ante el grupo de profesores de matemáticas la propuesta de área para efectos de discusión y reformulación si era el caso.

*Reestructuración de la propuesta del área.* Se realizó una actividad de revisión y reestructuración de la propuesta de área, en cuanto a contenidos

por curso, indicadores de logro, evaluación, formas de trabajo, estrategias pedagógicas, actividades extracurriculares y complementarias.

*Compartir la trayectoria y experiencia de cada uno como profesor de matemáticas de este y otros colegios.* Se realizaron actividades en las que se interactuó con los colegas y cuyo propósito central fue exponer y compartir las experiencias docentes del grupo de profesores.

*Diseño y planeación de estrategias pedagógicas de refuerzo.* Para este efecto se realizaron las siguientes actividades:

- 1) Clases fuera de horario de trabajo, cada curso con su respectivo profesor de matemáticas. En estos espacios se aclararon dudas, se trabajó sobre vacíos conceptuales de forma que se pudiera avanzar en clases sin llegar a saturar a los muchachos y desmotivarlos. Se pretendía apoyarlos y acompañarlos en las dificultades que se detectaron como obstáculos para aprender. El supuesto subyacente es que por ser esta una actividad extraclase podía haber menos prevención por una nota, lo que facilitaría el trabajo. Los estudiantes se deshinibirían y preguntarían con tranquilidad ya que estarían frente a un pequeño grupo en el que todos estarían en la misma situación.
- 2) En cuanto a la forma de trabajo en clase se planteó como metodología propia del área una en la que se tendrían en cuenta los intentos, el manejo del error, la presencia en el trabajo y la sustentación de las respuestas.
- 3) Planeamos y desarrollamos actividades extraclase tales como:
  - a. Talleres con padres de familia en los que ellos experimentaron la metodología y evaluación del área como aspectos esenciales para apoyar el trabajo de los alumnos en casa. Esto debía contribuir a hacer más coherente y secuencial la labor maestros-padres-alumnos. Además enriquecería las relaciones interpersonales entre todos.
  - b. Talleres en el período de vacaciones para los alumnos que no alcanzaron los objetivos planteados para el primer semestre.
  - c. Actividades institucionales asignadas al equipo tales como la celebración del día de la familia y la semana cultural.
  - d. Participación por primera vez en las olimpiadas matemáticas que organiza Conaced.
  - e. Participación en seminarios y proyectos.
  - f. Integración con otras áreas y proyectos como tecnología, geometría, e informática
  - g. Participación activa en la construcción del PEI del colegio.

## CONCLUSIONES

De manera general concluimos que se logró el objetivo propuesto en términos de consolidar un equipo de trabajo de matemáticas, entre directivos y profesores. Aunque esta fue una tarea que veníamos realizando con anterioridad, logramos concretarla al finalizar el proyecto.

De otra parte es importante destacar que esta tarea —la de consolidar el equipo de trabajo— no fue nada fácil. Se presentaron varias dificultades que tuvieron que ver con aspectos propios del comportamiento de un grupo de profesionales. Frecuentemente se presentaron diferencias en relación con las concepciones de profesores y directivos acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de la misma manera se presentaron visiones diferentes para abordar y manejar los problemas detectados.

En este momento contamos con una propuesta de área compartida y con una mayor concientización y disposición de profesores y directivos para adelantarla. Sin embargo, somos conscientes de las implicaciones y las dificultades que se presentarán, pues una cosa es diseñar la propuesta y estar de acuerdo con su contenido y otra, ponerla en marcha siendo muy consistentes entre lo que está propuesto por escrito y lo que en la práctica se realiza.

Consideramos que la participación en el proyecto PRIME I, nos brindó herramientas valiosas para abordar las necesidades por las que atravesaba el área de matemáticas del colegio.

# CAMBIOS EN LA ORGANIZACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS PARA MEJORAR LA COMUNICACIÓN<sup>1</sup>

MIGUEL A. RODRÍGUEZ  
COLEGIO DISTRITAL CRISTOBAL COLÓN

*Al examinar la estructura y organización del área de matemáticas del Colegio Distrital Cristobal Colón, jornada de la tarde, se encontró que no eran las más apropiadas para lograr un trabajo en equipo de parte de los profesores, condición necesaria en cualquier proceso que se inicie para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. Este artículo presenta las acciones que se planearon e implementaron para abordar el problema identificado. Aunque los resultados más importantes de los cambios hechos no se pueden ver aún, hay indicios de que con el proyecto se tocó un punto álgido del problema de las matemáticas en el colegio.*

## INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta una descripción del trabajo que las directivas del Colegio Distrital Cristóbal Colón, jornada de la tarde, realizaron entre 1995 y 1996 como parte del proyecto PRIME I propuesto por “una empresa docente”. El trabajo fue desarrollado por el rector y el coordinador académico. Fue una labor no sólo novedosa, sino interesante y fructífera para nuestra institución. Gracias a ésta, regresamos al estudio y la investigación para la difícil labor de educar, en un país donde es imperativo asumir esta responsabilidad, donde se tiene la oportunidad de plasmar el espíritu de la Ley 115 que busca convertir en líder el estamento rector.

El colegio está ubicado en el barrio San Cristóbal Norte. A él asisten 800 niños, de barrios nororientales de Bogotá, cuyo nivel socioeconómico se clasifica en los estratos 1 y 2; esto muestra claramente sus limitaciones de recursos y posibilidades. El plantel consta de 20 grupos de alumnos en los niveles de básica y media secundaria, es decir de sexto a undécimo grado.

En lo concerniente al área de matemáticas, de años atrás se viene detectando una alta mortalidad académica que generalmente repercute en la pérdida de año académico y en la consecuente indisposición o antipatía hacia

---

1. Este artículo fue editado por Felipe Fernández, investigador de “una empresa docente”.

la misma. A través de la participación del colegio en el proyecto PRIME I hemos iniciado el proceso para buscar soluciones a estos problemas. Para ello se optó por reestructurar el programa de matemáticas de la institución y buscar, por medio de la investigación en el aula, nuevas estrategias metodológicas. Pero la descripción de la situación no sólo radica en lo que se expuso anteriormente. La organización académico-administrativa del colegio no es la más propicia. Por ello, comenzamos a buscar soluciones desde el estamento directivo docente y en este artículo mostraremos el trabajo realizado al respecto y sus logros.

En los siguientes apartados se define el problema considerado y el objetivo propuesto. Luego, se describen las acciones realizadas para alcanzar el objetivo propuesto y finalmente, se presentan los resultados obtenidos y las conclusiones a que se llegó.

## **DEFINICIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVO PROPUESTO**

Como parte del funcionamiento normal del colegio periódicamente se hacían reuniones, coordinadas por el coordinador académico, a las que asistían los profesores de matemáticas. Al estudiar el contenido de las actas y los informes de tales reuniones se encontró que ellas no estaban cumpliendo a cabalidad con el fin para el cual estaban propuestas. Fueron evidentes dificultades en relación con el trabajo académico de los profesores durante las reuniones de área cuando ellas están dirigidas por una persona que no es especialista en el contenido. Vimos que no teníamos una organización adecuada para propiciar el trabajo de los profesores en equipo y para centrar el trabajo en asuntos propios de la enseñanza de las matemáticas, temas que son de interés para los profesores del grupo. Esto ocurría entre otras cosas por discrepancias fuertes entre el planteamiento de los docentes y el del coordinador académico.

El problema se corroboró en la evaluación institucional hecha a finales de 1995 y se atribuyó fundamentalmente a que no existía la empatía suficiente entre directivos y docentes. Por ello, para el trabajo de investigación, se concretó el problema de la siguiente manera: “La evaluación institucional de 1995 determinó que la comunicación y la orientación de la temática específica del área de las matemáticas no es eficaz, ni es la necesaria. Lo anterior se atribuye a la organización existente: el grupo de docentes está orientado y dirigido por un coordinador académico que no es de su especialidad”. Nos propusimos entonces como objetivo general del proyecto propiciar un cambio en la organización del área de matemáticas, al iniciar el año lectivo de 1996, para mejorar la comunicación, enfocar las reuniones en la temática específica y disfrutar de un trabajo en equipo.

## ACCIONES REALIZADAS

A continuación se describen de manera breve las cuatro actividades realizadas como parte del proyecto para lograr el objetivo propuesto; también se establece qué aspectos se observaron durante el desarrollo de las actividades.

### **Presentación del esquema de estructura de área**

En busca de lograr el objetivo planteado, la primera acción que se llevó a cabo fue una reunión de área moderada por el rector. El propósito era someter a la consideración de los profesores un nuevo esquema de estructura de área. Durante la reunión se presentaron los resultados de la evaluación institucional en donde se detecta el problema que nos ocupa en este artículo. La agenda de la reunión consideró tres partes: la participación de los docentes con opiniones al respecto, la presentación de la propuesta institucional (cambio de función al coordinador y designación de un jefe de área) y las conclusiones.

Se consideró que se debía observar el interés y la participación de los docentes para obtener un indicio de cómo orientar las próximas reuniones y además para conocer la actitud de cada uno de los docentes. El registro de la reunión se hizo una vez terminada la sesión y se recogieron las impresiones del moderador por escrito.

Los profesores ratificaron lo determinado en la evaluación institucional acerca de la necesidad del cambio de organización para el área de matemática. Todos y cada uno participaron con sus criterios e igualmente manifestaron interés. Propusieron como mecánica de trabajo utilizar las primeras reuniones del año para presentar alternativas del manejo de las reuniones y de los temas a tratar en ellas, y así establecer el cambio. Se aceptó la propuesta y en mi calidad de moderador la consideré como el camino más adecuado: hacer un planteamiento.

### **Envío de un memorando**

Al cabo de dos meses el rector organizó una reunión con el jefe de área y el coordinador académico para recordar el problema identificado y el objetivo del trabajo y escuchar las propuestas y los criterios de ellos. En esa reunión se acordó enviar un memorando a los profesores en los que se les solicitaba escribir sus propuestas acerca de la estructura del área.

En esta reunión el rector observó la ubicación de los participantes en cuanto al problema y la calidad de las soluciones para tener elementos de juicio sobre la situación y determinar procedimientos futuros. Una vez terminada la reunión el rector relató por escrito las impresiones sobre ésta. Ambos, el jefe de área y el coordinador académico, mostraron interés por aportar ideas y discutir los temas. Su actitud fue de compromiso y de

mucho interés por el trabajo a realizar. El rector quedó encargado de dar a conocer el memorando.

### **Plenaria para determinar organización y funcionamiento**

Seis días después de la reunión con el coordinador y el jefe de área, el rector organizó y moderó una reunión plenaria para definir de manera definitiva la organización y el funcionamiento del área de matemáticas. La agenda de la reunión consideró el siguiente orden: presentación de las propuestas personales y elaboración de las mismas en carteleras, análisis de las propuestas presentadas y toma de decisiones.

Durante la plenaria se observaron aspectos tales como el interés y deseo de participación de los profesores y si presentaban o no la propuesta; con esto queríamos determinar el grado de compromiso de cada uno de los docentes con el trabajo de grupo en el área y, por ende, con la comunicación en el grupo. También se observó la forma de presentación para determinar cuál de las propuestas presentaba mayor factibilidad para la solución del problema. Al observar el interés que cada propuesta despertaba en los demás y el motivo de dicho interés se pretendía establecer la opinión de la mayoría de los profesores y ver qué tanto en común tenían las propuestas mejor aceptadas con la institucional.

En esta plenaria participaron todos los docentes —siete en total—; sin embargo, uno de ellos llegó tarde. La reunión fue coordinada por el rector quien comenzó la sesión diciendo que haría una grabación de audio para ayudar a la relatoría; no hubo objeciones. Por estar presente una docente nueva, se consideró indispensable plantear de nuevo el problema y entonces cada profesor intervino hasta lograr claridad y acuerdo acerca del problema. Cuatro docentes hicieron la presentación de sus propuestas: se trataba de propuestas completas e interesantes. Uno de los docentes que no presentó por escrito su propuesta pues el rector no le comunicó oportunamente acerca de la tarea, participó activamente durante la reunión. El docente que sin justa causa no presentó por escrito su propuesta tuvo una participación improvisada que no encajaba bien en el desarrollo del tema. En general, el ambiente de trabajo durante esa reunión fue bueno y hubo tanta participación de los asistentes que el tiempo no alcanzó sino para determinar la estructura del área de matemáticas.

### **Inicio del trabajo del área con el nuevo esquema**

Unos días después de la plenaria se inició el trabajo del área de acuerdo con el esquema y funciones aprobadas. La actividad que se llevó a cabo consistió básicamente en el desarrollo de la agenda propuesta por el jefe de área. La observación se centraría en el interés y deseo de participación de los asistentes para iniciar el proceso de seguimiento y evaluación de los participantes.

## RESULTADOS

A continuación se establecen los resultados obtenidos en el proyecto. En particular, se describen los resultados en términos de la nueva organización y de las funciones asignadas.

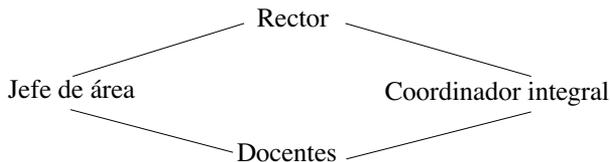
Se logró determinar una estructura y funcionamiento del área de una manera diferente a como venía funcionando hasta 1995. Es importante destacar que la estrategia de buscar la participación de todos los profesores dio resultados y el área comenzó a trabajar con su nueva organización en la fecha de la entrega del informe de la investigación.

Después de terminar el primer semestre, al evaluar el funcionamiento del área con su nueva estructura se encontraron los siguientes resultados: se cumplió con la realización de la reunión una vez por semana; se mejoró la comunicación entre los miembros del área pues coordinador y jefe son de la misma especialidad y hablan el mismo lenguaje que los docentes; el coordinador pudo aportar soluciones a la problemática del área gracias a su conocimiento especializado. También se vio la necesidad de que el colegio apoye la formación de los profesores en técnicas para el trabajo en equipo pues hay deficiencias para hacerlo realidad; de igual manera se evidenció la importancia y necesidad de que, por lo menos, en forma esporádica el rector participe de las reuniones.

### Nueva estructura organizativa del colegio

Dentro de la estructura organizativa del colegio uno de los cargos directivos es el de coordinador, desempeñado por directivos docentes con nombramiento específico y para el cual, tradicionalmente, se especializaban dos personas una de las cuales se desempeñaba como coordinador académico y otra, como coordinador disciplinario. A partir de la reestructuración hecha desaparece la separación en la coordinación vista desde su dimensión académica y la disciplinaria. Ahora el coordinador velará por ambos campos el disciplinario y el académico desempeñando una **labor de coordinación integral**. Puesto que el trabajo que ahora debe asumir un coordinador es más dispendioso y de mayor responsabilidad, se decidió repartir la labor por niveles de cursos y se buscó además, que cada coordinador quedara a cargo de la orientación de un área de alguna afinidad con su especialidad. Esta determinación se concretó en tres niveles: el nivel I, para los grados sextos que abarca cinco grupos; el nivel II, para los grados séptimos y octavos que abarca nueve grupos; y el nivel III, para los grados novenos, décimos y once que abarcan seis grupos. Así, hay tres coordinadores encargados de la asesoría de las diferentes áreas: el área de matemáticas a cargo del coordinador del nivel I, las áreas de ciencias, español e idiomas a cargo del coordinador del nivel II, y las áreas de educación estética, educación física, sociales y tecnológicas a cargo del coordinador del nivel III.

Actualmente, la estructura organizativa del colegio se puede representar en un esquema así:



El cambio en la estructura organizativa del colegio determinó, por un lado, un cambio en el papel tradicional de rector quien pasó de ejercer funciones administrativas a ser más un dinamizador del área e influir en la orientación pedagógica de ésta y de la institución según funciones que se determinan más adelante; por otro lado, mejoró el trabajo en equipo al aumentar el grado de comunicación para el trabajo de área.

A la vez que se hicieron cambios en la estructura del colegio, lo que implicó cambios en la estructura del área, también se plantearon unos objetivos para guiar las actividades del área de matemáticas tanto desde el punto de vista de la formación de los profesores y de la forma como ellos trabajan como desde el punto de vista de la enseñanza misma. Ellos son:

- Organizar talleres y jornadas pedagógicas para mejorar el desempeño del docente (actualización).
- Funcionar como un equipo que tiene intereses comunes centrados en temas tales como: la exploración de posibles variables que inciden en el bajo rendimiento académico; la búsqueda de estrategias para el mejoramiento de los niveles de comprensión y autoestima de los estudiantes, lo que se debería reflejar en el mejoramiento académico y la estimulación del trabajo en función de logros.
- Diseñar y unificar criterios para trabajar en los diferentes niveles y analizar y evaluar el trabajo realizado durante el período, el semestre y el año.
- Analizar y elaborar el contenido del programa de nivelación y recuperación de objetivos, con una fundamentación detallada de éstos.
- Integrar las acciones realizadas con las demás áreas y proyectar actividades.

### **Funciones de los directivos docentes**

Las funciones quedaron definidas como se describe a continuación:

*Rector.* Es la instancia para analizar los conflictos entre docentes. Entre sus funciones primordiales están promover relaciones de tipo académico y cultural entre los miembros del cuerpo de profesores, en particular, entre los profesores de matemáticas de la institución; establecer canales de comunicación entre los profesores; y facilitar la consecución de recursos para el área.

*Coordinador integral.* Es la instancia para analizar la viabilidad de las propuestas por parte del área. Sus funciones son: velar por el cumplimiento de las funciones de los docentes y el oportuno aprovisionamiento de los recursos; fomentar el mejoramiento de la calidad de la educación; promover instancias para la evaluación de proyectos que se realicen en el área de matemáticas; y ser el puente de comunicación entre las directivas y el área a través de informes de los resultados, de las dificultades y de los logros.

*Jefe de área.* Son funciones del jefe de área: ejercer liderazgo buscando siempre el bienestar del grupo de profesores que coordina; velar por la organización y planeamiento de cada una de las reuniones de coordinación de profesores; conservar y responder por el libro de actas de las reuniones; liderar cambios y propuestas del área; llevar la vocería del área ante las directivas del colegio; y promover la ejecución de las actividades que se acuerdan.

*Docentes.* Las funciones de los docentes son: participar activamente en cada una de las reuniones de coordinación; informar oportunamente sobre actividades, logros y dificultades que se presentan a los grupos de alumnos que tienen a su cargo; evaluar el trabajo realizado en cada período; establecer estrategias que permitan la oportuna recuperación académica de los alumnos; presentar propuestas metodológicas y de evaluación que tiendan al logro del PEI; “dictar clases”; y, en fin, todas las inherentes al cargo según la ley.

## CONCLUSIONES

La participación del colegio y, en particular, del rector en el proyecto fue una buena oportunidad de trabajo para plasmar el espíritu de la Ley 115 en la que se enfatiza la importancia del liderazgo del estamento rector para la organización y funcionamiento de todos los demás estamentos que componen la institución educativa. En calidad de rector del colegio debo reconocer que fue satisfactorio ejercer una función que en ocasiones he dejado de lado: el trabajo en la solución de problemas administrativos que tienen una influencia importante en los asuntos pedagógicos del colegio.

Para concluir, lo correcto sería decir: “valió la pena”. Pero a lo anterior habría que agregar que el proceso vivido no fue fácil ni fluido, y, que se presentaron muchos obstáculos. Por ejemplo, se puede anotar la interferen-

cia de la Secretaría de Educación al improvisar continuamente trabajo para los directivos lo cual no solamente distrae, sino que limita el tiempo para el trabajo de investigación y ejecución de lo que se planea.

El resultado en cuanto a la pertinencia de la solución tan sólo se podrá vislumbrar con el transcurso del tiempo y entonces en este aspecto considero que el proyecto de “una empresa docente” debería abarcar el año escolar para así determinar un resultado verdadero. Por ahora queda implementada la solución.

# INCIDENCIA DE LAS RELACIONES INTERPERSONALES EN LA VIDA DE LA INSTITUCIÓN<sup>1</sup>

MARLÉN MONTAÑA Y MARIELA SANTAMARÍA  
CASD ALDEMAR ROJAS PLAZAS

*Este artículo expone los resultados de un proyecto realizado por el rector y los directivos del área de matemáticas del CASD Aldemar Rojas Plazas. El proyecto centró su interés en el estudio de las relaciones interpersonales entre directivos y docentes y entre docentes y docentes de la institución. El estudio se realizó a lo largo de ocho meses y utilizó como enfoque metodológico la investigación-acción participativa. Entre los resultados encontrados vale la pena destacar, una actitud más positiva y un mayor interés de los docentes frente a las actividades propuestas, así como una mejor disposición para el diálogo con sus colegas y un interés por el trabajo en equipo. De otra parte, se ganaron algunos espacios de participación para los docentes y directivos de la institución en los que se socializaron experiencias pedagógicas. Es importante anotar que a pesar del esfuerzo realizado en este proyecto, aún existen en algunos docentes, actitudes de prevención y falta de interés por el trabajo en equipo, lo que muestra que el trabajo realizado apenas es el inicio de un proceso de largo plazo.*

## INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta la experiencia de un proyecto de investigación-acción realizado entre agosto de 1995 y septiembre de 1996, en el CASD<sup>2</sup> Aldemar Rojas Plazas, por tres directivos de la institución con la participación de los profesores de Ciencias, en particular, de los docentes del área de matemáticas.

El proyecto estuvo encaminado hacia el mejoramiento de las relaciones interpersonales entre docentes y directivos y entre docentes y docentes de matemáticas. Para abordar el problema se definieron tres etapas: sensibilización, participación y compromiso, en cada una de las cuales se diseñaron acciones tendientes a generar actitudes de cambio que posibilitaran un mejor ambiente de trabajo caracterizado por unas relaciones interpersonales armónicas.

---

1. Este artículo fue editado por Mauricio Castro, investigador de “una empresa docente”.

2. La sigla CASD se traduce como Centro Auxiliar de Servicios Docentes.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A partir de nuestra experiencia adquirida en la institución observamos en los docentes una cultura en la que se manifiestan actitudes de prevención frente a las sugerencias provenientes del grupo directivo, despreocupación respecto a sus responsabilidades y permisividad frente a actitudes y acciones de los estudiantes —con lo que evaden su responsabilidad formativa.

Evidenciamos dificultad para el trabajo en grupo dado que en la mayoría de los docentes existe un deseo de sobresalir en el nivel individual sin la intención de compartir experiencias con los colegas y frecuentemente existen líderes negativos que obstruyen el desarrollo de las propuestas. Percibimos un sentido de autosuficiencia de los docentes que se manifiesta en sus actitudes frente a las iniciativas de sus compañeros y frente a las propuestas de trabajo de la institución, lo que obstaculiza unas buenas relaciones interpersonales.

Dada esta situación nos centramos en estudiar y analizar las dificultades presentadas en las relaciones interpersonales entre docentes de matemáticas y directivos de la institución, con la intención de crear un mejor ambiente de trabajo que posibilitara canales de comunicación, espacios de expresión y oportunidades de cualificación profesional.

Somos conscientes de la importancia de contar con un ambiente adecuado de trabajo que favorezca los procesos de aprendizaje y por tanto creemos que este ambiente debería estar caracterizado por un mayor interés de actualización de los docentes, un mayor compromiso con su labor y una actitud crítica y autocrítica frente a los problemas pedagógicos. Así mismo, es importante que los directivos tengan una actitud democrática frente a las actividades y propuestas diseñadas por la institución, lo que implica involucrar al otro en el trabajo, escuchar sus propuestas, darle espacio para que desarrolle sus actividades y brindarle los recursos.

## OBJETIVOS

Para estudiar el problema planteado nos formulamos los siguientes objetivos específicos:

- Propiciar encuentros de tipo pedagógico y social que favorezcan un clima de cordialidad e integración entre docentes y directivos de la institución.
- Crear espacios de interacción entre los docentes alrededor de metodología y temas que se relacionen con la enseñanza de las matemáticas.

## PLAN DE OBSERVACIÓN

El enfoque empleado para el desarrollo del proyecto fue la investigación-acción participativa. Este enfoque se centra en la vivencia que tienen los miembros de una comunidad con respecto a situaciones que ellos consideran problemáticas, y tiene como finalidad que los interesados en el asunto ganen consciencia de su papel en la situación y creen oportunidades para comprometerse en tareas concretas que contribuyan al mejoramiento de las condiciones existentes.

Una vez definido el problema y formulados los objetivos de nuestro proyecto nos vimos en la necesidad de establecer qué queríamos observar y cómo lo íbamos a hacer. Dado que pueden ser muchos y variados los aspectos a observar, decidimos seleccionar los que nos parecieron más relevantes porque se asociaban de manera más fuerte con el problema de estudio. Estos aspectos se resumen en la siguiente tabla.

<b>¿Qué observar?</b>	<b>¿Cómo observarlo?</b>	<b>¿Para qué?</b>
Actitud de los docentes y nivel de motivación e iniciativa	Observación participativa	Determinar el nivel de motivación y disposición para el trabajo de los docentes
	Registro de opiniones planteadas en las reuniones de profesores	
	Intercambio de opiniones entre los directivos	
Capacidad para aceptar las ideas del otro	Observación participativa	Determinar el nivel de aceptación de las ideas de los demás
	Intercambio de opiniones entre los directivos	
Grado de compromiso	Interacción entre docentes alrededor de temas concretos	Establecer el grado de compromiso de cada docente con el trabajo y delegar responsabilidades

*Tabla N° 1. Resumen del plan de observación*

## LA ACCIÓN

Después de lograr alguna claridad sobre los aspectos que se querían observar se diseñó el plan de acción en el que se determinaron las actividades a realizar. Estas actividades se organizaron en tres etapas: sensibilización, participación y compromiso. Para describir cada una de las etapas se hace un recuento de las actividades realizadas y los resultados encontrados.

### **Etapa de sensibilización**

Durante la primera etapa se realizaron reuniones de carácter social, jornadas de evaluación institucional, planeación de actividades anuales y una jornada pedagógica cuyo tema se centró en los procesos de desarrollo de pensamiento.

#### *Reunión de bienvenida*

Esta reunión tuvo lugar pocos días antes de iniciar el año lectivo y contó con la participación del rector y de los profesores del colegio. Se inició compartiendo un refrigerio; luego se invitó a los docentes a participar activamente en el proceso de planeación del año escolar, a trabajar en un clima de cordialidad y a mejorar las relaciones personales a través del diálogo. Se sugirió respetar las diferencias como elemento para superar posibles dificultades de comunicación y se invitó a los docentes a comprometerse más con su labor. Una vez se instaló la reunión se pidió a los docentes que establecieran un mecanismo de control que garantizara el trabajo y la organización de las actividades a realizar durante el año.

Como resultado del intercambio de opiniones en esta reunión, percibimos que había una actitud positiva y receptiva de parte de los docentes y un deseo de trabajar armoniosamente.

*Jornada pedagógica.* El mismo día, inmediatamente después de la reunión de bienvenida, se organizó una jornada pedagógica que abordó como tema central los procesos de pensamiento. Esta reunión tuvo como propósito central determinar el nivel de aceptación de las ideas de los demás cuando se realiza una actividad en grupo. Al iniciar la jornada se presentó el tema y se distribuyó el material necesario para su discusión. Se pidió a los profesores que se reunieran por grupos y que comenzaran por planear la manera como trabajarían durante la sesión. Durante este trabajo en grupo, los investigadores se distribuyeron en dos grupos, uno de los cuales debía hacer la observación del trabajo en los grupos pequeños para describir la labor del grupo en términos de la interacción realizada y de la aceptación de las ideas de los demás; y el otro, debía observar el desarrollo de toda la jornada. Al final se reunieron los investigadores para intercambiar información.

Durante el desarrollo de la jornada observamos que un profesor lideró la reunión de los docentes de matemáticas y que hubo una buena aceptación entre los colegas. Los docentes plantearon sus opiniones y fueron escuchados. También observamos un poco distante a una profesora de matemáticas, sin embargo, al realizar la plenaria su trabajo fue uno de los de mayor aceptación. De la organización y desarrollo de la jornada concluimos que se notó interés de todos los docentes por presentar un buen trabajo. Aunque en la presentación se notó una secuencia establecida previamente y que los profesores acordaron una metodología de trabajo, también se notó que había fragmentación del trabajo.

### **Etapas de participación**

En la segunda etapa se planeó y desarrolló el proyecto de los profesores de matemáticas que estaban participando en el proyecto PRIME I, se realizaron seminarios de capacitación y se construyeron en forma colectiva los logros e indicadores de logro de las asignaturas.

#### *Planeación y desarrollo del proyecto de los profesores participantes en PRIME I*

Los docentes que realizaron un proyecto de investigación-acción en el marco del proyecto PRIME I, presentaron su trabajo ante el grupo con la intención de compartir la experiencia y de recibir comentarios. Durante la presentación, se observaron actitudes de aceptación en los demás docentes quienes escucharon atentamente a las compañeras y formularon preguntas.

En la exposición de las dificultades para llevar a cabo el proyecto, comentaron la situación del incumplimiento de una de ellas. Hubo una discusión fuerte con relación a este hecho y con la participación de los otros docentes se buscó una solución al problema.

#### *Construcción colectiva de logros e indicadores de logro*

Esta actividad se realizó durante dos sesiones en un trabajo por grupos según áreas. Los profesores del área de matemáticas debían establecer los logros de la formación matemática e indicadores de logro que según ellos debían alcanzar los estudiantes de un determinado curso. En la primera sesión notamos que en el grupo de matemáticas —conformado por tres profesores— uno de ellos mantuvo un comportamiento aislado frente a los colegas y no realizó ningún tipo de interacción con ellos. Se estableció una charla con el profesor y se discutió acerca de la importancia del trabajo colectivo en la tarea que se estaba adelantando. Para la segunda sesión la situación cambió: los tres profesores trabajaron en forma activa y se interesaron por compartir sus aportes.

Concluimos que la oportunidad de compartir espacios de desarrollo profesional ha permitido que se genere un nivel de compromiso de los docentes, con sus alumnos y con la institución. La necesidad de producir y

entregar sus logros e indicadores de logro que son elementos nuevos en su trabajo, ha incidido en un cambio de actitud. Se les nota deseo de intercambiar bibliografía no sólo entre ellos sino con los directivos. Aunque ha habido cierta despreocupación frente a sus responsabilidades, observamos que el diálogo con los directivos no se limita a la crítica sino que se dan sugerencias específicas. Ha sido positivo dialogar con cada uno, y tratar de superar las actitudes de prevención.

### **Etapa de compromiso**

En la tercera etapa se realizaron reuniones de área para intercambio de experiencias, en las cuales, los docentes contaron con el espacio y el tiempo y tuvieron la oportunidad de mostrar resultados obtenidos en etapas anteriores.

## **RESULTADOS Y CONCLUSIONES**

En la etapa de sensibilización nos propusimos determinar el nivel de motivación e iniciativa de los docentes y como resultado de un intercambio de opiniones, concluimos que en una buena proporción se notó diálogo entre docentes que no lo hacían frecuentemente, mayor permanencia en la sala de profesores y un mejoramiento en la capacidad de escucha, aunque se observaba cierta indiferencia y rechazo por parte de algunos.

Durante la etapa de participación observamos que ante objetivos comunes, los docentes participaron con interés aunque faltaba espíritu de trabajo en grupo. Esto debido en parte a la falta de espacios efectivos para llevar a cabo la comunicación.

En la tercera etapa evidenciamos un cierto nivel de compromiso de cada docente con su trabajo, al igual que la necesidad de compartir espacios en los que se puedan presentar y recibir comentarios acerca de experiencias de tipo pedagógico, aunque en la actualidad existen algunas actitudes que perjudican la labor en la institución.

En general, podemos decir que la comunidad educativa se ha visto beneficiada puesto que la realización del proyecto posibilitó espacios de participación que generaron un nivel de compromiso de los docentes de matemáticas que se extendió a otras áreas y otros estamentos interesados en la experiencia. También se ha notado un marcado interés dentro del grupo de matemáticas por la realización de actividades de capacitación a nivel colectivo, dando importancia al aporte individual que enriquece a todos. Lo que ha sucedido en la institución a raíz del pequeño proyecto que realizamos los directivos nos muestra que es posible cambiar la cultura de aislamiento y prevención en la que estaban involucrados los docentes de la institución.

# LA COMUNICACIÓN DIDÁCTICA ENTRE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UN ELEMENTO PARA EL CAMBIO<sup>1</sup>

FRANCIA CASTRILLÓN Y ALICIA DE COBO  
COLEGIO DISTRITAL LA AMISTAD

## INTRODUCCIÓN

La rectora y la jefa del área de matemáticas del Colegio Distrital La Amistad de Bogotá participamos como investigadoras en un proyecto de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas que se llevó a cabo en nuestro colegio entre 1995 y 1996, conscientes de que en el área de matemáticas, como en cualquier otra área, siempre hay algo por resolver.

El Colegio Distrital La Amistad, jornada de la tarde, es una entidad oficial ubicada en la zona suroccidental de la capital colombiana y en el centro de Ciudad Kennedy. Tiene una nómina que consta de 4 docentes directivos, 60 docentes y 9 personas más entre administrativos y de servicios generales. Hay 32 cursos, cada uno con un promedio de 40 alumnos que pertenecen a un nivel socio-económico medio bajo para quienes la actividad económica más generalizada es la del rebusque y la del tendero.

El proyecto hizo parte de PRIME I, proyecto de investigación en educación matemática liderado por “una empresa docente” de la Universidad de los Andes. Al conocer el proyecto y la trascendencia que podía tener la investigación-acción, estuvimos de acuerdo en que la solución de problemas y su aplicación a la vida práctica es el punto central del currículo de las matemáticas. Fuimos conscientes de que el trabajo de los profesores en equipo permite afianzar en los alumnos el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, lógicos, analíticos, de conjuntos y de operaciones y relaciones; también, permite interpretar y solucionar problemas de la ciencia, de la tecnología y de la vida cotidiana, y establecer un contexto donde los alumnos puedan aprender conceptos y destrezas.

Para iniciar el desarrollo de nuestro proyecto la primera actividad que realizamos fue la lectura de los documentos sugeridos por los coordinadores de PRIME I sobre la metodología de investigación-acción. Luego hicimos un diagnóstico de la situación del área de matemáticas en el colegio.

---

1. Este artículo fue editado por Luisa Andrade, investigadora de “una empresa docente”.

## DIAGNÓSTICO DE LA PROBLEMÁTICA

Empezamos el diagnóstico conversando con cada uno de los diez profesores de matemáticas del colegio sobre cómo veían ellos el área, cuáles consideraban que eran los principales problemas y cómo eran sus relaciones con los demás profesores y con el jefe del departamento.

Nos dimos cuenta de que tanto las relaciones entre los profesores del área de matemáticas como las de éstos con el jefe, eran formales, escaseaba el diálogo y no había intercambio de experiencias pedagógicas. Pudimos detectar que generalmente, con valiosas excepciones, cada uno de los profesores de matemáticas era una isla y estaba convencido de que, por sí solo, todo lo hacía bien. Además vimos que en nuestro medio es habitual no cuestionarnos ante determinadas situaciones o hechos de diario transcurrir y que nos parece mejor aceptar las cosas como están para no romper los paradigmas y no causar crisis.

Varios de los docentes hicieron referencia a la poca trascendencia de las reuniones del área de matemáticas, a los retardos de muchas personas para llegar a la reunión o las inasistencias injustificadas que crean decepción y desmotivan y, a que no había tiempo para tratar temas propios de las matemáticas y su didáctica. Se puso de presente que en esas reuniones se subutilizaba el tiempo y había inadecuada distribución de éste. El tiempo de la reunión sólo alcanzaba para presentar informes institucionales e informes de las actividades generales del colegio.

## IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Para la identificación del problema, las participantes en el proyecto, con base en el diagnóstico hecho, nos detuvimos a reflexionar sobre cuál sería nuestro tema de estudio. En dos reuniones de área presentamos varias opciones de temáticas para trabajar, surgidas en las charlas sostenidas con los profesores, entre las que estaban: las relaciones humanas, la optimización del trabajo en equipo y la mejora de la comunicación. Sin embargo, no hubo consenso alrededor de estos temas. Queríamos escoger un tema que satisficiera nuestro deseo de lograr trabajo, compromiso y participación afectiva por parte de los profesores del área. Entonces, junto con los profesores, cuestionamos la importancia de las reuniones del área de matemáticas y el aprovechamiento ideal de ese espacio para tratar sistemáticamente temas propios de dicha área. Finalmente, se realizaron dos encuestas entre los profesores del departamento que nos ayudaron a decidir sobre cuál sería el tema del proyecto.

La asesoría de “una empresa docente” y la participación de los docentes del colegio, contribuyeron para que nuestra preocupación temática surgiera

de la siguiente manera: “Falta hablar de temas propios de las matemáticas y de su didáctica, de manera sistematizada, en las reuniones de área”.

## OBJETIVOS

Definida la preocupación temática, nos fijamos el objetivo de cambiar la finalidad de las reuniones de área de matemáticas. Nos propusimos que fueran el espacio para hablar de los procesos curriculares, para motivar la participación directa y comprometida de los docentes, para exponer de manera sistemática temas didácticos y pedagógicos actuales, para presentar experiencias de clase ante el grupo de profesores y para fomentar el trabajo en equipo. También, nos propusimos que fueran una oportunidad para acercar a los docentes entre sí, para afianzar la solidaridad entre ellos y para compartir lo que les es tan caro: su saber.

## LA ACCIÓN

Después de terminar el trabajo de diagnóstico, elaboramos un plan de acción, para cuyo desarrollo procedimental se utilizaron las reuniones de área. Partimos de la voluntad —fundamento para todo éxito— de los profesores de matemáticas. A continuación describimos las varias actividades que conformaron el plan.

### **Aplicación de encuestas y presentación de resultados**

La aplicación de encuestas y la presentación de sus resultados fue la estrategia que consideramos conveniente para identificar y delimitar la temática de nuestra investigación de acuerdo con las necesidades del área.

Elaboramos una primera encuesta de preguntas abiertas y la aplicamos en una reunión de área. Algunas de las preguntas formuladas fueron: ¿qué es la matemática?, ¿cuáles son los temas matemáticos más frecuentes que usted aborda en las reuniones de área?, ¿qué dificultades piensa usted que se presentan en las reuniones de área? La segunda encuesta fue sobre las relaciones entre los profesores, con los estudiantes y con el entorno.

Durante la aplicación de las encuestas y la posterior presentación de resultados observamos y registramos de forma escrita el interés y la disposición de los docentes, con el propósito de conocer su actitud y nivel de cooperación.

En la primera encuesta logramos una participación de casi todos los profesores, mientras que en la segunda sólo la mitad entregó la hoja de respuestas. Como resultado general logramos plantear entre todos la definición de nuestra temática y consideramos algunos procesos para lograr las metas. Esta actividad generó un acercamiento entre la rectora y los profesores; la mayoría mostró interés en participar y aportar en el proyecto, y en

dar realimentación, lo cual en nuestro sentir, es necesario si queremos un adecuado y real enriquecimiento del quehacer docente.

### **Dar a conocer el proyecto**

Una vez identificada plenamente la temática del proyecto y elaborado el plan de acción, se dio a conocer el proyecto a los profesores, con el fin de escuchar ideas y propuestas por parte de ellos e involucrarlos lo más posible. Este fue el espacio ideal para que los profesores de matemáticas se dieran cuenta de que necesitábamos contar con su colaboración para el éxito del proyecto. Además, los involucramos en su solución.

Para determinar los cambios que debíamos hacer en las reuniones de área y establecer la forma de participación de los profesores tuvimos en cuenta aspectos como la motivación, el interés, el entusiasmo y las sugerencias dadas por los profesores.

Observamos un excelente grado de aceptación, motivación e interés de los docentes frente al proyecto y se consolidó una situación de compromiso con ellos mismos, con el área y con la institución. Inclusive recibimos varias sugerencias y aportes a la redacción del documento de la propuesta del proyecto.

### **Sensibilización del grupo**

Con esta actividad buscábamos que los docentes reflexionaran sobre su quehacer y el de sus compañeros, mejoraran las relaciones socio-afectivas dentro del grupo y lograran un mayor conocimiento de ellos mismos para una adecuada participación en las actividades propuestas y un eficiente trabajo en equipo.

La actividad consistió en que cada profesor marcara una hoja con su nombre y dibujara un símbolo que en su opinión, lo representara. Dentro del grupo, se pusieron en circulación las hojas y los participantes debían escribir en cada hoja una cualidad, como docente, del correspondiente profesor. Después el dueño de la hoja leía en voz alta lo que se escribió sobre él y explicaba su dibujo.

Por escrito se registraron los comentarios a cada opinión, las reacciones, las expresiones que se usaron, y el grado de receptividad y aceptación de los juicios emitidos por los asistentes.

Como resultado, hubo no pocas sorpresas porque algunos no pensaron que se les conociera tanto y a otros, tan poco. Se aclararon varias posiciones y afloraron algunas reacciones de inconformidad por comentarios que fueron considerados indebidos. Sin embargo, las diferencias apreciadas no obstaculizaron nuestro trabajo. Más bien, sirvieron para contextualizarlo mejor. La explicación de los profesores respecto al símbolo que los representaba fue muy enriquecedora para conocerse mejor.

## **Lectura reflexiva**

Una reunión de área se dedicó a leer en forma individual un texto de matemática con la paradoja: “Todos los cuervos son negros”. Los profesores debían analizar, solucionar, y justificar por escrito la paradoja, primero individualmente, luego por parejas y después en grupos de cuatro. Al final se leyeron en voz alta las respuestas.

Con este taller buscábamos que los profesores vivenciaran cómo el texto escrito es un excelente recurso didáctico cuando se quiere despertar el interés y la motivación para el aprendizaje de las matemáticas. También, que experimentaran cómo una lectura puede crear en el salón de clase un ambiente agradable, recreativo, rico en imaginación e iniciativa.

Los profesores manifestaron su deseo de participar más activamente en la realización de las reuniones de área y de hacerse responsables de la temática de próximas lecturas. Este entusiasmo llevó incluso a algunos, a utilizar lecturas similares en sus cursos de matemáticas con los estudiantes. Además fue una excelente motivación para nuestro siguiente taller que era precisamente compartir experiencias de aula.

## **Presentación de experiencias de aula**

Las tres siguientes reuniones de área se utilizaron para que los profesores compartieran experiencias de enseñanza vivida en el aula, sobre un tema específico de matemáticas. Los profesores de matemáticas propusieron los temas para estos talleres y se requirieron sesiones de dos horas por cada tema. Algunos de los temas tratados fueron el algoritmo de la multiplicación de números naturales y doblado y plegado como instrumento de la geometría en grado sexto.

Esta actividad tenía como propósito fomentar entre los profesores el intercambio de experiencias personales en el aula, promover la innovación en el salón de clase y enriquecer las actividades presentadas con la crítica constructiva.

Durante la realización de los talleres los profesores fueron partícipes de los cambios que algunos de ellos estaban promoviendo en su quehacer diario. El profesor se hizo crítico de su propia labor como enseñante. Adicionalmente los profesores se comprometieron a utilizar las experiencias nuevas de sus compañeros en sus propias aulas y a exponer y compartir los resultados en las reuniones siguientes; reconocieron las ventajas de promover la investigación en clase, a través de la lectura y reafirmaron la importancia de compartir el trabajo de aula.

## **CONCLUSIONES**

Hemos cumplido una primera etapa, durante la cual creemos haber alcanzado los objetivos propuestos para ella. Nuestra mayor satisfacción estuvo

en el consenso que se alcanzó con los docentes en la selección de la problemática alrededor de las reuniones del área de matemáticas y en la unión de esfuerzos que se dio para lograr unas metas comunes y comprometedoras de nuestros conocimientos y creatividad. Cabe resaltar la disposición de los profesores para concluir con nosotros que lo importante era dar a las reuniones de área una función de reflexión y actualización aplicada en su totalidad a planear, actuar, observar y reflexionar para volver a planear y seguir un proceso en espiral como es el fundamento de la investigación-acción.

Consideramos que las actividades para acercarnos a la solución fueron acertadas y contaron con la aprobación del grupo de profesores quienes las disfrutaron y enriquecieron. Al realizar estas actividades en las reuniones de área el sentido de dichas reuniones empezó así a cambiar.

Fue necesario fortalecer la voluntad, la decisión y el compromiso para iniciar el proceso de cambio y para corregir los desajustes que pudieran surgir. Todos nuestros esfuerzos los orientamos para garantizar el logro de nuestro propósito.

Logramos la participación directa, dinámica y comprometida de los docentes quienes compartieron sus experiencias y alimentaron el deseo de mejorar su quehacer pedagógico. Pudimos pasar el límite, entre docente directivo y docente, acercándonos más, como miembros de una misma comunidad. Nos sensibilizamos para tratarnos como compañeros, capaces de aportar con generosidad y dispuestos a descubrir y a aceptar un verdadero compromiso con la institución. Establecimos una franca camaradería que se manifestó cuando aplicamos, analizamos y compartimos las inquietudes del área. La interacción con los compañeros de matemáticas y el compartir las experiencias del salón de clase, permitió que otros profesores pusieran en práctica nuevas actividades en el aula y que las mismas se enriquecieran con los comentarios y las reflexiones de todos. Cuando se descubre, con la ayuda de los demás, qué aciertos y qué desaciertos se ha tenido, se amplía el discurso y se enriquece el lenguaje.

Somos conscientes de que todo está en sus comienzos y que es ahora cuando realmente empieza el desafío para no dejar decaer lo logrado y continuar por el camino del afecto y la buena voluntad; que las estrategias para continuar la investigación-acción están por descubrir porque son muchas y nosotras hemos empleado muy pocas. Sin embargo, ahora nuestro propósito es ampliar la cobertura y lograr que todas las áreas manejen el discurso de investigación-acción, se desenvuelvan con libertad y confianza dentro de un método que en nuestro sentir humaniza el aprendizaje, facilita la formación integral y es un excelente recurso estratégico para fomentar la investigación en el colegio.

Encontramos dificultades por falta de tiempo, ya que la experiencia tomó más del que realmente disponíamos para ella y nos llevó a sacrificar inclusive, algunas actividades personales y familiares. Por otro lado la inex-

perencia en el manejo del método de investigación-acción, todavía no nos permite presumir que lo manejamos como lo requiere su practicidad.

Damos gracias a los caros amigos Cecilia, Luisa, Paola, Patricia Y Pedro, quienes además de cumplir con sus objetivos del proyecto PRIME I, nos han permitido demostrarnos una vez más, que basta querer para lograr la calidad que buscamos en nuestra labor docente y que no debemos olvidar que el laboratorio de mayor enriquecimiento espiritual y científico está en la amistad y en nuestras aulas de clase. Agradecemos también a todos los participantes de este proyecto, nuestros colegas de los colegios distritales y privados quienes con sus investigaciones, inquietudes y experiencias, enriquecieron nuestra labor y nos estimularon en nuestros esfuerzos. Y, especialmente, queremos agradecer a todos los profesores del área de matemáticas de nuestro colegio, quienes hicieron suyo este proyecto y nos permitieron alcanzar nuestros objetivos.

# IDEAS Y ACCIONES PARA LA REUNIÓN DE ÁREA DE MATEMÁTICAS<sup>1</sup>

CECILIA CASTILLO  
COLEGIO DISTRITAL SANTAFÉ DE BOGOTÁ

*En muchos colegios las reuniones de área son el único espacio programado por la institución para la interacción entre profesores del área. El Colegio Santafé de Bogotá es un ejemplo de ellos. En éste, las reuniones de área tenían un carácter eminentemente informativo, situación que parecía ser la causa de que el grupo de profesores de matemáticas no estuviera suficientemente cohesionado para el trabajo y de que en las reuniones de área no se trataran temas relacionados con asuntos propios de la enseñanza de las matemáticas.*

*Con la consciencia de que lograr el consenso del equipo de profesores en cuanto a aspectos fundamentales para la formación matemática, es el primer paso de un proceso de largo plazo para mejorar la enseñanza de las matemáticas, se realizaron acciones tendientes a iniciar ese proceso y a promover el tratamiento de temas propios de la educación matemática entre los profesores.*

*La experiencia que se narra en este artículo da cuenta de lo que sucedió en tres reuniones de área: la primera, de motivación; la segunda, de indagación y consenso; y la última, de lectura, debate y reflexión.*

*Entre los resultados obtenidos con las acciones implementadas vale la pena destacar, por un lado, que se logró dentro del grupo de profesores explicitar inquietudes u opiniones en cuanto al quehacer matemático y unificar criterios en lo referente a la formación de aspectos relevantes de la matemática. Por otro lado, el trabajo mismo de investigación deja en quien lo realiza una lección sobre el continuo cuestionamiento y reflexión que se debe hacer sobre la propia práctica.*

## INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta una descripción del proyecto que realicé entre 1995 y 1996 en el Colegio Santafé de Bogotá —en calidad de coordinadora académica— para abordar y dar algún tipo de solución a la carencia de acuerdos en diferentes tópicos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El trabajo desarrollado estuvo enmarcado por el proyecto

---

1. Este artículo fue editado por Felipe Fernández, investigador de “una empresa docente”.

PRIME I, propuesta de “una empresa docente” con base en la cual se orientaron los planes de acción y de análisis de la problemática.

El colegio se encuentra ubicado al occidente de Bogotá, en la localidad novena de Fontibón y funciona en la jornada de la tarde. Cuenta con 520 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 9 y 19 años, organizados de sexto a undécimo grado de educación básica y media.

Tal como lo señala Perry et al. (1996), la problemática de las matemáticas escolares es compleja pues son muchos los elementos y las relaciones que intervienen como factores determinantes de los resultados de la formación matemática de los alumnos del colegio y algunos de tales factores no se pueden controlar y el cambio de otros requiere de un proceso largo y difícil. A pesar de esa complejidad y de las dificultades que se pueden vislumbrar, desde la coordinación académica del colegio es posible realizar acciones tendientes a mejorar aspectos concretos vinculados estrechamente con la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y vale la pena hacerlo; ese convencimiento guió el esfuerzo hecho en este proyecto. La experiencia narrada en este artículo muestra lo que se hizo para abordar un problema concreto del área de matemáticas en la institución.

## FALTA DE COHESIÓN EN EL GRUPO DE TRABAJO

Debido al tamaño del colegio<sup>2</sup>, en términos del número de profesores, ellos están organizados por áreas. Así pues, el área de matemáticas estaba compuesta por tres profesores de matemáticas, dos de biología, uno de electricidad y uno de informática. Como parte de la coordinación del área de matemáticas se realizaban semanalmente reuniones de 90 minutos a las que debían asistir los docentes miembros y la coordinadora académica; eventualmente asistían las orientadoras. Por lo general, una de tales reuniones transcurría así: se leía el acta de la reunión anterior, se presentaba la agenda del día que debía ser aprobada por los participantes, y al final, había tiempo para que los profesores hicieran sus propuestas y expusieran sus problemas o inquietudes relacionados con sus cursos o, en general, con la institución, dedicando 20% del tiempo a las dos primeras actividades, 50% al desarrollo de la agenda y 30% a la última actividad. Durante el desarrollo de la agenda se informaba acerca de temas relacionados con la vida de la institución (i.e. lectura de la correspondencia llegada al colegio y de interés para el área, izada de bandera, visitas con los alumnos a diversos sitios de la ciudad con fines pedagógicos, realización de eventos generales, preparación y realización de actividades específicas del área como el día de la ciencia y

---

2. Según el decreto 179 del 22 de enero de 1982, diez es el número mínimo de docentes para formar departamento dirigido por un jefe especialista en el área temática. En cumplimiento de esta norma, cuando el número de profesores de matemáticas de la institución es menor de 10, ellos se agrupan con profesores de asignaturas afines, dirigidos por el coordinador académico.

las olimpiadas, y las jornadas pedagógicas para docentes), también se trataban temas relacionados con los estudiantes (rendimiento académico, dificultades de tipo académico y disciplinario con estudiantes, etc.). Durante el espacio “propuestas y varios” los profesores hablaban sobre asuntos generales relacionados por ejemplo con la necesidad de recursos de planta física o de elementos de trabajo.

De la descripción hecha anteriormente se percibe que las reuniones de área —único espacio programado por la institución para la interacción entre profesores del área— tenían un carácter eminentemente informativo, situación que parecía ser la causa de que el grupo de profesores de matemáticas no estuviera suficientemente cohesionado para el trabajo y de que en las reuniones de área no se trataran temas relacionados con asuntos propios de la enseñanza de las matemáticas. La falta de cohesión del grupo de profesores de matemáticas alude, entre otras cosas, a que no había consenso entre ellos acerca de asuntos importantes para la enseñanza de las matemáticas, tales como las metas que debe perseguir la formación matemática dada en la institución a los estudiantes, los criterios para desarrollar el currículo, las metodologías, las formas de evaluar, etc.

Con la consciencia de que lograr el consenso del equipo de profesores en cuanto a aspectos fundamentales para la formación matemática, es el primer paso de un proceso de largo plazo para mejorar la enseñanza de las matemáticas, este proyecto se propuso realizar acciones tendientes a iniciar ese proceso y a promover el tratamiento de temas propios de la educación matemática entre los profesores.

## CÓMO OCURRIÓ LA ACCIÓN

La acción contempló inicialmente tres actividades. En primer lugar, una reunión para dar a conocer el proyecto a los maestros del área; luego, una segunda reunión para abrir el espacio en el que los maestros pudieran explicitar sus opiniones y puntos de vista relacionados con su quehacer pedagógico; y una última reunión para plantear acciones concretas encaminadas de manera directa a lograr los objetivos del proyecto.

A continuación se presentan detalles de lo que se hizo en cada una de las reuniones y los resultados que se obtuvieron.

### *Primera actividad: reunión de motivación*

El objetivo de esta primera reunión era motivar a los maestros para su participación en el proyecto, a través de generar una polémica que hiciera evidente la necesidad e importancia de concretar para el grupo algunos significados relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Fue así como se inició la reunión con un sondeo de opinión sobre tres cuestiones: ¿qué es la formación matemática de una persona?, ¿qué es habi-

lidad matemática? y ¿qué habilidades matemáticas se deben desarrollar en los estudiantes? Después de esa discusión planteé de manera general el proyecto y la forma como éste se desarrollaría: expuse, con la colaboración de los dos docentes de matemáticas que estaban participando en PRIME I en el grupo de profesores, las fases de la investigación-acción y destacué la necesidad de definir un problema concreto a tratar.

Durante la reunión se observó la actitud de los profesores, en términos de lo que hacían (con alguna frecuencia ellos consideran que lo más importante es estar presente y no tanto su participación activa en la reunión, lo que se evidencia en que ellos durante la reunión corrigen evaluaciones de los alumnos, leen cuestiones no relacionadas con la reunión, etc.) y en términos de la cantidad de participación; para esa observación se contó con la ayuda de un observador no participante quien hizo registro escrito y con la observación de la coordinadora. Muy al comienzo de la reunión se observó poca disposición a participar, pero al presentarles las tres preguntas y pedirles sus ideas al respecto hubo actitud de escucha y al adentrarse en la presentación de la propuesta se detectó buena disposición y mayor participación de los integrantes.

También se observó el grado de consenso del grupo frente a los aspectos considerados en las preguntas formuladas: se observó la diversidad de respuestas dadas. Esta observación se hizo con una grabación de audio y la colaboración del observador no participante.

Con respecto a la pregunta sobre la formación matemática hubo un consenso en la idea muy general de que aquella es el desarrollo del conocimiento matemático y de la capacidad numérica.

En cuanto a la pregunta por el significado del término “habilidad”, inicialmente se le definió como “base” (término que luego se cambió por “aspecto” debido a que “en matemáticas son muchísimas las habilidades que se deben desarrollar” y para efectos del proyecto era necesario concretar el significado tanto como se pudiera). Posteriormente, se evidenciaron las interpretaciones diversas que daban al término. Las siguientes son algunas de las afirmaciones que dieron como respuesta a la pregunta sobre lo que es una habilidad: “es la facilidad que tienen las personas para resolver problemas”, “es la rapidez para desarrollar una situación”, “es una destreza que trae la persona y que puede incrementarse o elevarse, dependiendo del tipo de trato que se le dé”, “es algo innato con lo que nace la persona y después se desarrolla”, “es la capacidad para realizar algo”.

A la pregunta acerca de las clases de habilidades matemáticas que se deben desarrollar en los estudiantes, las respuestas señalaron la destreza espacial, la operacional, la lógica, la abstracta, y, en general, habilidades mentales y psicomotoras.

En resumen, en esta reunión se divagó sobre las respuestas, observándose miedo para concretar, se polemizó sobre la falta de cohesión y el que cada maestro considera que está cumpliendo con su deber y su labor es efi-

ciente; se convino en la importancia de la unificación de criterios y en el cuestionamiento sobre la realidad que como compañeros y profesionales tenemos. Uno de los participantes concluyó con la frase: “es verdad, en matemáticas lo que hacemos es mecanizar únicamente”.

### *Segunda actividad: indagación - consenso*

Después de haber iniciado en la primera sesión la explicitación de algunos significados que las personas daban a conceptos como habilidad y formación matemática, para la segunda sesión yo consideraba que podría ser relativamente fácil llegar a un acuerdo acerca del problema de estudio de mi proyecto. Así, pues, el objetivo que planteé para la segunda sesión fue indagar y escuchar las propuestas del grupo de profesores acerca de los aspectos que se deben desarrollar como parte de la formación matemática de los estudiantes en el colegio. Consideraba que al lograr ese objetivo, también podría comenzar a delimitar el problema de estudio del proyecto. Sin embargo, la discusión que se generó en esa reunión fue muy amplia y desembocó en una lluvia de ideas sobre muy diversos aspectos, entre las que se destacan: “debemos concretar el proyecto a un solo grado de estudio”; “hay que integrar el área de matemáticas con otras asignaturas afines tales como electricidad, biología e informática”; “debemos indagar sobre lo que necesita el alumno de sexto grado”; “se necesita establecer como bases para el trabajo el que el proyecto de área esté sustentado por las dificultades que se manifiestan a nivel del aula” y “hay que determinar qué habilidades tienen los alumnos de grado sexto”. Naturalmente, eran propuestas de interés para los profesores pero yo no veía que fueran tan viables de desarrollar en el tiempo disponible (seis meses). En resumen, esa situación no favoreció el acuerdo que yo esperaba. Frente a ella, vi la necesidad de exponer lo que yo estaba pensando que podía ser mi proyecto: considerar y trabajar aspectos relevantes en la formación matemática. Para ello se realizarían las siguientes actividades:

- leer sobre el tema y discutir sobre las lecturas,
- llegar a seleccionar dos o tres aspectos relevantes para la formación matemática de los estudiantes. Podrían ser: comunicación, razonamiento y resolución de problemas, para lo cual me basé en los estándares curriculares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991, p. 63-86).
- iniciar un proceso en el que los profesores pudieran implementar pequeñas tareas tendientes a desarrollar los aspectos seleccionados como resultado de su interpretación y discusión acerca de las lecturas hechas.

Aunque no hubo una reacción de entusiasmo, de parte de los profesores frente a mi propuesta, que me mostrara una posible intención de compromi-

so de ellos con el proyecto, sí registré comentarios y actitudes que me hacen pensar que la propuesta causó, por lo menos, sorpresa o inquietud en los participantes. Cabe anotar que en reuniones anteriores de área al cambio de actividad, algunos maestros ya se habían ausentado o se disponían a salir muy rápidamente; esta sesión no se disolvió inmediatamente después de sonar el timbre; por el contrario, sólo un profesor dijo “me voy” y los demás ni se inmutaron. Al terminar la reunión, uno de los maestros manifestó: “¡esto es reunión de área!”.

Al reflexionar, a posteriori, sobre por qué los profesores no tuvieron una reacción entusiasta ante la propuesta que les hice, considero que quizás, ella pudo ser un poco abstracta para los profesores. A pesar de que les expliqué brevemente en qué consistían los tres aspectos de la formación matemática que sería relevante trabajar, el hecho de que esa explicación hubiera sido oral y no escrita pudo incidir en el grado de concentración y comprensión de la propuesta. Por otra parte, al haber una ruptura entre la lluvia de ideas de los profesores y la propuesta que les hice, se puede ver como natural lo que sucedió. Es probable que los profesores hubieran sentido que se les estaba imponiendo la propuesta sin tener en cuenta para nada todas las opiniones que habían dado durante la primera parte de la reunión. Tal vez habría sido otra la reacción si hubiera planteado la propuesta desde un comienzo.

### *Tercera actividad: lectura, debate y reflexión*

El objetivo de esta reunión era llegar a establecer uno o dos aspectos de la formación matemática que los docentes desearan trabajar en el aula de manera especial. Para ello se planeó lo siguiente: hacer una lectura de cuatro de los estándares del NCTM para los grados 5-8 (resolución de problemas, comunicación, razonamiento, y conexiones); discutir y analizar las lecturas a la luz de la práctica docente; llegar a un consenso acerca del trabajo a desarrollar en el aula en relación con las habilidades a impulsar en la formación matemática.

Para comenzar la reunión, explicité qué se haría, qué objetivos tenía la reunión y la metodología a seguir. La lectura de los estándares se realizó como una actividad de grupo en la que alguien leía en voz alta y los demás seguían la lectura en sus documentos. En los momentos en que se consideraba necesario se hacían los comentarios correspondientes. Al final de la lectura se hizo una discusión para concretar los aspectos. Se acordó, entonces, centrar la atención en la resolución de problemas y la comunicación —entendida ésta como la información escrita o verbal, manejo del lenguaje matemático e interpretación en forma individual o colectiva. No se consideró el razonamiento como un aspecto independiente puesto que se veía muy ligado e implícito en los dos aspectos seleccionados.

Para concretar de qué manera se podrían abordar los aspectos seleccionados se acordó que cada docente planteara a sus estudiantes de cada curso,

uno o dos problemas o ejercicios dirigidos explícitamente a abordar los aspectos acordados. Esta idea fue propuesta por dos de los participantes y acogida por los demás. La intención de esa actividad era observar el uso del lenguaje matemático y la formulación e interpretación que los estudiantes hacían en relación con los problemas o ejercicios formulados. Se pretendía que los profesores registraran el proceso que los estudiantes seguían para llegar a una solución.

La participación de los profesores en esta sesión fue activa, muy consciente y comprometida. Esto se reflejó en el tipo de acuerdo a que se llegó y en el objetivo que se plantearon los docentes para realizar y observar la actividad. En otras palabras se llegó a un consenso por unanimidad.

## CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Se lograron los objetivos previstos en el proyecto: explicitar inquietudes u opiniones en cuanto al quehacer matemático y unificar criterios en lo referente a la formación de aspectos relevantes de la matemática. El proceso de definición del problema fue bastante largo; hubo mucha dificultad para llegar a concretar un pequeño problema y desarrollarlo; para mí un proceso arduo y de continua revisión. Las orientaciones que me aportaron los seminarios diseñados como parte del proyecto PRIME I fueron trascendentales para alcanzar los objetivos que me había propuesto en este trabajo.

En lo personal manifiesto que tuve mucho interés en llevar a cabo un proyecto de esta envergadura. Aprender a investigar y actuar al mismo tiempo, es un paso fundamental para mejorar la labor docente al igual que para integrar el equipo de profesores de la institución en el aspecto profesional y como seres humanos, que es ante todo un aspecto prioritario en toda relación humana.

Quiero destacar de manera especial algunos puntos que son consecuencia del trabajo que he realizado con el propósito de escribir este artículo. En primer lugar, la reflexión que hice a posteriori en colaboración con Felipe Fernández y Patricia Perry, a quienes agradezco de manera especial, me permitió ver una serie de aspectos de los que no fui necesariamente consciente durante el proceso mismo. Gracias, en gran parte, a esa interacción con los coordinadores pude hacer una serie de auto-críticas que considero útiles para mi futura actividad como coordinadora académica y que no hubieran sido posibles en un trabajo sin apoyo (por ejemplo, actualmente tengo la hipótesis de que cuando en las reuniones de área se trabaja con documentos que ayudan a centrar la atención de los profesores, ellos asumen un mayor compromiso y surgen naturalmente propuestas interesantes de trabajo).

Después de terminar este trabajo, estoy convencida de lo enriquecedor que es investigar acerca de nuestra práctica.

## REFERENCIAS

- NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.
- Perry, P., Valero, P, y Gómez, P. (1996). La problemática de las matemáticas escolares desde una perspectiva institucional. En P. Gómez y P. Perry (Eds.), *La problemática de las matemáticas escolares. Un reto para directivos y profesores*. Bogotá: “una empresa docente” y Grupo Editorial Iberoamérica.





**1**





# SECUENCIA DE ENSEÑANZA PARA SOLUCIONAR ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA<sup>1</sup>

INÉS DE MORENO Y LILIA DE CASTELLANOS  
COLEGIO DISTRITAL CRISTOBAL COLÓN

*En este artículo se presenta una propuesta de una secuencia de actividades diseñada para enseñar resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. Dicha secuencia fue implementada luego de realizar un análisis preliminar en el que se consideraron aspectos del contenido matemático, del aprendizaje y la enseñanza del tema. La reflexión final en torno a los errores de los estudiantes aporta ideas que pueden dar lugar a recomendaciones para la enseñanza.*

## INTRODUCCIÓN

A mediados de 1995, el Colegio Distrital Cristóbal Colón, de Bogotá, fue invitado por la Universidad de los Andes a participar en el proyecto PRIME I, en cuyo marco se realizó un seminario-taller para profesores con el propósito de trabajar en temas relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a nivel escolar —que a consideración de los docentes requirieran una atención especial. Concretamente, nuestro trabajo consistió en la realización y evaluación de un proyecto de investigación-acción para elaborar el diseño de una secuencia de clases relacionado con el tema de interés de cada colegio.

## IDENTIFICACIÓN DEL TEMA

Al iniciar el proyecto se aplicó una prueba diagnóstica en grado 10<sup>o</sup> con miras a identificar errores típicos que permitieran predecir posibles dificultades de los alumnos para solucionar sistemas de ecuaciones simultáneas  $3 \times 3$ , por el método de sustitución. La elección del tema se hizo para atender la solicitud del profesor de física quien comentó la necesidad de profundizar en esta forma de solución y de suministrar herramientas que permitieran mejor aplicación y solución de problemas en dicha asignatura.

Al analizar las respuestas de los alumnos se observó que el proceso para solucionar sistemas  $3 \times 3$  por sustitución se aplicaba correctamente pero se

---

1. Este artículo fue editado por Felipe Fernández, investigador de “una empresa docente”.

presentaban errores al despejar las incógnitas, lo cual llevaba a la solución incorrecta del sistema. Se optó entonces por redefinir el tema objeto de trabajo como “Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita” por considerar que a través de éste se logra desarrollar la habilidad para despejar variables e incógnitas. El objetivo del trabajo fue presentar el tema propuesto a través de una secuencia de enseñanza, donde los alumnos identificaran las operaciones propuestas y el orden en que se deberían transponer los términos para despejar la incógnita.

## ANÁLISIS DEL TEMA

Como fundamento para el diseño de la secuencia de enseñanza se realizó un análisis preliminar en el que se consideraron aspectos relacionados con:

- el contenido matemático (conceptos y procedimientos involucrados directamente en el tema);
- el aprendizaje (conocimientos prerrequisitos para abordar y comprender el tema, y los errores más comunes de los estudiantes en el manejo del mismo);
- la enseñanza (forma tradicional como se presenta el tema a los alumnos y la relación de ella con los errores identificados).

### Contenido matemático

Una ecuación de primer grado con una incógnita (ecuación lineal) es una expresión que en lenguaje simbólico se presenta en la forma  $Ax + B = C$  donde  $x$  es la expresión de una incógnita y  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes. Los términos  $Ax$  y  $B$  están relacionados por medio de la operación adición. Para reconocer una ecuación lineal como tal, es necesario partir de los conceptos de igualdad y de incógnita bajo diferentes representaciones gráficas y simbólicas. Los siguientes son ejemplos de las formas que usualmente se utilizan  $5 + ( ) = 6$  ;  $2 \times ( ) = 6$  ;  $2 \times ( ) + 3 = -1$  ; o  $3x + 2 = 5$ .

Para solucionar ecuaciones de primer grado se necesitan habilidades para establecer relaciones entre las cantidades numéricas, la incógnita y el concepto de igualdad. No sólo es necesario tener claro estos conceptos, sino que también se deben considerar las destrezas y razonamientos para manejar estos conceptos. La ecuación lineal con una incógnita se suele representar simbólicamente. Sin embargo, existen otras representaciones más concretas en las que se evidencia el papel que desempeña cada uno de los elementos dentro de la igualdad.

### Aprendizaje del tema

A continuación se presentan dos aspectos que se deben tener en cuenta para hacer un análisis del aprendizaje del tema. Por un lado, se consideran cuántos

les deben ser los prerrequisitos para abordar el tema y por otro lado, cuáles son los errores que cometen los estudiantes con mayor frecuencia.

### *Prerrequisitos*

Para lograr el objetivo propuesto se requiere que cada alumno opere correctamente con números enteros (suma, resta, multiplicación y división); halle el valor numérico de expresiones algebraicas sencillas para un valor específico de la variable (e.g.  $x + 4$  para  $x = 2$ ;  $2x$  para  $x = -4$ ); identifique la jerarquía de las operaciones suma, resta y multiplicación en expresiones numéricas propuestas (e.g.  $-4 \times 3 + (-8)$ ;  $-4 + 3 \times 4$ ); interprete enunciados sencillos que le permitan seguir instrucciones en la guía de trabajo; e identifique la incógnita (elemento de valor desconocido) en una igualdad.

### *Errores más frecuentes*

Con frecuencia, en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita los estudiantes cometen los siguientes errores:

- 1) Un número que multiplica a la incógnita en uno de los lados de la ecuación se pasa a restar al lado opuesto. Esto se podría atribuir a que no diferencian el inverso aditivo del inverso multiplicativo:

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 0 \\ x &= -1 - 3 \end{aligned}$$

- 2) Cambian el signo en un miembro de la ecuación sin hacer la misma modificación en el otro. El estudiante posiblemente piensa que cuando se realiza una transposición aditiva o multiplicativa tiene que, o bien, cambiar el signo en otra parte de la ecuación (caso a.), o bien, cambiar el signo en el elemento que transpone (caso b.).

$$\begin{array}{ll} \text{a. } -3x + 4 = 2 & \text{b. } -3y = -1 \\ 3x = 2 - 4 & y = -1/3 \end{array}$$

Vale la pena observar que en el caso a. se opera de manera aditiva (el 4 se pasa a restar al lado opuesto), mientras que en el caso b. se opera de manera multiplicativa (el 3 o el  $-3$  se pasa a dividir al lado opuesto).

- 3) No realizan la transposición de términos (sumandos o factores) en el orden correcto. Para el estudiante posiblemente no tiene importancia el

orden en que se hacen las transposiciones: piensa que en cualquier orden, el resultado será el mismo.

$$\begin{aligned} \text{a. } 5x/3 + 2 &= 3 \\ 5x + 2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{4m-3}{2} &= 6 \\ \frac{4m}{2} &= 6 + 3 \end{aligned}$$

4) Al resolver una ecuación realizan sólo las operaciones en un miembro de la igualdad sin hacer las debidas modificaciones en el otro.

$$\begin{aligned} \text{a. } 2x + 3 &= 5 \\ 2x + 3 - 3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 4x &= 7 - 3 \\ \frac{4x}{4} &= 7 - 3 \end{aligned}$$

En ambos casos es clara la intención de aplicar, sin éxito, el método de operar de manera aditiva o multiplicativa en ambos lados de la ecuación.

5) Para resolver la ecuación comienzan por desarrollar la expresión, aplicando la propiedad distributiva, pero lo hacen deficientemente.

$$\begin{aligned} \text{a. } 2(x + 4) &= 6 \\ x + 8 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 5(x + 2) &= 15 \\ 5x + 2 &= 15 \end{aligned}$$

6) Al realizar las operaciones de suma o resta implicadas en alguno de los miembros de la ecuación, presentan deficiencias.

$$\begin{aligned} \text{a. } 2(-3x + 1) &= 4 \\ 6x + 2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 5y &= -2 + 3 \\ 5y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } x &= 5/10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

El diseño que se propone más adelante se centra en el manejo de los tres primeros errores, los cuales se enfocan en la implementación del método de solución de una ecuación lineal con base en la transposición de términos. Por otra parte, los errores 5) y 6) se pueden considerar como fallas en el manejo de los prerrequisitos para abordar el tema. El error 4) se debe a la confusión entre dos métodos posibles de solución: la transposición de términos o la operación simultánea (aditiva o multiplicativa) a ambos lados de la ecuación.

## Enseñanza del tema

Al introducir el tema de las ecuaciones de primer grado con una incógnita usualmente éstas se presentan como una igualdad de la forma  $Ax + B = C$ , con  $A$ ,  $B$  y  $C$  constantes y  $x$  la incógnita (uno de los miembros expresa la suma entre dos o más términos y se desconoce el valor de alguno de esos

sumandos). Para dar solución a la ecuación es necesario hacer transposición de términos y realizar operaciones y aplicar las propiedades del inverso multiplicativo y/o del inverso aditivo al despejar la incógnita.

Utilizar en la enseñanza del tema — inicial y exclusivamente — la representación simbólica de la ecuación lineal impide al estudiante la interpretación y el análisis de otras representaciones más concretas en las cuales se evidencia el papel que desempeña cada uno de los elementos dentro de la igualdad. En otras palabras, esta forma de enseñanza no le permite a los alumnos partir de elementos concretos para su aprendizaje; esto hace que el tema sea para ellos ocasión de seguir un procedimiento mecánico más que el análisis y significación del concepto de ecuación. Los ejercicios propuestos son descontextualizados y su solución requiere de un alto nivel de abstracción, razones por las cuales son de bajo nivel de motivación. La estrategia que se basa en la transposición de términos es un modelo que los alumnos aprenden a aplicar. Sin embargo, a la luz de los errores presentados más atrás, son evidentes las dificultades en el manejo de signos y en la jerarquización de operaciones. Posiblemente a los estudiantes no les queda suficientemente claro el orden que deben seguir al transponer términos ni las operaciones que han de realizar; todo esto se puede atribuir en parte a la falta de manejo significativo del tema.

## SECUENCIA DE ENSEÑANZA PROPUESTA

En este apartado se presenta, en primer lugar, una descripción general de la secuencia de enseñanza. Luego se exponen las cinco actividades que componen la secuencia.

### Descripción general

El concepto de ecuación se construye a partir de igualdades presentadas como situaciones de equilibrio en balanzas en las que hay un elemento desconocido (incógnita). Se trata inicialmente de encontrar el valor de dicho elemento para lograr el equilibrio propuesto. Las balanzas pueden ser elaboradas por los alumnos y usar como pesas elementos corrientes entre los cuales se puedan establecer equivalencias de peso (botones, canicas, etc.).

Se pretende diseñar una secuencia de aprendizaje que parta del concepto de igualdad representado a través de balanzas en equilibrio y posteriormente incorporar la incógnita como elemento desconocido cuyo valor se desea descubrir; inicialmente el cálculo se hace por ensayo-error y luego, utilizando representaciones simbólicas como  $2(\ ) + 3 = 5$ , por transposición de términos para identificar claramente la jerarquía de las operaciones y el orden al efectuarlas.

Posteriormente, se pasa al manejo simbólico de la igualdad y de la incógnita para que determinen el valor numérico del elemento que no se

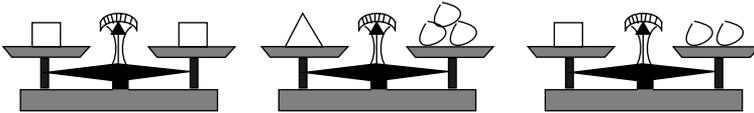
conoce (ensayo-error). Al tratar de encontrar el valor de la incógnita se presenta la necesidad de identificar las operaciones que intervienen en la igualdad y también el orden para ejecutarlas; es indispensable hacer énfasis en la jerarquización de operaciones y el orden al transponer los términos. Paso a paso ha de guiarse al alumno para que interprete las expresiones y establezca claras comparaciones con las situaciones manejadas en las balanzas.

### Actividades de la secuencia

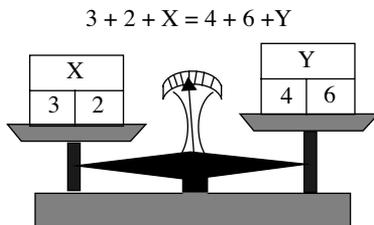
La guía de trabajo utilizada para el desarrollo del tema consta de cinco partes. A continuación se hace una breve presentación de las actividades propuestas con una muestra de los ejercicios utilizados.

- 1) **Interpretación gráfica de la igualdad.** En esta parte de la guía propusimos elementos concretos basados en el concepto de equilibrio en balanzas, que permiten dar significado a la ecuación. Por ejemplo, se presentaron ejercicios como los siguientes:

*A continuación aparecen tres balanzas que están en equilibrio; si disponemos de tantos objetos como sea necesario y de iguales características a los propuestos, graficar 5 balanzas diferentes que estén en equilibrio.*



*¿Qué pareja de números debe colocarse (simbólicamente) en los respectivos platillos, para lograr equilibrio, es decir, para que exista igualdad matemática? Seleccione dentro de las posibilidades dadas.*



- a.  $X = 5$ ;  $Y = 10$
- b.  $X = 5$ ;  $Y = 9$
- c.  $X = 10$ ;  $Y = 8$
- d.  $X = 10$ ;  $Y = 5$
- e.  $X = 4$ ;  $Y = 6$

- 2) **Completar igualdades.** Se trata de igualdades que en su primer miembro presentan adición, sustracción o multiplicación de enteros y donde hay una incógnita. El alumno debe escribir el número que falta en la igualdad. Además, cada una de esas igualdades está relacionada con la correspondiente expresión que indica la forma de calcular la incógnita. Los siguientes son ejemplos de los casos considerados:

- a.  $-5 + ( ) = 9$      $( ) = 9 + 5$
- b.  $( ) \times 7 = 63$      $( ) = 63/7$

- 3) **Relación entre incógnita y su valor.** Se daban las medidas de las longitudes de dos pedazos de pita y se pedía construir con cada una de ellas (usando también chinchas) un triángulo equilátero y un cuadrado. También se pedía encontrar o determinar el valor de la incógnita asignada al lado de cada una de las dos figuras.
- 4) **Secuencia para despejar la incógnita.** Les presentamos un diseño del procedimiento a seguir paso a paso para la transposición de términos hasta lograr el despeje de la incógnita como en el siguiente caso:
- $$3x + 8 = 23$$
- $x$  está multiplicando a 3, el término  $3x$  está sumado con 8.  
Transponer el término +8:
- $$3x = 23 - 8$$
- $$3x = 15$$
- Transponer el factor 3:
- $$x = 15/3$$
- $$x = 5$$
- El valor de  $x$  en esta ecuación es 5.
- 5) **Ejercicios de aplicación.** Para que los alumnos siguieran el proceso indicado, se propusieron diez ejercicios similares a los analizados en la etapa anterior de la secuencia; sólo se daba la ecuación y podían tener como referencia los ejercicios anteriores.

## Evaluación del tema

Estuvo constituida por cuatro partes. En la primera, de tipo actitudinal, se miró cómo fue la participación del alumno y qué elementos le aportó el tema; la segunda, de tipo generalización, fue para determinar si el alumno inducía cuántos valores podía tomar una incógnita al solucionar una ecuación de la forma  $Ax + B = C$ , siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  enteros; en la tercera parte se miró si el alumno era capaz de identificar si la solución de la ecuación  $Ax + B = C$ , siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  enteros, es siempre o no un número entero; y finalmente, en la última parte se miró si el alumno aplicaba el proceso aprendido en la actividad y si aportaba otra idea para resolver el problema propuesto, como en el siguiente caso: ¿Si  $2x + 1 = 7$ , el valor de  $x$  es 3?

## Descripción de la acción

La secuencia se aplicó en dos sesiones de trabajo de 75 minutos cada una y en un grupo de 39 alumnos. A continuación se describe brevemente cómo sucedieron las sesiones. Las primeras tres actividades se realizaron en la primera sesión y las restantes, en la segunda.

*Primera actividad.* Se informó a los estudiantes sobre la actividad a realizar con el fin de motivarlos para el desarrollo del trabajo y presentar la lista de materiales necesarios para la segunda sesión. Duración: 10 minutos.

*Segunda actividad.* Se organizó el curso en grupos de 3 personas y se distribuyeron las fotocopias de la primera parte de la guía (“Interpretación gráfica de la igualdad como equilibrio”). Duración: 25 minutos. Al finalizar esta parte se hizo la plenaria sobre los aportes de cada grupo. Duración: 20 minutos

*Tercera actividad.* A medida que cada grupo fue terminando la actividad anterior, se entregó la fotocopia de la segunda parte de la guía (“Completar igualdades”). Duración: 20 minutos.

*Cuarta actividad.* Se entregó una fotocopia con las indicaciones para la construcción de dos figuras con materiales que tenía cada grupo (“Relación entre incógnita y su valor”). Duración: 25 minutos.

*Quinta actividad.* Al terminar la actividad anterior se entregaron las fotocopias de la cuarta parte de la guía para su desarrollo (“Secuencia para despejar la incógnita”). Duración: 30 minutos.

*Sexta actividad.* Para confrontar el nivel de comprensión del tema, se presentaron cuatro ejercicios para que los alumnos aplicaran el procedimiento propuesto. Duración: 20 minutos.

*Evaluación.* Se hizo posteriormente en un tiempo de 15 minutos.

## LA OBSERVACIÓN

El trabajo fue observado en forma directa por dos profesoras, para lo cual se elaboró un cuestionario detallado sobre las posibles respuestas, justificaciones y actitudes frente a cada una de las situaciones propuestas a los estudiantes. A manera de ilustración se presentan dos ejemplos de las pautas de observación consideradas. El primero muestra los aspectos considerados en lo que se refiere a la interpretación gráfica de la igualdad y el segundo muestra la forma como se abordó la observación de los ejercicios de aplicación.

### *Interpretación gráfica de la igualdad*

Con relación a la forma como abordan la situación planteada

- 1) ¿Toman como referencia una sola balanza?
- 2) ¿Relacionan una balanza con otra y establecen equilibrio entre elementos de las diferentes balanzas?

Con relación al análisis y las conclusiones a que llega cada grupo

- 1) ¿Optan por lo más fácil?
- 2) ¿Se plantean posibilidades diferentes?

Con relación a la exposición de las soluciones de los alumnos

- 1) ¿La justificación es “por qué sí”?
- 2) ¿Justifica con detalle para concluir?
- 3) ¿La justificación es: “como se ve en el dibujo”?

### *Ejercicios de aplicación*

Se tenía la hipótesis *a priori* de que la mayoría de los alumnos despejarían correctamente el valor de la incógnita, después de analizar los ejemplos propuestos en la cuarta actividad. Para poner a prueba tal hipótesis, se quería observar aspectos tales como:

- 1) ¿Se observa seguridad en los alumnos al desarrollar los ejercicios?
- 2) ¿Siguen la secuencia indicada?
- 3) ¿Saltan la secuencia indicada y escriben sólo el valor para la incógnita?
- 4) ¿Siguen la secuencia pero obtienen otro valor que no es el correcto?
- 5) ¿Identifican el orden requerido al efectuar las operaciones para despejar la incógnita?
- 6) ¿No siguen la secuencia indicada y presentan error en la solución?

También se quería observar aspectos relacionados con la presentación de los ejemplos en la actividad cuarta. Para ello se tomaría como referencia los grupos que pidieran aclaraciones. Se formuló la siguiente pregunta:

- 1) ¿Es clara la presentación de los ejemplos?

Vale la pena señalar que cuando la acción se llevó a la práctica no fue posible observar cada uno de los aspectos previstos, por el alto número de ellos. Además, fue necesario hacer anotaciones que no estaban consideradas en el plan de observación.

## **RESULTADOS EN TÉRMINOS DEL ANÁLISIS DE LOS ERRORES**

Los resultados de las observaciones realizadas indican que en general, se logró desarrollar la habilidad para despejar la incógnita en ecuaciones de la forma propuesta. Sin embargo, se presentaron tres tipos de error que vale la pena comentar. A continuación se presenta un breve análisis de estos errores. Se intenta explicar las posibles razones por las cuales los alumnos cometen esos errores y además dar algunas sugerencias de cómo se podría abordar el problema.

- 1) Si  $-x = -17$  entonces  $x = -17$ . A primera vista puede parecer que este error, es el mismo error 2) b referido en la sección “Aprendizaje del tema”. Sin embargo, las dificultades que se pueden atribuir al error cambian según el punto de vista bajo el cual se analice. Si lo miramos desde el punto de vista conceptual, se ve que el alumno considera que  $x$  es igual a  $-x$ , independientemente del proceso que siga para llegar a la solución. Entonces surgen las siguientes preguntas: ¿será que el alumno también considera que  $ax$  es igual a  $-ax$ , cuando  $a \neq 1$ ? o ¿será que solamente se trata de un descuido de observación del estudiante? Sea cual sea la respuesta, el hecho de que el error haya ocurrido favorece la hipótesis de que el estudiante desconoce qué hacer con el signo menos o no le da significado al coeficiente  $-1$  que aparece implícitamente. Por otra parte, si miramos el error desde el punto de vista procedimental, las dificultades que se pueden atribuir al error coinciden, en general, con las que se mencionan en la explicación dada al error 2) b.

La reflexión anterior nos conduce a la necesidad de proponer actividades para superar este error que hagan más énfasis en la comprensión conceptual y en las que se puedan explorar las posibles diferencias al utilizar coeficientes de  $a$  diferentes de  $1$  y  $-1$ . Por ejemplo, podría llevarse al alumno a realizar actividades como las siguientes: ubicar enteros sobre la recta numérica para identificar y diferenciar un número de su opuesto, leer la expresión para identificar qué sentido le atribuye al signo, proponer otros casos en los que el coeficiente sea negativo pero diferente de  $-1$  para identificar de manera más precisa el proceso que el alumno aplica para despejar.

- 2) Si  $-4y = 11 + 7$  entonces  $y = 18/-4$ , y finalmente,  $y = 9/2$ . Este error lo vemos como un nuevo caso d. que se sumaría a los tres ejemplos presentados como error 6) en el análisis preliminar. Creemos que el estudiante comete el error por una de dos razones: divide los números como si fueran positivos o desconoce cómo operar enteros negativos. Para superar este tipo de error podría llevarse al alumno a que haga divisiones exactas de enteros con diferentes signos y que compruebe si los resultados son correctos por medio de la multiplicación. En este caso, también se debe indagar en la comprensión del estudiante para determinar si da significado a  $-4$  como diferente de  $4$ .
- 3) Si  $-6x + 4 = -1$  entonces  $-6x = 1 - 4$ . Ahora parece que estamos ante una variante del error 2) a. mencionado en el análisis preliminar. Pero, en esta ocasión en vez de cambiarle el signo al  $6$ , se lo cambió al  $1$ . Nuevamente, se puede pensar que el alumno cambia el signo al término que no se transpone porque no ha dado significado al cambio de signos al transponer términos. Esto sugiere, como en el caso de los errores anteriores, que predomina un aprendizaje procedimental sin significado. Algunas sugerencias para tratar de superar este error son: plantearle al

estudiante nuevas actividades que retomen el manejo de la igualdad como equilibrio, por ejemplo, proponer modificaciones a las partes 1) y 2) de la secuencia de enseñanza que favorezcan un razonamiento procedimental con significado. Una sugerencia de otro tipo es que el alumno utilice un color especial para los términos que se van a transponer.

En resumen, al combinar los comentarios de los errores del análisis preliminar con los resultados de la secuencia de enseñanza aplicada al observar el trabajo de los alumnos en el tema, en diferentes grupos y en diferentes momentos, se pueden concretar los errores típicos relacionados con la solución de ecuaciones de la forma estudiada en las siguientes situaciones:

*Errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra.* Se pueden concretar en: cambio del signo de un miembro de la ecuación sin tener en cuenta el otro; cambio del signo a términos que no se transponen; asignación del mismo valor a la incógnita que a su opuesto; cambio del signo al transponer un factor; transposición y conservación de factor.

*Errores debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos previos.* Se concretan así: hallan en forma incorrecta el resultado de sumas y restas o restas de enteros; hallan en forma incorrecta el signo del resultado de la división de dos enteros cuando éstos son de diferente signo; asignan como resultado de una división, el mismo resultado que para su inverso multiplicativo, cuando el divisor es múltiplo del dividendo.

## REFLEXIONES PARA CONCLUIR

En este apartado se presentan algunas reflexiones a las que hemos llegado como resultado de nuestra participación en el proyecto. Por una parte, al comparar nuestras ideas previas, en relación con la forma en que actuarían los alumnos frente a la tarea propuesta, con el comportamiento real que tuvieron, resulta clara la importancia y necesidad de explorar y reforzar el nivel de los prerrequisitos pues eso ayuda a que el aprendizaje sea significativo y se pueda integrar a conocimientos previos. También fue evidente que, en ocasiones, lo que se les plantea a los alumnos no es necesariamente lo que ellos comprenden. Por ejemplo, en la segunda parte de la guía “Completar igualdades” se pretendía que los alumnos relacionaran unas ecuaciones con las correspondientes igualdades (puestas al frente) que expresaban la forma de encontrar el valor de la incógnita. Sin embargo, los alumnos no lo hicieron así; en cambio, respondieron inicialmente todos los ejercicios que estaban en la primera columna y luego los de la segunda.

De otra parte, para mejorar la calidad de la educación matemática en el colegio se hace necesario el trabajo en el área centrado en el intercambio de

experiencias pedagógicas y análisis de diseño de materiales. Por ejemplo, puede ser muy enriquecedor para los profesores del área diseñar estrategias que permitan anticipar acciones en el desempeño de los estudiantes en los temas en que como docentes sabemos que son de mayor dificultad. También, conviene iniciar un estudio sistemático de los errores para establecer pautas que permitan superar las dificultades que los originan. Para que esas ideas se puedan concretar debemos crear en el área un ambiente que propicie el intercambio de experiencias para implementar propuestas metodológicas, y fomente la motivación hacia la investigación en el aula. La experiencia vivida en este proyecto nos ha renovado el interés por actualizarnos en temas relacionados con la educación matemática en beneficio personal y de los alumnos y somos conscientes de la importancia que tiene autocuestionarnos de manera permanente con una actitud que nos ayuda a superar las deficiencias que tengamos en relación con la enseñanza de nuestros alumnos.

# APROXIMACIONES AL CONCEPTO DE VARIABLE<sup>1</sup>

MÓNICA MENA Y EDUARDO MORENO  
COLEGIO GABRIEL ECHAVARRÍA

*El presente artículo aborda el significado de la letra como representación de una variable en una expresión algebraica. Se realiza un análisis acerca de los errores y dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse y resolver situaciones que involucran la letra como variable. La metodología para abordar este problema, fue la de investigación-acción la cual, tuvo una planeación a lo largo de seis meses para tener como producto final una secuencia de ocho horas de clase, que posteriormente fue implementada con los estudiantes. A través de los argumentos y conclusiones verbales, se vio que los estudiantes utilizaron las letras para representar variables: usaron la letra como una herramienta para expresar matemáticamente cantidades desconocidas y tomaron consciencia de la variación que pueden tener estas letras.*

## PRESENTACIÓN

Este artículo es producto de un trabajo de investigación-acción desarrollado en el Colegio Gabriel Echavarría, entre 1995 y 1996, en el que participamos como profesores investigadores. El marco de nuestro trabajo fue PRIME I, proyecto liderado por “una empresa docente”, centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes, Colombia.

El objetivo principal del proyecto era obtener mejores resultados —de los que usualmente logramos— en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un concepto determinado. La metodología utilizada en el trabajo fue la de investigación-acción que se caracteriza por ser un proceso de indagación metódica y crítica acerca de un tema de interés para la práctica de quien hace la investigación-acción (Kemmis et al., 1992). En nuestro caso, el tema que nos interesaba abordar y comprender está relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la interpretación y uso de las letras en una expresión algebraica.

Para llevar a cabo el proyecto se planeó una estrategia metodológica que se desarrolló con 28 estudiantes de grado octavo entre los 12 y 14 años. El objetivo de la estrategia era favorecer la construcción significativa del concepto de variable, propiciando en los estudiantes la argumentación

---

1. Este artículo fue editado por Mauricio Castro, investigador de “una empresa docente”.

sobre sus concepciones con respecto a la representación de variables con letras en expresiones algebraicas.

En este artículo se exponen los principales resultados de la implementación de dicha estrategia metodológica.

## ANTECEDENTES

Preocupado por el deficiente rendimiento académico de sus estudiantes en el área de las matemáticas, el Colegio Gabriel Echavarría inició, en 1995, la realización de talleres de refuerzo como solución al problema detectado. Dichos talleres tenían dos objetivos principales. Por un lado, se quería reforzar el manejo de las operaciones básicas en el conjunto de los números enteros ya que la mayoría de los estudiantes presentaban un manejo deficiente de ellas. Por otro lado, se quería que a través de estos talleres los estudiantes percibieran las matemáticas como una actividad divertida e interesante para lo cual era importante darles la oportunidad de que trabajaran con juegos y acertijos; de esa manera, se esperaba cambiar la actitud pasiva de los estudiantes en la clase de matemáticas.

Aunque con los talleres no se logró que los estudiantes superaran los errores y dificultades en el manejo de las operaciones básicas con los enteros, sí se logró un diagnóstico de varias de esas dificultades y que los estudiantes adoptaran una actitud más dinámica frente a las matemáticas. Ese diagnóstico hizo evidente, por ejemplo, el uso inapropiado de los contenidos previos (conceptos y procedimientos) en la resolución tanto de problemas como de ejercicios; y, las dificultades de los estudiantes para elaborar información y analizarla durante la resolución de los ejercicios y problemas.

Teniendo en cuenta estos resultados, consideramos que realizar talleres para el cambio de actitud frente a las matemáticas no era suficiente para que los estudiantes pudieran superar sus dificultades de comprensión; nos faltaba crear estrategias con una planeación específica y rigurosa para así obtener mejores resultados. La invitación que recibió el Colegio para participar en el proyecto PRIME I fue, entonces, una oportunidad para concretar la idea que teníamos en relación con el tipo de solución que se requiere para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestro colegio.

## MARCO DE REFERENCIA

En la mayoría de los estudiantes del grado octavo, se detectaron dificultades y errores en el manejo de los sistemas de representación (lenguaje matemático, gráfico y verbal) y en la traducción entre sistemas; se evidenció además un uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos en la resolución de problemas y ejercicios en los que hay involucradas expresiones algebraicas. Cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de un problema o ejercicio que contiene expresiones algebraicas, consideran que las variables son letras que, obligatoriamente, deben ser sustituidas por números; no se detienen a pensar que en geometría, por ejemplo, las variables representan puntos, rectas, etc.

Los estudios de Küchemann y Socas pueden servir en nuestro análisis como preámbulo para describir las formas de interpretación de las letras como variables y las dificultades que se presentan en el manejo de las expresiones algebraicas. Con respecto a las dificultades en el álgebra, Socas (1989, pp. 23, 76 y 99) señala que:

*[...] dificultades que se presentan en el álgebra no son tanto dificultades del álgebra misma sino errores que quedan sin corregir en la aritmética y que luego se traducen erróneamente al campo algebraico [...]*

*[...] la poca comprensión de lectura entre el lenguaje cotidiano y el matemático y viceversa generan diferentes interpretaciones de los símbolos y de las letras [...]*

*En el álgebra, las letras aparecen como símbolos que pueden significar cualquier clase de objetos, lo que permite considerar diferentes tipos de álgebra: álgebra de conjuntos, álgebra de funciones, etc.*

Así mismo, Socas cita a Küchemann (1989, pp. 28-31) quien clasifica, en seis categorías, el significado que las letras de una expresión algebraica pueden tener. Esas categorías son:

*Letras evaluadas.* Esta categoría se refiere a casos en los que las letras de una expresión algebraica tienen asignado un valor numérico desde el principio. Por ejemplo, en la pregunta “¿Cuál es el valor de  $a$ , en la expresión  $a + 5 = 8$ ?”, la letra  $a$  tiene un valor específico; es, inicialmente desconocido, pero evaluable.

*Letras ignoradas.* Esta categoría se refiere a casos en los que no se asigna significado alguno a las letras dentro de la expresión algebraica. Por ejem-

plo, en la pregunta “¿Qué valores hacen cierta la expresión  $x + y = 43$ ?”, el estudiante ignora las letras y responde la pregunta sin utilizar las letras.

*Letras como objeto.* Esta categoría incluye casos en los que las letras son vistas como un objeto concreto (frutos, lados de un polígono, etc.) lo que sustituye el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real; en estos casos, es esencial distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.

*Letras como incógnitas específicas.* En esta categoría se incluyen los casos en que las letras son consideradas como números específicos que se desconocen, y cuyo valor se puede encontrar manipulando la expresión en la que aparecen. Cuando se pide a los estudiantes que calculen el área de un polígono, la respuesta correcta a esta cuestión requiere el uso de las letras como incógnitas genuinas.

*Letras como generalización de números.* En esta categoría se incluyen los casos en que se ven las letras de una expresión algebraica como representación de varios valores numéricos y no de exactamente uno. Por ejemplo, dada la pregunta “¿Qué valores puede tomar  $c$ , si  $c + d = 10$  y  $c$  es inferior a  $d$ ?” es posible que el estudiante evalúe la expresión  $c + d$  para distintos valores de  $c$  y  $d$  —teniendo siempre en cuenta que el valor que puede asignar a  $d$  debe ser mayor que el que haya asignado a  $c$ — y compare el resultado obtenido con 10. En este tipo de solución, el estudiante está manejando un significado de las letras como números generalizados.

*Letras como variables.* En esta categoría se incluyen los casos en que las letras son consideradas como representación de conjuntos de valores no especificados y se ve una relación sistemática entre dos conjuntos de valores. El concepto de variable implica claramente el concepto de la incógnita y de sus posibles valores. El siguiente ejemplo implica el manejo de letras como representantes de variables. Los lápices azules cuestan \$10 cada uno y los lápices rojos, \$12 cada uno. Compró algunos lápices rojos y algunos azules y en total pago \$180. Si  $A$  es el número de lápices azules y  $R$  el número de lápices rojos, ¿qué expresión puedo usar para representar la relación de la cantidad de lápices y su costo?

Teniendo como referencia el anterior marco, iniciamos el trabajo de diseño de la estrategia. Como parte del análisis previo al diseño de la estrategia metodológica consideramos algunos errores típicos de los estudiantes en los que se evidencia una clara tendencia a sustituir las letras por números. A continuación presentamos una breve descripción de tales errores.

### Errores típicos de los estudiantes

Ligados con el manejo e interpretación de expresiones algebraicas, los estudiantes frecuentemente cometen muchos errores, entre los que se pueden destacar los siguientes:

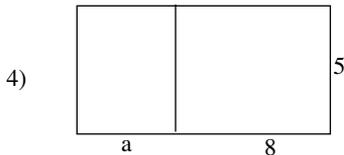
1)  $a \cdot x^2 + b - (a \cdot x) + b = 2 \cdot b$

$$a \cdot x^2 + b$$

2) 
$$\frac{a \cdot x + b}{2 \cdot a \cdot x^2 + b^2}$$

3)  $(a \cdot x + b) \cdot (a \cdot x - b) = 2 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

Hallar el área del siguiente rectángulo



$$A = (8a) \cdot (5) = 40$$

$$A = (8) \cdot (5) = 40 \cdot a$$

$$A = 8 + a + 5$$

En las respuestas a los tres primeros casos se evidencian errores que tienen que ver con el manejo de conceptos y procedimientos que se han tratado en la aritmética: el uso de signos de operaciones y de paréntesis; las potencias y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Pero consideramos que en esos errores se refleja además un uso de las letras en el que las combinan y manejan indiferentemente debido a que ellos no han construido el concepto de variable.

En las respuestas dadas al cuarto caso, quizás, la idea que tienen los estudiantes es que la letra  $a$  es una forma de nombrar uno de los lados del rectángulo; no ven la letra  $a$  como representación de una longitud desconocida cuyo valor puede variar, y, al tener que manejar los datos de la figura para expresar el área, los estudiantes los juntan u operan con ellos indiferentemente. Cabe anotar que la tercera respuesta, además, refleja una deficiencia en el manejo de la “fórmula” del área de un rectángulo.

Creemos que en buena medida los estudiantes manejan deficientemente las expresiones algebraicas debido a las mínimas oportunidades que les ofrecemos sus profesores para posibilitar la construcción significativa con relación a la interpretación y uso de las letras como variables.

## EL PROBLEMA

De la situación descrita se destaca que nuestros estudiantes no tienen una significación conceptual de las letras en una expresión algebraica, lo que les impide identificar e interpretar las letras como variables. Se crea así, la necesidad de planear una estrategia que posibilite la construcción significativa del concepto de variable junto con el desarrollo de habilidades y destrezas para el manejo de expresiones algebraicas en la solución de problemas que las involucren.

## LA ACCIÓN

### La metodología de trabajo en el proyecto

Como lo mencionamos al inicio del artículo, la metodología de trabajo que seguimos para realizar este proyecto fue la de investigación-acción; así, pues, hicimos la reflexión inicial y la planeación de la acción y de la observación a lo largo de seis meses; la implementación de la acción y la observación se hizo en aproximadamente ocho horas de clase; el análisis de la información y la elaboración del reporte se hizo a lo largo de tres meses; y finalmente, la escritura de este artículo se realizó en interacción con uno de los coordinadores del proyecto PRIME I a lo largo de tres meses.

### Nuestra intención detrás de la estrategia

A continuación se describe la idea general que guió nuestra acción. La actividad se planeó para que los estudiantes realizaran un proceso constructivo por descubrimiento: se les debía plantear una situación cuya solución representara un reto para ellos y que los motivara a observar, a preguntarse, a conjeturar. Se quería, también, que la situación formulada les permitiera plantear alternativas de solución con una argumentación válida, los llevara a realizar conexiones de las matemáticas con su entorno y con los conocimientos ya adquiridos. Se esperaba que la situación planteada los impulsara a representar los resultados de manera clara y en la forma más conocida posible. Pero, sobre todo, se quería dar a los estudiantes una oportunidad para que **interpretaran el uso y sentido de variable ligado a las letras** en una expresión algebraica en un contexto real.

### Descripción de la estrategia

Para el diseño de la estrategia metodológica tuvimos en cuenta la motivación de los estudiantes a partir de sus propias relaciones con las matemáticas y su entorno. Para esto, se hizo un estudio minucioso de las actividades cotidianas que estaban generando mayor interés en los estudiantes. En 1996, los estudiantes de grado octavo —20 varones y 8 mujeres—, tuvieron a su cargo el proyecto “Cultivos hidropónicos”, proyecto institucional en el

que ellos participaron activamente. Esta información nos llevó a decidir el contexto de la situación que les plantearíamos. Pensamos que elegir ese contexto posibilitaría la construcción significativa del concepto de variable en la medida en que los estudiantes pudieran involucrarse en él desde diversos puntos de vista y pudieran asociar el número de ramas y el número de granos de café con expresiones algebraicas.

La actividad fue planeada para ser ejecutada en tres bloques (sesiones) de dos horas escolares cada una.

En la primera sesión, se dio a cada grupo (conformado por tres estudiantes), una guía de trabajo en la que se planteaba un problema para:

- encontrar formas de expresar cantidades desconocidas de ramas y granos de cualquier número de cafetos;
- usar las letras como una posibilidad de expresión matemática.

Las preguntas debían ser respondidas en la misma hoja de la guía, en el orden en que se presentaban y con base en la información que daban los gráficos, de modo que los estudiantes manipularan valores diferentes para un mismo atributo (representados en el número de ramas de los cafetos y en el número de granos de los cafetos) y así pudieran apreciar el concepto de variable (número de granos de café), o, su valor constante (número de ramas) en un contexto específico (los cafetos del cultivo hidropónico).

En la segunda sesión, los estudiantes hicieron una breve exposición de sus soluciones en una transparencia, y, argumentaron sus respuestas verbalmente y respondieron las preguntas formuladas por sus compañeros.

En la tercera y última sesión, el profesor titular del curso realizó una puesta en común con el grupo y evaluó la actividad, en donde verificó si los estudiantes habían utilizado las letras como planteamiento para la solución al problema propuesto en la guía y si la argumentación hacía referencia a lo que representaban las letras, lo que podría dar indicios sobre el proceso de construcción de significado del concepto de variable.

### **Nuestro papel durante la actividad en clase**

En la planeación de la actividad nos esforzamos por explicitar nuestras ideas acerca de los procesos inconscientes de aprendizaje, como son la motivación, la relación profesor-alumno, las formas de presentación de un nuevo tema y su conexión con los conceptos previos y el entorno del estudiante.

En la implementación de la estrategia —durante el desarrollo de la actividad— nos esforzamos por ser principalmente, orientadores para los estudiantes. Así, pues, mantuvimos una actitud de continua comunicación con los estudiantes a través de la que los invitábamos a explorar aspectos relacionados con el tema, en particular, a utilizar conceptos previamente estudiados en el curso. Observamos la generación de ideas en la solución de

problemas y cuestionamos a los diferentes grupos de trabajo para identificar sus dificultades. Nuestra posición caracterizada más por escuchar que por hablar, permitió que los mismos estudiantes detectaran incoherencias en sus razonamientos y argumentaciones dadas como respuestas, y que verificaran la comprensión de las instrucciones, el enunciado de las preguntas, los términos desconocidos, etc. Nuestra posición también animó a los estudiantes a explorar cualquier idea o estrategia que pudiera ayudarles a entender y/o resolver el problema sin censurar las ideas generales del grupo de trabajo, propiciando el equilibrio en sus discusiones.

## LA OBSERVACIÓN

Las preguntas que nos formulamos con respecto al trabajo de los estudiantes durante el desarrollo de la guía fueron las siguientes: ¿Cómo traducen el problema? ¿Cómo lo abordan? ¿Qué motivación hay? ¿Cómo desarrollan el trabajo en equipo? ¿Cómo aplican los conocimientos previos? ¿Qué análisis hacen? ¿Qué secuencias utilizan? ¿Cómo argumentan por escrito y oralmente?

Consideramos que el análisis de estas observaciones permiten establecer si los estudiantes construyen el concepto de variable, teniendo como principal factor la riqueza de relaciones que están en la base de cualquier concepto. Se analizó el ensayo, la invención, la creatividad en la interpretación y el uso de las letras así como, la significación dentro de un contexto, y tantos otros aspectos que los procedimientos matemáticos permite observar.

Para recoger la información se utilizaron grabaciones de audio por grupo de trabajo, la respuesta a la guía de trabajo y la grabación de audio de la puesta en común. En un principio, se consideró la posibilidad de recoger esta información a través de grabaciones de video, pero se ha comprobado que existen influencias psicológicas en las personas cuando están frente a una cámara de video cambiando que hace que cambie parte de sus actitudes normales y no haya una completa sinceridad en sus respuestas. Aunque las grabaciones de audio pueden influir también en el comportamiento de los estudiantes, creemos que esa influencia es menor. Así, pues, la grabación de audio fue el instrumento que nos permitió recoger información que difícilmente se puede recordar o plasmar en un papel en el momento de realizar las observaciones, y se constituyó en el más importante instrumento de observación para la evaluación de nuestros objetivos propuestos.

Al inicio de la actividad los estudiantes estuvieron ansiosos por escuchar sus voces grabadas y la atención estuvo más dirigida hacia las grabadoras de audio que a la comprensión del trabajo propuesto. Sin embargo, la disposición hacia el trabajo fue normal al transcurrir la clase.

Después de atender las instrucciones, los estudiantes en las primeras cuatro preguntas tenían que ubicarse en el contexto, comprender el problema y responder preguntas en donde debían usar las operaciones aritméticas básicas y representar gráficamente la cantidad de granos y ramas de los cafetos. La elaboración de respuestas fue de manera casi mecánica. Pero al llegar a la parte de la guía, donde se les planteaba expresar matemáticamente una cantidad cualquiera de granos o ramas, los grupos detuvieron su ritmo de trabajo y se evidenció el momento de mayor actividad cognitiva. Surgieron diferentes tipos de ideas y planteamientos interesantes como el de relacionar números de granos con las letras y diferenciarlas con las ramas. Algunos de estos planteamientos se muestran en los siguientes ejemplos:

*# granos = X; # árboles = Y;  $X \subset Y$  (Porque los granos de café aunque no conozcamos su cantidad siempre estarán contenidos en cualquier cantidad de arboles de café).*

*Representaríamos el total de números de granos con letras ya que no sabemos el valor que tienen.*

*$n =$  total de granos de café;  $a =$  cualquier cantidad de árboles (lo represento así ya que las letras representan cualquier número).*

Igualmente, necesitaron apoyo y supervisión constante por parte de los profesores para corroborar la comprensión de las preguntas y posibles respuestas. Manejaron con bastante versatilidad conceptos previos de uso común y diario como el conteo, las operaciones básicas junto con la representación gráfica.

Durante la sustentación de respuestas (segunda sesión) hubo un poco de falta de atención al iniciarse las exposiciones, ya que ellos no están acostumbrados a escucharse. En general, los grupos expositores defendieron tímidamente sus respuestas fomentándose la discusión en la justificación de respuestas de manera clara y lógica para el grupo.

En la puesta en común (última sesión) la participación del grupo fue alta: desecharon las respuestas incoherentes para ellos mismos y concluyeron a nivel de grupo el uso e interpretación de las letras para representar cantidades desconocidas.

## RESULTADOS

De acuerdo con los resultados obtenidos en la implementación de la estrategia consideramos que los objetivos planteados se cumplieron en un alto grado porque tanto en las respuestas a la guía de trabajo como en las argu-

mentaciones en la puesta en común y en las exposiciones, los estudiantes usaron las letras como una forma para expresar matemáticamente cantidades desconocidas, teniendo en cuenta la variación de las mismas. Encontraron a las letras como herramienta para solucionar el problema propuesto, concluyendo con sus propias palabras “aquellas letras en matemáticas pueden utilizarse para representar cantidades desconocidas, que pueden variar o permanecer constante su valor”. Además, manipularon y dieron un uso apropiado a las letras para referirse a objetos diferentes en un mismo contexto.

Así mismo, los argumentos y conclusiones verbales de los alumnos les permitieron darse cuenta de que para expresar cantidades desconocidas, tanto de ramas como de granos de cualquier número de cafetos, (que podían variar en un mismo contexto), lo podían hacer a través del concepto de variable, representado en una letra y que tenía más sentido que contar grano por grano de cada cafeto.

Por otro lado, la estrategia posibilitó el trabajo en equipo, el intercambio de ideas, la discusión y selección de respuestas de modo compartido. Se evidenció que los estudiantes no tienen confianza en sus razonamientos y soluciones dadas a nivel individual y grupal, lo que genera dificultad para plasmar sus ideas y procedimientos en forma escrita de manera clara y coherente. Esto se detectó al encontrar diferencias entre lo que se discutió en el grupo (registrado en las grabaciones de audio) y lo que quedó escrito en la guía de trabajo.

## CONCLUSIONES

Como investigadores de este proyecto podemos afirmar que plantear una estrategia didáctica y metodológica para ayudar a superar las dificultades detectadas en nuestros estudiantes es una tarea difícil de concretar, ya que requiere de tiempo y dedicación para tener presentes los procesos que condicionan la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (i.e. la motivación, la relación profesor-alumno, las formas de presentación de un nuevo tema y las conexiones con los conceptos previos y el entorno del estudiante).

Por otra parte, queremos destacar que, desde el punto de vista de la institución, este trabajo de investigación ayudó a consolidar un equipo de trabajo en el que se formalizaron reuniones para coordinar, planear y llevar a cabo actividades de capacitación, y, para el seguimiento y evaluación de la enseñanza-aprendizaje del área. Igualmente, se inició la reestructuración del área en cuanto contenidos por curso, indicadores de logro, evaluación, formas de trabajo, estrategias pedagógicas, actividades extracurriculares y complementarias.

Si nuestra responsabilidad consiste en planificar y llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas debemos mantener vivo el espíritu de observa-

ción, análisis y planificación de nuestra actividad profesional y desarrollar un mejor saber, sobre nosotros mismos y nuestra práctica. Debemos dejar un espacio para nuestras reflexiones (a nivel personal y a nivel de trabajo de equipo con nuestros colegas), con respecto a la enseñanza y aprendizaje para poder planear estrategias de investigación-acción y superar las dificultades de nuestros estudiantes.

## REFERENCIAS

- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1992). *Cómo planificar la investigación-acción*. España: Laertes.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

# REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS<sup>1</sup>

PRISCILA NIETO Y MAGDALENA OLIVEROS  
COLEGIO DISTRITAL LA AMISTAD

## INTRODUCCIÓN

A mitad del año 1995, la práctica docente en el Colegio Distrital La Amistad, jornada de la tarde, transcurría normalmente cuando los profesores de matemáticas del colegio recibimos una invitación por parte de “una empresa docente” a participar en el proyecto PRIME I, invitación que voluntariamente aceptamos las profesoras Priscila Nieto y Magdalena Oliveros con el visto bueno de los colegas.

Asistimos a la Universidad de los Andes para formar parte, con otros colegios, de un proyecto tendiente al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media. La metodología empleada en este proyecto fue la investigación-acción la cual usamos para detectar una dificultad en el aprendizaje, planear una acción tendiente a mejorar esa dificultad, ejecutar la acción, evaluarla y reflexionar acerca de los resultados obtenidos con el fin de en un futuro, reformar la acción planeada y repetir nuevamente este proceso. Los proyectos con este tipo de metodología son desarrollados por un grupo de personas involucradas e interesadas en un problema social, en este caso educativo, quienes mediante reflexiones sobre su quehacer pedagógico y sus propias acciones dan solución a sus dificultades.

El proyecto de investigación-acción, tema de este artículo, se desarrolló en el colegio con 84 alumnos de octavo grado de educación básica con el fin de mejorar en ellos su comprensión de las expresiones algebraicas mediante una actividad diseñada que relaciona el álgebra y la geometría. Dicha actividad debía ser realizada en tres horas de clase.

## IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Asistimos a tres seminarios en la Universidad durante los cuales se desarrollaron diferentes actividades. En una sesión, los profesores de cada colegio analizaron el programa de matemáticas de un grado determinado, seleccionaron los temas que según su criterio presentaban mayor grado de dificultad.

---

1. Este artículo fue editado por Luisa Andrade, investigadora de “una empresa docente”.

tad y de éstos escogieron uno. En otra sesión los profesores reflexionaron sobre los errores que usualmente cometen los alumnos cuando se aproximan al tema y sobre las dificultades de comprensión del mismo. Finalmente diseñaron una actividad específica con el fin de superar una de esas dificultades.

Nosotras analizamos el programa de grado octavo y seleccionamos “Expresiones algebraicas” como tema de trabajo porque la experiencia que hemos tenido en nuestras clases de álgebra nos permite ver que los alumnos cometen muchos errores cuando manejan las expresiones algebraicas. Por ejemplo, al reducir términos semejantes tales como  $2a + 3a$  escriben como resultado  $5a^2$  o al resolver la expresión  $(x^2 + 5)^2$  el resultado obtenido es  $x^4 + 25$ .

Reflexionamos sobre esas situaciones, nos pusimos en el lugar de los alumnos y durante largas sesiones tratamos de responder a la pregunta ¿por qué los alumnos cometen estos errores? En esa reflexión, comprendimos que tales errores son la manifestación de dificultades que tienen los alumnos para identificar y sumar términos semejantes, dificultades que están relacionadas con la conceptualización del tema y con la manera como ellos lo abordan. Por lo tanto, el objetivo de nuestro trabajo fue dar un significado, que tuviera sentido para los estudiantes, a las expresiones algebraicas. Pensamos que al relacionarlas con algo concreto su comprensión se facilitaría. Escogimos relacionar dichas expresiones con la geometría.

Luego comenzamos a diseñar una actividad para aplicarla con nuestros estudiantes. Queríamos que fuera innovadora, sencilla, agradable y tratamos de diseñarla lo mejor posible. De acuerdo con las indicaciones del seminario se hizo un análisis del tema, desde tres puntos de vista: algunos aspectos que inciden en la comprensión del estudiante; el contenido matemático del tema, centrado en el estudio de los conceptos involucrados, sus relaciones y sus formas de representación; y finalmente la posibilidad de introducir nuevas estrategias de enseñanza comparadas con la forma tradicional de la clase.

Para la mejor comprensión del tema los estudiantes deben tener unas bases cognitivas, que en nuestro criterio son: dominar las operaciones con números reales y tener claros los conceptos básicos de la geometría plana, especialmente el concepto de área y perímetro de figuras y saber hallar áreas equivalentes como suma y resta de áreas parciales e interpretarlas en la transformación de figuras. La experiencia que hemos tenido en el desarrollo de estos temas nos muestra que también los “aprendizajes cotidianos” o preconceptos con los que el alumno llega al colegio inciden en la comprensión de los temas nuevos.

En el análisis matemático del tema se estudiaron los conceptos básicos involucrados y sus características: los conceptos de variable, constante,

expresión algebraica, términos semejantes, área y perímetro. Pensamos en una serie de formas para estudiar los conceptos, en las que se utilizaron primero números reales y luego se incluyeron letras; por ejemplo, la noción de variable se hace con ejercicios de área constante y perímetro variable o viceversa. Otros procedimientos considerados fueron la multiplicación de un binomio por sí mismo, la construcción de un cuadrado cuyo lado estuviera dado por un binomio, la equidescomposición del área de un cuadrado, el dibujo de cuadrados cuyas áreas representaran cuadrados de binomios. También estudiamos las formas simbólica, gráfica y numérica de representación de los conceptos y buscamos las relaciones que existen entre los conceptos para lo cual se hizo un mapa conceptual.

Se pensó entonces en conectar el álgebra con la geometría y dar un significado geométrico a las expresiones algebraicas porque nos pareció una forma nueva de desarrollar el tema. Sabemos que la medida no es otra cosa que la aritmetización de la geometría y el álgebra es el manejo simbólico de la aritmética lo que equivale a utilizar expresiones algebraicas. Otro aspecto que justifica la articulación del álgebra con la geometría está en el hecho de relacionar diversas representaciones de conceptos o procedimientos entre sí.

Fundamentalmente se utilizaron las siguientes ideas: la de área de un rectángulo como producto de las dos dimensiones de la correspondiente región rectangular; la de suma de áreas parciales de la misma región, es decir, el área como pavimentación de una superficie formada por regiones rectangulares; la del perímetro como la medida de las fronteras de las regiones correspondientes; y la de los nexos entre área y perímetro. También están implícitas las ideas de variable, incógnita, expresión algebraica, etc.

Paralelamente al diseño de la actividad se hicieron lecturas sobre la investigación acción (Kemmis y McTaggart, 1988), sobre la forma como los niños perciben las formas geométricas y las conceptualizan según el modelo de los esposos Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1995) y sobre los errores que cometen los estudiantes y la forma como los profesoras participamos de ellos (Gómez et al., 1995). Estas lecturas nos ayudaron a conceptualizar una serie de ideas para enmarcar el trabajo y dar significado pedagógico a cada uno de los pasos de la actividad.

## DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Los alumnos de octavo grado con los que trabajamos habían sido alumnos nuestros en el grado séptimo y algo sabíamos de ellos, razón por cual no consideramos necesario hacer una actividad para reforzar los conceptos básicos de geometría.

La actividad se desarrolló en tres horas de clase de noventa minutos cada una. Durante la primera sesión, los alumnos prepararon el material que utilizarían posteriormente; elaboraron en cartulina 20 cuadrados de color azul, de 10 cm. de lado; 20 cuadrados de color rojo, de 1 cm. de lado; y 20 rectángulos de color verde, de 10 cm. de largo y 1 cm. de ancho. Estas figuras se llamaron  $a^2$ ,  $b^2$  y  $ab$  respectivamente y se utilizaron posteriormente para pavimentar superficies de cuadrados específicos.

La actividad de la segunda sesión consistió en construir gráficamente cuadrados de dimensiones predeterminadas, expresadas en términos de  $a$  y  $b$ , y pavimentarlos con las figuras de los tres colores. Por ejemplo, debían construir gráficamente un cuadrado de lado  $a + b$  y luego pavimentarlo con un cuadrado grande, uno pequeño y dos rectángulos. Para desarrollar esta actividad, los alumnos debían tener en cuenta las siguientes condiciones simultáneas: la longitud del lado del cuadrado debía ser constante:  $a + b$  y se debían emplear figuras de los tres colores. De esta misma manera se desarrollaron cinco ejercicios variando la longitud del lado del cuadrado, por ejemplo,  $2a + b$ ,  $a + 2b$ ,  $2a + 2b$ . Mientras los alumnos y las profesoras trabajábamos unos colegas realizaron la observación de algunos grupos y llenaron una planilla que se les había entregado con anterioridad.

Durante la tercera sesión se llevó a cabo una puesta en común y después cada alumno redactó una carta a un amigo imaginario de la misma edad y de los mismos intereses en la cual daba respuesta a los interrogantes: ¿cómo se sintió en la actividad?, ¿fue interesante la actividad?, ¿de qué se trató la actividad?, ¿la actividad le pareció fácil o difícil? Las cartas contienen todos los pormenores de álgebra y geometría de la actividad y transmiten los sentimientos y dificultades de los estudiantes.

## OBSERVACIÓN DE LA ACCIÓN EN LA PRÁCTICA

La observación del trabajo de los alumnos fue ante todo una interpretación de su comportamiento. Los aspectos observados, en seis grupos de dos estudiantes, fueron: actitud frente a la tarea propuesta por los profesores, capacidad de análisis, capacidad de abstracción, comunicación y conocimientos. Este proceso se llevó a cabo durante el desarrollo de la actividad por parte de los alumnos.

Los observadores fueron docentes de matemáticas y estudiantes de grado superior, en un total de seis. El instrumento utilizado fue una tabla de observación donde se marcaban con una "x" los aspectos que se daban y se abría la posibilidad de incluir nuevos aspectos.

La observación permitió concluir que a 88% de los estudiantes le agradó la actividad, 66% mostró seguridad y trabajó en equipo, 77% comprendió lo que tenía que hacer, sólo 11% planeó la construcción de los cuadrados, 44% agrupó términos semejantes, 44% utilizó correctamente las

variables, 66% se comunicó matemáticamente y 55% diferenció área de perímetro.

## CONCLUSIONES

En lo que sigue exponemos algunas conclusiones con respecto a cuatro asuntos: el logro del objetivo propuesto, el diseño de la actividad, nuestros alumnos y nosotras mismas.

### Logro del objetivo propuesto

Al leer las cartas escritas por los alumnos al final de la actividad y analizar sus trabajos, tuvimos la certeza de que casi todos ellos comprendieron las expresiones algebraicas porque las pudieron asociar con los conceptos geométricos: en los varios casos que se les presentaron, expresaron el área total de los cuadrados como la suma de áreas parciales por medio de expresiones algebraicas. Sin embargo, pensamos que el objetivo se cumplió parcialmente, porque a algunos alumnos se les dificultó el uso de las expresiones algebraicas, ya que no tenían claridad entre los conceptos de área y perímetro y otros no dibujaron cuadrados sino rectángulos.

Consideramos que las actividades desarrolladas permitieron a los alumnos establecer las conexiones entre la matemática como una totalidad y la forma como se debe afrontar un problema de matemática.

### Diseño de la actividad

La actividad se desarrolló en el tiempo previsto. Detectamos algunas fallas en el diseño de ella, lo que nos permitirá mejorarla y ampliarla para cubrir otros temas. Por ejemplo, utilizamos cuadrados para realizar las áreas, pero se pueden utilizar también rectángulos para generalizar un poco más el concepto de área y perímetro. Adicionalmente, la actividad se puede aprovechar para explicar y trabajar diferentes operaciones con expresiones algebraicas. Además es importante relacionar los problemas y ejercicios con aspectos de la vida real que involucren más a los estudiantes y faciliten la comprensión de ellos.

### Nuestros alumnos

Al leer las cartas de la evaluación nos dimos cuenta de que a todos los alumnos les gustó la actividad, porque era una forma diferente de desarrollar la clase, les llamó la atención el material utilizado y en general estuvieron muy motivados. Un aspecto bastante significativo fue la comunicación que los alumnos establecieron para exponer y compartir sus ideas, y el esfuerzo que hicieron para expresar de diversas formas lo relacionado con la actividad; en particular, fue una sorpresa ver que al describir la actividad, usaron términos matemáticos.

## **Nosotras mismas**

Desde el momento mismo en que se diseñó la actividad hasta la reflexión final sobre la misma, nuestra actitud como maestras cambió sustancialmente. Existe en nosotras, ahora más que antes, una preocupación constante por nuestros alumnos que trasciende los aspectos involucrados en la clase. Además, sentimos inmensa alegría al leer las cartas de nuestros alumnos cuando decían que la actividad había sido agradable para ellos.

Reflexionar sobre la práctica docente es una labor bastante difícil, pero agradable y enriquecedora, pues hay un cuestionamiento del trabajo diario, de las satisfacciones y de los sinsabores del quehacer cotidiano en las aulas de clase. Para nosotras escribir sobre nuestra práctica pedagógica es un proceso nuevo que implica un reto pues no tenemos la costumbre de hacerlo.

## **REFERENCIAS**

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- Kilpatrick, J., Gómez, P., y Rico, L. (1995). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

# UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS DE PRIMER GRADO<sup>1</sup>

HERNÁN RIVERA Y GUILLERMO BARÓN  
COLEGIO RAMÓN B. JIMENO

*Este artículo presenta una propuesta para la enseñanza de ecuaciones algebraicas de primer grado. Se hace referencia a las dificultades que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado y se presenta una reflexión sobre la enseñanza del tema. La propuesta que se expone parte del supuesto de que es necesario desarrollar procesos en los que el estudiante mismo construya sus propios modelos de ecuación y emplee sus propios métodos de solución como base para que la solución de ecuaciones lineales cobre sentido para él.*

## INTRODUCCIÓN

Entre los profesores de matemáticas de secundaria se observa un denominador común: hacen protestas y comentarios ácidos sobre un gran número de alumnos que presentan un nivel matemático deficiente y hay malestar general porque los resultados que logran con su trabajo docente no son los que esperan. Los profesores del colegio Ramón B. Jimeno, de la capital colombiana, no somos la excepción en ese aspecto. Con frecuencia argumentamos que los estudiantes tienen escasa fundamentación, poca asimilación de conocimientos, bajo nivel de conceptualización y poco interés en la materia, situación que nos lleva muchas veces a sentir que estamos perdiendo el tiempo en nuestra labor docente y que urge una solución drástica.

En las reuniones de departamento, luego de la lluvia de lamentaciones, hemos planteado diversas soluciones. Hay que “repassar” los contenidos matemáticos al iniciar cada curso; se debe clasificar el grupo de alumnos de acuerdo con su nivel de comprensión; hay que motivar a los estudiantes diariamente; el profesor debe cambiar su actitud en el aula: debe proponer juegos y actividades de tipo “gimnasia matemática”, etc. Hemos aplicado varias de estas soluciones en el aula, pero después de un tiempo se observa que las deficiencias continúan.

En el año 1995, en una de las reuniones semanales del departamento, el jefe comentó la posibilidad de participar en una experiencia de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, proyecto al que convocaba

---

1. Este artículo fue editado por Cristina Carulla, investigadora de “una empresa docente”.

“una empresa docente” centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes. Con relativo entusiasmo se hicieron comentarios en pro y en contra de la participación del colegio. Algunos profesores consideraban de suma importancia hacerlo; otros, por el contrario, pensaban que sería una de las tantas conferencias o seminarios que poco o nada aportaría a la solución del problema que se estaba viviendo en el colegio. Sin embargo, en reuniones posteriores, se decidió la participación del colegio y fue así como, quienes escribimos este artículo, representamos al colegio en ese proyecto.

Al iniciar el proyecto se nos invitó a identificar un error típico de los alumnos en un tema matemático específico de alguno de los cursos que teníamos a nuestro cargo y a plantear algunas hipótesis acerca de lo que considerábamos que podía ser la razón de ese error. El centro del proyecto era hacer una reflexión que condujera al diseño de una secuencia de actividades de aprendizaje con el objetivo de tratar el error y la dificultad identificados.

Al momento nos vino a la mente una gran variedad de situaciones. Sin embargo, evocamos muy insistentemente uno de los problemas más frecuentes que los profesores de química, física y matemáticas de los grados superiores aducen. Los alumnos no saben resolver ecuaciones y, sobre todo, cometen errores en el momento en el que hacen transposición de términos. Conviene resaltar que al iniciarse el curso de matemáticas en los niveles 9°, 10° y 11°, se considera pertinente realizar refuerzos sobre el tema de ecuaciones. Con este fin se efectúa una gran cantidad de ejercicios individuales y grupales. Sin embargo, en forma continua y sistemática, se vuelven a encontrar los mismos errores. Teniendo en cuenta esto consideramos la posibilidad de implementar el proyecto en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

El proyecto no se pudo realizar completamente por falta de tiempo. Aunque diseñamos una secuencia de actividades e implementamos una parte de ella con los estudiantes, no tenemos resultados de los efectos de la implementación que podamos sustentar formalmente. En este artículo vamos a exponer la actividad que diseñamos junto con algunas reflexiones que la fundamentan.

## **REFLEXIÓN PREVIA AL DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**

Propusimos a los profesores del departamento de matemáticas de nuestro colegio que identificaran los errores típicos que, con más frecuencia, come-

ten los estudiantes de los niveles 9° y 10° al resolver ecuaciones lineales. La siguiente tabla resume las respuestas dadas:

$$ax + b = c \Rightarrow x = b + c/a$$

$$ax + b = c \Rightarrow x + b = c/a$$

$$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$$

$$ax + b = c \Rightarrow x = (c - b)/(-a)$$

Al iniciar nuestro proceso de investigación sobre los errores frecuentes del estudiante en la solución de ecuaciones de la forma  $ax + b = c$ , fuimos conscientes de una posible confusión de los estudiantes con el símbolo de igualdad. No es fácil ni automático que el alumno procese en qué momento este símbolo deja de asociarse con el resultado de una operación aritmética para asociarse con una equivalencia. Una expresión como  $3x + 5 = 17$  ya resulta demasiado abstracta para un estudiante que está comenzando a manejar los conceptos de álgebra. La situación se hace más crítica cuando posteriormente debe aplicar propiedades de la igualdad para solucionar ecuaciones o hacer transposición de términos; la confusión se hace mayor ya que no necesariamente asimila los cambios bruscos que se han originado en la expresión inicial, por ejemplo, para llegar a las expresiones  $3x + 5 + (-5) = 17 + (-5)$  y  $3x = 17$ . Aunque algunos estudiantes logran amoldarse y realizan sin problema aparente los pasos que llevan a la solución de la ecuación, sí pueden tener problemas si les planteamos la ecuación inicial en la forma  $17 = 3x + 5$ . Este cambio en el orden de los elementos de la igualdad que componen la ecuación los puede hacer sentirse perdidos y entonces no saben qué es lo que deben hacer.

Al preguntarnos por las razones que pueden explicar los errores mencionados anteriormente, vemos que la forma como presentamos usualmente el tema de las ecuaciones lineales a los estudiantes puede ser una causa importante. Tradicionalmente, para enseñar el tema se comienza hablando acerca de igualdad, incógnitas, constantes, equivalencia, transposición de términos, etc. Puesto que esa forma de introducir el tema no representa situaciones concretas para el estudiante, tal vez eso contribuye a ocasionar errores permanentes en su manejo cotidiano, entre los que se pueden destacar el mal manejo de la aplicación de las propiedades, el pésimo uso de la transposición de términos y la eliminación de las incógnitas (resumen de los errores que hemos identificado antes). Y, esa es una situación que nos sorprende pues en la mayoría de los casos, los profesores creemos que debemos presentar los temas a los estudiantes siguiendo muy de cerca la estructura formal de los temas para que los entiendan. Que el estudiante llegue a asimilar un tema es algo complejo que necesita construirse a través de un proceso. No es posible exigir desde el principio del

proceso el manejo diestro del discurso y la interpretación simbólica puesto que ello puede representar para el estudiante sólo una serie de términos inconexos y sin ningún significado concreto. Así pues, vemos que muchas de las situaciones inapropiadas de enseñanza se originan en las creencias que los profesores tenemos sobre el tema y en la fidelidad a los esquemas tradicionales que hemos venido perpetuando.

Con base en la reflexión anterior consideramos que para que la solución de ecuaciones lineales cobre sentido real para el estudiante es necesario desarrollar procesos en los que él mismo construya sus propios modelos de ecuación y emplee sus propios métodos de solución. Ello facilitará posteriormente el entendimiento más claro de los procesos básicos.

En el desarrollo del proyecto PRIME I, pusimos en práctica una sencilla secuencia de actividades de enseñanza para introducir al estudiante en el mundo de las ecuaciones, partiendo de situaciones matemáticas concretas, elementales y de fácil manejo por parte de todos los alumnos del grupo, lo que permite una participación masiva, incluyendo la de los “lentos” en la clase de matemáticas. Esto último acaba, por lo menos parcialmente, la paternidad matemática que existe frecuentemente en los diversos grupos y que origina una situación incómoda en el trabajo de la clase de matemáticas.

La secuencia de actividades que describimos en la próxima sección busca crear un clima propicio para que el estudiante desarrolle su creatividad construyendo conceptos que les hemos repetido diariamente sin que se observe un progreso real en el estudiante. También se busca que el estudiante construya significado para conceptos tales como incógnita, variable, constante, igualdad, identidad, ecuación, solución de ecuaciones, y que a través de su propio enfoque generalice métodos de solución adecuados a su realidad y que posteriormente pueda comprender los métodos formales de solución.

## LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PROPUESTA

El objetivo principal de la actividad es que el estudiante desarrolle su propio método de resolución de una ecuación lineal, para después llegar a un acuerdo sobre cuál es el mejor método y cuál es el que se utilizará en el curso.

Bajo el supuesto de que el estudiante va, poco a poco, llenando de significado el proceso de resolución de una ecuación lineal a través de encontrar números que satisfagan ciertas condiciones —de diferente grado de dificultad— la secuencia de actividades que hemos diseñado consta de tres partes. En la primera, se pide al estudiante que encuentre dos números cuya suma sea un determinado número. En la segunda, se pide encontrar el número que sumado con uno dado da un cierto número. En la tercera, se

plantean dos tipos de tareas: encontrar dos números cuyo producto sumado con un número dado sea un número determinado; y, encontrar un número que multiplicado por uno dado y sumado con otro número conocido origine un cierto número.

A continuación describimos con algún detalle cada una de las tareas anteriormente mencionadas y comentamos cómo vemos que se podrían cambiar según el nivel de los estudiantes y según variaciones de los objetivos que se persigan.

### **Primera parte**

El enunciado de la tarea es:

- 1) En cada caso encontrar todas las parejas de números —que pueda— que cumplan con la situación planteada. Hacer la lista de soluciones. (Para responder cada caso tiene un tiempo limitado).
  - a. La suma de ellos es  $a$ .<sup>2</sup>
  - b. La diferencia de ellos es  $a$ .
  - c. El producto de ellos es  $a$ .

Se plantean varios casos de cada situación, para cuya solución los estudiantes deben trabajar individualmente y disponen de 1, 2, 3, ó, 5 minutos según la complejidad dada por el tamaño de los números o por la naturaleza misma de la situación. Al finalizar esta actividad se les sugiere trabajar en grupos para responder las siguientes tres preguntas:

- 1) Para cada caso, decir cuántas soluciones encontró.
- 2) Según su criterio, ¿cuántas soluciones se pueden hallar?
- 3) Trate de explicar los métodos que utilizó para determinar las soluciones.

Con esta primera parte de la actividad se busca motivar a los estudiantes; por esta razón se deben escoger cantidades de fácil manejo, por ejemplo, números naturales. Según el nivel de los estudiantes, se puede trabajar con números naturales más grandes y con números racionales no naturales. En tales casos sería interesante observar las reacciones y formas de proceder del estudiante en relación con otros casos más sencillos.

### **Segunda parte**

El enunciado de la tarea es:

- 1) Resolver las situaciones propuestas: encontrar los números que satisfagan las siguientes condiciones. (Para encontrar cada solución se dará un tiempo determinado).

---

2. Para este y todos los ejercicios que se proponen en esta secuencia, se trabaja con cantidades conocidas.

- a. La suma de ellos es  $a$  y uno de los sumandos es  $b$ .
- b. El minuendo es  $a$  y la diferencia es  $b$ .
- c. El sustraendo es  $a$  y la diferencia es  $b$ .
- d. Uno de los factores es  $a$  y el producto es  $b$ .

Se plantean varios casos de cada situación, para cuya solución los estudiantes deben trabajar individualmente y disponen de un tiempo que el profesor determina en cada caso. Al finalizar esta actividad se les sugiere trabajar en grupos para responder las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cuántas soluciones encontró en cada caso?
- 2) Busque una forma simbólica de representar cada situación planteada.
- 3) Describa el método que utilizó para encontrar los números en cada caso.

Esta actividad le permite al estudiante ver y trabajar situaciones cuya solución no es tan inmediata como las de la tarea anterior. Con esta tarea, los estudiantes están obligados a manejar procesos más complejos y a buscar un método de solución.

Después de esta tarea conviene recoger las ideas de los estudiantes y hacer una discusión que permita, en conjunto, unificar cuáles son las mejores formas de proceder. Para ello se propone hacer una puesta en común de las tareas realizadas, analizando aspectos tales como el grado de dificultad de los ejercicios, las formas de representación de las situaciones y los métodos de solución. En esta discusión vemos como muy importante anotar y resaltar cada uno de los procesos utilizados por el estudiante con el fin de solidificar más adelante el manejo de las ecuaciones.

### Tercera parte

El enunciado de la tarea es:

- 1) Representar matemáticamente las siguientes situaciones y encontrar el resultado.
  - a. Multiplique a  $a$  por  $b$  y súmele o réstele  $c$  al resultado.
  - b. Divida el número  $a$  por  $b$  y adiciónale o réstele  $c$ .

En esta parte según el criterio del profesor se plantearán más situaciones similares y con cantidades más o menos complejas, según las observaciones realizadas en cada una de las sesiones.

- 2) Encontrar los números que satisfacen las condiciones indicadas:
  - a. Si se multiplica por  $a$  y al resultado se le suma o se le resta  $b$  se obtiene  $c$ .
  - b. Al dividir el número por  $a$  y sumarle o restarle  $b$  se obtiene  $c$ .

Después de que individualmente hayan realizado la tarea anterior, se les sugiere que trabajen en grupo para responder las siguientes dos tareas.

- 3) Escriban en palabras la forma que utilizaron para hallar la solución.
- 4) Busquen formas apropiadas de representar simbólicamente cada problema y su solución.

Realizar una plenaria sobre las diversas alternativas de representación y solución de la ecuación, invita a los alumnos a perfeccionar y mejorar los métodos. La idea es llegar a la formulación de un modelo que se pueda utilizar para la solución de una ecuación lineal.

## CONCLUSIONES

Por lo general, el desarrollo de la enseñanza tradicional del tema de ecuaciones lineales no deja en el estudiante sino algoritmos y procesos mecánicos que éste rápidamente olvida. Los errores típicos que comete el estudiante cuando soluciona una ecuación lineal son posiblemente resultado de la confusión que se le presenta al ver la ecuación como una serie de incógnitas y constantes entrelazadas sin un fin predeterminado. La resolución de una ecuación no tendrá significado para el estudiante hasta que sea el producto de una actividad dinámica, donde él genere sus propios modelos en el proceso de solución de una situación problemática. Esto lo logrará siempre y cuando las situaciones que se le presenten tengan significado concreto para él.

En la enseñanza del tema de solución de ecuaciones es necesario utilizar un lenguaje apropiado y sin ambivalencias para evitar las confusiones que se suelen presentar con términos tales como igualdad, identidad, equivalencia y que generan caos en el proceso de aprendizaje del estudiante.

Aunque no observamos sistemáticamente los efectos de la implementación de la secuencia de actividades que se presenta en este artículo, por los resultados que observamos informalmente en lo que se refiere a la actitud del estudiante y a su desempeño en las tareas concretas, tenemos la sensación de que esta propuesta puede contribuir de manera importante a que el alumno dé significado a las ecuaciones lineales y además a su solución.

Nos queda pendiente para una siguiente oportunidad la implementación de esta propuesta y la observación, análisis e interpretación de los resultados que con ella logremos para continuar depurándola.

# UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN COSENO<sup>1</sup>

MARGARITA LASCANO Y ROSA RAMÍREZ  
COLEGIO DISTRITAL RODRIGO LARA BONILLA

*Este artículo reporta un trabajo de investigación-acción realizado en torno a la enseñanza y aprendizaje de la función coseno en un grupo de alumnos de bachillerato. La propuesta de enseñanza enfatiza la importancia del empleo de un instrumento manipulable que facilita la construcción de significado del correspondiente tópic.*

## INTRODUCCIÓN

La investigación-acción que aquí se reporta es un primer esfuerzo para buscar estrategias de enseñanza que promuevan el desarrollo del pensamiento de alto nivel en nuestros estudiantes. Comenzamos con una pequeña experiencia en la enseñanza de la función coseno. Se realizó un diagnóstico a los estudiantes de grados décimo y undécimo, y a los profesores del área de matemáticas de la institución con la intención de identificar errores y dificultades en el manejo del tema y de sus prerrequisitos. Posteriormente, se diseñó una secuencia de enseñanza para tratar una dificultad específica en la comprensión del tema por parte de los estudiantes, se llevó a la práctica, y se observaron y analizaron los resultados obtenidos.

Al diseñar la secuencia tuvimos dos presupuestos:

- La construcción del conocimiento matemático es un proceso que trasciende las acciones que se representan con signos y símbolos, para encontrar la riqueza de relaciones entre los objetos matemáticos.
- “Hacer” matemáticas es experimentar, abstraer, generalizar y globalizar.

Con estas ideas en mente, quisimos diseñar una secuencia de enseñanza que le permitiera al estudiante empezar por la manipulación de un objeto (pensamiento concreto), después realizar la simbolización (pensamiento simbólico) y luego generalizar el concepto que había estado manipulando (pensamiento formal). En este artículo se presenta la experiencia vivida, los logros obtenidos y las dificultades encontradas en el desarrollo del trabajo.

---

1. Este artículo fue editado por Patricia Perry, investigadora de “una empresa docente”.

## CONTEXTO

La experiencia se desarrolló con un grupo de estudiantes de grado décimo, del Colegio Distrital Rodrigo Lara Bonilla en la jornada de la tarde. Este plantel está ubicado en Ciudad Bolívar, al suroccidente de Bogotá. Tiene una población de 200 estudiantes en grado décimo, con edades que oscilan entre los 15 y los 17 años. De estatus social medio-bajo, estos alumnos no presentan un grado importante de desnutrición; 15% de los estudiantes trabaja y estudia, 10% sostiene la familia, 6% es padre o madre de familia y 30% proviene del campo por causa de la violencia que allí se vive. Además, algunos son maltratados tanto física como psicológicamente por sus padres o adultos que los tienen a su cargo, y algunos se involucran en actividades de pandillas juveniles para sobrevivir en este medio. Tales características no son las más favorables para un ambiente óptimo de aprendizaje.

Además, se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la conceptualización de algunos temas en matemáticas y que hay desinterés y desmotivación hacia la materia. Esta situación hace que se presenten problemas en otras áreas que requieren de la utilización de conceptos matemáticos.

En el curso en el que se realizó la experiencia ya se había tratado el concepto de coseno como una razón trigonométrica en el contexto de los triángulos rectángulos. También, algunos conceptos relacionados con las funciones: función como un subconjunto de pares ordenados, dominio y recorrido y representación gráfica en el plano cartesiano.

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En nuestra labor como educadoras hemos visto que los estudiantes, al iniciar los estudios de trigonometría tienen dificultad en la apropiación de los conceptos relacionados con las funciones trigonométricas. Esto provoca en ellos una “matemafobia” y desinterés por la asignatura. Sin embargo, para aprobar las evaluaciones, los estudiantes memorizan dichos temas y mecanizan el desarrollo de muchos de los ejercicios que se les proponen sin tener en cuenta ni analizar el significado y aplicación de esos conceptos en otras áreas.

La prueba de diagnóstico nos corroboró que un error típico y quizás uno de los más sobresalientes en el tema, es que los estudiantes escriben igualdades del tipo  $\cos = a$ , donde  $a$  representa algún número. Esto refleja que ellos no conciben el coseno como un operador que se aplica sobre medidas de ángulos y por tanto tienen una comprensión deficiente del concepto de coseno.

Esta deficiencia parece transferirse al concepto de coseno como función y se refleja particularmente en errores relacionados con transformaciones de la función coseno, tales como:  $\cos(kx) = k\cos x$ ,  $y$ ,  $\cos(x+k) = \cos x + k$ .

Los resultados obtenidos en el diagnóstico y nuestra experiencia docente nos lleva a suponer que, en general, la dificultad de los estudiantes en este tema, dificultad que explica los errores mencionados, consiste básicamente en que no dan significado a la expresión  $f(x) = \cos x$ . Por tanto, consideramos pertinente construir un apoyo didáctico para fundamentar experiencias concretas que permitieran a los estudiantes tener una vivencia a partir de la cual pudieran elaborar el significado del concepto en cuestión.

## FUNDAMENTO DE LA ESTRATEGIA

Creemos que en el proceso de aprender se requieren experiencias en las que el estudiante se pueda involucrar de diversas maneras, que vayan desde manipular objetos concretos hasta manipular los símbolos con los que se representan las ideas matemáticas, todo ello con el propósito de dar significado a los conceptos y procedimientos matemáticos que centran la atención de las matemáticas en el colegio. Para el caso particular de la función coseno se tiene la hipótesis de que el estudiante puede construir un significado de la expresión  $f(x) = \cos x$ , por medio de su interacción con un instrumento ortogonal manipulable cuando realiza una serie de tareas propuestas por el profesor.

Dicho instrumento, cuya construcción se describe en el Apéndice, consta de dos cuadrados de cartulina, cada uno de 22 cm. de lado, que se superponen. En la cara superior hay dibujada una circunferencia unitaria — la unidad de medida es 5 cm. — cuyo centro es el origen de un plano cartesiano, también dibujado en la cara superior. A la circunferencia se le ha recortado  $1/4$  de ella, que corresponde a una porción del primer cuadrante del plano. Sobre el correspondiente arco de circunferencia se han marcado medidas de amplitudes de ángulos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , tal como se aprecia en un transportador. Sobre la parte positiva de los ejes hay escritos algunos valores del intervalo  $[0, 1]$  que representan algunos valores de la función coseno. Entre los dos cuadrados de cartulina hay insertado un mecanismo manipulable conformado por otro pedazo de cartulina y un pedazo de papel mantequilla. En el pedazo de cartulina —sujeto al cuadrado inferior— hay señalado un plano cartesiano cuyo origen coincide con el centro de la circunferencia. Sobre el pedazo de cartulina está colocado el pedazo de papel mantequilla en el que hay dibujado un plano cartesiano cuyo origen se puede deslizar sobre el arco de circunferencia para formar infinidad de triángulos rectángulos para los cuales la hipotenusa es uno de los ejes del plano dibujado en el pedazo de cartulina del mecanismo manipulable; un cateto es uno de los ejes dibujado en el pedazo de papel mantequilla, que cae perpen-

dicularmente sobre alguno de los ejes del plano dibujado en el cuadrado de cartulina, y el otro cateto es la proyección ortogonal correspondiente.

Consideramos que el valor del empleo del instrumento radica en que para cada triángulo rectángulo que el estudiante construya, él puede asociar la razón trigonométrica —que maneja previamente— con el valor del coseno visto como la abscisa de la proyección del punto de corte de la hipotenusa y la circunferencia, sobre el eje X. Además, al poder construir sucesivamente diversos triángulos rectángulos y encontrar para cada ángulo agudo un valor correspondiente para la abscisa de la proyección, el estudiante puede experimentar la noción de variación para la función coseno. La actividad física y mental que el estudiante debe realizar para responder la guía de trabajo que se le proponga, utilizando el instrumento, le permite pasar de una representación concreta a una representación simbólica con lo cual se inicia la abstracción de la relación funcional y se abre el camino para la construcción de la gráfica cartesiana de  $f(x) = \cos x$ .

Suponemos que la estrategia pedagógica —uso del instrumento para desarrollar la guía de trabajo— permite que el estudiante, por medio de una manipulación concreta, alcance la comprensión de un objeto matemático abstracto,  $f(x) = \cos x$ . Al utilizar el instrumento, el estudiante puede observar las características del objeto matemático cuyo significado se está construyendo; en particular, puede “ver” la existencia de un ángulo de  $0^\circ$  y los valores del coseno para los ángulos de  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Además, el instrumento propicia una actitud de búsqueda y de ensayo de caminos. Estas actitudes son coherentes con lo que suponemos es “hacer” matemáticas y se alejan de las que propicia una concepción autoritaria de la enseñanza que privilegia una sola forma de entender y aprender.

Así, pues, lo que esperamos es aproximar al estudiante al desarrollo de sus capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal. El instrumento tiene utilidad práctica ya que permite codificar información (asociar amplitudes de ángulos con el valor del coseno) y proporciona una comprensión, entendida como un proceso a través del cual el alumno relaciona (conexión) un *objeto de comprensión* (el concepto  $f(x) = \cos x$ ) con una *representación* del mismo (simbólica y gráfica) y con sus *modelos mentales* (preconceptos). El proceso descrito anteriormente pretende apuntar al logro de los fines y metas de la educación matemática que propone Rico (1995, p. 13).

## PROPUESTA SECUENCIAL DE LA ENSEÑANZA

A continuación se describe la secuencia de actividades que se desarrolló con los estudiantes para abordar el problema de la falta de significado de la expresión  $f(x) = \cos x$ . Se presentan también las observaciones más importantes registradas en torno al desarrollo de las actividades.

## Primera actividad

Esta actividad tuvo dos partes. Con ella se pretendía favorecer el pensamiento concreto de los alumnos. Se inició con la construcción del instrumento ortogonal manipulable, para lo cual se entregó a cada alumno una guía con las correspondientes instrucciones (ver Apéndice). Enseguida, se explicó el uso del instrumento. Durante esta primera actividad se observó que cuando los alumnos manipularon el instrumento pudieron ver claramente cómo un triángulo rectángulo que mantiene constante la longitud de su hipotenusa, modifica la longitud de sus catetos según la variación de las amplitudes de sus ángulos agudos.

La segunda tarea se centró en la utilización del instrumento por parte de los alumnos para construir ciertos triángulos rectángulos y así establecer la medida de la longitud de uno de los catetos (el adyacente al ángulo considerado); además, se pidió a los alumnos que representaran las situaciones correspondientes gráficamente. En esta actividad se trabajaron triángulos rectángulos de  $45^\circ$  y de  $65^\circ$ . También se preguntó el valor del cateto adyacente para un ángulo de  $0^\circ$  y uno de  $90^\circ$ . Con respecto a la construcción de los dos triángulos y a la respuesta a la pregunta sobre la medida del cateto adyacente se obtuvo 90% de aciertos, lo cual indica que los estudiantes pudieron identificar y construir triángulos rectángulos para casos específicos y también pudieron asociar la medida del cateto adyacente con la abscisa de la proyección del punto de corte (del arco de circunferencia con la hipotenusa del triángulo) sobre el eje X. Con respecto a encontrar el valor del cateto adyacente para los ángulos de  $0^\circ$  y  $90^\circ$  se obtuvo 60% de aciertos, lo cual nos indica que no todos lograron realizar la proyección para esos casos especiales.

## Segunda actividad

En la primera parte de esta actividad se plantearon dos tipos de preguntas que debían ser respondidas con la ayuda del instrumento: dado el valor del ángulo —no mayor de  $90^\circ$ , se pedía calcular el correspondiente valor del coseno; y dado el valor del coseno (entre 0 y 1), se pedía determinar el valor del ángulo. En estos ejercicios, la pregunta se formuló empleando tanto la expresión verbal como la simbólica, por ejemplo:

- 1) El coseno del ángulo de  $22^\circ$  es \_\_\_\_;  $\cos 22^\circ =$  \_\_\_\_
- 2) El coseno del ángulo  $\beta$  es 0.8,  $\cos \beta = 0.8$ ;  $m(\beta) =$  \_\_\_\_

En la segunda parte de la actividad se introdujeron dos formas de notación relacionadas: por un lado,  $\cos x = y$ , y por otro lado, la notación en términos de pareja ordenada,  $(x, \cos x)$ . Se plantearon doce situaciones en las que se daba diferente tipo de información y los alumnos debían utilizarla para completar lo que faltara, por ejemplo:

1)  $\cos 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ ; ( $45^\circ$ ,  $\underline{\hspace{2cm}}$ )

2)  $\cos \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ; ( $270^\circ$ ,  $0$ )

Con esta actividad se pretendía que el alumno llegara a relacionar dos formas de representación simbólica. Dado el valor del ángulo, hallar el valor del coseno se dio con acierto en un porcentaje de 78%. Esto indica que los alumnos fueron capaces de hallar el valor de la proyección y relacionar ese valor con el valor del coseno. Dado el valor de la proyección, identificar uno de los ángulos (arcocoseno) se presentó con un porcentaje de 53%. La diferencia en los porcentajes de acierto frente a los dos tipos de preguntas nos hace pensar que una buena proporción de alumnos no tiene completamente desarrollado el pensamiento reversible. Con respecto a la tarea en que se les pidió completar las parejas según el modelo, 53% de los estudiantes no presentó dificultad; esto indica que pudieron relacionar el valor del ángulo y el valor de la proyección ortogonal como una pareja ordenada  $(x, \cos x)$  y expresarla como  $\cos x = y$ , es decir como una función donde el valor de  $y$  depende del valor del ángulo.

En esta tarea se plantearon casos en los que debían buscar el coseno de ángulos mayores de  $90^\circ$  y casos en los que debían encontrar un ángulo cuyo coseno es negativo; esto tenía la intención de presentar al alumno situaciones en las que tuviera la necesidad de buscar una forma de calcular los valores sin la ayuda directa del instrumento pero con base en el método dado para ángulos del primer cuadrante. En el primer caso, los estudiantes no presentaron dificultad para completar las expresiones tales como  $\cos 120^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$ ; ( $120^\circ$ ,  $\underline{\hspace{1cm}}$ ). En el segundo caso, casi la totalidad del grupo presentó dificultad. Para calcular, por ejemplo, el valor del ángulo  $x$  en la expresión  $\cos x = -0.3$  buscaban el valor del ángulo del primer cuadrante para el cual su coseno es 0.3 —más exactamente, buscaban el punto de corte de ese ángulo con la circunferencia y luego consideraban su opuesto en el segundo cuadrante; pero, como en el instrumento el correspondiente arco de circunferencia no estaba graduado, no podían deducir el valor del ángulo. Ante esa dificultad, ellos recurrían al uso de la calculadora pero como no sabían introducir datos negativos, decidieron calcular arcocos 0.3 y tomaban como respuesta del ejercicio que estaban realizando el opuesto del valor que hallaban.

### **Tercera actividad**

En la tercera actividad se pidió a cada alumno que construyera, sobre un pliego de cartulina, la gráfica cartesiana de la función coseno. Se les sugirió que todos trabajaran con una misma escala y que comenzaran por ubicar las parejas ordenadas que habían encontrado en la actividad anterior. Unieron los puntos ubicados y así lograron la gráfica de la función para valores de la variable menores de  $90^\circ$ . Puesto que el instrumento ortogonal manipulable

con base en el cual se había trabajado hasta el momento está diseñado para ser utilizado en casos de ángulos no mayores de  $90^\circ$ , la determinación de otros puntos de la gráfica, se hizo con base en preguntas formuladas por el profesor a todo el curso, que buscaban que los alumnos transfirieran lo hecho hasta ese momento. Al final de ese proceso, 86% de los alumnos tenía construida la gráfica de la función coseno para valores del ángulo entre  $-360^\circ$  y  $360^\circ$ . Con esto se pretendía que los alumnos alcanzaran un mayor nivel de globalización del concepto de la función coseno.

Frente a esta actividad, los estudiantes mostraron una actitud positiva: todos tenían su material completo y se preocuparon por entregar el trabajo de la mejor manera posible. Gracias a que todos estaban utilizando la misma escala para hacer la gráfica, los alumnos fueron capaces de corregir un error que presentaba la guía de trabajo. La mayoría de los alumnos pudieron argumentar con facilidad y propiedad en la puesta en común sobre las características de la función y entender que el valor de la función coseno lo da la abscisa de la proyección del punto de corte del radio del círculo goniométrico con la circunferencia, medida que depende del valor de la amplitud del ángulo en cuestión.

Entendieron con facilidad por medio del instrumento, por qué el coseno de  $0^\circ$  es igual a 1 y el coseno de  $90^\circ$  es igual a 0, ya que pudieron verlo concretamente. Además esta actividad despertó la necesidad de trabajar la operación inversa de la función coseno (arcocoseno) y aunque no se llegó a la simbolización el estudiante entendió el concepto y con esto consideramos que se favoreció el desarrollo de su pensamiento reversible. También se observó que al trazar la curva, los estudiantes tienden a hacer trazo rectilíneo, es decir, unir dos puntos consecutivos por medio de una línea recta. Cuando se les pidió que generalizaran las características de la gráfica para los ángulos negativos concluyeron que ella es simétrica con respecto al origen.

Después de terminada la representación gráfica se formularon tres preguntas acerca de la función, preguntas que debían poder responder al interpretar la representación gráfica hecha anteriormente. Se encontró que 97,9% de los alumnos identificó el dominio, el rango, el valor máximo y el valor mínimo de la función. Esto nos da indicios acerca de la interiorización del concepto de función coseno y el establecimiento de un significado.

Sin previo aviso se realizó una evaluación del trabajo por medio de una prueba escrita. El resultado obtenido fue satisfactorio: 77% de los estudiantes alcanzó el objetivo. Consideramos que este porcentaje es alto si se tiene en cuenta el contexto en que se ha venido desarrollando el estudiante y que la evaluación fue realizada sorpresivamente y no inmediatamente a la terminación de la actividad cuando estaban trabajando otro tema.

## CONCLUSIONES

Puesto que la matemática es una ciencia cuyos objetos son abstracciones mentales, su enseñanza requiere de referentes concretos a través de los cuales sea posible la manipulación de dichos objetos para lograr esas abstracciones. De acuerdo con los resultados obtenidos, la actividad realizada con el instrumento ortogonal manipulable permitió a los estudiantes observar, comparar, construir, relacionar y analizar el comportamiento y características de un objeto matemático encontrándole un sentido.

Esto nos demuestra que como educadores en matemáticas, debemos ser creativos en la búsqueda de alternativas que permitan a los estudiantes caminar por los diferentes niveles del pensamiento y superarlos para llegar a una comprensión del conocimiento matemático en una forma más dinámica, interactiva y útil. Un trabajo de los educadores en este sentido, además, permite hacer notar a los estudiantes que los datos y objetos obtenidos no forman parte de una invención arbitraria de la mente del profesor sino que son reales, que los estudiantes mismos pueden construir tales objetos con sus propios recursos y que el maestro está allí sólo para orientar mas no para transmitir un recetario porque sí.

Como conclusiones del trabajo que hemos realizado en este proyecto hemos comprendido varios puntos.

En primer lugar, al tener un referente concreto (el instrumento manipulable) los alumnos tienen oportunidades de desarrollar los niveles del pensamiento lógico-formal como son: el concreto, el simbólico y la generalización; pueden involucrar juicios, interpretar, comprender, y apropiarse de un conocimiento (función coseno). Con la manipulación de un instrumento que sirva de apoyo para construir un objeto matemático (función coseno) el estudiante puede desarrollar un manejo coherente e inteligente del conocimiento matemático.

En segundo lugar, al abordar un tema suponemos que los estudiantes tienen las estructuras mentales necesarias para la comprensión de dicho tema y esto no siempre es así, por lo tanto cada vez que se pretende que los alumnos adquieran una nueva estructura de conocimiento es necesario buscar estrategias para que vayan asimilando niveles progresivos hasta llegar a las estructuras mentales necesarias para comprender el concepto.

En tercer lugar, un cambio de actitud de los maestros y la implementación de nuevas estrategias contribuye a que los alumnos se apropien de una manera más fácil del conocimiento; además la clase se hace más activa y agradable. Ahí tenemos nuestro mayor reto.

## REFLEXIÓN FINAL

Realizar esta experiencia de investigación-acción nos llevó a leer, a consultar e investigar en diferentes campos: lo psicológico, lo cognitivo, lo didáctico; a retomar el objetivo de la enseñanza de las matemáticas; y a reflexionar sobre nuestro quehacer diario como educadoras. La participación en este proyecto nos ha hecho varios aportes, entre ellos, despertar la consciencia acerca de:

- la importancia de tomar al estudiante como persona que está en pleno desarrollo de sus potencialidades;
- la necesidad de no partir de supuestos erróneos como el pensar que todos los estudiantes, por estar en décimo grado y tener edades que oscilan entre 15 y 18 años, ya tienen desarrollado el pensamiento formal y por tanto no requieren de experiencias concretas;
- la importancia de dominar el conocimiento matemático que se enseña.

Los profesores estamos acostumbrados a realizar en el aula acciones pedagógicas que son evaluadas sin dejar ningún registro escrito de manera que ese trabajo se pudiera retomar para mirar errores, dificultades y logros que podrían conducir a mejorar la enseñanza. Escribir este artículo nos llevó a tener una visión más real de cada una de las actividades, los logros alcanzados, las dificultades encontradas, y a vislumbrar posibles modificaciones que enriquezcan la estrategia.

Agradecemos a “una empresa docente”, en especial a Paola Valero y a Patricia Perry por la colaboración y apoyo que nos brindaron en una forma muy amable.

## REFERENCIAS

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 1*, 4-24.

## APÉNDICE

**Tema:** Construcción del instrumento ortogonal manipulable.

**Objetivo:** Elaborar el instrumento ortogonal manipulable.

**Material:** Medio pliego de cartulina, tijeras, papel mantequilla, elementos de geometría y broches de presión, cinta pegante.

**Actividad**

- 1) Corta dos cuadrados de cartulina de 22 cm. de lado. Llámalos A y B.
- 2) Haciendo centro en el centro de la pieza B, traza un círculo de radio 5 cm. (esta medida será la unidad de longitud en el instrumento).
- 3) Divide el círculo en cuatro regiones congruentes, dibujando un plano cartesiano cuyos ejes coincidan con los ejes de simetría horizontal y vertical del cuadrado. Sobre el eje X positivo escribe “proyección ortogonal de la hipotenusa sobre X”. Sobre el eje Y positivo escribe “proyección ortogonal de la hipotenusa sobre Y”.
- 4) Recorta un cuarto de círculo (esto dará lugar al primer cuadrante del instrumento). Sobre ese arco marca amplitudes de ángulos centrales de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Sobre el eje X positivo del cuarto de círculo recortado marca los valores correspondientes a las décimas de unidad.
- 5) Corta un rectángulo de cartulina de 10 cm. por 14 cm. Llámalo C. En esa pieza dibuja un plano cartesiano de ejes paralelos a los bordes de ella y de origen un punto que puede estar a 6 cm. del borde superior y a 5 cm. del borde izquierdo. Sobre el eje X positivo, localiza un punto a 5 cm., llamado C’.
- 6) Corta un cuadrado de papel mantequilla de 14 cm. de lado. Llámalo D. En esa pieza dibuja un plano cartesiano de ejes paralelos a los bordes de ella y de origen un punto que puede estar a 6 cm. del borde inferior y a 5 cm. del borde derecho.
- 7) Para unir las piezas construidas procede de la siguiente manera:
  - a. En el centro de la pieza A, ubica el centro del plano cartesiano de la pieza C. Unelas con un broche.
  - b. Une, por medio de un broche, el origen del plano cartesiano de la pieza D con el punto C’.
  - c. Coloca la pieza B sobre la pieza D, de tal manera que coincida el eje X positivo de B con el eje X negativo de D.
  - d. Pega con cinta las piezas A y B por el borde superior.