Pensamiento Numérico en Educación Secundaria Obligatoria.

Luis Rico Romero
Encarnación Castro Martínez
Departamento Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada.

1. Contexto y descripción del problema

El Real Decreto de Enseñanzas Mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (R.D. 1007/1991; BOE 26-VI-91) hace un planteamiento profundamente innovador en lo que se refiere al área de Matemáticas, "un área que (...) merece ser enseñada con contenidos y mediante procedimientos a menudos bien distintos de los tradicionales". En el hilo argumental de los responsables del currículo de matemáticas se destacan algunos aspectos dialécticos del conocimiento matemático:
i) "proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el indibviduo" vs. " la formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo";
ii) "constante referencia a la realidad, a los aspectos de construcción inductiva y empírica que se encierran en la actividad matemática" vs. "los elementos por los que las matemáticas se distancian de la realidad en actividades y operaciones que tienen que ver con la creatividad, la crítica, el poder de imaginar y representar una "realidad" alternativa" ;
iii) "las matemáticas contribuyen al desarrollo de capacidades cognitivas abstractas y formales de razonamiento, abstracción, deducción, reflexión y análisis" vs. " destacar también el valor funcional que poseen como conjunto de procedimientos para resolver problemas en muy diferentes campos".

En función de las consideraciones anteriores se establecen "los principios que presiden la selección y organización de sus contenidos":
"1. Las matemáticas han de ser presentadas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo (...), han de quedar resaltados los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento matemático, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final".
"2. Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje de las matemáticas con la

experiencia de alumnos y alumnas (...); hay que presentar las matemáticas como un conocimiento que sirve para almacenar información (...), para proponer modelos que permitan comprender procesos complejos del mundo natural y social, y para resolver problemas de muy distinta naturaleza".

"3. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha de atender: a) al establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general (...) que contribuyan por sí mismas a la potenciación de las capacidades cognitivas de los alumnos; b) a su aplicación funcional (...) en situaciones de la vida cotidiana; c) a su valor instrumental."

Más adelante insiste: "en los contenidos básicos del currículo hay que otorgar un lugar prioritario a los procedimientos o modos de saber hacer, (...) que se refieren principalmente a:

-Habilidades en la comprensión y en el uso de los diferentes lenguajes matemáticos, de la simbología y notación específica de cada uno de ellos, así como de la traducción de unos a otros.

- Las rutinas y algoritmos particulares, caracterizadas por tener un propósito concreto y unas reglas de uso claras y secuenciadas.

- Los heurísticos o estrategias heurísticas, como (...) la búsqueda de regularidades y pautas, de expectativas de resultados, de comprobación y refutación de hipótesis.

- Las competencias relativas a la toma de decisiones sobre qué conceptos, algoritmos o heurísticos utilizar en una situación dada, en el planteamiento y solución de un problema."

Aunque los párrafos seleccionados no expresan la totalidad de los argumentos utilizados en la elaboración del currículo de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria, sí constituyen una parte sustancial y significativa de su fundamentación, ya que exponen de manera contundente el peso concedido y la importancia que tienen en los nuevos programas el Constructivismo y la Psicología Cognitiva, en particular, la teoría del Procesamiento de la Información. La organización posterior de los contenidos en cinco bloques temáticos, clasificados a su vez según un criterio cognitivo en conceptos, procedimientos y actitudes, profundizan esta misma línea.

Independientemente de la mayor o menor afinidad que se tenga respecto a los argumentos anteriores, se trata de un planteamiento legítimo que sigue de cerca líneas de investigación y reflexión en Didáctica de la Matemática y tiene en cuenta las sistematizaciones, avances y resultados obtenidos en algunos estudios sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares.

En relación con los currículos anteriores del tercer ciclo de EGB y primeros cursos de bachillerato, supone una superación de la fundamentación piagetiana del currículo de EGB e, igualmente, del planteamiento formalista de los programas de bachillerato; ofrece una misma fundamentación teórica para el currículo de primaria y para el de secundaria.

Aunque el predominio anglosajón es importante, no es excluyente; tampoco se asume radicalmente el planteamiento constructivista. Se aprecia la influencia de los estudios previos a los Estándares Curriculares del NCTM, los trabajos sobre el concepto de función de C. Janvier y del Shell Center, los estudios sobre iniciación al álgebra y la complejidad de los procesos de representación, y los trabajos de Schoenfeld sobre resolución de problemas. Esta influencia no es única; también se observa un conocimiento de los trabajos del Instituto Freudenthal y algunas aportaciones francesas y alemanas, en particular, determinadas reflexiones epistemológicas sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

No obstante, el nuevo currículo plantea algunas dificultades considerables; entre ellas destacamos:

* posibles incoherencias que surgen entre las diferentes aportaciones teóricas consideradas, al menos si se quieren desarrollar dentro de un programa estricto;

* la posible desviación de las bases teóricas a un lenguaje superficial e inservible, que transmita una sensación de falsa claridad y trasparencia y que, de hecho, enmascare la continuación del currículo precedente;

* la escasa o nula formación del profesorado sobre psicología cognitiva y sobre los avances realizados en cognición matemática; la falta de sensibilidad o de criterios adecuados para proporcionar al profesorado las bases mínimas imprescindibles con las que abordar los nuevos cuestionarios.

La lista de dificultades puede continuarse sin mucho esfuerzo, ya que la magnitud del reto planteado con el nuevo currículo deja muchas cuestiones sin resolver. Pero si admitimos que se trata de una propuesta abierta de trabajo, cuyas limitaciones hay que explorar y sobre la que hay que detectar y resolver numerosos problemas, podemos aproximarmos a los nuevos programas tratando de encontrar líneas de reflexión que los vertebren e ideas que lleven a organizar tareas concretas para el trabajo de alumnos y profesores.

Constatamos un cambio curricular que, en matemáticas al menos, tiene unas bases teóricas diferentes a la de los currículos precedentes. También constatamos la necesidad de trabajar sobre los elementos que configuran el diseño de este nuevo currículo y ofertar propuestas concretas para hacer viable su desarrollo. En esta línea de reflexión se sitúa este trabajo, en el que nos dedicamos específicamente al bloque de Números y Operaciones.

2. Marco teórico

Denominamos *Pensamiento Numérico*, con carácter general, a "la línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos númericos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas.

Más en particular, el Pensamiento Numérico se interesa por:

* la elaboración, codificación y comunicación de ***sistemas simbólicos*** con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica;

* la organización, sistematización y desarrollo de diferentes ***actividades cognitivas*** que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica;

* los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de ***fenómenos, cuestiones y problemas*** que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica" (Castro, E. 1994).
El modelo que proponemos consta, pues, de:
a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Nuestro marco teórico tiene en cuenta el análisis semiótico de Duval (1993), los trabajos de Hiebert sobre conocimiento matemático y comprensión (1986; 1992), la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), las nociones de representación y sistemas de representación, tratadas por Janvier y otros (1987); un desarrollo más detallado puede verse en Castro (1994)

Sobre la base de este modelo nos proponemos analizar el Bloque de Números y Operaciones en Educación Secundaria Obligatoria, con el fin de aportar nuevas ideas para su enseñanza y aprendizaje.

Las estructuras numéricas que se trabajan en Secundaria Obligatoria son las que formalmente denominamos números naturales, números enteros, números fraccionarios y números decimales; en cada conjunto numérico se consideran las operaciones usuales suma y producto, sus operaciones inversas, propiedades y la relación de orden correspondiente. Globalmente consideradas, hay dos grandes grupos: las estructuras que corresponden a la *aritmética discreta*, de las unidades indivisibles, y las estructuras que corresponden a la *aritmética continua*, que se inicia con la división de la unidad y la aparición de las fracciones. Dentro de cada grupo hay similitudes y diferencias considerables: entre los naturales y los enteros, por un lado, y entre los racionales y los decimales, por otro.

Cada una de las estructuras numéricas mencionadas tiene un sistema simbólico preferente: los números naturales mediante el sistema decimal de numeración; los números enteros el sistema decimal de numeración complementado con los signos + y - ; los números racionales mediante la notación fraccionaria; y los números decimales con la extensión del sistema decimal de numeración a las potencias negativas de la base (10 en este caso). Aunque se pueden considerar otras representaciones en cada caso, esto no cambia la idea intuitiva de que cada estructura numérica se trabaja mediante un sistema de representación preferente, siendo otras alternativas meros recursos auxiliares y no sistemas de representación con entidad e interés propios. Esta es una primera idea que conviene revisar en profundidad.

3. La estructura de los números naturales

El hecho de que existan diversas notaciones para los mismos conceptos y que, en cada caso, pueda resultar más adecuada una u otra notación pone de manifiesto que cada concepto numérico no se agota en un único sistema de símbolos; de hecho, son necesarios dos o más sistemas para expresar toda la complejidad de cada tipo de números. Sin embargo, es igualmente cierto que nuestro sistema escolar da prioridad en cada caso a uno de estos sistemas simbólicos, descuidando o abandonando los restantes; ¿se trata de una simplificación del currículo o de una limitación inevitable?

Los sistemas simbólicos para codificar y representar conceptos y relaciones con números naturales han sido objeto de investigación histórica, lingüística, antropológica, filosófica y psicológica. En su análisis estructural, Guitel (1975) establece tres tipos de numeraciones: *numeraciones figuradas, habladas y escritas*, dando a las primeras un sentido amplio que incluye las representaciones puntuales. Esta consideración de un triple sistema de representación para los números naturales, que acepta como sistemas alternativos las representaciones mediante figuras, los términos verbales de la secuencia numérica y los sistemas de numeración, es reconocida igualmente por distintos historiadores; en particular, destacan el interés del sistema simbólico de representación de números que denominamos***números figurados.*** Así, Heath (1981) argumenta que el origen de los números figurados se encuentra en los primeros pitagóricos y señala los distintos autores griegos que trabajan sobre estos conceptos. Eves (1976) señala que hay un acuerdo general respecto a que los números figurados tuvieron su origen en los primeros pitagóricos y afirma que *“las representaciones mediante puntos según ciertas configuraciones geométricas representan un enlace entre la geometría y la aritmética”.*

¿Por qué no se trabajan las representaciones figurativas de los números naturales?, ¿constituyen un sistema simbólico con el que se puede transmitir alguna información estructuralmente significativa?, ¿tienen interés escolar?

Las funciones cognitivas asignadas a los números naturales se organizan, principalmente, en términos de tres clases de actividades (Castro, Rico y Castro, 1988), que surgen de tres cuestiones fundamentales, a cuya respuesta contribuyen los números naturales:

* primera: *contar y cardinar*, como respuesta a la pregunta ¿cuántos hay?;

* segunda: *secuenciar y ordenar,* como respuesta a la pregunta ¿qué posición ocupa?;

* tercera: *representar y analizar*, como respuesta a las preguntas ¿cúal es la cantidad?, ¿qué estructura tiene?.

Los estudios sobre iniciación y desarrollo de estas funciones han ocupado una parte de las investigaciones de los psicólogos que han trabajado sobre estos conceptos matemáticos; los estudios sobre conteo, cardinación, secuenciación y ordenación han tenido un lugar predominante (Bideaud, Meljac y Fischer, 1992); también se ha trabajado sobre representaciones numéricas, estudios incrementados recientemente. La psicología cognitiva y, en especial, la teoría del procesamiento de la información con la noción de representación, han hecho contribuciones en este campo (Hiebert y Carpenter, 1992).

Las funciones señaladas se significan en una gran variedad de contextos, que vamos a denominar, con carácter general, *contextos cardinales, ordinales y figurativos.* El uso de los números naturales en contextos cardinales y ordinales forma parte de la actividad cotidiana de las personas, ya que se presentan en multitud de fenómenos y situaciones (Cockroft, 1985); en nuestra sociedad actual es mucho menos frecuente la presencia de contextos figurativos.

El interés de los contextos numéricos es considerable, por ello el sistema escolar dedica gran cantidad de tiempo y esfuerzos en proporcionar a los escolares competencia sobre la estructura de los naturales. Los contextos cardinales y ordinales son frecuentes, tanto en el medio escolar como en el medio extraescolar; los términos *cardinalidad* y *ordinalidad* son familiares y ponen esta idea de manifiesto. Sin embargo, el contexto figurativo sólo se emplea, brevemente, al inicio del aprendizaje escolar del número; cuando se introduce el sistema decimal de numeración se abandona el trabajo sistemático sobre este contexto y sólo se recupera esporádicamente para ilustrar la presentación de algún concepto aislado.

El dominio sobre los números naturales supone un dominio de diferentes sistemas simbólicos, que activan diferentes funciones cognitivas y se combinan ante contextos y situaciones en los que intervienen diferentes niveles de complejidad. Desconocer uno de los tipos de sistemas simbólicos, cualquiera que sea, aunque se dominen los restantes, supone un conocimiento deficiente de los números naturales, ya que hay relaciones estructurales entre números y cuestiones significativas que sólo se pueden abordar desde el sistema que se desconoce.

Es necesaria una aproximación curricular a los números figurados como sistema simbólico de representación de números, que permita profundizar, mediante actividades de representación, en un tipo de análisis estructural de los números y aplicar los resultados de ese análisis al estudio de fenómenos, planteamiento de cuestiones y resolución de problemas.

3.1 El sistema de representación de los números figurados.

En una investigación reciente (Castro, 1994) hemos trabajado sobre el sistema de representación figurativa para los números, que se deriva de las configuraciones puntuales. El interés de este análisis ha estado, en primer lugar, en delimitar la potencialidad del sistema simbólico mencionado para expresar determinados aspectos conceptuales y procedimentales de los números naturales que no se ponen de manifiesto mediante los sistemas simbólicos usuales. Conectado con lo anterior, se han precisado los modos de traducción entre las expresiones del sistema decimal de numeración y las configuraciones puntuales.

Un segundo logro ha consistido en explicitar actividades cognitivas relevantes que surgen de manera natural al trabajar con el sistema simbólico de las configuraciones puntuales; el análisis estructural de los números naturales, los tipos de simetrías y regularidades, las conexiones entre el número considerado y otros números son, todas ellas, aportaciones que han surgido del nuevo sistema de representación. La funcionalidad del nuevo sistema y su viabilidad se ha comprobado en un grupo natural de escolares.

En tercer término, se han encontrado contextos en los que el sistema simbólico figurativo trabaja de manera significativa. Hemos estudiado un tópico matemático concreto en el que ésto se pone de manifiesto; se trata del trabajo con sucesiones numéricas naturales y la iniciación a la noción de término general de una sucesión y a su simbolización. Este tópico ha merecido un estudio detallado, ya que es una cuestión clave en el paso de la aritmética al álgebra; en cada caso el contexto lo proporcionan las representaciones utilizadas y los problemas planteados en el trabajo con sucesiones.

Algunos de los resultados obtenidos en la investigación mencionada han sido:

1. Los números se representan; hay distintas interpretaciones intuitivas de la noción de ***representación***, que dan juego suficiente para expresar gráficamente números inferiores a 20 o bien las primeras potencias de 10.

2. Una progresiva simplificación del objeto elegido para representar una unidad, junto con una organización de estos objetos, sirven para precisar la idea (igualmente intuitiva) de un ***modelo de representación***.

3. La elección del punto como unidad proporciona un grado de simplificación y abstracción que permite centrar la consideración de cada representación en el modelo que expresa.

4. La trama de puntos isométrica o la cuadrícula, ofrecen un espacio estructurado para la representación en el que los modelos se organizan prioritariamente en formatos geométricos, a los que denominamos ***configuraciones puntuales***.

5. Durante todo este proceso el alumno está explorando y asumiendo un nuevo ***sistema de representación de números***. Una característica relevante del nuevo sistema consiste en la variedad de configuraciones puntuales que admite un mismo número.

6. Al representar diferentes números encontramos que algunas de sus representaciones responden a un mismo modelo. La similitud estructural de las configuraciones puntuales de números diferentes da origen a la noción de ***patrón***.

7. Un patrón de representación da origen a una ***familia de números***, caracterizados porque todos ellos admiten ser representados según ese modelo. Dado un patrón hay números que se ajustan a él y otros no lo hacen.

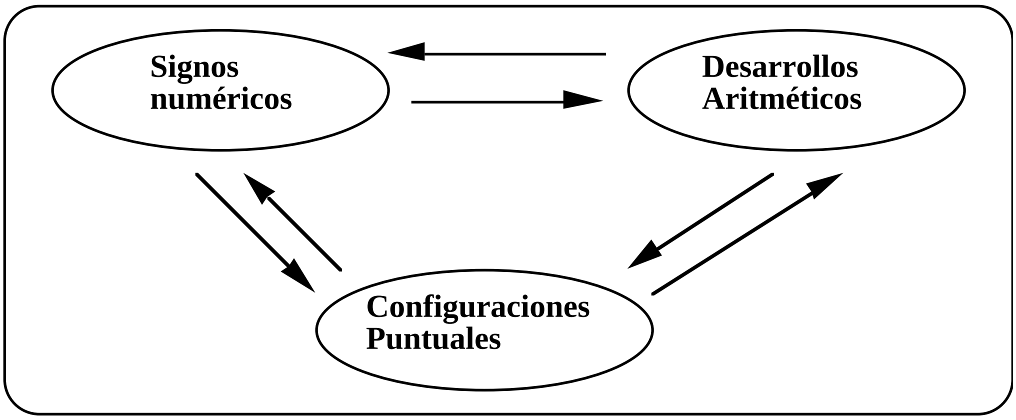
8. El ***patrón triangular*** y el ***patrón cuadrado*** son característicos; tienen unas reglas de formación sencillas de enunciar y fáciles de representar. Los números que se ajustan al patrón triangular o al patrón cuadrado constituyen una familia, que se expresan mediante notaciones simbólicas específicas y se presentan en secuencia ordenada.

9. Los números triangulares y los números cuadrados satisfacen unas determinadas ***reglas de formación*** que pueden expresarse geométricamente, aritméticamente, algebraicamente o mediante una relación de recurrencia.

10. Entre números triangulares, entre números cuadrados y entre números cuadrados y triangulares, se pueden considerar ***relaciones*** aditivas, multiplicativas u otras; las exploraciones de estas relaciones ofrecen posibilidades heurísticas.

11. El concepto de sucesión de números naturales se puede iniciar a partir del estudio de números que comparten patrón, es decir, comparten un mismo tipo de estructura de representación y, por tanto, de estructura aritmética.

12. Los números naturales se expresan con tres tipos de representación simbólica, que admiten procesos de traslación entre ellos; se ha trabajado con los 6 procedimientos de traducción posibles entre los tres sistemas de representación de referencia:



13. La expresión de los términos de una secuencias dada en un sistema a otro sistema distinto de representación permite controlar la estructura común de dichos términos; se establece así la relación entre patrones numéricos y geométricos equivalentes.

14. Al fijar la atención en los patrones a seguir es posible extrapolar términos.

15. Paso previo para considerar la posición genérica que llamamos enésima consiste en establecer la relación entre el lugar que ocupa un término de la secuencia y la expresión de dicho término.

16. Al trabajar con sucesiones expresadas con los tres sistémas simbólicos es posible obtener el término general de la sucesión. Por su utilidad para la determinación del término general han quedado ordenados del siguiente modo: representación puntual, desarrollo aritmético y representación numérica.

17. De este plan de trabajo, observamos que:
a) se muestra conflictivo el hecho de que el término general de una sucesión posea una expresión algebraica (equivalente a un desarrollo aritmético) y no una expresión simple, como ocurre con los elementos de la secuencia dados en numerales.
b) se pone de manifiesto que la misma sucesión numérica puede tener representaciones puntuales distintas, y también desarrollos aritméticos distintos lo que proporcionará expresiones para el término general distintas (aunque equivalentes).

4. La estructura de los números racionales.

La complejidad del concepto de número racional es asumida por la reciente investigación en Didáctica de la Matemática (Giménez, 1991; Carpenter, Fennema y Romberg, 1993), que viene dedicando esfuerzos considerables a clarificar los problemas que plantean la comprensión y aprendizaje de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que, técnicamente, denominamos *el cuerpo ordenado de los números racionales*. En lo que sigue vamos a presentar algunas reflexiones sobre la base y fundamentación del modelo que hemos denominado Pensamiento Numérico

Son variados y diferentes los conceptos que integran el concepto más amplio de número racional: relación parte/todo, división indicada, notación decimal, operador y medida; algunos de ellos ya se han iniciado en la Educación Primaria, constituyendo cada uno un sistema de representación parcial de la noción de fracción, pero no es usual que el alumno disponga de una red de significados que conecten estos conceptos parciales; se trata de una tarea que debe realizarse durante la Educación Secundaria.

El núcleo del concepto de número racional en Secundaria se encuentra en la noción de *fracciones equivalentes*. Esta noción debe servir para una reflexión detallada, con revisión de los significados que tiene este concepto en cada uno de los usos y representaciones previamente conocidos.

La relación de orden y las operaciones de suma, resta, producto y división de racionales son objeto de trabajo, junto con el estudio de las propiedades más relevantes. Aunque estas nociones deben ser conocidas por los alumnos es fundamental realizar un planteamiento coordinado y sistemático para justificar las diferentes relaciones y operaciones utilizando los distintos sistemas de representación revisados.

Los sistemas de representación fundamentales con los que debe manejarse el concepto de número racional en Secundaria pueden centrarse en cuatro: la *notación fraccionaria*, de cáracter operatorio, que indica tanto una división indicada como un operador; la *notación decimal*, mediante la que todo racional (excepto 0) tiene una expresión decimal periódica única, esta notación es la que unifica todo el sistema de números estudiados hasta el momento; el *punto de la recta*, que proporciona una representación intuitiva y asequible de cada número y, al mismo tiempo, transmite la idea de que un número racional es algo construible, permitiendo esas construcciones hacer comparaciones y operaciones de manera gráfica; el cuarto sistema de representación viene dado por la *pareja de segmentos comensurables*, tales que uno de ellos con respecto al otro tiene por medida el racional correspondiente. Cada uno de estos sistemas simbólicos de representación destaca algunas características y propiedades del concepto de número racional y satisface una derminadas funciones cognitivas, ya que se utiliza para determinadas actividades y no para otras; las traducciones entre los diferentes sistemas de representación proporcionan toda una red de relaciones y significados que dan medida de la complejidad del concepto de número racional.

La notación decimal de los números racionales, junto con los tipos que surgen y las denominaciones que reciben; la obtención de la fracción a partir de la notación decimal correspondiente; la justificación de por qué en unos casos el decimal es exacto y en otros periódico; son, todos ellos, problemas que se plantean en la representación decimal de los números racionales.

No es trivial este sistema de representación para los números racionales ya que mediante la notación decimal todas las fracciones equivalentes se reducen a una notación única (esta es una de las ventajas de los decimales) y, en segundo término, mediante la notación decimal se unifica la escritura de todos los números.

En la representación de los racionales en la recta no suelen darse dificultades conceptuales graves, se trabaja como una cuestión técnica de cómo dividir un segmento en n partes iguales; suele ser suficiente recordar las destrezas aprendidas cuando se estudió el Teorema de Tales.

Una cuestión que se plantea de inmediato se presenta al realizar la primera ampliación en la notación de los números decimales exactos. Inicialmente, cada racional tenía una notación decimal única; en el caso de los decimales exactos se pueden añadir ceros a la derecha *sin que su valor se modifique* aunque *sí se modifican su lectura y escritura*. De este modo se varia el convenio inicial de que un racional tiene una expresión decimal única, lo cual parece a los alumnos una contradicción o, al menos, una violación de una regla previamente establecida. Conviene destacar este hecho y dejar pendiente su resolución definitiva; la primera clasificación de los racionales en decimales exactos y periódicos presenta determinadas deficiencias, como las que se han indicado y que conviene subsanar; el sistema de representación de los racionales, que incluye a los decimales exactos, tiene una limitación, ya que no ofrece garantias suficientes de unicidad. Sin embargo, esta deficiencia se muestra fecunda a la hora de proponer un criterio que permita la comparación de decimales exactos: igualando el número de cifras de todos ellos la comparación resulta sencilla.

La calculadora introduce otro ámbito importante para escribir y operar con números decimales. La calculadora es un nuevo espacio de representación de decimales, cuyas limitaciones y reglas conviene conocer y dominar. El aparato técnico lo proporcionan las nociones de valor aproximado, error de aproximación, truncamiento, redondeo y notación científica. Trabajar con aproximaciones supone una línea de reflexión diferente a la expuesta anteriormente. Por un lado, los decimales exactos no tienen unicidad de notación y hay que resolver este problema. Por otra parte, los decimales periódicos son inmanejables cuando se quiere operar con ellos o, simplemente, cuando se les quiere utilizar para fines prácticos; la calculadora pone de manifiesto esta limitación. Por ello, una vez que disponemos de una notación decimal ilimitada, hemos de simplificar los números y trabajar con aproximaciones. El estudio de las técnicas de aproximación debe proporcionar las reglas para operar con decimales a efectos prácticos.

Las contradicciones y limitaciones que se van poniendo de manifiesto obligan a clarificar y controlar todo el aparato técnico que subyace en la noción de representación decimal de un número racional. Los alumnos se ven envueltos en una casuística en la que cada regla enunciada presenta de inmediato una aplicación que la contradice. Se llega así a la necesidad de introducir el convenio del periodo 9, que permite escribir cualquier decimal exacto -excepto 0- con una expresión decimal periódica única. Aunque históricamente se ha considerado el periodo 0 como otra alternativa para escribir los decimales exactos con notación periódica, en la actualidad esa notación está en desuso y se admite, como convenio, que es el periodo 9 el que unifica los decimales exactos y periódicos en una misma notación. Este hecho resuelve las contradicciones y limitaciones indicadas anteriormente con la amplicación de la notación decimal y propone una noción mucho mas elaborada de escritura de cualquier racional, excepto 0, mediante una notación decimal periódica.

Aún así no desaparece la complejidad de la notación decimal, sólamente queda mejor encuadrada. Conviene destacar una complementariedad de puntos de vista: la conveniencia de disponer de una notación única y bien definida para cada número racional sólo se resuelve con la notación periódica; el uso práctico de los decimales obliga a trabajar con aproximaciones y cotas de error.

La multiplicidad de situaciones, cuestiones y problemas que se abordan mediante los números racionales son suficientemente conocidos como para que no sea necesario insistir en su importancia; su desarrollo sistemático es objeto en la actualidad de propuestas curriculares muy elaboradas y de trabajos detallados de investigación

4.1 El sistema de los números decimales

El sistema de los números racionales no agota las posibilidades de representación de cada uno de los cuatro sistemas simbólicos mencionados; por ello mismo no debe concluir el estudio de los números en Secundaria con los números racionales. Es importante trabajar con los alumnos en las ampliaciones que tienen cada uno de los sistemas simbólicos considerados. Por un lado, la posibilidad de escritura de expresiones decimales infinitas no periódicas; por otro, la aparición de notaciones (que simbolizan algoritmos) que no dan lugar a expresiones decimales periódicas, siendo el caso más conocido el de las raices cuadradas de los números no cuadrados; en tercer lugar la posibilidad de construir con regla y compás longitudes cuyo valor es $\sqrt{n}$, para cualquier valor natural de n, lo que permite marcar puntos en la recta cuyo valor sea $\sqrt{n}$; finalmente la no conmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado.

Estos problemas son abordables con alumnos de secundaria, de manera que se puede llegar a considerar como problema la posibilidad de rebasar los números racionales mediante cada uno de los sistemas simbólicos con los que se establecieron (Romero, 1993). No se trata de presentar una serie de definiciones formales en relación con los números reales, sino de ubicar la existencia de una nueva categoría de números, los irracionales, a cuya complejidad podemos acercarnos con la sistemática de trabajo aquí indicada.

5. Conclusión

Con el modelo presentado para caracterizar la corriente Pensamiento Numérico hemos hecho una aproximación a las estructuras numéricas que se estudian en Secundaria Obligatoria, tratando de ajustarnos al marco conceptual propuesto en el Currículo de Matemáticas. Como resultado de esta exploración se abren vias de reflexión muy sugerentes para pensar los viejos conceptos de la aritmética con ideas nuevas y potentes

Los apuntes aquí presentados son una primera reflexión, explorada y desarrollada con cierto detalle, en algún caso, y sólo con ideas generales, en otros. Se trata de una línea de investigación emergente en nuestro país, con resultados contrastados en otras comunidades, que aquí proponemos a debate público y como materia de trabajo para profesores e investigadores interesados.

6. Referencias:

Bideaud, J.; Meljac, C.; Fisher, J. (eds.) 1992 "*Pathwais to Number. Children's Developing Numerical Abilities*. LEA. Hillsdale. N. J.

Carpenter, T; Fennema, E.; Romberg, T. 1993. "*Rational Numbers*" LEA. Hillsdale. N. J.

Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. 1988. "*Números y Operaciones. Fundamentos para una Aritmética Escolar"*. Síntesis. Madrid.

Castro, E. 1994. "*Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*" Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada

Cockcroft, W. 1985. "*Las Matemáticas sí cuentan*". Informe Cockcroft. MEC. Madrid.

Duval, R. 1993. "*Semiosis y Noésis*". CINVESTAV. México.

Guitel, G. 1975. "*Histoire Comparée des Numérations Écrites*". Flammarion Éditeur. París VI^{e}. París.

Eves, H. 1976. "*An Introduction to History of Mathematics*". Saunders College P. New York.

Giménez, J. 1991. " *Didáctica Especial del Número Racional Positivo*" Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.

Heath, T. 1981(a). "*A History of Greek Mathematics. From Aristarchus to Diophantus*". Dover. New York.

Hiebert, J.; Carpenter, T. 1992. "Learning and Teaching with Understanding". *En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws (ed.) NCTM-MacMillan. New York.

Janvier, C. 1987 "Traslation Processes in Mathematics Education". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C. (ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Ministerio Educación y Ciencia, 1991. "*Real Decreto de Enseñanzas Mínimas corre-*

spondientes a la Educación Secundaria Obligatoria" (R.D. 1007/1991); BOE. Madrid.
NCTM. 1991. "*Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*". Edición S.A.E.M. Thales. Sevilla.
Romero, I. 1993. "*Introducción al NúmeroReal en Enseñanza Secundaria*"¨. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada. Granada.
Vergnaud, G. 1993 ¨*La Teoriá de los Campos Conceptuales*" CINVESTAV. México.