SISTEMAS FORMALES INFORMALMENTE

¿POR QUÉ INTENTARON FORMALIZAR A LA MATEMÁTICA SI ERA TAN BUENA MUCHACHA?

PEDRO GÓMEZ
CRISTINA GÓMEZ

una empresa docente **Universidad de los Andes**

Bogotá, 1999

SISTEMAS FORMALES INFORMALMENTE *¿Por qué intentaron formalizar a la matemática si era tan buena muchacha?*
Autores: Pedro Gómez y Cristina Gómez

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel.: (57-1) 284-9911 ext. 2717.
Fax: 3520466 ext. 2709
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

Primera edición: febrero de 1990
Segunda edición: enero de 1992
Primera reimpresión: febrero de 1999

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-07-2

Impreso en Colombia

TABLA DE CONTENIDO

Introducción

La corriente formalista de las matemáticas, cuya noción central es la de sistema formal, constituye un intento de fundamentar el conocimiento matemático sobre una base sólida que garantice su validez absoluta y universal. Las matemáticas siempre han gozado de la reputación de ser la ciencia más exacta y rigurosa; aquella que más se ha acercado al ideal de un conocimiento absoluto y cuya verdad está más allá de toda duda. A través de la historia se han dado varios intentos de justificar las pretensiones de verdad de las matemáticas.

En sus comienzos, en las civilizaciones antiguas del cercano Oriente, las matemáticas se caracterizaron por su orientación práctica y por su exitosa aplicación a la resolución de problemas concretos. Los matemáticos griegos, quienes recibieron una importante influencia de sus antecesores egipcios y babilonios, dieron, sin embargo, a las matemáticas un carácter distinto. Ellos no se contentaron con que el conocimiento matemático fuera corroborado por la experiencia, sino que trataron de organizarlo en forma de sistema deductivo; así se originó el método axiomático, cuyo ejemplo más acabado dentro de las matemáticas griegas lo constituye la obra "Elementos" de Euclides.

Durante el siglo XIX y los comienzos del siglo XX se descubrieron en diversas ramas de las matemáticas (la geometría, el análisis infinitesimal, la teoría de conjuntos) algunos resultados y paradojas que chocaban contra la intuición y que causaron una fuerte controversia. Dentro de este contexto surgieron varios programas para la revisión crítica de los fundamentos de las matemáticas, uno de los cuales, quizá el más influyente, fue el formalismo, que con la ayuda de su noción fundamental de sistema formal, pretendió sentar el conocimiento matemático sobre una base firme e incontrovertible.

Las páginas que siguen, al introducir de manera sencilla el concepto de sistema formal, permiten mostrar el papel que este concepto puede jugar en diversos campos de las matemáticas y de la ciencia. Adicionalmente, al considerar en cierto detalle algunas de estas áreas y mostrar la relación que es posible establecer entre una realidad y el sistema formal que la modela, el libro pretende desarrollar en el lector, al menos parcialmente, las capacidades de abstracción y simplificación necesarias para el análisis de realidades complejas. Por otra parte, este conjunto de temas buscan preparar al lector para la compresión intuitiva de uno de los resultados más importantes de la historia y la filosofía de las matemáticas de este siglo: el teorema de Incompletitud de Gödel.

El primer capítulo es un drama en tres actos sobre las aventuras y vicisitudes de los sistemas axiomáticos y formales. *El acertijo de MU* presenta los elementos de un sistema formal y allí se establece un lenguaje común. *Producir los números, Fractales, Juego de vida, Sistemas formales y el lenguaje, El método axiomático, Los sistemas sociales y las matemáticas, Un ejemplo de axiomatización y Sistemas axiomáticos* son los temas en los que se presenta el proceso de modelaje. El orden en que se presentan corresponde, no al desarrollo histórico que han tenido sino al grado de dificultad, comenzando con un sistema puramente formal (sin semántica) hasta llegar a las definiciones de consistencia e independencia en un sistema axiomático.

Los últimos capítulos: *Regreso al futuro III, El final de la historia, Observaciones sobre la demostración de Gödel y El teorema de Gödel a través de acertijos* retoman la parte histórica del desarrollo de la formalización matemática y el resultado de Gödel: el teorema de Incompletitud.

El libro es el resultado de nuestra experiencia en el diseño e implementación de los cursos de matemáticas para ciencias sociales en la Universidad de los Andes (en especial en el curso Matebásica) y del interés que muchas personas nos han manifestado en este tema. Además de tener propósitos de divulgación, el libro ha sido diseñado de tal manera que pueda ser utilizado como libro de texto en el último ciclo de bachillerato y el primer ciclo universitario.

Queremos agradecer a todas las personas que leyeron las pruebas, en especial a los miembros de "una empresa docente".

Finalmente, un reconocimiento especial para nuestro amigo Raúl Meléndez autor de los capítulos: *¿Por qué intentaron formalizar a la matemática si era tan buena muchacha?, Sistemas axiomáticos, Regreso al futuro III, El final de la historia, Observaciones sobre la demostración de Gödel* y *El teorema de Gödel a través de acertijos*.

¿Por qué intentaron formalizar a la matemática si era tan buena muchacha?

Tragicomedia en tres actos

por Raúl Meléndez

En el primer acto un egipcio, un babilonio y un griego discuten sobre la prioridad en la invención de las matemáticas y del método axiomático. Cada personaje da un ejemplo de las matemáticas desarrolladas dentro de su civilización. Al final se enfatiza sobre un aporte fundamental de los matemáticos griegos: ellos han transformado la matemática práctica y empírica de sus antecesores egipcios y babilonios en una matemática deductiva y axiomática.

El segundo acto trata acerca de cómo el descubrimiento de las geometrías no euclidianas influye en la formación de una concepción moderna de las matemáticas y, en particular, de lo que es un sistema axiomático.

En el tercer acto un joven muy formal señala las limitaciones del método axiomático tal como fue desarrollado por Euclides y expone su concepción sobre la filosofía formalista de las matemáticas.

Personajes *(por orden de aparición)*:

Ahmés: Fue un escriba egipcio, quien hacia el año 1700 a.c. copió un texto con más de 80 problemas matemáticos. El papiro copiado por Ahmés se conoce hoy como papiro Rhind (pues fue encontrado en 1858 en Luxor, Egipto, por un anticuario escocés llamado Henry Rhind) y es uno de los pocos testimonios de la matemática egipcia que ha sobrevivido hasta nuestros días.

Ciro: Ciudadano común y corriente de la antigua Babilonia, que era muy aficionado a las matemáticas. Para no confundirlo con el rey persa Ciro el Grande lo llamaremos Cirito.

Euclides: Geómetra griego quien vivió en Alejandría hacia el año 300 a.c. Su gran fama se debe a que fue el autor del más célebre texto matemático de todos los tiempos: los Elementos. En esta obra compuesta por trece libros, Euclides recopiló y organizó en forma deductiva el conocimiento geométrico y aritmético de su época.

Nicolás Ivanovich Lobachevski: Geómetra ruso nacido en 1793 y muerto en 1856. Fue profesor de matemáticas y rector de la Universidad de Kazan. Su aporte más importante a las matemáticas fue el descubrimiento de una geometría no euclidiana. Este importante descubrimiento fue realizado simultánea e independientemente por el matemático húngaro Janos Bolyai.

David Hilbert: (Königsberg, 1862 - Göttingen, 1943) Uno de los matemáticos modernos más influyentes y universales. Su obra, en especial lo que se refiere a la fundamentación formalista de las matemáticas, tiene también un gran interés filosófico.

El lector: Joven y abnegado estudiante quien, a pesar de aparecer muy fugazmente en el drama, es el gran protagonista y es quien más trabaja detrás de la escena.

El autor: También es llamado a veces “la cuchilla” (hay aún otros apelativos que no nos atrevemos a repetir aquí). Es el antihéroe de la obra, ya que si ésta tiene un desenlace trágico, sobre él recae toda la responsabilidad. Pero si el final es feliz es el lector el que se lleva todos los créditos.

Primer acto

Un conflicto en el Cercano Oriente

En un remoto día del siglo III a. C., en algún rincón de la ciudad de Alejandría, se encuentran el babilonio Cirito, el egipcio Ahmés y el griego Euclides. Mientras caminan, Ahmés contempla absorto unos amarillentos papiros.

Cirito: ¿Qué lees con tanto interés, Ahmés?

Ahmés: Estos papiros contienen una compilación de problemas matemáticos, algunos de los cuales datan de hace más de tres mil años.

Euclides: ¿Problemas matemáticos de hace más de tres mil años? Creo que usas con demasiada liberalidad el término “matemático”, pues en sentido estricto las matemáticas nacen con nosotros los griegos. Antes de Tales y Pitágoras no existía la ciencia, solamente mitos e ideas místicas arcaicas.

Cirito: Lo siento, pero estás cometiendo el error de desconocer una importante tradición científica que existió en Babilonia y Egipto milenios antes del tal Tales.

Ahmés: Sí, y para no enfrascarnos en una discusión bizantina (¡si me perdonas el anacronismo!) consideremos la evidencia que tengo en mis manos.

> *Ahmés muestra orgulloso los polvorientos papiros. Euclides y Cirito los miran con asombro.*

Euclides: ¡Bueno... descifrar jeroglíficos siempre me ha parecido camelludo!

Ahmés: Voy a traducir uno de los problemas con su solución. Dice textualmente:

> "Reparte 10 sacos de cebada entre 10 hombres, de modo que la diferencia entre la parte de cada hombre y la de sus vecinos sea 1/8 de saco.
>
> La parte media (que resultaría de una repartición equitativa) es 1, el resto es 9. Se toma la mitad de la diferencia 1/8, lo que da 1/16. Multiplicando 1/16 por 9 se obtiene 1/2 + 1/16. Añade a 1/2 + 1/16 la parte media y obtendrás la parte más grande. A ella tendrás que restar sucesivamente 1/8 para obtener las demás".

Puede ser que mi traducción todavía se asemeje demasiado a un jeroglífico pero dejemos a nuestro lector que lo descifre e interprete. Con seguridad tras 23 siglos de historia él contará con métodos muy sencillos para resolver problemas como el anterior.

Cirito: Yo también quisiera mostrarles un testimonio de nuestro conocimiento matemático. Pero para ello tendrán que acompañarme unos metros hasta donde dejé estacionado mi camello.

> *Se dirigen hacia allá, donde Cirito descarga de su camello unos voluminosas tabletas de arcilla llenas de enigmáticas incisiones en forma de cuña (escritura cuneiforme). El camello respira aliviado y Cirito deja desplomar las tabletas frente a los pies de Euclides.*

Euclides: ¡Cuidado con esas piedras! ¿No tienes otra manera de hacerme sentir el peso de vuestro saber científico, que arrojándomelo encima de mi talón de Aquiles?

Cirito: Déjate de ironías y más bien atiende a este bello ejemplo. Aquí está formulado y resuelto el siguiente problema:

> "Tengo dos terrenos A y B. En el primero cada 3 unidades de área producen dos medidas de cereal. En el segundo cada 3 unidades de área producen una y media medidas de cereal. Del terreno A obtengo 500 medidas de cereal más que del terreno B. El área de los dos terrenos juntos es igual a 1800 unidades de área. ¿ Cuál es el área de cada terreno?
>
> Si los terrenos tuviesen igual tamaño, o sea, si cada uno tuviera 900 unidades de área, entonces en A se producirían 600 medidas de cereal y en B 450. Entonces en A se obtendrían 150 medidas de cereal más que en B. Pero la verdadera diferencia es 500. Por cada 3 unidades de área que añado a A y que resto a B, obtengo 2 medidas más en A y 1,5 medidas menos en B. La diferencia se agranda entonces en 3,5 medidas. Como debo agrandar la diferencia de 150 medidas de cereal en 350 medidas para llegar a la verdadera diferencia, entonces debo añadir 100 x 3 unidades de área a A y restar 100 x 3 de B. Por lo tanto A mide 1200 unidades de área y B mide 600."

Creo que los ejemplos que hemos mostrado bastan para comprobar que la matemática existía mucho antes de los griegos.

Euclides: Me parece que hay aquí un malentendido. Lo que vosotros llamáis "matemáticas" no es más que una serie de recetas prácticas para la resolución de problemas particulares. Pero una ciencia matemática propiamente dicha debe estar constituida por un sistema ordenado de teoremas, los cuales se demuestran mediante la argumentación lógica a partir de ciertos principios que se asumen sin demostración. En otras palabras la matemática se caracteriza por la utilización del método axiomático, que ha sido creado por los griegos.

Cirito: ¿Teoremas? ¿Método axiomático? ¡Ciertamente eso es puro griego para mí!

Euclides: Te lo explicaría en buen cristiano, de no ser porque Cristo tardará aún tres siglos en nacer. De todas maneras trataré de ser más claro. La matemática pre-griega, de la cual me habéis dado dos ejemplos, es una actividad de orientación totalmente práctica, ligada a problemas concretos como la medición de la tierra, la repartición de bienes y otros similares. Para resolverlos se han desarrollado procedimientos adecuados. Sin embargo, antes de nosotros los griegos, no existe la intención de formular estos procedimientos como afirmaciones de validez general, ni la preocupación por inquirir acerca del POR QUE ellos son correctos. La matemática griega, en cambio, es una ciencia teórica y deductiva, que está liberada de consideraciones prácticas y empíricas. Para justificar una afirmación matemática no es suficiente el hecho de que ella esté corroborada por casos particulares sino que hay que establecerla como teorema. Es decir, hay que demostrarla mediante la argumentación lógica a partir de otros teoremas que a su vez hayan sido demostrados. Y puesto que una demostración no puede ser circular o extenderse indefinidamente, se ha de partir de ciertos primeros principios tan claros y evidentes que se puedan asumir sin necesidad de demostrarlos. A estos principios los llamamos definiciones, axiomas y postulados y todos los teoremas son deducidos lógicamente de ellos. En lo anterior consiste, a grandes rasgos, el método axiomático. Para dar una ilustración a éste, consideremos el comienzo del primer libro de los "Elementos":

> El primer libro de los "Elementos" comienza enunciando los supuestos básicos que se dividen en 3 grupos: definiciones, axiomas y postulados.
>
> Definiciones: (citaré sólo algunas)
>
> 1. Un punto es aquello que no tiene partes.
>
> 2. Una línea es longitud sin anchura.
>
> 3. Una línea recta es una línea que reposa igualmente sobre sus puntos.
>
> 15. Un círculo es una figura plana contenida por una línea de forma que todos los segmentos rectos

que van de ésta a un punto llamado centro son iguales.

Postulados:

1. Dados dos puntos distintos se puede trazar una línea recta que pase por ellos.

2. Todo segmento finito de recta se puede prolongar indefinidamente en ambas direcciones.

3. Dado un centro y una distancia se puede trazar un círculo con ese centro y esa distancia como radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una recta corta a otras dos rectas de modo que los ángulos interiores en un mismo lado suman menos de dos rectos, entonces las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan en el lado en el que los ángulos suman menos de dos rectos.

Axiomas:

1. Si dos cosas son iguales a una tercera, entonces son iguales entre sí.

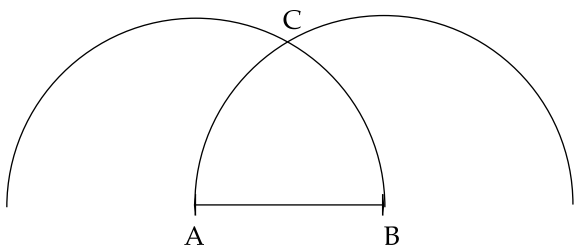
2. Si a iguales se les suman iguales, los resultados son iguales.

3. Si a iguales se les restan iguales, los resultados son iguales.

4. Cosas que coinciden una con otra son iguales.

5. El todo es mayor que la parte.

Proposición 1. Construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado.



> Sea AB el segmento dado.
>
> Con centro en A y radio AB se traza un círculo. (Postulado 3)
>
> Con centro en B y radio AB se traza un círculo. (Postulado 3)
>
> Desde el punto C, donde se cortan los círculos, se trazan los segmentos de recta CA y CB. (Postulado 1)
>
> AC es igual a AB y BC es igual a AB. (Definición 15)
>
> Entonces AC es igual a AB. (Axioma 1)
>
> Por lo tanto el triángulo ABC es equilátero.

Esto es, pues, una hermosa aplicación del método axiomático y la creación de este método representa el verdadero despertar de la matemática. ¿Cirito?

Cirito: zzzzz....

Euclides: ¿Ahmés?

Ahmés: zzzzz....

Euclides: Bueno, es un consuelo que en esta discusión los interlocutores terminen dormidos, pero no muertos o sin ojos como en las tragedias griegas. Ojalá los conflictos del Cercano Oriente terminasen siempre tan apaciblemente.

Segundo acto

Una discusión sin paralelo (¿o con muchos paralelos?)

Una remota tarde de mediados del siglo pasado, los geómetras Euclides y Lobachevski pasean por la calles de Kazan (Rusia). Mientras camina, Euclides ojea orgulloso un ejemplar de los "Elementos".

Lobachevski: ¿Qué lees con tanto interés, Euclides?

Euclides: Este es el libro científico más perdurable que jamás se haya escrito. Es realmente digno de admiración, que los "Elementos" sean aún hoy, más de 2000 años después de su aparición, un modelo insuperable de razonamiento lógico.

Lobachevski: Lo han sido hasta hace poco, a pesar de sus deficiencias.

Euclides: Bueno... un par de incorrecciones de estilo no le restan ningún mérito a esta obra sin par.

Lobachevski: Yo me refiero a sus deficiencias lógicas. No pongo en duda la importancia de los "Elementos", pero luego del descubrimiento de las geometrías no euclidianas surge una nueva concepción de la geometría y del método axiomático, que obligará a mirar esa gran obra con ojos algo más críticos.

Euclides: ¿Geometrías no euclidianas? Jamás imaginé que pudiera existir algo con ese nombre.

Lobachevski: Se trata de una larga historia. Podríamos comenzarla dándole un vistazo a los cinco postulados del libro I de los "Elementos". Al compararlos atentamente, ¿no encuentras algo digno de observar?

Euclides: No, realmente no; salvo que el quinto es un poquillo más largo que los demás.

Lobachevski: No sólo un poquillo más largo, sino también más complicado y menos evidente. Y si se desea construir la geometría sobre la base de supuestos sencillos y evidentes, entonces debería ser posible demostrar este quinto postulado a partir de los otros cuatro, o, por lo menos, a partir de hipótesis más simples. Tus mismos contemporáneos ya habían advertido esto y desde entonces cientos de matemáticos trataron infructuosamente de demostrarlo. Finalmente, en este siglo, hemos llegado al reconocimiento de que el quinto postulado es independiente de los demás supuestos euclidianos, o sea, que no se puede probar a partir de ellos.

Euclides: Bien, creo que esto que me cuentas confirma plenamente lo acertado de incluirlo como uno de los supuestos indemostrados de la geometría.

Lobachevski: Puede ser. Pero al mismo tiempo se reconoció que este postulado puede ser sustituido por otros, los cuales, pese a que son incompatibles con él, dan lugar a otras geometrías distintas a la euclidiana, mas no menos válidas que ésta.

Euclides: Justamente ahí es donde me pierdo.

Lobachevski: Considera primero todas las hipótesis de los "Elementos" excepto el problemático quinto postulado. Si a estos añades el quinto postulado se obtiene un sistema axiomático que corresponde a la geometría euclidiana, que tú conoces mejor que nadie. Supón ahora que en vez de añadir el tal postulado agregas la siguiente proposición, que podemos llamar postulado de Lobachevski:

"Dada una recta L y un punto P exterior a ella se puede trazar más de una paralela a L que pase por P".

Euclides: Pero, ¿cómo vas a considerar algo tan obviamente falso como postulado?

Lobachevski: ¿Claramente falso? ¿Podrías demostrarme que es falso? Antes de que saques tu regla y compás te aseguro que no podrás hacerlo, pues al añadir esta nueva hipótesis se obtiene un sistema axiomático lógicamente consistente, (es decir, que no implica ninguna contradicción) que corresponde a un nuevo tipo de geometría, una geometría no euclidiana a la que podemos llamar geometría de Lobachevski. En ella se pueden probar teoremas que chocan contra nuestra intuición pero que son lógicamente coherentes. Se puede probar, por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos rectos.

Euclides: ¿Cómo? Antes de que tus razones me ocasionen una terrible jaqueca, creo que podemos zanjar rápidamente esta discusión. En tu ilusoria geometría los ángulos interiores de un triángulo suman más de dos rectos mientras que en la euclidiana suman exactamente dos rectos, como he demostrado ya hace más de 20 siglos. Pues bien, nada más sencillo que determinar cuál de los dos es verdadero.

Euclides busca dificultosamente algo entre los pliegues de su túnica y maldice porque los griegos tuvieron el ingenio suficiente para inventar el método axiomático pero ¡no lograron inventar los bolsillos! Finalmente su mano aparece con un pequeño objeto.

Lobachevski: ¿Un transportador? ¡No me digas que vas a establecer la verdad de tu geometría con un transportador!

Euclides enrojece y esconde tímidamente el pequeño objeto.

Euclides: Bueno... este... yo...

Lobachevski: Tú, que afirmas con orgullo que fueron los griegos quienes liberaron a la matemática de consideraciones empíricas y la transformaron en una ciencia deductiva, no puedes venirme ahora con que la geometría se fundamenta en mediciones empíricas. Justamente de vosotros los griegos hemos aprendido que la matemática se basa en la argumentación lógica y no en la experiencia.

Euclides: Vaya. ¡Resultaste más platónico que el mismo Platón!

Lobachevski: No me gusta mucho adentrarme en honduras filosóficas. En todo caso es innegable que el descubrimiento de las geometrías no euclidianas tiene profundas implicaciones para la concepción moderna de los sistemas axiomáticos. Una muy importante es que en la elección de los axiomas de un sistema deductivo, lo fundamental no es que éstos sean evidentes o que correspondan a la realidad empírica, sino que sean lógicamente consistentes, esto es, que sirvan de base para un sistema que no contenga contradicciones lógicas. Dicho de otra manera, "la validez de un sistema axiomático no se basa en su verdad externa u objetiva sino en su coherencia lógica interna". Así es como se tienen varios sistemas geométricos que se excluyen mutuamente, pero cada uno tomado individualmente es perfectamente coherente. En este sentido se puede afirmar que la geometría pura es la ciencia de los espacios posibles, no del espacio real.

Hay también otro punto que me parece importante señalar. Se refiere a los términos básicos de una teoría axiomática. Así como hay que partir de supuestos indemostrados, también deben existir términos no definidos a partir de los cuales puedan definirse todos los demás; de lo contrario las definiciones se volverían circulares o se extenderían interminablemente. En los "Elementos" no se ha reconocido la necesidad de los términos indefinidos. Allí se define, por ejemplo, punto como "aquello que no tiene partes", línea como "longitud sin anchura" y línea recta como "aquella que reposa igualmente sobre sus puntos". Pero cabría preguntar ¿cómo se define "parte", "longitud", "anchura", "reposar igualmente"? Además estas definiciones no se utilizan en la definición, lo que las hace totalmente superfluas.

En un sistema axiomático los términos básicos deben pues permanecer indefinidos y su significado está apenas implícitamente determinado por las relaciones que éstos deben cumplir y que están estipuladas en los axiomas. Naturalmente, puede ocurrir que los axiomas no determinen de manera unívoca el significado de los términos básicos que en ellos aparecen, pero justamente es esta ambigüedad la que le da una gran riqueza al sistema axiomático, pues ella implica que los términos no definidos pueden interpretarse de diversas maneras, dando lugar así a a distintos modelos que satisfacen los axiomas.

Es así como se han dado diferentes interpretaciones y modelos que corresponden a las distintas geometrías no euclidianas; modelos en donde dada una recta L y un punto P exterior a ella, o bien se pueden trazar infinitas paralelas a L pasando por P o bien no se puede trazar ninguna paralela. Te podría describir con mayor detalle estos modelos pero será mejor dejarlo para otra ocasión. Comprendo muy bien que alguien recién llegado de la Grecia Antigua deba realizar un esfuerzo muy grande para comprender estas cuestiones. Noto ya que mis abstractas explicaciones te han cansado y...Euclides...¡Euclides!

Euclides: zzzz.....

Tercer acto

Conversación con un joven formal

Universidad de Göttingen, comienzos de los años 30.

Euclides: ¿Qué lees tan atentamente Hilbert?

Hilbert: Es un ejemplar de mi libro "Fundamentos de la Geometría". Con él he logrado finalmente liberar a la geometría euclidiana de sus errores lógicos.

Euclides: ¿Otro? Definitivamente más me hubiera valido haberme quedado tranquilo, reposando en la soledad de mi tumba.

Hilbert: ¿Decías?

Euclides: No... nada... sólo hablaba para mis adentros.

Hilbert: Como te venía explicando, en este libro se presenta un sistema axiomático para la geometría euclidiana que satisface las más estrictas exigencias modernas de rigor lógico.

Euclides: ¿Insinúas que los "Elementos" no son lo suficientemente rigurosos?

Hilbert: Hablando con justeza no lo son. Y para darse cuenta de ello no es preciso ir más allá de la primera proposición del libro I. En ella se plantea el problema de construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado. La construcción se realiza así:

Dado el segmento AB, se trazan dos círculos de radio AB con centros en A y en B respectivamente. El punto de intersección M se toma como el tercer vértice del triángulo equilátero buscado.

Euclides: Sí, sí. Conozco bien la construcción y me parece totalmente clara e irreprochable.

Hilbert: Bien, entonces me podrías responder ¿qué postulados o axiomas garantizan la existencia del punto de intersección M?

Euclides: Bueno... este... yo... Que el punto M existe se sigue fácilmente de la figura.

Hilbert: Ajá... de la figura. Entonces se trata aquí de una mostración y no de una demostración. Justamente ese es el punto que quería enfatizar: una demostración rigurosa no puede apoyarse en la intuición visual de la figura. Los únicos ojos que se podrían usar, serían los ojos del intelecto puro, si me permites la metáfora. Lo que ocurre en la primera proposición del libro I de los Elementos ocurre una y otra vez a lo largo de los trece libros. Así pues, el gran edificio de la geometría euclidiana fue levantado sobre la base de la intuición visual de las figuras; si ésta tambalea, se viene abajo todo el edificio. Y si hay algo que haya tambaleado en la historia reciente de las matemáticas es precisamente la intuición, la cual ha despertado una gran desconfianza entre los matemáticos, por lo menos entre aquellos que merecen su nombre. Tanto es así que se ha llegado a hablar incluso de una "crisis de la intuición" provocada por el reciente descubrimiento de varios resultados anti-intuitivos y paradójicos. Te podría dar algunos ejemplos, pero eso implicaría entrar en detalles que alargarían demasiado nuestra conversación y no quiero aburrirte demasiado.

Al escuchar esta frase Euclides interrumpe un amplio bostezo, el cual permite presagiar cómo será el final de esta animada discusión.

Hilbert: Quizá el ejemplo más significativo en este sentido sea el descubrimiento de las geometrías no euclidianas.

Euclides: Sí. Ya he escuchado suficiente acerca de eso y créeme que no necesitas extenderte al respecto.

Hilbert: Tanto mejor. La idea central que quiero hacerte entender es que si se desea fundamentar el conocimiento matemático sobre bases firmes, no se puede apelar a la engañosa y controvertida intuición. Más bien, se debe recurrir al formalismo y a su noción central, es decir, a la noción de sistema formal. Con la ayuda de los sistemas formales se puede despojar a la matemática de su contenido empírico, intuitivo y revelar así su estructura formal.

Euclides: ¿Formalismo? ¿Sistemas formales? Ya estoy anticipando un dolor de cabeza mayor que el de las geometrías no euclidianas.

Hilbert: ¿Cómo dices?

Euclides: Nada. Sólo estaba pensando en voz alta.

Hilbert: Bien. Entonces continúo. La noción de sistema formal es un perfeccionamiento del método axiomático y constituye su grado supremo de abstracción. Para comprender mejor cómo surge esta noción podemos examinar la evolución del método axiomático, la cual ha consistido esencialmente en una eliminación creciente de su contenido empírico e intuitivo. En esta evolución se pueden distinguir tres fases:

Primero la fase de la axiomática intuitiva. En una teoría axiomática intuitiva, cuyo ejemplo más logrado es, sin duda, los "Elementos", se aislan ciertos conceptos y enunciados que se asumen como principios fundamentales, de los cuales pueden deducirse todos los demás. Lo característico de estos principios es que se consideran como evidencias que corresponden a la realidad empírica. Y las deducciones no son estrictamente lógicas, sino que, como ya hemos visto, poseen un carácter intuitivo.

La segunda fase es la de las axiomáticas abstractas. El paso importante que se da aquí consiste en que en un sistema axiomático abstracto, lo esencial no es que sus axiomas y teoremas se adecúen a la experiencia, sino que formen un todo lógicamente consistente. Además los conceptos básicos permanecen indefinidos, lo cual implica una cierta indeterminación que posibilita diversas interpretaciones y modelos posibles de la teoría. Sin embargo, en la formulación de los axiomas, teoremas y demostraciones se hace un amplio uso del lenguaje natural y las reglas lógicas de deducción no se presentan de manera explícita. Y en el uso informal del lenguaje natural y de reglas de deducción asumidas implícitamente, se pueden dar resquicios a través de los cuales podría colarse inadvertida y subrepticiamente la intuición.

En la tercera fase, la de los sistemas formales puros se trata de remediar esto mediante la utilización de un lenguaje simbólico y formal que no contenga referencias a objetos de la realidad empírica. Un ejemplo ayuda a aclarar esto: en una axiomatización intuitiva de la geometría euclidiana los conceptos básicos de punto y línea recta se definen de manera que correspondan a nuestra concepción intuitiva de ellos. Dentro de una axiomatización abstracta estos conceptos permanecen indefinidos y pueden recibir una interpretación que no concuerde con nuestra intuición. Sin embargo, en los axiomas aún aparecen las palabras "punto" y "recta", las cuales sugieren de antemano una determinada interpretación. Esto puede inducir al error de usar en las demostraciones propiedades que habitualmente se le asignan a estos conceptos, pero que no están establecidas explícitamente en los axiomas. Para evitar esto se puede introducir un lenguaje simbólico que no sugiera ningún significado intuitivo. Entonces, en vez de escribir "la recta l pasa por el punto A" se podría escribir "F(l,A)", donde F podría interpretarse como la relación "pasar por", pero también podría interpretarse de cualquier otra manera, siempre y cuando la interpretación satisfaga los axiomas. Todos los axiomas y teoremas del sistema deben ser pues hileras de símbolos de un lenguaje formal que debe ser definido desde un comienzo. Además, en un sistema formal se deben formular explícitamente todas las reglas de deducción que no son otra cosa que las maneras en que se permite manipular y transformar las hileras de símbolos a las que se les ha dado el nombre de axiomas, para así obtener otras hileras llamadas teoremas.

Entonces, un sistema formal puro consiste esencialmente de lo siguiente:

a) Un lenguaje simbólico y una descripción sin ambigüedades de aquellas hileras de símbolos que son consideradas dentro del sistema (a éstas se les suele llamar "hileras bien formadas"),

b) Un conjunto bien definido de hileras bien formadas a las que se les da el nombre de axiomas y

c) unas reglas precisas para transformar hileras bien formadas, mediante las cuales se pueden derivar de los axiomas otras hileras llamadas teoremas.

A primera vista podría parecer que los sistemas formales son simples juegos con símbolos que carecen por completo de significado pero esto no es cierto, pues los símbolos admiten interpretaciones que los dotan de sentido. Según mi parecer, los sistemas formales son una herramienta tan poderosa, que sirve para fundamentar el conocimiento matemático. Se podría objetar que formalizar la matemática equivale a despojarla de todo su contenido y a convertirla en una mera manipulación mecánica y trivial de símbolos. Pero yo soy de otra opinión. Yo creo que con la formalización se llega en la matemática al ideal que el filósofo Leibniz soñaba: el de una "característica universal", es decir, una especie de lenguaje simbólico que fuese capaz de expresar todos los pensamientos y razonamientos humanos, incluso "aquellas quimeras que ni siquiera es capaz de entender el mismo que las enuncia".

Te noto algo callado Euclides. Me gustaría oír tu opinión... ¿Euclides?

Euclides: Zzzzzz...

Hilbert: Bueno por lo menos el lector si me habrá escuchado.¿ Señor lector?

El lector: Zzzzzz...

Hilbert: ¿Señor autor?

El autor: Zzzzzzz....

FIN DE LA OBRA

El acertijo de MU

Yo creo en las reglas del juego. Mire usted los niños cuando juegan. Para ellos el juego es una cosa muy seria. En mis cuentos hay muchas reglas del juego, una de ellas sucede en el Metro de París. Un hombre establece unas reglas del juego para seguir a una mujer. Es terrible puesto que las reglas deben ser respetadas. Son cosas que chicos y grandes se imponen y no se puede hacer una trampa porque si se hace una trampa se pierde todo el placer, excepto si se es tramposo. El juego es una estructura, una construcción mental en la que se tiene toda la libertad de actuar sin que se sobrepasen o se violen las reglas.

Julio Cortázar

En este capítulo se presentará un ejemplo de lo que hemos llamado "sistema formal puro". Con este ejemplo se pretende lograr cierta práctica en la argumentación formal, es decir, en la construcción de deducciones formales y, además, aclarar el significado de algunos términos a los que ya nos hemos referido en el capítulo anterior, tales como axioma, teorema, regla de deducción, demostración o deducción formal. Veremos cómo se utilizan estos términos en un ejemplo concreto de sistema formal puro.

El sistema que introduciremos carece de semántica. Esto quiere decir que los símbolos y las hileras formadas con ellos no reciben ninguna interpretación. Por esta razón podemos considerar a este sistema como un juego, valga decir, un juego formal con símbolos sin significado. En capítulos siguientes estudiaremos ejemplos de otros tipos de sistemas formales y axiomáticos de mayor alcance, en el sentido de que son sistemas que pretenden reflejar o modelar algún aspecto de la realidad: números y operaciones aritméticas, figuras geométricas, construcciones lingüística, teoremas geométricos,... Como se puede apreciar, los temas que pueden considerarse bajo la óptica de la formalización son muy diversos.

Elementos del juego

El juego que vamos a ver se llama el acertijo de MU. Para poder aprender a jugarlo se presentarán los ingredientes, las reglas y el propósito del juego.

Usted juega solo, con papel y lápiz y utilizando palabras, pero sólo está permitido usar las letras M, U e I para formar esas palabras. Dicho de otra manera las hileras bien formadas, que son las hileras que se consideran en el juego, son hileras o sucesiones formadas con las letras M, U e I. A estas hileras bien formadas las llamaremos palabras.

No es necesario que una palabra del juego tenga significado para que sea aceptada. Por ejemplo, MI y MUI son palabras del juego, mientras que PAB y SOL no lo son.

Las reglas del juego

El juego tiene las siguientes cinco reglas:

1. Toda palabra se puede triplicar.

Por ejemplo, a partir de MU se obtiene MUMUMU.

2. Una U se puede reemplazar por II.

Por ejemplo, a partir de IU se obtiene III. Usted debe ver que no puede aplicarse la regla 2 a algunas palabras.

3. Cuatro Ies seguidas se pueden eliminar.

Por ejemplo, de UIIIIM se obtiene UM.

4. Después de una M se puede insertar una U.

Por ejemplo, de MI se obtiene MUI.

5. Si en una palabra aparece IMU puede quitarse la M.

Por ejemplo, de MIMUM se obtiene MIUM.

Reglas acerca de las reglas

Usted debe haberse dado cuenta de que la regla 1 es diferente de las demás reglas. La regla 1 se puede aplicar a cualquier palabra. Para poder aplicar las otras reglas, la palabra en cuestión tiene que cumplir ciertas condiciones.

Otra característica de las reglas 2, 3, 4 y 5 es que existen palabras para las cuales la regla se puede aplicar de más de una forma. Por ejemplo en la palabra UMIU, la regla 2 se puede aplicar a la primera U (obteniéndose IIMIU) o a la segunda U (obteniéndose UMIII). En estos casos, quien esté jugando tiene que decidir dónde aplica la regla.

Utilizaremos las letras NA para indicar que la regla No se Aplica.

Transformando palabras

Resumimos aquí las reglas del acertijo de MU:

1. Toda palabra se puede triplicar.

2. Una U se puede reemplazar por II.

3. Cuatro Ies seguidas se pueden eliminar.

4. Después de una M se puede insertar una U.

5. Si en una palabra aparece IMU puede quitarse la M.

Ahora a trabajar: como usted habrá podido imaginarse, la idea es partir de una palabra y llegar a otra, aplicando las reglas adecuadas tantas veces como sea necesario. Por ejemplo, si se parte de MI, se puede llegar a MMI con la siguiente sucesión de aplicaciones de las reglas:

$$\text{MI} \xrightarrow{1} \text{MIMIMI} \xrightarrow{4} \text{MIMUIMI} \xrightarrow{5} \text{MIUIMI} \xrightarrow{2} \text{MIIIIMI} \xrightarrow{3} \text{MMI}$$

Note que hemos introducido una notación que permite mostrar el proceso por medio del cual, partiendo de una palabra, se llega a otra. Esta notación consiste en dibujar una flecha entre cada par de palabras y escribir encima de la flecha la regla que permite transformar la primera palabra en la segunda.

Ejercicio

Utilizando la notación que se acaba de proponer escriba el proceso que permite obtener, a partir de MI, cada una de las siguientes palabras:

MUIUIIIMUI	MUUIMIUI	MUUIUIMIII
MIM	MMI	MIIMUI
MIMMIMMIM	MIMU	MMUI
MUIM	MUMI	MIIIM
MIIIMII	MIIMI	MIIMIII
MIIMUUI	MIMII	MIMUU
MIU	MMIII	MMUUI

¿Hay que partir de la palabra inicial?

Supongamos que usted ha logrado producir la palabra MIII. Y que hemos aceptado que es una palabra válida. Y ahora usted produce la palabra MIIIII. Además se da cuenta de que esta segunda palabra se puede obtener a partir de MIII. ¿Hay necesidad de que usted nos diga cómo se obtiene MIIIII a partir de la palabra inicial? Fíjese que las palabras se pueden producir a partir de la palabra inicial, MI, o a partir de las que ya se han producido.

Ahora sí hay que encontrar al MU

Ahora sí: el acertijo de MU. Usted ya debe haberse imaginado de qué se trata: obtener MU a partir de MI.

Resuelva el acertijo de MU. Recuerde que no basta decir que logró hacerlo. Tiene que estar convencido de que lo hizo. Y para ello tiene que tener una prueba.

El vocabulario

Los nuevos términos que vamos a introducir son muy sencillos. Ya se ha hecho referencia a ellos en la sección anterior. En el caso del acertijo de MU estos términos tienen un significado particular que vamos a definir a continuación.

En cambio de hablar de palabra válida vamos a hablar de teorema.

En cambio de hablar de palabra inicial vamos a hablar de axioma.

En cambio de hablar de prueba vamos a hablar de demostración.

En cambio de hablar de reglas vamos a hablar de reglas de deducción.

Ejercicio

Utilizando los términos axioma y reglas de deducción, defina qué es un teorema y una demostración.

Detenerse un poco

Como siempre que uno tiene un problema que no logra resolver, es bueno tal vez que ahora nos detengamos un poco. La idea es pensar un poquito. Pensar sobre lo que hemos hecho hasta ahora; y, pensar sobre lo que podemos y debemos hacer de aquí en adelante para poder demostrar MU.

Para simplificar: en nuestra búsqueda del MU, ¿qué método hemos utilizado? ¿Hemos utilizado alguno? De hecho sí hemos utilizado alguno. Es el método al que una persona recurre de forma natural. Tal vez nos hemos dicho algo así:

> *Si queremos encontrar el MU, produzcamos tantos nuevos teoremas como podamos, aplicando las reglas a las palabras que van apareciendo. En algún momento aparecerá el MU dentro de nuestros teoremas. En ese momento habremos resuelto el acertijo de MU.*

Este es el método que hemos estado utilizando. Esperamos estar de acuerdo en que tal método, que podríamos bautizar como el método de trabajar a la loca, no es el más eficiente para lograr los objetivos del juego.

¿Qué otra cosa podríamos hacer? Y, ¿si nos salimos del sistema? El acertijo de MU es un juego. Un juego con reglas. Hemos estado utilizando estas reglas para lograr un objetivo al que todavía no hemos podido llegar. Pero hasta ahora, lo único que hemos estado haciendo es jugar el juego. Y, ¿si nos preguntáramos un poco acerca del juego mismo? Una manera de reflexionar acerca del juego que hemos estado jugando consiste en mirar los teoremas que tenemos hasta ahora.

Con seguridad, usted se dio cuenta de que: todos sus teoremas comienzan por M. Continuemos interrogando su curiosidad. Tal vez usted se ha dado cuenta de que los teoremas que ha demostrado no son todos los que existen. Es decir, es posible que usted se haya dado cuenta de que, además de los teoremas que ha logrado descubrir, hay otros que, aunque no los haya descubierto, podría (trabajando un poco más) descubrirlos.

Hemos visto que todos sus teoremas comienzan por M. ¿Nos basta con esto para afirmar que todos los teoremas (es decir, los que usted ha descubierto y los que usted podría descubrir si se pasara toda la vida jugando al acertijo de MU y usted fuera inmortal) comienzan por M?

¿Podemos entonces decir simplemente, a partir de lo que hemos descubierto, que los teoremas que nos quedan por descubrir van a tener las mismas características de los que hemos descubierto hasta ahora? Si todos los cisnes que usted ha visto hasta ahora son blancos, ¿puede usted decir que todos los cisnes que han existido, existen y existirán son blancos? De manera similar, el hecho de que usted crea que todos los teoremas comienzan por M, no significa que esto sea cierto.

Hay que demostrar la verdad de esta afirmación y, para ello, hay que encontrar un argumento que la sustente. ¿Dónde buscar este argumento? La respuesta debería ser obvia: en aquel lugar donde se producen los teoremas. Es decir, en el axioma y las reglas de deducción.

Ejercicio

Entonces aquí tiene un problema interesante: construya un argumento, a partir del axioma y de las reglas que demuestre que todos los teoremas del acertijo de MU comienzan por M. Una ayudita: considere el axioma y cada regla separadamente y demuestre la afirmación para cada una de ellos.

¿Y MU?

De manera similar podríamos demostrar que a partir de MI no se puede llegar a MU. Debemos analizar el axioma y cada una de las reglas para poder llegar a la conclusión. En este caso nos interesa analizar el número de Ies que tiene un teorema en este sistema formal. El número de Ies que tiene el axioma es impar, es 1. Todos los teoremas se producen aplicando las reglas al axioma o a los teoremas ya demostrados, así que veamos cómo cada regla afecta la paridad del número de Ies de los teoremas.

Regla 1: Toda palabra se puede triplicar. Esta regla se puede expresar en símbolos de la siguiente manera: ❏→❏❏❏, donde ❏ representa cualquier teorema ya demostrado. El número de Ies que hay en el teorema ❑ se triplica al aplicar esta regla, pero si era impar, sigue siendo impar.

Regla 2: Una U se puede cambiar por II. Esta regla se puede representar en símbolos así: ❑U▲→❑ I I▲, donde ❑ y ▲ representan cualquier combinación de M, I, U, incluyendo la posibilidad de ser vacíos. El número de Ies que tiene el teorema ❑U▲ se aumenta en 2 al aplicarle esta regla, pero si inicialmente el número era impar, al agregarle 2 sigue siendo impar.

Regla 3: Cuatro Ies seguidas se pueden eliminar. En símbolos se representaría así: ❑ I I I I▲→❑▲. En este caso el número de Ies que tiene el teorema ❑ I I I I▲ se reduce en cuatro al aplicarle la regla, pero si este número era impar sigue siendo impar.

Regla 4: Después de M se puede insertar U. En símbolos: ❑M▲→❑ MU▲, en este caso el número de Ies del teorema al cual se va a aplicar la regla ❑M▲, y el del teorema resultante ❑ MU▲, es el mismo.

Regla 5: Si en una palabra aparece IMU, la M se puede quitar. Esta regla se representa así: ❑IMU▲→❑IU▲. De nuevo, el número de Ies de la palabra a la cual se va a aplicar la regla y el de la que resulta luego de aplicarla, son iguales.

Hasta ahora hemos visto que las reglas no cambian la paridad del número de Ies de una palabra a la cual se aplican. Todos los teoremas se producen, como ya dijimos, a partir del axioma. Así que si comenzamos con un número impar de Ies (las del axioma, es decir 1) y aplicamos cualquier cantidad de reglas, el número de Ies de todos los teoremas que se produzcan seguirá siendo impar. El número de Ies del MU es par (es 0), luego no puede producirse a partir de este axioma y con estas reglas.

Sistemas combinatorios

El acertijo de MU es un ejemplo especial de sistemas formales llamados sistemas combinatorios. Para definir un sistema combinatorio debemos contar con:

- Un alfabeto $\mathcal{A}$ finito, llamado alfabeto del sistema y, eventualmente, un alfabeto auxiliar $\mathcal{B}$ que sirve para escribir las producciones.
- Una palabra especial llamada axioma del sistema.

- Un número finito de esquemas de producción o deducción.

El sistema MU es un sistema combinatorio en el cual $\mathcal{A}$ es {M, I, U}, $\mathcal{B}$ es {→,❑, ▲}, el axioma es MI y los esquemas de producción son las reglas del juego.

Las reglas de juego se pueden escribir, usando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, así:

- ❑→❑❑❑
- ❑U▲→❑ I I▲
- ❑ I I I I▲→❑▲
- ❑M▲→❑ MU▲
- ❑IMU▲→❑IU▲

Los sistemas combinatorios son sistemas formales de una naturaleza particular; tal como indica el nombre que se les ha dado, intervienen en el estudio de mecanismos que ponen en juego problemas de tipo combinatorio. Esto significa que MU no es sólo un juego, sino que es el comienzo de un gran campo de estudio.

En general, un sistema formal consta de un alfabeto, un conjunto de axiomas, uno de reglas de deducción y una interpretación de los símbolos que conforman el alfabeto. Esta será la presentación que daremos a todos los sistemas formales que se estudiarán.

Variaciones de MU

Miremos un nuevo sistema formal usando los mismos símbolos M, I y U pero con unas reglas distintas:

- ❑ I→❑IU
- M❑→ M❑❑
- ❑ I I I▲→❑U▲
- ❑ UU▲→❑▲

Este es un sistema combinatorio. El axioma sigue siendo MI

Este sistema es el que aparece en el libro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* de Douglas Hofstadter. En este sistema MU no es un teorema y es necesario salirse del sistema (es decir, no usar las reglas sino analizar lo que las reglas hacen) para poder demostrar esto. Esto es un teorema que dice algo sobre los teoremas del sistema, es decir es un metateorema.

Metateorema principal

Una palabra formada por Mes, Ies y Ues es un teorema del sistema MIU si y sólo si empieza con M y está seguida por una cadena de Ies y Ues para la cual la cantidad de Ies no es un múltiplo de tres.

Antes de demostrar este teorema demostremos primero otros tres metateoremas. En este caso I^N representa una cadena de N Ies.

Metateorema 1

MI^{2^m} es un teorema, para todo $m \geq 0$.

Metateorema 2

Si ❑III es un teorema, entonces ❑ es un teorema.

Metateorema 3

MI^N es un teorema, para cualquier entero positivo N que no sea múltiplo de tres.

Ejercicio

1. Demuestre los tres metateoremas.
2. Ahora es posible demostrar el metateorema principal. Demuéstrelo.
3. ¿Es posible enunciar un metateorema similar para el sistema MU que vimos antes?

Producir los números

Ya hemos señalado cómo el surgimiento del formalismo y de los sistemas formales está estrechamente relacionado con el desarrollo de las matemáticas y, en especial, con los intentos de proveer al conocimiento matemático de una fundamentación sólida. Hemos escogido tres nociones matemáticas muy elementales, las de número natural, número entero y adición entre números enteros para mostrar como éstas pueden ser formalizadas. Más explícitamente, se trata de producir los números naturales y enteros mediante reglas puramente formales y de construir un sistema formal que modele la operación de adición entre números enteros.

El hecho de que exista un sistema formal para la adición significa que esta operación puede reducirse a manipulaciones de símbolos que son tan simples que pueden llevarse a cabo de manera mecánica, es decir pueden ser realizadas por una máquina. Quizá esto no resulte demasiado sorprendente pero sugiere preguntas sobre las cuales volveremos posteriormente:

¿Qué tan lejos se puede llegar con la formalización, que a su vez implica cierta mecanización, del conocimiento matemático? ¿Puede existir un sistema formal, por complejo que sea, que permita deducir como teoremas todas las verdades matemáticas?

Los naturales

Para poder construir el sistema formal que estamos buscando, tenemos que comenzar por hacernos una pregunta:

¿Cuáles son las características de los números naturales? 1 es el primer número natural y los demás se pueden definir a partir de él (agregando una unidad cada vez). Este proceso permite obtener todos los naturales y nos da la clave para construir el sistema formal. Ya debe ser clara la forma que tendrán el axioma y la regla. Falta escoger los símbolos adecuados y la forma como los vamos a interpretar.

A continuación le proponemos un sistema formal que, en principio, permite generar el conjunto de los números naturales. Este sistema formal se basa obviamente en la idea de "sucesor" o el siguiente de un número natural.

Recordemos que, para presentar un sistema formal, debemos presentar los símbolos, el axioma o los axiomas, las reglas de transformación y la interpretación que se le quiere dar a los símbolos. En este caso, el sistema formal es el siguiente:

Lenguaje: ❚

Axioma: ❚

Regla: ❑→❑❚

Interpretación: ❚ representa una unidad.

Recordemos que ❑ representa, al interior del sistema formal, cualquier hilera de ❚.

El axioma ❚, es el punto de partida y representa al número 1. El primer teorema que se obtiene es ❚❚, que representaría el número 2, es decir el sucesor de 1. Si usted quiere deducir la palabra que representa al 43, debería aplicar la regla al axioma 42 veces para obtener una hilera de 43 ❚.

Recordemos que la realidad que es modelada por un sistema formal depende de la interpretación que se le dé a los símbolos del lenguaje de ese sistema. Por ejemplo, si en cambio de interpretar ❚ como una unidad, lo interpretamos como dos unidades, entonces el sistema formal que acabamos de proponer modela una realidad diferente: los números pares positivos.

Ahora sería muy fácil responder ¿cuál debe ser la interpretación de ❚, para que este mismo sistema modele el conjunto de los naturales múltiplos de 3?

Otra forma de modelar realidades se obtiene cambiando la regla o el axioma. Así si queremos modelar los impares naturales mayores o iguales que 5, con el mismo lenguaje, debemos escoger:

Axioma: ❚❚❚❚❚

Regla: ❑→❑❚❚

y mantener la interpretación: ❚ es una unidad.

Trate ahora, interpretando ❙ como una unidad, de escoger un axioma y una regla que permitan modelar los naturales múltiplos de 3. También podría identificar una realidad diferente de las anteriores y construir un sistema formal y una interpretación que permita modelarla.

Los enteros

El problema que tenemos ahora consiste en encontrar un sistema formal que no solamente nos permita modelar el proceso de producir los enteros positivos, sino que también modele los negativos y el cero. Para ello vamos a introducir un nuevo símbolo y una nueva interpretación.

El nuevo símbolo es –. Y ahora las palabras válidas de nuestro sistema serán de la forma –❑ o ▲ –, donde ❑ y ▲ representan cualquier conjunto de palos, incluido el conjunto vacío.

La interpretación que vamos a introducir es la siguiente:

– representa el cero

–❑ representa el número positivo correspondiente al número de palos (❙) en ❑.

▲– representa el número negativo correspondiente al número de palos (❙) en ▲.

– ❙❙❙ representa el 3. ❙❙❙❙❙– representa el –5. Esta interpretación se debe a que los positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda. Ahora nos falta introducir el sistema formal.

Axioma: –

Regla 1: –❑→–❑❙

Regla 2: ▲–→❙▲–

Ahora hagamos unos ejemplos. Si aplicamos la regla 1 dos veces seguidas al axioma, obtenemos el teorema –❙❙. De la misma forma, si aplicamos 3 veces seguidas la regla 2 al axioma obtenemos el teorema ❙❙❙–.

Es fácil darse cuenta de que este sistema permite modelar todos los números enteros. De nuevo si cambiamos la interpretación tendremos otra realidad modelada por el mismo sistema formal. Podría también pensarse en modelar el conjunto de los enteros mayores que -5 y tendríamos que escoger un axioma y reglas adecuadas.

La suma

Hasta ahora hemos producido sistemas formales que nos han permitido modelar todos los números enteros. Sin embargo, la realidad de los números enteros es más amplia, puesto que con los números enteros podemos hacer operaciones. En particular, la adición es la operación más importante puesto que, a partir de ella, podemos definir las demás operaciones.

Queremos ahora identificar un sistema formal que no solamente nos permita producir los números, sino que también tenga en cuenta la operación de adición y las verdades que con esta operación tenemos. Un sistema formal similar a éste fue descrito a comienzos de siglo por los matemáticos Peano y Frege cuando, después de veinticinco siglos, se intentó formalizar apropiadamente la aritmética y, a través de ella, todas las matemáticas.

El sistema formal que vamos a producir va a ser similar. El axioma es más complejo, pero veremos que nos sirve para producir todas las sumas de enteros posibles. No presentaremos el sistema formal completo sino hasta el final. Veremos más bien el sentido y necesidad de cada regla y luego podremos estar seguros de que tenemos un sistema completo. Es importante ver que las verdades que vamos a producir son del estilo 2+3=5 y lo que trataremos de obtener es una serie de reglas que a partir de una suma inicial $(0 + 0 = 0)$, nos permitan producir todas las demás. Ya vemos que es necesario aumentar nuestro lenguaje para poder usar un símbolo para la suma(⊕) y uno para el igual(≈).

Lenguaje: –, **I**, ⊕, ≈

Como dijimos antes el axioma debe representar una suma inicial, tomaremos $0 + 0 = 0$.

Axioma: – ⊕ – ≈ –

Las reglas nos deben permitir obtener todas las sumas posibles: dos enteros positivos, dos enteros negativos, uno positivo con uno negativo cuya respuesta es positiva, uno positivo con uno negativo cuya respuesta es negativa, uno negativo con uno positivo cuya respuesta es positiva y uno negativo con uno positivo cuya respuesta es negativa. Comenzaremos por las suma de dos enteros positivos.

El sentido de esta primera regla es poder obtener en el primer sumando el entero positivo que uno desea, es decir nos debe permitir producir sumas del estilo 3 + 0 = 3, 5 + 0 = 5, 10 + 0 = 10,...

Regla 1 (suma de enteros positivos):
–▲ ⊕ –❑ ≈–▲❑→–▲❚ ⊕ –❑ ≈–▲❑❚

La segunda regla nos debe permitir obtener lo que necesitamos en el segundo sumando. Sería así:

Regla 2 (suma de enteros positivos):
–▲ ⊕ –❑ ≈–▲❑→–▲ ⊕ –❑❚ ≈–▲❑❚

La tercera y cuarta nos permitirán producir sumas de enteros negativos, aumentando en el primer sumando (regla3) y en el segundo (regla 4).

Regla 3 (suma de enteros negativos):
▲– ⊕❑ – ≈▲❑–→❚▲– ⊕❑ – ≈❚▲❑–

Regla 4 (suma de enteros negativos):
▲– ⊕❑ – ≈▲❑–→▲– ⊕❚❑ – ≈❚▲❑–

Nos queda todavía el trabajo más difícil: producir sumas de enteros positivos y negativos. Veamos primero qué sucede si el primer sumando es positivo y el segundo negativo. Debemos considerar varios casos, ya que el proceso no es el mismo si tenemos una suma como 3 + (-2) cuyo resultado es positivo, es 1, o una como 3 + (-7), en que nos da negativo, -4. Para el primer caso tenemos dos posibilidades: obtener lo que necesitamos en el primer sumando, obtenerlo en el segundo. Si agregamos una unidad en el primer sumando, 4 + (-2), la respuesta se aumentará en una unidad, 2.

Regla 5 (suma de positivo con negativo):
–▲❑ ⊕▲ – ≈–❑ →–▲❑ ❚⊕▲ – ≈–❑❚

Pero si agregamos una unidad en el segundo sumando, 3 + (-3), la respuesta se disminuirá en una unidad, 0. Tenemos un problema adicional, si ❑ representa el número de unidades de la respuesta, ¿cómo representar que esta cantidad se ha disminuido en una unidad? Hemos resuelto el problema poniendo, desde el principio, esta unidad que después vamos a quitar. Así, si ❑❚ representa el número de unidades de la respuesta, ❑ representará este número disminuido en una unidad, que es lo que deseábamos.

Regla 6 (suma de positivo con negativo):
–▲❑❚ ⊕▲ – ≈–❑❚→–▲❑ ❚ ⊕❚▲ – ≈–❑

Para el segundo caso tenemos otras dos reglas equivalentes, agregar una unidad en el segundo sumando:

Regla 7 (suma de positivo con negativo):
–▲ ⊕▲❑ – ≈❑– → –▲ ⊕❚▲❑ – ≈❚❑–

o en el primero:

Regla 8 (suma de positivo con negativo):
–▲ ⊕❚▲❑ – ≈❚❑–→ –▲❚ ⊕❚▲❑ – ≈❑–

Todavía nos queda el caso de una suma de un negativo con un positivo, que nos dará otras cuatro reglas que actúan de manera similar.

Regla 9 (suma de negativo con positivo):
▲❑– ⊕ –▲ ≈❑–→❚▲❑– ⊕ –▲ ≈❚❑–

Regla 10:
❚▲❑– ⊕ –▲ ≈❚❑–→❚▲❑– ⊕ –▲❚ ≈❑–

Regla 11:
▲– ⊕ –▲❑ ≈–❑→▲– ⊕ –▲❑❚ ≈–❑❚

Regla 12:
▲– ⊕ –▲❑❚ ≈–❑❚→❚▲– ⊕ –▲❑❚ ≈–❑

Aunque son muchas reglas, el sistema no es difícil de usar. Para producir una suma cualquiera usaremos máximo tres de estas reglas. Por ejemplo si queremos producir el teorema correspondiente a (-2) + 3 = 1, debemos identificar que corresponde a una suma de negativo con positivo, es decir vamos a usar la regla 11 para obtener 3 en el segundo sumando y luego la regla 12 para obtener -2 en el primero, así:

–⊕ – ≈ – → –⊕ –❚ ≈ –❚ usando la regla 11

–⊕ –❚ ≈ –❚→–⊕ –❚❚ ≈ –❚❚ usando la regla 11

–⊕ –❚❚ ≈ –❚❚→–⊕ –❚❚❚ ≈ –❚❚❚ usando la regla 11

–⊕ –❚❚❚ ≈ –❚❚❚→❚–⊕ –❚❚❚ ≈ –❚❚ usando la regla 12

❚–⊕ –❚❚❚ ≈ –❚❚→❚❚–⊕ –❚❚❚ ≈ –❚ usando la regla 12

Si interpretamos estos símbolos, el proceso anterior se podría traducir así:

$0 + 0 = 0 \rightarrow 0 + 1 = 1 \rightarrow 0 + 2 = 2 \rightarrow 0 + 3 = 3 \rightarrow (-1) + 3 = 2 \rightarrow (-2) + 3 = 1$

Ejercicio

Amplie el sistema formal para poder modelar el producto de naturales. Luego trate de hacerlo para el producto de enteros.

Fractales

Hace algo más de diez años surgió con propiedad una nueva geometría recursiva o geometría fractal (creada por el matemático polaco Benoit Mandelbrot). La idea filosófica subyacente a esta geometría es que los objetos de la naturaleza son recursivos. Por ejemplo, un árbol, una nube o una costa son objetos tridimensionales que pueden ser explicados muy sencillamente en términos de ellos mismos. Esto no se puede hacer con la geometría euclidiana ya que ésta fue creada para describir objetos rectilíneos y no objetos irregulares (de hecho la palabra fractal quiere decir: fragmentado). La recursión es una herramienta potente tanto de descripción de objetos, como de resolución de problemas.

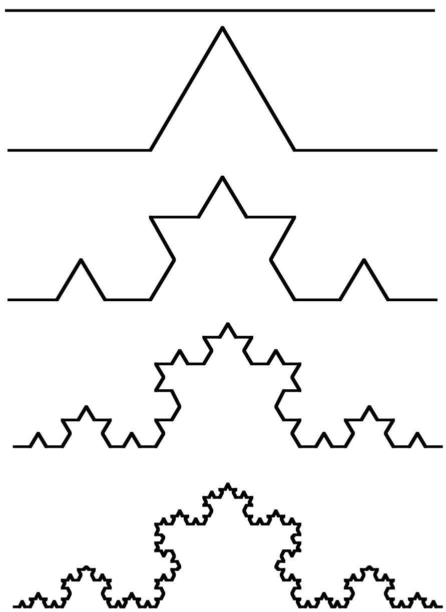
La noción de recursión, formalizada a finales del siglo pasado, juega, hoy en día, un papel importante en el desarrollo de disciplinas tan variadas y aparentemente disímiles como las matemáticas (geometría fractal), las ciencias de computación (heurística), la pintura (fractales), la física (sistemas dinámicos) y la biología (modelos neuronales). El objetivo de este capítulo es utilizar el tema de los fractales para presentar una introducción de las nociones básicas del concepto de recursión y ver la relación que tiene esta noción con la de sistema formal. Antes de intentar dar una definición comenzaremos con un ejemplo.

El ejemplo

Observe las figuras que se presentan en la siguiente página. Esas figuras están relacionadas.

Si usted examina cuidadosamente las figuras, puede descubrir que cada figura se construye usando como base la figura anterior y transformándola de alguna manera.

Observe el paso de la primera figura a la segunda. Considere que este segundo paso es una transformación del segmento de recta, que es la primera figura, en un conjunto de cuatro segmentos de recta. Ahora, si usted observa la tercera figura, verá que ésta se obtiene de la segunda efectuando la misma transformación a cada uno de los cuatro segmentos que la componen. La cuarta figura es producto de hacer este mismo proceso de transformación a cada uno de los segmentos de recta que componen la tercera figura.



Además, vamos a adoptar dos convenciones:

- La primera figura siempre es un segmento de recta. Esto nos facilita las cosas porque entonces la segunda figura representa la transformación.

- La transformación estará siempre constituida por segmentos de recta.

Volviendo al dibujo, ¿puede usted imaginarse cómo sería la siguiente figura? ¿Podría dibujarla? Si usted sigue y sigue dibujando figuras cada vez más complicadas, estas líneas forman figuras de líneas cada vez más pequeñas es llamadas figuras fractales y el proceso para pasar de una figura a otra es recursivo. De manera general un objeto recursivo es un objeto que está definido en términos de sí mismo, más precisamente, en términos de versiones más simples de sí mismo.

Sistemas formales

Los fractales (como el ejemplo visto antes) tienen una característica muy importante para nosotros: pueden ser generados usando sistemas formales y en especial sistemas combinatorios.

De hecho hay una analogía muy profunda entre estas figuras recursivas y los sistemas formales. Consideremos el siguiente sistema formal:

Lenguaje: A, +, –.

Axioma: A

Regla: A → A–A++A–A

La diferencia entre los sistemas formales que vamos a estudiar en este capítulo y los que hemos trabajado antes consiste en que hay que aplicar la regla a todas y cada una de las Aes que aparecen en la hilera a la que se está aplicando la regla.

Por ejemplo, el primer teorema que podemos obtener es sencillamente:

A–A++A–A

El segundo teorema, que se deduce de éste, es:

A–A++A–A–A–A++A–A++A–A++A–A–A–A++A–A

Trate de escribir el tercer teorema.¿Cuántas Aes tiene el tercer teorema? ¿Tiene usted necesidad de contarlas, o se imagina alguna manera automática de encontrar ese número sin necesidad de contar? El número de Aes del n-ésimo teorema es igual al número de Aes de la regla por el número de Aes del teorema n - 1.

¿Cuántas veces se repite el símbolo + en el tercer teorema? El número de + en el tercer teorema es igual al número de + en el primero, multiplicado por el número de Aes en el segundo teorema, más el número de + en el segundo teorema. Esta relación entre los teoremas y la regla, muestran claramente el proceso recursivo que se genera en los fractales: cada nivel está definido en términos más simples.

El sistema formal que acabamos de considerar tiene una relación estrecha con los dibujos del ejemplo que se hizo al comienzo de este capítulo, en el sentido que a cada teorema del sistema le corresponde un dibujo.

A continuación vamos a introducir un proceso que permite interpretar los elementos que constituyen un teorema para producir, a partir de él, un dibujo fractal.

Interpretación del sistema formal

Cada teorema de este sistema va a ser interpretado como un dibujo en el plano. Este dibujo lo va a efectuar una tortuga que colocaremos en nuestro papel de dibujo. Ella va a moverse de acuerdo a ciertas instrucciones y, al moverse, dejará tinta por cada sitio que pase. Convengamos además que la tortuga siempre comienza orientada hacia la derecha.

Démosle ahora a los símbolos de nuestro sistema la siguiente interpretación:

A: Dibuje una línea recta de una unidad hacia adelante (o sea en la dirección en la cual esté apuntando nuestra tortuga)

+: Gire 45^o (En el sentido de las manecillas del reloj)

–: Gire 45^o (En el sentido contrario de las manecillas del reloj)

Convenimos que + y – corresponden al mismo ángulo pero en dirección distinta.

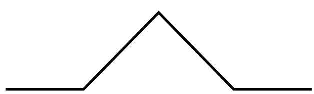
Miremos ahora algunos teoremas e interpretémoslos:

Por ejemplo el axioma interpretado sería: muévase una unidad hacia adelante:

Y el teorema A–A++A–A sería:

Muévase una unidad. Gire 45^o en sentido negativo. Muévase una unidad. Gire 45^oen sentido positivo. Gire 45^o en sentido positivo. Muévase una unidad. Gire 45^o en sentido negativo. Muévase una unidad.

Lo cual da la siguiente figura:



Observe que cada teorema de nuestro sistema corresponde a cierta figura en el plano o a un nivel en el proceso de obtener el fractal.

Aclaremos que, cuando se dibujan los niveles de un fractal, cada uno a partir del anterior, aplicando la transformación, todos los dibujos tienen el mismo tamaño en el sentido horizontal. Sin embargo, cuando interpretamos los teoremas, los dibujos que resultan tienen diferentes tamaños, dado que siempre se avanza una unidad cada vez que dibuja un segmento de recta.

Ejercicio

Para el sistema formal que se propone a continuación deduzca los dos primeros teoremas y dibújelos de acuerdo a la interpretación propuesta.

Lenguaje: A, +, –

Axioma: A

Regla: A → – – A + + + A – A

Interpretación: + representa 45º

Ampliando el proceso

Hasta ahora ha dado la impresión de que a cada conjunto de fractales le corresponde un sistema formal y a cada sistema formal, le corresponde un conjunto de fractales. Sin embargo, esto no es cierto, puesto que lo que conecta el uno con el otro es la interpretación. Si cambiamos la interpretación, las cosas cambiarán.

Esto es particularmente importante cuando cambiamos la interpretación del ángulo.

Ejercicios

1. Para cada uno de los teoremas de la sección anterior interprételos de acuerdo a lo siguiente:

+: 60º

+: 90º

Otra manera de ampliar el proceso consiste en que el axioma no sea necesariamente A. (Desde el punto de vista de los fractales, esto significa que no comenzamos con un segmento de recta.)

2. Deduzca los dos primeros teoremas del siguiente sistema formal.

Lenguaje: A, +, –

Axioma: AA – AA – AA

Regla: A → AA++AA++AA–

La interpretación de este sistema es la siguiente:

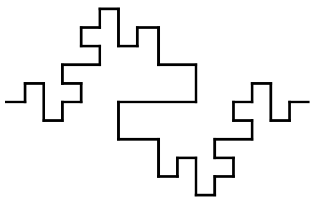
A: Dibuje una línea recta de una unidad hacia adelante

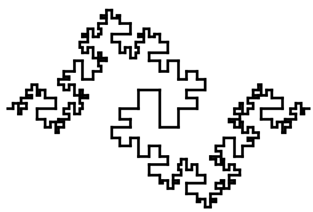
+: Gire 60$^{\text{o}}$

–: Gire 60$^{\text{o}}$

Interprete y dibuje los teoremas que acaba de deducir.

3. Para la siguiente figura determine el sistema formal y la interpretación que la produce. Es decir, diga cuál es el lenguaje, el axioma, la regla y la interpretación de los símbolos del lenguaje. Compruebe su respuesta.





Limitándonos a transformaciones con segmentos de recta, podríamos variar el sentido en que se realiza el dibujo (derecha o izquierda), o la orientación (encima o debajo), o incluso si se dibuja o no determinado segmento. Esto dará una gran variedad de fractales, pero los sistemas formales correspondientes serían mucho más complejos.

Además de los fractales que hemos visto, hay otra gran variedad, generados con otro tipo de transformaciones, lo invitamos a investigar sobre este interesante tema.

Juego de vida

Los trabajos de Copérnico, Kepler, Descartes, Galileo y Pascal trataron de demostrar que algunos fenómenos de la naturaleza ocurrían de acuerdo a leyes matemáticas. La filosofía y metodología de la ciencia utilizada en el siglo XVII fue formulada y desarrollada por Descartes. Descartes aseguró que todas las leyes físicas se reducían a la geometría. Esta metodología de Descartes fue adaptada por muchos pre newtonianos, dándole una función adicional a la ciencia: dar una explicación física de la acción de los fenómenos de la naturaleza.

Hace más de un siglo, Charles Darwin investigó sobre los mecanismos de la evolución dándose cuenta de que nacen muchos más animales y plantas de los que pueden llegar a sobrevivir y que el medio ambiente selecciona las variedades que son accidentalmente más adecuadas para sobrevivir. Esto hace pensar que pueden existir reglas que rigen el comportamiento de los nacimientos y muertes de una comunidad.

Lo que presentamos a continuación es un juego que simula una sociedad de seres vivos que es regulada por leyes genéticas. Como todo juego tiene unas reglas (reglas de transformación), un estado inicial (axioma) y se van produciendo jugadas o configuraciones (teoremas).

Estudiaremos un sistema formal al estilo de MU, es decir, un axioma y unas reglas, con una pequeña diferencia. Las reglas permanecerán fijas todo el tiempo, pero el axioma cambiará en cada juego.

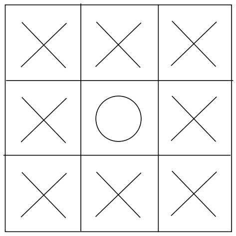
Una configuración es una manera de colocar las fichas sobre el tablero de juego. El nuestro es un tablero cuadriculado ilimitado provisto de fichas planas, preferiblemente de dos colores (negras y blancas).

El tablero, con cualquier disposición y cualquier cantidad de fichas negras, es una configuración.

Las reglas del juego permitirán cambiar la configuración y formar así una nueva generación.

Podemos pensar que una configuración es una población y las reglas son reglas de supervivencia, nacimiento y fallecimiento que rigen a esa población para crear una nueva generación.

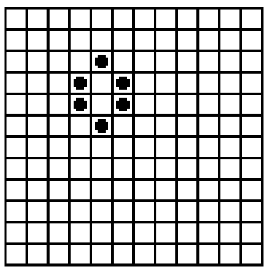
Cada casilla del tablero tiene ocho casillas vecinas como muestra el dibujo: las casillas marcadas con X son las vecinas de la casilla marcada con O.



Las reglas del juego se refieren a estas vecinas. Las reglas son:

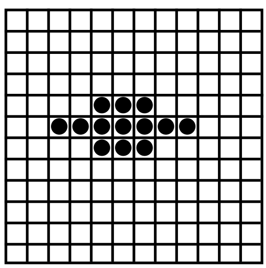
1.**Supervivencia:** cada ficha que tenga dos o tres fichas vecinas sobrevive y pasa a la generación siguiente.

Por ejemplo:

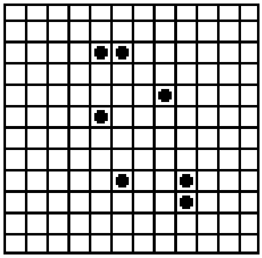


En esta configuración todas las fichas sobreviven.

2. **Fallecimiento:** cada ficha que tenga cuatro o más vecinas muere y es retirada del tablero por superpoblación. Las fichas con sólo una o ninguna vecina, fallecen por aislamiento.Por ejemplo:



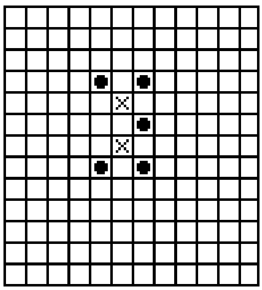
Excepto las fichas de los extremos, que mueren por aislamiento, las demás mueren por superpoblación.



Todas mueren por aislamiento.

3. **Nacimientos:** cada casilla vacía, adyacente a exactamente tres fichas vecinas –tres, ni más, ni menos– es casilla generatriz. En la jugada siguiente habrá de colocarse en ella una ficha negra.

Por ejemplo:



En las casillas marcadas con x nacen nuevas fichas en la próxima generación.

Es importante darse cuenta de que todos los nacimientos y fallecimientos ocurren simultáneamente. Para realizar cada jugada, se recomienda:

1. Tomar una configuración inicial de fichas negras (Axioma).

2. Localizar todas las fichas que habrán de morir (Reglas 1 y 2). Colocar sobre ellas, para distinguirlas, otra ficha negra.

3. Localizar todas las casillas vacías donde habrán de producirse nacimientos (Regla 3). Ocupar cada una de estas casillas con una ficha blanca.

4. Una vez comprobada y repasada la configuración, seguros de que no hay errores, se retiran todas las fichas muertas (pilas de dos) y las recién nacidas (fichas blancas) son reemplazadas por fichas negras.

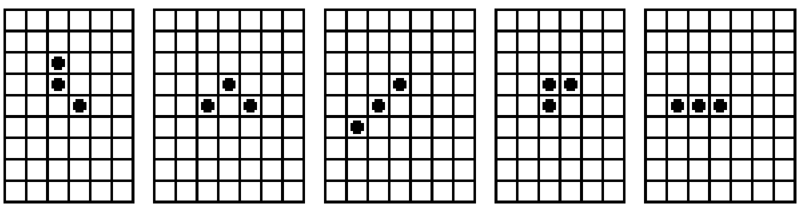
El procedimiento se repite una y otra vez para ir obteniendo generaciones sucesivas. Dado que muertes y nacimientos acontecen simultáneamente, las fichas recién nacidas no deben contribuir a nuevas muertes o nacimientos.

Es interesante estudiar algunas configuraciones iniciales sencillas y ver con el tiempo cómo se van transformando y cuál es su fin, si desaparecen o crecen ilimitadamente o se estabilizan.

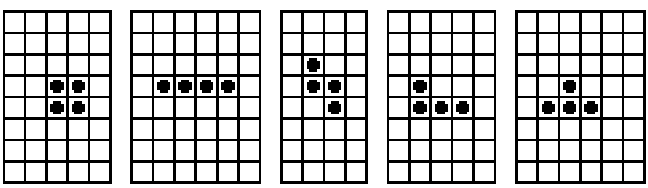
Algunos casos sencillos son fáciles de analizar:

Un organismo unicelular, o el formado por un solo par de fichas, se encuentren donde se encuentren, se extinguirán en la primera generación. También una formación inicial de tres células moriría de inmediato, a menos que por lo menos una ficha tenga un par de vecinas.

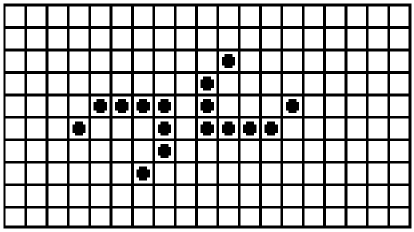
Pero qué pasa con configuraciones iniciales de tres fichas. Por ejemplo éstas:



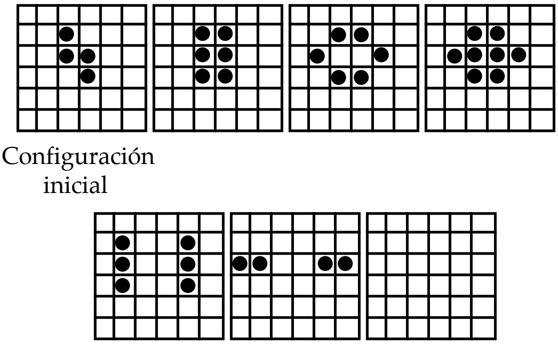
O estas de cuatro fichas:



O una más complicada como ésta:



Veamos la historia de una configuración inicial de cuatro células, luego de seis generaciones:



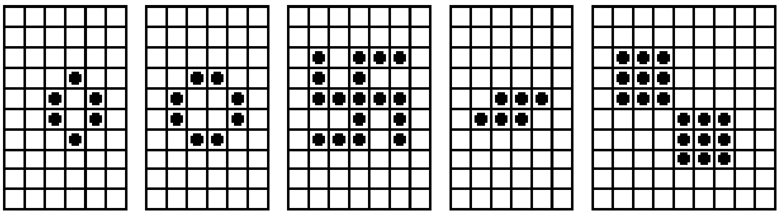
Configuración inicial

Sexta generación

Hay muchos problemas interesantes que han surgido a partir del juego de vida. Los juegos de ajedrez, damas, go y análogos, pueden ser concebidos como juegos de autómatas celulares donde los vecindarios y las reglas de transición son complicados y donde los jugadores van eligiendo entre diversos estados consecutivos con el propósito de alcanzar un determinado estado final, que define la victoria.

A diferencia de otros sistemas formales, las reglas se aplican todas al mismo estado para obtener el siguiente. El juego de vida podría verse como un modelo bastante simplificado del ciclo de evolución biológica sobre la tierra, entonces un problema interesante es tratar de busca un configuración edénica, es decir una configuración que no puede darse en el desarrollo de un juego, pues, como los seres del jardín del edén, no tienen generación anterior que pueda engendrarlas.

Muchas de las configuraciones simples del juego, tienen nombres propios y es interesante estudiar su vida. Por ejemplo:



Colmena Charca Esvástica Sapo Cifra 8

La colmena y la charca son naturalezas muertas, la esvástica muere al sexto latido, el sapo palpita y la cifra 8 es un oscilador de período 8. Sería un buen ejercicio comprobar que todo esto es cierto.

Todas las configuraciones vistas mueren o se estabilizan al cabo del tiempo. Un problema complejo sería encontrar una configuración (lo más sencilla posible) que crezca indefinidamente.

Se han encontrado aplicaciones bastante particulares del juego de vida: ha habido intentos de aplicarlo a sistemas socioeconómicos o para explicar por qué ciertas nebulosas tienen brazos espirales, incluso se han encontrado formas de aplicar reglas semejantes a las de vida en programas ideados con el fin de identificar las aristas ocultas en dibujos computarizados de cuerpos macizos.

Los físicos de hoy están buscando una gran teoría de unificación que articule y reúna todas las fuerzas de la naturaleza en una teoría unificada, basada en una estructura de aforo. Una de estas teorías consiste en imaginar partículas que juegan sobre un retículo abstracto de cubículos tetradimensionales, una especie de vida en el espacio-tiempo.

Sistemas formales y el lenguaje

El objetivo de la teoría lingüística es explicar la facultad extraordinaria del ser humano que lo distingue de cualquier otro animal: la facultad del lenguaje.

Entre otras tareas de la lingüística están: generar la capacidad de formular gramáticas, descubrir los rasgos universales de las distintas lenguas e investigar sobre la teoría del aprendizaje de la lengua que tiene que ver con el hecho de que distintos individuos, sobre la base de diversos y heterogéneos datos, lleguen a la misma gramática, con la relativa celeridad con que el niño aprende su idioma y con la especificidad del lenguaje en el sentido que, hasta donde sabemos, solamente los seres humanos son capaces de desarrollarlo.

Cuando un niño aprende una lengua, debe, en un período muy breve, descubrir las reglas que rigen los enunciados que escucha a su alrededor. En este proceso se pueden distinguir tres factores:

- los estímulos lingüísticos a que está expuesto el niño
- la capacidad lingüística del niño
- la gramática que el niño adquiere, que es el sistema abstracto que él descubre a través del período de aprendizaje

Esta situación es similar a la del lingüista. El parte de unas observaciones y una teoría para llegar a formular las reglas abstractas que constituyen la gramática de la lengua a que pertenecen los enunciados. Su objetivo es desarrollar un modelo lógico que corresponda a la teoría.

Este esquema permite distinguir diversos niveles de adecuación en las distintas descripciones gramaticales y en las diversas teorías lingüísticas. El nivel mínimo de una descripción gramatical es el nivel observacional. Es decir, la gramática debe por lo menos reproducir adecuadamente el conjunto de estímulos lingüísticos que consta de oraciones gramaticales. Pero una gramática que alcance solamente este nivel observacional no tiene ningún interés.

El nivel siguiente sería el de adecuación descriptiva, el cual debe reflejar adecuadamente la capacidad lingüística del hablante.

Una descripción gramatical es observacionalmente adecuada en la medida en que refleja sin distorsión la realidad en que se basa y alcanza adecuación descriptiva en la medida en que exprese fielmente la intuición lingüística del hablante.

Hay un nivel superior de adecuación, el explicativo. Una teoría lingüística alcanza este nivel si está formulada de tal modo que, dada una realidad y diversas descripciones de la misma, permita seleccionar la que tenga el grado más alto de adecuación descriptiva.

Conocer una lengua no significa simplemente ser capaz de repetir una serie de enunciados aprendidos de memoria sino tener la capacidad de producir y entender oraciones nuevas. En este sentido cada hablante es un creador, ya que es capaz de emitir y comprender oraciones a la cuales nunca antes ha sido expuesto y la gramática debe reflejar este aspecto creativo.

Una gramática adecuada deber ser exhaustiva, es decir, debe reflejar en toda su riqueza y flexibilidad el saber lingüístico del hablante. Este requisito aparece cuando se considera que el número de oraciones de una lengua cualquiera es infinito, ya que en toda lengua existen procedimientos recursivos y de concatenación de aplicabilidad ilimitada.

La gramática debe ser además explícita, esto significa que la descripción gramatical no debe dejar nada a la interpretación del lector. Además debe ser simple.

Una gramática generativa es un conjunto de afirmaciones, reglas o axiomas que describen, definen o generan todos los enunciados bien formados de una lengua, y nada más que éstos. La teoría de las gramáticas generativas consta de un conjunto de condiciones abstractas que especifican la forma de las reglas admisibles en tales gramáticas y determinan la elección entre descripciones alternativas de un conjunto de datos.

En esta parte de la gramática todas las reglas tienen la forma $A \rightarrow B$ en que A y B son símbolos del alfabeto particular y donde $\rightarrow$ se interpreta como una instrucción para retranscribir el símbolo de la izquierda como el símbolo de la derecha. Esto significa que una gramática puede verse simplemente como un sistema formal.

Nuestro interés en este capítulo es estudiar algo de la gramática generativa de nuestro idioma. Esto significa mirar la organización o sistema del español como un mecanismo que produce o genera oraciones. Por supuesto, esto sólo lo lograremos en una pequeña parte. En 1957, Noam Chomsky realizó sus primeros trabajos en gramática tranformacional y desde entonces se ha convertido en una rama importante de la lingüística. En la Universidad de los Andes, el profesor Jorge Páramo ha desarrollado una gramática generativa, y es en ella en la que nos hemos basado para desarrollar este capítulo.

Del lenguaje al sistema formal

Aunque diariamente usamos el lenguaje con el fin de expresar nuestras ideas, conocer las de los demás, intercambiar informaciones, hacer relaciones sociales, etc., casi nunca pensamos en el lenguaje en sí mismo debido a la dificultad que surge al tratar de explicarlo. En realidad, pensar en el lenguaje, no como un instrumento que manejamos inconscientemente, sino como un sistema complejo que no funciona al azar, es una tarea difícil pero que resulta muy interesante.

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se pueden emplear los sistemas formales para modelar la gramática de una lengua natural como el español; esto es, cómo funciona una gramática generativa. Pero, a diferencia de otros sistemas formales, lo construiremos poco a poco, ampliando cada vez la realidad que deseamos modelar. Identificaremos un axioma, unas reglas de deducción y una interpretación que nos permitan producir (o "generar") las frases de nuestro lenguaje. Naturalmente, no podemos examinar todas las frases españolas posibles, pues esto resultaría imposible. En realidad, vamos a limitarnos a considerar un subconjunto de ellas: en primera instancia, las que se conocen comúnmente como sintagmas nominales y, más adelante, cierto grupo de oraciones muy sencillas.

Sintagmas nominales

Expresiones como:

- *Carlos*
- *mi casa*
- *Pedro y el lobo*
- *Sistemas formales y el lenguaje*
- *tres libras de azúcar en polvo*

- *Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes*

se llaman todas sintagmas nominales. Como puede verse, son expresiones que giran en torno a los sustantivos y no tienen verbos. Se emplean básicamente para nombrar las cosas, entidades, personas, etc. de que hablamos. Generalmente aparecen haciendo parte de oraciones completas, como en *Ayer, Pedro y el lobo dejaron en mi casa tres libras de azúcar en polvo*. Sin embargo también es frecuente encontrarlas solas, en forma independiente, como en una lista de compras, en los títulos y subtítulos de los libros, o en otras circunstancias.

Los sintagmas nominales más simples son los sustantivos, ya sean nombres propios (*Carlos, Juan, María*, ...) o nombres comunes (*mesa, perro, luz*, ...). Tratemos de construir un sistema formal que nos sirva para modelar un sintagma nominal de este tipo.

Aclaremos primero los símbolos que vamos a usar.

Xs representará un sintagma nominal cualquiera

S representará un sustantivo en particular. Cuando lleguemos a este símbolo debemos interpretarlo.

La interpretación en este caso consistirá en escoger el sustantivo de un conjunto de interpretación, S, que tendremos dispuesto para ello.

Si tenemos el conjunto de interpretación de sustantivos

S = {*Carlos, Pedro, María, mesa, niño, lobo, luz, libertad, departamento*, ...}

comenzaremos a construir nuestro sistema formal dando un axioma y una regla que nos permita escoger de esta lista un sustantivo en especial.

Axioma: Xs

Regla 1: Xs → S

→ se interpreta como está "compuesto por" y la regla se leería:

el sintagma nominal está compuesto por un sustantivo.

Interpretación: sólo debemos interpretar S. Lo interpretamos como cualquier elemento del conjunto de interpretación de sustantivos. Esto significa que este sistema formal modela cualquiera de los sintagmas:

- *Carlos*
- *mesa*
- *niño*

Pero podemos interpretarlo de otras maneras. El género (masculino o femenino), el número (singular o plural) o los artículos que acompañen a los sustantivos, no los tendremos en cuenta. Esto significa que este sistema formal no sólo modela el sintagma niño sino también:

- *niña*
- *la niña*
- *el niño*
- *las niñas*
- *los niños*
- *una niña*
- *un niño*
- *unas niñas*
- *unos niños*

Ampliando el sistema

Este sistema formal es muy reducido y sólo permite modelar sintagmas muy simples. Por ejemplo *Carlos y el niño* no se podría modelar porque consta de dos sustantivos coordinados por la conjunción *y*. Así que necesitamos una nueva regla que nos permita ampliar nuestro sistema.

Axioma: Xs

Regla 1: Xs→ S

Regla 2: Xs → Xs + Xs

Esta nueva regla hace posible que el sintagma nominal esté compuesto por dos sintagmas nominales o más, si se aplica varias veces sobre ella misma. El signo + se interpreta como *y, o, pero,* como una coma (,) o como cualquier otra conjunción.

Ahora sí podemos generar el sintagma nominal *Carlos y el niño*. Veamos cómo sería su deducción.

Paso 1. Xs → Xs + Xs

Paso 2. Xs → S1

Paso 3. Xs → S2

Interpretación:

+ se interpreta como *y*, S1 como *Carlos* y S2 como *el niño*.

Siempre haremos la deducción de un sintagma de izquierda a derecha. En el caso del ejemplo, primero debemos llegar a detallar completamente *Carlos* antes de pasar a detallar *el niño*.

Además, en cada paso de la deducción debemos indicar en qué paso anterior aparecían los elementos a los cuales nos estamos refiriendo. En el ejemplo sería así: el primer paso no proviene de nada anterior, entonces le corresponderá (0). En el segundo y tercer paso nos referimos a los Xs que aparecían en el primer paso así que les corresponderá (1). La deducción completa es:

Paso 1.	Xs→Xs + Xs	(0)
Paso 2.	Xs → S1	(1)
Paso 3.	Xs → S2	(1)

Adjetivos

Analizar el sintagma *el buen Carlos* no sería posible con las herramientas que tenemos, ya que *buen* no aparece en nuestro conjunto de interpretación de sustantivos (no es uno de ellos: es un adjetivo). Necesitamos ahora un conjunto de palabras que califiquen a las que ya tenemos. Simbolicémoslo por Q y definámoslo como un conjunto de adjetivos españoles. Por ejemplo:

Q = {*bueno, dos, estos, ese, tres, mi, neutro, feroz, rojo, libre*, ...}

Además necesitamos unas reglas que nos permitan relacionarlos con los sustantivos y otra que nos permita escogerlos de la lista. Ampliemos pues el sistema.

Axioma: Xs

Regla 1: Xs→ S

Regla 2: Xs → Xs + Xs

Regla 3: Xs → XqXs

Regla 4: Xq → Q

Xq representa un sintagma que califica al sustantivo y Q un adjetivo particular. Ahora sí, *el buen Carlos* se analizaría de la siguiente manera:

Paso 1. Xs → XqXs (0)

Paso 2. Xq → Q (1)

Paso 3. Xs → S (1)

Interpretación: Q se interpretaría como *buen* y S como *Carlos*. Por lo que dijimos atrás, no nos ocupamos del artículo *el*.

Los sintagmas *estos niños, dos niños* y *buenas mesas* corresponden todos a la misma deducción pero con diferentes interpretaciones.

A un sintagma como *el lobo feroz* no le corresponde la misma deducción, porque tenemos que generar los elementos del sintagma de izquierda a derecha. La deducción de *el lobo feroz* sería ligeramente distinta:

Paso 1. Xs → XqXs (0)

Paso 2. Xs → S (1)

Paso 3. Xq → Q (1)

Ejercicio

Agregue una nueva regla al sistema para generar también los sintagmas:

- *un hombre alto y gordo*
- *una idea incorrecta pero interesante*
- *una ovejita flaca, pequeña y coja*

Una nueva ampliación

Si examinamos los sintagmas nominales *un hueso de hombre, el presupuesto del municipio, hospital para infantes* y los comparamos con *un hueso humano, el presupuesto municipal, hospital infantil* nos damos cuenta de que es posible hacer que un sustantivo, y más en general un sintagma nominal, funcione como un adjetivo, en el sentido de que califica a un sustantivo. Esto se puede lograr gracias a las partículas *de, para* y otras semejantes, que se intercalan entre un sustantivo y otro.

Ampliemos, pues, el sistema para que pueda generar este nuevo tipo de sintagmas nominales:

Axioma: Xs

Reglas 1: Xs → S

Regla 2: Xs → Xs + Xs

Regla 3: Xs → XqXs

Regla 4: Xq → Q

Regla 5: Xq → Xs

Con esta nueva regla estamos permitiendo que un sintagma que califica a un sustantivo (Xq) esté compuesto precisamente por un sintagma nominal (Xs) Veamos la deducción que le corresponde a *un hueso de hombre*:

Paso 1. Xs → XqXs (0)

Paso 2. Xs → S1 (1)

Paso 3. Xq → Xs (1)

Paso 4. Xs → S2 (3)

Interpretación: S1 es *un hueso*, S2 es *hombre* y *de* se intercala entre dos sustantivos como indicador del paso 3.

Hagamos el mismo proceso para la siguiente frase:

- *el color de esas montañas*

Paso 1. Xs → XqXs (0)

Paso 2. Xs → S1 (1)

Paso 3. Xq → Xs (1)

Paso 4. Xs → XqXs (3)

Paso 5. Xq → Q (4)

Paso 6. Xs → S2 (4)

Interpretación: S1 es *el color*, Q es *esas*, S2 es *montañas*.

Trate de hacer la deducción correspondiente al siguiente sintagma nominal: *la llave de la chapa de la puerta de la casa de mi tía*.

Gráficas

Hemos visto cómo hacer las deducciones e interpretar los elementos finales a los que llegamos (Q y S). Pero también podemos representar gráficamente esta deducción y su interpretación.

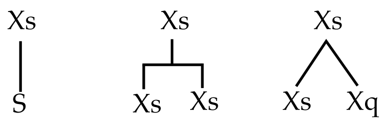
Tenemos básicamente tres tipos de reglas:

Xs → S

Xs → Xs + Xs

Xs → XqXs

Cada una tiene una representación gráfica distinta:



Combinando estas tres representaciones podemos hacer la gráfica de cualquier deducción de un sintagma nominal. Veámoslo con un ejemplo.

La deducción correspondiente al sintagma nominal *mis hermanos y los sobrinos de Carlos* es:

Paso 1. Xs → Xs+Xs (0)

Paso 2. Xs → XqXs (1)

Paso 3. Xq → Q (2)

Paso 4. Xs → S1 (2)

Paso 5. Xs → XqXs (1)

Paso 6. Xs → S2 (5)

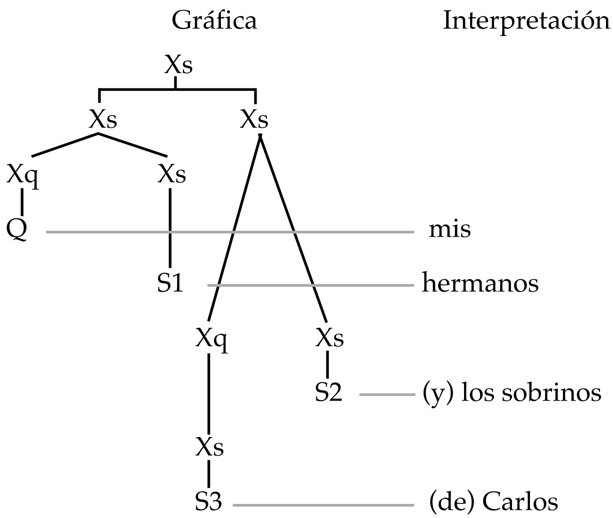
Paso 7. Xq → Xs (5)

Paso 8. Xs → S3 (7)

Interpretación:

Q es *mis*, S1 es *hermanos*, S2 es *sobrinos*, S3 es *Carlos* y + es *y*.

La gráfica de esta deducción sería la siguiente:



Oraciones

Hasta ahora no hemos analizado oraciones completas, pero lo que hemos hecho nos facilitará este trabajo. Una oración tiene dos partes fundamentales:

sintagma nominal: de lo que se habla. Se llama también sujeto.

sintagma verbal: lo que se habla. Se llama también predicado.

En las secciones anteriores hemos aprendido a analizar los sintagmas nominales. Veremos ahora cómo debemos ampliar nuestro sistema para los sintagmas verbales.

Para los propósitos de esta exposición, un sintagma verbal estará compuesto básicamente por un verbo y un complemento. Analizaremos entonces cada una de estas partes y agregaremos reglas a nuestro sistema que nos permitan hacer este análisis. También debemos cambiar el axioma porque ahora vamos a analizar oraciones completas. El nuevo sistema es el siguiente:

Axioma: Xo

Regla 1: Xs → S

Regla 2: Xs → Xs + Xs

Regla 3: Xs → XqXs

Regla 4: Xq → Q

Regla 5: Xq → Xs

Regla 6: Xo → XsYv

Regla 7: Yv → Yv + Yv

Regla 8: Yv → XcYv

Regla 9: Yv →V

Regla 10: Xc → Xs

Xo es cualquier oración, Yv representa un sintagma verbal, Xc el complemento del verbo (que es un sintagma nominal), V es el verbo. Las nuevas reglas incluyen nuevos símbolos, pero son del mismo tipo de las anteriores.

La regla 10 es del mismo tipo de la regla Xq → Xs y cuando se aplica también pueden aparecer las palabras *de*, *para*, *a*.

La regla 9 es una nueva regla que permite escoger de un conjunto de interpretaciones. El conjunto de interpretación de verbos es

V = {*pintar, venir, aullar, fabricar, ladrar, tejer, examinar*, ...}

Analicemos la oración *Carlos pinta las dos mesas*:

Paso 1. Xo→ XsYv (0)

Paso 2. Xs → S1 (1)

Paso 3. Yv → XcYv (1)

Paso 4. Yv → V (3)

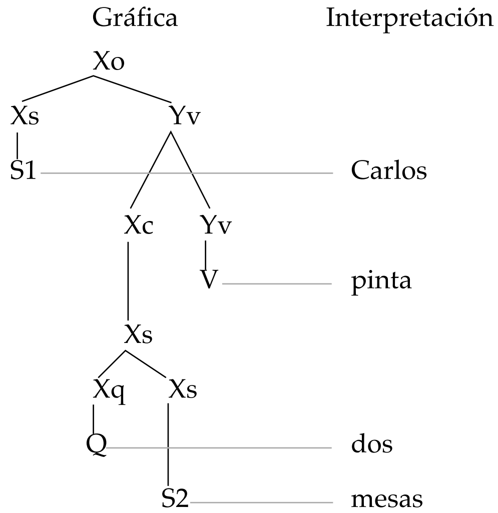
Paso 5. X c → Xs (3)

Paso 6. Xs → XqXs (5)

Paso 7. Xq →Q (6)

Paso 8. Xs → S2 (6)

Interpretación: S1 es *Carlos*, V es *pinta*, Q es *dos*, S2 es *mesas*.



Ejercicios

Haga la deducción de los siguientes sintagmas:

- *El ágil y veloz gato de mi tía*
- *La Guerra Santa según los templarios*
- *El muchacho terco insistió e insistió*
- *Los axiomas y las reglas conforman el sistema formal*
- *Ese asunto complicó la situación*
- *Usó el teléfono rojo y declaró la última guerra*

Esta última ampliación nos permite analizar bastantes oraciones pero todavía quedan muchas que no es posible detallar con este sistema que hemos construido. El objetivo de una gramática, como ya hemos dicho, es analizar cualquier oración del castellano. Podríamos pensar ahora ¿cuál sería la siguiente ampliación?

Un problema no resuelto aún, es si existe una gramática que modele toda la realidad que se desearía, ya que, como dijimos antes, esta gramática debería ser capaz de producir todas las oraciones que un hablante pueda decir.

El método axiomático

Hace cerca de 2.000 años Euclides recogió y organizó en secuencias lógicas prácticamente todos los hechos que se conocían sobre geometría. Esta Geometría Euclidiana es solo un ejemplo de un sistema lógico.

En un sistema lógico, un conjunto de elementos está dado, algunos de estos elementos están sin definir y se establecen ciertos hechos o enunciados, llamados axiomas, a partir de estos términos indefinidos. La conclusión se obtiene por razonamientos lógicos a partir de estos axiomas y definiciones. Si una rama de la matemática se desarrolla de esta manera, recibe el nombre de axiomática y el método empleado se llama método axiomático.

El razonamiento juega un papel importante en la vida diaria. De hecho, de no haber sido por la capacidad humana de razonar, es posible que no se hubiera podido avanzar mucho desde el estado primitivo. Esta capacidad se puede ver en la capacidad del hombre de moldear su entorno de modo que satisfaga sus necesidades.

Hace más de 2.000 años Aristóteles formuló sus leyes de razonamiento humano. Recientemente se han aceptado distintas aproximaciones: una lógica de Whitehead y Russell, una formalista encabezada por Hilbert y una intuicionista encabezada por Poincaré, Weyl y otros. Todas estas aproximaciones sobre el razonamiento humano han tenido efectos profundos en los fundamentos de las matemáticas.

El razonamiento juega un papel dominante en el desarrollo de un sistema lógico, razonamiento inductivo para descubrir teoremas y razonamiento deductivo para demostrarlos.

La necesidad y la curiosidad han llevado a la gente de todos los tiempos a investigar fenómenos y tratar de encontrar las leyes que gobiernan el universo físico. Por ejemplo, las inundaciones del Nilo y la necesidad de restablecer límites permitió a los antiguos egipcios desarrollar propiedades simples de triángulos rectángulos.

En las investigaciones se usan muchos tipos de razonamiento. Un doctor, por ejemplo, debe ser muy cuidadoso para diagnosticar una enfermedad específica. Debe hacer una investigación sistemática de todos los factores que pueden influir en la enfermedad. Debe anotar todos los síntomas, aun los triviales, sin excluir nada, hasta que haya probado que es irrelevante. El doctor clasifica, examina y combina adecuadamente los hechos hasta que finalmente obtiene el diagnóstico que lo capacita para curar al paciente.

Un razonamiento de esta clase es inductivo. Generalmente, para verificar una conclusión lograda por razonamiento inductivo, el investigador hace repeticiones del experimento. Algunas veces esto toma muchos años y de los enunciados que se obtienen sólo se puede estar más o menos seguro. El científico puede usar leyes de probabilidad para hacer predicciones reales, pero si se encuentra una excepción debe descartar la conclusión.

En el proceso deductivo la forma es más importante que el contenido mismo de los enunciados. No hay diferencia en la validez de la conclusión cuando se está hablando de cohetes en la luna o del significado físico de x y y. Las conclusiones obtenidas por un razonamiento deductivo son independientes de la naturaleza de los elementos relacionados y están completamente desconectadas de las opiniones, creencias, hechos, sentimientos o emociones que de cualquier manera estén relacionados con estos elementos.

En capítulos anteriores hemos visto algunos ejemplos de sistemas formales. En particular, con el acertijo de MU trabajamos con cuidado uno de ellos. Nuestras herramientas se reducían, en este caso, a un axioma y cinco reglas de deducción, que empleábamos en la generación de teoremas. En este capítulo trabajaremos un nuevo ejemplo de lo que es un sistema formal, aparentemente diferente a los que hemos visto hasta ahora. El objetivo principal, además de incluir un caso más en el que se utilizan dichos formalismos, es descubrir que la manera como se trabaja con sistemas formales, es siempre la misma.

¿Otro tipo de axiomas?

Para lograr este objetivo, es necesario que se tenga clara la manera en que se ha trabajado en los capítulos anteriores. Deberíamos poder responder sin dudar:

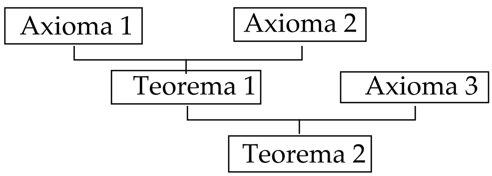
- ¿Qué es un axioma?
- ¿Para qué sirven las reglas de deducción?

- ¿Qué es un teorema?
- ¿Qué proceso se lleva a cabo al demostrar un teorema?

Hasta el momento, en todos los ejemplos acerca de sistemas formales, contábamos con un axioma. Esto hacía que nuestras demostraciones se vieran como una línea. Por ejemplo, en el Acertijo de MU, la demostración de que MIM es un teorema, se puede presentar así:

MI → MIMIMI → MIMIMUI → MIMIUI → MIMIIII → MIM

Si en vez de uno, el sistema formal tuviera más axiomas y otro tipo de reglas de deducción, probablemente las demostraciones no tendrían una apariencia tan sencilla. En vez de una línea de deducción tendríamos un árbol parecido al dibujado a continuación:



En donde en cada paso, además de las reglas de deducción, se pueden ver envueltos uno o varios de los axiomas.

Un ejemplo de esta situación lo tendríamos si los axiomas de nuestro sistema fueran los siguientes:

Axioma 1: Mañana llueve

Axioma 2: Si mañana llueve, no voy a clase

Axioma 3: Si no voy a clase, no entiendo

Axioma 4: Si no entiendo, me rajo en el parcial

La presentación gráfica de la demostración de que "Me rajo en el parcial" es un teorema, sería la siguiente:

Mañana llueve | Si mañana llueve no voy a clase

No voy a clase | Si no voy a clase no entiendo

No entiendo | Si no entiendo me rajo en el parcial

Me rajo en el parcial

En todo sistema formal, los axiomas son uno de los factores determinantes de los teoremas que se pueden deducir. Por ejemplo, en el caso del acertijo de MU, bastaba cambiar el axioma para hacer posible el –teorema imposible– MU.

Los axiomas en el resto de esta sección van a seguir mandando el juego. Siempre impondrán restricciones y darán libertades en el sistema que estemos trabajando. No obstante, su estructura será diferente: un axioma será una frase, en español, que afirma algo sobre los elementos que nos interesa modelar. Por ejemplo, podrían ser axiomas:

- Juan es alumno de Matebásica.
- Si mañana llueve, entonces Beatriz no va a clase.
- Todos los estudiantes de Psicología ven Matebásica.

El Modus Ponens

En el ejemplo de la sección anterior, teníamos cuatro axiomas. De esos cuatro, los tres últimos tienen una forma común, del estilo si “una afirmación”, entonces “otra afirmación”.

Fue gracias a que los tres últimos axiomas tenían esta forma que pudimos hacer la demostración del teorema a partir de los axiomas.

Pero, ¿cuál es la regla de deducción que nos permite hacer este proceso? Observemos el primer paso de la demostración anterior. En él utilizamos los axiomas.

“Mañana llueve” y “Si mañana llueve no voy a clase”

para obtener el teorema, “No voy a clase”.

Esta deducción parece ser obvia. Sin embargo, y como lo vimos en el acertijo de MU, para hacer deducciones, no basta tener los axiomas: hay que tener por lo menos una regla de deducción que se encuentre expresada de manera explícita. El problema que tenemos aquí consiste en expresar claramente la regla de deducción que nos permite utilizar los axiomas para obtener el teorema. Y la idea es que esta regla sea general. Esto es, que cuando tengamos cualquier par de axiomas que tengan "formas" similares a los axiomas anteriores, podamos aplicar la regla y obtener el teorema. De aquí se deduce, como sucedía con las reglas del acertijo de MU, que la regla que estamos buscando no debe depender de las palabras contenidas en los axiomas, sino de la forma misma de éstos. Por ejemplo, la primera regla se expresaba de la forma❑→❑❑❑. En el caso que nos interesa ahora, los "objetos" que manejamos son afirmaciones del estilo "mañana llueve". Para representar estas afirmaciones de manera general, vamos a utilizar unos nuevos símbolos. Estos son "Tatatá" y "Tatatí", donde cada uno de ellos representa una afirmación cualquiera. En el caso anterior, Tatatá representaba la afirmación "mañana llueve" y Tatatí, la afirmación "no voy a clase". La regla que estamos buscando, se puede entonces expresar de la manera siguiente:

Si tenemos que "Tatatá" y también tenemos que "si Tatatá, entonces Tatatí", podemos deducir el teorema "Tatatí".

Esta regla tiene un nombre: "Modus Ponens".

Veamos otro ejemplo: si tenemos que "Juan va a clase" y que "si Juan va a clase, entonces Juan toma notas", podemos deducir el teorema "Juan toma notas".

Errores en el uso de Modus Ponens

Aunque todo lo que hemos hecho hasta ahora parece evidente, no lo es. Sucede que hay situaciones en que se tienen afirmaciones con formas similares a las anteriores, pero para las cuales no se puede aplicar la regla Modus Ponens. Por ejemplo, a partir de los axiomas:

"Si hoy es domingo, entonces hoy no hay clase de Metafísica" y "Hoy no hay clase de Metafísica"

¿qué teorema se podría deducir? Usted podría estar tentado a decir que, a partir de los dos axiomas anteriores, es posible deducir el teorema "Hoy es domingo". Sin embargo, dese cuenta que la regla Modus Ponens no le permite hacer esta deducción. Para los dos axiomas en cuestión, Tatatá representaría la afirmación "hoy es domingo" y Tatatí la afirmación "hoy no hay clase de Metafísica" y lo que usted tiene como axiomas tiene la forma "si Tatatá entonces Tatatí" y "Tatatí". La regla Modus Ponens no se puede aplicar a este tipo de axiomas.

Otro error que se comete muy frecuentemente es suponer que porque uno ya tiene el axioma "Si Tatatá entonces Tatatí", ya puede obtener el teorema "Tatatí". Sin embargo, la regla Modus Ponens tampoco permite hacer esta deducción. Es necesario tener también el axioma "Tatatá" para ello. Por ejemplo si yo tengo que "Si hoy es domingo, entonces hay fútbol", no puedo deducir que "hay fútbol"; necesito también el axioma "hoy es domingo".

Finalmente, tenemos otro error que comete mucha gente relacionado con las afirmaciones del tipo "si Tatatá, entonces Tatatí". Consideremos un ejemplo. Suponga que usted tiene los dos axiomas siguientes:

Axioma 1: Si hoy es domingo, entonces hoy hay fútbol

Axioma 2: Hoy no es domingo

Mucha gente diría que se puede entonces deducir el teorema "hoy no hay fútbol". Pero esto no es posible a partir de la regla Modus Ponens. Le dejamos a usted la tarea de justificar por qué.

Ejercicio

Deduzca los teoremas y haga la representación gráfica de la deducción que se obtiene a partir de los siguientes axiomas.

Primer grupo:

Axioma 1: El sol calienta la tierra.

Axioma 2: Si el sol calienta la tierra, entonces las plantas crecen.

Axioma 3: Si las plantas crecen, entonces hay alimento para todos.

Segundo grupo:

Axioma 1: Me gano la lotería.

Axioma 2: Si me gano la lotería, entonces compro un carro.

La regla de los cuantificadores

Junto con la regla Modus Ponens hay otra regla de deducción que se utiliza muy frecuentemente; es la regla de los cuantificadores.

Como usted ya sabe manejar la idea de Tatatá y Tatatí, vamos a expresarla en esos términos. La regla dice lo siguiente:

Si tenemos que "Este es Tatatá" y que "Todos los Tatatá son Tatatí", entonces podemos deducir: "Este es Tatatí".

Dentro de la expresión de esta regla, estamos introduciendo un nuevo término: "Este". Este término pretende representar cualquier objeto que pueda tener la característica de ser Tatatá. Veamos unos ejemplos para aclarar la idea.

Si tenemos los axiomas: "Martha es alumna de esta sección" y "Todos los alumnos de esta sección son estudiantes de derecho", la regla de los cuantificadores nos permite deducir el teorema: "Martha es estudiante de derecho".

Observemos que, para estos axiomas, Tatatá representa "los alumnos de esta sección", Tatatí, "estudiantes de derecho" y Este está representado por "Martha".

En el caso de los dos axiomas "Carlos es estudiante de antropología", y "Todos los estudiantes de antropología son estudiantes pilos", Tatatá representa "estudiantes de antropología", Tatatí "estudiantes pilos" y Este representa a "Carlos". La regla de los cuantificadores nos permite deducir el teorema Este es Tatatí, o sea "Carlos es estudiante pilo".

Ejercicio

Deduzca los teoremas y haga la representación gráfica de la deducción que se obtiene a partir de los siguientes axiomas. En cada paso, diga qué representan Tatatá, Tatatí y Este.

Primer grupo:

Axioma 1: Todos los números pares son divisibles por 2.

Axioma 2: 48 es un número par.

Segundo grupo:

Axioma 1: MI es una palabra que tiene M al comienzo.

Axioma 2: Todas las palabras que tienen M al comienzo son palabras del acertijo de MU.

Axioma 3: Todas las palabras del acertijo de MU son palabras que tienen un número impar de I.

Un nuevo sistema formal

Las dos reglas de deducción que acabamos de presentar son muy potentes. Con ellas y con cualquier conjunto de axiomas que tengan la forma apropiada para aplicar las reglas podemos construir nuevos sistemas dentro de los cuales podemos hacer deducciones y obtener teoremas. Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos los siguientes axiomas:

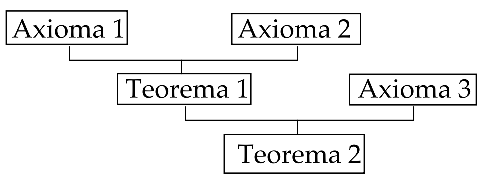
Axioma 1: Calisto es un satélite galileano.

Axioma 2: Todos los satélites galileanos son cuerpos que giran alrededor de Júpiter.

Axioma 3: Si Calisto es un cuerpo que gira alrededor de Júpiter, entonces Calisto es una luna de Júpiter.

Aplicando la regla de los cuantificadores a los dos primeros axiomas, podemos deducir el teorema 1: "Calisto es un cuerpo que gira alrededor de Júpiter". Con este teorema, el tercer axioma y la regla Modus Ponens, podemos entonces deducir el teorema 2: "Calisto es una luna de Júpiter".

Gráficamente esta deducción se puede representar de la siguiente manera.



Ahora consideremos los siguientes axiomas.

Axioma 1: Si hay escasez de gasolina, entonces se produce un aumento en el precio de la gasolina.

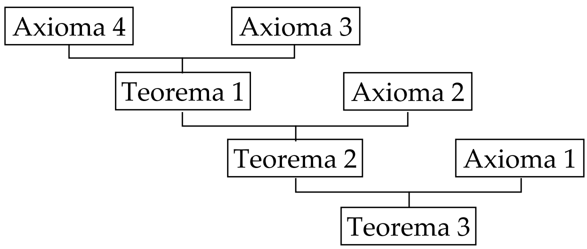
Axioma 2: Si hoy es un día en que hay problemas en la refinería, entonces hay escasez de gasolina.

Axioma 3: Todos los días en que se rompe el oleoducto son días en que hay problemas en la refinería.

Axioma 4: Hoy es un día en que se rompe el oleoducto.

A partir del axioma 4, el axioma 3 y la regla de cuantificadores, podemos deducir el teorema 1 "Hoy es un día en que hay problemas en la refinería". Con este teorema, el axioma 2 y la regla Modus Ponens, podemos deducir el teorema 2 "hay escasez de gasolina". Finalmente con este teorema, el axioma 1 y la regla Modus Ponens, podemos deducir el teorema 3 "se produce aumento en el precio de la gasolina".

Gráficamente esta deducción se puede presentar de la siguiente manera:



Es importante darse cuenta de que estas reglas no son nuevas, son las que comúnmente usamos en nuestros argumentos; el problema es que el mal uso de estas reglas puede llevarnos a argumentos falsos. El conocimiento de estas reglas debe permitirnos analizar un argumento que se nos presente para ver que realmente tiene sentido.

Veamos el siguiente argumento:

> El gobierno deseaba analizar la política de liberar las importaciones. Pidió a un asesor realizar el análisis y el resultado fue este informe: Si se elimina el impuesto a las importaciones aumentará la cantidad de artículos extranjeros que competirán con los artículos de la industria colombiana. La disminución en las ventas de artículos colombianos producirá detrimento en la industria, lo que nos llevará a un período de recesión, por lo cual no se debe implementar esta política.

¿Es correcto el proceso que se siguió para llegar a la conclusión?¿ El asesor asumió hechos importantes que no aparecen explícitamente?

Estas reglas también deben permitirnos relacionar información para ver qué conclusión se puede sacar de ella. Por ejemplo, si sabemos que:

> A nadie se le permite ingresar a un club de natación a menos que sepa tocar la flauta. Ninguna tortuga puede tocar la flauta. A nadie se le permite usar pantalones cortos rayados en la piscina del club, a menos que sea miembro del club de natación. Yo siempre uso pantalones cortos rayados en la piscina del club.

¿Qué conclusión puede obtenerse con esa información?

Las reglas también nos deben ayudar a analizar argumentos.

> La señora Atila compró un juego de utensilios de cocina anunciado como hecho de acero inoxidable. Después de utilizarlo durante unas cuantas semanas, notó que algunos de los utensilios empezaban a oxidarse. Decidió, pues, que el juego no era de acero inoxidable y lo devolvió para reembolso.

¿Qué es lo que se quiere demostrar con este argumento? ¿Qué es lo que se supone para demostrarlo? ¿A qué conclusión se llega?

Los sistemas sociales y las matemáticas

Tal vez una buena manera de ver un sistema social consistiría en subirse al piso cuarenta de un edificio y mirar por una ventana. Dada la complejidad de lo que se vería y la distancia a la cual lo estaríamos haciendo, podríamos pensar que lo que está allí abajo es algún tipo de gran máquina. Afortunadamente, nosotros sabemos que lo que está allá abajo es algo que comúnmente se conoce como un sistema social. Lo importante de realizar esta experiencia es darnos cuenta de la complejidad, variedad y variabilidad del sistema. Todo sistema social involucra, por definición, al ser humano. Por tanto, todo sistema social tiende a ser complicado. Sin embargo, nos encontramos en la obligación o, por lo menos, en la necesidad de estudiar y comprender tal sistema. Nuestro problema consiste, por tanto, en encontrar alguna manera eficiente de analizar y comprender los sistemas sociales.

Seguramente, la primera idea que se nos ocurriría sería la de quedarnos allá arriba y estudiar el sistema en toda su complejidad. No obstante, un sistema social está compuesto por tal número de elementos e interrelaciones diversas, que intentar comprender y analizar el sistema real es una tarea de titanes. Por otro lado, en el sistema real no es posible experimentar. Esto quiere decir que, si tomamos esta posición para su estudio, la única manera de conocer las implicaciones de una política es implementarla en el sistema; y esto puede llegar a ser muy costoso desde el punto de vista social.

Tal vez todo lo anterior sea más fácil de comprender si consideramos un ejemplo específico. Supongamos que estamos estudiando la situación de una pequeña ciudad. Somos abogados, arquitectos, o, de manera general, científicos sociales, y estamos interesados en el estudio del sistema que se nos presenta. En particular, y por alguna razón, estamos interesados en el problema específico del ancho de las calles. Alguien nos ha pedido que estudiemos la posibilidad de cambiar el ancho de las mismas. El tamaño de las calles está regulado por un conjunto de leyes y por tanto tenemos necesidad de conocer las opiniones de los abogados. Pero, obviamente tendremos que conocer las opiniones de los arquitectos, los científicos políticos, los antropólogos y varios otros más. Nuestro problema consiste en evaluar las consecuencias que, dentro del sistema, tendría la implementación de una ley que cambiase el ancho de las calles, haciéndolas más angostas.

Es más o menos claro que una política tal tendrá multitud de implicaciones dentro del sistema. Por ejemplo, es posible que el sistema de transporte público se vuelva muy ineficiente; que aparezcan problemas en los servicios públicos; y, también que, por razón del tamaño diferente de los andenes, la gente se sienta mucho más cómoda. Lo que nos debe interesar en última instancia es la gente, y en general el bienestar de la comunidad. Nuestro objetivo final es saber qué implicaciones podría llegar a tener la política que estamos estudiando desde el punto de vista del bienestar social. Y, ¿cómo podemos saberlo?

Al comienzo consideramos una posibilidad: podemos sencillamente estudiar el sistema real en toda su complejidad y, a partir de nuestra experiencia e intuición, tratar de predecir (o, mejor, adivinar) las consecuencias que la implementación de la política tendría desde el punto de vista del bienestar social. Sin embargo, no es difícil darse cuenta que tal actitud puede llegar a ser extremadamente ineficiente y muy costosa socialmente. En particular, es claro que sería una aproximación basada en gran parte en los sentimientos y la intuición y muy poco en la razón. Pero hemos de aceptar que para llevar a cabo una decisión apropiada, que sea comprendida y aceptada por los demás, ésta debe ser una decisión racional. Es decir una decisión donde queden claras las suposiciones de donde se parte y la manera como, a partir de esas suposiciones, se llega a las conclusiones que se desea sean aceptadas e implementadas.

Hay que lograr una simplificación

Un proceso racional para el caso que se está considerando sólo se puede llevar a cabo si tenemos una idea clara del sistema social que se está estudiando. Recordemos que nuestro problema consiste esencialmente en poder determinar cuáles van a ser los efectos que, desde el punto de vista del bienestar social, se obtendrán en caso de que se implemente la política. Esto será posible únicamente si logramos definir una simplificación del sistema real donde se encuentren especificados todos los elementos e interrelaciones que son relevantes con respecto a la política en cuestión. Necesitamos que sea una simplificación del sistema real pues, como ya vimos, en el sistema real no es posible ensayar posibles soluciones. Y debe ser una simplificación tal que contenga todos aquellos elementos que necesitaremos dentro de nuestro análisis racional. En otras palabras debemos construir un modelo del sistema real.

Una vez que hayamos logrado construir un modelo del sistema, nuestro problema estará muy cerca de su solución. Porque, en ese momento, lo que tenemos que hacer es implementar la política dentro del modelo y estudiar allí sus consecuencias. Esto será posible porque habremos construido un modelo donde los elementos e interrelaciones relevantes estarán claramente especificadas. El proceso que llevaremos a cabo será algo como lo siguiente: consideramos el elemento donde específicamente se va a implementar la política (por ejemplo el conjunto de leyes que regulan el ancho de las calles) y hacemos el cambio correspondiente en ese elemento; nuestro modelo nos mostrará que ese elemento está interrelacionado con varios más dentro del sistema. Dado que hemos hecho un cambio en el primero, esto implicará cambios en los segundos (por ejemplo, el transporte público y los servicios públicos); el modelo nos dirá cuáles serán los cambios que ocurrirán en los demás elementos del sistema pues éste nos presenta una simplificación de sus elementos e interrelaciones. Seguiremos, por lo tanto, un proceso en cadena consistente en sucesivos cambios en los elementos del sistema que estarán regulados y determinados por las interrelaciones entre esos elementos; llegará el momento en que habremos podido determinar, dentro de nuestro modelo, todos los efectos de nuestra política. En ese momento nos quedará faltando solamente un último paso: dados los efectos que dentro del modelo ha implicado la política, ¿cuál es el valor social de estos cambios? Aquí tendremos que hacer algunas suposiciones pero, al final, habremos logrado nuestro objetivo: tener una idea, basada en un proceso racional, de las consecuencias que la política implica desde el punto de vista del bienestar social.

Para poder analizar este tipo de problemas debemos entonces desarrollar herramientas que permitan llevar a cabo por lo menos los siguientes pasos:

- Definir el problema
- Idenficar las alternativas de solución
- Identificar los criterios de selección de las alternativas de solución
- Analizar, dentro del problema, las alternativas de solución de acuerdo a los criterios de selección

- Una vez escogida una solución, generar un discurso que permita defender esta solución como aquella que mejor satisface los criterios de selección

En este texto proponemos un tipo de aproximación al análisis de problemas. Esta aproximación no será una herramienta de solución al estilo de las sugeridas para los problemas matemáticos, sino más bien un conjunto de pautas a partir de las cuales cada quien podrá construir su método personal para analizar problemas desde un punto de vista formal.

La herramienta

Presentaremos a continuación una herramienta que nos permite analizar este tipo de problemas. Veámosla primero en un ejemplo:

Resulta que las directivas de una Universidad desean evaluar la bondad de una nueva política con respecto a la manera como se califica a los estudiantes de los cursos de matemáticas. Ellos desean saber si sería bueno introducir la siguiente política:

> La nota definitiva del curso dependerá únicamente de las notas de los parciales y de la nota del examen final.

El problema propone, desde un comienzo, solamente dos alternativas de solución:

- Introducir la política anterior
- No introducirla y mantener el *status quo*

Los criterios de selección

Con el fin de decidir qué es mejor, si implementar o no la política, es necesario analizar sus consecuencias. Los criterios de selección son las condiciones que permitirán comparar las implicaciones de cada una de las alternativas de solución, para así, poder escoger la mejor.

Estos criterios de selección los definen las personas interesadas en el problema; en este caso, las directivas de la Universidad. Ellos han determinado que el principal criterio de selección es:

> La calidad de la formación académica del estudiante

Los elementos del sistema

Evidentemente, no existe una "fórmula mágica" que nos permita identificar automáticamente los elementos relevantes del problema. Qué elementos identifica una persona depende, por lo menos parcialmente, de su posición ideológica y de su visión personal del problema. Sin embargo, la mayor parte de los elementos relevantes debería ser clara.

En el caso del problema que estamos considerando, la alternativa analizada involucra ya dos elementos:

- las notas definitivas de los estudiantes
- las notas de los exámenes y parciales

Por otra parte, el criterio de selección determina un tercer elemento:

- la formación académica del estudiante

Finalmente, identificamos un cuarto elemento, como aquel que pensamos que es determinante en la formación del estudiante:

- el trabajo sistemático y permanente durante el semestre

Aunque sería posible identificar más elementos dentro del problema (por ejemplo, en la lista anterior, no se está teniendo en cuenta al profesor), es esencial que el número de elementos que se determine sea reducido, puesto que, en caso contrario, no se estaría haciendo una simplificación del problema.

Las interrelaciones

El propósito ahora es identificar las interrelaciones entre estos elementos. No buscamos presentar todas las interrelaciones posibles, sino solamente aquellas que nos parecen relevantes en relación con las alternativas de solución y los criterios de selección.

En primera instancia, presentamos estas interrelaciones de manera informal, para después expresarlas dentro de un esquema que permita la evaluación de la alternativa de solución a partir de los criterios de selección.

La identificación de las interrelaciones es un proceso subjetivo. Esto no presenta un problema por ahora, puesto que lo importante es hacer explícita esta subjetividad. Podemos identificar dos interrelaciones entre los elementos:

- Los estudiantes le dan más importancia a las notas que a su trabajo en clase.
- El trabajo sistemático y permanente durante el semestre es el elemento que más aporta a la formación del estudiante.

Esta es una descripción extremadamente simplificada de la psicología del estudiante y de la situación que generalmente se encuentra en un salón de clase. Sin embargo, como primer ejemplo, nos permite darnos cuenta de la manera en que es posible expresar interrelaciones entre elementos que se hayan definido con anterioridad.

La forma superficial como se han expresado las interrelaciones no nos permite analizar el problema. Para ello es necesario expresar las interrelaciones de una manera explícita y formal que permita conectarlas unas a otras. Para ello basta notar que, en este caso particular, es posible hacerlo pensando únicamente en el aumento o la disminución de los elementos que se identificaron en un comienzo. Podemos expresar estas interrelaciones así:

- Si se aumenta la importancia de las notas en la evaluación del estudiante, entonces el estudiante disminuirá su trabajo sistemático y permanente durante el semestre.
- Si el estudiante disminuye su trabajo sistemático y permanente durante el semestre, entonces se disminuirá la calidad de su formación.

Los hechos

¿Qué tenemos hasta ahora? Tenemos un modelo que consta de cuatro elementos y dos interrelaciones. Y no tiene en cuenta ninguna alternativa de solución. La alternativa de solución es un "dato" externo al modelo, o lo que llamaremos un "hecho", en este caso se puede expresar así:

- aumentar importancia de las notas en la evaluación del estudiante

Una vez introducida la alternativa de solución dentro del modelo, podemos "evaluar" esta alternativa (o sea la política), en el sentido de que el modelo nos permite deducir las implicaciones de la misma.

La evaluación

Para hacer esta evaluación se hace necesario llevar a cabo el proceso lógico que permita llegar a una conclusión. Este proceso contiene únicamente dos pasos:

- el estudiante disminuye su trabajo sistemático y permanente durante el semestre (a partir del hecho y a)
- disminuir la calidad de la formación del estudiante (a partir de b y la conclusión anterior)

Esto quiere decir que, con base en el modelo, podemos concluir que, si se aumenta la importancia de las notas en la evaluación del estudiante (como lo propone la alternativa de solución), entonces se disminuye la calidad de la formación del estudiante. Esta es nuestra conclusión. Ahora que hemos deducido la implicación de implementar la alternativa de solución en el modelo, podemos evaluarla, dado que lo que se deduce del modelo (disminuir la calidad de la formación del estudiante) no satisface el criterio de selección.

La esencia de este proceso se resume en los siguientes aspectos:

- Se hizo una simplificación de un problema complejo (a esta simplificación la llamamos un modelo)
- El modelo presenta de manera explícita las opiniones del investigador acerca de la realidad que está considerando.
- Si se aceptan las suposiciones propuestas por el modelo, el modelo permite llegar a una conclusión evidente desde el punto de vista lógico.
- Dado lo anterior, la única manera en la cual es posible no estar de acuerdo con la conclusión que se obtiene del modelo, es no estando de acuerdo con las suposiciones expresadas en las interrelaciones que éste propone.

La definición del problema

Normalmente la persona que presenta el problema no es la misma persona que lo resuelve. Sin embargo, si somos nosotros quienes debemos resolver un problema, el primer paso que tenemos que hacer es asegurarnos de que el problema esté bien definido. Para ello, tenemos que verificar que se cumplan tres condiciones principales:

Primera. Que el sistema o situación general donde se desarrolla el problema esté suficientemente bien identificado. Si éste no es el caso, nosotros no podremos construir el modelo de la situación o, lo que puede ser peor, resolveremos el mismo problema, pero para una circunstancia diferente.

Segunda. Que exista por lo menos una alternativa de solución. Es importante darse cuenta que la herramienta que aquí se expone no tiene como propósito encontrar una solución al problema. Su propósito es el de evaluar una alternativa de solución. Esta alternativa de solución se expresa generalmente en la forma de una política que se desea instaurar dentro del sistema en consideración. Hay que notar que si somos capaces de evaluar varias alternativas de solución, de cierta manera estamos siendo capaces de encontrar una solución. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, dentro de la definición del problema que se nos da para resolver, deben estar contenidas las alternativas de solución que nosotros debemos evaluar.

Tercera. Que exista un criterio de selección. Los criterios de selección los debemos recibir de quien define el problema. Debemos tener una expresión clara de estos criterios de selección para poder atacar el problema y evaluar las alternativas de solución.

La construcción del modelo

Si el problema está bien definido, podemos entonces construir el modelo o el sistema formal. La construcción del modelo consta de los siguientes pasos:

- Identificación del lenguaje o elementos relevantes
- Identificación de las interrelaciones

Identificación del lenguaje

Cuando hablamos del lenguaje del modelo, queremos decir el conjunto de símbolos que vamos a usar para su construcción. En el ejemplo del capítulo anterior, este lenguaje estaba constituido sencillamente por las palabras o frases que identificaban elementos del sistema real. Aunque ésta no va a ser la única situación posible, podemos entonces pensar por ahora que la identificación del lenguaje consiste en la identificación de los elementos de la situación real que son relevantes para la alternativa de solución propuesta de acuerdo a los criterios de selección establecidos.

Es trascendental darse cuenta de que un problema no está definido únicamente por la situación real o sistema dentro del cual éste sucede. Un mismo sistema puede dar lugar a diferentes problemas, dependiendo de cuáles sean las alternativas de solución y cuáles sean los criterios de selección. Por consiguiente, la identificación de los elementos relevantes del problema depende directamente de cuál sea la alternativa de solución que se quiere evaluar y cuál sea el criterio de selección que se haya establecido.

Esta etapa de identificación de los elementos del modelo debe cumplir con otra condición trascendental: el número de elementos del modelo debe ser reducido. El secreto de la herramienta consiste en su sencillez. Nuestra herramienta nos permite solucionar problemas porque, a través de ella, construimos una simplificación del problema. Pero, para que nuestra herramienta sea sencilla, el modelo debe tener un número reducido de elementos.

La identificación de las interrelaciones

Una vez que se han identificado los elementos relevantes del sistema, es necesario identificar las interrelaciones entre estos elementos. Una interrelación es una afirmación que expresa la relación existente entre dos elementos y que representa una característica relevante del sistema con respecto a la alternativa de solución y al criterio de selección.

Por las mismas razones que se consideraron en el caso de la identificación de los elementos del sistema, en este caso nos interesa identificar únicamente las interrelaciones entre elementos que sean relevantes al problema en cuestión. En este sentido hay que hacer una selección de todas las posibilidades.

Las interrelaciones expresan características del sistema real. Es trabajo de quien resuelve el problema descubrir o identificar estas características. Ya hemos mencionado que este paso introduce visos de subjetividad en la solución del problema, pero que ésta no es una deficiencia de la herramienta sino, por el contrario, una ventaja, pues obliga a quien resuelve el problema a expresar explícitamente sus opiniones acerca del sistema real dentro del cual se está evaluando la solución.

En primera instancia, y con el propósito de simplificar esta etapa del proceso, la herramienta requiere que expresemos estas relaciones de manera informal. Podremos expresarlas en nuestro lenguaje corriente, siempre que la relación entre los elementos sea clara.

Deducción de la conclusión

Si hemos construido bien nuestro modelo en el sentido de que hemos identificado los elementos verdaderamente relevantes al problema y hemos determinado las interrelaciones relevantes al problema teniendo en cuenta el criterio de selección, podemos entonces introducir la alternativa de solución dentro del modelo y, a partir de ella, conectar las interrelaciones para deducir una conclusión que nos debe conducir a una afirmación acerca de la alternativa de solución de acuerdo al criterio de selección.

El proceso para conectar las interrelaciones hace uso de características fundamentales de la lógica elemental que vimos en el capítulo de método axiomático: las reglas Modus Ponens y cuantificadores.

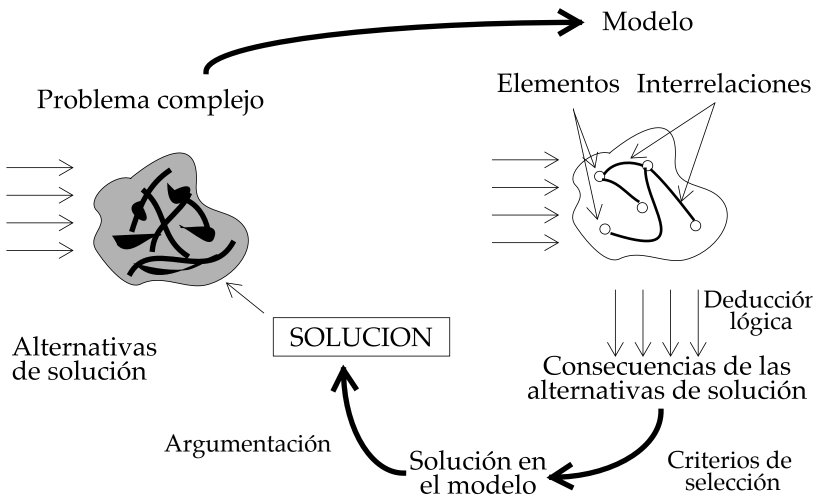
A través de este proceso de conexión de las interrelaciones podremos entonces llegar a nuestra conclusión.

La defensa de la tesis

En general se piensa que lo difícil no es llegar a la conclusión, sino ser capaz de defender racionalmente esta conclusión. Gracias a la herramienta, este problema desaparece por completo.

Si el modelo ha sido bien construido, la defensa de la validez de la conclusión a la que llegamos gracias a él es evidente. Basta mostrar el proceso por medio del cual hemos conectado las interrelaciones para llegar a la conclusión a partir de la alternativa de solución. Como este proceso hace uso de la lógica elemental, quien acepte las suposiciones involucradas en el modelo no tendrá más alternativa que aceptar la conclusión.

Todo este proceso puede verse así:



Los problemas de la herramienta

Nuestra herramienta no es infalible. Ella tiene varias desventajas y posibles problemas de los cuales hay que ser consciente. Entre ellos, se pueden mencionar los siguientes:

Que no sea posible llegar a una conclusión.

Esto sucede si, al construir el modelo, no hemos tenido en cuenta que es necesario introducir la alternativa de solución y por lo menos una interrelación que contenga el criterio de selección. Aún más, es posible que, habiendo cumplido con la condición anterior, no sea posible conectar las interrelaciones para llegar a una conclusión. En este caso, el defecto no es de la herramienta, sino de la construcción misma del modelo. Nosotros no habremos sido capaces de identificar las interrelaciones relevantes al problema.

Que nuestro interlocutor no acepte la conclusión.

Este es en realidad un problema menor, puesto que, como ya se mencionó, esta situación solamente se puede producir si nuestro interlocutor no acepta la validez de alguna de nuestras interrelaciones. Este ya es un punto subjetivo del proceso y requeriría ya sea de la construcción de un nuevo modelo o de la decisión de que existen posiciones de opinión entre nosotros y nuestro interlocutor acerca de las características del sistema real que se está considerando.

Ejercicio

Las directivas de la Universidad han decidido asignarle un trabajo para que usted lo resuelva. Dentro del espacio mismo de la Universidad, las directivas quieren que usted analice la siguiente política:

> Reducir en clase las explicaciones magistrales del profesor y fomentar la participación activa del alumno mediante la discusión a partir de hojas de trabajo que se han hecho en la casa.

El criterio de selección que le interesa a la Universidad es la calidad de la formación del estudiante.

Usted deberá construir un modelo de este problema aplicando cada uno de los pasos expuestos en el capítulo anterior para llegar a una conclusión acerca de la política de acuerdo al criterio de selección. Suponga que la Universidad se acaba de ganar la lotería y tiene recursos ilimitados.

Invéntese un problema y resuélvalo de acuerdo a las pautas de la herramienta que se expusieron en el capítulo anterior. Recuerde que, en este caso, usted debe proponer una alternativa de solución al problema y evaluarla de acuerdo a un criterio de selección que usted habrá determinado.

Un ejemplo de axiomatización

En este capítulo veremos cómo lograr una axiomatización de un caso real: artículos del código penal. Veremos qué tipo de reglas debemos agregar y cómo usarlas para poder hacer deducciones. Aunque la conclusión a la que lleguemos en este proceso no es sorprendente, lo importante es el proceso de axiomatización que realizaremos. Las reglas vistas hasta ahora no nos permiten manejar cualquier clase de expresiones, así que veremos cómo aumentar nuestro sistema para poder desarrollar uno más completo.

Un enunciado es *simple* cuando es una sencilla declaración de la cual se puede decir si es cierta o falsa pero no ambas. Por ejemplo

Hoy es martes

2 es primo

Usamos letras para representarlas, por ejemplo p, o q así:

p: *Hoy es martes*

q: *2 es primo*

Sin embargo dentro de nuestro lenguaje estas no son las únicas afirmaciones que manejamos. Hay otras expresiones que se obtienen combinando enunciados simples. Las reglas que veremos ahora nos permiten generar este tipo de expresiones complejas. Estas podríamos llamarlas reglas de producción de nuevas proposiciones a partir de una lista inicial que nos den. Si podemos estar seguros de que las reglas que usamos nos devuelven siempre cosas ciertas, no tendríamos que preocuparnos por la verdad de las cosas que produzca nuestro sistema, ya que todo sería nuevo conocimiento. Veamos algunas de estas reglas. Los conectivos *y*, *o* y *no* son los primeros que veremos en estas reglas de producción. La primera es una regla de *y*.

p: *Hoy es martes*

q: *2 es primo*

Si p es cierta y q es cierta, lo que obtenemos aplicando esta regla:

p *y* q: *Hoy es martes y 2 es primo*

es también cierto. La regla en símbolos sería así:

$$(p,q) \rightarrow p \textit{ y } q$$

Hay otras reglas de *y* que también cumplen esta condición:

$$p \textit{ y } q \rightarrow q$$

$$p \textit{ y } q \rightarrow p$$

Por ejemplo, si p *y* q: *María está gorda y Andrés come mucho,* es cierto, entonces es cierto p: María *está gorda* y también es cierto q: *Andrés come mucho.*

También tenemos una regla de *o* similar, en símbolos la representamos así:

$$p \rightarrow p \text{ o } q$$

q no aparece en el lado izquierdo, esto significa que el valor de verdad de q no importa, si p es verdadero, y aplicamos la regla de *o* a p con cualquier otra proposición, obtenemos una nueva proposición también verdadera.

Por ejemplo, si p: *El libro es interesante* es cierto entonces son ciertas:

El libro es interesante o el libro es aburrido

El libro es interesante o el libro es largo

El libro es interesante o hoy es lunes

Tenemos otra regla de *o* es:

$$q \rightarrow p \textit{ o } q$$

El orden en que se aplican las reglas y se producen las nuevas proposiciones es importante. Por eso es necesario agregar esta última regla; pero, en el fondo, es equivalente a la anterior.

La regla del *no* es:

$$p \rightarrow \textit{no } (\textit{no } p)$$

Por ejemplo, si p: *Los árboles están secos* es cierta, entonces *no* (*no* p): *no es cierto que los árboles no están secos* también es cierta.

Podríamos ver la regla de Modus Ponens como una regla de este tipo, donde se necesitan también dos enunciados ciertos para poder aplicarla.

Sería algo así:

$$(\text{p, Si p entonces q}) \rightarrow \text{q}$$

Veamos un ejemplo:

p: *Juan es estudiante*

q: *A María le gusta bailar*

Si p entonces q:*Si Juan es estudiante entonces a María le gusta bailar*

Usando la regla de modus ponens obtendríamos:

q: *A María le gusta bailar*

que sería cierta si p y Si p entonces q son ciertas.

La lista de estas reglas es:

(p, q) → p *y* q

p *y* q → q

p *y* q → p

p → p *o* q

q → p *o* q

p → *no* (*no* p)

(p, Si p entonces q) → q

La primera y ultima regla se aplican no a una proposición sino a dos y en la última una de las proposiciones debe tener la forma Si p entonces q. En este caso y de aquí en adelante, p y q no necesariamente son proposiciones sencillas.

Pero esta lista no contiene todas las reglas posibles de este tipo. Hay otras reglas que transforman enunciados ciertos en enunciados ciertos equivalentes y son diferentes a las vistas hasta ahora porque se pueden usar en los dos sentidos, es decir si aparece lo que está a la izquierda se puede sustituir por lo que está a la derecha y viceversa; en vez de → usaremos ↔ para indicar esto. Aquí están las reglas:

p *y* (q *o* r) ↔ (p *y* q) *o* (p *y* r)

p *o* (q *y* r) ↔ (p *o* q) *y* (p *o* r)

no (p *o* q) ↔ (*no* p) *y* (*no* q)

no (p *y* q) ↔ (*no* p) *o* (*no* q)

p *o* (q *y* *no* q) ↔ p

p *y* (q *o* *no* q) ↔ p

(Si p entonces q) ↔Si (*no* q) entonces (*no* p)

no (*no* p) ↔ p

Algunas de estas reglas se pueden deducir de otras, pero las tendremos todas para facilitar nuestro trabajo.

Ejercicio

Dé un ejemplo para cada una de las reglas, que compruebe que transforman o sustituyen enunciados ciertos en enunciados ciertos.

Código penal

Vamos a tomar como ejemplo nuestro código penal. Cada uno de sus artículos puede verse como una proposición formada con las reglas que vimos en la primera parte, pero si aceptamos cada uno de estos artículos como cierto, podemos usar las reglas de la última lista para producir proposiciones que serían también ciertas. Veamos el proceso

Capítulo II del código penal

De los delitos contra la seguridad del estado

Art. 119. - *Espionaje*. El que indebidamente obtenga, emplee o revele secreto político, económico o militar, relacionado con la seguridad del Estado, incurrirá en prisión de tres a doce años.

Art. 120. - *Violación de la tregua o armisticio.* El que violare o desconociere tratado, tregua o armisticio acordados entre la república y un Estado enemigo, o entre las fuerzas beligerantes, y no aceptare salvoconducto debidamente expedido, incurrirá en prisión de seis meses a cinco años.

Art. 121. - *Violación de inmunidad diplomática.* El que viole la inmunidad del jefe de un Estado extranjero o de su representante ante el gobierno colombiano, quedará sujeto a la pena de prisión de seis meses a dos años.

Art. 122. - *Ofensa a diplomáticos.* El que ofendiere en su dignidad a un representante de nación extranjera, en razón de su cargo, incurrirá en prisión de seis meses a tres años.

Art. 123. - *Violación de fronteras para explotación de recursos.* El extranjero que violare las fonteras para realizar dentro del territorio nacional acto no autorizado de explotación de recursos naturales, incurrirá en prisión de dos a cuatro años y multa de un mil a cincuenta mil pesos.

Atr. 26. - *Concurso de hechos punibles.* El que con una sola acción u omisión o con varias acciones u omisiones infrinja varias disposiciones de la ley penal o varias veces la misma disposición, quedará sometido a la que establezca la pena más grave, aumentada hasta en otro tanto.

A continuación vamos a hacer una traducción de los tres primeros artículos para poder trabajar con ellos. Primero identificaremos algunas proposiciones básicas a partir de las cuales construiremos las premisas equivalentes a los artículos del código. Cada una podría ser simplificada mucho más pero sólo nos interesa separar los delitos de las condenas.

a: *el acusado indebidamente obtuvo, empleó o reveló secreto político, económico o militar, relacionado con la seguridad del Estado*

b: *el acusado violó o desconoció tratado, tregua o armisticio acordados entre la república y un Estado enemigo, o entre las fuerzas beligerantes, y no aceptó salvoconducto debidamente expedido*

c: *el acusado violó la inmunidad del jefe de un Estado extranjero o de su representante ante el gobierno colombiano*

Estos son los posibles delitos que vamos a considerar. Las posibles penas las vamos a simplificar un poco para que el ejemplo sea más claro. Para cada delito vamos a tomar la máxima pena posible. Entonces tendríamos:

d: *el acusado tendrá prisión de doce años*

e: *el acusado tendrá prisión de cinco años*

f: *el acusado tendrá prisión de dos años* g: *el acusado es inocente*

Entonces los tres primeros artículos podríamos escribirlos así:

Si a entonces d

Si b entonces e

Si c entonces f

Pero como debemos tener encuenta el artículo 26, debemos cambiar un poco nuestro sistema.

Ax 1 : Si a *y no* b *y no* c entonces d

Ax 2 : Si *no* a *y* b *y no* c entonces e

Ax 3 : Si *no* a *y no* b *y* c entonces f

Ax 4 : Si a *y* b *y no* c entonces d

Ax 5 : Si a *y no* b *y* c entonces d

Ax 6 : Si *no* a *y* b *y* c entonces e

Ax 7 : Si a *y* b *y* c entonces d

Ax 8 : Si *no* a *y no* b *y no* c entonces g

Aunque en el artículo 26 se establece que la pena puede ser" aumentada hasta en otro tanto", no consideraremos esa precisión, para simplificar el ejercicio.

Esta última es la lista que nos interesa, en la cual aceptamos cada proposición como cierta.

Veamos cómo aplicar las reglas a este conjunto de axiomas para hacer deducciones. A continuación una lista de reglas que usaremos, sacada de las que vimos antes:

Regla 1. p *y* (q *o* r) ↔ (p *y* q) *o* (p *y* r)

Regla 2. p *o* (q *y* r) ↔ (p *o* q) *y* (p *o* r)

Regla 3. *no* (p *o* q) ↔ (*no* p) *y* (*no* q)

Regla 4. *no* (p *y* q) ↔ (*no* p) *o* (*no* q)

Regla 5. p *o* (q *y no* q) ↔ p

Regla 6. p *y* (q *o* *no* q) $\leftrightarrow$ p

Regla 7. (Si p entonces q) $\leftrightarrow$ Si (*no* q)entonces (*no* p)

Regla 8. *no* (*no* p) $\leftrightarrow$ p

Regla 9. (p, Si p entonces q) $\rightarrow$ q

Regla 10. (Si p entonces q, Si p entonces r) $\rightarrow$ (Si p entonces q *y* r)

Empezaremos con el axioma 7 y aplicaremos las reglas 7 y 4 sucesivamente.

Ax 7 Si a *y* b *y* c entonces d (0)

Re 7 Si (*no* d) entonces *no* (a *y* b *y* c) (1)

Re 4 Si (*no* d) entonces (*no* a) *o* (*no* b) *o* (*no* c) (2)

Ahora haremos lo mismo con el axioma 5.

Ax 5 Si a y *no* b y c entonces d (3)

Re 7 Si (*no* d) entonces (*no* a *y* *no* (*no* b) *y* c) (4)

Re 4 Si (*no* d) entonces (*no* a) *o* *no* (*no* b) *o* (*no* c) (5)

Re 8 Si (*no* d) entonces (*no* a) *o* b *o* (*no* c) (6)

Combinaremos lo obtenido en (2) y (6), usando la regla 10, así:

Re 10 Si (*no* d) entonces ((*no* a) *o* (*no* b) *o* (*no* c)) *y* ((*no* a) *o* b *o* (*no* c)) (7)

Re 2 Si (*no* d) entonces ((*no* a) *o* (*no* c)) *o* ((*no* b) *y* b) (8)

Re 5 Si (*no* d) entonces (*no* a) *o* (*no* c) (9)

Haga el mismo proceso con los axiomas 1 y 4 para obtener:

Si (*no* d) entonces (*no* a) *o* c (10)

Combinando este resultado con el de (9) y aplicando la regla 10 obtenemos

Re 10 Si (*no* d) entonces ((*no* a) *o* (*no* c)) *y* ((*no* a) *o* c) (11)

Re 2 Si (*no* d) entonces (*no* a) *o* ((*no* c) *y* c) (12)

Re 5 Si (*no* d) entonces (*no* a) (13)

Esto último se puede interpretar así: *Si el acusado no tiene 12 años de condena entonces no es culpable de obtener, emplear o revelar indebidamente secreto político, económico o militar, relacionado con la seguridad del Estado.* De nuevo, la conclusión no es muy interesante, pero el objetivo es mostrar cómo es posible axiomatizar ejemplos reales.

Consideremos ahora otros tres artículos del código penal:

Delitos contra el sufragio

Art. 248. - *Perturbación electoral*. El que por medio de violencia o maniobra engañosa, perturbe o impida votación pública, o el escrutinio de la misma, incurrirá en prisión de uno a seis años

Art 249. - *Constreñimiento al elector*. El que mediante violencia o maniobra engañosa, impida impida a un elector ejercer el derecho de sufragio,, incurrirá en prisión de seis meses a cuatro años.

Art. 254 .- *Fraude electoral.* El que falsifique, inutilice, sustraiga, destruya, oculte o sustituya registro electoral, sellos de urna o de acta triclave, incurrirá en prisión de seis meses a tres años

Con estos tres y teniendo en cuenta el artículo 26, podríamos formar un sistema axiomático que resultaría igual al del ejemplo anterior, sólo con una interpretación distinta para las letras que usamos. Todo lo que demostramos anteriormente se puede trasladar aquí ya que el punto de partida (los axiomas) y el proceso (las reglas) son las mismas.

Ejercicio

Escriba explícitamente cómo se interpretarían en este modelo a, b, c, d, e, f y g del ejemplo anterior y dé la interpretación de cada una de las deducciones hechas hasta ahora.

Estos dos ejemplos nos muestran que para el mismo sistema axiomático tenemos dos realidades (o modelos) distintos en los cuales se puede interpretar todo lo que produzca el sistema. Además estas nuevas deducciones son ciertas en cada modelo.

Si tomamos una proposiciones simples, usamos la reglas de producción para producir algunas propociones más complejas, asumimos que éstas últimas son verdaderas y aplicamos las reglas de esta lista, podemos estar seguros de que cualquier cosa que resulte será verdadera. Una pregunta interesante sería ver si cualquier cosa verdadera que use estas proposiciones, se puede deducir de nuestro sistema.

Sistemas axiomáticos

por Raúl Meléndez

La consideración de dos sistemas axiomáticos nos permitirá ejercitarnos un poco en la demostración de teoremas y también nos será útil para desarrollar algunos conceptos fundamentales referentes al método axiomático (tales como consistencia, independencia, interpretación, modelo). Con ayuda de estos conceptos podremos comprender mejor uno de los logros más significativos de la matemática moderna: el descubrimiento de las geometrías no euclidianas.

Un primer ejemplo de sistema axiomático

Como ya hemos visto en la introducción histórico-dramática y en el método axiomático, en un sistema axiomático abstracto se estipulan al comienzo ciertos enunciados llamados axiomas, los cuales se asumen sin demostración. Estos axiomas establecen relaciones entre los conceptos o términos básicos de la teoría, los cuales permanecen indefinidos mientras no se les dé una interpretación de manera que se satisfagan los axiomas.

En el primer sistema axiomático que consideraremos, llamémoslo sistema S, los términos indefinidos son "objeto de tipo A" y "objeto de tipo B" y los axiomas son:

Axioma 1: Todo objeto de tipo B es un conjunto de objetos de tipo A.

Axioma 2: Existen por lo menos dos objetos distintos de tipo A.

Axioma 3: Si X y Y son objetos distintos de tipo A, existe exactamente un objeto de tipo B que contiene a X y Y.

Axioma 4: Si **a** es un objeto de tipo B siempre existe un objeto de tipo A que no está en **a**.

Axioma 5: Si **a** es un objeto de tipo B y X es uno de tipo A que no está en **a**, entonces existe exactamente un objeto de tipo B que contiene a X y que no tiene objetos en común con **a**.

Axioma 6: Dos objetos de tipo B son distintos si y sólo si no constan de exactamente los mismos objetos de tipo A.

A pesar de que no sabemos el significado de los objetos de tipo A o de los de tipo B, podemos deducir algunos teoremas a partir de los 6 axiomas dados:

Teorema 1: Todo objeto de tipo A se encuentra en, por lo menos, dos objetos distintos de tipo B.

Demostración: Sea X un objeto de tipo A.

Existe por lo menos otro objeto de tipo A al que podemos llamar Y (axioma 2).

Existe un objeto a de tipo B que contiene a X e Y (axioma 3).

Existe un objeto Z de tipo A que no está en **a** (axioma 4).

Existe un objeto b de tipo B que contiene a X y Z (axioma 3).

a y **b** son distintos (axioma 6), por lo tanto X se encuentra en por lo menos dos objetos distintos de tipo B.

Teorema 2: Todo objeto de tipo B contiene por lo menos un objeto de tipo A.

Demostración: La demostración se hace "por contradicción", es decir, suponemos que existe un objeto a de tipo B que no contiene objetos de tipo A y llegaremos a que esto implica una contradicción.

Existen por lo menos dos objetos distintos X e Y de tipo A (axioma 2).

Existe un objeto **b** de tipo B que contiene a X e Y (axioma 3).

Existe un objeto Z de tipo A que no está en **b** (axioma 4).

Existe un objeto **c** de tipo B que contiene a X y Z.

b y **c** son distintos (axioma 6) y además no tienen elementos en común con **a**. Esto contradice el axioma 5.

Ejercicio

Demuestre los siguientes teoremas (recuerde que lo más importante es que usted debe justificar cada paso de sus demostraciones mediante los axiomas o los teoremas ya demostrados):

Teorema 3: Todo objeto de tipo B contiene por lo menos dos objetos distintos de tipo A.

Teorema 4: Existen por lo menos 4 objetos de tipo A distintos.

Teorema 5: Existen por lo menos 6 objetos de tipo B distintos.

Consistencia y modelos de un sistema axiomático

En la discusión sobre las geometrías no euclidianas se hizo énfasis sobre el hecho de que una propiedad fundamental que debe exigirse de un sistema axiomático es su consistencia lógica. Recordemos que:

> un sistema axiomático es **consistente** si no implica ninguna contradicción.

Supongamos que a los axiomas definidos antes agregamos el siguiente:

Axioma 7: Existe un objeto de tipo B que consta de un sólo objeto de tipo A.

Entonces se obtendría un sistema inconsistente ya que este nuevo axioma contradiría el teorema 3. Así pues, para establecer la inconsistencia basta mostrar que del sistema se deducen dos afirmaciones contradictorias. Pero suponiendo que esto no ocurra, ¿cómo probar que un sistema axiomático es consistente?

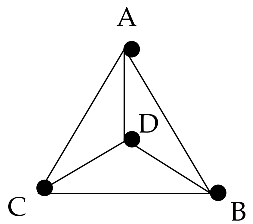
Consideremos nuestro sistema S. De él hemos deducido varios teoremas y hasta ahora no hemos encontrado ninguna contradicción. Sin embargo ¿cómo poder estar seguros de que en un futuro, a medida que se vayan demostrando más y más teoremas, no se encontrarán dos teoremas que se contradigan? No parece fácil responder esta pregunta pues no tenemos ninguna manera de formular todos los teoremas que se siguen de los axiomas.

Para que los axiomas y teoremas de un sistema axiomático abstracto adquieran un significado preciso es necesario interpretar los términos indefinidos del sistema. Pero una interpretación será adecuada solamente en el caso de que ella sea compatible con los axiomas.

Un **modelo** de un sistema axiomático es una atribución de significaciones a los términos indefinidos del sistema, de modo que los axiomas al ser interpretados se conviertan en enunciados verdaderos.

Ahora bien, puesto que los teoremas de un sistema axiomático son consecuencias lógicas válidas de los axiomas, entonces se debe cumplir que si los axiomas llegan a ser verdaderos, entonces los teoremas también lo serán. Y como en un modelo los axiomas se transforman en enunciados verdaderos, todos los teoremas también son enunciados verdaderos en el modelo. De aquí se sigue que si se logra encontrar un modelo para un sistema axiomático entonces el sistema no puede ser inconsistente, pues si lo fuera tendríamos dos enunciados que al ser interpretados en el modelo serían a la vez verdaderos y contradictorios, lo cual es imposible. Por lo tanto: si existe un modelo para un sistema axiomático, entonces éste es **consistente**

Ahora describiremos un modelo para S, lo cual garantizará su consistencia. La interpretación se basa en la siguiente figura:



Los objetos de tipo A se interpretan como los puntos de la figura (A,B,C y D) y los de tipo B se interpretan como las líneas, haciendo la salvedad de que como cada línea está totalmente determinada por sus extremos, se puede identificar cada línea con el par de puntos extremos (hay entonces 6: AB, AC, AD, BC, BD y CD).

Para probar que esta interpretación constituye realmente un modelo hay que verificar que, en efecto, se satisfacen los 6 axiomas. El axioma 1 se satisface pues ya hemos observado que cada línea de la figura puede identificarse con un conjunto de 2 puntos. El axioma 2 también se cumple, ya que la afirmación:

Existen por lo menos dos puntos distintos

es válida en la figura (de hecho existen 4 puntos distintos). La verificación de los demás axiomas la dejamos como ejercicio.

Ejercicio

Un sistema axiomático puede tener modelos muy diversos. Para ilustrar esto daremos las descripciones de otros dos modelos de S (se deja nuevamente como ejercicio la verificación de los axiomas):

1. Si por "objetos de tipo A" entendemos los puntos del plano cartesiano y por "objetos de tipo B" entendemos las rectas del plano cartesiano, se obtiene un modelo de S.

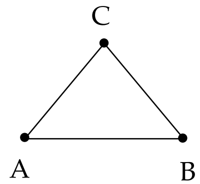
2. Ahora imaginemos la siguiente situación: el "loco" Higuita, el "chonto" Herrera, el "pibe" Valderrama y el "palomo" Usuriaga, se encuentran alrededor de una mesa compartiendo unas cuantas "polas". Interpretando los objetos de tipo A como los 4 "cracks" y los objetos de tipo B como las parejas de amigos que se pueden formar entre ellos (naturalmente que todos los 4 son muy amigos el uno del otro) se tiene otro modelo más de S.

La independencia de los axiomas

> Un axioma de un sistema axiomático es **independiente** de los demás si no se puede demostrar o refutar a partir de ellos.

El que un axioma no sea independiente quiere decir que puede establecerse como teorema a partir de los otros axiomas y entonces no es necesario asumirlo como un supuesto indemostrado. Ahora bien, para probar la independencia de un axioma se puede recurrir a la construcción de ciertos modelos. Veremos esto a través de ejemplos.

Probaremos que el axioma 5 del sistema S es independiente de los demás. Si el axioma 5 se pudiera demostrar a partir de los otros, entonces en cualquier modelo de los otros axiomas se cumpliría también el 5. Por lo tanto para probar la independencia del quinto axioma basta encontrar un modelo que satisfaga los demás axiomas de S pero no el quinto. Construimos entonces el siguiente modelo:



Los objetos de tipo A son los puntos A, B y C y los de tipo B son las "líneas" AB, AC y BC (o podemos escribir más rigurosamente {A,B}, {A,C} y {B,C}, para evidenciar que las líneas son conjuntos de puntos). Claramente esta interpretación satisface los axiomas 1, 2, 3, 4 y 6. El quinto, sin embargo, no se cumple puesto que dada la línea AB y el punto C exterior a ella, no existe ninguna línea que contenga a C y que no tenga puntos en común con AB (es decir, que sea paralela a AB).

En general, si existe un modelo en donde valgan todos los axiomas de un sistema a excepción de uno de ellos, entonces éste axioma es independiente de los demás. Más adelante veremos cómo la construcción de modelos de las geometrías no euclidianas sirve para establecer la independencia del famoso quinto postulado de Euclides.

El sistema G7

Para lograr una mayor familiaridad con los importantes conceptos introducidos en las secciones anteriores vamos (o dicho más exactamente usted va) a estudiar otro sistema axiomático al que llamaremos **G7** (pese a lo que se podría sospechar, nuestro **G7** no tiene nada que ver con el temible Grupo de los Siete):

Términos indefinidos: "treca" y "tupón".

Axiomas:

1. Una treca es un conjunto de tupones.

2. Dos trecas son iguales si y sólo si constan de exactamente los mismos tupones.

3. Existe por lo menos una treca.

4. Si A y B son dos tupones distintos, existe exactamente una treca que contiene a A y B.

5. Dos trecas distintas contienen por lo menos un tupón común a ambas.

6. Toda treca contiene exactamente 3 tupones.

7. No todos los tupones pertenecen a la misma treca.

Ejercicios

Y ahora sí a divertirse!

1. Demuestre los siguientes teoremas:
   Dos trecas distintas tienen exactamente un tupón en común.
   Existen tres tupones que no pertenecen todos a la misma treca.
   Existen por lo menos siete tupones.
   Existen exactamente siete tupones.

2. Pruebe que el sistema G7 es consistente construyendo un modelo.
3. Encuentre otro modelo de G7 distinto al encontrado en 2.
4. Mediante la construcción de un modelo adecuado, pruebe que el axioma 7 es independiente de los demás.
5. Repita el ejercicio 4 para el caso del axioma 6.

Para que no se descorazone ahí va una fácil:

6. Dé por lo menos tres razones distintas para que el sistema se llame G7.

Regreso al futuro III

por Raúl Meléndez

Euclides viaja por tercera vez al futuro (¡como si no hubiese escarmentado con sus dos viajes anteriores!) y aterriza en una de las calles de la ciudad de Kazan. Al caer se da cuenta de que por la misma acera se acerca Lobachevski. Trata de cambiar rápidamente de acera pero ya es demasiado tarde!

Lobachevski: ¡Hola viejo Euclides! Qué alegría volver a verte!

Euclides: Ejem... Sí, sí joven Nicolás. Lo mismo digo yo.

Lobachevski: Deseaba volver a hablar contigo, pues la última vez te quedé debiendo algunas explicaciones sobre la consistencia de las geometrías no euclidianas. Pero a juzgar por el final de nuestra última conversación, tal vez no tengas interés en oír más sobre el tema.

Euclides: Al contrario, me interesa muchísimo. En los últimos días he aprovechado los largos ratos de ocio en mi tumba para aprender algo más sobre los desarrollos modernos del método axiomático. He estudiado con cierto detenimiento dos tipos de geometrías pequeñas, una de 4 puntos y otra de 7 puntos, con sus respectivas axiomatizaciones. A pesar de ser mucho más chiquitas que la euclidiana, no dejan de ser complejas y hasta interesantes. Yo creo que el esfuerzo ha valido la pena pues algo me ha quedado sobre los conceptos de modelo, consistencia e independencia.

Lobachevski: Magnífico. Entonces no creo que vayas a tener mayores dificultades para comprender lo que quería explicarte.

Euclides: Soy todo oídos.

Lobachevski: El otro día te decía que, a pesar de que algunos resultados de las geometrías no euclidianas son anti-intuitivos y aparentemente falsos, estas nuevas geometrías son tan consistentes como la euclidiana. ¿Lo recuerdas?

Euclides: Lo recuerdo vagamente.

Lobachevski: Pues bien, para demostrar esto se han construido modelos que establecen la independencia del postulado de la paralela y que garantizan la consistencia de las geometrías de Lobachevski y de Riemann.

Euclides: O sea modelos en los cuales valen todos los postulados euclidianos exceptuando el de la paralela.

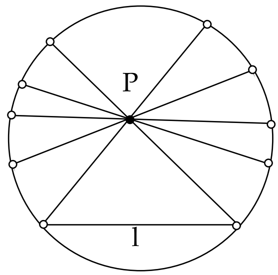
Lobachevski: Veo que has sabido aprovechar muy bien tus ratos de ocio de los últimos días. Los modelos más sencillos de las geometrías no euclidianas serán inventados apenas dentro de unas décadas, pero espero que no tengas inconveniente en que nos adelantemos un poco en el tiempo y...

Euclides: Ningún inconveniente. Después de todo, ¿qué son unos cuantos añitos comparados con más de 20 siglos?

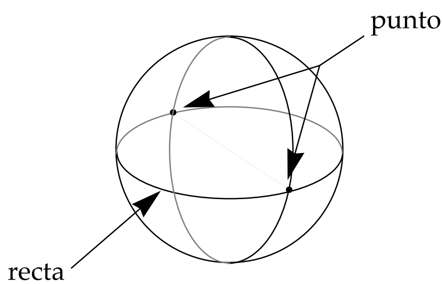
Lobachevski: Muy bien. Antes de describirte los modelos conviene hacer una pequeña observación sobre el segundo postulado de los Elementos. En el se estipula que dado un segmento de recta, éste puede prolongarse indefinidamente en ambas direcciones. Esto no debe implicar que las rectas son infinitas, sino que son ilimitadas. Esta sutil distinción se hará más clara cuando veamos los modelos, así que ¡al grano! En el primer modelo que te describiré vale que dada una recta y dado un punto exterior a ella se pueden trazar un número infinito de paralelas a la recta pasando por el punto.

Euclides: La curiosidad me está picando fuertemente!

Lobachevski: Supongamos que por “puntos” entendemos solamente los puntos que están en el interior de un círculo, es decir, se excluyen los de la circunferencia y los que están en el exterior del círculo. Y por “rectas” entenderemos las cuerdas del círculo sin sus extremos, pues estos están en la circunferencia que ya hemos excluido. Con esta interpretación valen todos los postulados euclidianos menos el quinto, como se ve en esta figura:



Ahora veamos un modelo sin paralelas. Consideremos la superficie de una esfera. Interpretemos "recta" como cualquiera de los llamados grandes círculos de la esfera. Dicho sea de paso, el camino más corto entre dos lugares de la superficie de la esfera es un arco de uno de estos grandes círculos. Esto lo saben muy bien los marinos. Ahora bien, dos de estos grandes círculos se cortan en dos antípodas, o sea, en dos puntos diametralmente opuestos del cascarón esférico. Esto nos sugiere interpretar "punto" no como un simple punto de la superficie esférica, sino como una pareja de puntos diametralmente opuestos. Es claro que en este modelo no hay rectas paralelas. Sin embargo los demás postulados de la geometría euclidiana sí se satisfacen.



Euclides: Todo lo que me cuentas me parece muy bonito, pero me parece que la geometría euclidiana sigue jugando el papel verdaderamente fundamental, ya que estos modelos se basan en objetos euclidianos familiares como el círculo y la esfera, cuyas propiedades básicas ya fueron demostradas en los "Elementos".

Lobachevski: Tienes razón. Y eso significa justamente que si la geometría euclidiana es lógicamente consistente, entonces también lo son las no euclidianas. Pues dentro de la geometría euclidiana se han construido modelos para éstas.

Euclides: Todavía tengo mis reservas. La más importante es que me parece que lo de las geometrías no euclidianas es como un jueguito lógico, que si bien no deja de ser muy interesante, está algo alejado de la realidad.

Lobachevski: La relación de estos sistemas geométricos con la realidad empírica es algo que no atañe al geómetra puro. El problema de decidir cuál de las distintas geometrías describe mejor el espacio real (¡si es que tal cosa existe!) en que vivimos es un problema que debe ser resuelto por una ciencia de tipo empírico. Pero te puedo contar aún más. En el próximo siglo un físico que será muy celebre y se llamará Albert Einstein utilizará en sus teorías un modelo de geometría que no es euclidiano. Así pues que lo que hoy parece un juego lógico, tendrá una significación muy grande para nuestra comprensión del mundo físico.

Euclides: Bueno tal vez tenga que hacer un nuevo viaje al futuro para enterarme mejor de esas cuestiones. Por hoy creo que ya he aprendido suficiente.

Lobachevski: Ha sido un verdadero placer conversar contigo.

El final de la historia

por Raúl Meléndez

En este capítulo discutiremos informalmente uno de los logros intelectuales más importantes de nuestro siglo: el llamado teorema de Incompletitud de Gödel. Este teorema tiene consecuencias muy importantes para la filosofía formalista de las matemáticas, pues revela que el formalismo tiene limitaciones intrínsecas, en el sentido de que ningún sistema formal, por poderoso que éste sea, puede representar totalmente la complejidad del razonamiento matemático. Para poder comprender mejor la significación de este teorema, esbozaremos brevemente el contexto histórico dentro del cual surgió.

Cuando se examina atentamente una argumentación deductiva (ya sea de un matemático, científico o filósofo) se advierte que ésta se basa en un razonamiento lógico que se desarrolla según ciertos patrones y reglas. Este hecho sugiere la cuestión de si dichos patrones y reglas pueden explicitarse y formalizarse en un sistema lógico que capture la esencia del razonamiento deductivo. Esta cuestión se ha planteado desde tiempos muy antiguos, que se remontan por lo menos hasta Aristóteles (siglo IV a. C.), quien intentó reducir los tipos de argumentación válida usados en la matemática y la filosofía de su época, a la aplicación sistemática de cierto número de reglas fijas (si bien él se centra casi exclusivamente en una forma de razonamiento: el silogismo).

La lógica, entendida como el estudio de las reglas válidas del pensar, fue casi totalmente dominada por la influencia de la obra de Aristóteles hasta el siglo XVII. En este siglo el filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) se plantea como uno de sus grandes proyectos la formalización del lenguaje y el pensamiento. Leibniz quería encontrar una "característica universal", entendiéndose por tal, un lenguaje simbólico en el cual se pudiesen expresar todos los pensamientos posibles y que permitiera, mediante la combinación mecánica de símbolos, formular argumentos deductivos con los que se pudiera resolver cualquier tipo de controversia (filosófica, científica, etc...).

Si bien Leibniz no alcanzó ni de lejos a culminar su ambicioso proyecto, éste guió buena parte de su obra (en particular lo que tiene que ver con el cálculo infinitesimal). Durante la segunda mitad del siglo pasado y los primeros años de nuestro siglo, varios matemáticos, filósofos y lógicos, entre los cuales cabe mencionar a George Boole, Gottlab Frege, Giuseppe Peano, Bertrand Russell y A.N. Whitehead, continuaron trabajando en la dirección esbozada por Leibniz y lograron sentar las bases de lo que se llamó "lógica matemática"(también se le denomina "lógica simbólica" o "lógica formal"). Esta lógica matemática ya no se ocupa del pensamiento en general, sino del razonamiento matemático en particular.

Paralelamente al surgimiento de la lógica matemática, se daban en la matemática avances muy significativos tales como la "aritmetización del análisis" y la creación de la teoría de conjuntos.

Con la aritmetización del análisis se pretendió fundamentar la matemática clásica sobre la noción básica de número natural. Quizá la expresión más audaz de este programa se encuentra en las palabras del matemático alemán Leopold Kronecker: "Dios creó los números naturales. Lo demás lo hizo el hombre". El escollo más importante que había que superar para poder aritmetizar el análisis y, en general, las matemáticas clásicas, era el de la incompatibilidad entre magnitudes continuas (como las magnitudes geométricas, las cuales estaban ligadas con los números reales) y magnitudes discretas (como los números enteros y naturales). La brecha que existía entre las matemáticas de lo continuo (que comprendía entre otros al análisis infinitesimal y la geometría) y la aritmética, basada en la noción de número natural, se logró cerrar gracias a las contribuciones de George Cantor, Richard Dedekin, Karl Weierstrass entre otros. Ellos lograron, hacia 1870, definir los números reales a partir de los racionales, los cuales podían definirse a su vez en términos de los enteros y éstos finalmente en términos de los naturales. Esto permitió que la noción de número natural pudiera ser considerada como la noción fundamental de todas las matemáticas clásicas.

También a finales del siglo XIX fue creada por el matemático alemán George Cantor la teoría de conjuntos. Esta teoría fue desde sus comienzos muy polémica pero también muy prometedora. El concepto de conjunto permitía no solamente definir los números naturales ($0=\varnothing$, $1=\{0\}$, $2=\{0, 1\}$, etc.) sino también otros conceptos fundamentales que se usaban antes de modo intuitivo: función, relación, orden, ... La teoría de conjuntos parecía proporcionar entonces una base sólida y unificadora sobre la cual podía construirse toda la matemática. Sin embargo, justamente cuando esta controvertida teoría comenzaba a ganar una aceptación más o menos unánime dentro de la comunidad matemática, se descubrieron algunas paradojas que afectaban los cimientos mismos de esta teoría y que provocaron una "crisis de fundamentos" en la matemática.

La más célebre de las paradojas relacionadas con la noción de conjunto fue formulada por Bertrand Russell en 1903. Existen conjuntos que no son elementos de sí mismos; por ejemplo el conjunto de los números naturales no es él mismo un número natural. Se pueden concebir también otros conjuntos que sí son elementos de sí mismos: el conjunto de todas las creaciones humanas es también una creación humana y por lo tanto tendría que ser un elemento de sí mismo. Lo mismo ocurriría con el conjunto de todos los conjuntos. Ahora bien, consideremos un conjunto C formado por todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. ¿Es C un elemento de sí mismo? Si uno examina atentamente esta pregunta advierte que la existencia del conjunto C lleva a una contradicción: C tendría que pertenecer y no pertenecer a sí mismo.

Para aclarar el sentido de la paradoja de Russell vale la pena considerar la siguiente variante de la misma: hay adjetivos que no se aplican a sí mismos. Por ejemplo el adjetivo azul no es, él mismo, azul. A tales adjetivos se les llama heterológicos. Hay también ciertos adjetivos que sí se aplican a sí mismos. El adjetivo esdrújulo es esdrújulo (otro ejemplo sería polisilábico). A estos adjetivos los llamamos autológicos. Fijemos ahora nuestra atención en el adjetivo heterológico. ¿Es este adjetivo heterológico? Un razonamiento análogo al de la paradoja de Russell conduce a una contradicción.

La paradoja de Russell, y otras paradojas descubiertas casi simultáneamente, señalaron la necesidad de una revisión crítica de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Como ya hemos visto anteriormente (en relación con las geometrías no euclidianas) cuando los matemáticos llegan a resultados paradójicos se suele responsabilizar de esto a la intuición. Así pues para superar la crisis provocada por las paradojas en la teoría de conjuntos y poder fundamentar las matemáticas sobre bases sólidas, se recurrió a la axiomatización de la teoría de conjuntos, con lo cual se pretendían formular explícitamente, mediante axiomas, las maneras lícitas de construir conjuntos, de manera que no se pudiesen construir, de manera informal e intuitiva, aquellos conjuntos que pudiesen conducir a paradojas.

Bertrand Russell y Alfred North Whitehead se propusieron un proyecto más ambicioso: además de dar a la teoría de conjuntos una fundamentación axiomática que permitiese eliminar las paradojas, codificar los métodos válidos de razonamiento matemático dentro de un sistema lógico, del cual pudiese derivarse toda la matemática. Esto significaba revivir el proyecto leibniziano de la "característica universal", por lo menos en lo que se refiere a las matemáticas.

Russell y Whitehead escribieron la monumental obra "Principia Mathematica", cuyo objetivo central era derivar toda la matemática de un sistema de principios lógicos incontrovertibles. Sin embargo, luego de la publicación de esta obra, persistían ciertas dudas respecto al programa logicista desarrollado en ella: ¿puede realmente derivarse toda la matemática del sistema expuesto en "Principia Mathematica"? y ¿cómo asegurarse de que dicho sistema es consistente, es decir, que de él no se pueden deducir contradicciones lógicas?

Esta segunda cuestión fue planteada por el matemático alemán David Hilbert a la comunidad matemática como uno de los problemas abiertos más importantes que debían ser investigados por los matemáticos de comienzos de siglo.

En 1931 Kurt Gödel logró dar una respuesta inesperada al problema de la consistencia y completitud del sistema expuesto en "Principia Mathematica". En su artículo *Sobre proposiciones formalmente indecidibles en "Principia mathematica" y sistemas relacionados*, Gödel demostró que ni el sistema ideado por Russell y Whitehead, ni ningún otro sistema que pretenda producir todas las verdades aritméticas puede probar su propia consistencia y, además, que siempre habrá verdades aritméticas que no se pueden demostrar dentro de dicho sistema.

Gödel revela entonces que el programa formalista de fundamentar las matemáticas mediante un sistema formal consistente y completo, tiene limitaciones intrínsecas y, según ciertas interpretaciones filosóficas de los resultados de Gödel, esto implicaría que cualquier tentativa de mecanizar y formalizar completamente el razonamiento matemático está condenada al fracaso.

Observaciones sobre la demostración de Gödel

por Raúl Meléndez

Examinar en detalle la demostración de Gödel es una tarea larga y ardua que no intentaremos emprender aquí. Trataremos, más bien, de explicar a muy grandes rasgos las ideas centrales de la demostración.

Uno de los pasos claves en la argumentación de Gödel fue el reconocimiento de que mediante cierta interpretación adecuada, todo sistema formal puede representarse dentro de la aritmética de los números naturales. Para representar un sistema formal de manera aritmética se requiere contruir un código numérico adecuado (lo que se llama una "numeración de Gödel") que asocie un número natural único a cada símbolo y a cada secuencia de símbolos del sistema. Por medio de este código, una afirmación aritmética que exprese alguna relación entre ciertos números naturales puede interpretarse también como una afirmación que dice algo acerca de las secuencias de símbolos del sistema formal que están asociadas a dichos números. Una afirmación aritmética adquiere entonces, en virtud de la numeración de Gödel, una doble significación: por un lado su significado aritmético habitual, pero por otro lado esa afirmación se refiere a las secuencias del sistema que están codificadas mediante números naturales. Para aclarar esta importante idea veamos el siguiente ejemplo.

Consideremos un sistema formal muy sencillo, con la siguiente descripción:

Lenguaje: M, U, I.

Axioma: MI

Reglas: 1. A cualquier hilera se le puede agregar una U al final.

2. A cualquier hilera se le puede agregar una I al final.

Ahora a cada símbolo del sistema le asociamos un número. Código numérico (o numeración de Gödel del sistema):

M – 7

I – 2

U – 0

A cada hilera del sistema le corresponde también un número, cuyos dígitos son las cifras asociadas a cada uno de los símbolos de la hilera. Por ejemplo: al axioma MI le corresponde el número 72, a la hilera MIUIU le corresponde el 72020 y la hilera asociada con el número 72700 es MIMUU.

Usando el código que acabamos de introducir, las reglas del sistema pueden representarse aritméticamente:

Aplicar la regla 1 a una hilera equivale a agregar un 0 al final del número que corresponde a dicha hilera, lo que, a su vez, no es otro cosa que multiplicar el número por diez. La regla 1 corresponde entonces a la operación aritmética "multiplicar por diez".

El lector puede verificar fácilmente que la regla 2 corresponde a la operación aritmética "multiplicar por diez y luego sumar dos".

La numeración de Gödel del sistema formal permite, así mismo, interpretar algunas afirmaciones aritméticas como afirmaciones acerca del sistema formal.

La afirmación "720 es igual a 72 multiplicado por diez" significa también, luego de ser traducida con nuestro código numérico, "MIU se deduce del axioma MI aplicando la regla 1".

Afirmaciones acerca de lo que se puede o no deducir dentro del sistema también tienen su correspondiente aritmético. Por ejemplo: "MIUM no se puede deducir dentro del sistema" puede traducirse como: "7207 no se puede obtener, aplicando en algún orden las operaciones 'multiplicar por diez' y 'multiplicar por diez y luego sumar dos' a partir de 72".

Con los ejemplos anteriores debe quedar claro el siguiente hecho fundamental: si un sistema formal recibe una numeración de Gödel apropiada, unas afirmaciones aritméticas pueden interpretarse también como afirmaciones sobre el sistema mismo. En particular algunas afirmaciones aritméticas corresponden a afirmaciones sobre lo que se puede o no se puede demostrar dentro del sistema.

En la demostración de su teorema de Incompletitud, Gödel considera un sistema que (como el de "Principia Mathematica") pretende formalizar todo el conocimiento matemático. Este sistema, llamémoslo S, debe poder formalizar, en particular, el conocimiento aritmético y con sus símbolos deben poder expresarse las propiedades y relaciones aritméticas de los números naturales, Gödel construye un ingenioso código numérico para el sistema S de tal manera que las propiedades y relaciones aritméticas expresables simbólicamente dentro de S puedan verse también, como ya hemos dicho, como afirmaciones del sistema mismo.

El otro paso fundamental en la demostración de Gödel consiste en describir una expresión aritmética, llamémosla X, cuya interpretación según la numeración de Gödel es: "X no es demostrable en el sistema formal S". X es una afirmación aritmética que está simbolizada dentro del sistema S pero que también nos dice algo acerca de ella misma: afirma su propia indemostrabilidad.

Pero, ¿es X verdadera? ¿es X realmente indemostrable en S? Si X se pudiese demostrar formalmente entonces lo que afirma sería verdadero, es decir, X no podría demostrarse en S, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X no pude demostrarse y X es una afirmación verdadera.

Gödel ha mostrado que hay un ejemplo de una afirmación aritmética verdadera, que sin embargo, no se puede demostrar dentro de S. Por lo tanto puede concluirse que todo sistema formal que pretenda formalizar todas las verdades matemáticas es incompleto, en el sentido de que existen verdades que no podrán ser demostradas dentro del sistema.

El teorema de Gödel a través de acertijos

Como ya hemos visto, no es una tarea fácil el comprender la argumentación con la cual Gödel demuestra su teorema de Incompletitud, aún si uno se limita a sus lineamientos más generales. Para complementar nuestras anteriores explicaciones, consideraremos finalmente unos acertijos ideados el lógico, matemático y mago profesional (¡una combinación poco usual!) Raymond Smullyan. Estos acertijos pretenden reflejar algunos pasos de la demostración de Gödel y constituyen una aproximación a ella que esperamos sea amena.

Los primeros acertijos que planteamos no tienen que ver directamente con el teorema de Gödel y son un simple "calentamiento" para las neuronas.

En una isla viven ciertos habitantes llamados "caballeros" que dicen siempre la verdad, y otros llamados "escuderos" que mienten siempre. Se supone que todo habitante de la isla es o caballero o escudero.

Tres de los habitantes de la isla –A, B y C– se encontraban en un jardín. Un extranjero pasó por allí y le preguntó a A, "¿Eres caballero o escudero?". A respondió pero tan confusamente, que el extranjero no pudo enterarse de lo que decía. Entonces el extranjero preguntó a B, "¿Qué ha dicho A?". Y B le respondió: "A ha dicho que es escudero." Pero en el instante el tercer hombre, C, dijo, "¡No le crea a B, está mintiendo!", ¿qué son B y C?

La solución es la siguiente: es imposible que un caballero o un escudero diga: "Yo soy escudero", porque un caballero diría algo falso: que él es escudero, y un escudero no diría algo verdadero: que él es escudero. Por lo tanto A nunca diría que era un escudero. Así, B mentía cuando dijo que A había dicho que él era escudero. Por lo tanto B es escudero. Puesto que C dijo que B estaba mintiendo, y B estaba ciertamente mintiendo, C dijo la verdad, así que C es un caballero. Así pues, B es un escudero y C un caballero. Es imposible saber lo que es A.

Tenemos ahora una variación: supóngase que el extranjero, en lugar de preguntarle a A por lo que éste es, le pregunta: "¿Cuántos caballeros hay entre ustedes?" De nuevo, la respuesta de A es ininteligible. Entonces el extranjero pregunta a B? "¿Qué ha dicho A?". Y B replica, "A ha dicho que hay un caballero entre nosotros". Y C por su parte dice, "¡No le crea a B, que está mintiendo!". Ahora, ¿qué son B y C?

Ejercicios

En este problema hay sólo dos individuos, A y B cada uno de los cuales es o caballero o escudero.

1. A dice: "Al menos uno de nosotros es escudero." ¿Qué son A y B?
2. Supóngase que A dice, "O yo soy un escudero o B es un caballero". ¿Qué son A y B?
3. Supóngase que A dice, "O yo soy un escudero o en caso contrario dos más dos es igual a cinco". ¿Qué se puede concluir?
4. En una isla de caballeros y escuderos dos nativos, A y B, dicen:
   A: B es escudero
   B: A es caballero
   ¿Podría decirse que A es un caballero o un escudero? ¿Qué podría decirse de B?

Teorema de Gödel

Ahora sí tomamos en consideración el acertijo que tiene que ver más directamente con el teorema de Incompletitud de Gödel.

Un cierto lógico formalista, llamado Gilberto, quiere construir un sistema formal que le permita deducir todas las oraciones verdaderas. El considera que ciertas oraciones son tan evidentes que no requieren de demostración alguna y toma estas oraciones como axiomas de su sistemas, el cual contiene también ciertas reglas para deducir unas oraciones de otras. Gilberto confía en que su sistema es completo, en el sentido de que todas las oraciones verdaderas son demostrables en él.

Un amigo suyo, Godelio, lleva dos libros: uno se llama "el libro de las oraciones" y el otro "el libro de los conjuntos". El "libro de las oraciones" tiene exactamente una oración en cada página y ninguna oración aparece en dos páginas distintas. Cada página del "libro de los conjuntos" tiene una descripción de un conjunto de números naturales. A un conjunto descrito en alguna página de este libro se lo llama "conjunto consignado".

Dado un número natural n, puede ocurrir que el conjunto consignado en la página n del "libro de los conjuntos" contenta a ese n como uno de sus miembros. Si esto ocurre llamamos a n un "número extraordinario".

Así mismo, dados números naturales n y h, llamamos a h un "asociado" de n si la oración de la página h afirma que n es extraordinario.

Godelio ha logrado numerar las páginas de ambos libros de un modo especial y se ha dado cuenta que se cumplen las siguientes tres condiciones:

E: El conjunto de números de página de todas las oraciones demostrables es un conjunto consignado.

C: Para cualquier conjunto consignado A, el conjunto $\overline{A}$ de todos los números que no estén en A es un conjunto consignado.

H: Dado cualquier conjunto consignado A, hay otro conjunto consignado B tal que todo número de B tiene un asociado en A, y todo número que esté fuera de B tiene un asociado fuera de A.

El acertijo que se plantea es: ¿toda oración verdadera es demostrable en el sistema?

El primer paso para resolver esta cuestión es demostrar la condición G.

Condición G: para cualquier conjunto consignado A, hay una oración que es verdadera si y sólo si su propio número de página está en A.

Para demostrar la condición G, tómese cualquier conjunto consignado A. Sea B un conjunto dado por la condición H; sea n el número de una página en la que B esté consignado. Por la condición H, si n está en B, entonces n tiene un asociado h en A; si n está fuera de B, n tiene un asociado h fuera de A. Afirmamos que la oración X de la página h es la oración que buscamos.

La oración X dice que n es extraordinario en otras palabras, que n está en B (puesto que B es el conjunto consignado en la página n). Si X es verdadera, entonces n está realmente en B, de lo cual se sigue que h está en A. Así pues, si X es verdadera, entonces su número de página h está en A. Supóngase que X es falsa. Entonces n no está en B, de lo que se sigue que h está fuera de A. Por tanto X es verdadera si y sólo si su número de página está en A.

Una vez que ha sido demostrada la condición G, resulta fácil responder a las cuestiones del lógico: se nos ha dado que el conjunto A de números de página de todas las oraciones demostrables es un conjunto consignado, de lo cual se sigue, por la condición C, que también lo es el conjunto A –de todos los números que no sean números de página de oraciones demostrables; por tanto (por la condición G), hay una oración X que es verdadera si y solamente si el número de página de X pertenece a A. Ahora bien, decir que el número de página de X pertenece a A es igual que decir que el número de página de X no pertenece a A, lo que implica que X no es demostrable (ya que A consta de los números de página de aquellas oraciones que son demostrables). Así X es verdadera si y sólo si X no es demostrable. Y esto significa que o bien X es falsa pero demostrable o verdadera y no demostrable. Pero se nos ha dado que ninguna oración falsa es demostrable en el sistema, de aquí que X haya de ser verdadera pero no demostrable en el sistema.

La solución al acertijo anterior refleja, de manera parcial, la demostración del teorema de Gödel. La numeración de las páginas del "libro de las oraciones" y del "libro de los conjuntos" representa el código numérico al que hicimos referencia en la sección anterior y al que llamamos "numeración de Gödel". Es posible realizar tal numeración de modo que se cumplan las condiciones E, C y H, las cuales permiten construir la oración X, que al igual que la afirmación aritmética X de la sección anterior, es verdadera pero no demostrable.

Naturalmente hay muchos detalles de la demostración de Gödel que no se reflejan en el acertijo. No se dice nada, por ejemplo, de cómo se debe construir la numeración de Gödel de modo que se puedan asegurar las condiciones E, C y H.

De todas maneras el acertijo nos da un poco más de claridad acerca de la intrincada argumentación con la cual Gödel demostró su famoso teorema de Incompletitud.

Observaciones finales

El teorema de Incompletitud de Gödel, que hemos tratado de explicar e ilustrar en este capítulo final, puede interpretarse como un resultado negativo para la filosofía formalista de las matemáticas.

Ciertamente, a través del conocimiento matemático se pretendía darle a éste una fundamentación que garantizara su validez y su consistencia. Sin embargo, de acuerdo al teorema de Incompletitud de Gödel, no es posible construir un sistema formal que sea consistente y que permita deducir todas las verdades matemáticas. Pero esta limitación revelada por el teorema de Gödel no da al traste con el formalismo mismo, sino con las pretensiones demasiado ambiciosas que se le han asociado.

Pues, si bien el formalismo no logra fundamentar de manera absoluta el conocimiento matemático, no por ello ha dejado de contribuir de manera importante no solo en las matemáticas sino en otras áreas del conocimiento. Para mencionar apenas unos cuantos ejemplos: el formalismo ha permitido avanzar significativamente en el análisis lógico del razonamiento deductivo, en el análisis lógico del lenguaje, ha influido en el desarrollo de la informática y la teoría de la computación. Esperamos que la lectura de este libro haya permitido al lector obtener una idea más clara de lo que es el formalismos, de cuáles son sus alcances y sus limitaciones.

Referencias

Benacerra, Poul; Putman, Hilary; Philosophy of mathematics: selected readings. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1964.

Blanché, Robert; Axiomatization. In: Dictionary of the History of Ideas. Vol I, Scribner's, 1973.

Bourbaki, Nicolás; Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Editorial S.A., Madrid, 1976.

Courrant, Richard; Robbins, Herbert; What is Mathematics? Oxford University press, New York, 1948.

De Long, Howard; A profile of mathematical logic. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1970.

Euclid; The thirteen books of the elements. Edited and translated by Sir Thomas L. Heath. 3 vols. Dover Publications Inc., New York, 1956.

Gödel, Kurt; Obras completas. Alianza Editores, Madrid.

Hofstadter, Douglas R.; Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid. Basiz books Inc., New York, 1979.

Kasner, E.; Newman, J.; Mathematics and the imagination. Simon and Schuster, 1940.

Kline, Morris; Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University press, New York, 1972.

Kline, Morris; Mathematics in western culture. Pelican Books, 1972.

Nagel, Ernst; Newman, James; Gödel's proof. New York University press, , 1958.

Newman, J. R.; The world of mathematics. 4vol, Simon and Schuster, New York, 1956.

Neugebauer, Otto; The exact sciences in antiquity. Dover, New York, 1957.

Russell, Bertrand; Whitehead, A. N.; Principia Mathematica. Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

Russell, Bertrand; Introducción a la filosofía matemática. Losada, Buenos Aires, 1945.

Smullyan, Raymond; ¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos. Ediciones Cátedra S. A., Madrid, 1984.

Smullyan, Raymond; ¿Cómo se llama este libro?. Ediciones Cátedra S. A., Madrid, 1985.

Struik, D. J.; A concise history of mathematics. Dover, New York, 1967.

Szabó, Arpád; The transformation of mathematics into a deductive science and the beginings of its foundations on definitions and axioms. Scripta Mathematica, 1964.

Van der Waerden, B. L.; Science awakening. P. Noordhoff, Groningen, 1954.