UN ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA[1]

Juan D. Godino(*), Carmen Batanero(*) y Vicenç Font(**)
(*) Universidad de Granada; (**) Universidad de Barcelona

Resumen

En este trabajo presentamos una síntesis del modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática en cuya elaboración venimos trabajando desde hace varios años. Como rasgos característicos destacamos la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmatistas y referenciales sobre el significado de los objetos matemáticos. El modelo de cognición matemática elaborado se adopta como elemento clave sobre el que basar el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa, permitiendo así mismo comparar y articular diversas aproximaciones teóricas usadas en Didáctica de las Matemáticas desde un punto de vista unificado.

Abstract

In this paper we synthesise the theoretical model for mathematical cognition and instruction we are developing in the past years. We highlight the following main features of this approach: the articulation of the institutional and personal facets of mathematical knowledge; the recognition of a key role to problem solving and the language; and the coherent assumption of pragmatic and realist posits for the meaning of mathematical objects. This theoretical framework is used to base the development of a theory of mathematical instruction; it allows also comparing and articulating different theoretical models used in mathematics education from a unified viewpoint.

Palabras clave: conocimiento matemático, enseñanza, aprendizaje, investigación, fundamentos teóricos, epistemología, cognición, objeto matemático, significado

1. INTRODUCCIÓN

El fin específico de la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Como propuso el programa de Steiner para la Teoría de la Educación Matemática, es necesario “el desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica” (Steiner et al., 1984, p. 16).

Para lograr este objetivo, la Didáctica de las Matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, o la sociología. Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural

[1] Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.
En este trabajo realizamos una síntesis de diversas publicaciones de Godino y colaboradores donde se desarrolla un sistema teórico integrativo para la Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontológico y semiótico. Estos trabajos están disponibles en Internet, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino

y personal, particularmente en el seno de las instituciones escolares. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la Didáctica de las Matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en Didáctica de las Matemáticas no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

- ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?
- ¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
- ¿Las matemáticas se descubren o inventan?
- ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?
- ¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

La emergencia relativamente reciente del área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Diversos trabajos (Ernest, 1994; Sierpinska y Lerman, 1996; Gascón, 1998; Font, 2002; Radford, 2008) cuyo objetivo ha sido realizar propuestas de organización de los diferentes programas de investigación en educación matemática han puesto de manifiesto la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exigen aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar, utilizando la clásica terminología de Lakatos (1983), en un verdadero programa de investigación.

Uno de los principales problemas "meta-didácticos" que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema. Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, competencias, concepciones, conceptos, representaciones internas, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc.

El progreso en el campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar, la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de instituciones escolares).

Pensamos que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo - pragmatismo, cognición individual - institucional, constructivismo - conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas.

2. HACIA UN ENFOQUE UNIFICADO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Desde hace más de 15 años estamos interesados en la problemática descrita de fundamentación de la investigación en Didáctica de las Matemáticas y estamos desarrollando diversas herramientas teóricas que permitan abordar algunas de las cuestiones mencionadas. Dichas herramientas se han desarrollado en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de nuestra indagación. A continuación describimos sucintamente las tres etapas y los problemas abordados en cada una de ellas.

En nuestros primeros trabajos, publicados en el periodo 1993 - 98 (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998)[2] desarrollamos y precisamos progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización) y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En una segunda etapa, a partir de 1998, hemos considerado necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el elaborado hasta dicha fecha (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005). Esta reflexión surge del hecho que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones".

En la primera fase proponíamos como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) "los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas". Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos que desencadenan procesos interpretativos. Ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura.

Llegamos a la conclusión de que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo hemos tratado de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1978), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953). El interés por el uso de nociones semióticas en educación matemática es creciente como se muestra en Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger y Cifarelli (2003), el número

[2] Los trabajos citados de Godino y cols están disponibles en Internet, http://www.ugr.es/local/jgodino

monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006) y en Radford, Schubring y Seeger (2008).

Nosotros hemos tratado de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujimos en Godino y Recio (1998).

En una tercera etapa de nuestro trabajo nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas sobre la instrucción matemática[3] (Godino, Contreras y Font, 2006). Proponemos distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas)[4]. El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas.

Los constructos teóricos elaborados durante estos tres periodos constituyen el modelo ontológico-semiótico que sintetizamos en los apartados siguientes. Dicho modelo trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

3. HERRAMIENTAS TEÓRICAS QUE COMPONEN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En este apartado presentamos una síntesis de los supuestos y nociones teóricas que constituyen el Enfoque Ontosemiótico[5] (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática. En la sección 4 resumimos dos investigaciones que utilizan algunas de las herramientas del EOS.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

3. 1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Consideramos *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden

[3] Entendida como enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos en el seno de los sistemas didácticos.
[4] En la sección 3.7 añadimos además la dimensión ecológica para tener en cuenta las interacciones entre los procesos de estudio y el contexto social y educativo en que tienen lugar.
[5] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento[6].

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, ¿qué significa o representa la expresión "media aritmética"?, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos". Con esta formulación del significado el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: "las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción" (Faerna, 1996; p. 14).

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 1 (Godino, 2003, p. 141). Con relación a los significados institucionales proponemos tener en cuenta los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico[7] del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales proponemos los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

---

[6] Las instituciones se conciben como "comunidades de prácticas", e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Se asume, por tanto, el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados.

[7] Wilhelmi, Lacasta y Godino (2007).

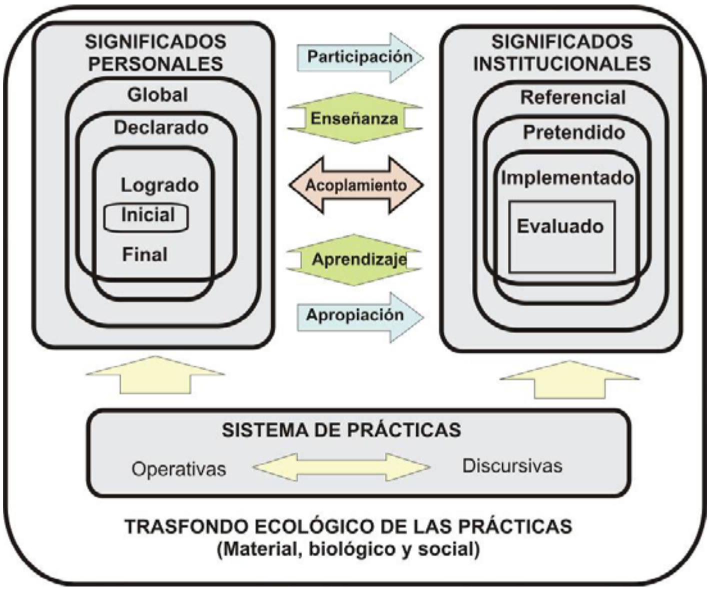

Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales

En la parte central de la figura 1 indicamos las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

3.2 Emergencia de los objetos matemáticos

Tal como se ha dicho, en el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

3.2.1 Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la *configuración* de la Figura 2 (Font y Godino, 2006, p. 69).

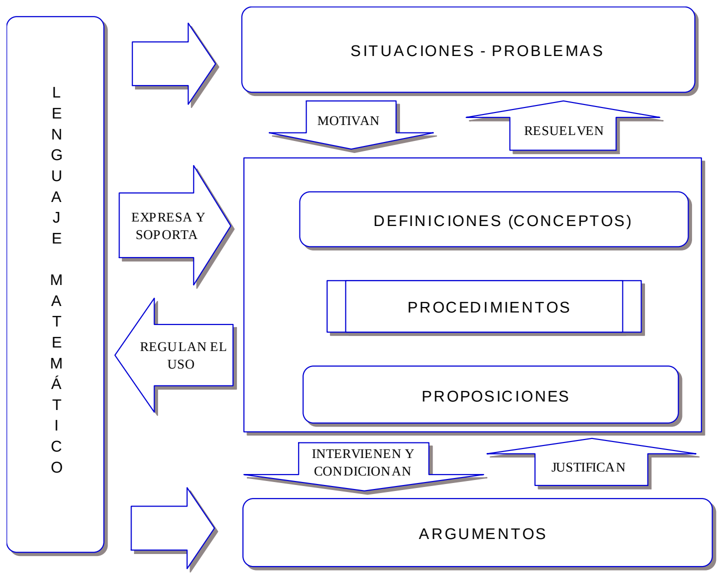

Figura 2. Configuración de objetos primarios

Se propone pues la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, ...

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática[8]. Las situaciones – problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.)

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico,

[8] Se amplía, así mismo, el "triángulo epistemológico" (Steinbring, 2006) (signo/símbolo, objeto/contexto de referencia, concepto), especialmente al problematizar la noción de concepto e interpretar el "objeto/contexto de referencia" en términos de situaciones – problemas.

particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones – problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *socio-epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

3.2.2 Segundo nivel: Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La “cognición personal” es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la “cognición institucional” es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …).. Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).
- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica[9].

  La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
- *Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo).* Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) y una clase más general

[9] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…) (Eco, 1976, 83-84).

(p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica (Otte, 2003, p. 187).

- *Unitario – sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios

En la figura 3 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales, lo cual nos lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: personal-institucional, unitario-sistémico, intenso-extensivo, expresión-contenido y ostensivo-no ostensivo.

3.2.3. Procesos

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos indicados en la figura 3. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes *procesos cognitivos/ epistémicos:* institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los incluidos en la figura 3), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

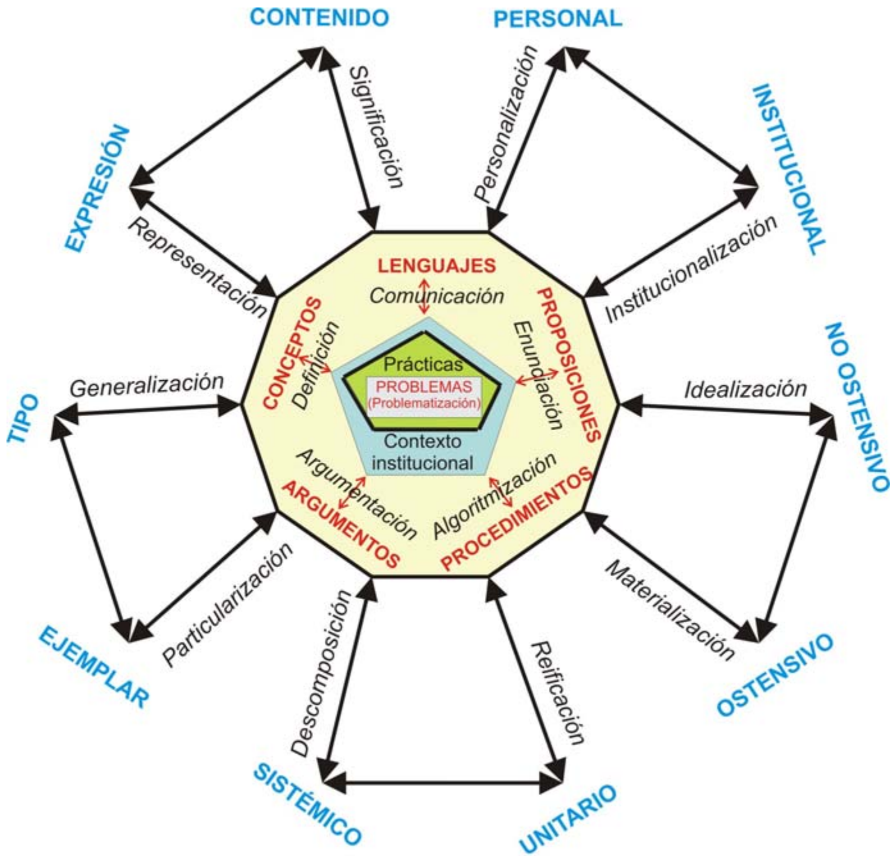

Figura 3. Configuración de objetos y procesos

Tampoco se consideran en esta selección los procesos metacognitivos necesarios para la realización de las prácticas[10].

3.3. Comprensión y conocimiento en el EOS

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Font, 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

[10] En Gusmao (2006) se ha utilizado el enfoque ontosemiótico para estudiar los procesos metacognitivos activados en las prácticas de resolución de problemas.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas (Godino, 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

3.4 Recapitulación

En nuestras reflexiones teóricas iniciales sobre la naturaleza de las matemáticas nos preguntábamos qué es un objeto matemático[11], por ejemplo, la media aritmética y qué significa la expresión "media aritmética". (Godino y Batanero, 1994). El uso que hacíamos en esta etapa de 'objeto matemático' viene a ser equivalente a concepto matemático (idea o noción matemática)[12]. Adoptando una epistemología pragmatista – antropológica establecimos, como respuesta, una función semiótica cuyo antecedente (significante) es el objeto matemático – o la expresión que lo designa –, y el consecuente (significado) un nuevo constructo que describimos como el "sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones – problemas". De esta manera se trata de superar la visión parcial y sesgada de los objetos matemáticos aportada por la perspectiva conceptualista/ formalista en la que los objetos matemáticos se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos, o simplemente como una entidad abstracta o ideal.

Con la finalidad de hacer operativas estas nociones para describir la actividad matemática, los "productos" resultantes de dicha actividad y de los procesos de comunicación matemática hemos procedido a una progresiva ampliación de la noción de objeto matemático y significado. Objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática[13]. Asimismo, significados, no son sólo "los sistemas de prácticas", sino "el contenido de cualquier función semiótica".

Con este uso ampliado de 'objeto' y 'significado' se requiere, en cada circunstancia, especificar el tipo de objeto o de significado referido para que la comunicación pueda ser efectiva. Hablamos de este modo de 'objetos emergentes' de los sistemas de prácticas como resultantes de los procesos de definición (definiciones), argumentación (argumentos), ...; objetos personales o institucionales; objetos extensivos o intensivos; etc.

Como respuesta final – abierta a revisión y refinamiento – a la cuestión epistemológica sobre la naturaleza y origen de los conceptos matemáticos, proponemos el par (*sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos).* Dado un objeto matemático como "función", "número", etc. se considera que su significado es un sistema complejo de prácticas en las que cada una de las

[11] Cuestiones similares se plantea Sfard (2000, p. 42-43): "Los símbolos matemáticos refieren a algo – pero, ¿a qué? ... ¿Cuál es el estatus ontológico de estas entidades? ¿De donde vienen? ¿Cómo podemos alcanzarlos (o construirlos)?"

[12] En D'Amore (2001) se presenta un estudio extenso del debate sobre los conceptos y los objetos matemáticos. Asimismo, Otte (2003) analiza en qué sentido las matemáticas tienen objetos, enfatizando el papel esencial de la dualidad particular - general (que en nuestro caso designamos como extensivo – intensivo, o ejemplar – tipo).

[13] Es claro que se trata de un uso metafórico del término objeto y que concuerda con la posición adoptada por el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969). Contrasta, no obstante, con el uso habitual de la expresión "objeto matemático" que se aplica solo a abstracciones o entidades ideales.

diferentes configuraciones de objetos y procesos en las que se “presenta” el objeto en cuestión posibilita un subconjunto de prácticas de dicho sistema. Esto es, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas, se puede considerar como único y con un significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007). Pero, en cada subconjunto de prácticas, la configuración de objetos y procesos en las que se “presenta” el objeto en cuestión es diferente, y, por tanto, se posibilitan prácticas diferentes. Los sistemas de prácticas se pueden parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas, posibilitadas por una determinada configuración de objetos y procesos, permitiendo la distinción entre significado y sentido (Font y Ramos, 2005): los sentidos pueden ser interpretados como significados parciales.

Sin duda se trata de un modelo teórico complejo pero se está revelando una herramienta potente y útil para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.5. Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos

El modelo teórico sobre la cognición que hemos descrito puede ser aplicado de manera más general a otros campos del saber, en particular a los saberes didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?
- ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?
- ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?
- ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?
- ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso, las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

En la Teoría de las Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006), sobre la que venimos trabajando, modelizamos la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas (Figura 4).

Una configuración didáctica lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una *configuración instruccional* constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

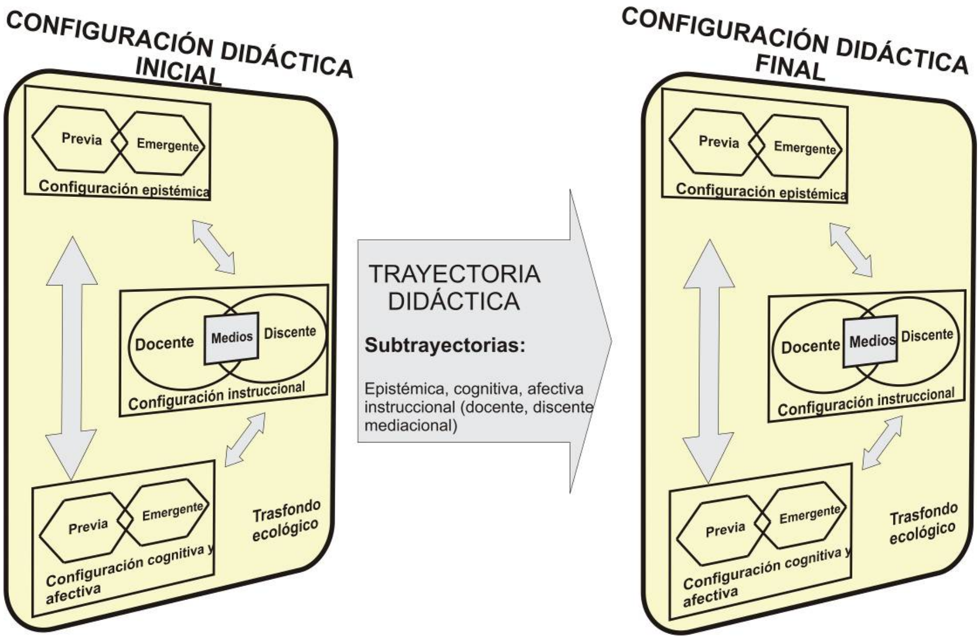

Figura 4: Interacciones didácticas

3.6. Dimensión normativa

El tema de las normas ha sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas, principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), introduciendo nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996). La noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau en diversos trabajos constituyendo una pieza clave en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998). En ambos casos, se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como "microsociedad", que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos.

Pensamos que tanto el "contrato interaccionista", como el "brouseauniano", constituyen visiones parciales del complejo sistema de normas sobre las cuales se apoyan - y al mismo tiempo restringen - la educación en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular. En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva unificada del conocimiento y la instrucción matemática que proporciona el EOS, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La figura 5 resume los diferentes tipos de normas identificadas en el mencionado trabajo.

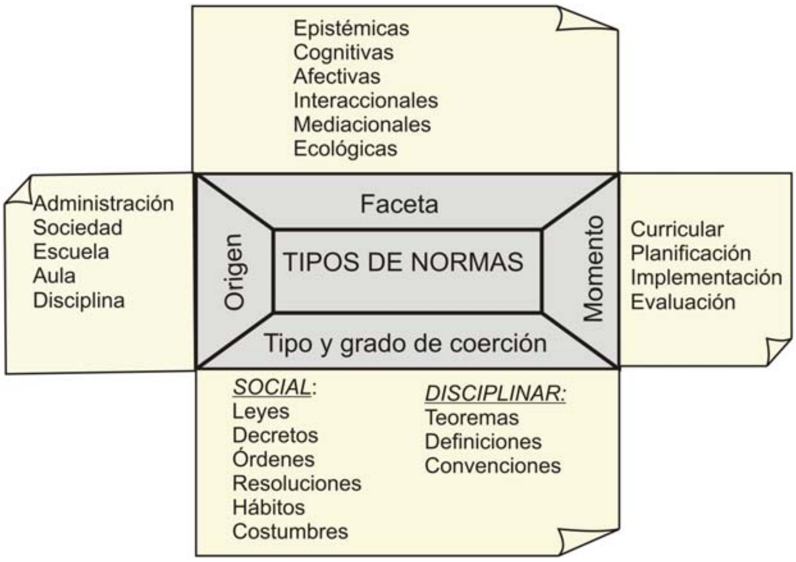

Figura 5: Dimensión normativa. Tipos de normas

La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.

- Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

3.7. Criterios de idoneidad didáctica

Las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Ramos y Font, 2008):

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).

- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados. Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.
- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una

parte, identificar conflictos semióticos[14] potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1998) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.
- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.
- *Idoneidad ecológica,* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

Todas estas nociones las consideramos útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza. Los distintos elementos pueden interactuar entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo, la epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

En la figura 6 resumimos los criterios que componen la idoneidad didáctica. Representamos mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono

[14] Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

irregular inscrito correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

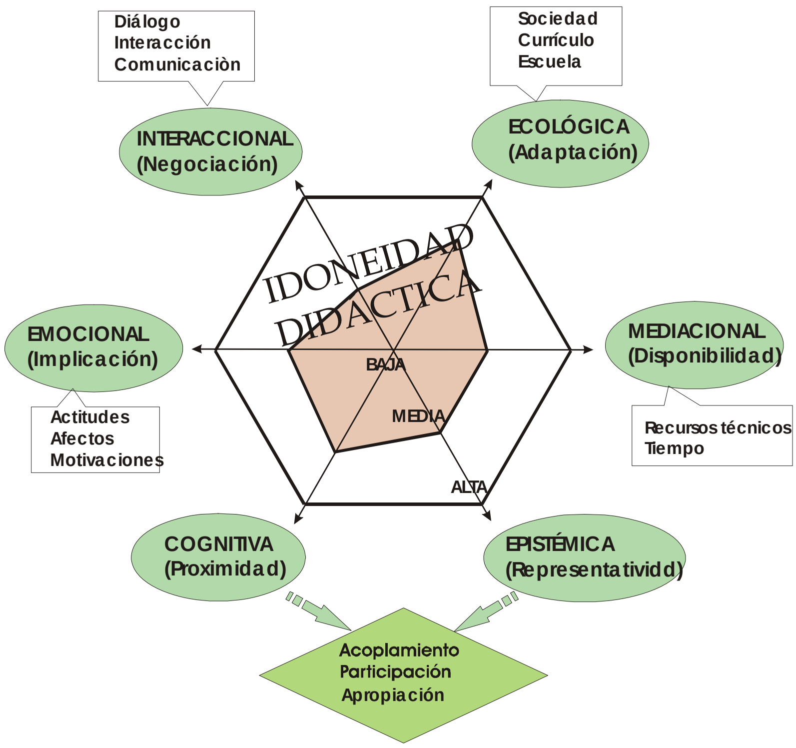

Figura 6: Componentes de la idoneidad didáctica

Las herramientas descritas se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o a un nivel más global, como puede ser el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser útiles para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales.

3.8. Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático

En diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico (D'Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Font y Godino, 2006; Font, Godino y Contreras, 2008; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhemi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009; Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009) se han propuesto y desarrollado cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);

2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;

4) Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el Área de Didáctica de la Matemática. En particular, el nivel 4 se propone para integrar (Font y Planas, 2008) aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática (Civil y Planas, 2004; Cobb y McClain, 2006; Stephan, Cobb y Gravemeijer, 2003; Yackel y Cobb, 1996).

El primer nivel de análisis se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas; su finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis didáctico debiera progresar desde la situación – problema y de las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (análisis 1) a las configuraciones de objetos (epistémicas / cognitivas) y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (análisis 2) hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, lo cual constituye un tercer nivel o tipo de análisis didáctico orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

Las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas están condicionadas y soportadas por una compleja trama de normas y metanormas, (D’Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (niveles 1 y 2 de análisis), sino que también regulan otras dimensiones de los procesos de estudio (cognitiva, afectiva, etc.).

El cuarto nivel de análisis considerado en el EOS pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio. Este nivel es el resultado de tener en cuenta los fenómenos de índole social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva – explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo aquí y por qué? Sin embargo, la Didáctica de la Matemática no debería limitarse a la mera descripción que lo deja todo como estaba, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Por tanto, son necesarios criterios de “idoneidad” o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora. Se trata de realizar una acción o meta-acción para ser más precisos (la valoración) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En consecuencia, ha de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.

En consecuencia, consideramos necesario aplicar un quinto nivel de análisis a los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su *idoneidad didáctica* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

4. EJEMPLOS DE INVESTIGACIONES

En este apartado describimos de manera resumida dos ejemplos de investigaciones realizadas en el marco del EOS. Otros ejemplos de investigaciones experimentales realizadas desde la perspectiva ontosemiótica, publicadas en diversas tesis de doctorado, artículos y monografías, están accesibles en la página web del Grupo de Investigación de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino ; http://www.ugr.es/local/batanero, así como en la página web de V. Font:

http://www.webpersonal.net/vfont/RDMfinal.pdf

4.1. Caracterización del razonamiento combinatorio elemental

En el artículo de Godino, Batanero y Roa (2005), publicado en *Educational Studies in Mathematics* (volumen 60, nº 1: 3-36) se describen las principales nociones teóricas del EOS con ejemplos relativos al campo de problemas de combinatoria elemental y se analizan las respuestas dadas por cuatro estudiantes que cursaban el último curso de la licenciatura de matemáticas a un problema de combinatoria.

Los tipos de objetos matemáticos (problemas, lenguaje, ...), y las facetas cognitivas (extensivo – intensivo, ostensivo – no ostensivo, ...) se usan para desarrollar la técnica de análisis ontosemiótico que permite caracterizar los significados institucionales (respuestas a los problemas elaboradas desde un punto de vista experto) y los significados personales de los estudiantes.

En este artículo se utilizan datos de la tesis doctoral de Roa (2000) correspondientes a las respuestas de cuatro sujetos a uno de los problemas propuestos. En la investigación se aplicó un cuestionario formado por 13 problemas combinatorios elementales (11 problemas que ponen en juego solo una operación combinatoria y 2 problemas compuestos en los que intervenían dos operaciones). Este cuestionario se aplicó a una muestra de 90 estudiantes con preparación matemática avanzada y se analizó aplicando técnicas cuantitativas y cualitativas (estudio de casos mediante entrevistas).

El análisis realizado permite identificar los conocimientos puestos en juego, correcta o incorrectamente, por los alumnos en la resolución del siguiente problema:

> *Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.*

Los resultados pusieron de manifiesto la complejidad de la tarea de resolución de este problema, aparentemente sencillo, así como la diversidad entre los cuatro alumnos, lo que refleja una variedad del significado (sistémico) de la combinatoria elemental para los mismos. En el proceso de resolución se producen conflictos semióticos que llevan a error, debido a la disparidad entre el modelo de selección en que estos alumnos han aprendido las definiciones combinatorias y las diversas situaciones (como, por ejemplo, en un problema de partición) en que deben ser aplicadas dichas definiciones.

Del análisis de los protocolos de resolución de este problema por los cuatro alumnos se infiere que la actividad de resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos matemáticos; estos objetos varían de uno a otro alumno. Aunque, debido a las restricciones de espacio el artículo sólo incluye el análisis de un problema, este mismo proceso fue repetido con los 12 problemas restantes, poniendo de manifiesto la pluralidad de conocimientos usados por los alumnos en la solución de los problemas, que para cada uno de ello constituye el *significado personal* (sistémico) de la combinatoria elemental.

4.2 El problema de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada

Describimos la investigación realizada en la tesis doctoral de V. Font, en el marco teórico del enfoque ontosemiótico, sobre cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada por estudiantes de Bachillerato (16-17 años). Usaremos como referencia accesible el artículo publicado en *Recherches en Didactique des Mathématics,* (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), con el título: "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal".

En este trabajo se usan la noción de "significado institucional", entendido como sistema de prácticas, para diseñar, implementar y analizar una experiencia de estudio de la derivada, distinguiendo cuatro tipos de tales significados sistémicos: de referencia, pretendido, implementado y evaluado. También se recoge información detallada de las prácticas personales de los estudiantes, que permiten caracterizar sus significados personales iniciales, finales y algunos aspectos de su construcción progresiva.

Entre las conclusiones sobre el desarrollo y análisis de la experiencia de enseñanza, destacan las siguientes:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, llevan a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil hacerlas compatibles con las restricciones materiales y temporales reales.
- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.
- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.
- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas (de $f(x)$ o de $f'(x)$), modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

La noción de función semiótica, junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo, expresión-contenido, son utilizadas de manera sistemática para analizar la complejidad ontosemiótica de la definición de derivada en un punto y función derivada. Este análisis permite identificar conflictos semióticos potenciales, que son tenidos en cuenta en el diseño de la experiencia, y como explicación de algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

5. REFLEXIONES FINALES

Concebimos las teorías como instrumentos que permiten definir los problemas de investigación así como una estrategia metodológica para su abordaje. El sistema de nociones teóricas y metodológicas que necesitamos elaborar, para caracterizar los fenómenos didácticos, deberá permitir diferentes niveles de análisis de las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este sistema no puede elaborarse con la simple agregación de elementos teóricos y metodológicos de distintos enfoques disponibles, sino que será necesario elaborar otros nuevos más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancias y conservando una consistencia global. Debemos aspirar a incluir en dicho sistema las nociones teóricas y metodológicas "necesarias y suficientes" para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El EOS viene creciendo como marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la aspiración de articular las diversas dimensiones y perspectivas implicadas. Este trabajo de articulación no puede hacerse mediante la superposición de herramientas de distinta procedencia. Steiner (1990) sitúa la disciplina Educación Matemática en el centro de un sistema social, heterogéneo y complejo – el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas- y menciona como ciencias referenciales para nuestra disciplina a la propia matemática, la epistemología, psicología, pedagogía, sociología, lingüística, entre otras. Cada una de estas disciplinas se ocupa de aspectos parciales de los problemas que plantea la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, usando para ello sus propias herramientas conceptuales y metodológicas.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual.

Consideramos que el EOS puede ayudar a comparar los marcos teóricos usados en Didáctica de las Matemáticas[15] y, en cierta medida, a superar algunas de sus limitaciones para el análisis de la cognición e instrucción matemática. En principio, se trata de una expectativa que se basa en la generalidad con la que se define en el EOS las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona – institución; unitario – sistémico; ostensivo – no ostensivo; extensivo – intensivo; expresión – contenido). Estas nociones nos permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases que describimos como ontosemióticas.

El papel central dado en el EOS a la *práctica* matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuye a dicha noción (acción compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales) permiten, en nuestra opinión una articulación coherente con otras posiciones teóricas, como el constructivismo social (Ernest, 1998), la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003), y en general las perspectivas etnomatemáticas y socioculturales en educación matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001).

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

REFERENCIAS

[15] En Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) y D'Amore y Godino (2007) hemos abordado la comparación del EOS con algunas teorías de Didáctica de la Matemática desarrolladas en Francia.

Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S. y Cifarelli, V. C. (Eds). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing.* Otawa: Legas.

Atweh, B., Forgasz, H. y Nebres, B. (2001). *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London: Lawrence Erlbaum

Blumer, H. (1969). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1), 27-40.

Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 7-12.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y McClain, K. (2006). The collective mediation of a high stakes accountability program: Communities and networks of practice. *Mind, Culture, and Activity*, 13, 80-100.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición "ingenua" en una teoría "realista" "versus" el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, 51-76.

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007) El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191-218

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007).La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigm*a, Vol. XXVIII, Nº 2, 49-77.

Eco, U. (1976). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1995.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2,* 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència, *Biaix* 19, 33-36.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Revista EMA*, 7 (2), 127-170.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 69, 33-52.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes in L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, Historicity, Clasroom, and Culture (pp. 157-173)*. Sense Publishers: The Netherlands.

Font, V. y Planas, N. (2008). Mathematical practices, semiotic conflicts, and socio-mathematical norms. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Conference PME32-PMENA XXX (*Vol 3, pp. 17-23). CINVESTAV: México.

Font, V y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, *Revista de Educación*, 338, 309-346.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-33.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221–252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. Especial, 131-155.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. and Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 4.2, 1–26.

Gusmao, T.R.S. (2006) Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica. *Tesis doctoral,* Universidade de Santiago de Compostela.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza.

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics.* DOI 10.1007/s10649-009-9184-2.

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134, 181-216.

Peirce, C. S. (1978) *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Cambridge, MA, The Belknap Press of Harvard University Press.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40, 317–327.

Radford, L., Schubring, G. y Seeger. F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture.* Rotterdam: Sense Publishers.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(2), 233-265.

Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics* 61 (1-2), 1-10.

Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general*. Madrid: Alianza, 1991.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Cobb, E. Yackel y K. McCain (Eds), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom* (pp. 37- 97). London: LEA.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.

Stephan, M., Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2003). Coordinating social and psychological analyses: learning as participation in mathematical practices. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, *12* (67-102). Reston, VA: NCTM.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 133-162.

Steiner, H.G., Balacheff, N. y otros. (1984), (Eds.) *Theory of mathematics education (TME). ICME 5*. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Steiner, H.G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 6, 194-197.

Vygotski, L. (1934). *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires: Paidós, 1995

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77-120.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica, 1988

Los autores:

Juan D. Godino,
Catedrático de Universidad
Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada
http://www.ugr.es/local/jgodino

Carmen Batanero
Profesora Titular de Universidad
Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
http://www.ugr.es/local/batanero

Vicenç Font
Profesor Titular de Universidad
Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica
Facultat de Formació del Professorat
Universitat de Barcelona
http://www.webpersonal.net/vfont/