



Université  
de Toulouse

# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :**

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques appliquées

---

**Présentée et soutenue par**

Sébastien MARINESQUE

le 23 novembre 2012

**Titre :**

Méthodes de reconstruction itératives en tomographie thermoacoustique

---

**École doctorale :**

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**

UMR 5219

**Directeurs de thèse :**

Luca Amodei (MCF, UPS)

Didier Auroux (PR, Univ. Nice)

**Rapporteurs :**

Marc Bonnet (DR CNRS, ENSTA ParisTech)

Pierre Rouchon (PR, Mines ParisTech)

**Membres du jury :**

Jacques Blum (PR, Univ. Nice)

Serge Gratton (PR, ENSEEIHT)

Jean-Michel Roquejoffre (PR, UPS)







*Des mercis  
à MC Gonçalves et la famille,  
à Agathe,  
à Xavier,  
aux amis,  
et à tous les Enragés.*



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>A Tomographie Thermoacoustique</b>	<b>5</b>
I Imagerie, tomographie et thermoacoustique . . . . .	7
I.1 Imagerie et tomographie . . . . .	7
I.1.1 Tomographie . . . . .	7
I.1.2 Les principales méthodes d'imagerie . . . . .	8
I.2 La tomographie thermoacoustique . . . . .	14
II TTA : physique et pratique . . . . .	20
II.1 Dérivation des équations d'onde . . . . .	20
II.2 Utilisation en TTA . . . . .	24
II.2.1 De l'impulsion source... . . . .	24
II.2.2 ... au problème inverse de la TTA . . . . .	27
II.2.3 Modélisation de l'atténuation . . . . .	28
II.2.4 Modélisation de la vitesse . . . . .	29
II.3 Les dispositifs d'observation et les données . . . . .	30
II.3.1 Les technologies d'acquisition . . . . .	31
II.3.2 Les types d'observation . . . . .	32
II.3.3 Compléments . . . . .	33
III Les mathématiques de la TTA . . . . .	34
III.1 Position du problème et notations . . . . .	34
III.2 Solutions : définitions et propriétés fondamentales . . . . .	37

	III.2.1	Équation d'onde en milieu homogène . . . . .	38
	III.2.2	Cas général et solutions moins régulières . . .	40
	III.2.3	Égalités d'énergie, réversibilité et unicité . .	44
	III.2.4	Comportement des solutions . . . . .	46
	III.3	Réécriture et propriétés du problème inverse . . . . .	48
	III.3.1	Propriétés : milieu homogène . . . . .	49
	III.3.2	Propriétés : milieu hétérogène . . . . .	57
IV		Méthodes usuelles en TTA . . . . .	62
	IV.1	Premières méthodes & améliorations . . . . .	64
	IV.2	Transformées de Radon et rétroprojections . . . . .	71
	IV.2.1	Transformée de Radon . . . . .	72
	IV.2.2	Observations linéaires intégrales . . . . .	73
	IV.2.3	Transformée de Radon sphérique . . . . .	77
	IV.3	Développement en séries . . . . .	85
	IV.4	Méthodes de renversement temporel . . . . .	87
	IV.5	Les méthodes et leurs hypothèses . . . . .	89
		Conclusion du premier chapitre . . . . .	90
<b>B</b>		<b>Méthodes de reconstruction</b>	<b>93</b>
	I	Redéfinitions et approximations du problème . . . . .	95
	II	Opérateurs diagonalisables et TTA . . . . .	102
	II.1	Opérateurs diagonalisables . . . . .	102
	II.2	Le Théorème de Agranovsky et Kuchment . . . . .	115
	III	Une méthode variationnelle . . . . .	121
	III.1	Première approche . . . . .	121
	III.2	Seconde étude . . . . .	126
	IV	Le nudging direct et rétrograde . . . . .	131
	IV.1	Origine et définitions de l'algorithme BFN . . . . .	131
	IV.1.1	Origines du BFN . . . . .	131
	IV.1.2	Définition du BFN . . . . .	134
	IV.1.3	Exemples et premières propriétés . . . . .	141
	IV.2	BFN : existence, unicité et convergence . . . . .	148
	IV.2.1	Renversement temporel . . . . .	148



	IV.2.2	Un algorithme BFN bien posé . . . . .	149
	IV.2.3	Première étude de convergence du BFN . . . . .	160
	IV.3	BFN et TTA . . . . .	163
	IV.3.1	Un BFN restreint pour la TTA . . . . .	163
	IV.3.2	Convergence du BFN pour la TTA . . . . .	168
V		Observateurs itératifs . . . . .	175
	V.1	Introduction, définitions . . . . .	175
	V.1.1	Observateurs . . . . .	175
	V.1.2	Itération des observateurs filtrés . . . . .	177
	V.2	Études de convergence . . . . .	183
	V.2.1	Définitions . . . . .	183
	V.2.2	Observateurs et opérateurs antiadjoints . . . . .	185
	V.2.3	Observation et équations d'onde . . . . .	193
<b>C</b>		<b>Mises en œuvre numériques</b>	<b>199</b>
	I	Discrétisations, filtrage et observation . . . . .	201
	I.1	Discrétisation des équations d'ondes . . . . .	201
	I.1.1	Notations et contexte. . . . .	202
	I.2	Filtrage et meilleure estimation . . . . .	204
	I.2.1	Le filtre de Kalman-Bucy . . . . .	204
	I.2.2	Du filtre de Kalman au filtre SEEK . . . . .	206
	I.3	Précisions sur les méthodes comparées . . . . .	208
	I.3.1	Techniques usuelles . . . . .	209
	I.3.2	Nos méthodes . . . . .	210
	I.3.3	Atténuation numérique . . . . .	212
	II	Résultats numériques . . . . .	215
	II.1	BFN et BFF monodimensionnels . . . . .	215
	II.1.1	Présentation . . . . .	215
	II.1.2	Observations complètes (I) . . . . .	216
	II.1.3	Observations complètes (II) . . . . .	216
	II.1.4	Observations partielles . . . . .	216
	II.1.5	Bilan . . . . .	223
	II.2	BFN et CG bidimensionnels : résultats numériques . . . . .	224

II.2.1	Objets et vitesses utilisés . . . . .	225
II.2.2	Résultats introductifs . . . . .	226
II.2.3	Influence des coefficients de nudging . . . . .	227
II.2.4	Robustesse vis-à-vis du bruit . . . . .	237
II.2.5	Régularisation numérique . . . . .	246
II.2.6	Régularisation du CG . . . . .	246
II.2.7	Angle de vue limité . . . . .	247
II.2.8	Éparpillement des données . . . . .	251
II.2.9	Influence de l'horizon de temps . . . . .	254
II.2.10	En cumulant les tares (I). . . . .	255
II.2.11	En cumulant les tares (II). . . . .	260
II.2.12	En cumulant les tares (III). . . . .	260
II.2.13	Compléments . . . . .	274
II.2.14	Bilan . . . . .	278
	<b>Conclusion</b>	<b>281</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>285</b>
	<b>Articles</b>	<b>311</b>

# Introduction

Entre les modèles mathématiques et l'information contenue dans les données offertes par les appareils de mesure, le champ de connaissances scientifiques qui s'intéresse à définir et calculer des approximations des phénomènes physiques, biologiques, sociaux, etc., est dénommé *assimilation de données*. Plus précisément, l'objectif de l'assimilation de données est de conjuguer les connaissances théoriques contenues dans les modèles scientifiques et les informations empiriques issues d'observations afin de reconstruire virtuellement (une partie de) la réalité. Bien connue des météorologues et des océanologues, cette discipline vise donc à reconstruire l'état d'un système à un instant donné. Ces reconstructions peuvent être aussi faites sur des intervalles de temps passés ou à venir, sur lesquels les observations ne sont pas toujours disponibles, par le biais d'intégrations des équations du modèle théorique.

Loin de ces considérations, le milieu médical utilise couramment des ondes (lumineuses, électromagnétiques, acoustiques) pour obtenir des images de l'intérieur du corps humain. Les attentes et les enjeux sont nombreux et variés, ils peuvent porter sur des thématiques suivantes : précision et contraste des images, profondeur des tissus visualisés, intrusion de matériel ou de produit dans le corps, irradiation et ionisation, portabilité, coût du matériel et de son entretien.

La *tomographie thermoacoustique* est une technologie d'imagerie médicale d'invention récente qui tient compte des problèmes précédemment évoqués. La réalisation d'une nouvelle machinerie dédiée à l'imagerie médicale reposant sur cette technologie pose cependant de nombreuses difficultés, dont certaines appellent à développer un nouveau domaine de recherche en ma-

thématiques que l'on peut regrouper sous le nom de « problèmes inverses appliqués aux équations d'ondes ». En toute généralité, nous appellerons le problème à résoudre, qui consiste en l'obtention d'une image de l'intérieur d'un corps humain à partir de la donnée de mesures acquises au moyen d'un phénomène thermoacoustique, « problème de la TTA ». Nous préciserons la teneur de ce problème dans le Chapitre A.

Les premières démarches proposées par les mathématiciens afin de résoudre ce problème relèvent de l'extension de résultats bien connus issus de travaux de recherche associés à d'autres systèmes d'imagerie (plus anciens et bien étudiés, voir la Section IV du Chapitre A). Ce parallèle a permis d'obtenir des solutions « explicites » qui ont elles-mêmes fourni des moyens de résoudre le problème de la TTA. Comme nous le verrons dans le Chapitre A, cette démarche a permis d'obtenir des résultats variés et précis renseignant sur la possibilité de résoudre le problème dans des conditions favorables et sur les propriétés de celui-ci.

Sous l'influence de mes directeur et codirecteur de thèse, Didier Auroux et Luca Amodei, nous nous sommes muni des outils puissants offerts par l'assimilation de données et nous sommes intéressé à leur possible adaptation à un modèle et à des types de données inédits : ceux relatifs au problème de la TTA.

Car le manque de souplesse des méthodes évoquées précédemment vis-à-vis de leurs conditions d'utilisation (modèle imposé, observations non réalistes, etc.) rendait nécessaire l'*introduction de techniques moins dépendantes de leur cadre d'application*. L'intérêt des mathématiciens va grandissant dans cette direction, avec pour objectifs principaux d'assouplir les hypothèses relatives au modèle (ce qui permettrait de préciser celui-ci indépendamment de la méthode de reconstruction choisie), de proposer des méthodes indépendantes du matériel d'imagerie utilisé (afin de s'adapter à diverses conditions d'acquisition de l'image), et ce en offrant une image de qualité (contrastée, peu bruitée et de haute résolution), dans de brefs délais (si possible en temps réel) et à moindre coût.

Nous nous sommes attaché à respecter ces objectifs lorsque nous avons développé des méthodes permettant de résoudre le problème de la TTA.

Nous présentons et étudions les propriétés théoriques de celles-ci au cours du Chapitre B et des expérimentations numériques sont exposées dans le Chapitre C.



## Chapitre A

# Observation et reconstruction d'ondes de pression pour la tomographie thermoacoustique

CE CHAPITRE EST CONSACRÉ à la définition d'une technique d'imagerie médicale, la tomographie thermoacoustique (ou TTA), des procédés physiques et mathématiques qu'elle met en œuvre ainsi qu'aux méthodes habituellement utilisées en TTA pour reconstruire de l'image. Ainsi la Section I page 7 présente les principales méthodes d'imagerie avant d'exposer les spécificités de la tomographie thermoacoustique. Le modèle mathématique afférant, qui repose sur les équations d'onde, et les modalités d'observation du corps dont on souhaite obtenir une coupe sont ensuite décrits en Section II page 20. La Section III page 34 de ce chapitre est dédiée aux outils mathématiques permettant de décrire et d'étudier les ondes acoustiques et d'en modéliser l'observation. Les principales notations utilisées dans nos travaux sont précisées en introduction de cette section. Nous concluons ce chapitre avec la description des principales méthodes utilisées jusqu'alors en TTA (Section IV page 62).





## I Imagerie, tomographie et thermoacoustique

Nous décrivons ici le cadre expérimental dans lequel s'inscrivent nos travaux, celui de la *Tomographie ThermoAcoustique* (TTA, ou *ThermoAcoustic Tomography*, TAT, en anglais). Commençons par présenter l'imagerie médicale et définir la tomographie, avant d'aborder le cas particulier de la tomographie thermoacoustique.

### I.1 Imagerie et tomographie

#### I.1.1 Tomographie

On appelle *tomographie* l'ensemble des techniques d'imagerie fournissant des coupes (*tomê* en grec) du corps observé en vue d'obtenir une description imagée de l'intérieur de ce corps.

Ces techniques reposent sur l'utilisation d'ondes (électromagnétiques ou acoustiques, notamment) traversant le corps observé, sachant que celui-ci peut être la source d'émission de l'onde. Elles sont employées dans des domaines variés telles l'imagerie médicale, la sismologie, l'archéologie, la science des matériaux, l'astronomie, etc. Lorsque suffisamment de coupes sont disponibles, les images obtenues fournissent une description de l'objet en trois dimensions.

Le principe de la tomographie est le suivant : une onde (dite *incidente*) est émise qui irradie le corps à observer ; le corps modifie cette onde ou en réémet une autre, qui est alors enregistrée à la surface du corps ou à distance ; ensuite, soit l'enregistrement est utilisé tel quel, comme c'était le cas pour les premières techniques développées dans les années trente, soit il est analysé et interprété mathématiquement, comme c'est le cas dans les méthodes plus récentes (voir ci-dessous). On parle alors de *tomographie assistée par ordinateur* et les méthodes mathématiques utilisées sont nommées *techniques de reconstruction*.

Les techniques assistées par ordinateur reposent sur une modélisation mathématique des phénomènes d'émission, de transmission, d'enregistrement et d'analyse de l'onde traversant le corps. Ce dernier a soit émis une onde, soit modifié certaines des propriétés de l'onde incidente, et l'on souhaite, à partir

des données mesurées et d'un modèle de propagation de l'onde, remonter le temps depuis l'enregistrement jusqu'à l'origine de la modification ou de l'émission. Les *techniques de reconstruction* (mathématiques) utilisent un modèle de propagation d'onde, appelé *modèle direct* et, puisque l'on souhaite analyser l'origine de l'onde observée, on résout ensuite un problème dit *inverse*. Nous traiterons brièvement du cas de la modélisation directe et de l'étude mathématique de l'équation d'onde correspondante dans la Section II page 20. Le problème que pose la modélisation est celui du choix des approximations faites selon la nature de l'onde observée et selon celle de l'objet étudié. En effet, nous verrons par exemple que, dans le cas de la TTA, il est essentiel que le corps observé soit un être vivant, principalement constitué de tissus mous auxquels correspondent une vitesse et un mode de propagation spécifiques des ondes ultra-sonores utilisées. On est de plus confronté à la difficulté de définir un modèle de propagation d'onde dans un corps qui n'a pas encore été observé, et qui n'est donc connu que dans ses caractéristiques générales, celles qui sont communes à tous les corps.

Comme nous le verrons, les sources de données peuvent être très variées. Pour citer quelques exemples, sont employés : les moments magnétiques nucléaires dans l'imagerie par résonance magnétique ; les rayons X pour la radiographie et la tomodynamométrie ; les ondes acoustiques en astronomie, pour l'échographie ou la tomographie thermoacoustique ; les ondes sismiques en tomographie sismique. Ainsi, les vitesses de propagation des ondes précitées vont de la vitesse de la lumière à des vitesses de l'ordre du  $\text{km.s}^{-1}$  pour les ondes sismiques, et leurs propriétés sont tout aussi variables (voir le cas des ondes de cisaillement en sismologie). Dans nos travaux, nous concentrerons notre attention sur les techniques dédiées à l'imagerie médicale, et l'on suppose dorénavant que les données sont obtenues par l'enregistrement d'ondes électromagnétiques ou acoustiques.

### I.1.2 Les principales méthodes d'imagerie

Les paragraphes qui viennent sont consacrés à un bref recensement des principales techniques utilisées en imagerie médicale (voir l'*Encyclopædia*

*Universalis* et [110] pour des descriptions physiques et historiques plus détaillées).

Première à avoir été développée, la *radiographie* est une méthode directe, l'image étant obtenue directement par projection au moyen d'une impression de type photographique, sans analyse automatique (traitement informatique des données, implémentation numérique, etc.) ultérieure. Cette méthode est née de la découverte des *rayons X* par Wilhelm Röntgen en 1895<sup>1</sup>, et joue sur la différence d'absorption des rayons X selon les tissus (par exemple les os et les muscles), laquelle induit un contraste lors de leur impression sur des plaques photographiques ou sur tout autre récepteur photosensible. Cette méthode s'est enrichie de diverses techniques, comme le fait de jouer sur les contrastes pour favoriser tel ou tel niveau d'absorption, de superposer différentes images, d'utiliser divers produits de contraste, etc.

Vient ensuite l'*échographie*. Les premières utilisations d'*ondes ultrasonores* à des fins médicales datent des années quarante et le premier échographe a été réalisé par John Wild en 1951. L'appareil a pris sa forme actuelle bien connue au début des années soixante; l'obstétrique devient alors un domaine d'utilisation privilégié et assure le succès de cette technique dans le courant des années soixante-dix. L'élément central de l'échographe est la sonde, qui émet des ondes ultrasonores et en enregistre les échos. Ce sont les mêmes composants qui remplissent ces deux fonctions (émission et enregistrement) : les *transducteurs piézoélectriques*, que nous retrouverons plus loin. Ces céramiques ont la propriété de générer des ondes ultrasonores lorsqu'elles sont soumises à des impulsions électriques et, inversement, de produire des impulsions électriques lorsqu'elles reçoivent des ondes ultrasonores. En général, les fréquences utilisées varient entre 2 et 18 MHz, sachant que, lorsque la fréquence croît, la profondeur d'exploration diminue tandis que la précision obtenue augmente. L'image est obtenue après analyse par un ordinateur du temps de parcours de l'onde, de son amplitude et de sa fréquence (ces dernières témoignant respectivement d'un phénomène d'absorption et des mouvements du corps observé). La méthode bidimensionnelle

---

1. Les rayons X sont les rayons électromagnétiques dont la longueur d'onde est comprise entre 5 picomètres et 10 nanomètres.

génère une coupe du corps déterminée par l'orientation de la sonde alors que la reconstitution tridimensionnelle du corps est rendue possible par couches successives ou au moyen d'une sonde bidimensionnelle.

La *scintigraphie*, la *Tomographie d'Émission MonoPhotonique* (TEMP, ou *Single Photon Emission Computed Tomography*, SPECT, en anglais) et la *Tomographie par Émission de Positons* (TEP, ou *Positron Emission Tomography*, PET ou PET-Scan, en anglais) sont trois méthodes reposant sur le même principe technique : des radionucléides (atomes sources de radiations nucléaires) sont injectés à l'intérieur du corps, se fixent ou se concentrent sur ou dans un type d'organes puis sont observés à l'extérieur du corps par des caméras sensibles aux rayons  $\gamma$ , les *gamma caméras* ou *caméras d'Anger*, du nom de leur inventeur H.O. Anger. Celles-ci fournissent un enregistrement qu'un ordinateur interprète afin de déterminer le lieu d'émission des photons  $\gamma$ . La position des radionucléides est alors calculée, ainsi que leur concentration, ce qui permet de localiser des phénomènes tels que l'apparition de tumeurs, les flux ou la présence de fluides (bile, sang, *etc.*)... Ces trois techniques d'imagerie sont dites :

- *fonctionnelles* : la localisation et la concentration du traceur radioactif informe sur le fonctionnement de l'objet d'étude (par opposition aux techniques *structurelles*).
- *d'émission* : elles utilisent un rayonnement émanant du corps lui-même (par opposition aux techniques de *transmission*, pour lesquelles un rayonnement traverse le corps).

Dans le cas de la scintigraphie (bidimensionnelle), les rayons  $\gamma$  observés sont tous parallèles entre eux, ils fournissent donc une projection de l'organe ou des cellules concernées. La TEMP utilise un ensemble d'images obtenues de manière similaire à celle de la scintigraphie, selon des angles différents. Les projections obtenues sont ensuite utilisées pour reconstruire une image tridimensionnelle de l'objet d'étude<sup>2</sup>. Plus coûteuse que la scintigraphie mais moins que la TEP, la TEMP offre une résolution approchant le centimètre.

---

2. Ces techniques de reconstruction tridimensionnelle, dites tomographiques, mettent en œuvre la théorie de géométrie intégrale de Joseph Radon, dont nous parlerons plus loin.

Le fonctionnement de la TEP diffère des deux autres : en effet, les traceurs utilisés émettent des positons qui, après interaction avec des électrons, sont eux-mêmes sources d'une paire de photons  $\gamma$  coïncidents émis dans des directions approximativement opposées. Leur observation au moyen de gamma caméras permet de définir une droite sur laquelle se trouve le positon source. Des techniques (informatisées) de reconstruction similaires à celles de la scintigraphie ou de la TEMP sont ensuite mises en œuvre pour calculer la position des positons, et donc la position et la concentration du traceur. La résolution obtenue est de l'ordre du demi-centimètre. Les premières utilisations de traceurs radioactifs en imagerie médicale datent des années cinquante, et la scintigraphie est née avec l'invention de la gamma caméra en 1957. Les premières TEMP ont été développées à la fin des années soixante-dix, alors même que les principes de la TEP étaient déjà posés.

Les principes de la *tomodensitométrie* (TDM) (couramment appelé *scanner*, du nom de l'appareil, *scanographie* ou *X-ray CT*, en anglais, pour *Computed axial Tomography*) reposent sur les fondements théoriques de Joseph Radon, qui a montré comment reconstituer un objet bidimensionnel à partir de projections enregistrées autour de celui-ci. Dans le cas du scanner, ces projections sont effectuées par le biais de rayons X, comme pour la radiographie, mais les projections sont analysées au moyen de méthodes sophistiquées regroupées sous le nom de *tomographie assistée par ordinateur*. Le processus d'acquisition est le suivant : le corps est irradié à l'aide de rayons X, dont les propriétés (trajectoire, amplitude et fréquence) sont modifiées par le corps. Les rayons X résiduels sont ensuite enregistrés à l'extérieur du corps. Ces « projections » sont traitées par un ordinateur qui inverse le processus et fournit des coupes de l'intérieur du corps. Diverses techniques permettent alors d'obtenir des descriptions tridimensionnelles de celui-ci. Les premiers scanners ont été fabriqués dès 1972 et, malgré leur coût élevé, leur précision en a rapidement fait des outils privilégiés pour le diagnostic de nombreuses pathologies (détection de tumeurs, d'hémorragies, de problèmes osseux et cartilagineux, etc.). Des dizaines de millions de scanners sont pratiqués chaque année aux États-Unis<sup>3</sup> à tel point que le problème de l'irradiation des pa-

---

3. Environ 62 millions, selon [48].

tients, en particulier des enfants et des personnes âgées, commence à alerter certains scientifiques. En effet, les rayons X ont des effets ionisants dont les conséquences néfastes sur le corps humain semblent avérées (même si elles sont mal connues)<sup>4</sup>.

Le phénomène de *Résonance Magnétique Nucléaire* (RMN) est aussi à l'origine d'une technique d'imagerie médicale, l'*Imagerie par Résonance Magnétique* (IRM). La RMN a été découverte en 1945 par les équipes de F. Bloch et de E.M. Purcell, indépendamment l'une de l'autre. Une centaine de noyaux atomiques ont la propriété de se comporter comme s'ils étaient aimantés lorsqu'ils sont plongés dans un champ magnétique, on dit alors qu'ils possèdent un *moment magnétique*. Certains possèdent en outre un *moment angulaire intrinsèque*, ou *spin*, caractéristique de leur rotation sur eux-mêmes, qui est parallèle au moment magnétique. Aussi, lorsque ces noyaux sont « alignés » par un champ magnétique constant et élevé, puis perturbés par un champ magnétique périodique faible et perpendiculaire au premier, ils ne réagissent sensiblement à cette perturbation qu'à condition que la fréquence du champ périodique corresponde à une fréquence propre à chaque type de noyaux : les moments magnétiques se mettent alors en phase avec le champ périodique, c'est le phénomène de résonance<sup>5</sup>. Lorsque l'on supprime le champ périodique, les noyaux retournent à leur état d'équilibre, générant alors des effets magnétiques macroscopiques. Ceux-ci induisent un courant qui est perçu par les antennes réceptrices de l'appareil, ce qui permet de caractériser la présence des noyaux atomiques excités, de les localiser et de les quantifier. Le processus de reconstruction de l'image repose sur des principes mathématiques similaires à ceux utilisés en TDM et fournit lui aussi des coupes du corps observé. La résolution spatiale commune est de l'ordre du millimètre. Contrairement aux rayons X, il ne semble pas que les champs magnétiques

---

4. L'article [47] montre que sur les 600 000 scanners annuels effectués sur des enfants de moins de 15 ans aux États-Unis en 2001, 500 donneront lieu à des cancers mortels. Noter, à titre de comparaison, que 4 millions de scanners ont été faits sur des enfants aux États-Unis cinq ans plus tard [48]. Voir aussi [33].

5. Les fréquences de résonance nucléaire, dites fréquences de Larmor, sont de type radiofréquence et varient de 1 à 500 MHz. L'hydrogène, comme le proton, possède un moment magnétique non nul, et sa fréquence de résonance est de l'ordre de 128 MHz ; sa détection, ainsi que celle des graisses, est privilégiée dans l'IRM.

radiofréquences autant que le champ constant soient nocifs pour les patients. L'utilisation de la RMN s'est développée très vite après ses premières applications biomédicales : les premières images ont été obtenues en 1971 par P. Lauterbur ; le premier prototype, fabriqué par R. Damadian, a été opérationnel dès 1976 et a permis d'obtenir des images de mains et de poignets ; dès les années quatre-vingt, le corps entier pouvait être examiné et l'IRM était alors déjà utilisée dans de nombreux pays. Les principales contraintes imposées par l'IRM sont le poids de l'appareillage, qui est de l'ordre de plusieurs dizaines de tonnes, le champ magnétique puissant qui est généré aux alentours de la machine et le coût d'installation et d'utilisation. Par exemple, dans le cas (le plus répandu) où le champ magnétique est généré par un aimant supraconducteur, au coût déjà élevé de ce dernier il faut ajouter celui de l'alimentation en hélium liquide (cryogénique) nécessaire au fonctionnement supraconducteur de l'aimant.

Bien entendu, nous n'avons décrit ici que les procédés généraux les plus employés. De nombreuses variantes, améliorations et hybridations existent et sont utilisées en fonction du type d'objet observé, des conditions d'observation, etc. Il devient par exemple courant de regrouper la TEP et la TDM dans une même machine, pour réaliser un examen simultané : ainsi l'information fonctionnelle de la TEP peut être localisée plus précisément dans le corps, grâce à l'information structurelle offerte par la TDM. Par ailleurs, diverses propriétés des tissus mous font l'objet d'utilisations probantes dans le domaine de l'imagerie, parmi lesquelles leurs propriétés électriques pour l'*imagerie d'impédance électrique*, leurs propriétés mécaniques dans l'*imagerie d'élasticité* ou leurs propriétés optiques (transparence relative du corps à la lumière infrarouge par exemple), etc. Dans ces derniers cas, l'acquisition de données à l'extérieur du corps et la connaissance de la source d'énergie permettent de déterminer ou de différencier les caractéristiques (mécaniques, électriques, sonores, optiques...) intrinsèques des tissus constitutifs du corps : élasticité, résistance électrique, atténuation et diffusion d'ondes entre autres<sup>6</sup>.

---

6. L'ouvrage [12] offre une description intéressante de ces techniques émergentes et des mathématiques auxquelles elles font appel.

Nombre des techniques d'imagerie évoquées ci-dessus ont ceci de commun que l'équipement qu'elles nécessitent est coûteux. Outre l'amélioration de la résolution spatiale des différentes méthodes, du temps d'acquisition des données, etc., la réduction de ce coût est aussi un enjeu essentiel du développement de l'imagerie médicale. De même, la portabilité du matériel est aussi recherchée.

## I.2 La tomographie thermoacoustique

Nous l'avons vu, la plupart des techniques utilisées sont tomographiques et reposent sur une reconstruction de l'objet observé à partir de projections de celui-ci sur des lignes ou surfaces qui lui sont extérieures. La TTA repose sur les mêmes principes de reconstruction, mais les phénomènes physiques et les moyens techniques mis en œuvre diffèrent. Cette section est principalement inspirée des articles suivants : [41, 53, 111, 136, 143, 145, 157, 192, 207, 248, 249, 258].

L'effet thermoacoustique est la conversion d'énergie calorifique en onde de pression acoustique, ou la conversion inverse. La lumière peut alors être source de son par le biais de sa conversion en chaleur dans le corps qu'elle irradie. La découverte du phénomène de « production de son au moyen de la lumière » remonte à la fin du XIXe siècle et aux travaux de Alexander Graham Bell [32]. Même si les effets thermoacoustiques sur les tissus ont motivé des recherches depuis longtemps (voir [124], par exemple), il faut attendre les travaux fondateurs de Bowen [45, 46] et de Tam [232] pour voir émerger l'idée d'utiliser les effets photoacoustiques en vue d'applications médicales. Le développement d'expérimentations attendra les années quatre-vingt-dix avec les travaux de R.A. Kruger *et al.* [139] (premier prototype) et d'Oraevsky *et al.* [181].

Dans le cas de la TTA, l'objectif est de déterminer la *carte d'absorption électromagnétique* du corps étudié. Le choix de l'absorptivité électromagnétique pour caractériser les tissus est motivé par le haut contraste d'absorption distinguant deux tissus différents, en particulier si l'un est cancéreux et l'autre sain. En effet, les masses cancéreuses absorbent l'énergie transportée par l'onde électromagnétique incidente, se réchauffent et se dilatent



plus rapidement que les tissus mous sains du corps [125]. Plus précisément, les coefficients d'absorption électromagnétique des tissus dépendent de leurs propriétés diélectriques et il a été constaté en 1984 (voir [58]) que les propriétés diélectriques des tissus sains et des tissus tumoraux sont sensiblement distinctes. Outre le haut contraste ainsi offert, la capacité de pénétration des ondes électromagnétiques est aussi adaptée à des applications médicales variées (cf. [60, 76, 94, 124, 169]). Les propriétés physiques et biologiques des tissus qui ont motivé le développement de la TTA sont aussi décrites dans [247, 248, 250, 258], et nous en détaillerons une partie par la suite.

Pour irradier le corps, on le plonge dans un champ électromagnétique ou on l'illumine avec un laser, de manière aussi brève et homogène que possible ; cette impulsion transmet son énergie au corps sous forme de chaleur (la variation de température est de l'ordre quelques millikelvins [258]). Cette déposition d'énergie est dépendante de la capacité d'absorption électromagnétique des tissus, ce qui explique le contraste attendu dans la reconstruction. Le corps, qui absorbe la chaleur puis refroidit, se dilate (on parle de *dilatation thermoélastique*) puis retourne au repos, agissant alors comme une *source acoustique* et émettant une onde de pression ultrasonore, laquelle est enregistrée hors du corps par un *système de capteurs*.

Le choix des ondes de pression acoustiques ultrasonores comme source d'informations est motivé par la haute résolution qu'elles offrent : de l'ordre du millimètre pour une fréquence d'onde d'environ 1 MHz<sup>7</sup>. En regard de celle obtenue avec des méthodes purement optiques, cette résolution élevée repose sur le fait que la diffusion (ou *scattering*, en anglais) optique est de magnitude deux à trois fois plus importante que la diffusion des ondes ultrasonores dans les tissus biologiques [76]<sup>8</sup>. La Figure I.2.1 page suivante représente le fonctionnement schématique de la TTA. Les tissus y sont vus comme des sources acoustiques dont les propriétés dépendent de leurs caractéristiques électriques propres. Il reste donc à « remonter le temps » depuis l'enregistrement (ou observation) extérieur jusqu'à la source pour recons-

---

7. La vitesse des ondes dans des tissus mous est de l'ordre de 1,5 mm/ $\mu$ s [76].

8. De même que la longueur d'onde élevée des ondes radiofréquences ne leur permet pas de fournir une bonne résolution [152] (de l'ordre du centimètre pour une onde de fréquence comprise entre 500 et 900 MHz [167]).

truire cette dernière, ce qui nécessite une modélisation mathématique du phénomène de propagation des ondes de la source aux capteurs, nous y reviendrons.

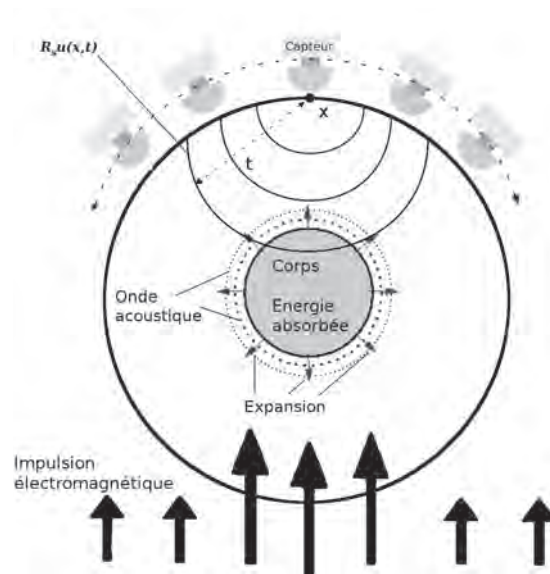


FIGURE I.2.1 – Schéma du principe de fonctionnement de la TTA.

Ainsi cette *méthode hybride*, reposant sur l'émission d'ondes électromagnétiques et la réception d'ondes acoustiques, profite du contraste offert par les premières et de la haute résolution que permettent les secondes. De nombreuses autres méthodes hybrides sont en cours de développement, dont on trouvera des descriptions dans les références suivantes [12, 13, 96, 144, 146, 248].

Il faut aussi souligner le caractère *non invasif* de cette méthode ; en effet, elle ne nécessite pas nécessairement d'injection de produits traceurs et fonctionne sans ionisation des tissus, contrairement à la tomодensitométrie, notamment. Notons enfin que la tomographie thermoacoustique est une technique d'imagerie potentiellement moins coûteuse et moins contraignante à l'usage que les IRM, scanner, etc., de par la relative simplicité des technologies mises en œuvre.

Les méthodes d'imagerie reposant sur l'effet thermoacoustique peuvent être classées selon la nature de la source d'irradiation du corps. Les appellations correspondantes sont les suivantes :

- *Thermoacoustique* : excitation à l'aide d'une source électromagnétique radiofréquence (entre 3 Hz et 300 GHz), à l'instar des micro-ondes (de 300 MHz à 300 GHz).
- *Optoacoustique* : excitation par une source d'onde lumineuse infrarouge (de 300 GHz à 400 THz).
- *Photoacoustique* : excitation à l'aide d'une source d'onde lumineuse visible (de 400 à 800 THz).

La modélisation mathématique de ces trois techniques pouvant être similaire<sup>9</sup>, leurs appellations sont utilisées indifféremment dans de nombreux articles. Nous parlerons de *méthode thermoacoustique* puisque toutes ces méthodes mettent en œuvre l'effet thermoacoustique. En pratique, la source d'onde électromagnétique doit cependant être choisie avec attention puisque les expériences prouvent que, lorsque la fréquence de l'onde incidente augmente, son *pouvoir de pénétration* diminue tandis que l'irradiation du corps est plus *homogène*. L'homogénéité de l'irradiation nous intéresse puisque plus elle fait défaut, plus apparaissent des artefacts. Ainsi, la source pourra être choisie selon que l'on souhaite observer un doigt, un sein ou un crâne, par exemple.

Dans le cas de l'optoacoustique et de la photoacoustique, la fréquence de l'onde ultrasonore générée par le corps est de l'ordre de 1 à 50 MHz.

Pour résumer, du point de vue des applications médicales, la validité de la tomographie thermoacoustique repose sur la capacité de pénétration de l'onde électromagnétique, l'homogénéité du transfert d'énergie aux tissus et le contraste de la capacité d'absorption entre les différents tissus observés. De nombreuses expériences ont montré l'efficacité de l'imagerie thermoacoustique, notamment dans les cas suivants : l'imagerie cérébrale des animaux [251], l'utilisation du haut contraste d'absorption entre tissus sains et

---

9. Jusqu'alors, les méthodes mathématiques de résolution de ces problèmes d'imagerie ont principalement reposé sur la transformée de Radon et ses variantes, ainsi que sur les formules d'inversions qui leur correspondent.

tissus tumoraux [92, 136, 140], l'imagerie des réseaux de vascularisation et de l'hémodynamique [82, 95, 122, 112, 165, 177, 195, 211, 266, 268] ou de la concentration et de l'oxygénation du sang [81, 166, 193, 212, 252, 266], etc.<sup>10</sup> ; citons enfin l'utilisation de produits de contraste, qui est intéressante en imagerie moléculaire afin de cibler les cellules à observer [65, 78, 233, 253, 263, 271].

Le cas du cancer du sein motive particulièrement les recherches en TTA : en France, par exemple, le cancer du sein est le premier cancer en fréquence chez les femmes, responsable de plus de 10 000 morts annuelles depuis 2000 (selon l'INSERM). Plus de 1,6 millions de cas ont été recensés dans le monde en 2006 [93]. Les principaux facteurs favorisant la guérison sont l'efficacité du traitement et la précocité du diagnostic, laquelle repose sur les techniques de détection employées. Les principales techniques utilisées sont : la *palpation*, qui ne permet de détecter que les nodules d'une taille de l'ordre du centimètre, la *mammographie*, dont l'efficacité est limitée par la haute densité radiographique des seins avant la ménopause et qui est source de radiations nuisibles, et l'*échographie*, dont la faible résolution doit être dépassée. Or, le sein étant un tissu mou relativement homogène au regard de ses propriétés acoustiques et ne nécessitant pas de grand pouvoir de pénétration de la part des ondes incidentes, il se prête bien à la mise en œuvre de la TTA, et celle-ci pourrait améliorer les techniques précédemment citées.

Par ailleurs, selon les applications, la reconstruction peut être de type fonctionnel ou structurel : en témoignent les reconstructions de la structure d'un cerveau de rat et les modélisations de la dynamique sanguine et de la concentration en oxygène des réseaux de vascularisation de son cortex cérébral [251].

En ce qui concerne les dispositifs d'enregistrement de l'onde acoustique en TTA, il sont nombreux à avoir été mis au point et testés depuis une vingtaine d'année. Nous les décrirons dans la Sous-section II.3 page 30 dédiée à l'observation expérimentale des ondes acoustiques.

---

10. Les *Proceedings of SPIE* [1], intitulés *Biomedical optoacoustics*, recensent de nombreuses applications médicales de la thermoacoustique. Voir aussi les nombreux travaux du *Optical Imaging Laboratory* de l'université de Washington, dont l'ouvrage [258].

Enfin, une autre application de l'observation des phénomènes thermoacoustiques en imagerie biomédicale est en cours de développement : il s'agit de la microscopie thermoacoustique (voir les travaux des auteurs de [82, 193, 267]). Cette dernière ne fait cependant pas appel aux mêmes outils mathématiques que la tomographie et sort donc du cadre de notre étude. Notre attention restera focalisée sur les nombreux outils physiques et mathématiques développés depuis les années 90 qui font de la TTA une méthode d'imagerie émergente efficace, sûre, peu onéreuse et potentiellement portable.

Suite à cette description générale, passons à la modélisation des phénomènes mis en jeu et à la description du dispositif expérimental.

## II TTA : principes physiques et méthodes expérimentales

Cette section est consacrée à la dérivation des équations d'onde acoustique (Sous-section II.1) et à la présentation de leur usage en TTA (dans la Sous-section II.2 page 24). C'est en effet à partir de la connaissance théorique de ces ondes et de leur observation que nous comptons en étudier la source. La dernière sous-partie de la présente section sera donc dédiée à l'observation (on dit aussi « enregistrement ») des ondes acoustiques (Sous-section II.3 page 30).

### II.1 Dérivation des équations d'onde

Nous proposons une dérivation des équations d'onde suivant une description eulérienne du fluide. Les équations d'onde reposent sur les lois de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement (dite *Loi d'Euler*) auxquelles on adjoint une approximation : l'*hypothèse de l'acoustique linéaire*, qui permet de caractériser le cas particulier de la propagation du son dans un fluide et d'obtenir des équations d'onde linéaires.

Considérons un ouvert borné quelconque  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière  $\Gamma$  est régulière. En tout point du bord  $\Gamma$ , on note  $n = (n^1, n^2, n^3)$  le vecteur normal extérieur. L'ouvert  $\Omega$  est supposé contenir un fluide (liquide ou gaz) caractérisé par les quantités suivantes : sa vitesse d'écoulement  $v = (v^1, v^2, v^3)$ , sa pression  $p$  et sa masse volumique  $\rho$ , qui sont supposées régulières.

Commençons par exprimer l'hypothèse de l'acoustique linéaire. Les variables sont supposées varier faiblement autour d'une valeur constante de référence, ce que l'on exprime comme suit, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1, \quad v_0 = 0, \quad v_1 \ll 1, \\ p &= p_0 + p_1, \quad p_0 \text{ constante}, \quad p_1 \ll p_0, \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1, \quad \rho_0 \text{ constante}, \quad \rho_1 \ll \rho_0. \end{aligned}$$

Dans ce cadre, le fluide est dans un état quasi-statique ( $v_0 = 0$ ), et l'on ne considère que les mouvements locaux et de petite amplitude.

Ensuite, on suppose qu'aucune particule n'est créée ni détruite, et donc que la quantité de particules ne dépend que du fait que certaines entrent et sortent de  $\Omega$ , ce que l'on exprime par le biais de la *loi de conservation de masse* :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(x,t) dx = - \int_{\Gamma} \rho(x,t) v(x,t) \cdot n(x,t) d\sigma(x),$$

En application du théorème de la divergence, il vient :

$$\int_{\Omega} \rho_t dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho v) dx.$$

Cette équation étant vérifiée sur tout ouvert borné régulier  $\Omega$ , on obtient la *loi de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (\text{II.1.1})$$

Sous l'hypothèse de l'acoustique linéaire, on obtient, à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(v_1) = 0. \quad (\text{II.1.2})$$

Puis, d'après le *principe fondamental de la dynamique* (ou *loi de conservation de la quantité de mouvement*), on a pour  $i = 1, 2$  ou  $3$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v^i dx = - \int_{\Gamma} \rho v^i v \cdot n d\sigma(x) - \int_{\Gamma} p n^i d\sigma(x) + \int_{\Omega} \rho F^i dx,$$

où  $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$  représente les forces agissant en  $x \in \Omega$ . Cette loi exprime le fait que la quantité de mouvement dans  $\Omega$  (terme de gauche) varie en fonction de trois phénomènes : le flux de quantité de mouvement à travers  $\Gamma$ , la pression exercée sur  $\Gamma$  et les forces extérieures. On suppose que  $F = 0$  (c'est-à-dire que l'on omet les forces gravitationnelles, magnétiques ou les frottements internes au fluide), puis on applique le théorème de la divergence au second membre de ces équations, de sorte que, pour  $i = 1, 2$  ou  $3$  :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v^i v) + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dx = 0,$$

L'ouvert  $\Omega$  étant quelconque et en utilisant (II.1.1), on obtient les *équations d'Euler pour un fluide non visqueux* :

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right] = -\nabla p, \quad (\text{II.1.3})$$

dans lesquelles le terme convectif  $(v \cdot \nabla)v$  est négligeable à l'ordre 1. Ainsi, linéarisée, cette équation s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla p_1 = 0. \quad (\text{II.1.4})$$

Une dernière approximation est nécessaire à l'obtention des équations d'onde acoustique (linéaires) : l'*hypothèse de compressibilité isentropique*, selon laquelle la chaleur créée lors des phénomènes de compression est négligée, sa propagation étant supposée lente en comparaison de celle des ondes acoustiques. En l'absence d'autre source d'énergie, l'entropie du fluide est donc constante. On définit alors le coefficient thermoélastique de compressibilité isotherme  $\chi_s$  :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p},$$

où  $V$  est le volume de la particule fluide. Il vient, à l'ordre 1 :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1}.$$

Cette équation nous permet de lier  $\rho_1$  et  $p_1$  :  $\rho_1 = \chi_s \rho_0 p_1$ , et d'en déduire l'*équation d'onde acoustique en milieu non visqueux, ou à vitesse constante*, en soustrayant la divergence de l'équation (II.1.4) à la dérivée temporelle de l'équation (II.1.2) :

$$\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \Delta p_1 = 0,$$

qui décrit les variations d'ordre 1 de la pression  $p$ .

Comme nous le verrons plus loin, la constance de l'entropie se traduit par une *conservation de l'énergie* associée à cette équation ainsi que par sa *réversibilité temporelle*.



Quitte à changer d'échelle temporelle, cette dernière équation est équivalente à la suivante, dans laquelle la vitesse n'apparaît plus :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0. \quad (\text{II.1.5})$$

Dans le cas où le milieu n'est pas homogène, la vitesse des ondes est variable et l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c\Delta p = 0, \quad (\text{II.1.6})$$

où  $c(x)$  est la fonction célérité du milieu qui traduit l'hétérogénéité du milieu :

**Définition II.1.1.** La fonction  $\frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}$  est homogène à une vitesse. Elle est usuellement désignée par  $c$  ou, abusivement, par  $\sqrt{c}$  et appelée vitesse, ou célérité, de propagation d'onde.

Pour une dérivation des équations d'onde atténuées (non réversibles) tenant compte des phénomènes de dissipation thermique associés aux compressions, on pourra se référer aux travaux fondateurs de Jean-Marie Duhamel [77] et à la thèse de Xavier Jacob [120] pour une présentation récente. L'équation d'onde obtenue dans le cas d'une onde atténuée par un effet thermoacoustique est dite *thermovisqueuse* et s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p - \mu \frac{\partial}{\partial t} \Delta p = 0, \quad (\text{II.1.7})$$

où  $\mu$  est le coefficient d'atténuation thermovisqueuse.

Notons que cette équation est non conservative et irréversible, contrairement aux précédentes. Nous considérerons ce modèle à différentes reprises, en particulier pour son utilité dans les méthodes numériques que nous mettons en œuvre (voir le Chapitre C), et ce malgré les défauts de modélisation qu'il sous-tend (voir la sous-section suivante).

## II.2 Utilisation en TTA

Les équations d'onde évoquées ci-dessus modélisent donc certains phénomènes de propagation d'ondes acoustiques. En toute généralité, on suppose qu'en l'absence d'une quelconque stimulation, la propagation des ondes de pression (acoustiques) dans le corps observé est régie par l'équation :

$$\mathcal{L}p = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \Omega,$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel qui sera défini selon les approximations que nous souhaitons faire. Ainsi, dans le cas d'ondes non atténuées dont la vitesse est constante dans tout le domaine de propagation,  $\mathcal{L}$  est le d'Alembertien  $\square = \partial_{tt} - \Delta$  (à normalisation près).

Cette sous-section est notamment inspirée des sources suivantes : [16, 75, 105, 133, 207, 232, 247, 256].

### II.2.1 De l'impulsion source d'ondes de pression...

#### Le modèle mathématique de la TTA

On conserve les notations de la sous-section précédente. Supposons que le corps à observer est un fluide au repos, et qu'aucune pression acoustique ne le traverse jusqu'à ce qu'on l'irradie, au temps  $t = 0$ . On suppose donc que  $p(t, \cdot) = p_t(t, \cdot) = 0$  pour  $t < 0$ .

Pour définir les phénomènes d'irradiation et de dilatation du corps, nous utiliserons les hypothèses et notations suivantes :

- On suppose que l'irradiation est assurée par un signal électromagnétique qui dépose l'énergie  $f$  dans le corps, et que celle-ci s'écrit comme produit d'une fonction du temps  $t$  et d'une fonction de la position  $x$ .
- L'onde électromagnétique irradiant le corps est une impulsion modélisée par une distribution de Dirac  $\delta(t)$  telle que  $\delta(0) = 1$ . Les autres paramètres ne dépendent pas de  $t$ .
- $I_{em}(x)$  représente l'intensité initiale de l'impulsion électromagnétique.
- $\beta(x)$  est le coefficient de dilatation thermique isobare du corps, quantité caractérisant l'augmentation de volume lorsque la température augmente d'un degré.

- $c_p(x)$  est sa capacité calorifique spécifique, qui quantifie l'énergie nécessaire pour augmenter le corps d'un degré.
- $c(x)$  est la vitesse du son correspondant au corps.
- $\Psi(x)$  est la densité d'absorption du corps, caractéristique de la capacité d'absorption d'énergie par le corps, ce que l'on cherche à déterminer.
- $r(t,x) = I_{em}(x)\delta(t)\Psi(x)$  est l'énergie électromagnétique absorbée par le corps suite à l'impulsion (voir [144, section 3.5] pour une discussion au sujet de cette fonction et de son étude, à laquelle la *tomographie thermoacoustique quantitative* est consacrée).

Dans le cas de l'observation de tissus biologiques mous, l'ordre de grandeur des paramètres est le suivant :

- En pratique, l'impulsion électromagnétique dure moins d'une nanoseconde.
- $\beta \approx 4.10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .
- $c_p \approx 4.10^3 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$ .
- $c(x) \approx 1500 \text{ ms}^{-1}$  (c'est-à-dire approximativement celle de l'eau).
- $\Psi(x) \approx$  de  $1.10^{-1}$  à  $5.10^{-1} \text{ cm}^{-1}$ .

Replaçons-nous dans le cadre de la sous-section précédente. Les équations d'Euler (II.1.4) et la loi de continuité (II.1.2) linéarisées sont alors vérifiées, mais, suite à l'irradiation, le corps absorbe l'énergie  $r$ , son entropie n'est plus constante et, en négligeant toujours les phénomènes de diffusion thermique, le *principe de conservation d'énergie* nous donne (voir [105] pour plus de détail) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta}{c_p} r.$$

Ainsi, l'équation (II.1.6) devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = F, \quad (\text{II.2.8})$$

où le second membre  $F$  s'écrit :

$$F(t,x) = \frac{\partial \delta}{\partial t}(t) \frac{\beta(x)c(x)^2 I_{em}(x)\Psi(x)}{c_p(x)}.$$

et avec des conditions initiales, posées à l'instant  $t = -1$  par exemple, nulles.

Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut se référer à [75, 100, 210, 232]. L'article [210] est particulièrement intéressant pour le détail qu'il fournit des conditions de validité de ce modèle dans un cadre optoacoustique.

### Discussion autour du modèle

En TTA, rappelons que nous avons négligé la diffusion thermique, ce qui se justifie par le fait que la longueur caractéristique de diffusion thermique est proportionnelle à la racine carrée du produit de la diffusivité thermique des tissus (de l'ordre de  $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$  dans les tissus mous [76]) par la durée de l'impulsion électromagnétique [232]. Pour une impulsion micro-onde d'une durée inférieure à  $1 \mu\text{s}$ , la longueur caractéristique de diffusion thermique est de l'ordre du micromètre, et est donc négligeable au vu de la résolution (de l'ordre du millimètre) de la TTA.

Ensuite, puisque nous avons supposé que la durée de l'impulsion est inférieure à la nanoseconde et pour une vitesse de propagation de l'ordre de  $1500 \text{ ms}^{-1}$ , tant que la résolution spatiale recherchée n'est pas inférieure à  $1500 \cdot 10^{-9} = 1.5 \mu\text{m}$ , l'approximation de l'impulsion par un Dirac reste valide.

Différentes approximations pourront cependant être allégées avec bénéfice selon la situation pratique envisagée. Par exemple, le corps a été supposé homogène, ce qui limite le champ d'application de la méthode ou risque de détériorer la reconstruction (la différence d'impédance étant loin d'être négligeable entre l'air, les tissus mous et les os, par exemple). Différentes solutions peuvent alors être envisagées : certaines sont purement expérimentales, en plongeant notamment le corps dans l'eau afin d'atténuer les phénomènes de réflexion et de réfraction dus au changement de milieu, et d'autres théoriques, qui consistent à prendre en compte l'hétérogénéité du corps dans le modèle (cette possibilité sera discutée plus loin).

Par ailleurs, l'équation des ondes obtenue ci-dessus est valide en milieu non visqueux, alors que les tissus mous du corps humain atténuent les ondes de hautes fréquences de manière non négligeable. Tenir compte de cette atténuation dans le modèle d'équation d'onde peut alors s'avérer intéressant.

La généralisation du cadre d'étude nécessite une adaptation des méthodes de résolution et nous verrons par la suite les difficultés que posent les solutions proposées.

### Conclusion et notations

Pour respecter les notations couramment utilisées en TTA, nous noterons le second membre :

$$F(t,x) = \frac{\partial \delta}{\partial t}(t)f(x).$$

La fonction  $f$  est appelée *fonction normalisée de dépôt d'énergie*. Cette notation sera motivée au cours des paragraphes suivants.

Nous nous intéresserons plus généralement au cas des équations linéaires du second ordre de la forme :

$$p_{tt} + Lp = \delta'(t)f(x),$$

avec conditions initiales (à  $t = -1$ ) nulles :  $p(-1) = p_t(-1) = 0$ , où  $L$  est un opérateur différentiel linéaire quelconque pouvant comporter des dérivations temporelles d'ordre au plus 1. Avec les notations précédentes, on a :  $\mathcal{L} = \partial_{tt} + L$ .

### II.2.2 ... au problème inverse de la TTA

Nous l'avons vu, les propriétés intrinsèques du corps observé définissent la source  $f$ , on la nomme *objet* (à reconstruire), *densité d'absorption* ou *carte d'absorptivité* (par abus, puisque celle-ci est en fait  $\Psi$ , ci-dessus). Nous en précisons les modalités pratiques dans la Sous-section II.3 page 30 et une traduction mathématique en sera donnée en Section V.2 page 183 du Chapitre B.

Sous l'hypothèse que la source est une impulsion de Dirac, reconstruire  $f$  revient souvent à reconstruire la donnée initiale d'une équation aux dérivées partielles et donc à résoudre un *problème inverse*. En effet, nous verrons par exemple que pour  $L = -c(x)A$ , avec l'opérateur  $A$  bien défini, la solution

du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{tt} + Lp = \delta'(t)f(x) \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = 0, \\ p_t(0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.2.9})$$

est la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{tt} + Lp = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = f, \\ p_t(0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.2.10})$$

ce que l'on peut constater en utilisant la formule de Duhamel (*cf.* [66, p. 202–204]). Nous proposerons une preuve distincte de ce résultat en Sous-section III.2.2 page 40.

Le problème de la détermination de  $f$  est donc réduit à un problème inverse, que nous résoudrons soit au moyen de méthodes propres à l'équation des ondes, le cas échéant, mais au prix d'hypothèses contraignantes en ce qui concerne le modèle, soit au moyen de méthodes de résolutions générales de problèmes inverses.

### II.2.3 Modélisation de l'atténuation

L'onde électromagnétique incidente et l'onde acoustique sont toutes deux soumises à une atténuation lors de leur évolution. Cette atténuation est due d'une part à une absorption d'énergie par les tissus et d'autre part aux phénomènes de diffusion des ondes.

Dès 1845, Stokes établit que l'atténuation acoustique en milieu peu visqueux (tel que l'eau) augmente proportionnellement au carré de la fréquence de l'onde acoustique [222]. L'article [60] décrit par ailleurs la modélisation et l'acquisition de mesures de ces phénomènes dans le cas d'une onde incidente lumineuse et il est constaté que les objets plus petits que la longueur d'onde apparaissent flous dans les reconstructions qui ne tiennent pas compte de l'atténuation acoustique du milieu [150].

La prise en compte de l'atténuation dans le modèle est donc pertinente, mais l'équation (II.1.7) pose problème puisque l'atténuation thermovisqueuse induit une vitesse de propagation de l'information infinie. On dit que l'équa-

tion est *non-causale* en ceci qu'elle contredit le principe physique de causalité temporelle. Différents modèles *causaux* d'atténuation ont donc été étudiés, auxquels on pourra tout de même reprocher le caractère artificiel de leur terme d'atténuation lorsque celui-ci n'est introduit que dans le but de définir une loi d'atténuation causale sans lien apparent avec une dérivation à partir de lois physiques.

On retiendra cependant les lois énumérées dans [133] qui fournissent des solutions pouvant correspondre aux expérimentations, en particulier du point de vue de la *dépendance en fréquence de l'atténuation*.

Le lecteur intéressé peut se référer à [133, 226] pour des survols du développement de modèles atténués ainsi qu'aux références suivantes pour plus de détails : [132, 134, 150, 224, 225] et en particulier [15, 51, 150, 166, 191, 234, 235, 236] pour des applications à la tomographie optoacoustique.

Enfin, l'article [15] montre bien que les données peuvent être traitées afin de tenir compte du fait qu'elles sont issues d'un phénomène atténué et de les ramener à des données issues d'un phénomène non atténué, ce qui permet ensuite de conserver le modèle non atténué pour la reconstruction. Aussi nous centrerons notre attention sur les méthodes de reconstruction associées à des modèles non atténués, à l'exception du seul modèle d'atténuation thermovisqueux<sup>11</sup>.

#### II.2.4 Modélisation de la vitesse

Dans un sein, par exemple, les variations de vitesse des ondes acoustiques sont d'environ 10%, puisque la vitesse dans la graisse sous-cutanée approche 1400-1450 m.s<sup>-1</sup>, tandis qu'elle est de l'ordre de 1500-1560 m.s<sup>-1</sup> dans le parenchyme et le stroma mammaires<sup>12</sup>.

L'approximation faite dans le modèle à vitesse constante (pour les tissus homogènes) induit donc une mauvaise reconstruction radiale de l'objet, mais aussi une mauvaise reconstruction tangentielle puisque la réfraction n'est pas

---

11. Rappelons qu'il fournit un cadre d'étude à certaines de nos applications numériques (voir le Chapitre C qui leur est consacré)

12. Le *parenchyme* est composé des tissus constitutifs des parties fonctionnelles d'un organe, tandis que le *stroma* est l'ensemble des tissus conjonctifs de support de l'organe.

non plus prise en compte. Il en résulte que l'image reconstruite est floue et la résolution de la méthode est donc amoindrie.

Aussi, il a été proposé par différents auteurs de tenir compte de la vitesse variable de l'onde acoustique dans le milieu afin de préciser le modèle. En effet, l'approximation selon laquelle le corps observé est homogène peut être allégée en introduisant une vitesse variable dans le modèle.

Pour ce faire, des moyens expérimentaux d'estimation de cette vitesse ont été développés dans le cas de tissus faiblement réfractifs dans [122]. Le dispositif expérimental couple une méthode de reconstruction par Tomographie Ultrasonore en Transmission (ou *Ultrasound Transmission Tomography*, UTT, en anglais), qui fournit une carte des hétérogénéités du tissu, à la TTA<sup>13</sup>. Ensuite, une première estimation de l'objet  $f$  est déterminée sous hypothèse d'homogénéité des tissus, puis elle est corrigée à l'aide d'un algorithme de reconstruction tenant compte de la vitesse (variable) associée aux hétérogénéités déterminées précédemment.

### II.3 Les dispositifs d'observation et les données

De très nombreux dispositifs d'observation de l'onde de pression émise ont été développés et testés. Nous pouvons distinguer les différentes *technologies d'acquisition de l'onde acoustique* des *types d'observations obtenues*. Les premières caractérisent les dispositifs expérimentaux d'enregistrement des données, parmi lesquels les capteurs piézoélectriques, les lasers (dont les rayons sont perturbés par les ondes ultrasonores), les interféromètres (qui permettent de mesurer cette perturbation), etc. À ces dispositifs correspondent des données typiques de chacun d'eux, telles les observations de type linéaires, planaires, circulaires, sphériques notamment, ainsi que différentes hybridations : ainsi par le biais de l'utilisation d'un interféromètre et d'une formule d'inversion des observations linéaires (en moyenne) obtenues, un ensemble de données ponctuelles peuvent être définies (voir la Sous-section IV.2.2 page 73).

---

13. En UTT, on mesure la vitesse et/ou l'atténuation d'une onde acoustique qui traverse le corps observé pour en déterminer les hétérogénéités.



Autour de G.J. Diebold, de nombreuses expérimentations ont été menées à partir de 1983, et principalement durant les années 90 [57, 72, 73, 74, 75]. À la fin de cette décennie, R.A. Kruger a créé différents prototypes, qui ont été les premiers dispositifs dédiés à la tomographie thermoacoustique [137, 138, 139, 140, 141].

### II.3.1 Les technologies d'acquisition de l'onde de pression

#### Les capteurs piézoélectriques

Les *matériaux piézoélectriques* sont un type de *transducteurs électroacoustiques*<sup>14</sup> qui se polarisent électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et qui, inversement, se déforment en présence d'un champ électrique. Les modélisations les plus courantes en TTA font appel à des *capteurs piézoélectriques*.

Leur petite surface d'acquisition justifie l'appellation courante de *quasi-ponctuel* [20, 52, 186] et ces capteurs sont souvent modélisés comme étant ponctuels. Puisqu'en réalité la surface des capteurs fournit une moyenne locale de l'onde acoustique, cette imprécision limite la résolution de la méthode. Il est cependant facile de tenir compte de leur surface en considérant le fait qu'ils fournissent l'intégrale de l'onde de pression sur leur surface au lieu d'une valeur ponctuelle [52, 106, 121] (ce qui permet aussi d'évaluer l'erreur commise en supposant la ponctualité de ces capteurs).

Enfin, les capteurs piézoélectriques sont directifs, mais souvent supposés isotropes dans les modèles, et comme précédemment, l'anisotropie peut être considérée en corrigeant la modélisation des capteurs.

#### La lumière et les lasers

Par exemple par le biais d'un interféromètre de Mach-Zehnder ou de Fabry-Perot, on peut mesurer la variation de l'indice de réfraction d'un rayon lumineux (par exemple issu d'un laser) après que celui-ci a été traversé par une onde de pression acoustique [53, 98, 131, 183, 184, 185, 186, 187, 188]. En effet, la variation de l'indice de réfraction induit une différence de phase

---

14. Les transducteurs sont des matériaux qui convertissent une énergie en une autre, ici une énergie mécanique en énergie électrique, et vice-versa.

dépendant de la longueur d'onde du rayon lumineux ou un changement de l'angle de réfraction de celui-ci lors d'un changement de milieu, ce que mesure le dispositif d'enregistrement<sup>15</sup>. Si le rayon est traversé par l'onde acoustique, on obtient alors une mesure de l'intégrale de la variation de pression sur la trajectoire.

Cette technique permet d'obtenir une résolution spatiale remarquable, inférieure à 100  $\mu\text{m}$ . Des systèmes différents (sans interféromètre ou sans laser) reposant sur des propriétés similaires de la lumière ont aussi été mis au point [107, 175, 176].

### II.3.2 Les types d'observation

Outre la technologie mise en œuvre pour effectuer la mesure, une autre caractéristique du dispositif d'observation conditionne notre modélisation, à savoir la position des capteurs. En effet, selon qu'ils entourent le corps ou non, selon qu'ils sont disposés continûment et selon qu'ils englobent l'intégralité des sources d'onde acoustique, le problème sera posé et résolu différemment.

On dira que les *données* sont *complètes* lorsque celles-ci entourent complètement et continûment l'objet observé. Nous retrouverons l'hypothèse de données complètes dans de nombreuses méthodes de résolution, et il sera parfois difficile, voir impossible de s'en affranchir.

Toute source de pression située hors du domaine observé est dite *source extérieure*.

Les observations sont appelées *directes* si elles représentent des mesures de l'onde de pression (contrairement à des observations *intégrales*, notamment, pour lesquelles les mesures sont des moyennes de l'onde de pression).

Dernier point de vocabulaire : selon le positionnement et la forme des capteurs, le dispositif est qualifié de *planaire* [52, 103, 189], *cylindrique* [180], *(hémi-)sphérique* [138, 139, 140, 141] ou plus généralement *surfactive* pour

---

15. Plus précisément, en première approximation, l'indice de réfraction varie proportionnellement à la variation de pression du milieu ambiant, suivant un coefficient dépendant de la longueur d'onde et du milieu traversé par le rayon. Voir [185] pour le cas d'un rayon issu d'un laser HeNe et de longueur d'onde 632.8 nm réfracté à une interface eau-prisme de verre.

les dispositifs bidimensionnels, encore (*hémi-*)*circulaire* [180], ou plus généralement *linéaire* [52, 50, 137, 264], pour le cas monodimensionnel.

Lorsque les données sont de type « linéaires en moyenne » (c'est-à-dire qu'elles consistent en les valeurs moyennes de l'onde de pression sur des trajectoires monodimensionnelles), alors le problème posé par la reconstruction des valeurs ponctuelles de l'onde de pression sur une surface contenant cette trajectoire est en lui-même un problème du même type que celui de la reconstruction de l'objet d'étude [145, p. 9].

### II.3.3 Compléments

Dernières précisions en ce qui concerne les observations et les dispositifs d'enregistrement :

- Notons que certains artifices permettent au modèle de passer outre certaines limitations techniques. Par exemple, pour simuler une surface d'acquisition infinie, on peut périodiser le problème en espace (d'un point de vue théorique) et utiliser un miroir lors de l'expérimentation, lequel simule une reproduction infinie de l'objet observé. Ce dispositif a été notamment proposé dans [67].
- L'*échantillonnage temporel* offert par les dispositifs d'enregistrement évoqués (de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes dans le dispositif utilisé dans l'article [184], par exemple) est suffisamment bon pour ne pas imposer de limitation théorique.
- Enfin, nous introduirons un *bruit* (parasite) dans les données lors de nos expérimentations numériques : celui-ci oppose certaines difficultés dont les méthodes de résolution élaborées doivent tenir compte, ce qui sera discuté dans le Chapitre B.

### III Mathématiques des ondes et de la TTA

Cette section est dédiée à la définition mathématique du problème posé par la TTA (Sous-section III.1), aux descriptions des outils mathématiques nécessaires à l'étude des équations d'onde et des comportements de ses solutions – Sous-section III.2 page 37 – et enfin à l'étude des propriétés fondamentales du problème qui nous intéresse, en Sous-section III.3 page 48.

Comme nous allons le voir, nous devons généralement étudier séparément le cas d'un milieu homogène et celui d'un milieu hétérogène en profitant d'abord des facilités offertes par le premier (dont l'existence de solutions explicites), puis en développant de possibles généralisations.

#### III.1 Position du problème et notations

##### Définition du problème

Nous étudions le problème suivant :

L'onde de pression émise par le corps vérifie l'équation :

$$\mathcal{L}p = 0, \quad (\text{III.1.1})$$

sur un domaine temporel  $(0, T)$ ,  $T \in (0, \infty)$  et un domaine spatial  $\Omega$ , sachant que  $p(t = 0, \cdot) = f$  est inconnu et que  $p_t(t = 0, \cdot) = 0$ .

Nous avons à notre disposition les observations  $Cp$ , qui sont une partie et/ou des moyennes, potentiellement bruitées, de cette onde de pression. Il s'agit de savoir s'il est possible de déterminer de manière unique et stable la condition initiale  $f$  à partir de cette information.

##### Notations

Par la suite, nous utiliserons les notations et hypothèses suivantes.

1. On se place dans le cas où (III.1.1) est une équation d'onde d'ordre au plus 2 en temps.
2. On rappelle que l'objet à reconstruire est noté  $f$  et est considéré comme étant la variation initiale de la pression  $p(0, \cdot)$ . La source d'onde de

pression étant bornée, on peut supposer que  $f$  est à support compact. Quitte à changer d'échelle d'espace, on suppose que  $\text{Supp}(f)$  est inclus dans la boule unité fermée  $B(0,1)$  de  $\mathbb{R}^n$  ou nulle hors de  $B(0,1)$ , selon sa régularité.

3. L'opérateur  $\mathcal{L}$  est défini par  $\mathcal{L} = \partial_{tt} + L$ , où  $L$  est un opérateur non borné sur un Hilbert séparable  $H$ , de domaine  $V = D(L)$ .
4. Le dual de  $V$  par rapport à  $H$  est noté  $V'$ . On suppose que  $V$  et  $H$  sont denses et s'injectent continûment dans  $H$  et  $V'$  respectivement.
5. Dans les modèles classiques de propagation d'ondes en milieu hétérogène borné,  $L = -c(x)\Delta$ , où  $x \mapsto c(x) - 1$  est identiquement nulle hors de  $B(0,1)$  (à changement de variable près) et où la vitesse  $c$  est dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ou  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et est strictement positive : on suppose donc qu'il existe  $a, b > 0$  tels que :

$$a \leq c(x) \leq b, \text{ presque partout (p.p.) sur } \mathbb{R}^n.$$

6. L'opérateur de l'équation d'ordre 1 associée à (III.1.1) est noté  $A$ . En notant  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$ , on a :

$$\mathcal{L}p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p},$$

sur  $Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\mathbf{A}$  est un *opérateur non borné* sur un Hilbert  $\mathbf{H}$ , appelé *espace d'état*, et son domaine est noté  $\mathbf{V} = D(\mathbf{A})$ . On suppose que  $\mathbf{A}$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbf{H}$  noté  $\{\mathbb{T}(t)\}_{t \geq 0}$ .

7. On cherche des solutions de (III.1.1) dans  $L^2(0,T; V)$ .
8. L'*espace d'observation* dans lequel sont définis les observations et les contrôles est un Hilbert noté  $U$ .
9. L'*opérateur d'observation* associé à l'équation (III.1.1) qui, à une solution de  $L^2(0,T; V)$ , associe sa partie connue en l'absence de bruit dans  $L^2(0,T; U)$ , est noté  $C$ . L'opérateur d'observation associé à l'équa-

tion du premier ordre est noté :

$$\mathbf{C} : \mathbf{p} \mapsto \begin{pmatrix} C_p \\ C_{p'} \end{pmatrix}.$$

10. Le *domaine d'acquisition*, ou *d'observation*, est une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$  notée  $\mathcal{S}$ . Ainsi, dans le cas d'observations directes,  $C_p$  sera ou bien la restriction  $p|_{\mathcal{S}}$  de  $p$  à  $\mathcal{S}$ , ou bien la fonction  $p_{\mathcal{S}}$  égale à  $p$  sur  $\mathcal{S}$  et nulle ailleurs.
11. On suppose que les *données* (ou *observations*) sont la somme d'une *solution exacte*  $p_{\text{exacte}}$  de l'équation (III.1.1)<sup>16</sup> et de l'*erreur d'observation*  $\epsilon$ ; on définit donc les données sur la surface d'observation  $\mathcal{S}$  comme suit :  $p_{\text{données}}$  ou  $p^o = Cp_{\text{exacte}} + \epsilon$ .
12. L'*erreur d'observation*  $\epsilon$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, on note  $Q$  sa *matrice de covariance*.
13. On suppose que l'état réel vérifie  $\mathbf{p}'_{\text{réel}} = \mathbf{A}\mathbf{p}_{\text{réel}} + \nu$ , où  $\nu$  représente l'*erreur modèle* supposée être un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et on note  $R$  sa *matrice de covariance*.
14. Notons  $W$  l'opérateur associant la solution  $p_{\text{exacte}} = \mathbb{T}(\cdot)f$  de (III.1.1) à la condition initiale à reconstruire  $f$ .
15. Est noté  $\mathcal{W}$  l'opérateur qui, à la condition initiale  $f$ , associe les données  $\mathcal{W}f = p_{\text{données}} = Cp_{\text{exacte}} + \epsilon$ . Le bruit  $\epsilon$  sera considéré comme nul par la suite, sauf lorsqu'il sera fait mention explicite du contraire.
16. Nous nous intéresserons aux formulations comprenant l'ajout d'un rappel correctif dans les équations considérées, l'équation  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  deviendra  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{B}\mathbf{u}$ , où  $\mathbf{B}$  est l'*opérateur de contrôle* et  $\mathbf{u}$  la *variable de contrôle*.
17. En accord avec les théories classiques du contrôle et du filtrage<sup>17</sup>, nous utiliserons des opérateurs de contrôle de la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{C}^*\mathbf{K}$

---

16. Rappelons que les conditions initiales sont imposées par le problème, à savoir :  $p_{\text{exacte}}(t = 0, \cdot) = f$  et  $p'_{\text{exacte}}(t = 0, \cdot) = 0$  sur  $\Omega$ .

17. Nous exposerons notre application de ces théories au problème de la TTA au cours du Chapitre B. En particulier, la forme de l'opérateur  $\mathbf{B}$  proposée dans ce paragraphe y sera justifiée par les liens de dualité entre problèmes de contrôlabilité et d'observabilité.

et  $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{p}$ , où  $\mathbf{P}$  est un *opérateur de rappel* à définir (voir les méthodes de filtrage continu, en Sous-section I.2 page 204 du Chapitre B) et où  $\mathbf{K}$  dépend des paramètres du problème, on note  $\mathbf{A}_{\mathbf{P},\mathbf{K}} = \mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{C}^*\mathbf{K}\mathbf{C}$ .

18. Nous cherchons à obtenir une *reconstruction* (on dit aussi *estimation* ou encore *ébauche*)  $p_0$  de la condition initiale  $f$ . En notant  $p$  la solution de (III.1.1) ayant pour conditions initiales  $p(0,\cdot) = p_0$  et  $p'(0,\cdot) = 0$ , on définit l'*application erreur*  $\tilde{p} = p - p^o$ .
19. Dans nos discrétisations du problème, nous travaillons couramment sur un domaine carré (respectivement cubique en dimension 3) et l'on note :  $\delta_x$  le pas d'espace,  $N_x$  le nombre de pixels (ou voxels, respectivement) disposés le long d'une arête et  $\delta_t$  le pas de temps.

**NB :**

Le Problème (III.1.1) peut dorénavant se formuler comme un problème inverse portant sur l'opérateur  $\mathcal{W}$  :

Étant données des observations  $\mathcal{W}f$  issues d'une solution de l'équation des ondes sur le domaine d'observation  $\mathcal{S}$ , nous voulons reconstruire sa condition initiale  $f$ .

Ainsi notre but est d'inverser  $\mathcal{W}$ , en un sens à définir.

Les opérateurs  $A$ ,  $C$  et donc  $W$  sont imposés par le problème. Malgré une possible connaissance empirique (approximative) des matrices de covariance  $Q$  et  $R$ , celles-ci sont mal connues. Il nous reste donc à définir un opérateur de rappel et/ou une méthode d'inversion de  $\mathcal{W}$ .

Commençons par préciser ce que nous savons des solutions de l'équation (III.1.1), avant de définir les transcriptions mathématiques des notions d'observation, ce qui nous permettra de poser les hypothèses nécessaires à la reconstruction de l'objet.

### III.2 Solutions : définitions et propriétés fondamentales

Revenons tout d'abord aux moyens usuels d'étudier les équations d'onde, d'en définir des solutions et d'en étudier le comportement.

Selon les hypothèses de régularité dont nous aurons besoin, nous utiliserons des solutions classiques, intégrales ou faibles.

Comme nous le verrons dans cette sous-section, pour le problème qui nous intéresse, c'est-à-dire en horizon de temps fini, nous pouvons indifféremment supposer que  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou étudier le problème de Dirichlet associé à notre équation sur un ouvert borné régulier contenant une boule de diamètre suffisamment grand.

### III.2.1 Équation d'onde en milieu homogène

Dans le cas d'une évolution des ondes en milieu homogène, l'opérateur régissant le modèle est le d'Alembertien  $\mathcal{L} = \square = \partial_{tt} - \Delta$  (à changement d'échelle temporelle près, ainsi que nous l'avons vu précédemment). On cherche donc une solution à l'équation :

$$\begin{cases} \partial_{tt}p - \Delta p = 0 \\ p(0, \cdot) = f, \\ p_t(0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

En supposant que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , différentes techniques permettent de définir des solutions explicites [66, 84], parmi lesquelles :

- La *formule de d'Alembert* pour  $n = 1$  par changement de variables :

$$\xi = x - t \text{ et } \nu = x + t.$$

- L'*équation d'Euler-Poisson-Darboux* résolue par les *moyennes sphériques*<sup>18</sup> des solutions de l'équation d'onde en milieu homogène.
- La *formule de Kirchhoff*, qui offre des solutions très utilisées dans les méthodes de résolution de la TTA, à savoir, en dimension  $n = 3$  (à partir des solutions monodimensionnelles) :

$$p(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f(x + ty) + t \langle \nabla f(x + ty), y \rangle d\sigma,$$

---

18. À ce sujet, nous recommandons l'ouvrage *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, de Fritz John [123].



soit :

$$p(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} [t\mathcal{M}f(x, t)],$$

où  $\mathcal{M}$  est l'opérateur d'intégration en moyennes sphériques :

$$\mathcal{M}f(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f(x + ty) d\sigma_3,$$

avec  $d\sigma_d$  la mesure surfacique de la boule unité induite par la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ <sup>19</sup>. L'utilisation des moyennes sphériques se généralise à toute dimension (voir [66, Chap. VI, section 13.2] ainsi que [16, 18]) : si  $n \geq 3$  est impair et  $f \in \mathcal{C}^{(n+3)/2}(\mathbb{R}^n)$ , alors :

$$p(t, x) = \frac{1}{\alpha_n \omega_n} \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \left[ t^{n-2} \int_{\|y\|=1} f(x + ty) d\sigma_n \right], \quad (\text{III.2.2})$$

où  $\alpha_n = 1 \cdot 3 \cdots (n-2)$  et  $\omega_n = \int_{\mathbb{S}} d\sigma_n$  est la mesure de la boule unité  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

- La *méthode de descente de Hadamard*, qui permet de ramener l'étude du cas en dimension  $n$  pair au cas de dimension  $n+1$  impair, de sorte que pour tout  $n \geq 2$  pair, si  $f \in \mathcal{C}^{(n+4)/2}(\mathbb{R}^n)$ , alors :

$$p(t, x) = \frac{2}{\alpha_n \omega_{n+1}} \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \left[ t^{n-1} \int_{\|y\| \leq 1} \frac{f(x + ty)}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy \right]. \quad (\text{III.2.3})$$

- La *formule de Duhamel* pour déduire une solution de l'équation avec source (second membre) non nulle à partir des solutions de l'équation homogène [83, p. 81].
- Les *solutions fondamentales* et le *noyau de Schwartz* (ici de *Green*) [83, p. 163], que nous retrouverons par exemple dans les preuves de la Proposition IV.1.2 page 65 et du théorème III.3.21 page 61.

---

19. On peut noter la ressemblance entre  $R$  et la transformée de Radon classique (qui intègre les fonctions sur des plans plutôt que sur des sphères) utilisée dans de très nombreuses méthodes d'imagerie assistée par ordinateur.

- La *transformation* et les *séries de Fourier* en espace et/ou en temps (à l'aide de cette dernière, on se ramène à l'étude de l'équation de Helmholtz, voir par exemple la Proposition IV.1.2 page 65 et le théorème IV.3.1 page 86).

Pour ces deux derniers, nous verrons des applications dans des méthodes de reconstruction dans la Sous-section IV.3 page 85.

**Remarque III.2.1.** *Dans les formules (III.2.3) et (III.2.2), il est donc fait usage des opérateurs d'intégration en moyenne sphérique, or ceux-ci lient les équations d'onde aux équations de Bessel. Elles permettent ainsi de définir des solutions aux équations d'onde à l'aide des fonctions de Bessel (voir notamment la Proposition IV.1.2 page 65)*

Les résultats classiques d'existence, d'unicité et de régularité de solutions découlent des formules de Kirchhoff et de la méthode de descente. Ainsi, en dimension impaire, on a le résultat suivant :

**Théorème III.2.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 3$  impair. On suppose que  $c \equiv 1$  et  $f \in \mathcal{C}^{\frac{m+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . La fonction  $p$  proposée dans (III.2.2) est l'unique solution de l'équation (II.1.6). De plus,  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ .

On déduit de ce résultat celui traitant des dimensions paires :

**Théorème III.2.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  pair. On suppose que  $c \equiv 1$  et  $f \in \mathcal{C}^{\frac{m+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . La fonction  $p$  proposée dans (III.2.3) est l'unique solution de l'équation (II.1.6). De plus,  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ .

**Remarque III.2.4.** *L'unicité de la solution peut être obtenue à l'aide des méthodes d'énergie classiques, nous le verrons au chapitre suivant.*

### III.2.2 Cas général et solutions moins régulières

Supposons maintenant que le milieu est non homogène (et donc que la vitesse des ondes est variable). En général, il est alors plus difficile de définir et d'étudier les solutions. Dans ce cas, l'équation (III.1.1) s'écrit :

$$\partial_{tt}p - c(x)\Delta p = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad (\text{III.2.4})$$

où  $x \mapsto c(x) - 1$  est identiquement nulle hors de  $B(0,1)$  (c'est-à-dire que le milieu extérieur au corps est homogène), dans  $L^\infty(B(0,1))$  et strictement positive : on suppose donc qu'il existe  $a, b > 0$  tels que :

$$a \leq c(x) \leq b, \text{ presque partout (p.p.) sur } \mathbb{R}^n.$$

On peut aussi s'intéresser à des solutions moins régulières, puisque la condition initiale  $f$  ne sera pas régulière en pratique.

On suppose que :

$$\mathcal{L} = \partial_{tt} + L,$$

avec  $-L$  un opérateur différentiel elliptique. Cette situation inclut le cas où  $L = -c(x)\Delta$  proposé ci-dessus.

La *méthode de Faedo-Galerkin* permet d'obtenir des solutions faibles sous des conditions de régularité faibles. Puisque nous utiliserons cette méthode ultérieurement, nous ne nous attardons pas sur sa description pour le moment. Nous résumons cependant quelques résultats importants qu'elle permet d'obtenir.

Supposons que  $T < \infty$  et que  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $Q_T = (0,T) \times \Omega$ . Nous dirons qu'une fonction  $p$  telle que :

$$p \in L^2(0,T; H_0^1) \cap H^1(0,T; L^2) \cap H^2(0,T; H^{-1})^{20},$$

est solution faible de (III.1.1) si pour tout  $v \in H_0^1$  :

$$\int_{\Omega} p_{tt}v + Lpv \, dx = 0, \text{ dans } L^2(0,T),$$

c'est-à-dire :

$$\langle p_{tt}, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0, \text{ p.p. } (0,T).$$

---

20. Lorsque cela ne portera pas à confusion, nous omettrons de rappeler que les espaces fonctionnels (tels ici ceux de Lebesgue et de Sobolev) portent sur le domaine  $\Omega$ .

ou encore telle que pour tout  $v \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$  et pour tout  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty(0,T)$  :

$$\int_0^T -\langle u'(t), v \rangle_{L^2} \psi' + l(u(t), v) \psi \, dt = 0,$$

en notant, pour tout  $u \in H_0^1$  et tout  $v \in H_0^1$  :

$$l(u, v) = \langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Si l'on suppose que la forme bilinéaire  $l$  est continue sur  $H_0^1 \times H_0^1$  et *faiblement coercive*<sup>21</sup>, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que pour tout  $u \in H_0^1$  :

$$l(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1} - \beta \|u\|_{L^2},$$

alors il vient (voir [84] par exemple) :

**Théorème III.2.5.** Pour tout  $f \in H_0^1$  et tout second membre  $F \in L^2(Q_T)$ , il existe une unique solution faible  $p$  de (III.1.1). En outre :

$$p \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{-1}), \quad p \in L^\infty(0, T; H_0^1) \text{ et } p' \in L^\infty(0, T; L^2),$$

et il existe une constante  $C$  indépendante de  $p$  telle que :

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|p\|_{H_0^1}^2 + \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|p'\|_{L^2}^2 + \|p''\|_{L^2(0, T; H^{-1})}^2 \leq C \left( \|f\|_{H_0^1}^2 + \|F\|_{L^2(Q_T)}^2 \right).$$

Enfin, si  $f$  et  $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T})$ , alors  $p \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T})$ .

**Remarque III.2.6.** Si on suppose que  $L$  est auto-adjoint, alors il existe une base  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  orthogonale dans  $H_0^1$  et orthonormale dans  $L^2$  composée de fonctions propres de  $L$ . Cette propriété peut être utilisée dans la méthode de Faedo-Galerkin et en simplifier la preuve, mais elle n'est pas nécessaire.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat annoncé sur l'identité des solutions des équations (II.2.9) et (II.2.10) :

**Corollaire III.2.7.** On suppose que  $L = -c(x)A$  où  $A$  est un opérateur non borné sur  $L^2$ , auto-adjoint et de forme bilinéaire continue sur  $H_0^1 \times H_0^1$

21. On dit aussi « coercive sur  $V$  par rapport à  $H$  », voir [70, p. 616].

et faiblement coercive. Étant donné un objet  $f \in H_0^1$ , les équations (II.2.9) et (II.2.10) admettent une unique solution, qui leur est commune.

PREUVE. Notons  $p_1$  la solution de l'équation (II.2.9),  $p_2$  celle de (II.2.10) et  $p = p_2 - p_1$ , alors  $p$  est la solution de l'équation :

$$\begin{cases} c(x)^{-1}p_{tt} - Ap = -c(x)^{-1}\delta'(t)f(x) \text{ sur } Q_t, \\ p(0) = f, \\ p_t(0) = 0, \end{cases}$$

Afin de simplifier le présent exposé, supposons que  $p$  est régulière. Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T] \times \Omega)$ , on a alors d'une part :

$$\begin{aligned} \int_{(0, T)} \int_{\Omega} (c^{-1}p_{tt} - Ap) \varphi \, dxdt &= \int_{(0, T)} \int_{\Omega} -c(x)^{-1}\delta'(t)f(x)\varphi(t, x) \, dxdt \\ &= \int_{\Omega} f\varphi(0) \, dx, \end{aligned}$$

et d'autre part, d'après le théorème de Green :

$$\begin{aligned} \int_{(0, T)} \int_{\Omega} (c^{-1}p_{tt} - Ap) \varphi \, dxdt &= \int_{(0, T)} \int_{\Omega} p (c^{-1}\varphi_{tt} - A\varphi) \, dxdt \\ &\quad + \int_{\Omega} f\varphi(0) \, dx. \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\int_{(0, T)} \int_{\Omega} p (c^{-1}\varphi_{tt} - A\varphi) \, dxdt = 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T] \times \Omega).$$

Or, compte tenu du théorème III.2.5 page ci-contre, toute fonction  $F$  appartenant à  $\mathcal{C}^\infty(Q_T)$  peut être représentée sous la forme :

$$F = c^{-1}\varphi_{tt} - A\varphi,$$

pour certains  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T})$ . Quitte à tronquer  $F$  au voisinage de  $T$ , on peut supposer que  $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T] \times \Omega)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

### III.2.3 Égalités d'énergie, réversibilité et unicité des solutions

Par souci de simplicité, restons dans le cas où  $L = -c(x)\Delta$  et supposons que nous ayons prouvé l'existence d'une solution  $p$  régulière. On note  $E$  l'énergie de l'onde de pression ainsi définie :

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \|p_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla p\|_{L^2}^2 \right),$$

pour tout  $0 \leq t \leq T$ , de sorte que :

$$E'(t) = \langle \partial_{tt}p - c(x)\Delta p, \partial_t p \rangle_{H^{-1}(c(x)^{-1}dx), H_0^1(c(x)^{-1}dx)} = 0,$$

en ajoutant «  $c(x)^{-1}dx$  » pour désigner les espaces d'intégration à poids. Nous retrouvons ainsi la propriété bien connue de l'équation des ondes d'être *conservative* : pour tout  $t \in (0, T)$ ,

$$E(t) = E(0).$$

Cette propriété est à rapprocher du caractère *réversible* de l'équation des ondes<sup>22</sup>. En effet, l'équation (III.1.1) se pose et se résout exactement de la même manière si une condition finale (au temps  $0 < T < \infty$ ) est donnée, à changement de variable temporelle près : il suffit de poser  $\tilde{t} = T - t$  pour retrouver un problème de Cauchy classique. Seules changent les conditions initiales.

Nous profiterons de la *réversibilité temporelle* de l'équation des ondes pour définir des méthodes qui « remontent le temps » afin de reconstruire la condition initiale qui nous intéresse : *retenons pour le moment l'idée qu'il nous importe peu que les méthodes que nous définissons nous permettent de reconstruire une condition initiale ou finale.*

---

22. Ce rapprochement est évident au vu des résultats fondamentaux de la théorie des semi-groupes fortement continus ou de la méthode de Faedo-Galerkin : les inégalités d'énergie et les estimations *a priori* restent valables en temps inverse.

L'égalité d'énergie ci-dessus offre aussi l'unicité de l'équation (III.2.4). Dans les situations plus générales évoquées dans la sous-section précédente, l'unicité de la solution de l'équation (III.1.1) peut être obtenue à l'aide du lemme de Gronwall, comme nous le verrons dans la preuve du Théorème II.1.8 page 106 du Chapitre B.

En outre, ce type d'égalité d'énergie peut donner une première justification à l'idée proposée dans les notations d'introduire des rappels de la forme  $PC^*KC$  dans les équations : en effet, puisque nous essayons de définir une fonction  $p$  approchant  $p^o$  à  $t = 0$ , on peut s'intéresser  $\tilde{p} = p - p^o$  et minimiser l'énergie de  $\tilde{p}$ . En l'absence de bruit,  $p^o$  est solution de (III.2.4), et si  $p$  est solution de :

$$\partial_{tt}p - c(x)\Delta p = -PC^*KC(p' - p^{o'}) \text{ sur } Q_T,$$

alors  $\tilde{p}$  est solution de :

$$\partial_{tt}\tilde{p} - c(x)\Delta\tilde{p} = -PC^*KC\tilde{p}' \text{ sur } Q_T, \quad (\text{III.2.5})$$

Définissons l'énergie  $E_{P,K}$  associée à la solution de (III.2.5) :

$$E_{P,K}(t) = \frac{1}{2} \left( \|p_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla p\|_{L^2}^2 \right). \quad (\text{III.2.6})$$

Il vient alors :

$$E_{P,K}(T) - E_{P,K}(0) = - \int_0^T \langle PC^*KCp, p \rangle_{L^2} dt, \quad (\text{III.2.7})$$

où apparaît la propension du rappel à faire diminuer l'énergie totale du système lorsque  $P$  et  $K$  sont positifs et lorsque la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{S}$  n'est pas nulle.

Ces égalités d'énergie seront au cœur des preuves de convergence des méthodes itératives que nous mettons en œuvre et sont intimement liées aux hypothèses que nous devons formuler pour obtenir de telles convergences, ce qui sera étudié tout au long du Chapitre B.

### III.2.4 Comportement des solutions

Dans le cas d'un milieu homogène normalisé à  $c \equiv 1$ , on « lit » sur les solutions obtenues par moyennes sphériques la propagation à vitesse au plus 1 de l'information ainsi que la différence de nature des ondes en dimension paire et impaire, décrite dans le *principe de Huygens* : en dimension impaire, la solution  $p(t,x)$  au point  $x \in \mathbb{R}^n$  et au temps  $t \geq 0$  dépend des valeurs de la condition initiale  $f$  aux points se trouvant à distance exactement  $t$  du point  $x$  (on parle alors de *cône de dépendance*), tandis qu'en dimension paire,  $p(t,x)$  dépend des valeurs de  $f$  aux points étant à distance inférieure ou égale à  $t$  de  $x$ .

Dans les paragraphes suivants, inspirés de [114, 209, 223], nous nous intéressons au comportement des solutions des équations d'onde et en particulier à la propagation de leurs singularités.

#### Bicaractéristiques

La généralisation du principe de Huygens au cas où la vitesse est variable et la description de la propagation des ondes font appel à la notion de *bicaractéristiques* définie ci-après. Supposons la vitesse  $c$  régulière<sup>23</sup>. À une constante près, le symbole principal de  $\mathcal{L} = \partial_{tt} - c(x)\Delta$  est :

$$P(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{2}(c(x)|\xi|^2 - \tau^2).$$

Considérons le hamiltonien  $\mathcal{H}_P$  associé à l'opérateur  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{H}_P = \frac{c(x)}{2}|\xi|^2,$$

ainsi que le système hamiltonien associé, dans  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \ni (x,\xi)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = c(x)\xi, \\ \dot{\xi} = -\frac{1}{2}\nabla c(x)|\xi|^2, \\ x(0) = x_0, \\ \xi(0) = \xi_0. \end{array} \right.$$

<sup>23</sup>. Rappelons que  $c$  est en réalité homogène au carré d'une vitesse; notre abus de langage simplifie cependant légèrement les notations.



**Proposition III.2.8.** Les solutions de ce système s'écrivent :

$$t \mapsto (t, x(t), \tau, -\tau c(x)^{-1} \dot{x}(t)),$$

où  $t \mapsto x(t)$  est une géodésique de la métrique  $c^{-1}$ .

**Définition III.2.9.** Ces solutions sont appelées bicaractéristiques de l'opérateur différentiel  $\partial_{tt} - c(x)\Delta$ . Leurs projections dans  $\mathbb{R}_x^n$  en sont les rayons (géométriques).

Ainsi, dans la situation qui nous intéresse, la vitesse initiale  $p_t(0)$  étant nulle, chaque singularité  $(x, \xi)$  se « sépare » selon deux directions ( $\xi$  et  $-\xi$ ) avec la même amplitude et si la vitesse  $c$  est constante, alors cette direction l'est aussi : dans ce cas, les rayons sont donc des droites.

### Front d'onde

Définissons la *régularité microlocale* avant d'en déduire la définition du front d'onde d'une distribution :

**Définition III.2.10.** Étant donné une distribution  $p$ , un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et une direction  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on dit que  $p$  est microlocalement régulière au voisinage du point  $x_0$  dans la direction  $\xi_0$  si il existe une fonction-test lisse  $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\varphi(x_0) \neq 0$  et un cône  $\Gamma$  tel que  $\xi_0 \in \Gamma \in \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\mathcal{F}(p\varphi)(\xi) = o(\xi^{-N}), \text{ quand } \xi \rightarrow \infty, \text{ avec } \xi \in \Gamma,$$

pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}$  étant la transformation de Fourier<sup>24</sup>.

Le front d'onde de  $p$ ,  $WF(p)$ , est alors défini comme l'ensemble des points  $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  au voisinage desquels  $p$  n'est pas microlocalement régulière.

Un point  $(x_0, \xi_0)$  du front d'onde de  $p$  est donc composé d'un point  $x_0$  de  $\mathbb{R}^n$  en lequel  $p$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et de la direction dans laquelle

---

24. On profite ici du lien étroit entre la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier d'une distribution et sa régularité pour caractériser cette dernière au voisinage d'un point donné.

la décroissance de sa transformée de Fourier est insuffisante pour assurer sa régularité (en  $x_0$ ).

Par exemple, si  $p$  est la frontière d'un ouvert borné  $\Omega$  de frontière régulière  $\partial\Omega$ , alors  $(x_0, \xi_0) \in WF(p)$  si et seulement si  $x_0 \in \partial\Omega$  et  $\xi_0 \perp T_{x_0}\partial\Omega$ , où  $T_{x_0}\partial\Omega$  est le plan tangent à  $\partial\Omega$  en  $x_0$ .

Aussi la notion de *front d'onde d'une solution de l'équation* (III.2.4) permet de préciser la manière dont se propagent les singularités des ondes : il est bien connu, et instinctif dans le cas de la vitesse constante, que les singularités des solutions sont transportées par les rayons. En particulier, si les rayons « sortent » tous d'un domaine donné au bout d'un temps  $T$ , alors la solution sera lisse dans ce domaine pour les temps ultérieurs [173], d'où le théorème suivant (voir [218]) :

**Théorème III.2.11.** Soit  $p$  une solution de (III.2.4). Les parties connexes incluses dans les courbes bicaractéristiques de l'équation (III.2.4) sont soit d'intersection nulle avec le front d'onde de  $p$ , soit incluses dans ce front d'onde.

Enfin, en horizon de temps  $T$  fini, puisque l'objet-source est identiquement nul hors d'un domaine borné, on supposera indifféremment que la solution évolue dans un ouvert borné régulier suffisamment grand ou dans  $\mathbb{R}^n$ , en vertu du caractère borné de la vitesse de propagation des ondes. Les solutions des équations d'onde posées sur  $\mathbb{R}^n$  ou sur  $\Omega$  (avec condition de Dirichlet) sont alors identiques.

Munis d'un tel cadre théorique, nous pouvons préciser la manière dont se propagent les ondes acoustiques et donc étudier les propriétés liées à leur observation et à la reconstruction souhaitée, ce que nous initions dans la sous-section suivante.

### III.3 Réécriture et propriétés du problème inverse

Comme nous allons le montrer dans les deux prochaines sous-sections, la transcription du problème inverse (III.1.1) en problème d'inversion d'opérateurs adaptés peut fournir des caractéristiques importantes du problème inverse qui nous intéresse. Ainsi, le cas d'observations sphériques a fait l'objet d'un grand nombre de travaux autour de la transformée de Radon sphérique.

Cette manière de procéder, traitée dans la Sous-section III.3.1, limite cependant l'étude au cas où le milieu est homogène puisque les transformations intégrales et les formules d'inversion qui leur sont associées ne sont pas généralisées aux vitesses variables. En outre, les résultats obtenus dépendent grandement de la géométrie du problème et obligent à une étude au cas par cas. Nous verrons ensuite, en Sous-section III.3.2 page 57, comment contourner l'absence de solutions explicites pour obtenir les propriétés de notre problème dans le cas d'un milieu hétérogène.

Ces parties sont librement inspirées des textes suivants : [5, 6, 41, 144, 145].

### III.3.1 Propriétés du problème inverse : cas d'un milieu homogène

#### À l'aide de la transformée de Radon sphérique

Afin d'en étudier les propriétés essentielles, on se propose de réécrire le problème inverse consistant à déterminer  $f$  à partir de  $\mathcal{W}f = p^o$  en utilisant la *transformée de Radon sphérique*. Le problème se ramène alors à l'étude de l'inversion de cette transformée, laquelle permet de définir un ou plusieurs cadres fournissant un Problème bien posé, avec unicité et continuité de la solution par rapport à la condition initiale, conditions de rang permettant de définir des données « favorables », etc.

**N.B. :** Dans la suite de cette sous-section, nous nous attarderons principalement sur les géométries sphériques (tridimensionnelles). De plus, les résultats associés à la transformée de Radon sphérique ne sont valables que pour les solutions de l'équation des ondes en milieu homogène.

**Définition III.3.1.** *Dans le cas où  $\mathcal{S} \subset \mathbb{S}$ , la transformée de Radon sphérique restreinte est l'opérateur linéaire  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$  de  $L^2(B(0,1))$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S})$  défini par<sup>25</sup> :*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}}f(t,x) = \int_{S(x,t)} f(y) d\sigma(y), \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S},$$

---

<sup>25</sup>. On peut choisir, plus généralement,  $\mathcal{S} \subset S(0,R)$ ,  $R > 0$ , ce qui est équivalent à changement de variable près.

ou encore :

$$\mathcal{R}_S = \int_{\mathbb{S}} f(x + ty)t^{n-1} d\sigma(y),$$

où  $S(x,t)$  est la sphère de centre  $x$  et de rayon  $t$  et  $\mathbb{S}$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^n$ .

Lorsque  $n = 2$ , la transformée de Radon sphérique est couramment nommée transformée de Radon circulaire et notée  $\mathcal{R}_C$ .

Cette transformée est dite *restreinte* puisque  $\mathcal{S} \subset \mathbb{S}$ . Connaître les observations  $p^o$  revient à connaître  $\mathcal{R}_S f$ , on s'intéresse donc aux propriétés de  $\mathcal{R}_S$  et aux moyens de l'inverser, de sorte que le problème de la TTA (III.1.1) est ramené à celui de l'inversion de  $\mathcal{R}_S$ . Ce point de vue est à l'origine de très nombreux travaux en mathématiques de la TTA. Parmi beaucoup d'autres textes déjà cités, la thèse récente de Xavier Bonnefond [41] en donne un bon aperçu.

La continuité de  $\mathcal{R}_S$ , qui assure la continuité des données vis-à-vis de l'objet et donc leur stabilité quant aux perturbations de celui-ci, est aisément vérifiable. Nous avons ainsi :

**Proposition III.3.2.** La transformée de Radon sphérique restreinte est continue et sa norme d'opérateur vaut  $|\mathcal{S}|^{1/2}$ .

Le résultat suivant, extrait de [182], traite de la compacité de  $\mathcal{R}_S$  :

**Proposition III.3.3.** Supposons que  $\mathcal{S} = \mathbb{S}$ . L'opérateur  $\mathcal{R}_S$  est un opérateur compact.

Aussi l'image de  $\mathcal{R}_S$  est-elle incluse dans un sous-espace de  $L^2$  composé de fonctions plus régulières (un espace de Sobolev, par exemple) et le problème inverse associé à  $\mathcal{R}_S$  est mal posé<sup>26</sup>.

Plus précisément, on a la proposition suivante :

**Proposition III.3.4.** Si  $f \in H_K^s(B(0,1))$ , alors  $\mathcal{R}_S f \in H_K^{s+\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S})$ , quel que soit  $s > 0$ .

---

<sup>26</sup>. Pour préciser cette idée, on peut remarquer que, dans le cas d'opérateurs injectifs sur des Hilbert séparables, l'inverse d'un opérateur compact n'est pas continu : les valeurs singulières de  $A$  forment une suite décroissante convergeant vers 0. Par ailleurs, plus la précision de l'approximation de dimension finie augmente, plus le problème est mal conditionné et instable.

Il est possible d'être plus précis concernant la stabilité de la reconstruction vis-à-vis des données à l'aide des notions de stabilités lipschitzienne et höldérienne (notion plus faible que la précédente) [118, 145] :

**Définition III.3.5.** Soient  $s_1, s_2 > 0$ . L'opération de reconstruction de  $f$  à partir de  $p^o$  est dite Lipschitz-stable entre les espaces de Sobolev  $H^{s_2}$  et  $H^{s_1}$  lorsqu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, si  $f \in L^2(B(0,1)) \cap H^{s_1}$ , alors  $p^o \in H^{s_2}((0,T) \times \mathcal{S})$  et :

$$\|f\|_{H^{s_1}} \leq C \|p^o\|_{H^{s_2}}.$$

La reconstruction est dite Hölder-stable s'il existe des constantes :

$$s_1, s_2, s_3 > 0 \text{ et } C, \mu, \delta > 0,$$

telles que :

$$\|f\|_{H^{s_1}} \leq C \|p^o\|_{H^{s_2}}^\mu,$$

pour tout  $\|f\|_{H^{s_3}} \leq \delta$ .

Ces notions de *stabilité* sont étroitement liées à la décroissance des valeurs singulières de l'opérateur  $\mathcal{W}$  associant  $p^o$  à  $f$  dans  $L^2$  : comme dans le cas de l'étude de la compacité de  $\mathcal{R}_S$ , plus grande est la décroissance de ces valeurs singulières, plus la reconstruction est instable. En effet, l'inversion doit alors reconstruire une fonction moins régulière que les données, et cette opération est instable en conséquence de la compacité et de la continuité des injections entre espaces de Sobolev. La preuve traitant de la stabilité höldérienne du théorème 3.1 de [173] met bien en évidence cette propriété et ses liens avec la décroissance des valeurs singulières des opérateurs considérés.

**Proposition III.3.6.** Dans le cas d'observations sphériques complètes (entourant entièrement l'objet), la reconstruction n'est Lipschitz-stable que si le support de  $f$  est inclus dans  $\mathcal{S}$  ; et si  $f$  n'est pas nulle hors de la sphère d'observation, alors la reconstruction n'est pas Hölder-stable<sup>27</sup>.

<sup>27</sup>. Voir [182] ainsi que le résultat de [173] dans l'étude de la stabilité du problème à vitesse variable.

Enfin, en nous intéressant à l'image  $\text{Im}(\mathcal{R}_S)$  de  $\mathcal{R}_S$ , il est possible de déterminer les données  $p^o$  qui sont bien (théoriquement) issues d'une source  $f$  afin de projeter des données sur  $\text{Im}(\mathcal{R}_S)$ , par exemple, et donc de corriger des erreurs de mesure ou d'en extraire les bruits parasites, de compléter des données incomplètes, ou encore d'évaluer l'atténuation qu'a subie l'onde de pression au travers du corps (voir [4, 7, 11, 89, 174, 182] et les références qu'ils contiennent). Le théorème suivant, issu de [4] et valable en toute dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , décrit cette image :

**Théorème III.3.7.** CONDITIONS DE RANG POUR LA TRANSFORMÉE DE RADON SPHÉRIQUE. Supposons que  $\mathcal{S} = \mathbb{S}$  et  $T = 2$ , on considère une fonction  $p^o$  dans  $\mathcal{C}_K^\infty([0,2] \times \mathcal{S})$ . Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) La fonction  $p^o$  s'écrit  $\mathcal{R}_S f$  pour  $f \in \mathcal{C}_K^\infty(B(0,1))$ .
- (ii) Quelle que soit la valeur propre  $\lambda$  du Laplacien de Dirichlet sur  $B(0,1)$ , en notant  $\varphi$  une fonction propre associée, la condition d'orthogonalité suivante est satisfaite :

$$\int_{[0,2] \times \mathcal{S}} p^o(t,x) \partial_\nu \varphi(x) J_{n/2-1}(\lambda t) t^{n-1} dx dt = 0,$$

où  $\partial_\nu$  est la dérivée normale extérieure de  $\mathbb{S}$  et  $J_p$  est la  $p$ -ième fonction de Bessel de première espèce normalisée (ou sphérique).

Les premiers résultats établis concernant la description du rang de  $\mathcal{R}_S$  font apparaître une condition supplémentaire sur les moments de  $p^o$  dans (ii) dans le cas des dimensions  $n$  paires. Celle-ci a depuis été contournée avec le théorème précédent, mais est toujours nécessaire (à ce jour) à son extension aux espaces de Sobolev (voir [7, 11]).

### Unicité de la solution et surface d'observation

Le problème inverse qui nous intéresse étant linéaire, l'unicité de la solution vis-à-vis des observations est équivalente à l'injectivité de  $\mathcal{W}$  (ou encore à celle de  $\mathcal{R}_S$  dans le cas d'observations sphériques). Nous recherchons donc cette injectivité afin de nous assurer que toute fonction d'observations  $p^o$

détermine un seul et unique objet à support compact  $f$  : les ensembles validant cette propriété sont appelés *ensembles d'injectivité pour le problème de la TTA* (III.1.1), par opposition aux *ensembles de non-injectivité*.

On se ramène donc ici au cas où les observations sont nulles et l'on cherche à caractériser les surfaces d'observation  $\mathcal{S}$  telles que seule la solution identiquement nulle soit solution du problème inverse associé. Nous nous référerons principalement à [8, 10, 144, 145] pour le cas des données incomplètes.

Une première caractérisation des ensembles de non-injectivité, très générale, est proposée dans [8], à savoir :

**Théorème III.3.8.** Si  $\mathcal{S}$  n'est pas un ensemble d'injectivité, alors il existe un polynôme harmonique non nul s'annulant sur  $\mathcal{S}$ .

Si l'on réduit les surfaces intéressantes d'acquisition aux surfaces fermées entourant l'objet (c'est-à-dire aux *données complètes*), le théorème précédent implique directement le résultat suivant :

**Corollaire III.3.9.** Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{S}$  est la frontière d'un domaine borné, alors  $\mathcal{S}$  est un ensemble d'injectivité : toute donnée  $p^o$  détermine de manière unique l'objet  $f \in L_K^2(\Omega)$ .

**Remarque III.3.10.** *Il n'est pas nécessaire de supposer que la surface d'observation entoure les objets dans ce corollaire.*

*Les résultats ultérieurs présentés dans [5] montrent que l'utilisation de développements en séries de Fourier généralisées (i.e. de la décomposition spectrale du Laplacien de Dirichlet sur un ouvert borné régulier  $\Omega$ ) permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la reconstruction à partir de données définies sur une classe très large de surfaces fermées  $\mathcal{S}$  (voir la Sous-section IV.3 page 85).*

En outre, une description complète des généralisations possibles du corollaire précédent aux espaces  $L^p$  (en cas de données complètes et par l'intermédiaire de la transformée de Radon sphérique) est offerte dans l'article [3], d'où le théorème suivant est extrait :

**Théorème III.3.11.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Supposons que  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et que  $\mathcal{S}$  est la frontière d'un domaine borné. Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  est telle que  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}} = 0$ , alors :

- ou bien  $p \leq 2n/(n-1)$  et  $f = 0$ ;  $\mathcal{S}$  est donc un ensemble d'injectivité.
- ou bien  $p > 2n/(n-1)$  et on ne peut pas conclure.

Pour ce qui est de la description de l'intégralité des ensembles d'injectivité<sup>28</sup>, seul le cas bidimensionnel ( $n = 2$ ) avec objet continu est entièrement traité.

Sous ces hypothèses, le théorème III.3.13 issu de [8] décrit tous les ensembles d'injectivité en ramenant le Problème (III.1.1) à celui de l'étude de la transformée de Radon circulaire  $R_{\mathcal{C}}$  (équivalent bidimensionnel de  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ ) et en restreignant celle-ci à l'ensemble des fonctions continues à support dans la boule unité  $C_K(B(0,1))$ .

Les principaux ensembles posant problème du point de vue de l'injectivité de  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$  sont les *croix de Coxeter* ainsi définies :

**Définition III.3.12.** Une *croix de Coxeter* est un ensemble de  $\mathbb{R}^2$  noté  $\Sigma_N$ , pour  $N \in \mathbb{N}$ , et défini par la réunion de droites concourantes suivante :

$$\Sigma_N = \bigcup_{1 \leq k \leq N} \left\{ te^{\frac{ik\pi}{N}}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

à transformation euclidienne du plan près.

En effet, il est possible de construire des fonctions non nulles, supportées dans  $B(0,1)$  et impaires en restriction à toutes les droites  $\{te^{\frac{ik\pi}{N}}, t \in \mathbb{R}\}$ , pour  $1 \leq k \leq N$  : leur image par la transformée de Radon circulaire est nulle, et par conséquent les observations  $p^o$  le sont aussi.

On a alors :

**Théorème III.3.13.** Lorsque  $n = 2$ , la surface d'observation  $\mathcal{S}$  est un ensemble d'injectivité si et seulement si elle n'est pas contenue dans la réunion d'un ensemble fini  $F$  et d'une croix de Coxeter  $\Sigma_N$ .

En dimension quelconque, la généralisation de ce résultat a fait l'objet d'une conjecture (voir [8, paragraphe 9]) qui n'a toujours pas été démontrée.

---

<sup>28</sup>. Cette description comprend donc les situations où les données sont incomplètes, ce qui nous intéresse particulièrement puisque d'une part nos données sont discrètes et d'autre part parce que la surface d'acquisition ne pourra pas toujours entourer entièrement l'objet (en particulier dans le cas de l'observation d'un sein ou d'un crâne).



Le théorème III.3.13 page ci-contre laisse entendre que les problèmes liés à l'unicité de la reconstruction dépendent d'un lien entre les fréquences d'oscillation de l'objet et l'angle maximal séparant deux capteurs adjacents : plus cet angle est grand, moins les irrégularités de l'objet seront perçues ; aussi l'objet sera reconstruit à perturbation près par une fonction peu régulière (une fonction oscillante impaire le long des droites décrites ci-dessus, notamment).

Terminons cette partie dédiée aux surfaces d'injectivité avec un résultat ayant pour cas limite, dans le cas d'observations sphériques, la surface d'acquisition particulièrement intéressante pour nos applications qu'est la demi-sphère unité<sup>29</sup>. Soit  $\delta > 0$  et :

$$\mathcal{S}_\delta = \mathbb{S} \cap \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq -\delta\}.$$

Dans l'article [182], la Proposition 9.1 assure en particulier que, quel que soit  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{S}_\delta$  est une surface d'injectivité pour les objets appartenant à  $H_K^\alpha(\mathbb{R}^n)$  où  $K = B(0,1) \cap \{x_1 \geq 0\}$  et  $\alpha > 1/2$ . La reconstruction est en outre Hölder stable :

**Proposition III.3.14.** Pour tout  $f \in H_K^\alpha(\mathbb{R}^n)$ , on a :

$$\mathcal{R}_S f \in H^{\alpha + \frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}_\delta).$$

De plus, il existe  $c_\alpha, C_\alpha > 0$  tels que :

$$c_\alpha \|\mathcal{R}_S f\|_{H^{\alpha + \frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}_\delta)} \leq \|f\|_{H_K^\alpha} \leq C_\alpha \|\mathcal{R}_S f\|_{H^{\alpha + \frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}_\delta)}.$$

### Stabilité et observations

Pour expliquer rigoureusement les causes des instabilités liées à la géométrie de la surface d'observation, il faut en revenir aux propriétés des solutions des équations d'onde. D'après le comportement des solutions décrit ci-dessus, une singularité  $(x_0, \xi_0)$  ne sera « vue » d'un point  $x \in \mathcal{S}$  de la surface d'ob-

---

<sup>29</sup>. Les paragraphes suivants expliquent en quoi cette situation est un cas limite. Une surface d'observation hémisphérique nous intéresse particulièrement parce qu'elle entre dans le cadre de la mammographie.

servation que si  $x_0$  et  $x$  sont reliés par une géodésique de la métrique  $c^{-1}$  sur  $\Omega$ <sup>30</sup>.

La figure III.3.2 illustre ce phénomène en cas de vitesse  $c$  constante. Les singularités se propagent alors selon des droites. Cette figure présente le cas d'un *demi-cercle d'observation*  $\mathcal{S}$  qui entoure la moitié supérieure de l'objet, d'où l'apparition d'instabilités lors de la reconstruction, visibles sur les bords du carré lorsque certaines droites qui lui sont perpendiculaires n'intersectent pas  $\mathcal{S}$ .

Cette figure illustre un cas de *données incomplètes*, c'est-à-dire d'une surface d'observation non fermée n'entourant pas entièrement l'objet. Ce cas nous intéressera lors de l'étude des conditions d'observation de l'objet et de la stabilité de la reconstruction associée, ainsi que lors de nos tests numériques<sup>31</sup>.

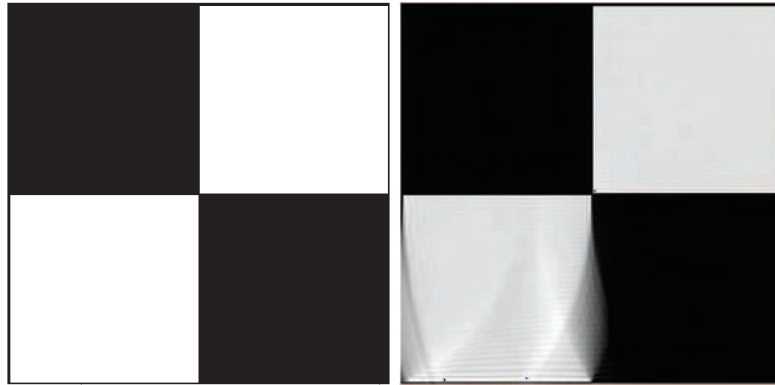


FIGURE III.3.2 – Singularités observées de carrés : cas d'un demi-cercle d'observation à vitesse constante. Image originelle à gauche, reconstruction par BFN (voir la Section IV page 131 du Chapitre B) à droite. Le demi-cercle entoure la moitié supérieure de l'objet.

30. D'un point de vue théorique, il faut aussi que la géodésique atteigne la surface d'observation de manière transversale, car elle est alors réfléchiée tandis qu'une partie de l'énergie est transmise, ce qui permet de détecter la singularité. À ce sujet, l'article [219] détaille l'étude de la propagation de rayons dans un crâne et de la possibilité de leur observation.

31. Précisons qu'ici la méthode de reconstruction importe peu dès lors qu'en cas de données complètes, on obtient une reconstruction avec une erreur inférieure à 1% en une centaine d'itérations.

### III.3.2 Propriétés du problème inverse en milieu hétérogène.

Ici, la vitesse  $c(x)$  n'est plus supposée constante, nous n'avons donc plus à notre disposition de solutions intégrales, il faut soit étudier directement l'équation et ses propriétés intrinsèques (telles des estimations d'énergie, dont ses propriétés de décroissance locale), soit définir de nouveaux types de solutions (notamment au moyen de développements en séries de Fourier généralisées). La seconde option sera présentée ultérieurement, en Section IV.3 page 85.

Tout au long de cette sous-section, on supposera que  $c$  est une fonction régulière, bornée et strictement positive et que  $x \mapsto c(x) - 1$  est à support compact inclus dans  $B(0,1)$ .

#### Données complètes : vitesse non-trapping et observation des singularités

En plus des instabilités liées aux phénomènes de régularisation en temps direct et à l'incomplétude des données, on observera des instabilités liées à l'(in-)observabilité des singularités propre à la vitesse  $c$ .

Pour clarifier les idées, supposons que les observations sont complètes. Selon les propriétés de la vitesse  $c$  définies ci-dessous, les rayons peuvent être « piégés » (*trapped* en anglais), c'est-à-dire qu'ils peuvent décrire une courbe bornée dans  $\mathbb{R}^n$ , auquel cas le rayon peut ne pas atteindre le domaine d'observation en temps fini (voir la Sous-section V.2.3 page 193 du Chapitre B et les articles [173, 198, 218]).

**Définition III.3.15.** *La vitesse  $c$  est dite non-trapping lorsque tous les rayons qui lui sont associés tendent vers l'infini quand  $t \rightarrow \infty$ , et trapping sinon.*

Nous supposerons en général que la vitesse est *non-trapping*, excepté dans nos applications numériques au cours desquelles des vitesses *trapping* feront l'objet de tests. En particulier, nous constatons le fait que *lorsque la vitesse est trapping, la reconstruction est instable* (voir l'article [42] en appendice, dont est issue la figure III.3.3 page suivante, ainsi que [116]).

La figure III.3.3 illustre un cas de reconstruction du même objet que précédemment (figure III.3.2 page 56), mais dans le cas de données complètes et en présence d'une vitesse trapping (représentée sur ladite figure). Sur ces trajectoires, les singularités ne peuvent être reconstruites puisqu'elles ne sont pas perçues par le dispositif d'enregistrement.

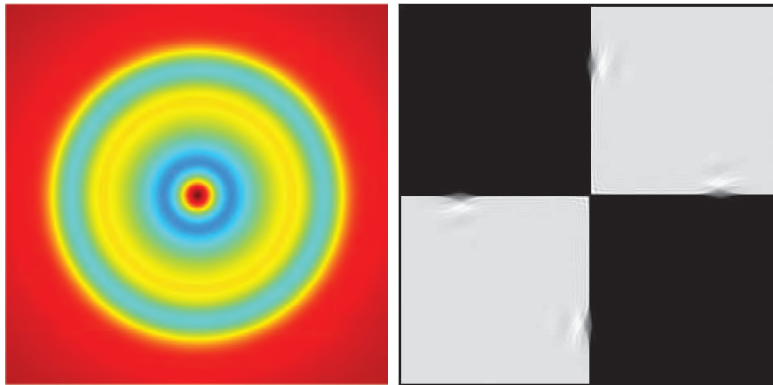


FIGURE III.3.3 – Singularités observées de carrés : cas d'observations complètes à vitesse trapping. Vitesse (définie en sous-partie II.2.1 page 225, Chapitre C) à gauche, reconstruction par BFN à droite. Les trajectoires des rayons piégés s'observent sur la reconstruction.

Les idées que nous avons évoquées au sujet de la propagation des singularités dans les équations d'onde trouveront des interprétations énergétiques dans la Section V.2 page 183 du Chapitre B. Notons pour le moment que l'hypothèse de la vitesse non-trapping est l'hypothèse standard qui permet d'obtenir des estimations de décroissance locale d'énergie utiles, et donc de savoir si les ondes « traversent » suffisamment le domaine d'observation. Dans le cas de données complètes, on a en effet les estimations suivantes (transcrites de [240] – voir aussi les textes classiques en la matière [79, 154, 241]) :

**Théorème III.3.16.** Supposons que  $\Omega = B(0,1)$  et que  $c$  est une vitesse non-trapping<sup>32</sup>.

Pour tout compact  $K \subset B(0,1)$ , tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$

<sup>32</sup>. Des estimations de décroissance locale d'énergie existent aussi en cas de vitesse trapping, mais la décroissance est alors bien moindre.

et tout objet  $f \in H^{|\alpha|}(B(0,1))$ , on a :

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} p(t, \cdot)}{\partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \right\|_{L^2(K)} \leq C e(t) \|f\|_{L^2(B(0,1))},$$

où  $C$  est une constante et :

- $e(t) = e^{-\mu t}$  pour un certain  $\mu > 0$  si  $n$  est impair.
- $e(t) = t^{-n-|\alpha|+1}$  en dimension  $n$  paire.

Ces estimations sont fondamentales en ce qu'elles permettent d'évaluer la quantité d'énergie qui traverse la surface d'observation, et donc de savoir si l'information est transmise au dispositif d'observation.

Un résultat très général d'unicité, le théorème III.3.17, est obtenu à l'aide de ces estimations dans [5]; y sont mises en évidence les deux propriétés essentielles à l'unicité de la reconstruction lorsque les observations sont complètes, à savoir : la décroissance rapide de  $f$ , sans laquelle l'unicité ne peut être obtenue [8, 3, 145]<sup>33</sup>, et le caractère non-trapping de la vitesse. De nombreux résultats concernant l'unicité de la reconstruction reposent sur l'hypothèse supplémentaire, à savoir que le support de l'objet est contenu dans le domaine d'intérêt :  $\text{Supp}(f) \subset B(0,1)$ . Aussi le théorème III.3.17 est remarquable en ce qu'il s'affranchit de cette hypothèse et pour sa validité indépendante de la géométrie du dispositif d'observation tant que celui-ci fournit des données complètes. En voici l'énoncé :

**Théorème III.3.17.** Soit  $s > 1/2$ . Sous hypothèse de vitesse non-trapping, toute fonction  $f$  à support compact dans  $H_K^s(\mathbb{R}^n)$  est déterminée de manière unique par la donnée d'observations  $g \in L_K^2((0,T) \times \mathcal{S})$ .

### Horizon de temps et observabilité

Dans la situation présente d'une vitesse variable, nous avons vu que l'injectivité de  $\mathcal{W}$  est étroitement liée aux estimations de décroissance énergétique offertes par l'analyse micro-locale. Son étude repose sur l'idée suivante :

<sup>33</sup>. Cette hypothèse sera souvent simplifiée en supposant que  $f$  est à support compact, en concordance avec les applications qui nous intéressent.

pour que l'information puisse être observée, il faut que suffisamment d'énergie traverse la surface  $\mathcal{S}$ .

Ensuite, si l'on a supposé que l'on peut observer les singularités de l'objet en temps fini, il faut encore laisser le temps aux rayons de parcourir la distance qui sépare leur origine de la surface d'observation.

Aussi, permettant des formulations plus générales que l'hypothèse de vitesse non-trapping, certaines notions concernent la possibilité d'obtenir une reconstruction unique et stable au problème de la TTA. Celles-ci ne portent pas seulement sur les propriétés intrinsèques de la vitesse  $c$ , mais traduisent un lien entre la vitesse, l'horizon de temps  $T$  et la surface d'observation  $\mathcal{S}$  – surtout en cas d'observations incomplètes. Ces notions sont les suivantes (pour cette définition et les résultats suivants, voir [145, 198, 217, 218, 220, 221]) :

**Définition III.3.18.** Soit  $d_c$  la distance associée à la métrique  $c^{-1}$ . On note :

$$T_c = \text{diam}_c(\Omega)$$

le supremum des longueurs des géodésiques associées à  $c^{-1}$  dans  $\bar{\Omega}$ . Nous appellerons temps d'observabilité le temps  $T^o = \max\{d_c(x, \partial\Omega), x \in \Omega\}$  et  $T_s^o = T_c/2$  le temps d'observabilité stable.

Bien qu'elles répondent à l'intuition, ces définitions seront ultérieurement motivées par les théorèmes III.3.20 page suivante et III.3.21 page ci-contre.

**Remarque III.3.19.** D'une part, on a  $T^o \leq T_s^o$  (voir les définitions de ces temps par [218]) et, d'autre part, il se peut que  $T_s^o = \infty$  (en cas de vitesse trapping, par exemple).

Nous verrons que la notion d'observabilité trouve de nombreuses formulations et utilisations. Par exemple, dans la Sous-section IV.3 page 85, nous verrons comment obtenir l'unicité de la reconstruction à l'aide de solutions bien définies, sous l'hypothèse que  $c$  est non-trapping et en horizon de temps  $T$  infini. De même, nous verrons dans la Sous-section V.2.3 page 193

du Chapitre B que l'observabilité offre l'injectivité de  $\mathcal{W}$  en corollaire, et que diverses hypothèses permettent de vérifier sa validité<sup>34</sup>.

En ce qui concerne l'unicité de la reconstruction, le théorème suivant décrit précisément la situation qui nous intéresse :

**Théorème III.3.20.** Supposons que l'objet  $f$  est contenu dans un ouvert borné régulier  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , que  $\mathcal{S} = \partial\Omega$  et que les données  $p^o$  sont définies sur  $(O, T) \times \mathcal{S}$ . Si  $p^o = 0$ , alors  $f(x) = 0$  pour tout  $x$  tel que  $d_c(x, \mathcal{S}) \leq T$ . Par ailleurs, si :

$$\omega = \{x \in \Omega; d_c(x, \mathcal{S}) > T\} \neq \emptyset,$$

alors  $f$  peut être arbitrairement définie sur  $\omega$ .

Ce résultat montre bien l'intérêt de définir un temps d'observabilité  $T^o$ , « à partir duquel » l'unicité est assurée.

Pour finir, précisons un résultat traitant de la stabilité de la reconstruction dans le cas de données incomplètes :

**Théorème III.3.21.** On suppose que  $\mathcal{S}$  est un ouvert relatif<sup>35</sup> de  $\mathbb{S}$  et que le support de  $f$  est inclus dans  $\overline{B(0,1)}$ . La condition  $T \geq T_s^o$  est alors équivalente à la stabilité lipschitzienne de la reconstruction. Plus précisément, si  $T \geq T_s^o$ , alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout objet  $f \in H_0^1(B(0,1))$ , on a :

$$\|f\|_{H_0^1} \leq C \|\mathcal{W}f\|_{H^1},$$

et si  $T < T_s^o$ , alors, pour tout  $C, s_1, s_2 > 0$ , il existe  $f \in \mathcal{C}^\infty(B(0,1))$  tel que :

$$\|f\|_{H^{s_1}} \geq C \|\mathcal{W}f\|_{H^{s_2}}.$$

Après avoir ainsi présenté les propriétés majeures du problème de la TTA (unicité et stabilité de la reconstruction et conditions de rang), nous pouvons nous intéresser aux formules et algorithmes d'inversion, auxquels est consacrée la section suivante.

34. Typiquement, le théorème 6.4 de [56] propose une hypothèse similaire à celle de vitesse non-trapping, mais plus précise, qui exprime l'idée que toute géodésique de la métrique  $c^{-1}$  sur  $\Omega$  doit atteindre le domaine observé pour permettre l'observabilité.

35. C'est-à-dire qu'il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\mathcal{S} = \mathcal{O} \cap \mathbb{S}$ .

## IV Méthodes usuelles en TTA

Nous nous attardons dans cette section sur la description des méthodes d'inversion de notre problème, c'est-à-dire sur des formules et algorithmes permettant la reconstruction de l'objet  $f$  à partir des données  $p^o$ .

### Rappel

On souhaite résoudre le Problème (III.1.1), que l'on reformule ici.

Sachant que l'onde de pression  $p$  émise par le corps vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{tt} - c(x)\Delta p = 0 \text{ sur } (0,T) \times \Omega, \\ p(0,\cdot) = f, \\ p_t(0,\cdot) = 0, \\ p^o = p|_{(0,T) \times \mathcal{S}} = \mathcal{W}f, \end{array} \right. \quad (\text{IV.0.1})$$

et que l'on connaît  $c$  et  $p^o$ , déterminer l'objet  $f$ .

La solution  $p$  était notée  $p_{\text{exacte}}$  précédemment. Nous nous passons de l'indice qui n'est pas utile ici.

Parmi les nombreux articles survolant le sujet, nous conseillons particulièrement [6, 145, 258]. Le volume 23 de la revue *Inverse Problems*, qui est consacré à la TTA [2], peut aussi fournir un bon aperçu de l'état de l'art en 2007. Parue plus récemment, la thèse de Xavier Bonnefond [41] est aussi une excellente source.

Après avoir évoqué les premières méthodes de résolution ayant été développées ainsi que leur récentes améliorations (des méthodes dites de *résolution en domaine temporel ou fréquentiel*), en Sous-section IV.1 page 64, nous consacrerons la section suivante (Sous-section IV.2 page 71) à la *transformée de Radon sphérique*, celle-ci ayant été à l'origine de très nombreux résultats en TTA (comme nous l'avons déjà vu en Section III.3.1 page 49) et pour laquelle ont été obtenues des formules d'inversion exacte. Les hypothèses nécessaires à la validité de ces résultats étant trop lourdes pour convenir à de nombreuses situations pratiques, il est intéressant de se tourner vers d'autres techniques pour obtenir des méthodes de reconstruction.



Nous présenterons donc ensuite les deux principales méthodes permettant ce dépassement : le *développement des solutions en séries de Fourier généralisées* – Sous-section IV.3 page 85 – et la *méthode de renversement temporel*, pour lesquels on peut considérer des vitesses variables et des surfaces d’observation closes régulières quelconques – Sous-section IV.4 page 87.

D’autres méthodes ont été développées sur lesquelles nous ne nous attarderons pas, telle l’application de la méthode de quasi-réversibilité à la TTA présentée dans [62].

Jusqu’à nouvel ordre, nous nous intéressons au cas d’un espace tridimensionnel ( $n = 3$ ) et aux observations complètes entourant la source, la vitesse étant supposée constante et normalisée :  $c \equiv 1$ .

**Remarque IV.0.22.** *D’autres catégories de méthodes sont largement sous-représentées en TTA, telles les méthodes de reconstruction itératives. Nous en définirons un certain nombre au cours du Chapitre B. Si ces méthodes se montreront parfois coûteuses, tant en volume de mémoire occupé qu’en nombre de calculs nécessaires, elles font cependant preuve d’une robustesse remarquable (tant vis-à-vis du bruit que de l’incomplétude des données) et peuvent fournir des reconstructions de très bonne qualité. Nous mettrons ces propriétés en évidence, que d’autres auteurs ont aussi constaté [15, 18, 17, 42, 164, 189].*

*Par opposition aux méthodes itératives, nous nommerons exactes les méthodes usuelles présentées dans cette section.*

**Remarque IV.0.23.** *Afin de permettre au lecteur d’apprécier le coût numérique des méthodes présentées ci-dessous, précisons quelques points au sujet de la complexité des méthodes de la TTA. Étant donné un domaine observé (hyper-)cubique et une résolution  $\delta_x$ , on note  $N_x$  le nombre de pixels selon une direction donnée. Il y a donc  $N_x^n$  inconnues à déterminer, où  $n$  est la dimension d’espace. On cherche donc, idéalement, à définir des méthodes fonctionnant en  $O(N_x^n)$  opérations. Nous verrons que jusqu’alors, les méthodes rapides en TTA sont d’une complexité de l’ordre de  $O(N_x^{n+1})$ , voire  $O(N_x^n \log^\alpha N_x)$ ,  $\alpha > 0$ , pour les plus performantes.*

## IV.1 Premières méthodes de résolution pour capteurs ponctuels et récentes améliorations

### Premières méthodes

Depuis 1980 et jusqu'au milieu des années 2000, seuls des *développements en séries* de solutions ont été disponibles (par décomposition harmonique de l'objet et des données). Ceux-ci permettaient l'obtention de reconstructions, mais les algorithmes qui en résultaient étaient plutôt coûteux et très instables. Nous nous référons ici aux travaux fondateurs de Norton : en particulier l'article [178] pour le cas bidimensionnel, offrant un algorithme d'une complexité évaluée en  $O(N_x^3)$ , et celui portant sur le cas tridimensionnel [179], comprenant les géométries planaires, cylindriques et sphériques, en  $O(N_x^6)$ .

Ces méthodes reposent sur la définition de solutions à l'aide des *fonctions de Green* ainsi que sur la *décomposition harmonique* de l'objet  $f$  et des données  $p^o$ , et elles fournissent des *rétroprojections* exactes et filtrées. Ces dernières ont l'intérêt de procurer une meilleure stabilité à la reconstruction en cas de données bruitées. On parle de *rétroprojection* car ces formules fournissent l'objet à partir des données lorsque celles-ci consistent en des « projections » de l'objet sur des sphères.

Les travaux de Norton ont été repris et améliorés au début des années 2000 avec les formules de [256] en géométrie cylindrique, de [142, 259] en planaire et de [262] en cylindrique, lesquelles sont appliquées avec succès à des données réelles. Plus tard, ces formules trouveront une expression et une preuve inédites et communes dans [16].

**Remarque IV.1.1.** *Les méthodes de reconstruction en domaine fréquentiel proposées dans [259, 262] répondent à un problème plus général que le nôtre : en effet, il n'est pas nécessaire de supposer que l'impulsion est un Dirac pour rester dans le domaine de validité de la formule de reconstruction proposée. Aussi elle permet de reconstruire la source du phénomène – le second membre  $F$  de l'équation (II.2.8) – plutôt qu'une condition initiale.*

Indépendamment des résultats précédents, Popov et Sushko [196, 197] ont proposé un procédé ramenant le problème de l'inversion de la transformée de Radon sphérique à un problème approché utilisant les formules d'inversion

de la transformée de Radon classique. De nombreux types d'observations sont alors pris en compte (dont des observations incomplètes, sous hypothèse d'observabilité) et une estimation de la qualité de l'approximation est fournie.

### Améliorations récentes

C'est inspiré de ces premières méthodes que Kunyansky a récemment proposé une technique de reconstruction rapide [147]. Elle repose sur la définition d'une fonction explicite à l'aide des fonctions de Green et de la décomposition des fonctions en séries à l'aide d'une décomposition en fonctions propres du Laplacien de Dirichlet pour des observations ponctuelles sur un cercle (ou une sphère).

Ainsi, sans perdre en qualité, la reconstruction bidimensionnelle est obtenue en  $O(N_x^2 \log N_x)$  opérations, et la tridimensionnelle en  $O(N_x^4)$ , dont une version optimisée peut fournir une complexité de  $O(N_x^3 \log^2 N_x)$  en grandes dimensions. En Sous-section IV.2.2 page 73, nous verrons comment définir une méthode tridimensionnelle plus rapide que cette dernière à partir de la présente méthode bidimensionnelle, que nous détaillons ci-dessous, d'après [147].

On suppose que  $n = 2$ ,  $T = \infty$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$  et que les données sont ponctuelles, complètes et que  $\mathcal{S} = \mathbb{S}$  est le cercle unité  $C(0,1)$  (quitte à normaliser le problème). On note  $B = \overline{B(0,1)}$  le disque unité fermé euclidien de  $\mathbb{R}^2$ .

Commençons par énoncer un résultat issu de [11], très similaire à celui proposé dans [178], qui nous sera utile par la suite :

**Proposition IV.1.2.** FORMULES D'INVERSION DE NORTON MODIFIÉES. On note respectivement  $J_k$  et  $H_k$  les fonctions de Bessel et de Hankel d'ordre  $k$  de première espèce<sup>36</sup>. On considère un objet  $f$  dans  $C_K^\infty(B)$ <sup>37</sup>, les données correspondantes  $p^\circ$  (voir le Problème (IV.0.1)) et la transformée de Fourier inverse en variable temporelle  $\tilde{p}^\circ$  de cette dernière. Les coefficients de Fourier  $f_k$

36. Nous renvoyons le lecteur à la lecture de [63] pour les résultats engageant les fonctions de Bessel ou de Hankel. Les définitions des transformées de Fourier directe et inverse, ainsi que des coefficients de Fourier d'une fonction, sont rappelées dans la preuve qui succède au présent énoncé.

37. Étant donné deux ensembles  $E \subset F$ , nous n'explicitons pas la distinction entre une fonction  $f$  définie sur  $E$  et son extension à  $F$  par 0

et  $\check{p}_k^o$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , de  $f$  et  $\check{p}^o$  (respectivement) vérifient alors :

$$f_k(r) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\check{p}_k^o(\tau)}{H_{|k|}(\tau)} J_{|k|}(\tau r) d\tau. \quad (\text{IV.1.2})$$

Contrairement aux formules d'inversion de Norton [178], celles de la Proposition IV.1.2 page précédente n'impliquent que des fonctions de Hankel aux dénominateurs. Ainsi, là où les premières généraient des instabilités dues aux zéros (réels) des fonctions de Bessel<sup>38</sup>, les secondes évitent cet écueil, puisque les fonctions  $H_{|k|}$  ne s'annulent pas sur  $\mathbb{R}_+$ . Notons qu'une technique proposée dans [102] – y consulter le théorème 3.1 – permet aussi de pallier les instabilités dues à la division par zéro dans les formules de Norton.

PREUVE. Exposons les grandes lignes de la démonstration originelle proposée dans [147] (quelque peu modifiée ici) en trois étapes :

1. On note  $G$  la fonction de Green de l'équation des ondes sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$G(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - x^2}}, & \text{si } t \geq |x|, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . On peut ainsi définir la *solution explicite* de l'équation (IV.0.1) comme suit :

$$p(t,y) = \int_B f(x) \frac{\partial}{\partial t} G(t,y-x) dx, \quad (t,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2,$$

et, de même, les données de notre problème vérifient :

$$p^o(t,y) = \int_B f(x) \frac{\partial}{\partial t} G(t,y-x) dx, \quad \text{pour } (t,y) \in (0,\infty) \times \mathcal{S}.$$

---

38. Les instabilités sont causées par les approximations numériques et par la présence de bruit dans les données ; aussi la validité des formules d'inversion de Norton fournit un critère pour que les données appartiennent à l'image de la transformée de Radon circulaire  $\mathcal{R}_C$ , voir [7].

2. Notons  $\check{p}^o$  et  $\mathbf{G}$  les *transformées de Fourier inverses en variable temporelle* respectives de  $p^o$  et  $\mathbf{G}$ , définies par :

$$\check{p}^o(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}_+} p^o(t, y) e^{it\tau} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{G}(t, y) e^{it\tau} dt.$$

La fonction  $\mathbf{G}$  vérifie alors :

$$\mathbf{G}(\tau, x) = \frac{i}{4} H_0(\tau|x|),$$

où la fonction de Hankel  $H_0$  connaît le développement suivant, d'après le théorème d'addition des fonctions de Hankel :

$$H_0(\tau|y-x|) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{|k|}(\tau) J_{|k|}(\tau r) e^{ik(\varphi-\theta)},$$

en notant  $x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in B$  et  $y = (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{S}$ .

Par ailleurs, en revenant à  $\check{p}^o$ , il vient directement :

$$\check{p}^o(\tau, y) = -i\tau \int_B f(x) \mathbf{G}(\tau, y-x) dx = \frac{\tau}{4} \int_B f(x) H_0(\tau|y-x|) dx.$$

3. Puisque  $f$  et  $\check{p}^o$  sont respectivement définies sur  $B$  et  $\mathbb{S}$ , considérons-les telles des fonctions de  $(r, \theta)$  et de  $\varphi$  respectivement et développons-les en *série de Fourier par rapport à leur variable angulaire* :

$$f(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(r) e^{ik\theta}, \quad \text{avec} \quad f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

et :

$$\check{p}^o(\tau, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{p}_k^o(\tau) e^{ik\varphi}, \quad \text{avec} \quad \check{p}_k^o(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{p}^o(\tau, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi,$$

et appliquons cette transformation à la formule précédente, pour en déduire l'expression des coefficients de Fourier de  $\check{p}^o$  en fonction de

ceux de  $f$  :

$$\check{p}_k^{\check{o}}(\tau) = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\tau r f(r, \theta)}{8\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} H_{|l|}(\tau) J_{|l|}(\tau r) e^{il(\varphi - \theta)} dr d\theta \right] e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Après inversions successives des signes somme pour intégrer par rapport à  $\varphi$ , puis par rapport à  $\theta$ , il vient :

$$\check{p}_k^{\check{o}}(\tau) = \frac{\pi}{2} \tau H_{|k|}(\tau) \int_{\mathbb{R}_+} f_k(r) J_{|k|}(\tau r) r dr,$$

où l'on reconnaît la transformée de Hankel  $\mathcal{H}_k$  définie, pour une fonction  $f$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , par :

$$\mathcal{H}_k[f] : \tau \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(r) J_k(\tau r) r dr,$$

laquelle est sa propre inverse, d'où le résultat annoncé.  $\square$

Les formules établies dans la Proposition IV.1.2 page 65 promettent donc une reconstruction de l'objet à partir de ses coefficients de Fourier, reste à définir une méthode de calcul rapide de ceux-ci. La contribution de Kunyansky consiste en l'élaboration d'une méthode alternative exposée dans les lignes suivantes et extraite de [147].

On commence par utiliser un développement de Jacobi-Anger afin de reformuler les fonctions de Bessel (voir [63]). Soit l'onde plane  $W$  définie par :

$$W(r, \theta, \tau, \varphi) = e^{ir\tau \cos(\theta - \varphi)},$$

alors :

$$W(r, \theta, \tau, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} i^{|k|} J_{|k|}(\tau r) e^{ik(\theta - \varphi)}.$$

On en déduit :

$$J_{|k|}(\tau r)e^{ik\theta} = \frac{(-i)^{|k|}}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(r,\theta,\tau,\varphi)e^{ik\varphi} d\varphi.$$

Or les formules d'inversion (IV.1.2) induisent la réécriture suivante de  $f$  :

$$f(r,\theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \frac{p_k^o(\tau)}{H_{|k|}} J_{|k|}(\tau r)e^{ik\theta} d\tau,$$

d'où :

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-i)^{|k|} p_k^o(\tau)}{\tau H_{|k|}(\tau)} e^{ok\varphi} \right] W(r,\theta,\tau,\varphi) \tau d\tau d\varphi,$$

ce qui s'écrit encore :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\hat{x}) e^{ix \cdot \hat{x}} d\hat{x},$$

grâce au changement de variable  $\hat{x}(\tau,\varphi) = (\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi)$ , avec :

$$W(x(r,\theta), \hat{x}(\tau,\varphi)) = e^{ix \cdot \hat{x}},$$

et :

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-i)^{|k|} p_k^o(\tau)}{\tau H_{|k|}(\tau)} e^{ik\varphi}.$$

Nous avons donc écrit  $f$  comme l'inverse de sa transformée de Fourier 2D, dont la formule précédente permet le calcul, sauf pour  $\tau = 0$ . Dans ce cas, le calcul suivant est proposé :

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^1 r f_0(r) dr = \int_0^1 r \int_0^\infty \frac{2p_0^o(\tau)}{\pi H_0(\tau)} J_0(\tau r) d\tau dr \\ &= \int_0^\infty \frac{2p_0^o(\tau)}{\pi H_0(\tau)} \left[ \int_0^1 r J_0(\tau r) dr \right] d\tau = \int_0^\infty \frac{2p_0^o(\tau)}{\pi \tau H_0(\tau)} J_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Les étapes décrites ci-dessus composent l'algorithme de reconstruction rapide 2D de Kunyansky, que l'on peut résumer ainsi :

**Algorithme IV.1.3.** RÉSOLUTION RAPIDE DE (IV.0.1) 2D :

1. Calcul de la transformée de Fourier inverse en temps  $\check{p}^o(\tau, y)$  de  $p^o(t, y)$  par FFT 1D.
2. Calcul des coefficients de Fourier en espace  $\check{p}_k^o(\tau)$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , de  $\check{p}^o(\tau, y) = \check{p}^o(\tau, \varphi)$  par FFT 1D.
3. Calcul des coefficients  $\alpha_k(\tau) = \frac{(-i)^{|k|} \check{p}_k^o(\tau)}{\tau H_{|k|}(\tau)}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Calcul de la transformée de Fourier inverse  $\hat{f}(\tau, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(\tau) e^{ik\varphi}$ , pour  $\tau \neq 0$ , par FFT 1D.
5. Calcul de  $\hat{f}(0) = \int_0^\infty \frac{2p_0^o(\tau)}{\pi\tau H_0(\tau)} J_1(\tau) d\tau$ .
6. Interpolation de  $\hat{f}(\hat{x}(\tau, \varphi))$  de la grille polaire vers une grille cartésienne.
7. Reconstruction de la transformée inverse  $f$  de  $\hat{f}$  par FFT 2D.

**Complexité de l'algorithme :** supposons que la grille spatiale est  $N_x \times N_x$  et que le nombre de capteurs et les grilles discrétisant  $\tau$  et  $\varphi$  sont en  $O(N_x)$  alors :

- par une méthode des trapèzes, l'étape 5 coûte  $O(N_x)$  opérations ;
- le calcul des coefficients  $\alpha_k$  nécessite  $O(N_x^2)$  opérations ;
- les FFT, qui s'évaluent en  $O(N_x^2 \log N_x)$ , induisent les étapes les plus coûteuses ;
- enfin, reste l'interpolation, pour laquelle une méthode linéaire pour  $\varphi$  et une cubique pour  $\tau$  est proposée, pour un coût de  $O(N_x^2)$ , tout en ajoutant qu'une précision plus importante peut être obtenue en usant la NUFFT (pour *Nonuniform FFT*), pour un coût de  $O(N_x^2 \log N_x)$ , ce qui ne modifie pas l'ordre du coût global de l'algorithme.

Finalement, le coût asymptotique de l'algorithme s'évalue en  $O(N_x^2 \log N_x)$ .

Comme nous l'avons annoncé, il est aisé de généraliser cette méthode à la dimension 3, mais nous préférons présenter d'autres méthodes afin de continuer à introduire les divers outils dont il est couramment fait usage en TTA.



### Observations planaires

Avec ces premières méthodes, on constate aussi que c'est dans le cas d'une surface d'observation planaire infinie et composée de capteurs ponctuels que le problème inverse de la TTA est le plus simple et bien étudié. Des solutions peuvent alors être définies avec la transformée de Fourier et des reconstructions très performantes et stables peuvent être menées [19, 85, 171]. Dans une réalisation plus récente, l'article [104] propose une méthode dont la complexité atteint remarquablement  $O(N_x^3 \log N_x)$  en dimension 3.

Ce cadre pose cependant problème en regard des conditions pratiques d'observation, où un plan infini ne peut qu'être approché ou simulé. Rappelons que ce problème est expérimentalement résolu dans [67] : les auteurs proposent un dispositif d'observation réfléchissant les ondes sur des parois perpendiculaires au plan d'observation, de sorte que l'objet est virtuellement symétrisé puis périodiquement reproduit à l'infini, ce qui permet de simuler un plan d'observation infini.

## IV.2 Transformées de Radon et rétroprojections

Au cours des années 2000, l'usage de la *transformée de Radon* inspire la majeure partie des travaux et des méthodes de reconstruction inventées en TTA.

En effet, une variante dite « sphérique » de la transformée de Radon, notée  $\mathcal{R}_S$ , est définie et le problème inverse est ramené à l'inversion de  $\mathcal{R}_S$ , puisque  $\mathcal{W} = \mathcal{R}_S$ . Cet opérateur est proche d'un opérateur d'intégration en moyennes sphériques (en un sens précisé ci-après). Le principe de la méthode afférente est alors de reconstruire un objet (bidimensionnel ou tridimensionnel) à partir de projections de dimension inférieure des ondes qu'il a émises.

Les résultats de la prochaine sous-partie, qui concernent la transformée de Radon « classique », sont ceux qui demandaient à être adaptés au problème de la TTA et qui justifient *a priori* l'attention portée à la transformée de Radon sphérique.

### IV.2.1 Transformée de Radon

La transformée de Radon (classique) est un outil très répandu en tomographie assistée par ordinateur, ce qui est justifié par deux résultats principaux bien connus et présentés ci-dessous : l'un concernant sa relation avec la transformée de Fourier et l'autre portant sur son inversion. Le lecteur intéressé pourra se référer à [117, 170] pour plus de détails.

**Définition IV.2.1.** *La transformée de Radon est l'opérateur, couramment noté  $R$ , défini sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans  $L^1(\mathbb{S} \times \mathbb{R})$  par :*

$$Rf(\theta, r) = \int_{\langle \theta, x \rangle = r} f(x) d\sigma,$$

pour tout  $(\theta, r) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ .

À une fonction  $f$ , cet opérateur associe donc son intégrale sur les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$ .

Un résultat fondamental sur cette transformée concerne sa relation avec la transformée de Fourier exprimée dans le théorème suivant :

**Théorème IV.2.2.** **FOURIER SLICE THEOREM** [109, 170]. Si l'on note  $\mathcal{F}_r$  la transformée de Fourier relativement à la variable radiale  $r$  définie par :

$$\mathcal{F}_r Rf(\theta, r) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi r \rho} Rf(\theta, \rho) d\rho, \text{ pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

alors :

$$\mathcal{F}_r Rf(\theta, r) = \mathcal{F}f(r\theta), \text{ pour tout } (\theta, r) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}.$$

Enfin, puisque la formule énoncée permet de reconstruire l'objet  $f$  à partir de la donnée des projections  $Rf$ , la formule d'inversion ci-dessous montre bien l'utilité de la transformée de Radon pour la résolution de problèmes inverses en imagerie :

**Théorème IV.2.3.** **FORMULE D'INVERSION PAR RÉTROPROJECTION** [109, 170]. Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  :

$$f(x) = \frac{(-\Delta)^{(n-1)/2}}{c_n} R^* Rf(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $R^*$  est l'adjoint de  $R$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $c_n = (4\pi)^{(n-1)/2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ .

Le principal défaut de l'inversion de la transformée de Radon est sa sensibilité à la présence de bruit dans les données. Aussi des techniques approchées, discrétisées et stabilisées, ont été développées : les algorithmes des rétroprojections filtrées (RPF) [80, 170, 171], très utilisés en imagerie (en TDM, TEMP ou TEP, notamment).

Plus récemment, des versions en ont été adaptées à la transformée de Radon sphérique et des problèmes similaires ont dû être résolus, ce dont nous traitons dans les prochaines sous-sections.

#### IV.2.2 Observations linéaires intégrales, lien avec les transformées de Radon

##### Présentation

Le type de données dit « linéaire en moyenne » ou celui, similaire, appelé « intégral » doivent être appréhendés différemment des autres en ceci qu'ils ramènent le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel qui, une fois résolu, fournit des projections intégrales ou en moyenne de la solution. Ces dernières doivent donc être analysées ultérieurement pour retrouver la reconstruction attendue.

En effet, lorsque l'onde de pression tridimensionnelle est enregistrée sur des droites sous forme d'intégrales (le long de celles-ci), les moyennes obtenues vérifient encore l'équation des ondes, mais en dimension 2. Le problème est donc ramené au problème de la TTA bidimensionnel portant sur les moyennes des solutions le long de lignes. Une fois résolu ce problème, les reconstructions en moyenne sont ensuite inversées au moyen de la transformée de Radon bidimensionnelle pour obtenir la reconstruction relative au problème tridimensionnel.

Un des avantages de cette méthode est qu'il n'est pas supposé que le dispositif d'enregistrement pratique est une approximation du théorique (comme dans le cas des capteurs ponctuels, par exemple) : la ligne d'enregistrement fournit effectivement une intégrale de l'onde de pression le long de cette ligne et, lorsque les mesures sont assurées au moyen de rayons lumineux perturbés

par l'onde sonore, ils peuvent être considérés comme des lignes droites sans épaisseur au vu de la résolution de la méthode (ainsi que nous l'avons expliqué précédemment). Ainsi, l'effet de flou dû à ces approximations n'apparaît pas et la résolution de la reconstruction en est améliorée.

Ce type de dispositif d'enregistrement a été l'objet de mises en œuvre expérimentales présentées dans les articles cités ci-dessous, avec des résultats remarquables. Nous traitons le procédé d'inversion bidimensionnel ailleurs (voir la sous-section précédente et les méthodes d'inversion de la transformée de Radon sphérique ci-dessous), et nous renvoyons le lecteur intéressé à la lecture de [50, 51, 52, 98, 102, 147, 183, 184] pour un exposé plus détaillé de méthodes de reconstruction et d'expérimentations associées à ce type de données.

### Problème de la TTA pour données linéaires intégrales

Supposons que  $n = 3$ ,  $c \equiv 1$  et  $\mathcal{S} = \mathbb{S}$ . On note  $(e_1, e_2, e_3)$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On suppose que l'onde de pression  $p$  solution du Problème (IV.0.1) est enregistrée sous forme d'intégrales le long de lignes droites dirigées par le vecteur  $u(\alpha) = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \in \text{Vect}(e_1, e_3)$  pour  $\alpha \in [0, \pi]$ , que ces lignes forment un cylindre de rayon 1 et que l'axe du cylindre passe par l'origine.

Si on considère le vecteur  $n(\alpha) = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$  orthogonal à  $u(\alpha)$  dans  $\text{Vect}(e_1, e_3)$ , alors les droites d'enregistrement des données sont dirigées par  $u(\alpha)$  et passent par le point  $A(\alpha, \beta) = \sin \beta n(\alpha) + \cos \beta e_2$  pour un certain  $\beta \in [0, 2\pi]$ . On note  $D(\alpha, \beta)$  ces droites, qui sont les capteurs de cette méthode, supposés infinis pour conserver une présentation simple.

Étant donnés  $\alpha \in [0, \pi]$  et  $\beta \in [0, 2\pi]$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , le capteur  $D(\alpha, \beta)$  enregistre la valeur :

$$\overline{p}^\circ(t, \alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}} p(t, A(\alpha, \beta) + su(\alpha)) ds,$$

qui s'écrit encore, pour des raisons données plus bas :

$$\overline{p}_\alpha^\circ(t, y) = \int_{\mathbb{R}} p(t, y_1 n(\alpha) + y_2 e_2 + su(\alpha)) ds,$$

pour  $y = (y_1, y_2) = (\cos \beta, \sin \beta)$ . Le problème devient alors le suivant :

Considérant un objet  $f \in L^2(B(0,1))$ , le reconstruire à partir des données :

$$\overline{p^\rho} \text{ définies sur } \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]. \quad (\text{IV.2.3})$$

On se propose de le résoudre en deux étapes :

- Tout d'abord, pour tout  $\alpha \in [0, \pi]$ , déterminer  $\overline{p_\alpha^\rho}$ .
- Ensuite, en déduire l'objet  $f$ .

### Méthode de reconstruction

Afin de résoudre ce problème, un algorithme rapide a été proposé dans la continuité de celui que nous avons présenté en bidimensionnel circulaire ponctuel ci-dessus [147]. Il repose sur les considérations suivantes : d'une part, si l'on considère la fonction  $\overline{p_\alpha^\rho}$  de la variable  $(t, y_1, y_2)$ , alors elle est solution de l'équation des ondes en dimension 2 avec, pour conditions initiales :

$$\overline{p_\alpha^\rho}(0, y_1, y_2) = \overline{f_\alpha}(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}} f(y_1 n(\alpha) + y_2 e_2 + su(\alpha)) ds,$$

et  $\overline{p_\alpha^\rho}'(0, \cdot, \cdot) = 0$ . Il suffit donc de résoudre (IV.0.1) en espace bidimensionnel pour déterminer  $\overline{f_\alpha}$ . D'autre part, si l'on connaît  $\overline{f_\alpha}$  pour tout  $\alpha \in [0, \pi]$ , alors on sait reconstruire  $f$  par inversion de la transformée de Radon 2D puisque  $\overline{f_\alpha}(y_1, y_2)$  correspond à la transformée de Radon de la restriction de la fonction  $f$  au plan  $x_2 = y_2$ .

À l'aide de l'algorithme IV.1.3 page 69, le premier point est résolu efficacement. Quant au second, Kunyansky évite l'inversion de la transformée de Radon 2D en remarquant qu'à la cinquième étape de l'algorithme, étant donné  $\alpha$  dans  $[0, \pi]$ ,  $\widehat{f_\alpha}(\hat{x})$  est déterminé pour tout  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ , or  $\widehat{f_\alpha}$  est la transformée de Fourier des projections intégrales de  $f$  sur le plan orthogonal à  $u(\alpha)$ . Ainsi, le *Fourier Slice Theorem* IV.2.2 page 72 permet d'affirmer que  $\widehat{f_\alpha}$  consiste en les coupes 2D de la transformée de Fourier 3D de  $f$  dans les plans orthogonaux à  $u(\alpha)$ , pour  $\alpha \in [0, \pi]$ . Finalement, l'inversion de la transformée de Radon 2D est évitée.

Résumons la manière de procéder proposée dans [147], qui fournit un algorithme de résolution rapide (un des plus rapides à ce jour, à notre connaissance) de notre problème.

**Algorithme IV.2.4.** RÉOLUTION RAPIDE DE (IV.2.3) 3D :

1. Pour tout  $\alpha \in [0, \pi]$ , déterminer  $\widehat{f}_\alpha$  à partir des données  $\overline{p}_\alpha^o$  en effectuant les cinq premières étapes de l'algorithme IV.1.3 page 69.
2. Interpoler  $\widehat{f}_\alpha$  sur une grille cartésienne 3D pour obtenir  $\hat{f}$ .
3. Calculer  $f$  à partir de  $\hat{f}$  par FFT 3D.

**Complexité de l'algorithme :** supposons que la taille de la grille spatiale est  $N_x \times N_x \times N_x$  et que le nombre de capteurs linéaires, de directions pour les cylindres, ainsi que les grilles discrétisant  $\tau$  et  $\varphi$  s'évaluent en  $O(N_x)$  alors :

- la première étape de l'algorithme s'évalue en  $O(N_x^3 \log N_x)$  ;
- pour l'interpolation de  $\widehat{f}_\alpha(\hat{x}(\tau, \varphi))$  de la grille sphérique vers une grille cartésienne, l'auteur choisit une interpolation en  $O(N_x^3)$ , cubique dans la direction radiale et bilinéaire en les variables angulaire ;
- la FFT 3D coûte  $O(N_x^3 \log N_x)$  opérations.

**Conclusion :** l'algorithme coûte  $O(N_x^3 \log N_x)$  et est théoriquement valide sous les hypothèses de vitesse constante, d'objet contenu dans la surface d'observation, qui doit être telle que le problème projeté bidimensionnel soit à données complètes.

**Remarque IV.2.5.** STABILITÉ DE LA MÉTHODE. *Dans les résultats numériques présentés dans [147], la méthode se montre particulièrement stable vis-à-vis de l'insertion de bruit dans les données. Pour expliquer ce phénomène, il suffit de remarquer que les opérations effectuées consistent en : des isométries (les transformations de Fourier directes et inverses, qui sont donc stables, contrairement aux transformations de Radon, pour des raisons évoquées en Section III.3.1 page 49) et la multiplication de  $\hat{p}_k^o$  par un facteur qui tend vers 0 lorsque  $\tau \rightarrow \infty$  (troisième étape de IV.1.3 page 69).*

Puisque les droites sur lesquelles sont enregistrées les intégrales de l'onde de pression sont disposées le long d'un cylindre au sein duquel est placé

l'objet, l'appellation « données cylindriques » est aussi courante dans la littérature consacrée à ce sujet. De même, une démarche similaire permet de considérer des capteurs surfaciques [52, 103].

### IV.2.3 Transformée de Radon sphérique : inversions, rétroprojection et séries

La transformée de Radon sphérique a été au centre de la majeure partie des travaux en TTA dans les années 2000. Pour rester dans le cadre de validité des formules liées à cette transformée, nous supposons que les solutions respectent le modèle d'équation d'onde non atténué et à vitesse constante, et nous discuterons des adaptations possibles de ces hypothèses au cas par cas.

Cette sous-section est inspirée des articles [6, 50, 89, 90, 102, 144, 145, 172, 192].

#### Cadre, rappels et compléments

À nouveau, la vitesse est supposée constante et normalisée ( $c \equiv 1$ ), on suppose que  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et que l'objet est contenu dans  $B = \overline{B(0,1)}$  et les observations sont complètes telles que  $\mathcal{S} = \mathbb{S} = S(0,1)$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $d\sigma$  la mesure surfacique de  $\mathbb{S}$  et  $\omega_n$  sa mesure. L'horizon de temps reste à définir.

Dans ce cadre, voici les opérateurs dont nous ferons usage :

1. L'opérateur  $\mathcal{W}$  qui associe les données  $p^o$  du Problème (IV.0.1) à l'objet  $f$ .
2. L'opérateur  $\mathcal{W}_t = \partial_t \mathcal{W}$  qui, à l'objet  $f$ , associe les données  $p^o$  du problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} p_{tt} - \Delta p = 0 \text{ sur } (0,T) \times \Omega, \\ p(0,\cdot) = 0, \\ p_t(0,\cdot) = f. \end{array} \right.$$

3. La transformée de Radon sphérique  $\mathcal{R}_S$  qui associe à l'objet  $f$  ses projections intégrales sur les sphères centrées sur  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{R}_S f(t, x) = \int_{\mathbb{S}} f(x + ty) t^{n-1} d\sigma(y).$$

4. L'opérateur d'intégration en moyennes sphériques  $\mathcal{M}_S$  qui, à l'objet  $f$ , associe ses moyennes sur les sphères centrées sur  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{M}_S f(t, x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}} f(x + ty) d\sigma(y).$$

Nous avons déjà vu qu'un lien étroit existe entre les problèmes concernant l'inversion de chacun de ces opérateurs, par le biais des formules de Poisson-Kirchhoff, que nous rappelons ici :

$$\mathcal{W}f(t, y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(n/2)} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \mathcal{M}_S f(t, y), \text{ si } n \text{ est impair,}$$

et :

$$\mathcal{W}f(t, y) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \frac{r^{n-1} \mathcal{M}_S f(r, y)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \text{ si } n \text{ est pair.}$$

On peut considérer qu'il existe deux grandes classes de méthodes pour inverser la transformée de Radon, et nous les aborderons successivement. Ce sont : les formules d'inversion du type rétroprojection et le développement en série dans des bases bien définies.

### Inversion exacte par rétroprojection filtrée

L'obtention de formules d'inversions exactes de la transformée de Radon sphérique  $\mathcal{R}_S$  marque une étape importante dans la résolution du problème de la TTA.

Il faut attendre l'article [88] de Finch, Patch et Rakesh de 2004 pour voir apparaître ces formules, lesquelles ne sont alors valables qu'en dimensions impaires. Elles ne seront étendues aux dimensions paires que quelques années plus tard dans [87], tandis que d'autres travaillent à l'élaboration de formules



indépendantes (tridimensionnelles [257] ou en dimension  $n$  quelconque [148], ces deux dernières étant équivalentes lorsque  $n = 3$ ). Plus tard, de nouvelles preuves de ces formules sont obtenues dans [172], où elles apparaissent comme appartenant à une classe beaucoup plus générale de formules d'inversion.

Ces formules sont couramment appelées *rétroprojections filtrées* car des termes de dérivations (temporelles et/ou spatiales) y jouent le rôle de filtre tandis que les fonctions sont intégrées sur les sphères passant par le point d'intérêt centrées sur la surface d'observation, processus inverse d'une projection.

En effet, Nguyen montre dans l'article [172] que les formules d'inversion prouvées jusqu'alors sont identiques à addition d'un terme près (résumées dans son corollaire 1.5 du théorème 1.1) et que ce terme est nul (théorème 1.4, concernant le rang de  $\mathcal{W}$ ). Il explicite ainsi le lien entre les différents opérateurs mis en jeu dans notre problème :  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{W}_t$ ,  $\mathcal{R}_S$  et  $\mathcal{M}_S$  dans des résultats que nous résumons dans le théorème IV.2.6 page suivante.

Commençons par introduire quelques outils et notions permettant de généraliser la méthode utilisée dans la preuve de la Proposition IV.1.2 page 65.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque, on suppose que  $T = \infty$  et  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . On note  $\mathbf{G}$  la fonction suivante :

$$\mathbf{G} : (\tau, x) \mapsto \frac{i}{4} \left( \frac{\tau}{2\pi \|x\|} \right)^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}(\tau \|x\|),$$

où  $H_{\frac{n-2}{2}}$  représente la fonction de Hankel de première espèce d'ordre  $\frac{n-2}{2}$ , de sorte que la fonction  $(x, y) \mapsto \mathbf{G}(\tau, y - x)$  est la fonction de Green solution de l'équation de Helmholtz  $\Delta \mathbf{G} + \tau^2 \mathbf{G} = -\delta(y - x)$ .

Soit un objet  $f \in \mathcal{C}_K^\infty(B)$ . On note  $p^o = \mathcal{W}f$  les données correspondantes, définies sur  $(0, \infty) \times \mathcal{S}$  par l'équation (IV.0.1). On étend cette fonction à  $\mathbb{R}$  par parité en variable temporelle  $t$  et, par abus, nous la notons toujours  $p^o$ . On définit alors sa transformée de Fourier inverse en  $t$  :

$$\check{p}^o(\tau, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} p^o(t, y) e^{i\tau t} dt.$$

On peut alors énoncer les formules d'inversion de Nguyen, qui sont l'objet du théorème suivant :

**Théorème IV.2.6.** FORMULES D'INVERSION DE NGUYEN. On considère un objet  $f \in \mathcal{C}_K^\infty(B)$  et ses observations  $p^o = \mathcal{W}f$ . Soit  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et une fonction  $\varphi$  définie sur l'ouverture  $\mathring{B}$  de  $B$ , alors pour tout  $x \in B$  :

$$\begin{aligned} f(x) = & -2 \int_S \left( \frac{d}{d|s|} \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathbb{G}(\tau, s)} \check{p}^o(\tau, y) d\tau \right) \Big|_{s=y-x} \frac{\langle y-x, y-\xi \rangle}{|y-x|} d\sigma(y) \\ & + \varphi(x) \int_S \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathbb{G}(\tau, y-x)} \check{p}^o(\tau, y) d\tau d\sigma(y). \end{aligned} \quad (\text{IV.2.4})$$

où  $\overline{\mathbb{G}}$  est le conjugué complexe de  $\mathbb{G}$ .

La variable  $\xi$  et la fonction  $\varphi$  restent à définir et, selon le choix qui est fait, les différentes formules d'inversion des prédécesseurs de Nguyen sont obtenables, à savoir pour les dimensions 2 et 3 :

**Corollaire IV.2.7.** FORMULES D'INVERSION DE LA TRANSFORMÉE DE RADON. Étant donné un objet  $f \in \mathcal{C}_K^\infty(B)$ , considérons la transformée de Radon  $p^o = \mathcal{R}_S f$  de  $f$ , on a alors les formules d'inversion suivantes :

1. En dimension 2, pour tout  $y \in B$ , on a d'après [89] :

$$f(y) = \frac{1}{4\pi^2} \Delta \int_S \int_0^2 p^o(t, z) \log |t^2 - |y-z|^2| dt d\sigma(z),$$

ou, toujours selon [89] :

$$f(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_S \int_0^2 \frac{d}{dt} \left( t \frac{d p^o(t, z)}{dt} \frac{1}{t} \right) \log |t^2 - |y-z|^2| dt d\sigma(z),$$

ou encore, avec [148] :

$$f(y) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{div} \int_S n(z) \int_0^2 p^o(t, z) \frac{1}{|t^2 - |y-z|^2|} dt d\sigma(z).$$

2. En dimension 3, pour tout  $y \in B$ , on a d'après [88] :

$$f(y) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \int_S \frac{p^o(|y-z|, z)}{|y-z|} d\sigma(z),$$

ainsi que :

$$f(y) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_S \left( \frac{1}{t} \frac{d^2}{dt^2} p^o(t, z) \right) \Big|_{t=|y-z|} d\sigma(z),$$

et enfin, avec [148] :

$$f(y) = \frac{1}{8\pi^2} \int_S n(z) \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \frac{p^o(t, z)}{t} \right) \Big|_{t=|y-z|} d\sigma(z).$$

Les résultats obtenus par Finch et ses collègues [88, 89] admettent une autre formulation qui engage les opérateurs  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{W}_t$  (et les formules de Kirchhoff permettent de revenir à une formulation impliquant explicitement la transformée de Radon), que l'on expose dans le résultat suivant :

**Théorème IV.2.8.** Soit  $n \geq 2$ , on considère deux objets  $f_1$  et  $f_2$  dans  $\mathcal{C}_K^\infty(B)$ , alors :

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} &= 2 \langle \mathcal{W} f_1, t \mathcal{W} f_2 \rangle_{L^2}, \\ &= 2 \langle \frac{d}{dt} \mathcal{W}_t f_1, t \frac{d}{dt} \mathcal{W}_t f_2 \rangle_{L^2}, \\ &= -2 \langle \mathcal{W}_t f_1, t \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{W}_t f_2 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Enfin, notons que ce dernier résultat est prouvé à l'aide d'un lemme portant sur les traces des solutions de l'équation des ondes. Ce lemme nous sera utile ultérieurement et s'énonce comme suit :

**Lemme IV.2.9.** IDENTITÉS DE TRACES [86, 87]. Fixons  $n \geq 2$ . Soit deux objets  $f_1$  et  $f_2$  dans  $\mathcal{C}_K^\infty(B)$ , on note  $p_1$  et  $p_2$  les solutions respectives de l'équation des ondes les prenant comme condition initiale, on a alors :

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} &= -2 \int_S \int_0^\infty t p_{1tt}(t, y) p_2(t, y) dt d\sigma(y), \\ &= 2 \int_S \int_0^\infty t p_{1t}(t, y) p_{2t}(t, y) dt d\sigma(y). \end{aligned}$$

**Remarque IV.2.10.** *On déduit de ce lemme que les traces des solutions de l'équation des ondes sur  $B$  sont dans  $H^1(\mathbb{S})$ .*

Outre les articles concernés, nous renvoyons le lecteur intéressé à la lecture de [41] pour un exposé et une preuve clairs de ces deux derniers résultats.

**Remarque IV.2.11.** MISE EN ŒUVRE DE CES FORMULES. *Une nouvelle fois, l'hypothèse selon laquelle l'objet doit être disposé «à l'intérieur» de la surface d'observation est essentielle (voir les problèmes liés à la stabilité et à la caractérisation de l'image de  $\mathcal{R}_S$  abordées auparavant, en Sous-section III.3.1 page 49), ce qui pose problème en regard des conditions réelles d'observation, dans lesquelles du bruit extérieur au corps peut perturber le processus d'enregistrement des données.*

*Ensuite, seules les surfaces d'observation sphériques (et circulaires) sont concernées par les formules de rétroprojection filtrée.*

*On note en outre une forte sensibilité de ces formules au bruit (donc à l'imprécision des mesures et plus généralement à l'erreur d'observation).*

*Enfin, d'autres limitations sont imposées à l'usage de ces résultats, à savoir le fait qu'ils ne peuvent pas être généralisés à des cas de milieux hétérogènes et/ou d'incomplétude des données. La mise en œuvre numérique sera fortement altérée par le non-respect de ces conditions, ainsi qu'en attestent les tests présentés dans [105, 183, 261] notamment.*

**Complexité des inversions par rétroprojection filtrée :** le coût de ces méthodes s'évalue en :

1.  $O(N_x^3)$  en dimension 2 si l'on calcule  $O(N_x)$  projections contenant chacune les valeurs pour  $O(N_x)$  sphères.
2.  $O(N_x^5)$  en dimension 3 si l'on calcule  $O(N_x^2)$  projections contenant chacune les valeurs pour  $O(N_x)$  sphères.

Outre les inversions de type *rétroprojection* proposées ci-dessus, le développement en séries dans des bases de fonctions spéciales bien choisies autorise de choisir des hypothèses plus générales pour une reconstruction rapide et de qualité équivalente aux précédentes.

### Inversion rapide par développement en séries

Dans l'article [149], Kunyansky propose une méthode d'inversion de la transformée de Radon qui repose sur la connaissance des *valeurs et fonctions propres du Laplacien de Dirichlet* sur un ouvert  $\Omega$ . De fait, il n'est plus nécessaire de supposer ici que  $\mathcal{S}$  est une sphère, mais seulement la frontière  $\mathcal{S} = \partial\Omega$  d'un ouvert borné régulier quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Rien n'impose non plus de supposer que l'objet est entièrement contenu dans  $\Omega$ .

Cette méthode est donc bien plus générale que les précédentes. Puisqu'elle vise à inverser la transformée de Radon sphérique, nous supposons cependant que la vitesse est constante, normalisée à 1.

La section suivante (Section IV.3 page 85) est consacrée à la description d'une technique de reconstruction généralisant ce cadre par le biais de l'usage du développement en fonctions propres du Laplacien étendu à des vitesses variables.

Soit  $n \geq 2$  et  $T = \text{diam}(\Omega)$ . On se donne un objet  $f \in \mathcal{C}_K^1(B)$  et des données sous la forme de projections de  $f$  sur les sphères centrées sur  $\mathcal{S}$ , à savoir la fonction :

$$p^o = \mathcal{R}_S f, \text{ définie sur } (0, T) \times \mathcal{S}.$$

On note  $\{\lambda_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des valeurs propres du Laplacien de Dirichlet  $-\Delta_D$  sur  $\Omega$  et  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  les fonctions propres correspondantes, qui forment une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  muni de son produit scalaire usuel (du fait que  $-\Delta_D$  est un opérateur compact autoadjoint sur  $L^2$ ). Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_k$  est la solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k = \lambda_k^2\varphi_k \text{ sur } \Omega, \\ \varphi_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{IV.2.5})$$

et  $\|\varphi_k\|_{L^2} = 1$ . Chaque fonction  $\varphi_k$  est donc solution du problème de Dirichlet associé à l'équation de Helmholtz pour le nombre d'onde  $\lambda_k$ .

D'une part, l'objet  $f$  peut être décomposé dans la base décrite ci-dessus :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \varphi_k, \text{ avec } f_k = \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2}.$$

Cette série converge dans  $L^2$  et, puisque  $f$  est régulière, elle converge simplement.

D'autre part, l'usage des fonctions de Green va permettre de lier les valeurs des fonctions sur l'ouvert  $\Omega$  à leurs valeurs sur sa frontière  $\mathcal{S} = \partial\Omega$ . Soit  $G_{\lambda_k}$  la fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz de nombre d'onde  $\lambda_k$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\varphi_k$  vérifie :

$$\varphi_k(x) = \int_{\mathcal{S}} G_{\lambda_k}(|x-y|) \partial_n \varphi_k(y) d\sigma(y) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

On peut ainsi déterminer chaque coefficient  $f_k$  en fonction des données  $p^o$  :

$$f_k = \int_{\mathcal{S}} \left( \int_{\mathbb{R}_+} p^o(t,y) G_{\lambda_k}(t) dt \right) \partial_n \varphi_k d\sigma(y).$$

Cette formule peut être réécrite sous forme d'un développement en série de type rétroprojection filtrée. Enfin, elle se généralise aux objets appartenant à  $L^2$ , par densité.

**Complexité :** En espace tridimensionnel et pour une surface d'observation cubique, l'usage d'algorithmes de transformations approchées rapides (*Fast Sine Transform* ou *Fast Cosine Transform*) permet une reconstruction en  $O(N_x^3 \log N_x)$  et ce type de séries ayant été largement étudié, tout autant que leurs approximations numériques, on obtient un procédé de reconstruction remarquable.

**Bilan :** Cette méthode offre un moyen d'inverser la transformée de Radon très rapidement à condition de pouvoir sommer les séries de fonctions propres du Laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$  rapidement. La qualité de la reconstruction obtenue est équivalente aux formules d'inversion intégrales exactes.

Par ailleurs, ces formules sont *valables en toute dimension, pour toute surface d'observation fermée régulière, même avec source extérieure, mais à vitesse constante.*

Elles nécessitent enfin la connaissance des données sur l'ensemble de l'intervalle de temps  $(0,T)$ .

### Avantages et limites des méthodes proposées

Nous avons vu la richesse et la diversité des résultats qui ont été obtenus et des méthodes de reconstruction qui ont été développées à partir des transformées de Radon. Ces dernières ont fourni des résultats remarquables en situation réelle qui ont motivé la poursuite des travaux de recherche en TTA tandis que les résultats théoriques éclairent sur les problèmes liés à l'observation d'ondes de pression.

On pourra cependant leur reprocher leur manque de souplesse vis-à-vis des hypothèses qu'elles nécessitent, même si des efforts supplémentaires ont parfois permis de les adapter avec certains succès à des situations plus réalistes. À leur suite, les méthodes développées tentent de mieux répondre à ces exigences de souplesse.

### IV.3 Développement en séries

#### Présentation

Cette sous-section est dédiée à une contribution remarquable de par la généralité du cadre théorique qu'elle suppose, au sein duquel la méthode proposée fournit l'unicité de la solution ainsi qu'une reconstruction de l'objet dans de nombreux cas utiles en pratique, *sans passer par l'usage d'une transformée de Radon*.

Cette technique, due à Agranovsky et Kuchment [5], généralise celle de Kunyansky qui a été exposée dans les pages précédentes (elles partageront donc de nombreuses propriétés communes) et est équivalente à la méthode de renversement temporel que nous introduirons dans la prochaine sous-section.

Nous présentons le résultat principal proposé par les auteurs dans le théorème IV.3.1 page suivante ci-après (théorème 5 de l'article précité), puis nous prouverons et généraliserons ce résultat d'existence et d'unicité dans le chapitre suivant, en Sous-section II page 102.

#### Hypothèses et résultat principal

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque. On suppose que le domaine d'observation  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$  et que  $\mathcal{S} = \partial\Omega$ . On se donne une vitesse  $c$

dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  strictement positive. Ainsi il existe  $a, b > 0$  tels que :

$$a \leq c(x) \leq b \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Supposons d'une part que  $x \mapsto c(x) - 1$  est à support compact dans  $\Omega$  et d'autre part que la vitesse  $c$  est de type non-trapping (voir la définition III.3.15 page 57), afin de pouvoir utiliser les estimations de décroissance locale d'énergie du théorème III.3.16 page 58.

L'opérateur  $L$  s'écrit  $-c(x)\Delta$ . Défini sur  $L^2(\Omega)$  avec conditions de Dirichlet,  $L$  est un opérateur non borné autoadjoint et coercif. On considère une base hilbertienne  $\mathcal{B}$  de  $L^2(\Omega)$  composée de ses fonctions propres  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , et on note  $\{\lambda_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$  l'ensemble de ses valeurs propres correspondantes, telles que  $\lambda_k > 0$  pour tout  $k \geq 0$ .

Les objets  $f$  considérés appartiennent à  $L^2_K(\Omega)$ . Pour l'extension de ce résultat aux fonctions non nulles hors de  $\Omega$ , voir [5, Théorème 7]. Bien entendu, l'unicité de la reconstruction n'assure en rien sa stabilité, puisque le domaine complémentaire de  $\Omega$  n'est pas un domaine observable (voir la Sous-section III.3.2 page 57).

Voici le théorème d'existence et d'unicité annoncé, ainsi que l'une des formules de reconstruction proposées dans [5, Théorème 5].

**Théorème IV.3.1.** THÉORÈME DE AGRANOVSKY ET KUCHMENT. Étant données une fonction d'observation  $p^o$ , il existe un unique objet  $f$  tel que la solution de l'équation :

$$\begin{cases} p'' - c(x)\Delta p = 0 \text{ sur } (0,T) \times \Omega, \\ p(0) = f, \\ p'(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.3.6})$$

vérifie  $p = p^o$  dans  $L^2((0,T) \times \mathcal{S})$ .



En outre, on peut reconstruire l'objet  $f$  à l'aide de la formule suivante, qui porte sur sa décomposition dans la base hilbertienne  $\mathcal{B}$  :

$$f_k = \lambda_k^{-2} p_k^o(0) + \lambda_k^{-1} \int_0^\infty \sin(\lambda_k t) p_k^o(t) dt \text{ }^{39},$$

où :

$$p_k^o(t) = \int_{\mathcal{S}} p^o(t, y) \overline{\partial_\nu e_k(y)} d\sigma(y),$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Complexité :** Le coût de la présente technique s'évalue de la même manière que pour le procédé de reconstruction précédent (sommation rapide de Kunyansky).

#### IV.4 Méthodes de renversement temporel

Conservons le cadre de la sous-section précédente.

Les idées directrices des méthodes de *renversement* (ou *retournement*, selon l'acception commune en acoustique) *temporel* sont les suivantes : si l'on suppose que la dimension d'espace  $n$  est impaire et que la vitesse  $c$  est constante et normalisée à 1, alors, étant donné un ouvert borné  $\Omega$ , le principe de Huygens nous assure qu'à partir de l'instant  $T = \text{diam}(\Omega)$ , toute onde issue d'une condition initiale  $f$  à support compact inclus dans  $\Omega$  est nulle dans  $\Omega$ . Pour vulgariser cette idée, on dit que l'onde est « sortie » du domaine  $\Omega$ . Ainsi, partant de la connaissance des enregistrements  $p^o$  de cette onde sur  $\mathcal{S} = \partial\Omega$  et sur l'intervalle de temps  $(0, T)$ , on profite du caractère réversible du phénomène de propagation d'onde que l'on considère et l'on remonte le temps de  $t = T$  (avec condition finale nulle) jusqu'à  $t = 0$ . Les enregistrements fournissent les données au bord sur  $(0, T) \times \mathcal{S}$ , et l'état initial  $p(t = 0)$  obtenu coïncide avec l'objet  $f$ .

---

<sup>39</sup>. Cette intégrale est bien définie d'après les estimations de décroissance locale d'énergie.

La méthode de renversement temporel consiste donc en la résolution du problème rétrograde bien posé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'' - c(x)\Delta p = 0 \text{ sur } (0,T) \times \Omega, \\ p(T) = 0 \text{ sur } \Omega, \\ p'(T) = 0 \text{ sur } \Omega, \\ p = p^o \text{ sur } \mathcal{S} = \partial\Omega, \end{array} \right.$$

dont la solution  $p$  vérifie  $p(0) = f$ .

La première évocation d'une application de cette méthode en TTA est le [88, Théorème 5]<sup>40</sup>. Elle sera développée, améliorée et étudiée ultérieurement dans les articles suivants : [53, 98, 116, 115, 198, 218].

D'un point de vue théorique, il est important que  $T$  soit fini afin de définir le problème en temps rétrograde. On peut en particulier remarquer que, dans ce cas, le changement de variable  $\tilde{t} = T - t$  renverse le temps et permet de poser le problème du renversement temporel comme un problème en temps direct, avec conditions initiales nulles et conditions au bord définies par  $p^o$ . Bien entendu, la méthode ne pourra donc être qu'approchée en dimension paire et en cas de vitesse variable. Par ailleurs, la mise en œuvre numérique de cette méthode par le biais de schémas aux différences finies, par exemple, est très aisée.

Enfin, non seulement cette méthode s'applique à tout ouvert borné mais, en pratique, elle se généralise à tout cas de vitesse variable non-trapping et à toute dimension d'espace (y compris les paires). Théoriquement, la solution issue de l'objet  $f$  ne s'annule plus en temps fini dans  $\Omega$ , mais les estimations d'erreur de [115] montrent la validité de la méthode approchée qui consiste à définir un temps final  $T$  suffisamment grand, à annuler les données au voisinage de  $T$  et à considérer que la solution est nulle à partir du temps  $T$ .

Une autre approximation a été proposée dans [218] où les auteurs choisissent un temps final  $T$  supérieur à la longueur de la plus grande géodésique associée à la distance  $c^{-1}$ , puis définissent l'état final  $p(T)$  comme étant la

---

40. Le renversement temporel des ondes est cependant utilisé de longue date en acoustique, voir les travaux de Mathias Fink, [91] notamment.

solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega, \\ u = p^o(T) \text{ sur } \mathcal{S} = \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Grâce à cette méthode, l'erreur commise peut alors être estimée sous forme d'un opérateur de contraction.

Ces manières de procéder ont tout aussi bien fait leurs preuves en pratique comme en témoignent les résultats présentés dans [98, 116]. En particulier, la seconde a fait l'objet d'une amélioration permettant d'itérer le processus de renversement temporel qui donne lieu à d'excellents résultats (voir [198]).

**Coût de l'implémentation :** la méthode est peu onéreuse, elle s'évalue en  $O(N_x^3)$  en espace bidimensionnel et  $O(N_x^4)$  en tridimensionnel.

**Remarque IV.4.1.** *La méthode proposée dans la Sous-section IV.3 page 85 est équivalente à celle du renversement temporel, à projection près sur les droites propres de l'opérateur  $c(x)\Delta$ .*

Le renversement temporel est par ailleurs source d'inspiration pour des méthodes originales prometteuses, telles celle présentée dans l'article [14].

## IV.5 Commentaires au sujet des hypothèses nécessaires aux méthodes

Nous l'avons vu, la validité des méthodes de reconstruction dédiées à la tomographie thermoacoustique dépend grandement des hypothèses faites sur le modèle de propagation d'ondes considéré. Dans cette sous-section, nous proposons un bref bilan des liens entre les méthodes et les hypothèses qu'elles nécessitent.

### Les données

Cas de données incomplètes : les méthodes qui se prêtent le mieux à cette situation sont les méthodes itératives. Celles-ci étant coûteuses en calcul, il a été proposé diverses approximations des méthodes exactes, en particulier grâce aux conditions de rang puisqu'elles permettent de compléter les

données en vue d'une utilisation « normale » des méthodes usuelles (consulter [190]).

### **La vitesse**

En ce qui concerne la prise de compte de la vitesse variable, seules les méthodes itératives, certains développements en série et le renversement temporel s'y prêtent. Il n'existe en effet, à ce jour, aucune formule d'inversion exacte valable en milieu hétérogène. En particulier, des méthodes itératives (par minimisation de type moindres carrés) ont été définies en vue de reconstruire simultanément l'objet et la vitesse (voir [269, 270]). Des liens entre données et vitesse ont été établis, mais appellent à être précisés en vue d'une future application (voir notamment [116] pour un lien entre conditions de rang et définition de la vitesse ou [118] pour l'obtention de l'unicité de la vitesse pour un jeu d'observations donné).

### **L'atténuation**

Enfin, afin de tenir compte de l'atténuation dans la méthode de reconstruction, nous retiendrons l'idée de [15] consistant à ramener les données issues d'un phénomène atténué aux données correspondantes issues d'un modèle non atténué. Ainsi, si l'on sait évaluer l'atténuation qu'ont subie les ondes acoustiques lors de leur évolution à travers le corps, on sait se ramener à une situation où l'on peut user des méthodes de reconstruction pour les modèles non atténués.

## **Conclusion du premier chapitre**

Cet aperçu des propriétés mathématiques du problème de la TTA et des moyens de le résoudre montre l'attention qui a été portée à ce sujet durant les vingt dernières années. Sont concernés des domaines très variés tels que les équations aux dérivées partielles, la géométrie intégrale, la théorie spectrale ou encore l'analyse microlocale. Au fil des avancées, les nouvelles techniques s'affranchissent des hypothèses qui sont mises en défaut lors des applications et permettent des reconstructions en milieu hétérogène, avec des données

pouvant aussi provenir de sources extérieures au domaine d'intérêt<sup>41</sup>. Nous proposons d'ajouter à celles-ci des méthodes issues des théories du contrôle, du filtrage et des observateurs mathématiques suffisamment souples et efficaces pour pouvoir être adaptées à de nombreuses conditions, par exemple selon que notre attention se portera sur la simplicité (numérique et de mise en œuvre) de la méthode et/ou sur sa précision, sur des conditions idéalisées de test ou sur leur robustesse...

---

41. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la lecture de [145, Section 5] pour un exposé des principaux problèmes restant à résoudre en TTA.



## Chapitre B

# Nouvelles méthodes de reconstruction pour la tomographie thermoacoustique

ON PEUT REGROUPER les techniques de reconstruction d'images de TTA en deux grandes catégories : tout d'abord les *méthodes analytiques* ou *exactes* qui reposent sur une définition mathématique explicite des solutions des équations d'onde. Nous l'avons vu dans la Section IV page 62 du Chapitre A, la plupart des méthodes utilisées traditionnellement en TTA sont analytiques. Fondées sur les travaux de Johann Radon et leurs extensions ainsi que sur le développement des solutions en série, ces méthodes sont les premières à avoir été utilisées et le sont toujours. Elles ont l'avantage de nécessiter relativement peu de calculs (puisque étant non itératives), mais l'inconvénient de souvent supposer l'exactitude du modèle et des données. Des approximations de ces méthodes donnent cependant lieu à d'excellents résultats expérimentaux. Dans ce cas, les approximations de reconstruction obtenues étant des solutions de l'équation modèle, on dit que le modèle est une *contrainte forte* pour la méthode.

Le second type de méthodes usitées regroupe les méthodes dites *itératives*, ou *algébriques*, lesquelles tiennent compte intrinsèquement de la nature inexacte du modèle mathématique : un équilibre est recherché entre les don-

nées et le modèle, les premières n'étant pas pures (ces données proviennent non seulement de l'enregistrement de l'onde, mais aussi de *bruits* parasites, et contiennent des défauts de précision dus à celle des capteurs) et le second n'est qu'une approximation idéalisée de la réalité. Les reconstructions approchées successives obtenues ne sont plus forcément solutions de l'équation modèle et celui-ci est qualifié de *contrainte faible* pour la méthode de reconstruction.

Ce chapitre est dédié aux méthodes de reconstructions que nous avons introduites dans le domaine de la TTA. Ces méthodes s'inspirent d'une part des travaux de Auroux et Blum sur l'algorithme de *Back and Forth Nudging* (BFN) et d'autre part des théories du contrôle et du filtrage optimaux. Après avoir introduit les différentes reformulations associées du problème inverse de la TTA dans la Section I page suivante, nous présenterons une méthode de reconstruction indépendante de ces notions, mais utile par la suite : celle de Agranovsky et Kuchment (présentée précédemment : voir le Théorème IV.3.1 page 86, Chapitre A) dans le cas d'opérateurs diagonalisables, pour laquelle nous fournissons une preuve originale – Section II page 102. Parmi les méthodes itératives, nous distinguerons deux principales catégories de techniques : celles dites « variationnelles » (en Section III page 121) et celles nommées « séquentielles ». Ces dernières occuperont notre attention dans les sections IV page 131 et V page 175, d'abord avec les techniques de nudging, puis avec les observateurs itératifs.



## I Redéfinitions et approximations du problème

Nous avons vu qu'étant donnée une carte de vitesse  $c$ , la *méthode d'observation* de l'onde de pression détermine une *surface d'observation* dont les caractéristiques mathématiques permettront de savoir si l'objet peut être reconstruit à partir de ces données et, si oui, si cette reconstruction est stable vis-à-vis de perturbations (telles le bruit inclus dans les données).

Dans cette section, nous proposons de redéfinir notre problème en vue d'introduire des notions issues du *contrôle optimal* et du *filtrage optimal*.

Notre approche du problème inverse de la TTA repose en partie sur sa redéfinition en un problème de contrôlabilité des équations d'onde. En effet, en cas de *réversibilité temporelle* de l'équation modèle<sup>1</sup> et en horizon de temps  $T$  fini, le changement de variable  $\tilde{t} = T - t$  nous permet de redéfinir le problème (III.1.1) du Chapitre A, qui est un problème inverse ou, selon la méthode de renversement temporel, un problème en temps rétrograde, en un problème en temps direct. Nous expliquons cette démarche dans les prochains paragraphes.

### Brefs rappels

En utilisant les notations de la Section III.1 page 34 du Chapitre A, on considère indifféremment les problèmes d'ordre 1 ou 2 en temps définis ci-après. Afin de simplifier la présentation des outils que nous utilisons, nous supposons que les données  $p^o$  sont issues d'une solution  $p_{\text{exacte}}$  de l'équation du modèle.

---

1. Nous précisons un moyen de nous affranchir de cette hypothèse en Sous-section IV.2.2 page 149.

On souhaite reconstruire l'objet  $f$  à partir des données  $p^o$  définies à tout temps  $t \in (0, T)$  sur un domaine d'observation  $\mathcal{S}$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p''_{\text{exacte}} - Lp_{\text{exacte}} = 0 \text{ sur } Q_T = (0, T) \times \Omega, \\ p_{\text{exacte}}(0, \cdot) = f, \\ p_{\text{exacte}t}(0, \cdot) = 0, \\ p^o = p_{\text{exacte}}|_{(0, T) \times \mathcal{S}} = \mathcal{W}f, \end{array} \right. \quad (\text{I.0.1})$$

où  $L$  est un opérateur non borné sur  $L^2(\Omega)$ .

Dans la suite, on note  $C$  l'opérateur d'observation qui associe, à une fonction  $p \in H^1$ , la fonction égale presque partout à  $p$  sur  $\mathcal{S}_T = (0, T) \times \mathcal{S}$  et nulle ailleurs :  $C$  est la multiplication par la fonction indicatrice du domaine d'observation  $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$ .

On peut reformuler l'équation (I.0.1) en équation d'ordre 1 comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}'_{\text{exacte}} = \mathbf{A}\mathbf{p}_{\text{exacte}} \text{ sur } Q_T, \\ \mathbf{p}_{\text{exacte}}(0) = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p^o = p_{\text{exacte}}|_{\mathcal{S}_T} = \mathcal{W}f, \end{array} \right. \quad (\text{I.0.2})$$

où  $\mathbf{p}_{\text{exacte}} = \begin{pmatrix} p_{\text{exacte}} \\ p'_{\text{exacte}} \end{pmatrix}$ .

Par la suite, nous ne rappellerons l'équivalence entre les formulations aux ordres temporels 1 et 2 qu'en fonction de nos besoins.

Voyons maintenant comment les problèmes inverses précédents peuvent être redéfinis comme des problèmes en temps direct équivalents au moyen d'un renversement temporel. Il nous faut tout d'abord supposer que  $T < \infty$ .

**Remarque I.0.1.** *Afin de renverser le temps sur l'intervalle  $(0, T)$ , il faut en effet supposer, a priori tout du moins, que l'horizon de temps est fini, afin de mettre en équivalence conditions initiales (à  $t = 0$ ) et conditions finales (à  $t = T$ ), comme nous le faisons ci-après. Cependant, dans la formulation équivalente du renversement temporel de Agranovsky et Kuchment (Théorème IV.3.1 page 86 du Chapitre A et Section II page 102), il apparaît que*

*l'usage de solutions explicites impose au contraire de choisir un horizon de temps infini afin de ne pas faire intervenir de condition finale.*

Pour simplifier le présent exposé, nous notons à nouveau  $p_{\text{exacte}}$  la fonction  $t \mapsto p_{\text{exacte}}(T - t)$ . L'onde de pression  $p_{\text{exacte}}$  émise par l'objet  $f$  est solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} p''_{\text{exacte}} - Lp_{\text{exacte}} = 0 \text{ sur } Q_T, \\ p_{\text{exacte}}(T) = f, \\ p'_{\text{exacte}}(T) = 0. \end{array} \right.$$

On connaît  $p_{\text{exacte}}$  sur  $\mathcal{S}_T$ , c'est-à-dire  $p^o = Cp_{\text{exacte}}$ .

### **Redéfinitions : motivations**

Nous proposons une approche peu commune pour la résolution de problèmes inverses : posé tel un problème pour lequel il faut reconstruire une condition finale, comme ci-dessus, nous nous intéressons aux moyens de « faire tendre » une trajectoire quelconque  $p$  vers la trajectoire  $t \mapsto p_{\text{exacte}}(t)$  ou d'obtenir une bonne approximation de l'objet  $f$  par  $p(T)$ .

L'intérêt de ce point de vue apparaît au regard de deux premières considérations : d'une part, la première méthode que nous avons appliqué à la TTA, le BFN – dont l'usage est inédit en TTA – consiste justement à faire tendre une trajectoire vers les données, et d'autre part, vu comme un problème consistant à modifier une équation pour en faire tendre les solutions vers un état donné, notre problème se reformule naturellement comme un problème de contrôle, de stabilisation, de détection, etc., ainsi que nous l'expliquons ci-après.

Contrairement aux méthodes usuelles en TTA, dans lesquelles le modèle est supposé exact (puisque les trajectoires résolvant le problème sont solutions de l'équation modèle), l'équation du modèle est modifiée (un terme de rappel  $y$  est ajouté) dans les méthodes que nous proposons.

### **Redéfinitions : horizon de temps fini**

On note  $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Soit une ébauche de reconstruction  $p_0$ , qui peut être une première approximation de l'objet ou

être arbitrairement définie. Le *problème de contrôlabilité exacte* associé au problème de reconstruction (I.0.1) se formule ainsi :

Existe-t-il un contrôle  $u$  dans  $L^2(\mathcal{S}_T)$  tel que la solution  $p$  de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'' - Lp = \mathbf{1}_{\mathcal{S}} u \text{ sur } Q_T, \\ p(0) = p_0, \\ p'(0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{I.0.3})$$

vérifie  $p(T) = f$  à partir de la connaissance de  $p^o$  ?

En adoptant ce point de vue, on ne cherche plus à définir une solution explicite de l'équation du modèle, mais on tente, en partant d'une ébauche de reconstruction, de modifier la solution d'une équation adaptée de sorte qu'elle atteigne l'objet au temps  $T$ . Le modèle est donc vu comme une *contrainte faible*, puisque nous ne définissons pas l'état  $p$  comme une solution du modèle.

Puisque ce problème est linéaire, on peut substituer la fonction d'erreur  $\tilde{p} = p - p_{\text{exacte}}$  – voir les notations de la Section III.1 page 34, Chapitre A – à  $p$  et supposer que  $p^o \equiv 0$ , de sorte que I.0.3 soit un problème de contrôlabilité exacte à 0 (en temps fini). Puisqu'aucune confusion n'est possible entre  $\tilde{p}$  et  $p$ , ces deux fonctions ne seront généralement pas distinguées l'une de l'autre. De plus, afin de ne pas introduire d'inconnues supplémentaires dans ce problème, le contrôle  $u$  sera cherché sous la forme d'un *retour d'état* (ou *rappel*, ou encore *feedback* en anglais). On souhaite en effet que  $u$  ne soit fonction que de l'ébauche  $p_0$  et des données  $p^o$  :

Pour résumer, on cherche donc un opérateur  $\Pi$  tel que  $u = \Pi p$  fournisse une solution  $p$  de (I.0.3) telle que  $p(T, \cdot) = 0$ .

Cette formulation permet de mettre en œuvre les outils fournis par la théorie du contrôle optimal. En cas de réponse négative au Problème (I.0.3), nous pourrions nous demander si le problème correspondant en horizon de temps  $T$  infini est résoluble.

**Redéfinitions approchées : horizon de temps infini**

Par ailleurs, dans une version approchée de notre problème, on peut dès lors établir un parallèle avec le problème de stabilisation des équations d'onde : si l'on peut stabiliser la solution  $p$ , de sorte que  $p(t)$  tende vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ , alors il existe un temps à partir duquel  $p$  est arbitrairement proche de 0. Dans ce cas, nous saurons donc approcher l'objet en temps fini.

Ainsi, supposons que  $T = \infty$ , nous approchons le problème de la TTA par un *problème de stabilisation faible* (respectivement *forte*) :

À quelles conditions la solution de :

$$\begin{cases} p'' - Lp = -\mathbb{1}_S p_t \text{ sur } Q_\infty = (0, \infty) \times \Omega, \\ p(0) = p_0, \\ p'(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.0.4})$$

vérifie-t-elle  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$  (resp.  $\|p(t)\| \leq C e^{-\mu t} \|p_0\|$  pour certains  $C, \mu > 0$ ) ? Comment estimer, définir ou optimiser  $C$  et  $\mu$  ?

Si l'on sait définir et réunir des conditions suffisantes à la stabilisation de  $p$ , on saura donc définir, une ébauche de reconstruction en temps fini (et peut-être estimer l'erreur commise). Par la suite, le terme « stabilisation » désignera implicitement une « stabilisation forte » par défaut, sauf précision particulière.

### Observateurs

Enfin, dans notre cas où  $C$  est la multiplication par la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_S$ , le problème de contrôlabilité exacte (I.0.4) est généralisé par le *problème de détectabilité* suivant, que l'on formule à l'ordre 1 en temps, pour la simplicité de l'exposition<sup>2</sup> :

---

2. Le lien entre les Problèmes (I.0.3), (I.0.4) et (I.0.5) sera expliqué dans la Sous-section V.2.3 page 193.

On note  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$ . Étant donné un opérateur d'observation qui définit les données comme suit :  $p^o = Cp_{\text{exacte}}$ , existe-t-il un opérateur  $\widehat{\Pi}$  tel que la solution  $\mathbf{p}$  de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p} + \widehat{\Pi}\mathbf{C}\mathbf{p} \text{ sur } Q_T, \\ \mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (\text{I.0.5})$$

vérifie soit  $p(T) = 0$ , soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$ , en un sens à définir, lorsque  $T = \infty$  ?

En particulier, si on peut répondre par l'affirmative au Problème (I.0.4), alors on a aussi trouvé un moyen de résoudre le Problème (I.0.5).

**Définition I.0.2.** Dans la formulation précédente, l'opérateur  $\mathbf{A} + \widehat{\Pi}\mathbf{C}$  et, par abus, l'équation suivante :

$$\mathbf{p}' = (\mathbf{A} + \widehat{\Pi}\mathbf{C})\mathbf{p}$$

sont appelés observateurs<sup>3</sup> pour le Problème I.0.2 page 96.

Ces redéfinitions du problème inverse de la TTA ouvrent la voie des théories de l'observation, du contrôle et de la stabilisation des équations d'onde, dont nous introduisons les principales notions dans la Section V page 175 et dont nous profiterons pour introduire des méthodes originales en TTA et pour en prouver la validité.

Plus précisément, nous verrons que le BFN – qui sera présenté en Section IV page 131 – peut être perçu comme un cas particulier de ces méthodes.

### Une formulation variationnelle

Pour finir, nous proposons une dernière redéfinition du problème qui nous intéresse : le Problème (I.0.1) étant un problème inverse classique (il s'agit en effet de déterminer  $f$  à partir de la connaissance de  $p^o = \mathcal{W}f$ ), il paraît

3. Ces observateurs sont parfois dits « de Luenberger » [160, 162, 161] ou « de Kalman ».

judicieux de mettre en œuvre les méthodes de résolution variationnelles pour les problèmes inverses. Dans ce cadre, le Problème (I.0.1) se définit comme suit :

Nous voulons résoudre le problème inverse :

$$\mathcal{W}f = p^o,$$

en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J_\alpha(f) \\ \text{s.c. } f \in H_0^1(B), \end{array} \right. \quad (\text{I.0.6})$$

où  $J_\alpha$  est la fonctionnelle de :

$$\begin{aligned} J_\alpha &: H_0^1(B) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{W}f - p^o\|_{L^2(\mathcal{S}_\varepsilon)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \|f\|_{L^2(B)}^2, \end{aligned}$$

avec  $\alpha > 0$ .

Nous nous intéresserons à cette formulation et aux moyens de résoudre le problème qui lui est associé dans la Section III page 121.

Avant de présenter les techniques de reconstruction associées à ces méthodes, nous dédions une dernière section à une méthode qui ne nous est pas propre. Nous proposons en effet, dans la section suivante, une preuve originale et une généralisation d'un résultat dû à Agranovsky et Kuchment.

## II Opérateurs diagonalisables et TTA

Dans cette sous-section, nous proposons de prouver le Théorème de Agranovsky et Kuchment IV.3.1 page 86 du Chapitre A dans une version étendue à une classe plus large d'opérateurs, ce qui nous donne l'occasion d'introduire les opérateurs non bornés dits diagonalisables (au sens de [239]) et la méthode de Faedo-Galerkin appliquée aux équations du second ordre en temps (voir [70]) et aux opérateurs diagonalisables.

### II.1 Opérateurs diagonalisables et EDP du second ordre

#### Éléments d'analyse hilbertienne

Soit  $H$  un espace de Hilbert. On considère la base canonique (orthonormale)  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $l^2(\mathbb{C})$ , à partir de laquelle nous définissons les bases de Riesz de  $H$  (sous réserve d'existence) :

**Définition II.1.1.** *Une suite  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  est appelée base de Riesz de  $H$  s'il existe un opérateur inversible  $Q \in \mathcal{L}(H, l^2)$  tel que  $Q\phi_k = e_k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*

L'appellation « base » sera justifiée dans la Proposition II.1.4 ci-dessous. Nous verrons que les bases de Riesz permettent souvent de généraliser les résultats classiques concernant les opérateurs auto-adjoints compacts. Pour ce faire, nous aurons besoin tout d'abord de la définition suivante :

**Définition II.1.2.** *Deux suites  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\phi_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $H$  sont dites biorthogonales lorsque :*

$$\langle \phi_i, \phi_j^* \rangle = \delta_{ij}, \text{ pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2.$$

*Dans le cadre de la définition précédente, on appelle suite biorthogonale de  $(\phi_k)$  la suite  $(\phi_k^*)$  définie par :*

$$\phi_k^* = Q^* Q \phi_k, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$



**Remarque II.1.3.** Dans la définition précédente, si la suite  $(\phi_k)$  est une base de Riesz, alors  $(\phi_k^*)$  aussi. Par ailleurs, si  $(\phi_k)$  est une base hilbertienne, alors  $\phi_k^* = \phi_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

L'introduction de ces notions est motivée par la proposition suivante :

**Proposition II.1.4.** Supposons qu'il existe une base de Riesz  $(\phi_k)$  de  $H$ , dont on note  $(\phi_k^*)$  la suite biorthogonale. Alors tout  $f \in H$  s'écrit :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \phi_k^* \rangle \phi_k.$$

De plus, il existe  $m, M > 0$  telles que pour tout  $f \in H$  :

$$m \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle f, \phi_k^* \rangle|^2 \leq M \|f\|^2.$$

### Opérateurs diagonalisables

Pour ce qui est des opérateurs diagonalisables (ou des opérateurs Riesz-spectraux, qui en sont proches) nous nous référons au textes et ouvrages classiques : [69, 99, 239], desquels nous extrayons la définition suivante :

**Définition II.1.5.** Soit  $L$  un opérateur non borné de  $H$  de domaine  $D(L)$ . On dit que  $L$  est diagonalisable si l'ensemble résolvant de  $L$  n'est pas vide et s'il existe une base de Riesz  $(\phi_k)$  de  $H$  composée de vecteurs propres de  $L$ . En particulier,  $D(L)$  est dense dans  $H$ .

Ces opérateurs peuvent être entièrement décrits au moyen de leurs vecteurs et valeurs propres, comme en témoigne la proposition suivante :

**Proposition II.1.6.** Soit  $L$  un opérateur non borné de  $H$  de domaine  $D(L)$ , une base de Riesz  $(\phi_k)$  composée de vecteurs propres de  $L$  et la base  $(\phi_k^*)$ , biorthogonale de  $(\phi_k)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\lambda_k$  la valeur propre associée au vecteur propre  $\phi_k$ . Alors les éléments de  $H$  appartenant au domaine de  $A$  sont caractérisés comme suit :

$$D(L) = \left\{ f \in H; \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 + |\lambda_k|^2) |\langle f, \phi_k^* \rangle|^2 < \infty \right\},$$

et pour tout  $f \in D(L)$  :

$$Lf = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \langle f, \phi_k^* \rangle \phi_k.$$

Par ailleurs, les propriétés des opérateurs diagonalisables se transmettent à leur adjoint :

**Proposition II.1.7.** Sous les hypothèses de la proposition précédente, l'opérateur  $L^*$  est diagonalisable et ses vecteurs et valeurs propres sont respectivement  $\phi_k^*$  et  $\lambda_k$ , pour  $1 \leq k \leq \infty$ .

Nous verrons à différentes reprises que ces propriétés des opérateurs diagonalisables conviennent particulièrement à la résolution de problèmes inverses. Nous commençons avant tout par étudier les problèmes d'évolution du second ordre associés à ces opérateurs.

### Application aux EDP hyperboliques

Les paragraphes suivants sont consacrés aux équations aux dérivées partielles hyperboliques linéaires du second ordre en temps de la forme :

$$p'' - Lp = F,$$

où  $L$  est un opérateur non borné sur un espace de Hilbert séparable  $H$ , de domaine  $V = D(L)$ . On note  $V'$  le dual par rapport à l'espace pivot  $H$ . On suppose que :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

avec injections continues, compactes et denses.

On s'intéresse au problème suivant, où les crochets  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représentent le crochet de dualité entre  $V'$  et  $V$  :

Étant donnés  $f \in V$ ,  $g \in H$  et  $F \in L^2(0, T; H)$ , existe-t-il une solution  $p$  de l'équation précédente au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in L^2(V), p' \in L^2(V) \text{ et } p'' \in L^2(V'), \\ \langle p'', \varphi \rangle - \langle Lp, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle, \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \forall \varphi \in V, \\ p(0) = f, \\ p'(0) = g. \end{array} \right. \quad (\text{II.1.1})$$

De plus, y a-t-il unicité de cette solution et est-elle continue vis-à-vis des conditions initiales et du second membre ?

Précisons un cadre favorable à l'étude de ce problème. On fixe un horizon de temps  $T \in (0, \infty)$ . On suppose que la forme bilinéaire  $l$  associée à  $-L$  est continue et faiblement coercive sur  $V^4$ .

On suppose enfin que  $L$  est un opérateur diagonalisable dans  $V$  au sens de la définition II.1.5 page 103. Il existe donc une base de Riesz de  $H$  constituée d'éléments de  $V$  qui sont des fonctions propres de  $L$ . On note cette base :

$$\{\{e_{ij}\}_{1 \leq j \leq n_i}\}_{1 \leq i \leq \infty},$$

et  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq \infty}$  le spectre de  $L$  qui lui est associé, ainsi que :

$$\{\{e_{ij}^*\}_{1 \leq j \leq n_i}\}_{1 \leq i \leq \infty}$$

sa base biorthogonale. On a donc :

$$Le_{ij} = \lambda_i e_{ij},$$

et, pour tout  $p \in H$  :

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \langle p, e_{ij}^* \rangle e_{ij},$$

où la série converge dans  $H$ .

---

4. Sous ces hypothèses, l'opérateur  $L$  est parfois dit «  $V$ -elliptique ».

Quels que soient  $f \in V$ ,  $g \in H$  et  $F \in L^2(0,T;H)$ , on note :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} f_{ij} e_{ij}, \\ g &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} e_{ij}, \\ F(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}(t) e_{ij}, \text{ p.p. } t \in (0,T). \end{aligned}$$

Pour tout  $1 \leq i \leq \infty$ , on note  $\mu_i$  une racine carrée complexe de  $\lambda_i$  telle que  $\operatorname{Re}(\mu_i) \geq 0$  (qui est donc unique si et seulement si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$ ).

On a alors la proposition suivante qui résout le Problème (II.1.1) :

**Théorème II.1.8.** Il existe une unique solution  $p$  au Problème (II.1.1) et celle-ci est continue en regard des conditions initiales et du second membre. De plus, la solution  $p$  vérifie :

$$p \in C^0(0,T; L^2(V)) \cap C^1(0,T; L^2(H)) \cap H^2(0,T; L^2(V')),$$

et satisfait à l'inégalité d'énergie suivante :

$$E_p(t) \leq c(E_p(0) + \|F\|_{L^2(0,T;H)}),$$

où  $c > 0$  et :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \left[ \|p_t\|_H^2 + \|p\|_V^2 \right].$$

Enfin, cette solution s'écrit :

$$p = \sum_{1 \leq i \leq \infty} \sum_{1 \leq j \leq n_i} p_{ij} e_{ij},$$

avec convergence forte dans  $V$  et où :

$$p_{ij}(t) = \frac{e^{\mu_i t} + e^{-\mu_i t}}{2} f_{ij} + \frac{e^{\mu_i t} - e^{-\mu_i t}}{2\mu_i} g_{ij} - \int_0^t \frac{e^{\mu_i(t-s)} - e^{-\mu_i(t-s)}}{2\mu_i} F_{ij}(s) ds,$$

si  $\lambda_i \neq 0$ , pour tout  $t \in [0, T]$ . Sinon :

$$p_{ij}(t) = f_{ij} + g_{ij}t - \int_0^t (t-s)F_{ij}(s) ds, \text{ sur } [0, T].$$

**Remarque II.1.9. Au sujet de l'intervalle temporel.** D'une part, l'existence d'une solution unique sur tout intervalle  $(0, T)$ ,  $T > 0$  nous permet de définir une solution unique sur  $(0, \infty)$  ; d'autre part, le temps initial  $t_0 = 0$  peut aussi être choisi quelconque dans  $(-\infty, T)$ .

PREUVE DU THÉORÈME. Nous suivons la méthode de Faedo-Galerkin adaptée aux opérateurs diagonalisables, en 8 étapes :

1. **Définition et étude d'un problème approché.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note  $V_m$  le sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension finie engendré par la famille  $\{\{e_{ij}\}_{1 \leq j \leq n_i}\}_{1 \leq i \leq m}$  :

$$V_m = \text{Vect}(\{\{e_{ij}\}_{1 \leq j \leq n_i}\}_{1 \leq i \leq m}).$$

Soient, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , les projections orthogonales respectives  $f_m$  et  $g_m$  de  $f$  et  $g$  sur  $V_m$  :

$$f_m = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n_i} \langle f, e_{ij}^* \rangle e_{ij}, \text{ et } g_m = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n_i} \langle g, e_{ij}^* \rangle e_{ij}.$$

Les suites  $(f_m)$  et  $(g_m)$  convergent donc (fortement) dans  $V$  vers  $f$  et dans  $H$  vers  $g$ , respectivement. De même, concernant le second membre de l'équation  $F$ , on pose pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$F_{mij} = \langle F, e_{ij}^* \rangle, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i,$$

et :

$$F_m = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n_i} f_{mij} e_{ij} \in V_m.$$

Nous nous intéressons dorénavant au problème approché suivant :

Quel que soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , trouver :

$$p_m = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n_i} p_{mij} e_{ij} \in V_m,$$

tel que :

$$\begin{cases} p''_{mij} - \lambda_i p_{mij} = F_{mij}, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i, \\ p_m(0) = f_m, \\ p'_m(0) = g_m. \end{cases} \quad (\text{II.1.2})$$

Le système (II.1.2) est un système différentiel linéaire de dimension finie dans  $V_m$ , pour lequel il existe donc une unique solution d'après le Théorème de Cauchy-Lipchitz. Par ailleurs, puisque  $F_m \in L^2(0, T; V_m)$ , on a :

$$p_m \in \mathcal{C}^0([0, T]; V_m), p'_m \in \mathcal{C}^0([0, T]; V_m) \text{ et } p''_m \in L^2(0, T; V_m).$$

**2. Estimations d'énergie pour le problème approché.** Commençons par remarquer que, pour tous  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n_i$  :

$$p_{mij} = \langle p_m, e_{ij}^* \rangle \Rightarrow -\lambda_i p_{mij} = -\langle p_m, \bar{\lambda}_i e_{ij}^* \rangle,$$

aussi, d'après la Proposition II.1.7 page 104, il vient :

$$-\lambda_i p_{mij} = -\langle p_m, L^* e_{ij}^* \rangle = l(p_m, e_{ij}^*).$$

Nous nous intéressons par la suite aux estimations d'énergie relatives aux solutions  $p_m$ . Posons :

$$E_{p_m}(t) = \frac{1}{2} \left[ \|p'_m\|_H^2 + \|p_m\|_V^2 \right].$$

On note :

$$p'_m = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n_i} p'_{mij} e_{ij}^*,$$

puis on multiplie les équations (II.1.2) par  $p_{mij}^*$ , on somme ces équations pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n_i$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|p'_m\|_H^2 + l(p_m, p_m) \right] &= \langle p''_m, p'_m \rangle + l(p_m, p'_m) \\ &= \langle F_m, p'_m \rangle, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

On intègre cette équation sur  $(0, T)$ . Grâce à la coercivité faible de la forme hermitienne  $l$  et puisque d'une part, pour presque tout  $t \in (0, T)$  :

$$\begin{aligned} p_m(t) &= \int_0^t p'_m(s) ds + p_m(0) \\ \Rightarrow \|p_m(t)\|_H^2 &\leq 2 \left[ \|p_m(0)\|_H^2 + t \int_0^t \|p'_m(s)\|_H^2 ds \right] \\ &\leq c \left[ \|f\|_V^2 + t \int_0^t \|p'_m(s)\|_H^2 ds \right], \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \langle F_m, p'_m \rangle &\leq \frac{1}{2} \|F_m\|_H^2 + \frac{1}{2} \|p'_m\|_H^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|F_m\|_H^2 + \frac{1}{2} E_{p_m}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

on a démontré le lemme suivant :

**Lemme II.1.10.** Il existe une constante  $c_1 > 0$  qui ne dépend que de  $T$ , de  $E_{p_m}(0)$  et de  $\|F\|_{L^2(0, T; H)}$  ainsi qu'une constante  $c_2 > 0$  telles que :

$$E_{p_m}(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^T E_{p_m}(s) ds. \quad (\text{II.1.3})$$

Plus précisément, on peut écrire la constante  $c_1$  sous la forme :

$$c_1 = c'_1 \left( E_{p_m}(0) + \|F\|_{L^2(0, T; H)} \right),$$

où  $c'_1 > 0$  ne dépend que de  $T$ .

3. **Estimations a priori.** Le résultat obtenu au cours de la présente étape constitue une preuve (classique) du lemme de Gronwall. Posons,

pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , pour presque tout  $t \in (0, T)$  :

$$G_m(t) = c_1 + c_2 \int_0^t E_{p_m}(s) ds.$$

Comme  $E_{p_m} \in L^1(0, T)$ ,  $G_m$  est absolument continue, d'où :

$$G'_m \equiv c_2 E_{p_m} \text{ dans } L^2(0, T).$$

Or, compte tenu de l'inégalité (II.1.3), on a :

$$G'_m - c_2 G_m \leq 0, \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

Un calcul classique donne donc :

$$G_m(t) \leq c_1 e^{c_2 t}.$$

et puisque d'après l'inéquation (II.1.3),  $E_{p_m}(t) \leq G_m(t)$  pour presque tout  $t \in (0, T)$ , on conclut que :

$$E_{p_m}(t) \leq c_1 e^{c_2 t} \leq c_1 e^{c_2 T}, \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

Nous avons donc démontré le lemme suivant :

**Lemme II.1.11.** La suite  $(p_m)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; V)$ , et donc dans  $L^2(0, T; V)$  et la suite  $(p'_m)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; H)$  ainsi que dans  $L^2(0, T; V)$ .

4. **Passage à la limite : définition d'une solution.** Puisque  $V = D(L)$  et puisque les boules unité des espaces considérés sont faiblement compactes, il existe une suite extraite de  $(p_m)$ , que l'on note toujours  $(p_m)$ ,



et il existe  $p$  tels que :

$$\left| \begin{array}{l} p_m \rightharpoonup p \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ faible,} \\ Lp_m \rightharpoonup Lp \text{ dans } L^2(0,T;V') \text{ faible,} \\ p'_m \rightharpoonup p' \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ faible,} \\ p'_m \rightharpoonup p' \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ faible,} \\ p'_m \rightharpoonup p' \text{ dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Cette étape de la preuve consiste en la vérification que  $p$  est bien solution de l'équation (II.1.1). Soit  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty((0,T))$ . On multiplie l'équation (II.1.2) par  $\psi$  et on intègre le résultat sur  $(0,T)$ , il vient :

$$-\int_0^T \langle p'_m, e_{ij}^* \rangle \psi' dt + \int_0^T l(p_m, e_{ij}^*) \psi dt = \int_0^T \langle F, e_{ij}^* \rangle \psi dt.$$

En passant à la limite quand  $m \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$-\int_0^T \langle p', e_{ij}^* \rangle \psi' dt + \int_0^T l(p, e_{ij}^*) \psi dt = \int_0^T \langle F, e_{ij}^* \rangle \psi dt,$$

et comme  $(e_{ij}^*)$  est une base de  $V$ ,  $p \in L^2(V)$  et  $p' \in L^2(V')$ , pour tout  $\varphi \in V$  et tout  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty((0,T))$  :

$$-\int_0^T \langle p', \varphi \rangle \psi' dt + \int_0^T l(p, \varphi) \psi dt = \int_0^T \langle F, \varphi \rangle \psi dt.$$

En outre,  $p$  vérifie  $p'' - Lp = F$  dans  $\mathcal{D}'(0,T;V')$ . En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^T -\langle p', \varphi \rangle \psi' dt &= -\langle \langle p', \psi' \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;V'), \mathcal{D}(0,T;V)}, \varphi \rangle_{V', V} \\ &= \langle \langle p'', \psi \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;V'), \mathcal{D}(0,T;V)}, \varphi \rangle_{V', V}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \int_0^T l(p, \varphi) \psi dt &= \int_0^T \langle Lp\psi, \varphi \rangle_{V', V} dt \\ &= \langle \langle Lp, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;V'), \mathcal{D}(0,T;V)}, \varphi \rangle_{V', V}, \end{aligned}$$

et, de même :

$$\int_0^T \langle F, \varphi \rangle_{V', V} \psi \, dt = \langle \langle F, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(0, T; V'), \mathcal{D}(0, T; V)}, \varphi \rangle_{V', V}.$$

Pour finir ce point, précisons que :

$$Lp \in L^2(0, T; V') \Rightarrow p'' \in L^2(0, T; V').$$

On a donc :

**Lemme II.1.12.** La limite  $p$  obtenue vérifie :

$$p'' - Lp = F \text{ dans } L^2(0, T; V').$$

5. **Vérification des conditions initiales.** On vérifie tout d'abord que :

$$p'(0) = g.$$

Soit  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T])$  telle que  $\psi(0) \neq 0$ . En pratiquant comme dans l'étape précédente, on montre que pour tout  $\varphi \in V$  :

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle p', \varphi \rangle \psi' \, dt + \int_0^T l(p, \varphi) \psi \, dt \\ = \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \langle p'_m(0), \varphi \rangle \psi(0)}_{= \langle g, \varphi \rangle \psi(0)} + \int_0^T \langle F, \varphi \rangle \psi \, dt. \end{aligned}$$

Or puisque  $p'' - Lp = F$  dans  $\mathcal{D}'(0, T; V')$ , on reprend le calcul de l'étape précédente avec  $\varphi \in V$  et  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T])$  choisie telle que  $\psi(0) \neq 0$ . Il vient :

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle p', \varphi \rangle \psi' \, dt + \int_0^T l(p, \varphi) \psi \, dt \\ = \langle p'(0), \varphi \rangle \psi(0) + \int_0^T \langle F, \varphi \rangle \psi \, dt. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout  $\varphi \in V$  :  $\langle p'(0), \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ , d'où  $p'(0) = g$ .

Pour démontrer que :

$$p(0) = f,$$

on a recours au calcul suivant : d'après l'équation (II.1.2), quel que soit  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T])$  et pour tous  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n_i$ , on a :

$$\int_0^T \langle p'_m, e_{ij}^* \rangle \psi \, dt = -\langle p_m(0), e_{ij}^* \rangle \psi(0) - \int_0^T \langle p_m, e_{ij}^* \rangle \psi' \, dt.$$

Par passage à la limite quand  $m \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\int_0^T \langle p', e_{ij}^* \rangle \psi \, dt = -\langle f, e_{ij}^* \rangle \psi(0) - \int_0^T \langle p, e_{ij}^* \rangle \psi' \, dt,$$

et, comme précédemment, on peut remplacer  $e_{ij}^*$  par  $\varphi \in V$  quelconque. On a par ailleurs, pour tout  $\varphi \in V$  et tout  $\psi \in \mathcal{C}_K^\infty([0, T])$  :

$$\int_0^T \langle p', \varphi \rangle \psi \, dt = -\langle p(0), \varphi \rangle \psi(0) - \int_0^T \langle p, \varphi \rangle \psi' \, dt,$$

et donc, en choisissant  $\psi$  telle que  $\psi(0) \neq 0$ , on a :  $\langle p(0), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$  pour tout  $\varphi \in V$ , d'où  $p(0) = f$ .

6. **Unicité de la solution.** Puisque le problème étudié est linéaire, il suffit de montrer que si les conditions initiales sont nulles ainsi que le second membre  $F$ , alors  $p = 0$  pour prouver l'unicité de la solution obtenue. Or, si  $f = 0$ ,  $g = 0$  et  $F = 0$ , alors  $c_1 = 0$  dans l'inéquation (II.1.3), d'où  $E_{p_m}(t) = 0$  pour presque tout  $t \in (0, T)$  lorsque l'on définit :

$$p_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} p_i e_i.$$

On sait donc que  $p_m \equiv 0$  et  $p \equiv 0$ .

N.B. : l'unicité ainsi démontrée permet d'affirmer que toute la suite converge  $(p_m)$  vers  $p$ , et non seulement une suite extraite.

7. **Égalité d'énergie et convergence forte.** En procédant de même que pour obtenir l'inégalité d'énergie (II.1.3), on a :

$$E_p(T) \leq c_0(T) \left[ \|f\|_V^2 + \|g\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0, T; H)} \right],$$

et l'on en déduit le lemme suivant :

**Lemme II.1.13.** Étant donnés  $f \in V$ ,  $g \in H$  et  $F \in L^2(0, T; H)$ , la norme dans  $L^\infty(0, T; V)$  de la solution  $p$  qui leur est associée ainsi que celles de  $p'$  dans  $L^\infty(0, T; H)$  et dans  $L^2(0, T; V)$  sont toutes majorées par :

$$c_0(T) \left[ \|f\|_V^2 + \|g\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0, T; H)} \right].$$

En remplaçant  $p$  par  $p - p_m$  dans ce résultat, on déduit de ce lemme que la suite  $(p_m)$  converge fortement vers  $p$  dans  $L^\infty(0, T; V)$  et que la suite  $(p'_m)$  converge fortement vers  $p'$  dans  $L^\infty(0, T; H)$  et  $L^2(0, T; V)$ . Le Théorème 1 de [70, p. 570] termine la démonstration du lemme suivant :

**Lemme II.1.14.** La suite  $(p_m)$  satisfait aux résultats de convergence forte suivants :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour tout } t \in [0, T], p_m(t) \rightarrow p(t) \text{ dans } V, \\ \text{Pour tout } t \in [0, T], p'_m(t) \rightarrow p'(t) \text{ dans } H, \\ p'_m \rightarrow p' \text{ dans } L^2(0, T; V), \end{array} \right.$$

8. **Expression des coefficients du développement de la solution en série.** Nous avons vu que  $p$  s'écrit sous forme d'une série convergeant fortement vers  $p$  dans  $L^2(0, T; V)$ , à savoir :

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} e_{ij}.$$

Par ailleurs, les coefficients  $p_{ij}$  sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  des équations :

$$\left| \begin{array}{l} p''_{ij} - \lambda_i p_{ij} = 0, \text{ dans } L^2((0, T)), \\ p_{ij}(0) = f_{ij}, \\ p'_{ij}(0) = g_{ij}. \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que ces solutions sont celles annoncées.  $\square$

**Remarque II.1.15.** *Supposer que  $L$  est diagonalisable n'est pas nécessaire pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution, de même que les hypothèses de régularité sur les conditions initiales  $f$  et  $g$  ainsi que sur le second membre  $F$  ne sont pas optimales.*

*Nous cherchons cependant à obtenir des formules de reconstruction de l'objet  $f$ , d'où l'intérêt de ces hypothèses, dont nous n'avons su nous défaire sans perdre la validité du développement en série « explicite » de la solution.*

## II.2 Application : Théorème de Agranovsky et Kuchment

Comme nous allons le montrer, les théorèmes proposés dans [5], dont le Théorème IV.3.1 page 86 que nous avons présenté en fin de Chapitre A, peuvent être déduits du Théorème II.1.8 page 106. Nous verrons ensuite comment utiliser les techniques proposées par Agranovsky et Kuchment pour résoudre le problème de la TTA lorsque la source d'onde de pression n'est plus une impulsion de Dirac.

Concernant la méthode proposée par Agranovsky et Kuchment dans [5], la première idée est d'introduire les données directement dans l'équation d'état (II.1.1) tout en définissant un problème de Cauchy avec conditions au bord de Dirichlet. Nous nous serons ainsi ramené à une équation résolue dans le Théorème II.1.8 page 106 et aurons à notre disposition des formules explicites pour les solutions.

### Un résultat abstrait

Outre les hypothèses du théorème, nous supposons dorénavant que l'opérateur  $-L$  est positif, de sorte que les racines carrées des valeurs propres  $\lambda_i$  s'écrivent  $\mu_i = i\beta_i$  avec  $\beta \in \mathbb{R}$ . On étudie l'équation (II.1.1) posée sur un intervalle  $(t_0, \infty)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Supposons enfin que  $F \in L^1(0, T; H)$  et  $g \equiv 0$  et posons :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \left[ \|p_t\|_H^2 + \|p\|_V^2 \right].$$

On obtient alors le Théorème 5 énoncé dans [5] :

**Théorème II.2.1.** Si la solution  $p$  de l'équation (II.1.1) vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_p(t) = 0,$$

alors, pour tous  $1 \leq i \leq \infty$  et  $1 \leq j \leq n_i$  :

$$p_{ij}(t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_i(t-s))}{\beta_i} F_{ij}(s) ds. \quad (\text{II.2.4})$$

En particulier, si  $t_0 = 0$ , on a :

$$f_{ij} = - \int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta_i(t-s))}{\beta_i} F_{ij}(s) ds.$$

PREUVE. En effet, puisque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_p(t) = 0,$$

les coefficients du développement de la solution  $p$  dans la base de Riesz  $(e_{ij})$  vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = 0.$$

En tant que solutions des équations posées dans le système (II.1.2), elles admettent donc la représentation (II.2.4).  $\square$

Étant données des observations  $p^\circ$  définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'' - Lp = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, \infty; V'), \\ p(0) = f, \\ p'(0) = 0, \\ p^\circ = p \text{ sur } \mathcal{S}_\infty, \end{array} \right.$$

où l'inconnue  $f$  appartient à  $V$ , on peut en définir l'extension harmonique suivante à  $\Omega$  : puisque  $-L$  est positif, on note  $u^\circ = E(p^\circ)$  l'unique solution de l'équation  $Lu^\circ = 0$  telle que  $u^\circ = p^\circ$  sur  $\partial\Omega$ .

On note  $\tilde{p} = p - u_o$ , qui est alors solution de :

$$\begin{cases} \tilde{p}'' - L\tilde{p} = -u'' , \\ \tilde{p}(0) = f - u^o(0) \\ \tilde{p}'(0) = 0, \\ \tilde{p} = 0 \text{ sur } \mathcal{S}_\infty. \end{cases}$$

D'après le Théorème II.2.1 page 115, il vient :

**Corollaire II.2.2.** Les données et l'objet sont liés par l'équation suivante :

$$f_{ij} = u_{ij}^o(0) - \int_0^\infty \frac{\sin(\beta_i(t-s))}{\beta_i} u_{ij}^o''(s) ds.$$

### Cas particulier : TTA en milieu hétérogène

On suppose que les objets qui nous intéressent sont inclus dans un ouvert borné régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , dont la frontière constitue la surface d'observation :  $\mathcal{S} = \partial\Omega$ . Nous nous plaçons en effet dans le cas d'observations complètes et non bruitées. Posons :  $\mathcal{S}_\infty = (0, \infty) \times \mathcal{S}$ .

Sous les hypothèses du Théorème II.1.8 page 106, l'opérateur  $L$  est défini par  $L = c(x)\Delta$  où la vitesse  $c \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  est strictement positive.  $L$  est donc un opérateur non borné autoadjoint et compact sur  $H = L^2(\Omega, c(x)^{-1}dx)$ , ainsi que positif sur son domaine  $V = D(L)$ . La base  $(e_{ij})$  est alors sa propre base biorthogonale.

**Remarque II.2.3.** Nous définissons l'opérateur  $L$  selon les hypothèses proposées dans [5], la généralisation à celles présentées dans [218] étant directe. L'opérateur  $L$  y est défini comme suit :

$$L = c^2 \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \left( \frac{1}{i} \frac{d}{dx_i} + a_i \right) g^{ij} \sqrt{\det(g)} \left( \frac{1}{i} \frac{d}{dx_j} + a_j \right) + q,$$

où  $g$  est une métrique Riemannienne sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $c$  et  $q$  des fonctions régulières et positives.

On suppose que la vitesse  $c$  est non-trapping, de sorte que les estimations de décroissance locale d'énergie (Théorème III.3.16 page 58 du Chapitre A)

sont vérifiées. Ainsi la solution  $p$  et donc la fonction  $u^o$  vérifient les hypothèses du Théorème II.2.1 page 115.

**Remarque II.2.4.** *En dimension impaire, il existe  $0 < T < \infty$  tel que :*

$$E(t) = 0 \text{ pour tout } t \geq T,$$

*de sorte que les intégrations peuvent avoir lieu sur  $(0, T)$  au lieu de  $(0, \infty)$ .*

Suivant la méthode employée dans [5], le lemme suivant permet de déduire le Théorème IV.3.1 page 86 du Chapitre A du Théorème II.2.1 et du Corollaire II.2.2 de la page précédente :

**Lemme II.2.5.** *Pour tout  $1 \leq i \leq \infty$  et tout  $1 \leq j \leq n_i$ , on a :*

$$u_{ij}^o(t) = \langle u^o(t), e_{ij} \rangle_{L^2(\Omega, c(x)^{-1} dx)} = \mu_i^{-2} \int_S p^o(t) \partial_\nu e_{ij} \, d\sigma.$$

En effet, on a alors :

$$u_{ij}^{o''}(t) = \mu_i^{-2} \int_S p^{o''}(t) \partial_\nu e_{ij} \, d\sigma,$$

et une intégration par partie permet de conclure.

### Extension du théorème

La méthode proposée précédemment permet de résoudre un problème plus général que le problème usuel de la TTA. L'opérateur  $L$  est à nouveau supposé respecter les hypothèses II.1.8 page 106 du théorème et être positif.

Revenons à la partie II.2 page 24 du Chapitre A, lors de laquelle nous avons vu que les équations :

$$\begin{cases} p_{tt} + Lp = F \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = 0, \\ p_t(0) = 0, \end{cases}$$



et :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{tt} + Lp = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = f, \\ p_t(0) = 0, \end{array} \right.$$

admettent la même solution lorsque la source est issue d'une impulsion modélisée par une distribution de Dirac :  $F(t,x) = \delta'(t)f(x)$ .

Nous supposons ici que ce n'est pas le cas : soit  $F \in L^1(0,T;H)$  telle que  $t \mapsto F(t)$  est à support compact dans  $[0,\infty)$ . Nous souhaitons résoudre le problème suivant :

Déterminer le second membre  $F$  à partir de la connaissance des données  $p^o$  définies sur  $\mathcal{S}_\infty = (0,\infty) \times \mathcal{S}$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'' - Lp = F \text{ sur } (0,\infty) \times \Omega, \\ p(0) = 0, \\ p'(0) = 0, \\ p^o = p \text{ sur } \mathcal{S}_\infty. \end{array} \right. \quad (\text{II.2.5})$$

Comme précédemment, on utilise la solution  $u^o = E(p^o)$  de l'équation  $Lu^o = p^o$  dans  $V$  et on définit  $\tilde{p} = p - u^o$  qui est solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}'' - L\tilde{p} = F - u^{o''} \text{ sur } (0,\infty) \times \Omega, \\ \tilde{p}(0) = -u^o(0), \\ \tilde{p}'(0) = 0, \\ \tilde{p} = 0 \text{ sur } \mathcal{S}_\infty. \end{array} \right.$$

De même que pour le Corollaire II.2.2 page 117, on déduit le résultat suivant du Théorème II.2.1 :

**Corollaire II.2.6.** Si la solution  $p$  de l'équation (II.2.5) vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_p(t) = 0,$$

alors :

$$u_{ij}^o - \int_0^\infty \mu_i^{-1} \sin(\mu_i(t-s)) (F_{ij}(s) - u_{ij}^{o''}(s)) ds = 0. \quad (\text{II.2.6})$$

Finalement, en dérivant l'équation (II.2.6), si l'on note :

$$\mathbb{T}_i(t) = \mu_i^{-1} \sin(\mu_i(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

et \* l'opération de convolution par rapport à la variable temporelle  $t$ , alors :

$$u^o = \frac{d}{dt} \{ \mathbb{T}_i * [(F_{ij} - u_{ij}^{o''}) \mathbf{1}_{[t,\infty)}] \}.$$

Nous avons donc prouvé le théorème suivant, qui montre que l'on peut ramener le Problème (II.2.6) à un problème de déconvolution :

**Théorème II.2.7.** Étant donné un objet  $F$  à déterminer et des observations  $p^o$  définies par la Problème (II.2.6),  $F$  peut être reconstruit en résolvant le problème de déconvolution :

$$u^o = \frac{d}{dt} \{ \mathbb{T}_i * [(F_{ij} - u_{ij}^{o''}) \mathbf{1}_{[t,\infty)}] \}. \quad (\text{II.2.7})$$

**Remarque II.2.8.** Si le Lemme II.2.5 est vérifié, il est à nouveau possible d'exprimer les termes  $u_{ij}^o$  en fonction de  $p_{ij}^o$  et des fonctions propres  $e_{ij}$ .

### III Une méthode variationnelle

Classiques parmi les méthodes de résolution de problèmes inverses, les techniques de résolution variationnelles mènent à de nouvelles méthodes de reconstruction pour le problème de la TTA. Nous avons exposé la plupart des résultats présentés dans cette section dans l'article [42]. Ainsi que d'autres auteurs (consulter [15, 62, 145, 183, 260, 261, 270]), nous nous sommes intéressés à cette technique pour ses qualités *a priori* (robustesse, adaptabilité à des conditions variées, etc.), qui ont été confirmées par nos expérimentations.

Dans l'ensemble de cette section on reprend les notations introduites dans la Section III.1 du Chapitre A.

#### Notations

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- La boule ouverte de centre  $x \in \mathbb{R}^3$  et de rayon  $r > 0$  est notée  $B(x, r)$ .
- Sa frontière, la sphère de centre  $x$  et de rayon  $r$ , est notée  $S(x, r)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$  et  $0 < r_1 < r_2$ , nous définissons l'anneau de centre  $x \in \mathbb{R}^3$  et de rayons  $r_1, r_2 > 0$  :

$$A(x, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^3; r_1 < \|x - y\| < r_2\},$$

et, si  $x = 0$  :

$$A(r_1, r_2) = A(0, r_1, r_2).$$

- Pour tout ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $r > 0$ , on note  $T(E, r)$  l'ensemble  $E$  étendu aux points étant à distance inférieure à  $r$  de  $E$  :

$$T(E, r) = \{y \in \mathbb{R}^3; \exists x \in E, \|y - x\| < r\}.$$

#### III.1 Première approche

Nous présentons tout d'abord cette méthode telle que nous l'avons exposée dans [42].

On suppose que  $\mathcal{L} = \partial_{tt} - \Delta$  en espace tridimensionnel :  $n = 3$ . En particulier, la vitesse des ondes de pression est constante et normalisée ( $c \equiv 1$ ).

Quitte à changer d'échelle d'espace, on définit le domaine observé comme étant la boule ouverte  $B = B(0,1)$ , dont la frontière est la surface d'observation  $\mathcal{S} = S(0,1)$ . Afin de travailler avec une surface d'observation de mesure non nulle, la discrétisation du problème nous autorise à approcher  $\mathcal{S}$  par un *domaine d'observation approché*  $\mathcal{S}_\varepsilon$  ouvert :  $\mathcal{S}_\varepsilon = A_\varepsilon \subset A(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . En effet, étant donnée un pas de discrétisation, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute fonction dont le support est contenu dans  $T(\mathcal{S}, 2\varepsilon)$  et valant 1 sur  $\mathcal{S}_\varepsilon$  admet la même discrétisation que la fonction indicatrice  $\mathbf{1}_\mathcal{S}$  de  $\mathcal{S}$  (voir la figure III.1.1).

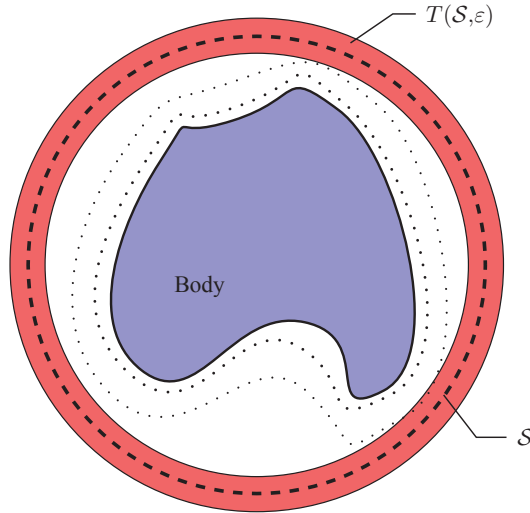


FIGURE III.1.1 – Le corps à reconstruire, qui génère une onde de pression  $p_{\text{données}}$ , est entouré par le surface d'observation  $\mathcal{S}$ . En rouge, le domaine d'observation approché  $\mathcal{S}_\varepsilon = A_\varepsilon$ .

L'équation du modèle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}p(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in Q_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = f \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p(0) = g \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (\text{III.1.1})$$

avec  $\mathcal{L} = \partial_{tt} - \Delta$ , et nous voulons reconstruire un objet  $f$  appartenant à  $H_0^1(B)$  à partir des observations  $p^o = Cp_{\text{exacte}} + p_{\text{bruit}}$ , sachant que  $p_{\text{exacte}}$

est définie par :

$$p_{\text{exacte}} := Wf.$$

Dans cette partie concernant l'étude théorique de cette méthode variationnelle, nous supposons que les données ne sont pas bruitées, et donc que  $p^o = p_{\text{exacte}}$ . On a alors  $p^o = Wf$ .

Rappelons<sup>5</sup> que l'opérateur linéaire  $\mathcal{W}$  associe la solution de l'équation (III.1.1) qui est associée à la condition initiale  $f$  avec dérivée temporelle  $g$  nulle à l'instant  $t = 0$ , mais restreinte au domaine d'observation ouvert et non vide  $\mathcal{S}_\varepsilon$ . Précisément, l'opérateur  $\mathcal{W}$  s'écrit  $\mathcal{W} = CW$ , où l'opérateur  $W$  est défini par :

$$\begin{aligned} W & : H_0^1(B) \longrightarrow C^0([0,T]; H_0^1(B(0,R))) \\ f & \longmapsto Wf, \end{aligned}$$

où  $Wf$  est la solution faible de (III.1.1) pour laquelle  $g = 0$ .

Même si  $Wf$  est définie sur tout  $\mathbb{R}^3$ , on peut choisir  $R > 0$  suffisamment grand de sorte que toute solution de l'équation (III.1.1) ait une trace nulle sur la sphère frontière  $S(0,R)$  et soit nulle hors de  $B(0,R)$ , *i.e.* sur  $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,R)$ . Le rayon  $R$  est donc choisi tel que la restriction de  $Wf$  à  $B(0,R)$  soit dans  $H_0^1(B(0,R))$ , et ce à tout instant  $t \in [0,T]$ . L'opérateur d'observation  $C$  est l'opérateur de restriction au domaine d'observation  $\mathcal{S}_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} C & : L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2([0,T] \times \mathcal{S}_\varepsilon) \\ g & \longmapsto g|_{\mathcal{S}_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons redéfinir le problème de la TTA comme le problème approché suivant :

---

5. Voir aussi les notations de la Sous-section III.1 du Chapitre A.

Nous voulons résoudre le problème inverse :

$$\mathcal{W}f = p^o,$$

en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } J_\alpha(f) \\ \text{s.c. } f \in H_0^1(B), \end{array} \right.$$

où  $J_\alpha$  est la fonctionnelle de Tikhonov :

$$\begin{aligned} J_\alpha &: H_0^1(B) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{W}f - p^o\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \|f\|_{L^2(B)}^2, \end{aligned}$$

avec  $\alpha > 0$ .

Puisque  $\mathcal{W}$  est un opérateur linéaire et borné d'une part et grâce au paramètre de régularisation  $\alpha > 0$  d'autre part, la fonctionnelle  $J_\alpha$  est strictement convexe, différentiable et coercive. Toute solution  $f_\alpha$  de  $(\mathcal{P}_\alpha)$  est donc caractérisée par :

$$\nabla J_\alpha(f_\alpha) = \mathcal{W}^*(\mathcal{W}f_\alpha - p^o) + \alpha f_\alpha = 0.$$

Ainsi, quel que soit  $\alpha > 0$ , le Problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$  est bien posé et l'équation ci-dessus admet une unique solution définie par :

$$f_\alpha = (\mathcal{W}^*\mathcal{W} + \alpha I)^{-1} \mathcal{W}^* p^o.$$

Nous avons choisi de résoudre ce problème en utilisant une méthode de gradient conjugué, laquelle requiert le calcul de  $\nabla J_\alpha$  à chaque itération. Pour effectuer ce calcul, remarquons que pour tout  $\psi \in C_K^\infty(B)$  et  $f \in H_1^0(B)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla J_\alpha(f), \psi \rangle_{L^2(B)} &= \langle \mathcal{W}^*(\mathcal{W}f - p^o), \psi \rangle + \alpha \langle f, \psi \rangle \\ &= \underbrace{\langle \mathcal{W}f - p^o, \mathcal{W}\psi \rangle}_{G_{f,\psi}} + \alpha \langle f, \psi \rangle, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} G_{f,\psi} &= \int_0^T \int_{A_\varepsilon} (Wf - p^o) W\psi \\ &= \int_0^T \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{A_\varepsilon} (Wf - p^o) W\psi. \end{aligned}$$

Si l'on considère la solution faible de l'équation adjointe (rétrograde) suivante :

$$\begin{cases} \partial_{tt}u^*(x,t) - \Delta u^*(x,t) = \mathbf{1}_{\mathcal{S}_\varepsilon}(Wf - p^o), \\ u^*(x,T) = 0, \\ \partial_t u^*(x,T) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.1.2})$$

et puisque  $W\psi \in C_K^\infty(B(0,R))$ , il vient :

$$G_{f,\psi} = \int_0^T \int_{B(0,R)} \partial_{tt}u^* W\psi + \int_0^T \int_{B(0,R)} \langle \nabla u^*, \nabla W\psi \rangle.$$

On a choisi la boule  $B(0,R)$  suffisamment grande pour que l'on obtienne, après application de la formule de Green et intégration par parties :

$$\begin{aligned} G_{f,\psi} &= \int_0^T \int_{B(0,R)} u^* LW\psi - \int_{B(0,R)} \partial_t u^*(x,0) W\psi(0) \\ &= \langle -\partial_t u^*(\cdot,0), \psi \rangle. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\nabla J_\alpha(f) = -\partial_t u^*(\cdot,0) + \alpha f.$$

D'après ce calcul, il est possible d'obtenir le gradient de la fonctionnelle  $J_\alpha$  en calculant la solution  $Wf$  et l'état adjoint  $u^*$ . Aussi le coût d'une itération de gradient conjugué est de l'ordre de celui de deux itérations d'un calcul de solution de l'équation des ondes. Lors de ce calcul, il est cependant nécessaire de conserver en mémoire  $Wf - p_{\text{données}}$  sur  $A_\varepsilon$  et à tout instant afin de calculer ensuite l'état adjoint.

Enfin, le calcul de  $\nabla J_\alpha$  effectué ci-dessus dans un cadre continu a son équivalent dans le cas d'équations discrétisées. L'équation adjointe discrète

sera alors calculée comme équation adjointe de l'équation des ondes discrétisée choisie. La méthode est donc grandement dépendante de la technique de discrétisation choisie pour l'équation (III.1.1).

### III.2 Seconde étude

Nous verrons dans le chapitre suivant que la régularisation imposée à la reconstruction<sup>6</sup> n'est pas aussi souhaitable en pratique qu'en théorie. L'absence de ce terme entraîne cependant que la fonctionnelle  $J_0$  n'est pas nécessairement coercive. Nous proposons donc une seconde approche des méthodes de minimisation variationnelle, laquelle nous permettra par ailleurs de définir une méthode valable en toute dimension, en cas de milieu hétérogène et pour des surfaces d'observation très générales.

#### Cadre d'étude

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\mathcal{L} = \partial_{tt} - c(x)\Delta$  où  $c \in L^\infty$  est strictement positive et telle qu'il existe  $a, b > 0$  tels que :

$$a < c(x) < b \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Le domaine d'intérêt  $\Omega$  est un ouvert borné régulier quelconque, on suppose que la surface d'observation  $\mathcal{S} \subset \partial\Omega$  est non vide et incluse dans la frontière de  $\Omega$ . On approche cette surface d'observation par un domaine d'observation approché défini par  $\mathcal{S}_\varepsilon = T(\mathcal{S}, \varepsilon)$ . On fixe enfin l'horizon de temps  $T \in (0, \infty]$ .

On s'intéresse donc aux solutions de l'équation :

$$\begin{cases} \mathcal{L}p(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in Q_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = f \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p(0) = g \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (\text{III.2.3})$$

où  $\mathcal{L} = \partial_{tt} - c(x)\Delta$ .

---

6. Cette régularisation est imposée par la présence du terme  $\frac{\alpha}{2} \|f\|_{L^2(B)}^2$  dans la fonctionnelle  $J_\alpha$ .



Étant donné des observations  $p^o \in L^2((0,T) \times \mathcal{S}_\varepsilon)$ , nous souhaitons à nouveau résoudre le problème inverse suivant :

$$\mathcal{W}f = p^o,$$

par le biais du problème de minimisation quadratique linéaire suivant :

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(f) \\ \text{s.c. } f \in H_0^1(B). \end{array} \right.$$

où  $J$  est la fonctionnelle de Tikhonov suivante :

$$\begin{aligned} J &: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{W}f - p^o\|_{L^2(\mathcal{S}_\varepsilon)}^2 dt. \end{aligned}$$

Cette fonctionnelle est différentiable et convexe.

### L'inégalité d'observation

On suppose que les observations sont non bruitées et issues du modèle : il existe  $p_{\text{exacte}}$  solution du problème de Cauchy (III.2.3) ayant pour condition initiale l'objet  $f$  et  $g = 0$  et telle que  $p^o = \mathcal{W}f = Cp_{\text{exacte}}$ . Ainsi la coercivité de la fonctionnelle est définie par :

$$\exists c > 0; \|\mathcal{W}f\|_{L^2((0,T) \times \mathcal{S}_\varepsilon)}^2 \geq c \|f\|_{H_0^1(B)}^2, \forall f \in H_0^1(B), \quad (\text{III.2.4})$$

c'est-à-dire telle que :

$$\int_0^T \|C[Wf](t)\|_{L^2(\mathcal{S}_\varepsilon)}^2 dt \geq c \|f\|_{H_0^1(B)}^2,$$

ou encore, en notant  $\{\mathbb{T}(t)\}_{t \geq 0}$  le semi-groupe unitaire associé à l'équation (III.2.3) :

$$\int_0^T \|C\mathbb{T}(t)f\|_{L^2(\mathcal{S}_\varepsilon)}^2 dt \geq c \|f\|_{H_0^1(B)}^2.$$

Cette inégalité, que nous retrouverons à maintes reprises, est traditionnellement appelée *inégalité d'observation* (voir en particulier la Section V) et la condition (III.2.4) est dite *condition d'observation*.

Le résultat suivant montre déjà l'importance de cette inégalité dans le cadre qui nous est imparti :

**Proposition III.2.1.** La condition d'observation (III.2.4) est équivalente à la stricte convexité de la fonctionnelle  $J$ .

PREUVE. Tout d'abord, la stricte convexité de  $J$  est équivalente au fait que, quels que soient  $f_1, f_2 \in H_0^1(B)$  tels que  $f_1 \neq f_2$  :

$$\langle \nabla J(f_2) - \nabla J(f_1), f_2 - f_1 \rangle > 0,$$

et l'on a :

$$\langle \nabla J(f_2) - \nabla J(f_1), f_2 - f_1 \rangle = \|\mathcal{W}(f_2 - f_1)\|^2.$$

D'où l'on déduit directement que la condition d'observation implique la stricte convexité de  $J$ .

Réciproquement, si la condition d'observation n'est pas respectée, montrons qu'il existe  $f \in H_0^1(B)$  tel que  $f \neq 0$  et  $\mathcal{W}f = 0$ . On montre aisément que si la condition (III.2.4) n'est pas respectée, alors il existe une suite  $(f_n) \in H_0^1(B)^{\mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\|f_n\|_{H_0^1(B)} = 1,$$

et

$$\|\mathcal{W}f_n\|_{L^2((0,T) \times \mathcal{S}_\varepsilon)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque la suite  $(f_n)$  est bornée dans  $H_0^1$ , elle admet une sous-suite convergeant faiblement dans  $H_0^1$ , dont on note  $f$  la limite faible. Ainsi  $(\mathcal{W}f_n)$  converge faiblement vers  $\mathcal{W}f$  dans  $L^2((0,T) \times \mathcal{S}_\varepsilon)$ , et puisque cette suite converge fortement vers 0, on a prouvé l'existence d'un objet  $f \in H_0^1$  de norme 1 – et donc non nul – tel que  $\|\mathcal{W}f\|_{L^2((0,T) \times \mathcal{S}_\varepsilon)} = 0$ . Ainsi, quel que

soit l'objet  $f_0 \in H_0^1(B)$ , on a :

$$\|\mathcal{W}(f + f_0) - \mathcal{W}f_0\| = 0,$$

et  $J$  n'est pas strictement convexe. □

La preuve de ce résultat peut aussi être abordée directement à partir des définitions de la convexité et de la stricte convexité puisque, par définition, la fonctionnelle  $J$  est convexe si et seulement si pour tout  $(f_1, f_2) \in H_0^1(B)$  et pour tout  $t \in (0,1)$  :

$$J(tf_1 + (1-t)f_2) \leq tJ(f_1) + (1-t)J(f_2),$$

et strictement convexe si l'on a inégalité stricte dès lors que  $f_1 \neq f_2$ . Or, si l'on note  $p_1^o = \mathcal{W}f_1$  et  $p_2^o = \mathcal{W}f_2$  les données non bruitées respectivement associées aux objets  $f_1$  et  $f_2$  :

$$\begin{aligned} J(tf_1 + (1-t)f_2) &= \|tp_1^o + (1-t)p_2^o\|^2 \\ &= t^2 \|p_1^o\|^2 + (1-t)^2 \|p_2^o\|^2 \\ &\quad + 2t(1-t)\langle p_1^o, p_2^o \rangle \\ &= t^2 \|p_1^o\|^2 + (1-t)^2 \|p_2^o\|^2 \\ &\quad + t(1-t) \left[ \|p_1^o\|^2 + \|p_2^o\|^2 - \|p_2^o - p_1^o\|^2 \right] \\ &\leq tJ(p_1^o) + (1-t)J(p_2^o), \end{aligned}$$

où les normes et produits scalaires sont ceux naturellement associés à l'espace  $L^2((0,T) \times \mathcal{S}_\varepsilon)$ . La convexité de  $J$  est ainsi prouvée et on constate que l'on n'a égalité dans le calcul précédent que si :

$$\mathcal{W}f_1 = \mathcal{W}f_2.$$

Puisque l'inégalité d'énergie implique l'injectivité de  $\mathcal{W}$ , il vient, dans ce cas : si  $f_1 \neq f_2$ , alors on a inégalité stricte, et  $J$  est strictement convexe.

Enfin, la seconde implication peut être démontrée comme précédemment.

**Bilan**

Ainsi, si l'on suppose l'inégalité d'observation vérifiée, la méthode exposée dans la sous-section précédente reste donc valable et l'on peut utiliser la méthode de descente proposée pour résoudre le problème de la TTA.

Nous verrons au cours du Chapitre C que cette méthode de résolution a des spécificités qui la rendent très intéressante : malgré une complexité élevée, la minimisation est particulièrement robuste tant vis-à-vis du bruit que de l'observabilité. En particulier, nous testerons cette méthode hors du cadre coercif présenté ci-dessus avec des résultats remarquables. Cette situation nous intéresse tout particulièrement en pratique dès lors qu'une connaissance des variations de vitesse peut être fournie indépendamment de la résolution du problème de la TTA.

## IV Le nudging direct et rétrograde

Les idées présentées dans cette section trouvent leur source dans les travaux de Auroux et Blum (consulter la thèse de Didier Auroux [22] et [24], puis [26], qui précise les idées introduites dans le précédent), qui ont été indépendamment suivis par [194]. Elles fondent la majorité de nos travaux : c'est en effet à partir de la connaissance de l'algorithme de *Back and Forth Nudging* (BFN, ou *Nudging Direct et Rétrograde*) et de son étude que nous avons défini des méthodes de reconstruction itératives pour différents types d'observateurs.

Nous commençons par définir la méthode de nudging, puis l'algorithme du BFN, en Sous-section IV.1. Nous étendrons cette définition aux observateurs itératifs généraux dans la Section V. Nous présenterons, dans la Sous-section IV.2, les divers moyens de définir rigoureusement le BFN pour les systèmes dynamiques de dimension infinie, dont ceux concernant les opérateurs linéaires diagonalisables, cas le plus général abordé à ce jour en ce qui concerne les systèmes linéaires, à notre connaissance. Nos applications du BFN à la TTA sont enfin présentées dans la Sous-section IV.3, où seront abordés les aspects spécifiques du BFN appliqué aux équations d'onde pour des données du type de celles de la TTA.

### IV.1 Origine et définitions de l'algorithme BFN

Nous dédions cette première sous-partie à une présentation heuristique du BFN, laquelle est suivie d'une définition mathématique générale de cet algorithme et de l'opérateur de BFN qui lui correspond.

On se donne un opérateur d'observations  $C$  continu de l'espace d'état  $H$  dans l'espace des observations  $U$ . Ces deux espaces sont supposés être des Hilbert.

#### IV.1.1 Origines du BFN

##### Présentation du nudging

Aux fondements du BFN se trouve la méthode de nudging qui consiste en la résolution du problème de détectabilité (I.0.5) à l'aide d'un rappel de la

forme d'une relaxation newtonienne :  $\hat{\Pi} = -\mathbf{C}^*K$  avec  $K$  positif. On appelle donc l'observateur  $A - \mathbf{C}^*KC$  *observateur de nudging* (ou de *relaxation newtonienne*, de *Luenberger* ou encore *observateur asymptotique*). Le rappel est alors assuré par un retour d'état d'une forme extrêmement simple, qui œuvre à « tirer » l'état  $p$  vers les données  $p^o$ , le but de cette méthode étant que la trajectoire suivie par l'état de l'observateur de nudging atteigne asymptotiquement la trajectoire des données. Ce type de rappel est à rapprocher de la méthode de collocation, pour laquelle l'observateur s'écrit  $A - \mathbf{C}^*C$  (notamment étudiés, dans le cas particulier où  $A$  est antiadjoint, dans [68, 108, 213]).

Contrairement à la méthode variationnelle présentée dans la Section III, le nudging ne suppose pas que le modèle représente exactement le phénomène observé. Il y est en effet modifié afin de tenir compte de l'écart entre état simulé et données : le modèle est d'autant plus pénalisé que l'état est éloigné des observations.

Au sujet du nudging et plus généralement de l'assimilation de données, le lecteur intéressé pourra se référer à [272] et [64] duquel nous tirons la citation suivante, traduite par nos soins : « *Robert Kistler [129] [...] a été le premier à appliquer le nudging à une équation de Shallow-Water, dans sa thèse de 1974. Davies et Turner [71] ont été les premiers européens à utiliser le nudging comme outil d'assimilation de données. Ce sujet a été présenté dans le survol de Seaman [208] et le British Meteorological Office utilise une version du nudging pour de l'assimilation de données opérationnelle [158].* ».

Mais les toutes premières utilisations de la technique de nudging que nous ayons recensées sont du fait de Anthes et ses collègues [21, 113]. À leur suite, outre les références précitées, la plupart des usages faits du nudging concernent l'océanographie (voir notamment [35, 135, 159, 163, 242, 243]) et l'assimilation de données atmosphériques en modèle méso-échelle [216].

Notons enfin, avec [215, 244, 272], que le nudging peut être perçu comme une approximation du filtre de Kalman. Nous précisons cette idée dans la Section V. Dans les articles cités, le coefficient de nudging est optimisé au moyen d'une estimation de paramètre minimisant l'écart entre l'état reconstruit et les observations. Cette optimisation du paramètre de nudging néces-

site cependant l'implémentation de l'état adjoint du modèle et implique donc une complexité accrue, comparable aux méthodes variationnelles usuelles.

### Le BFN : introduction

En comparaison des méthodes précitées (nudging, collocation et plus généralement stabilisation de systèmes linéaires), le BFN a l'originalité de proposer une résolution à l'aide d'un algorithme comprenant une étape complémentaire à l'évolution en temps direct de la technique de nudging : une fois un état final défini par un évolution de l'observateur de nudging, le temps est remonté au moyen d'une *implémentation rétrograde – en temps – de la méthode de nudging*, avec un rappel adapté. Avec nos notations, l'observateur de nudging rétrograde s'écrit donc  $-\mathbf{A} - \mathbf{C}^*K\mathbf{C}$  où  $K > 0$ .

Le parallèle avec les méthodes de renversement temporel introduite en Sous-section IV.4 du Chapitre A est donc direct : ces méthodes ainsi que le BFN profitent de la réversibilité temporelle des systèmes considérés pour remonter (virtuellement) le temps. Par la suite, nous aborderons le problème de la réversibilité temporelle à différentes reprises. Pour le moment, notons simplement que les systèmes linéaires de dimension finie, et donc les approximations numériques des modèles, sont théoriquement réversibles et que, pour le problème qui nous concerne, les équation d'ondes linéaires non-atténuées le sont aussi. Différents cadres d'application de cette méthode peuvent donc déjà être envisagés.

L'idée de remonter le temps répond à des constats simples : d'une part les données ne sont jamais disponibles sur un intervalle de temps infini, d'autre part l'implémentation a aussi lieu sur un intervalle de temps fini, et enfin, le nudging n'utilise pas les données de manière optimale ainsi que le font les méthodes traditionnelles d'assimilation de données. Face à ces constats, Auroux et Blum proposent alors *de réutiliser les données lors de passages successifs le long de l'intervalle temporel d'assimilation en appliquant la méthode de nudging et en escomptant obtenir la convergence de la trajectoire de l'état vers celle des données* (voir [22]).

Avec l'algorithme de *Back and Forth Nudging* (BFN), ces auteurs proposent donc un moyen de pallier la finitude de l'horizon de temps lorsque

celle-ci nuit à la stabilisation d'un système dynamique. Nous l'avons vu, puisque les problèmes de stabilisation sont parfois équivalents ou approchent des problèmes de contrôlabilité, des problèmes inverses, etc., le BFN répond à de nombreux problèmes.

Avant de nous intéresser aux définitions mathématiques rigoureuses du BFN, notons que deux méthodes qui lui sont antérieures et qui reposent aussi sur un fonctionnement d'allers et retours temporels permettant de reconstruire un état initial approché à partir de données.

En 1981, deux articles de Talagrand [228, 227] proposent en effet une méthode d'assimilation dite *forward-backward* (i.e. directe-rétrograde) dans laquelle des itérations similaires à celles du BFN sont considérées, mais dans lesquelles l'état reconstruit est remplacé par les données aux lieu d'observation et à chaque instant où des données sont disponibles. Cette méthode peut donc être vue comme un cas particulier de nudging direct et rétrograde doté de coefficients de nudging infinis (voir la définition IV.1.1 ci-dessous).

Plus tard, Wang et ses collègues proposent une méthode dite *quasi-inverse* qui consiste à introduire une évolution rétrograde du linéaire tangent dans le 4D-VAR dans laquelle le signe du terme de diffusion est inversé afin de conserver le caractère bien posé de l'équation<sup>7</sup>. Cette méthode est introduite dans [254] et reprise notamment dans [128].

#### IV.1.2 Définition du BFN

Dans cette sous-partie, nous définissons l'algorithme BFN pour des modèles linéaires puisque les non linéarités sont négligées dans les applications qui nous intéressent. Cette définition s'étend naturellement à des systèmes non linéaires, pour lesquels nous renvoyons notamment à [28] et aux autres articles de ses auteurs. Notons en particulier que ce dernier article étend les travaux précédents de S. Bonnabel, P. Martin et P. Rouchon sur l'observation de modèles non linéaires – voir [38, 39, 40] – à des techniques directes et rétrogrades.

---

7. Cette intégration rétrograde du modèle  $y$  est rendue nécessaire par l'implémentation de l'algorithme de Newton adjoint.



**L'algorithme**

Soit  $A$  un opérateur non borné sur un espace de Hilbert  $H$  de domaine  $V = D(A)$  et  $0 < T < \infty$  un horizon de temps fini. On considère un phénomène modélisé par l'équation suivante, supposée être bien posée<sup>8</sup> :

$$\left| \begin{array}{l} p' = Ap, \text{ sur } (0, T), p(0) = f_0. \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.1})$$

À nouveau, des données  $p^o = Cp = \mathcal{W}f_0$  sont disponibles et nous voulons reconstruire l'état initial  $f_0$  à partir de celles-ci.

L'*algorithme du BFN* est composé, comme annoncé, d'une itération directe et d'une itération rétrograde de la technique de nudging appliquée à l'équation (IV.1.1). On obtient donc l'algorithme de reconstruction (c'est-à-dire de résolution du problème inverse  $p^o = \mathcal{W}f_0$ ) suivant :

**Définition IV.1.1.** ALGORITHME BFN, CAS GÉNÉRAL. *Soit  $K^f$  et  $K^b$  deux opérateurs positifs continus sur l'espace des observations  $U$ . Le BFN consiste à itérer le processus défini ci-après. Étant donnée une ébauche de reconstruction  $f_1$ , on lui applique l'évolution directe suivante :*

$$\left| \begin{array}{l} p^{f'} = Ap^f - C^*K^f(Cp^f - p^o), \text{ sur } (0, T), \\ p^f(0) = f_1, \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.2})$$

*puis on applique à l'état final  $p^f(T)$  l'évolution rétrograde suivante :*

$$\left| \begin{array}{l} p^{b'} = Ap^b + C^*K^b(Cp^b - p^o), \text{ sur } (0, T), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.3})$$

*On obtient donc une nouvelle ébauche  $f_2 = p^b(0)$ .*

*Les opérateurs  $K^f$  et  $K^b$  sont appelés opérateurs de nudging direct et, respectivement, rétrograde. Si ce sont des réels, on dira coefficient de nudging direct ou rétrograde.*

---

8. Nous reprenons les notations introduites dans la Section III.1 du Chapitre A, à ceci près que ce qui concerne les équations d'ordre 1 en temps n'est plus noté en gras, puisqu'aucune confusion entre les différentes variables  $p$  et  $\mathbf{p}$ , opérateurs, etc., n'est possible ici. Par ailleurs, la notion d'équation bien posée est définie au sens de Hadamard : *est bien posée toute équation pour laquelle il existe une unique solution, laquelle est en outre continue vis-à-vis des conditions initiales.*

Si l'on considère des objets et ébauches appartenant à  $V$ , on a donc défini l'opérateur suivant :

**Définition IV.1.2.** *L'opérateur de BFN est défini par :*

$$\begin{aligned} \Xi & : V \longrightarrow V \\ f_1 & \longmapsto f_2. \end{aligned}$$

À une ébauche de reconstruction  $f_1$ , l'opérateur  $\Xi$  associe l'ébauche  $f_2$  obtenue par application d'une itération de BFN à  $f_1$ .

**Remarque IV.1.3.** *Si les observations ne sont pas bruitées, l'opérateur  $\Xi$  admet comme point fixe trivial l'objet  $f$ .*

La première ébauche peut être issue de connaissances antérieures ou être définie arbitrairement.

Bien entendu, l'équation rétrograde (IV.1.3) n'a pas *a priori* de raison d'être bien posée. Notons cependant qu'un changement de variable temporelle permet de la modifier et de la poser en temps direct. Posons en effet  $s = T - t$ , la fonction  $s \mapsto p^b(s)$  est alors solution de l'équation :

$$\begin{cases} p^{b'} = -Ap^b - C^*K^b(Cp^b - p^o(T - \cdot)), \text{ sur } (0, T), \\ p^b(0) = p^f(T). \end{cases} \quad (\text{IV.1.4})$$

**Remarque IV.1.4.** *Le BFN admet des variantes utiles à définir au cas par cas, selon les applications souhaitées. Dans le cas de la TTA, on pourra par exemple annuler le coefficient de nudging de l'évolution directe et restreindre les ébauches obtenues au domaine d'intérêt, de même que les données pourront être dérivées dans le rappel (voir la définition IV.3.3), les équations de l'algorithme prennent alors la forme suivante :*

$$\begin{cases} p^{f''} - Lp^f = -k^f \mathbf{1}_S(p^{f'} - p^{o'}), \text{ sur } (0, T), \\ p^f(0) = f_1, \end{cases}$$

où  $f$  est une ébauche de reconstruction donnée, et :

$$\begin{cases} p^{b''} - Lp^b = -k^b \mathbb{1}_S(p^{b'} - p^{o'}(T - \cdot)), \text{ sur } (0, T), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{cases}$$

**Définition IV.1.5.** Les solutions de l'algorithme BFN sont les fonctions composant les suites  $(p_k^f)_{k \geq 1}$  et  $(p_k^b)_{k \geq 1}$  définies par les itérations successives définies dans la définition IV.1.1. Ces trajectoires définissent en particulier les ébauches de reconstruction  $(f_k)_{k \geq 1}$  et l'on note les coefficients de nudging relatifs  $(K_k^f)_{k \geq 1}$  et  $(K_k^b)_{k \geq 1}$ .

### Les équations d'erreur

Si l'on soustrait l'équation (IV.1.1) aux équations (IV.1.2) et (IV.1.3), on obtient les *équations d'erreur du BFN*, équivalentes à celles du BFN en l'absence d'erreur modèle et d'erreur d'observation. En notant toujours  $p^f$  et  $p^b$  les solutions obtenues, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} p^{f'} = Ap^f - C^* K^f C p^f, \text{ sur } (0, T), \\ p^f(0) = f_1 - f_0, \end{cases} \quad (\text{IV.1.5})$$

puis :

$$\begin{cases} p^{b'} = Ap^b + C^* K^b C p^b, \text{ sur } (0, T), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{cases} \quad (\text{IV.1.6})$$

Et l'on obtient une ébauche  $f_2 - f_0$ , en escomptant que l'algorithme permette d'obtenir que la nouvelle ébauche soit plus proche de l'état initial à reconstruire que la précédente, *i.e.* :

$$\|f_2 - f_0\| < \|f_1 - f_0\|,$$

en un sens à définir.

**Remarque IV.1.6.** À PROPOS DU SIGNE PRÉCÉDANT LE RAPPEL DANS LES ÉQUATIONS DIRECTES (IV.1.2) ET (IV.1.5). Une simple égalité d'énergie peut montrer que le rappel a tendance à faire décroître l'erreur lors de l'évolution directe. Supposons que  $-A$  est positif et rappelons que  $K^f$  est positif,

on a alors :

$$\left\| p^f \right\|_H^2 - \langle Ap^f, p^f \rangle = -\langle K^f Cp^f, Cp^f \rangle, \text{ sur } (0, T),$$

d'où, en intégrant cette égalité sur  $(0, T)$  :

$$\left\| p^f(T) \right\|_H^2 \leq \left\| p^f(0) \right\|_H^2,$$

puisque :

$$- \int_0^T \langle Ap(s), p(s) \rangle ds \geq 0.$$

L'énergie globale du système et l'erreur ont donc bien décréu au cours du temps.

**Remarque IV.1.7.** À PROPOS DU SIGNE PRÉCÉDANT LE RAPPEL DANS LES ÉQUATIONS RÉTROGRADES (IV.1.3) ET (IV.1.6). Une fois posée en temps directe (voir l'équation (IV.1.4)), l'équation rétrograde contient un rappel qui est précédé d'un signe « - », de même que pour l'équation directe, d'où sa propension à faire décroître l'erreur entre état et observations.

### Problèmes rencontrés et études déjà menées

Les auteurs originaux ont développé et étudié cette technique en regard des problèmes d'assimilation de données (notamment océanographiques ou météorologiques), en vue de proposer une méthode simple (en comparaison des méthodes variationnelles et de filtrage couramment utilisées en assimilation de données) et efficace. Il en est résulté une méthode qui, en effet, est de mise en œuvre aisée, comportant peu de paramètres à étalonner, peu coûteuse tant en mémoire qu'en nombre d'opérations, et dont les résultats s'avèrent intéressants, et ce pour un comportement robuste (voir les résultats numériques présentés dans [26, 23, 28]).

En ce qui concerne l'étude théorique du BFN, les résultats concernant le placement de pôles offre de premiers résultats dans [26]. Plus tard, l'existence et l'unicité des solutions du BFN sont ensuite obtenues pour les équations de Shallow-Water, tandis que la convergence du problème linéarisé et que des études numériques convaincantes sont menées qui portent tant sur le modèle

linéaire et que sur le non linéaire dans [28]. Des études comparatives ont aussi été présentées vis-à-vis des méthodes variationnelles usuellement usitées en océanographie (telles les 3D-Var et 4D-Var, techniques de référence en assimilation de données, voir [229, 230, 231]) dans les cas suivants : équations de Shallow-Water, de Burgers et pour un modèle d’océan quasi-géostrophique à couches. Les résultats remarquables obtenus nous ont poussé à approfondir l’étude de cette technique : pour atteindre une erreur à convergence similaire à celle du 4D-Var, jusqu’à deux fois moins de calcul sont nécessaires [23, 25].

Diverses difficultés sont rencontrées, et ce dès la définition des solutions de l’algorithme : les premières et les plus importantes concernent sont liées à l’irréversibilité de l’équation du modèle et à sa linéarité, à la possibilité d’obtenir des estimations d’erreurs, au choix des coefficients de nudging, etc.

En ce qui concerne la réversibilité de l’observateur de nudging  $A - kC^*C$ , diverses réponses ont été apportées : la faible dissipation dans les phénomènes géophysiques étudiés peut permettre de la négliger lors des retours sans trop altérer le résultat obtenu ; le modèle ainsi défini (par exemple dirigé par une équation de transport linéaire) peut alors être réversible. Une autre possibilité envisagée est d’utiliser la méthode de restauration par diffusion linéaire (qui peut d’ailleurs répondre aussi à des nécessités numériques, voir la Section I du Chapitre C) : la partie irréversible du phénomène, par exemple celle modélisant la diffusion thermique du phénomène, est inversée (ainsi que proposé dans [128]) ou annulée dans l’équation rétrograde afin d’en faire une équation bien posée (voir notamment [27]). Un traitement des données et une adaptation de l’algorithme peuvent aussi permettre de pallier le caractère irréversible de l’équation – voir [15] ou la sous-partie II.2.2 du Chapitre A. La Sous-section IV.2.2 est consacrée à une définition du BFN pour des systèmes non réversibles qui ne fait pas appel à ces artifices : l’observateur  $y$  est modifié, mais pas le modèle.

Ensuite, les premières réponses apportées dans [29] concernant la possibilité d’utiliser directement les équations de nudging rétrogrades dans le cas de systèmes non linéaires montrent que, de même que dans le cas de systèmes irréversibles, un effort d’approximation doit être fait sous peine de voir faillir le BFN. Nous ne connaissons pas d’étude portant sur des situations où le

rappel de nudging offre la convergence du linéarisé permettant d'obtenir la convergence de l'algorithme appliqué à l'équation non linéaire.

Les premiers travaux que nous avons menés évitent ces écueil puisque le modèle afférent est linéaire et réversible (voir l'article [42] en appendice). Le domaine d'application, la TTA, et donc le modèle physique, les équations d'onde réversibles sortent des cadres dans lesquels était appliqué le BFN. Nous verrons que nous avons ainsi obtenu une première preuve de convergence pour une version adaptée et restreinte du BFN (pour lequel le coefficient de nudging de l'évolution directe est nul) dans une situation idéale : vitesse constante, équation non atténuée, données complètes non bruitées avec source intérieure au domaine observé. Les études numériques de l'article [42], que nous présenterons en Section II.2 du Chapitre C, confrontent l'algorithme à un ensemble de conditions qui dépassent le cadre de définition théorique de l'algorithme et qui sortent des hypothèses du résultat de convergence annoncé. À la suite des travaux de Auroux et al., nous constatons que même si les hypothèses théoriques de convergence sont mises en défaut, d'une part le BFN reste applicable à des conditions de mise en œuvre très variées (vitesse variable, données incomplètes, etc.) et, d'autre part, il s'est montré robuste à la présence de bruit, de sources extérieures, à la réduction de l'échantillonnage des données, etc.

Une autre forme de nudging s'est développée parallèlement à celle présentée jusqu'alors : dans l'article [246], Waldron propose en effet un terme de nudging dit « spectral ». Plutôt que de porter sur l'état du système, le terme de rappel du nudging spectral porte sur la série de Fourier de l'état, ce qui permet de faire peser un poids différent sur chaque terme de la série (et donc de le rendre dépendant à la fréquence ainsi qu'aux échelles considérées, si besoin) et de tronquer celle-ci (et donc de ne tenir compte que des données basse fréquence, par exemple). Cette méthode s'est avérée particulièrement efficace dans l'assimilation de données multi-échelle, pour des modèles couplés ou pour des domaines à géométrie très peu régulière (voir notamment [245], ainsi que [168, 199, 203, 214]). Comme le remarquent avec pertinence les auteurs de l'article [245], vu la complexité numérique – parfois rédhibitoire – des méthodes d'assimilation de données traditionnelles, le

nudging peut être perçu comme « la technique d'assimilation de données du pauvre ». Finalement, la simplicité de cette technique tout autant que son efficacité explique les nombreux articles publiés ces dernières années, ce qui témoigne de son usage répandu.

### IV.1.3 Exemples, premières propriétés et compléments

#### Deux cas particuliers

Les deux exemples simples suivants illustrent bien le fonctionnement du BFN, et en particulier les possibilités d'existence et d'unicité des solutions ainsi que sur leur comportement :

**Exemple IV.1.8.** DIMENSION FINIE ET DONNÉES GLOBALES. *Supposons tout d'abord que  $H = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 0$ , et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si l'opérateur d'observation  $C$  est l'identité  $I_n$  (les données sont globales, c'est-à-dire distribuées sur l'ensemble du domaine et à tout temps) et si les opérateurs de nudging sont notés  $K^f = k^f I_n$  et  $K^b = k^b I_n$  où  $k^f$  et  $k^b$  sont dans  $\mathbb{R}_+$ , alors la matrice  $A$  commute avec  $k^f C$  et  $k^b C$ , et les solutions des équations (IV.1.5) et (IV.1.6) (qui sont alors toutes deux bien posées) s'écrivent :*

$$\begin{aligned} p^f(t) &= e^{(A-k^f I_n)t} (f_1 - f_0), \\ p^b(t) &= e^{(-A-k^b I_n)(T-t)} p^f(T), \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , de sorte que :

$$f_2 - f_0 = p^b(0) = e^{-(k^f + k^b)T} (f_1 - f_0),$$

où le rôle du rappel est bien mis en évidence : la nouvelle ébauche  $f_2$  est « plus proche » des observations que l'ébauche initiale :

$$\|f_2 - f_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f_1 - f_0\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Puisque les seules matrices qui commutent avec toutes les autres matrices sont de la forme  $kI_n$ , ce cas particulier ne pourra pas être généralisé à des opérateurs d'observation plus réalistes.

Le second exemple fait l'objet d'une proposition, son cas étant particulièrement intéressant en ce qui concerne l'existence de solutions à l'équation rétrograde :

**Proposition IV.1.9.** Supposons ici que  $A$  est un opérateur non borné diagonalisable continu sur  $V$  et faiblement coercif sur  $H$ , que  $C = Id_H$ <sup>9</sup> et que  $K^f = k^f Id_H$  et  $K^b = k^b Id_H$  sont dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors les solutions de la définition IV.1.1 sont uniquement définies et les ébauches successives vérifient :

$$f_2 - f_0 = e^{-(k^f + k^b)T}(f_1 - f_0).$$

PREUVE. En projetant les équations (IV.1.5) et (IV.1.6) sur une droite engendrée par un vecteur propre  $\phi$  de  $A$ , dont on note  $\lambda$  la valeur propre associée, et en notant  $p_\phi^f = \langle p^f, \phi \rangle$ , il vient que cette fonction est solution de l'équation :

$$p_\phi^{f'} = \lambda p_\phi^f - k^f p_\phi^f. \quad (\text{IV.1.7})$$

De même, la fonction  $p_\phi^b = \langle p^b, \phi \rangle$  est solution de :

$$p_\phi^{b'} = -\lambda p_\phi^b - k^b p_\phi^b. \quad (\text{IV.1.8})$$

On en conclut, comme dans l'exemple précédent, que :

$$p_\phi^b(t) = e^{(\lambda - k^f)T - (\lambda + k^b)(T-t)} p_\phi^f(0).$$

En particulier :

$$p_\phi^b(0) = e^{-(k^f + k^b)T} p_\phi^f(0).$$

Puisque la méthode de Faedo-Galerkin s'applique à cette situation<sup>10</sup>, il vient, par décomposition des ébauches dans la base  $\mathcal{B}$  de vecteurs propres de  $A$

9. Les espaces d'observation et d'état sont donc supposés être identiques.

10. Nous avons présenté cette méthode au cours de la preuve du Théorème II.1.8, nous ne la répétons pas ici pour des raisons de concision, l'adaptation de cette preuve au cas de systèmes d'ordre 1 en temps étant largement connue. Le cas considéré est par ailleurs un cas particulier du Théorème IV.2.2.



considérée :

$$f_2 - f_0 = \sum_{\phi \in \mathcal{B}} e^{-(k^f + k^b)T} p_\phi^f(0) = e^{-(k^f + k^b)T} (f_1 - f_0). \quad (\text{IV.1.9})$$

Ce qui permet de définir la condition initiale, et donc la solution, du problème rétrograde.

Les estimations d'énergie *a priori* découlent aisément de la comparaison entre l'énergie des solutions approchées des équations de nudging et celle des équations approchées des équations sans rappel, la première étant inférieure à la seconde du fait de la positivité des coefficients de nudging  $k^f$  et  $k^b$ .

L'unicité des solutions de l'algorithme peut aussi être déduite de cette inégalité : le modèle considéré étant linéaire, il suffit de prouver que, si :

$$f_0 = f_1 = 0,$$

alors :

$$p^f = p^b = 0.$$

Or, d'une part, l'inégalité (IV.1.9) implique que  $f_2 \equiv 0$  et d'autre part les solutions des équations (IV.1.7) sont nulles pour tout  $\phi \in \mathcal{B}$ , de sorte que  $p^f \equiv 0$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Remarque IV.1.10.** *Cette proposition montre bien qu'il est possible d'obtenir des solutions au BFN dans des cas a priori inattendus : ici, l'opérateur  $A$  n'est pas supposé réversible et l'on constate qu'il est pourtant théoriquement possible de remonter le temps le long des trajectoires aller selon chacun des vecteurs propres de  $A$ . Mieux : si l'on parvient à modifier ces solutions projetées tout en « restant » sur de telles trajectoires, on peut alors faire converger l'algorithme. Le cas considéré où les observations sont complètes est cependant fort peu intéressant en pratique, il conviendra donc par la suite de définir des solutions et de caractériser la convergence de l'algorithme dans des situations plus réalistes.*

### En cas de convergence

Si l'on suppose que les trajectoires définies en définition IV.1.5 page 137 convergent vers la même limite  $p$  et si les opérateurs de nudging  $K_k^f$  et  $K_k^b$  sont égaux pour tout  $k \geq 1$ , alors on obtient que :

$$C^*K(Cp - p^o) = 0,$$

en notant  $K = K_k^f = K_k^b$ , en soustrayant l'équation (IV.1.2) à l'équation (IV.1.3) et  $p$  est solution de :

$$p' = Ap \text{ p.p. } (0, T)$$

en additionnant ces dernières équations.

En particulier, la trajectoire  $p$  obtenue par convergence de l'algorithme est solution de l'équation du modèle et, si  $K$  est injectif, alors  $(Cp - p^o) = 0$  et  $p \equiv p^o$  dans l'espace des observations.

Par analogie avec la méthode quasi-inverse et avec les résultats exposés dans [28], supposons maintenant que le système est régi par une équation réversible<sup>11</sup> de laquelle les données  $p^o = Cp$  sont issues. Que ce soit pour des considérations numériques (voir la sous-partie I.3.3 page 212 du Chapitre C) ou, comme pour la méthode quasi-inverse, parce que le modèle réversible est supposé être une approximation d'un modèle quasi-réversible de la forme :

$$p' = Ap + A_D p,$$

où  $A$  est réversible et où  $A_D$  est un opérateur de diffusion, nous considérons l'algorithme BFN diffusif dont une itération est définie par :

**Définition IV.1.11.** ALGORITHME BFN DIFFUSIF [28]. *Étant donnée une ébauche de reconstruction  $f_1$ , les solutions de l'algorithme BFN diffusif sont définies par :*

$$\begin{cases} p^{f'} = Ap^f + A_D p^f - C^*K^f(Cp^f - p^o), \\ p^f(0) = f_1, \end{cases} \quad (\text{IV.1.10})$$

---

11. C'est-à-dire que l'équation (IV.1.1) modélise indifféremment le phénomène en temps direct et en temps rétrograde.

et :

$$\begin{cases} p^{b'} = Ap^b - A_D p^b + C^* K^b (Cp^b - p^o), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{cases} \quad (\text{IV.1.11})$$

Et la nouvelle ébauche est définie par  $f_2 = p^b(0)$ .

À la suite de [153], on pourra par exemple choisir un opérateur de diffusion  $A_D$  du type de ceux de la méthode de quasi-réversibilité de Lions et Lattès comme suit :

$$A_D = \varepsilon A^2,$$

pour  $\varepsilon > 0$ .

En cas de convergence des solutions directes et rétrogrades de l'algorithme vers une trajectoire commune  $p$ , si les opérateurs  $K^f$  et  $K^b$  sont égaux, notés  $K$ , on considère, comme précédemment, les équations résultant de la soustraction et l'addition des équations (IV.1.10) et (IV.1.11). Il vient alors :

$$A_D p = C^* K (Cp - p^o), \quad (\text{IV.1.12})$$

et :

$$p' = Ap,$$

de sorte que la trajectoire limite  $p$  est solution de l'équation du modèle non diffusif régularisant les données  $p^o$ .

L'exemple considéré dans [28] illustre bien cette situation. En effet, si  $A_D$  est le Laplacien précédé d'un coefficient de diffusion :

$$A_D = \mu \Delta,$$

où  $\mu > 0$ , alors l'équation (IV.1.12) est une équation de *restauration par diffusion linéaire* bien connue du traitement du signal, et la trajectoire  $p$  est une reconstruction régularisée des données  $p^o$ .

L'introduction de l'algorithme BFN Diffusif répond donc en particulier aux attentes suivantes, lorsque l'algorithme converge :

- Si le terme de diffusion introduit par l'opérateur de diffusion  $A_D$  traduit un phénomène de diffusion physique dans le système, l'inversion

du signe précédant ce terme dans l'équation rétrograde permet de la stabiliser et de régulariser la reconstruction obtenue.

- Le terme de diffusion peut aussi représenter l'ajout usuel d'un terme stabilisant le schéma numérique représentant le modèle (qui serait alors réversible) : dans ce cas, inverser le signe précédant  $A_D$  revient à considérer la même approximation numérique pour les équations directes et rétrograde. Nous constatons par ailleurs que cette régularisation du schéma numérique régularise aussi la reconstruction obtenue.
- Dans les deux cas, la trajectoire limite est solution de l'équation du modèle réversible.

### Interprétation variationnelle, choix des coefficients

Une interprétation variationnelle du nudging permet de comprendre le rôle de ce terme de rappel. En effet, si l'on note  $R$  la matrice de covariance d'erreur d'observation et si nous supposons qu'il existe une solution à l'équation :

$$p' - Ap + C^* R^{-1}(Cp - p^o) = 0, \quad (\text{IV.1.13})$$

dans  $L^2(0, T; V')$ , alors, si  $p^o \equiv 0$ , cette solution annule le gradient de la fonctionnelle suivante :

$$J(p) = \frac{1}{2} \left( \|p(T)\|_{V'}^2 - \|p(0)\|_{V'}^2 \right) - \int_0^T \langle Ap, p \rangle_{V', V} dt + \frac{1}{2} \|Cp\|_{L^2(0, T; U), R^{-1}}^2,$$

avec :

$$\|u\|_{L^2(0, T; U), R^{-1}} = \int_0^T \langle R^{-1}u, u \rangle_U dt,$$

où le produit scalaire (ou hermitien) est celui de l'espace de Hilbert des observations  $U$ .

Ainsi, si la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe, alors la solution de l'équation de nudging (IV.1.13) en est le minimiseur. Or on lit bien sur cette fonctionnelle que *les équations de nudging imposent un compromis entre le modèle et les observations : le modèle n'est plus qu'une contrainte faible, contrairement aux méthodes que nous avons présentées jusqu'à maintenant.*

Enfin, le rôle régularisant du terme de diffusion de l'algorithme BFN Diffusif peut aussi être mis en évidence par le biais de considérations similaires. On note à nouveau  $A_D$  l'opérateur de diffusion considéré dans la définition IV.1.11 page 144. On suppose que  $p^o \equiv 0$ , que  $A_D \in \mathcal{L}(V, V')$  et que  $-A_D$  est positif. Ainsi, s'il existe une solution à l'équation :

$$p' - Ap - A_D p + C^* K C p = 0,$$

dans  $L^2(0, T; V')$ , alors cette solution annule le gradient de la fonctionnelle suivante :

$$J(p) = \frac{1}{2} \left( \|p(T)\|_{V'}^2 - \|p(0)\|_{V'}^2 \right) - \int_0^T \langle Ap, p \rangle_{V', V} dt + \|Cp\|_{L^2(0, T; U), R^{-1}}^2 - \left\| A_D^{1/2} p \right\|_{L^2(0, T; H)}^2,$$

où l'on reconnaît une régularisation de type Tykhonov introduite par le terme  $\frac{1}{2} \left\| A_D^{1/2} p \right\|_{L^2(0, T; H)}^2$ .

#### Discussion sur le choix du coefficient de nudging

L'écriture variationnelle peut théoriquement motiver un choix particulier pour l'opérateur de nudging lorsque  $R^{-1}$  est connue, à savoir  $K = R^{-1}$ . Cependant, puisque la matrice  $R$  est souvent méconnue, nous privilégierons un choix plus simple pour l'opérateur de nudging :  $K = kI_U$ ,  $k > 0$ .

Le choix du coefficient de nudging devra par ailleurs tenir compte du fait que l'on cherche une solution à la fois proche des données (ce qui appelle à choisir  $k$  aussi « grand » que possible) et proches du modèle (ce qui sera entravé par le choix d'un coefficient trop grand). Un coefficient trop grand introduira aussi des chocs dans l'évolution de la solution d'état qui pourront nuire à la reconstruction (ce phénomène est bien connu pour les méthodes séquentielles – filtrage, contrôle, etc.).

Théoriquement, ces idées doivent être relativisées : en effet, un coefficient de nudging infiniment grand revient à imposer les données à la place de l'état aux lieux et instants d'observation, ce qui a donné lieu à des méthodes tout-à-fait efficaces, telles les méthodes de renversement temporel (voir la

Section IV.4 page 87 du Chapitre A et les tests numériques du Chapitre C) ou les méthodes forward-backward de Talagrand [228, 227].

Nous proposerons des méthodes (empiriques, nécessaires au respect du modèle, optimisation de l'opérateur, lien avec l'erreur d'observation, etc.) permettant de déterminer un coefficient tenant compte de ces considérations au cas par cas.

### Rôles du terme de nudging rétrograde

Le terme de nudging de l'équation rétrograde joue différents rôles : outre le fait de « tirer » l'état vers les données, il pourra stabiliser l'équation rétrograde lorsque celle-ci est mal posée notamment par le biais d'une méthode de placement de pôles en dimension finie [26, p. 4] ou grâce à l'introduction d'un opérateur elliptique de degré supérieur à celui de  $A$  (comme cela a été suggéré avec la méthode de quasi-réversibilité introduite dans [153] et notamment reprise dans [43, 130] et appliquée à la TTA dans [62]).

## IV.2 BFN : existence, unicité et convergence

La sous-section précédente comporte quelques exemples pour lesquels le BFN est bien posé. Dans la présente sous-section, nous nous attachons à définir un cadre aussi général que possible permettant de conserver ce caractère bien posé.

### IV.2.1 Renversement temporel des systèmes linéaires

Dans cette sous-partie, nous nous intéressons à quelques modalités permettant le renversement temporel de problèmes d'évolution linéaires.

#### Systèmes réversibles : BFN et TTA

De même que pour le Théorème II.1.8 page 106, si l'on suppose que  $L$  est temporellement réversible et sous les hypothèses dudit théorème, on obtient sans difficulté l'existence et l'unicité des solutions du BFN définies dans la remarque IV.1.4 page 136. Les équations directes et rétrogrades sont en effet identiques, seules les conditions initiales de la solution rétrograde la distinguent de la solution directe.

### Renversement d'un système linéaire sans rappel

Notons tout d'abord que la décomposition spectrale d'un opérateur diagonalisable  $A$  fournit une manière commode de prouver l'existence et l'unicité d'une solution rétrograde au problème suivant :

$$\begin{cases} p^{b'} = Ap^b \text{ dans } L^2(0,T;V'), \\ p^b(T) = f_T, \end{cases}$$

en conservant les notations utilisées jusqu'alors (au besoin, consulter la Section III.1 page 34, Chapitre A), à condition que  $f_T$  soit issue d'une solution directe, c'est-à-dire qu'il existe une solution  $p^f$  de l'équation :

$$\begin{cases} p^{f'} = Ap^f \text{ dans } L^2(0,T;V'), \\ p^f(0) = f_0, \end{cases}$$

telle que  $f_T = p^f(T)$ .

Bien entendu, on a  $p^b \equiv p^f$  presque partout sur  $(0,T)$ .

Aussi, si l'on note  $(\mathbb{T}(t))_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu généré par  $A$  et défini par la décomposition spectrale de ce dernier, étant donnée une condition finale  $f_T$  quelconque, il est possible de projeter celle-ci sur l'image de l'opérateur  $\mathbb{T}(T)$  afin de pouvoir ensuite définir une solution rétrograde et d'obtenir une reconstruction issue de l'état final  $f_T$ .

#### IV.2.2 Un algorithme BFN bien posé

Dans cette sous-section, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité des solutions du BFN le plus général que nous ayons su obtenir et que nous connaissons. Ce résultat ne nécessite pas de supposer que l'opérateur  $A$  est réversible, ni que les données sont complètes, ce qui élargit le champs d'application du BFN à des situations variées et réalistes.

#### Cadre théorique

On considère un opérateur  $A$  non borné sur un Hilbert séparable  $H$ , de domaine  $V = D(A)$  tel que les injections :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

sont continues et denses. On suppose de plus que  $A$  est diagonalisable au sens de la définition II.1.5 page 103 et que  $-A$  est faiblement coercif. On note  $a(\cdot, \cdot)$  la forme bilinéaire qui lui est naturellement associée.

Notons  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base de  $V$  vecteurs propres de  $A$ ,  $(e_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  sa base biorthogonale et  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite des valeurs propres associées. On note  $V_m$  le sous-espace de  $V$  de dimension finie engendré par  $(e_i)_{0 \leq i \leq m}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et tout  $f \in H$ , on note :

$$f_i = \langle f, e_i^* \rangle_H.$$

Soit un opérateur d'observation  $C$  continu de  $H$  dans l'espace de Hilbert des observations  $U$ . Étant donné un objet  $f \in V$  inconnu, nous disposons de données  $p^o$  définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = Ap \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p(0) = f, \\ p^o = Cp \text{ p.p. } (0, T). \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.14})$$

### Résultat principal d'existence et d'unicité pour le BFN

Le Théorème IV.2.2 page suivante assure de l'existence et de l'unicité des solutions d'une itération du BFN associé à  $A$ , quels que soient les opérateurs de nudging  $K^f$  et  $K^b$  linéaires, positifs et continus sur  $U$  qui satisfont à l'hypothèse suivante :



Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace  $V_m$  est stable pour  $C^*K^f C$  et  $C^*K^b C$  :

$$C^*K^f C V_m \subset V_m \text{ et } C^*K^b C V_m \subset V_m.$$

C'est-à-dire que si l'on note :

$$\kappa_{ij}^t = \langle C^*K^t C e_i, e_j^* \rangle_H = \langle K^t C e_i, C e_j^* \rangle_U,$$

pour  $t \in \{f, b\}$  et  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , alors :

$$\kappa_{ij} = 0, \text{ pour tout } i < j.$$

**Remarque IV.2.1.** *Comme nous le verrons au cours de la démonstration qui fait suite à l'énoncé ci-dessous, la continuité des opérateurs de nudging n'est pas nécessaire à la preuve de l'existence d'une solution. Nous n'avons cependant pas su nous affranchir de cette hypothèse lorsqu'il s'est agi de prouver son unicité.*

Considérons une ébauche de reconstruction  $f_1$ .

**Théorème IV.2.2.** Il existe une unique paire  $(p^f, p^b)$  de solutions faibles des équations :

$$\begin{cases} p^{f'} = A p^f - C^* K^f (C p^f - p^o) \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^f(0) = f_1, \end{cases} \quad (\text{IV.2.15})$$

et :

$$\begin{cases} p^{b'} = A p^b + C^* K^b (C p^b - p^o) \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{cases} \quad (\text{IV.2.16})$$

De plus, ces solutions appartiennent à  $C^0(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ .

La condition initiale obtenue définit la nouvelle ébauche de reconstruction :

$$f_2 = p^b(0),$$

et vérifie, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$f_{2,i} = f_{1,i} - \int_0^T e^{-\lambda_i s} \left[ C^* K^f C p^f(s) + C^* K^b C p^b(s) \right]_i ds. \quad (\text{IV.2.17})$$

PREUVE. Nous définissons à nouveau des problèmes approchés de dimension finie, qui seront donc bien posés en temps direct et rétrograde. Des estimations d'énergie *a priori* permettront ensuite d'obtenir la convergence des solutions approchées et de définir la nouvelle ébauche. Celle-ci fournit une condition initiale au problème rétrograde qui permet de définir la solution faible du problème rétrograde.

La première étape de cette preuve consiste à ramener le problème à l'étude des équations d'erreur :

1. **Les équations d'erreur.** Soustrayons l'équation (IV.2.14) aux équations (IV.2.15) et (IV.2.16). Par abus de notation, on écrit toujours  $p^f$  et  $p^b$  à la place de  $p^f - p^o$  et  $p^b - p^o$ , ce qui revient à supposer que  $p^o \equiv 0$  dans les équations (IV.2.15) et (IV.2.16). Nous étudions donc dorénavant les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^{f'} = A p^f - C^* K^f C p^f \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^f(0) = f_1, \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.18})$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^{b'} = A p^b + C^* K^b C p^b \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.19})$$

2. **Les problèmes approchés.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , les problèmes approchés suivants sont des problèmes de Cauchy homogènes en dimension finie, et admettent donc une solution unique dans  $\mathcal{C}^1(0, T; V_m)$  :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } p_m^f = \sum_{i=1}^m p_{m,i}^f e_i \in L^2(0, T; V_m) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} p_{m,i}^{f'} = \lambda_i p_{m,i}^f - \langle C^* K^f C p_m^f, e_i^* \rangle, \quad 0 \leq i \leq m, \\ p_m^f(0) = f_1, \end{array} \right. \end{array} \quad (\text{IV.2.20})$$

et :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_m^b = \sum_{i=1}^m p_{m,i}^b e_i \in L^2(0,T;V_m) \text{ tel que :} \\ p_{m,i}^{b'} = \lambda_i p_{m,i}^b + \langle C^* K^b C p_m^b, e_i^* \rangle, 0 \leq i \leq m, \\ p_m^b(T) = p_m^f(T). \end{cases} \quad (\text{IV.2.21})$$

On peut donc poser  $f_{2,m} = p_m^b(0)$  et redéfinir  $p_m^b$  comme étant la solution du problème direct suivant <sup>12</sup> :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_m^b = \sum_{i=1}^m p_{m,i}^b e_i \in L^2(0,T;V_m) \text{ tel que :} \\ p_{m,i}^{b'} = \lambda_i p_{m,i}^b + \langle C^* K^b C p_m^b, e_i^* \rangle, 0 \leq i \leq m, \\ p_m^b(0) = f_{2,m}. \end{cases} \quad (\text{IV.2.22})$$

### 3. Énergie des solutions approchées, définition. Puisque :

$$A^* e_i^* = \bar{\lambda}_i e_i^*,$$

en prenant le produit scalaire des équations (IV.2.20) et (IV.2.21) avec  $e_i^*$ , il vient :

$$p_{m,i}^{f'} = (A p_m^f)_i - \langle C^* K^f C p_m^f, e_i^* \rangle,$$

et :

$$p_{m,i}^{b'} = (A p_m^b)_i + \langle C^* K^b C p_m^b, e_i^* \rangle.$$

On multiplie ces équations par  $e_i$  puis on les somme pour  $1 \leq i \leq m$  alors, comme :

$$C^* K^f C p_m^f \in V_m \Rightarrow \sum_{i=1}^m \langle C^* K^f C p_m^f, e_i^* \rangle e_i = C^* K^f C p_m^f,$$

et :

$$C^* K^b C p_m^b \in V_m \Rightarrow \sum_{i=1}^m \langle C^* K^b C p_m^b, e_i^* \rangle e_i = C^* K^b C p_m^b,$$

---

12. Cette redéfinition du problème rétrograde est distincte de celle proposée par le biais du changement de variable  $t \mapsto T-t$  – voir l'équation (IV.1.4). Nous ne faisons ici qu'identifier une condition initiale permettant de définir une solution au problème rétrograde.

et comme  $AV_m \subset V_m$ , on a :

$$p_m^{f'} = Ap_m^f - C^* K^f C p_m^f,$$

et :

$$p_m^{b'} = Ap_m^b + C^* K^b C p_m^b.$$

On considère le produit scalaire dans  $V$  de chacune de ces égalités avec  $p_m^f$  et  $p_m^b$  respectivement, puis on intègre le résultat obtenu sur l'intervalle  $(0, t)$  pour tout  $t \in (0, T)$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \|p_m^f(t)\|_V^2 - \|p_m^f(0)\|_V^2 \right] + \int_0^t a(p_m^f(s), p_m^f(s)) ds \\ = - \int_0^t \|C p_m^f\|_{K^f}^2 ds, \end{aligned} \quad (\text{IV.2.23})$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \|p_m^b(t)\|_V^2 - \|p_m^b(0)\|_V^2 \right] + \int_0^t a(p_m^b(s), p_m^b(s)) ds \\ = \int_0^t \|C p_m^b\|_{K^b}^2 ds, \end{aligned} \quad (\text{IV.2.24})$$

où :

$$\|C p_m^f\|_{K^f}^2 = \langle K C p_m^f, C p_m^f \rangle_U \text{ et } \|C p_m^b\|_{K^b}^2 = \langle K C p_m^b, C p_m^b \rangle_U.$$

De même que dans la preuve du Théorème II.1.8 page 106, ces égalités d'énergie vont nous permettre de définir une solution faible à chacun de nos deux problèmes. Pour étudier ces énergies, nous posons pour tout  $p \in V$  et  $K \in \mathcal{L}(U)$  :

$$E_{p,K}(t) = \frac{1}{2} \|p_K(t)\|_V^2 + \int_0^t a(p_K^f(s), p_K^f(s)) ds,$$

4. **Estimations d'énergie.** Pour le moment, nous n'avons aucunement fait usage du fait que les opérateurs de nudging sont positifs. Pour insister sur la dépendance des solutions des équations (IV.2.20) et (IV.2.21)

vis-à-vis de l'opérateur de nudging, on note :

$$p_{m,K^f}^f = p_m^f \text{ et } p_{m,K^b}^b = p_m^b.$$

En particulier, en admettant l'unicité rétrograde qui sera prouvée au point 7 page suivante, on a alors :

$$p_{m,-K^f}^b = p_{m,K^f}^f \text{ dans } L^2(0,T; V_m),$$

puisque ces fonctions sont solution de l'équation (IV.2.20).

On considère les solutions  $p_{m,K^f}^f$  et  $p_{m,0}^f$  qui vérifient :

$$p_{m,K^f}^f(0) = p_{m,0}^f(0),$$

par définition, ainsi que  $p_{m,-K^f}^b$ ,  $p_{m,0}^b$  et  $p_{m,K^b}^b$ , qui vérifient :

$$p_{m,-K^f}^b(T) = p_{m,0}^b(T) = p_{m,K^b}^b(T).$$

D'après les égalités (IV.2.23) et (IV.2.24), ces solutions vérifient les inégalités d'énergie suivantes :

$$E_{p_{m,K^f}^f}(t) - E_{p_{m,0}^f}(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

et, de même :

$$E_{p_{m,K^b}^b}(0) \leq E_{p_{m,0}^b}(0) \leq E_{p_{m,-K^f}^b}(0),$$

Puisque ces fonctions sont continues et que :

$$E_{p_{m,K^b}^b}(T) = E_{p_{m,0}^b}(T) = E_{p_{m,-K^f}^b}(T),$$

on obtient finalement que :

$$E_{p_{m,K^b}^b}(t) \leq E_{p_{m,0}^b}(t) \leq E_{p_{m,K^f}^f}(t) \leq E_{p_{m,0}^f}(0) \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

5. **Obtention des solutions.** Pour ce qui est de l'obtention des solutions, les étapes à suivre sont bien connues. Nous ne les détaillons donc pas : des suites bornées obtenues précédemment, nous extrayons de suites faiblement convergentes, puis nous prouvons que la limite faible est solution du problème considéré par passage à la limite dans les équations (IV.2.20) et (IV.2.21) et enfin que les conditions initiales ou finales sont respectées par ces solutions. On prouve aussi que la convergence a lieu pour l'ensemble de la suite (et non seulement pour la suite extraite) et qu'elle est forte dans  $L^2(0, T; V)$ , notamment. Au besoin, se référer à [70, p. 615–631].

On sait donc en particulier que  $A$  génère un semi-groupe fortement continu  $(\mathbb{T}(t))_{t \geq 0}$  sur  $H$ , que le *taux de croissance* de ce dernier vérifie :

$$\omega(\mathbb{T}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(\lambda_i) < \infty,$$

et enfin que pour tout  $f \in H$  et tout  $t \geq 0$ , on a :

$$\mathbb{T}(t)f = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{\lambda_i t} \langle f, e_i^* \rangle e_i.$$

Ces résultats classiques sont notamment présentés dans la proposition [239, Proposition 2.6.5], mais prouvés à l'aide d'une méthode différente.

De même, l'unicité des solutions directes un résultat bien connu et que nous ne prouvons donc pas.

6. **Formulation de la nouvelle ébauche.** La formule (IV.2.17) se déduit du fait que :

$$\begin{cases} p_i^{f'} - \lambda_i p_i^f = (-K^f p^f)_i, \\ p_i^{b'} - \lambda_i p_i^b = (K^b p^b)_i. \end{cases}$$

Il suffit en effet de soustraire ces deux équations, d'utiliser la formule de Duhamel et le fait que  $p_i^f(T) = p_i^b(T)$ .

7. **Unicité rétrograde.** Nous prouvons dans cette étape que la solution de l'équation (IV.2.19) est unique. On simplifie les notations en écrivant :

$$K = C^* K^b C.$$

Nous supposons que lors de cette étape que  $-A$  est coercif. Cette hypothèse se fait sans perte de généralité grâce au changement de variable proposé dans le Lemme IV.2.3 : il suffit d'adapter ce changement de variable à la coercivité faible de  $-A$ .

Puisque  $-A$  est faiblement coercif et  $K \in \mathcal{L}(H)$ , on sait d'une part que  $D(A + K) = D(A)$  et d'autre part que  $-A_K = -A - K$  est faiblement coercif.

En outre, nous utiliserons les notations suivantes : soient  $k = \|K\|_{\mathcal{L}(H)}$  et  $c > 0$  telle que  $\|p\|_H \leq c \|p\|_V$  pour tout  $p \in V$ . Alors  $-A_K + kcI_H$  est coercif et le lemme suivant nous permettra de considérer indifféremment des solutions d'équations régies par des opérateurs coercifs ou faiblement coercifs :

**Lemme IV.2.3.** Une fonction  $p$  est solution de l'équation :

$$\begin{cases} p' = A_K p \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p(0) = f, \end{cases}$$

si et seulement si  $\bar{p} = e^{kct} p$  est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \bar{p}' = A_K \bar{p} + kc \bar{p} \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ \bar{p}(0) = f. \end{cases}$$

Pour une preuve de ce lemme, voir [70].

Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux solutions vérifiant :

$$p' = Ap + Kp,$$

telles que  $p_1(T) = p_2(T)$ . On note  $p = p_2 - p_1$ .

Posons  $\varepsilon(t) = \|p(t)\|_H^2$ . L'unicité (rétrograde) de la solution de l'équation (IV.2.19) est équivalente au fait que  $\varepsilon \equiv 0$ , ce que le Lemme IV.2.4 permettra de prouver :

**Lemme IV.2.4.** Supposons qu'il existe  $t_1 \in [0, T]$  tel que  $\varepsilon(t_1) > 0$ . Soit  $t_2 \in (t_1; T]$  tel que :

$$\varepsilon(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \in [t_1; t_2].$$

Alors, pour tout  $s \in [0, 1]$ , on a :

$$\varepsilon((1-s)t_1 + st_2) \leq \varepsilon(t_1)^{1-s} \varepsilon(t_2)^s. \quad (\text{IV.2.25})$$

PREUVE. Après une première étape rendant le problème considéré coercif, nous restreignons les fonctions étudiées à des fonctions plus régulières, ce qui permet de terminer la preuve.

(a) Posons  $\bar{p} = e^{kct}p$ , de sorte que :

$$\bar{p}' = B\bar{p},$$

où  $B = A + K - kcI_H$  est coercif et  $\bar{p}(T) = 0$ .

(b) Supposons que  $\bar{p}(0) \in D(B^2)$ , on a ainsi :

$$\bar{p} \in \mathcal{C}^1(0, T; D(B^2)).$$

Ce résultat classique est par exemple prouvé dans [239].

Une fois l'inégalité (IV.2.25) prouvée pour toute solution :

$$\bar{p} \in \mathcal{C}^1(0, T; D(B^2))$$

et pour  $k = 0$ , l'étendre à toutes les solutions de (IV.2.19) est direct en usant d'une part de la densité de  $D(B^2)$  dans  $D(B)$  et d'autre part de la continuité de la solution de (IV.2.19) par rapport aux conditions initiales.



(c) Posons  $\bar{\varepsilon}(t) = \|\bar{p}(t)\|_H^2$  et  $\mathcal{E}(t) = \log |\bar{\varepsilon}(t)|$ . On a alors :

$$\bar{\varepsilon}'(t) = 2\langle \bar{p}'(t), \bar{p}(t) \rangle_{V',V} = -2 \left\| B^{1/2} \bar{p}(t) \right\|_H^2,$$

et puisque  $\bar{p} \in C^1(0, T; D(B^2))$  :

$$\bar{\varepsilon}''(t) = 4\langle B^{1/2} \bar{p}(t), B^{1/2} \bar{p}'(t) \rangle = 4 \|B \bar{p}(t)\|_H^2.$$

Cette expression est bien définie puisque  $\bar{p} \in D(B^2)$  sur  $[0, T]$ .

Finalement, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}'(t)^2 &= 4\langle B \bar{p}(t), \bar{p}(t) \rangle_{V',V} \\ &\leq 4 \|B \bar{p}(t)\|_H^2 \|\bar{p}(t)\|_H^2 \\ &\leq \bar{\varepsilon}(t) \bar{\varepsilon}''(t). \end{aligned}$$

Il suffit, pour conclure, de constater que :

$$\mathcal{E}'' = \frac{\bar{\varepsilon}'' \bar{\varepsilon} - (\bar{\varepsilon}')^2}{\bar{\varepsilon}^2} \geq 0 \text{ sur } (t_1, t_2).$$

On a démontré la log-convexité de la fonction  $\bar{\varepsilon} = e^{2kct} \varepsilon$ , et donc le Lemme IV.2.4 de la page ci-contre.  $\square$

Puisque  $\varepsilon(T) = 0$ , la convexité logarithmique de  $e^{kct} \varepsilon$  permet en effet de montrer que, s'il existe  $t \in (0, T)$  tel que  $\varepsilon(t) > 0$ , alors  $e$  est nulle sur  $[t, T]$  : il suffit de prendre  $\varepsilon(t_2 = 0)$  dans le lemme.

L'unicité de la solution rétrograde est ainsi démontrée, et tous les points devant être prouvés l'ont été.  $\square$

Nous avons donc prouvé que l'algorithme BFN est bien défini pour toute paire d'opérateurs de nudging  $(K^f, K^b)$  positifs et continus dans  $H$ , à condition de restreindre ces opérateurs de sorte que les espaces  $V_m$  soient stables pour  $C^* K^f C$  et  $C^* K^b C$ .

### IV.2.3 Première étude de convergence du BFN

Une première étude de convergence des méthodes de nudging peut être menée en étudiant directement l'énergie des solutions des équations (IV.1.5) et (IV.1.6). La convergence asymptotique (c'est-à-dire en horizon de temps infini) de la méthode revient à la stabilité de ces systèmes.

Pour cette première étude rudimentaire, qui servira de transition vers la partie dédiée au BFN appliqué à la TTA, nous nous contentons d'étudier l'équation de nudging aller, de sorte que, si l'équation étudiée est réversible et s'il est établi que l'observateur  $A - C^*KC$  est exponentiellement stable (voir le Problème (I.0.4)), alors le BFN pourra converger.

De même que dans la Section III, nous allons naturellement faire apparaître l'utilité de la condition d'observabilité.

#### Cas général

On considère donc la solution  $p$  d'une équation de la forme :

$$p' = Ap - C^*K Cp, \quad (\text{IV.2.26})$$

avec  $p(0) = f$  et où les opérateurs  $A$  et  $K$  satisfont aux hypothèses du Théorème IV.2.2 page 151. On note alors, pour tout  $p$  et tout  $t \in [0, T]$  :

$$E_{p,K}(t) = \frac{1}{2} \|p(t)\|_V^2 + \int_0^t \langle Ap(s), p(s) \rangle_{V',V} ds,$$

de sorte que :

$$E_{p,K}(t) - E_{p,K}(0) = - \int_0^t \|Cp(s)\|_{U,K}^2 ds,$$

où :

$$\|y\|_{U,K} = \langle Ky, y \rangle_U.$$

Supposons maintenant que la condition d'observabilité suivante est satisfaite :

Il existe  $T^o > 0$  tel qu'il existe une *constante d'observabilité*  $c > 0$  telle que pour toute solution  $p$  de l'équation (IV.2.26) :

$$\int_0^t \|Cp(s)\|_{U,K}^2 ds \geq cE_{p,K}(0). \quad (\text{IV.2.27})$$

Si l'on note en outre  $k = \|K\|_{\mathcal{L}(U)}$  et que l'on choisit la constante  $c$  suffisamment petite pour que :

$$0 < 1 - kc < 1,$$

il vient alors que, pour toute solution  $p$  de l'équation (IV.2.26) :

$$E_{p,K}(T^o) \leq (1 - kc)E_{p,K}(0). \quad (\text{IV.2.28})$$

On itère cette démarche sur les intervalles  $[0, T^o]$ , puis  $[T^o, 2T^o]$ , etc. jusqu'à  $[(N-1)T^o, NT^o]$ , pour un certain  $N \in \mathbb{N}^*$ , d'où :

$$E_{p,K}(NT^o) \leq (1 - kc)^N E_{p,K}(0),$$

Enfin, puisque  $E_{p,K}$  est décroissante, on pose :

$$M = (1 - kc)^{-1} \text{ et } \mu = -\frac{\ln(1 - kc)}{T^o} > 0,$$

de sorte que, pour tout  $t \in [(i-1)T^o, iT^o]$  et  $0 \leq i \leq N-1$  :

$$E_{p,K}(t) \leq E_{p,K}((i-1)T^o) \leq (1 - kc)^{(i-1)} E_{p,K}(0),$$

or :

$$(1 - kc)^{(i-1)} = Me^{-\mu iT^o} \leq Me^{-\mu t}.$$

On a donc montré la proposition suivante :

**Proposition IV.2.5.** La condition d'observabilité (IV.2.27) implique la stabilité exponentielle de l'opérateur de nudging  $A - C^*KC$ .

**Cas du nudging pour les équations d'onde**

Dans le cas où le modèle est régi par une équation de la forme :

$$p'' - Lp = 0,$$

où  $-L$  est non borné sur  $H$ , autoadjoint et positif sur son domaine  $V$ , on proposera un rappel de la forme  $C^*KCp'$  (qui porte donc sur la dérivée de l'état) et l'équation de nudging devient :

$$p'' - Lp = -C^*KCp', \quad (\text{IV.2.29})$$

En effet, si l'on écrit la condition d'observabilité ainsi :

Supposons qu'il existe  $T^o > 0$  tel qu'il existe une constante d'observabilité  $c > 0$  telle que pour toute solution  $p$  de l'équation (IV.2.29), on

a :

$$\int_0^t \|Cp'(s)\|_{U,K}^2 ds \geq cE_{p,K}(0).$$

Alors un calcul similaire à celui grâce auquel nous avons montré la Proposition IV.2.5 de la page précédente prouve que l'énergie du système :

$$E_{p,K}(t) = \frac{1}{2} \left[ \|p(t)\|_H^2 + \|L^{1/2}p\|_H^2 \right],$$

est exponentiellement décroissante sur  $[0, \infty)$ .

Les conditions d'observation permettent donc de prouver la stabilité de certains observateurs de nudging, elles peuvent donc être utiles à arrêter un choix pour la forme du rappel, ainsi que nous venons de le voir avec les équations d'onde. Les inégalités d'observations sont cependant difficiles à établir en général, nous éviterons donc d'en faire usage lorsque d'autres approches nous le permettront. Ce sera le cas dans l'application de l'algorithme BFN à la TTA qui fait l'objet de la sous-section suivante.

### IV.3 BFN et TTA

Dans cette sous-section, nous retranscrivons la présentation et les résultats proposés dans l'article [42] (disponible en appendice de ce manuscrit) avant de les transcrire au cas non régulier et de fournir un moyen de reconstruire l'ébauche obtenue grâce au BFN en cas de convergence de l'algorithme.

#### IV.3.1 Définition d'un BFN restreint appliqué à la TTA

On suppose que  $n = 3$ , que la vitesse  $c$  des ondes est constante égale à 1 et que les observations sont complètes. Nous reprenons les notations introduites au début de la Section III page 121.

Nous aurons cependant besoin de définir des ébauches de reconstruction dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  plutôt que dans  $H_0^1(\mathbb{R}^3)$ , aussi nous nous intéressons à une reformulation du problème de la TTA qui lui est équivalente : quitte à considérer la dérivée temporelle de l'onde sonore émise par le corps, nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}p(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in Q_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p(0) = f \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (\text{IV.3.30})$$

que nous résolvons à l'aide du BFN dans les paragraphes suivants.

#### Quelques résultats utiles concernant l'équation des ondes

Dans les paragraphes suivants, nous donnons quelques propriétés basiques de l'équation des ondes suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}p(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in Q_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ p(0) = f \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p(0) = g \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (\text{IV.3.31})$$

où  $\mathcal{L} := \partial_{tt} - \Delta$  et où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $B(0,1)$ . Les résultats proposés sont classiques et l'on peut se référer par exemple à [123], au besoin. Selon le principe de Huygens fort, en tout

point  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ , la solution régulière classique  $u(x_0, t_0)$  de l'équation (IV.3.31) ne dépend que des valeurs de  $f$  et  $g$  sur le cône caractéristique :

$$\|x - x_0\| = |t - t_0|.$$

En conséquence de quoi, puisque  $f$  et  $g$  ont leur support contenu dans  $B(0,1)$ , le support de la solution  $p$  au temps  $\tilde{t}$  est contenu dans  $B(0,1 + \tilde{t})$ . Ainsi, si nous considérons des solutions seulement définies pour  $t \leq T := 2$ , nous pouvons restreindre le domaine sur lequel nous considérons les solutions à l'ouvert  $\Omega = B(0,3)$ , ce que nous ferons par la suite.

On peut maintenant alléger les hypothèses de régularité des conditions initiales considérées (voir [70] notamment) :

**Théorème IV.3.1.** Pour tout  $f \in H_0^1(\Omega)$  et tout  $g \in L^2(\Omega)$ , il existe un unique  $p \in \mathcal{C}^0(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0,T; L^2(\Omega))$  solution faible de l'équation :

$$\mathcal{L}p(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega, p(0) = f \text{ dans } \Omega, \partial_t p(0) = g \text{ dans } \Omega, p = 0 \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega \quad (\text{IV.3.32})$$

De plus, la solution de (IV.3.32) dépend continûment des conditions initiales  $f$  et  $g$ .

Grâce au fait que la solution dépende continûment des conditions initiales, le principe de Huyghens reste valable, ce qui implique que si  $f$  et  $g$  sont toutes deux à support essentiel inclus dans la boule  $B(0,1)$ , alors la restriction de la solution  $p$  de (IV.3.32) à  $B(0,1)$  sera nulle au temps  $T = 2$ . Cette propriété est due au fait que la vitesse de propagation des ondes considérées est nulle et qu'aucune diffusion n'a lieu, de sorte que les solutions s'annulent sur tout ensemble borné en temps fini.

Ce dernier théorème justifie aussi le fait que les objets et reconstructions dont nous ferons usage appartiennent à  $L^2(B(0,1))$ . Par ailleurs, la solution  $p_{\text{exacte}}$  est la solution de l'équation :

$$\mathcal{L}p_{\text{exacte}}(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega, p_{\text{exacte}}(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \partial_t p_{\text{exacte}}(0) = f \text{ dans } \Omega, p_{\text{exacte}} = 0 \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega$$

où  $f$  est l'objet à reconstruire.

Explicitons enfin la propriété de conservation d'énergie, laquelle est ainsi définie :

**Définition IV.3.2.** *En tout temps  $T > 0$ , on appelle énergie de  $p$  la quantité :*

$$E_p(T) := \frac{1}{2} \left( \|p(T)\|_{H_0^1}^2 + \|\partial_t p(T)\|_{L^2}^2 \right).$$

La conservation d'énergie des solutions de l'équation (IV.3.31) s'écrit :

$$E_p(T) = E_p(0).$$

En particulier, dans le cas de  $p_{\text{exacte}}$ , il vient :

$$E_{p_{\text{exacte}}}(T) = E_{p_{\text{exacte}}}(0) = \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2.$$

#### Définition du BFN pour la TTA

Introduisons maintenant le BFN dans sa version appliquée au problème de la TTA.

On suppose tout d'abord que la surface d'observation  $\mathcal{S}$  est incluse dans la sphère  $S(0,1)$ .

Rappelons que notre but est de reconstruire l'objet  $f$ , ou d'en calculer une approximation, à partir des données  $p^o = Cp_{\text{données}}$ , où  $p_{\text{données}}$  est la solution  $p_{\text{exacte}}$  potentiellement bruitée de l'équation (IV.3.30), l'opérateur d'observation  $C : L^2 \rightarrow L^2$  limite la connaissance de  $p_{\text{données}}$  à la surface d'observation  $\mathcal{S}$ . En théorie, l'opérateur  $C$  devrait être la multiplication par la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Cependant, en pratique, la discrétisation du problème nous autorise à choisir une approximation  $C^\infty$  à support compact de  $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$ , que nous notons  $\phi_{\mathcal{S}}$ . Nous considérerons donc les hypothèses suivantes sur  $\phi_{\mathcal{S}}$  :

- Pour tout  $x \in \Omega$ ,  $0 \leq \phi_{\mathcal{S}}(x) \leq 1$ .
- La fonction  $\phi_{\mathcal{S}}$  est à support compact dans  $T(\mathcal{S}, \varepsilon)$ .
- Pour tout  $x \in T(\mathcal{S}, \varepsilon/2)$ ,  $\phi_{\mathcal{S}}(x) = 1$ .

Finalement, afin d'éviter certaines difficultés techniques, on suppose que le support de  $f$  est dans  $B(0, 1-\varepsilon)$  et que l'objet  $f$  est tel que les solutions des

problèmes de Cauchy que nous considérerons admet une solution classique régulière  $C^\infty$ .

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'algorithme de nudging direct et rétrograde (BFN) :

**Définition IV.3.3.** ALGORITHME BFN-TTA : UNE ITÉRATION.

1. [Évolution directe]

À partir d'une ébauche de reconstruction  $f_1$  de l'objet à reconstruire  $f$ , définie comme une approximation de la condition initiale et à support dans  $B(0,1-\varepsilon)$ , commençons par considérer la solution  $p_1$  du Problème (IV.3.32) ayant pour condition initiale  $p_1(0) = 0$  et  $\partial_t p_1(0) = f_1$ . Cette solution évolue jusqu'à l'instant  $T = 2$ , choisi de sorte que les solutions  $p_1(t)$  et  $p_{\text{exacte}}(t)$  soient nulles sur  $B(0,1+\varepsilon)$  pour tout  $t \geq T$  (comme toutes les solutions issues de conditions initiales à support essentiel dans  $B(0,1-\varepsilon)$ , voir le principe de Huygens ci-dessus).

Ainsi au temps final  $T$ , si les données ne sont pas bruitées, la fonction d'erreur  $e = p_1 - p_{\text{données}}$ , qui est définie comme l'écart de la solution de l'algorithme direct  $p_1$  aux données, est toujours solution de l'équation (IV.3.32) mais avec les conditions initiales suivantes :

$$e(0) = 0 \text{ et } \partial_t e(0) = f_1 - f.$$

Aussi, au temps  $T$ , l'énergie de la fonction d'erreur vaut :

$$E_{p_1 - p_{\text{données}}}(T) = E_{p_1 - p_{\text{données}}}(0) = \frac{1}{2} \|\nabla(f_0 - f_{0,1})\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

puisque l'énergie des solutions de (IV.3.31) est conservée au cours du temps.

2. [Évolution rétrograde]

Nous appliquons ensuite la technique de nudging rétrograde en faisant remonter le temps à la solution  $p_1$ , mais en lui adjoignant, comme annoncé, le terme de rappel newtonien dit de nudging, présent pour corriger la solution tout au long de son évolution, proportionnellement à son écart aux données, pour la faire tendre vers celles-ci.



Plus précisément, étant donné un coefficient de nudging  $k \in \mathbb{R}_+$ , nous ajoutons à l'opérateur  $\mathcal{L}$  le terme de rappel correctif suivant :

$$k\phi_S \partial_t(\cdot - p^o).$$

Puis la solution rétrograde est calculée depuis l'état final de l'évolution directe, i.e.  $p_1(T)$  et  $\partial_t p_1(T)$ , jusqu'au temps initial  $t = 0$ .

On obtient donc une solution modifiée  $\tilde{p}_1$  du problème de Cauchy suivant, appelé équation de nudging rétrograde :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{p}_1 = k\phi_S \partial_t(\tilde{p}_1 - p_{\text{données}}) \text{ sur } [0, T] \times \Omega, \\ \tilde{p}_1(T) = p_1(T) \text{ sur } \Omega, \\ \partial_t \tilde{p}_1(T) = \partial_t p_1(T) \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (\text{IV.3.33})$$

Cette équation peut aisément être formulée comme une équation en temps direct au moyen de la fonction  $t \mapsto \tilde{p}_1(T - t)$ , que l'on note toujours  $\tilde{p}_1$ . Le problème de Cauchy précédent devient alors :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_1 = -k\phi_S \partial_t(\tilde{p}_1 + p_{\text{données}}(T - t)) \text{ sur } [0, T] \times \Omega, \\ \tilde{p}_1(0) = p_1(T) \text{ sur } \Omega, \\ \partial_t \tilde{p}_1(0) = -\partial_t p_1(T) \text{ sur } \Omega, \end{cases} \quad (\text{IV.3.34})$$

où  $\tilde{\mathcal{L}}$  est l'opérateur  $\mathcal{L}$  rétrograde (c'est-à-dire à changement de variable  $t \mapsto T - t$  près).

Lorsque  $\mathcal{L}$  est un opérateur d'ondes atténuées, par exemple, l'équation (IV.3.31) est irréversible (en temps). Dans ce cas, on peut se demander si le rappel newtonien peut régulariser ce problème afin de conserver au calcul sa stabilité. En tout cas, la question de l'existence et de l'unicité des solutions rétrogrades reste à étudier.

### 3. [Mise à jour de l'ébauche]

Finalement, après cette évolution directe et rétrograde, une nouvelle estimation  $\tilde{p}_1(T)$  est obtenue. Cependant, afin de pouvoir itérer ce processus et de conférer à la nouvelle ébauche l'hypothèse d'être à support dans  $B(0, 1 - \varepsilon)$ , ainsi que  $f$  et  $f_1$ , on la définit comme la restriction

de  $\tilde{p}_1(T)$  à  $B(0,1-\varepsilon)$ . La nouvelle ébauche est donc définie par :

$$f_2(x) := \mathbf{1}_{B(0,1-\varepsilon)}\tilde{p}_1(T,x), \quad x \in \Omega,$$

ce qui nous assure que l'ébauche  $f_2$  est dans  $L^2(B(0,1-\varepsilon))$ .

La dernière étape peut être justifiée par la connaissance *a priori* du fait que l'objet recherché,  $f$ , est à support dans  $B(0,1-\varepsilon)$  et donc que :

$$\|f_0 - \tilde{p}_1(T)\|_{H_0^1} \geq \|f_0 - \mathbf{1}_{B(0,1-\varepsilon)}\tilde{p}_1(T)\|_{H_0^1}.$$

Le procédé décrit ci-dessus est itéré, constituant ainsi un processus algorithmique, le BFN, et définissant une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  que l'on espère voir converger rapidement vers  $f$ .

Par la suite, nous noterons :

$$\mathcal{L}_k := \mathcal{L} + k\phi_S\partial_t, \quad k \in \mathbb{R}_+.$$

La sous-section suivante est dédiée à un premier résultat d'existence et d'unicité des solutions de l'algorithme BFN et de convergence de celui-ci.

### IV.3.2 Convergence du BFN pour la TTA

Le résultat de convergence du BFN que nous énonçons ici est limité à un cadre idéal auquel font appel la plupart des méthodes définies au premier chapitre. Ce résultat a l'avantage de reposer sur une preuve directe et de fournir un taux de convergence théoriquement optimal (relativement à un pas de discrétisation spatial donné). La suite de ce texte, tout autant que les résultats numériques présentés dans le Chapitre C page 199, montrent par ailleurs que l'algorithme du nudging direct et rétrograde converge dans des situations bien plus réalistes et avec un taux de convergence bien meilleur que celui obtenu ci-dessous (voir la remarque IV.3.7 page 173).

#### Énoncé du théorème

Le théorème suivant nous assure de la convergence géométrique de l'algorithme dans  $L^2(\Omega)$  sous les hypothèses suivantes :

- (i)  $\mathcal{L}$  est le d'Alembertien  $\partial_{tt} - \Delta$ .
- (ii) Les données ne sont pas bruitées, i.e.  $p^o = p_{\text{exacte}}$  (voir la Section III.1 page 34 du Chapitre A), et les observations sont complètes : la surface d'observation  $\mathcal{S}$  est la sphère  $S(0,1)$ <sup>13</sup>.
- (iii) L'objet à reconstruire  $f$  est dans  $L^2$  et à support essentiel contenu dans  $B(0,1 - \varepsilon)$ .

**Théorème IV.3.4.** CONVERGENCE DE L'ALGORITHME BFN-TTA. Sous les hypothèses (i)–(iii), il existe une constante  $0 < s < 1$  ne dépendant que de l'objet  $f$ , de la fonction d'observation  $\phi_{\mathcal{S}}$  et du coefficient de nudging  $k > 0$  telle que :

$$\|f - f_n\|_{L^2} \leq s^{n-1} \|f - f_1\|_{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{IV.3.35})$$

Avant de prouver ce théorème, commençons par étudier l'existence des solutions de l'algorithme.

### Étude liminaire de la solution de l'équation rétrograde

Le théorème suivant est démontré dans [70].

**Théorème IV.3.5.** Soient un paramètre de nudging  $k \in \mathbb{R}_+$  et trois fonctions  $\phi_{\mathcal{S}} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ,  $f \in H_0^1(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Omega)$ . Il existe une unique solution  $p$  dans  $\mathcal{C}^0$  au problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_k p(t,x) = -k\phi_{\mathcal{S}}(x)\partial_t p_{\text{données}}(T-t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ p(0) = f \text{ sur } \Omega, \\ \partial_t p(0) = g \text{ sur } \Omega, p(t,x) = 0, \text{ sur } (0,T)\partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{IV.3.36})$$

Par ailleurs, cette solution dépend continûment des conditions initiales.

Il est aisé de montrer que si  $\tilde{p}_1$  est la solution de (IV.3.36) ayant pour condition initiale  $f = \tilde{p}_1(0) = p_1(T)$  et  $g = \partial_t \tilde{p}_1(0) = -\partial_t p_1(T)$ , alors la fonction  $u := \tilde{p}_1 - p_{\text{données}}(T - \cdot, \cdot)$  est la solution du problème de Cauchy

<sup>13</sup>. Puisque  $\mathcal{S} = S(0,1)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $T(\mathcal{S}, \varepsilon/2) = A(1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$ .

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_k u = 0 \text{ sur } [0, T] \times \Omega, \\ u(0) = p_1(T) - p_{\text{données}}(T) \text{ sur } \Omega, \\ \partial_t u(0) = -\partial_t(p_1 - p_{\text{données}})(T) \text{ sur } \in \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{IV.3.37})$$

et satisfait :

$$E_u(0) = E_{p_1 - p_{\text{données}}}(T) = \frac{1}{2} \|f_1 - f\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Finalement, d'après la définition de l'ébauche  $f_2$ , on a :

$$E_u(T) \geq \frac{1}{2} \|\tilde{p}_1(\cdot, T) - f_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2} \|f_{0,2} - f_0\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Afin de compléter la preuve du Théorème IV.3.4 sur la page précédente, il ne nous reste donc à prouver que :

$$E_u(T) \leq s E_u(0) \text{ pour un certain } 0 < s < 1,$$

ce qui constitue l'objet des prochains paragraphes.

#### Preuve du Théorème IV.3.4

Un calcul classique de l'énergie de la solution  $u$  de (IV.3.37) donne :

$$E_u(T) - E_u(0) = -k \int_0^T \int_{\Omega} \phi(\partial_t u)^2. \quad (\text{IV.3.38})$$

La diminution d'énergie de la solution  $u$  est donc exactement la quantité d'énergie qui « traverse » le support de  $\phi_S$  durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

Afin d'inverser la transformée de Radon sphérique, Finch, Patch et Rakesh ont prouvé l'*identité de trace* suivante, qui sera utile à l'estimation de (IV.3.38) (voir [88]) :

**Théorème IV.3.6.** Soit  $p$  la solution de l'équation (IV.3.31) avec  $f = 0$  et  $g \in C_K^\infty(B(0,\rho))$ , où  $\rho > 0$ . Cette solution vérifie alors l'identité suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} g^2 = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0,\rho)} t \partial_t p^2.$$

Il vient :

$$\int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{R}^3} g^2 \, d\rho = \int_0^\infty \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \int_{S(0,\rho)} t \partial_t u^2 \, d\rho \, dt,$$

d'où :

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} g^2 = \int_0^\infty \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} t \partial_t u^2. \quad (\text{IV.3.39})$$

Par ailleurs, le Théorème IV.3.32 nous assure que cette identité reste vraie pour  $g \in L^2(\Omega)$  et  $u \in C^0([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$  solution du Problème (IV.3.32). En outre, le principe de Huyghens nous assure que :

$$\int_0^\infty \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} t \partial_t u^2 = \int_0^T \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} t \partial_t u^2.$$

Considérons maintenant la solution  $p_0$  du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_0 p_0(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ p_0(x,0) = p_1(x,T) - p_{\text{données}}(x,T), & x \in \Omega, \\ p_{0t}(x,0) = -\partial_t p_1(x,T) + \partial_t p_{\text{données}}(x,0), & x \in \Omega, \\ p_0(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{array} \right.$$

qui vérifie donc  $p_0 = (p_1 - p_{\text{données}})(\cdot, T - \cdot)$ .

Aussi,  $u = p_0 + v$  où  $v$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_0 v(x,t) = -k\phi \partial_t (p_0 + v)(x,t), & (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ v(x,0) = \partial_t v(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{array} \right.$$

Le calcul de l'énergie de  $v$  nous donne :

$$E_v(T) = -k \int_0^T \int_{\Omega} \phi \partial_t u_0 \partial_t v - k \int_0^T \int_{\Omega} \phi (\partial_t v)^2,$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$E_v(T) \leq k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} H(T) - kH(T)^2, \quad (\text{IV.3.40})$$

où :

$$H(T) := \left\| \sqrt{\phi} \partial_t v \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)}.$$

De plus, on a :

$$E_v(T) \geq \int_{\Omega} (\partial_t v)^2(\cdot, T) \geq \int_{\Omega} \phi (\partial_t v)^2(\cdot, T) = \frac{d}{dT} (H^2)(T).$$

Ainsi, en divisant (IV.3.40) par  $H(T)$ , on obtient :

$$2 \frac{d}{dT} H(T) + kH(T) \leq k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t p_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)}.$$

La solution de cette inégalité différentielle vérifie :

$$H(T) \leq \int_0^T \frac{k}{2} \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,s] \times \Omega)} e^{k(s-T)/2} ds,$$

et, puisque la fonction  $s \mapsto \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,s] \times \Omega)}$  est décroissante, il vient finalement :

$$H(T) \leq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} (1 - e^{-kT/2}).$$

Cette inégalité traduit le fait que malgré le terme de rappel contenu dans l'équation (IV.3.37), la solution de cette dernière conserve une certaine quantité d'énergie dans le support de  $\phi$ , qui est proportionnelle à l'énergie équivalente de  $p_0$ . En effet :

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} &\geq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} - H(T) \\ &\geq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} e^{-kT/2}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \phi(\partial_t u)^2 \geq \underbrace{\left( \int_0^T \int_{\Omega} \phi(\partial_t u_0)^2 \right)}_A e^{-kT}. \quad (\text{IV.3.41})$$

La dernière étape de cette preuve concerne l'estimation de  $A$ . On a :

$$A \geq \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t u_0)^2 = \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{données}})^2 (T-t),$$

de sorte que :

$$A \geq \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T \frac{t}{T} (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{données}})^2.$$

Aussi, si l'on applique (IV.3.39) à  $p_1 - p_{\text{données}}$ , on obtient :

$$A \geq \frac{\varepsilon}{T} E_u(0). \quad (\text{IV.3.42})$$

Enfin, on combine cette inégalité avec (IV.3.38) et (IV.3.41), d'où :

$$E_{\text{hom}}(T) \leq \left(1 - \frac{k\varepsilon}{T} e^{-kT}\right) E_u(0),$$

qui est l'inégalité attendue, avec  $s := 1 - \frac{k\varepsilon}{T} e^{-kT} < 1$ .

**Remarque IV.3.7.** *On rappelle que  $T = 2$ , il existe donc un choix optimal théorique concernant le coefficient de nudging  $k$  pour lequel  $s = 1 - \frac{\varepsilon}{8e}$ , et même si ce taux de convergence ne semble pas satisfaisant, on verra au cours du Chapitre C page 199 que le taux de convergence est bien meilleur en pratique.*

La preuve ci-dessus fournit un cas de convergence de l'algorithme BFN dans un cadre restreint, puisque l'opérateur de nudging aller  $K^f$  est nul. Cependant, d'un part nos applications montrent l'intérêt de l'usage d'un coefficient de nudging direct non nul et, d'autre part, la Section V permettra de généraliser ce résultat à un cadre beaucoup plus général. Par contre,

cette généralisation aura l'inconvénient de fournir une démonstration moins directe et faisant appel à un outillage théorique plus lourd.

Nous allons maintenant profiter d'outils permettant de prouver la convergence du BFN pour généraliser cette méthode et définir des algorithmes de reconstruction itératifs dont nous saurons caractériser la convergence.



## V Observateurs itératifs

Dans cette section, après avoir présenté les observateurs auxquels nous nous intéressons (Sous-section V.1), nous précisons les notions fondamentales d’observabilité, de contrôlabilité et de stabilisabilité ainsi que les objets afférents et leur propriétés (Sous-section V.2 page 183). Cette approche étant peu habituelle en TTA, nous détaillerons quelque peu les notions et résultats utilisés ainsi que leur lien avec les méthodes usuelles, le cas échéant.

En ce qui concerne les observateurs itératifs, il a été porté à notre connaissance un ensemble de travaux récents proches des nôtres et parus simultanément. Ceux-ci ont été décrits dans les articles suivants : [119, 202]. Nous avons depuis choisi d’en conserver la dénomination « observateur itératif ». Notre présentation diffère cependant de la leur et nos résultats tant théoriques que numériques sont sensiblement différents, et parfois complémentaires.

### V.1 Introduction, définitions

Suite aux travaux de Auroux et Blum sur le BFN, d’autres auteurs ont repris et étendu la démarche proposée d’itérer un processus par allers et retours temporels : voir nos travaux, partiellement résumés dans [164], ainsi que ceux, indépendants, présentés dans [101, 119, 202]. Si le rappel qui définit le BFN a l’avantage d’être simple, utiliser des critères d’optimalité pour définir d’autres types de rappels permet d’obtenir des résultats de convergence (qui sauront par ailleurs eux aussi être optimaux).

#### V.1.1 Observateurs

Suite aux limitations imposées par la forme simple du rappel de type nudging, et en particulier aux difficultés rencontrées dans l’étude de sa stabilité, nous nous sommes intéressés à des rappels de la forme  $-PC^*KC$ , inspirés par les *formes classiques des retours d’états obtenables en contrôle ou filtrage optimal*. Nous verrons que cette démarche permet non seulement de définir de nouveaux rappels (potentiellement moins arbitraires que le nudging), mais aussi de caractériser la stabilité du nudging, et donc la convergence du BFN

en cas de système réversible. En effet, lorsque  $P = I$ , on retrouve le rappel du nudging.

On définit donc les observateurs filtrés comme suit :

**Définition V.1.1.** OBSERVATEUR FILTRÉ *Étant donné un opérateur linéaire  $A$  non borné sur  $H$ , de domaine  $V = D(A)$  et faiblement coercif, un espace d'observations  $U$  et un opérateur d'observation  $C \in \mathcal{L}(H,U)$ , on considère deux opérateurs linéaires et positifs  $K \in \mathcal{L}(U)$  et  $P \in \mathcal{L}(H)$ . L'observateur filtré associé au quadruplet  $(A,C,P,K)$  est l'opérateur non borné suivant<sup>14</sup> :  $A_{P,K} = A - PC^*KC$ .*

De même que pour le nudging, les observateurs filtrés nous intéressent tout d'abord en ce qu'ils permettent d'intégrer l'erreur aux données directement dans le modèle. En effet, si l'on définit les observations  $p^o$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = Ap \text{ dans } L^2(0,T;V'), \\ p(0) = f, \\ p^o = Cp \text{ dans } L^2(0,T;V), \end{array} \right. \quad (\text{V.1.1})$$

où  $f \in V$  est l'objet (inconnu) à reconstruire, alors l'observateur filtré permet de définir une trajectoire corrigée tenant compte des données à partir d'une ébauche de reconstruction  $f_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^{f'} = Ap^f - PC^*K(Cp^f - p^o) \text{ dans } L^2(0,T;V'), \\ p^f(0) = f_1. \end{array} \right. \quad (\text{V.1.2})$$

À nouveau, le fait de perturber l'opérateur  $A$  par un opérateur  $-PC^*KC$  continu (ou « borné ») sur  $H$  n'entrave pas le fait que le Problème (V.1.2) est bien posé.

Par ailleurs,  $A$  étant linéaire, l'équation d'erreur associée aux problèmes précédents s'écrit (en notant toujours  $p^f$  la différence  $p^f - p^o$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^{f'} = A_{P,K}p^f \text{ dans } L^2(0,T;V'), \\ p^f(0) = f_1 - f. \end{array} \right. \quad (\text{V.1.3})$$

---

14. L'opérateur  $C$  n'interviendra pas comme variable dans les problèmes que nous considérerons, nous l'omettons donc dans cette notation.

On cherche des moyens de caractériser les situations où l'on peut définir des opérateurs  $P$  et  $K$  permettant de stabiliser ce dernier système (afin de « faire tendre » la trajectoire  $p^f(t)$  vers celle des données) ainsi que des moyens de définir ces opérateurs.

**Remarque V.1.2.** *En posant  $K^f = -PC^*K$ , notre problème revient à déterminer un opérateur  $K^f$  tel que  $A + K^fC$  génère un semi-groupe (exponentiellement) stable.*

*En dimension finie, ce problème est bien connu et étudié de longue date : on appelle de telles matrices  $A + K^fC$  des matrices de Hurwitz et les notions d'observabilité et de détectabilité permettent de caractériser les situations favorables (voir notamment l'introduction de [69] ou le premier chapitre de [239] ainsi que les références qui y sont incluses).*

*Nous présenterons les résultats fondamentaux concernant le cas des équations aux dérivées partielles au cours des paragraphes suivants.*

**Exemple V.1.3.** PREMIÈRES IDÉES D'UTILISATION. *Différentes situations peuvent alors être envisagées en vue de la résolution d'un problème du type de celui de la TTA : par exemple si, pour toute ébauche  $f_1$ , nous savons définir des opérateurs  $P$  et  $K$  tels que la solution du Problème (V.1.3) vérifie  $p^f(T) = 0$ , alors nous pouvons reconstruire l'objet  $f$ . De même, si nous savons les définir tels que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t)\| = 0$ , il est alors possible d'obtenir une approximation de l'objet en temps fini  $T$ .*

### V.1.2 Reconstruction itérative par observateurs filtrés

Comme annoncé, nous généralisons le BFN aux observateurs filtrés. Inclure ces observateurs dans des méthodes itératives a les mêmes intérêts que pour le nudging : on peut notamment espérer préciser l'approximation potentiellement fournie dans l'exemple V.1.3 en réutilisant les données au cours d'allers et retours temporels.

#### Définition

Très similaire au BFN, l'algorithme que nous proposons est défini comme suit :

**Définition V.1.4.** OBSERVATEURS FILTRÉS ITÉRÉS : ALGORITHME DE RECONSTRUCTION. Soit un opérateur linéaire  $A$ , un espace d'observations  $U$  et un opérateur d'observation  $C \in \mathcal{L}(H, U)$ . Étant donnés une ébauche de reconstruction  $f_1$  et deux paires d'opérateurs positifs autoadjoints :

$$(P^f, P^b) \in \mathcal{L}(H)^2 \text{ et } (K^f, K^b) \in \mathcal{L}(U)^2,$$

une itération de l'algorithme de reconstruction par observateurs filtrés se définit comme l'application de deux évolutions successives, l'une directe :

$$\begin{cases} p^{f'} = Ap^f - P^f C^* K^f (Cp^f - p^o) \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^f(0) = f_1, \end{cases} \quad (\text{V.1.4})$$

et l'autre rétrograde :

$$\begin{cases} p^{b'} = Ap^b + P^b C^* K^b (Cp^b - p^o) \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^b(T) = p^f(T), \end{cases} \quad (\text{V.1.5})$$

laquelle fournit une condition initiale qui constitue une nouvelle ébauche de reconstruction  $f_2 = p^b(0)$ , ce qui permet donc d'itérer ce processus.

Nous abrègerons le nom de cet algorithme en *BFF* pour Back and Forth Filtering.

Suite aux présentations et explications détaillées contenues dans la Section IV page 131 concernant le BFN et les questions soulevées par la présence d'une évolution rétrograde, nous ne répétons pas ici une approche aussi didactique, les motivations et réponses étant les mêmes que dans la section précitée.

Rappelons seulement que dans le cas d'observations directement issues du modèle, définies par (V.1.1), les équations de l'algorithme (V.1.4) et (V.1.5) sont équivalentes aux *équations d'erreur* suivantes (avec l'abus de notation habituel) :

$$\begin{cases} p^{f'} = Ap^f - P^f C^* K^f Cp^f \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^f(0) = f_1, \end{cases} \quad (\text{V.1.6})$$

et :

$$\begin{cases} p^{b'} = Ap^b + P^b C^* K^b C p^b \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{cases} \quad (\text{V.1.7})$$

La suite de cette section est dédiée à l'étude de ces équations, et nous commençons par fournir un premier cadre dans lequel cet algorithme est bien défini.

### Au sujet de l'existence des solutions de l'algorithme

Pour ce qui est de l'existence et de l'unicité des solutions de l'algorithme de reconstruction de la définition V.1.4 de la page ci-contre, les hypothèses et la preuve du Théorème IV.2.2 page 151 s'adaptent directement à la situation présente.

On considère donc un opérateur  $A$  non borné sur un Hilbert séparable  $H$ , de domaine  $V = D(A)$  tel que les injections :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

sont continues et denses, et l'on suppose que  $A$  est diagonalisable au sens de la définition II.1.5 page 103 et que  $-A$  est faiblement coercif. Il nous faut ensuite adapter l'hypothèse faite sur l'observateur :

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace  $V_m$  est stable pour  $C^* K^f C$  et  $C^* K^b C$  :

$$PC^* K^f CV_m \subset V_m \text{ et } PC^* K^b CV_m \subset V_m.$$

Sous ces hypothèses, le théorème suivant nous assure de l'existence et de l'unicité des solutions de l'algorithme BFF :

**Théorème V.1.5.** SOLUTIONS DE L'ALGORITHME BFF. Il existe une unique paire  $(p^f, p^b)$  de solutions faibles des équations :

$$\begin{cases} p^{f'} = Ap^f - P^f C^* K^f (Cp^f - p^o) \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^f(0) = f_1, \end{cases} \quad (\text{V.1.8})$$

et :

$$\begin{cases} p^{b'} = Ap^b + P^b C^* K^b (Cp^b - p^o) \text{ dans } L^2(0, T; V'), \\ p^b(T) = p^f(T). \end{cases} \quad (\text{V.1.9})$$

De plus, ces solutions appartiennent à  $C^0(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ .

La condition initiale obtenue définit la nouvelle ébauche de reconstruction :

$$f_2 = p^b(0),$$

et vérifie, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$f_{2,i} = f_{1,i} - \int_0^T e^{-\lambda_i s} \left[ P^f C^* K^f C p^f(s) + P^b C^* K^b C p^b(s) \right]_i ds. \quad (\text{V.1.10})$$

De même que dans le cas du BFN, l'algorithme BFF est équivalent à l'application de l'opérateur  $\Xi$  défini comme suit :

**Définition V.1.6.** *L'opérateur de BFF est défini par :*

$$\begin{aligned} \Xi &: V \longrightarrow V \\ f_1 &\longmapsto f_2, \end{aligned}$$

qui associe l'ébauche  $f_2$  obtenue par application d'une itération de BFF à l'ébauche initiale  $f_1$ .

### Cas d'équations réversibles et de la TTA

Dans le cas où le phénomène considéré est supposé réversible, la situation est bien plus simple (et naturelle).

Soit  $L$  un opérateur non borné sur un Hilbert  $H$  de domaine  $V = D(A)$ . On suppose que  $L$  est autoadjoint et coercif. On s'intéresse à un phénomène modélisé par une équation de la forme :

$$p'' - Lp = 0. \quad (\text{V.1.11})$$

Afin de poser ce problème sous la forme d'un problème du premier ordre en temps, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ L & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur  $A$  est donc antiadjoint, il génère donc un groupe d'opérateurs  $\{\mathbb{T}(t)\}_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $H$  qui vérifie :

$$\mathbb{T}(-t) = \mathbb{T}(t)^{-1},$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et l'équation (V.1.11) est (temporellement) réversible.

Nous nous donnons un espace des observations  $U$  et un opérateur d'observation  $C \in \mathcal{L}(H, U)$  et nous intéressons donc à des observateurs de la forme  $L - PC^*KC\partial_t$ , à leurs opérateurs adjoints  $L + C^*K^*C^*P^*\partial_t$  ainsi qu'à leurs équivalents respectifs à l'ordre 1, à savoir :

$$A_{P,K} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ L & -PC^*KC \end{pmatrix} \text{ et } A_{P,K}^* = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -L & -CK^*C^*P^* \end{pmatrix}.$$

L'intérêt porté aux opérateurs adjoints des opérateurs *aller* est donc justifié par le fait que les opérateurs *retour* s'écrivent comme les adjoints d'opérateurs aller. En effet, l'opérateur adjoint associée à l'équation directe est :

$$A_{P,K}^* = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -L & -CK^*C^*P^* \end{pmatrix} = -A - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CK^*C^*P^* \end{pmatrix},$$

Une autre propriété remarquable simplifie l'étude des solutions de cet algorithme : comme dans la définition IV.3.3 page 166 pour le rétrograde, l'équation est la même en aller et retour lorsque le retour est posé en temps direct<sup>15</sup>. On annule de plus la dérivée temporelle de la pression de la nouvelle ébauche et l'on pourra, au besoin, restreindre cette ébauche au domaine d'intérêt.

---

15. Rappel : les équations rétrogrades peuvent être posées en temps direct par le biais du changement de variable  $t \mapsto T - t$ .

**Définition V.1.7.** ALGORITHME BFF-TTA. *Les équations d'erreur du BFF pour la TTA s'écrivent :*

$$\begin{cases} p^{f''} = Lp^f - P^f C^* K^f C p^{f'} & \text{dans } L^2(0, T; V'), \\ p^f(0) = f_1, \\ p^{f'}(0) = 0, \end{cases}$$

où  $f_1$  est l'ébauche de reconstruction de départ, et :

$$\begin{cases} p^{b''} = Lp^b - P^b C^* K^b C p^{b'} & \text{dans } L^2(0, T; V'), \\ p^b(0) = p^f(T), \\ p^{b'}(0) = -p^{f'}(T), \end{cases}$$

d'où l'on tire une nouvelle ébauche  $f_2 = p^b(T)$ .

Ainsi, quels que soient les opérateurs  $C$ ,  $P$  et  $K$  continus, on a la proposition suivante :

**Proposition V.1.8.** Les solutions de l'algorithme BFF existent et sont uniques et l'équation (V.1.10), qui définit la nouvelle ébauche, s'écrit ici :

$$f_2 = f_1 - \int_0^T \mathbb{T}(-s) \left[ P^f C^* K^f C p^{f'}(s) + P^f C^* K^f C p^{f'}(s) \right] ds.$$

PREUVE. Le résultat d'existence et unicité est direct du fait de la continuité des opérateurs  $C$ ,  $P$  et  $K$ . On a donc  $D(A) = D(A_{\pm P, K})$ . De plus, puisque le semi-groupe  $\{\mathbb{T}\}$  est réversible, la définition de la nouvelle ébauche en découle car d'une part :

$$\begin{aligned} p^f(T) &= \mathbb{T}(T)f_1 - \int_0^T \mathbb{T}(T-s) P^f C^* K^f C p^{f'}(s) \\ &= \mathbb{T}(T) \left[ f_1 - \int_0^T \mathbb{T}(-s) P^f C^* K^f C p^{f'}(s) \right], \end{aligned}$$



et d'autre part :

$$\begin{aligned} p^b(T) &= p^f(T) \\ &= \mathbb{T}(T) \left[ f_2 + \int_0^T \mathbb{T}(-s) P^b C^* K^b C p^{b'}(s) \right], \end{aligned}$$

d'après les équations (V.1.6) et (V.1.7), et il ne reste qu'à inverser  $\mathbb{T}(T)$ .  $\square$

De même que dans le cas du nudging, les égalités d'énergie associées à ces opérateurs expliquent bien l'intérêt qui leur est porté *a priori*.

## V.2 Observation, observateurs et ondes : études de convergence

### V.2.1 Définitions

Cette sous-section est consacrée à la définition des notions classiques associées aux problèmes posés en Section I page 95. Nous adoptons un point de vue de type « contrôle optimal » pour des raisons précisées dans ladite section et précisées ci-dessous. Fort similaire, le point de vue « filtrage » ou « estimation optimale » sera présenté plus loin, en Sous-section I.2 page 204 du Chapitre C.

Soit  $A$  un opérateur non borné sur un Hilbert  $H$ , de domaine  $V = D(A)$ , générateur d'un semi-groupe fortement continu  $\{\mathbb{T}(t)\}_{t \geq 0}$  sur  $H$ . On note  $V'$  le dual de  $V$  par rapport à  $H$  et l'on suppose que les injections suivantes :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

sont continues et denses. On fixe un horizon de temps  $T \in (0, \infty]$ . Soit  $U$  un Hilbert, l'espace d'observations (ou de contrôle),  $C \in \mathcal{L}(H, U)$  l'opérateur d'observation et  $B \in \mathcal{L}(U, H)$  l'opérateur de contrôle.

**Définition V.2.1.** CONTRÔLABILITÉ EXACTE.

- *Le problème d'exacte contrôlabilité associé à la paire  $(A, B)$  s'écrit ainsi : Étant donné  $p_T \in H$  et  $p_0 \in H$ , existe-t-il  $u \in U$  tel que la*

solution  $p$  de l'équation :

$$\begin{cases} p' = Ap + Bu \text{ sur } (0, T), \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

vérifie  $p(T) = 0$  ?

- Si tel est le cas quels que soient  $(p_0, p_T) \in H \times H$ , on dit que la paire  $(A, B)$  est exactement contrôlable (en temps  $T$ ).

Par défaut, nous dirons contrôlable pour signifier exactement contrôlable. Poursuivons avec la notion de stabilisabilité :

**Définition V.2.2.** STABILISABILITÉ FORTE.

- Un semi-groupe  $\{\mathbb{T}(t)\}_{t \geq 0}$  est dit exponentiellement stable sur  $H$  s'il existe  $M, \mu > 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\|\mathbb{T}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{-\mu t}.$$

- Le problème de stabilisabilité forte associé à la paire  $(A, B)$  s'écrit ainsi : Existe-t-il  $K \in \mathcal{L}(H, U)$  tel que l'opérateur  $A + BK$  génère un semi-groupe fortement continu exponentiellement stable sur  $H$  ?
- Si tel est le cas, on dit que la paire  $(A, B)$  est (fortement) stabilisable.

Par la suite, nous utiliserons le terme « stabilisable », et « forte » sera implicite. Une notion proche de la stabilisabilité est celle de détectabilité :

**Définition V.2.3.** DÉTECTABILITÉ FORTE.

- Le problème de détectabilité forte associé à la paire  $(A, C)$  s'écrit ainsi : Existe-t-il  $K \in \mathcal{L}(H, U)$  tel que l'opérateur  $A + KC$  génère un semi-groupe fortement continu exponentiellement stable sur  $H$  ?
- Si tel est le cas, on dit que la paire  $(A, C)$  est (fortement) détectable.

Comme précédemment, « détectable » signifiera « fortement détectable » dans la suite. Nous verrons ci-dessous les différents liens qu'entretiennent ces notions entre elles et avec celle d'observabilité, définie comme suit :

**Définition V.2.4.** OBSERVABILITÉ EXACTE. *On dit que la paire  $(A, C)$  est (exactement) observable lorsqu'il existe  $T, C_T > 0$  tels que :*

$$\int_0^T \|\mathbf{CT}(t)p_0\|_U dt \geq C_T \|p_0\|_H \text{ pour tout } p_0 \in H.$$

*On dit alors que la condition ou l'inégalité d'observation est vérifiée et  $C_T$  est appelée constante d'observabilité.*

Lorsque nous parlerons d'observabilité, le terme « exacte » ne sera précisé qu'en fonction des besoins et laissé implicite sinon.

Dans la définition ci-dessus, on retrouve l'opérateur  $\mathcal{W} : f \mapsto \mathbf{CT}(t)f$  et l'observabilité exacte induit l'injectivité de  $\mathcal{W}$ .

**Remarque V.2.5.** *Bien entendu, ces notions ont leur équivalent en dimension finie. Par exemple, dans ce cas, la détectabilité se définit ainsi : la paire  $(A, C)$  est dite détectable s'il existe  $K$  tel que  $A + KC$  soit de Hurwitz – c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres ont une partie réelle négative. De même, l'observabilité trouve une formulation simplifiée en la condition de rang de Kalman (voir [239, p. 11–18]).*

## V.2.2 Étude d'observateurs pour les opérateurs antiadjoints

Cette sous-section est dédiée au cas où l'opérateur  $A$  est antiadjoint. Après avoir énuméré quelques propriétés fondamentales concernant l'observation associée à des opérateurs antiadjoints, nous présenterons une succession de déductions menant aux deux principaux résultats de cette sous-partie : le Corollaire V.2.15 page 190 et le Théorème V.2.16 page 191.

### Premières propriétés

Dans les paragraphes suivants, nous tâchons d'exposer des résultats classiques de manière claire afin d'illustrer notre démarche. Parmi les nombreux écrits concernant les propriétés fondamentales liées à l'observabilité et au contrôle des systèmes dynamiques, nous conseillons particulièrement la lecture des sources suivantes : [56, 59, 69, 155, 156, 205, 239].

À la suite des définitions précédentes, considérons un opérateur  $A$  générateur d'un semi-groupe fortement continu,  $B$  un opérateur de contrôle et  $C$  un opérateur d'observation. Commençons par énoncer deux lemmes qui nous seront utiles par la suite. Le premier concerne le lien entre stabilité d'un opérateur et stabilité de son adjoint :

**Lemme V.2.6.** Le semi-groupe généré par  $A$  est exponentiellement stable si et seulement si le semi-groupe généré par l'adjoint  $A^*$  de  $A$  est exponentiellement stable.

Et le second traite de la robustesse de la notion d'observabilité :

**Lemme V.2.7.** Soit  $S \in \mathcal{L}(U)$  défini-positif, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $(A, C)$  est observable.
- ii.  $(A, SC)$  est observable.
- iii. Pour tout  $S' \in \mathcal{L}(U)$  autoadjoint positif,  $(A, S'C)$  est observable.

On déduit du Lemme V.2.6 le corollaire suivant :

**Corollaire V.2.8.** La paire  $(-A, C^*)$  est fortement stabilisable si et seulement si la paire  $(A, C)$  est fortement détectable.

On suppose dorénavant que  $A$  est antiadjoint, cet opérateur génère donc un groupe unitaire  $\{\mathbb{T}(t)\}_{t \geq 0}$  fortement continu sur  $H$ .

Considérons en outre le lemme suivant :

**Lemme V.2.9.** La paire  $(A, C)$  est observable ssi la paire  $(-A, C)$  est observable.

PREUVE. L'opérateur  $-A$  génère le groupe unitaire  $\{\mathbb{T}(-t)\}_{t \geq 0}$  sur  $H$ . Il suffit de prouver que si  $(A, C)$  est observable, alors  $(-A, C)$  l'est aussi. Quitte à utiliser le changement de variable  $t \mapsto -t$  dans les lignes suivantes, l'implication inverse sera prouvée. On suppose donc qu'il existe  $T^o, c > 0$  tel que pour tout  $f \in V$  :

$$\int_0^{T^o} \|C\mathbb{T}(t)f\|_U^2 dt \geq c \|f\|_H^2,$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{T^o} \|C\mathbb{T}(-t)f\|_U^2 dt &= \int_0^{T^o} \|C\mathbb{T}(s - T^o)f\|_U^2 ds \\ &\geq \int_0^{T^o} \|C\mathbb{T}(s)\mathbb{T}(-T^o)f\|_U^2 dt \\ &\geq c \|\mathbb{T}(-T^o)f\|_H^2 = c \|f\|_H^2 \end{aligned}$$

□

Grâce à ce dernier lemme, on obtient le théorème suivant :

**Théorème V.2.10.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La paire  $(A, C)$  est observable.
2. Pour tout  $S \in \mathcal{L}(U)$  positif et autoadjoint, si l'on pose  $B = C^*S$ , la paire  $(A, B)$  est fortement stabilisable.
3. La paire  $(A, C)$  est détectable.

**Remarque V.2.11.** *Le lemme précédent permet aussi d'affirmer que les assertions suivantes sont aussi équivalentes à ces mêmes assertions dans lesquelles l'opérateur  $A$  est remplacé par  $-A$ .*

PREUVE. Commençons par prouver l'équivalence entre les points 1 et 2 : la preuve de la Proposition IV.2.5 page 161 s'adapte directement pour prouver que, si la paire  $(A, C)$  est observable (c'est-à-dire si la paire  $(A^*, C)$  l'est), alors tout opérateur  $S \in \mathcal{L}(U)$  positif et autoadjoint définit un observateur  $A - C^*SC$  exponentiellement stable.

Réciproquement, en notant  $K \in \mathcal{L}(H, U)$  un opérateur tel que  $A - C^*K$  est exponentiellement stable, il existe  $M, \mu > 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$ , les solutions  $p$  de l'équation :

$$p' = Ap - C^*Kp \text{ sur } (0, \infty), \quad (\text{V.2.12})$$

vérifient  $\|p(t)\|_H \leq Me^{-\mu t} \|p(0)\|_H$ . Soit  $T^o > 0$  tel que :

$$2Me^{-2\mu T^o} < 1.$$

L'égalité d'énergie associée à l'équation (V.2.12) s'écrit :

$$\int_0^{T^o} \langle Kp, Cp \rangle dt = \|p(0)\|_H^2 - \|p(t)\|_H^2 \geq (1 - Me^{-2\mu T^o}) \|p(0)\|_H^2.$$

et l'on observe que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} \langle Kp, Cp \rangle &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \|K\|_{\mathcal{L}(H,U)}^2 \|p(t)\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|Cp\|_U^2 \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \|K\|_{\mathcal{L}(H,U)}^2 Me^{-2\mu T^o} \|p(0)\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|Cp\|_U^2. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T^o} \|Cp\|_U^2 dt \geq \|p(0)\|_H^2 \left[ 1 - M \left( e^{-2\mu T^o} + \frac{\|K\|^2}{4\varepsilon\mu} \right) \right]. \quad (\text{V.2.13})$$

En particulier, en choisissant :

$$\varepsilon = \frac{M \|K\|^2}{2\mu},$$

il vient :

$$e^{-2\mu T^o} < \frac{1}{2M} = \frac{1}{M} - \frac{1}{2M} = \frac{1}{M} - \frac{\|K\|^2}{4\varepsilon\mu},$$

d'où :

$$c = 1 - M \left( e^{-2\mu T^o} + \frac{\|K\|^2}{4\varepsilon\mu} \right) > 0.$$

Ainsi, l'inégalité (V.2.13) constitue bien une condition d'observabilité.

Enfin, l'équivalence entre les points 2 et 3 est prouvée par le Corollaire V.2.8 page 186.  $\square$

### Un résultat de Zabczyk sur l'équation de Riccati algébrique

Le prochain résultat énoncé, dû à Zabczyk [265] et traduit ici en des termes qui nous intéressent, explicite le lien entre les diverses notions définies ci-dessus et un moyen pratique de définir des observateurs exponentiellement stables. Commençons par définir l'équation de Riccati algébrique :

**Définition V.2.12.** ÉQUATION DE RICCATI ALGÈBRIQUE. *Étant donné un opérateur  $R \in \mathcal{L}(U)$ , l'équation de Riccati algébrique dans  $H$  associée aux opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  s'écrit :*

$$2\langle PAf, f \rangle + \langle Cf, Cf \rangle - \langle PBR^{-1}B^*Pf, f \rangle = 0, \quad P \geq 0, \quad (\text{V.2.14})$$

pour tout  $f \in D(A)$ .

Le théorème suivant précise le lien qu'entretiennent les notions de détectabilité et de stabilisabilité avec l'équation de Riccati, et précise l'utilité des solutions de cette équation :

**Théorème V.2.13.** THÉORÈME DE ZABCZYK [265]. Soit  $B \in \mathcal{L}(U, H)$  et  $C \in \mathcal{L}(H, U)$ , ainsi que  $R \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur positif autoadjoint, alors :

1. Si la paire  $(A, C)$  est détectable, alors l'équation de Riccati (V.2.14) admet au moins une solution. En outre, si  $P$  est solution de l'équation (V.2.14), alors l'opérateur  $A - BR^{-1}B^*P$  est stable et  $P$  est autoadjoint.
2. Si de plus la paire  $(A, B)$  est stabilisable, alors l'équation (V.2.14) admet une unique solution.

Afin de préciser ce qu'a d'« optimal » le rappel ainsi défini, considérons le problème de contrôle suivant :

Soit  $R \in \mathcal{L}(U)$  autoadjoint positif et une ébauche  $p_1$ . On considère le problème de type contrôle linéaire quadratique suivant :

$$\begin{cases} p' = Ap + Bu, \\ p(0) = p_0, \\ p^o = Cp, \end{cases} \quad (\text{V.2.15})$$

sur un intervalle de temps infini  $(0, \infty)$ , pour lequel nous définissons la fonctionnelle :

$$J(p_0, u) = \int_0^\infty \|Cp(t) - p^o\|_U^2 + \|u(t)\|_{U, R}^2 dt,$$

où la solution  $p$  est définie par l'équation (V.2.15) à partir de  $p_0$  et  $u$ .

On a alors le résultat suivant (voir notamment [69, Section 6.1]) :

**Théorème V.2.14.** La solution  $P$  de l'équation (V.2.14) fournie par le Théorème V.2.13 de la page précédente répond au problème de minimisation associé à  $J$  pour une ébauche  $p_0$  donnée. Plus précisément, on a :

$$\langle p_0, Pp_0 \rangle = \min_{u \in L^2(0, \infty; U)} J(p_0, u),$$

et le contrôle optimal  $u_{\min}$  est donné par :

$$u_{\min}(p_0, t) = -R^{-1}B^*Pp(t).$$

Dans le cadre de la TTA, seul l'opérateur d'observation est connu (et imposé par le problème), nous ferons donc usage du corollaire suivant, issu des Théorèmes V.2.10 page 187 et V.2.13 (utilisé avec  $-A$  à la place de  $A$ ), qui nous fournit un moyen de définir des observateurs stables :

**Corollaire V.2.15.** Soit  $K \in \mathcal{L}(H)$  positif et autoadjoint. Si la paire  $(A, C)$  est observable, alors il existe une unique solution  $P$  à l'équation (V.2.14) pour tout  $R \in \mathcal{L}(H)$  positif autoadjoint et pour  $B = C^*K^{1/2}$ . De plus, l'observateur  $A - PC^*R^{-1}C$  est exponentiellement stable.

Enfin, si l'on suppose que  $R = K^{-1}$ , alors  $P \equiv I$  et l'opérateur  $A - C^*KC$  est stable.

PREUVE. D'après le Théorème V.2.10, l'observabilité de la paire  $(A, C)$  implique que  $(A, C)$  est détectable et que  $(A, B)$  est stabilisable et donc, d'après le Théorème V.2.13, que l'équation de Riccati admet une unique solution et que celle-ci est telle que l'observateur  $A - PC^*R^{-1}C$  est stable. La suite relève d'une astuce d'écriture : le fait de choisir  $B$  sous la forme  $C^*K^{1/2}$  nous permet d'obtenir un observateur stable de la forme nudging.  $\square$

Plus précisément, nous avons démontré que parmi les assertions suivantes, les trois premières sont équivalentes et impliquent la troisième, quel que soit  $K \in \mathcal{L}(H)$  positif autoadjoint :

1. La paire  $(A, C)$  est observable.



2. La paire  $(A, C^*K^{1/2})$  est contrôlable.
3. La paire  $(A, C)$  est détectable.
4. L'observateur  $A - C^*KC$  est exponentiellement stable.

Or cette dernière assertion implique, d'après le principe de contrôlabilité via stabilisabilité de Russel [205], que la paire  $(A, C^*)$  est contrôlable. *Les quatre assertions précédentes sont donc équivalentes.*

En particulier, concernant les méthodes de nudging, nous avons prouvé le résultat suivant :

**Théorème V.2.16.** La convergence asymptotique du nudging, c'est-à-dire la stabilité de l'observateur de Luenberger  $A_{I,K}$  sur  $(0, \infty)$ , pour un opérateur de nudging  $K$  donné est équivalente à l'observabilité du système  $(A, C)$ .

Cependant, l'approche consistant à définir  $R$  en fonction de l'opérateur de nudging  $K$  n'est intéressante qu'en vue d'obtenir la convergence asymptotique du nudging. Il peut aussi être intéressant d'aborder le problème comme suit : supposons que nous ayons connaissance de l'opérateur de covariance d'erreur d'observation  $R$  (cette connaissance peut être empirique, même si cet opérateur est rarement bien déterminé), en posant alors  $B = C^*$  et sous condition d'observabilité, on sait définir un observateur exponentiellement stable, qui est de la forme  $A - PC^*R^{-1}C$  où  $P$  est la solution de l'équation de Riccati algébrique (V.2.14).

On retrouve alors une formulation de type « commande quadratique linéaire » en horizon de temps infini, pour laquelle l'erreur modèle est négligée et l'opérateur  $PC^*R^{-1}$  est appelé *gain de rappel*. Cette approche sera détaillée en Section I.2 page 204 du Chapitre C.

On voit par ailleurs en quoi le nudging correspond à une formulation sous-optimale des filtrages optimaux, et nous verrons que, si l'erreur d'observation nous est inconnue, il peut être intéressant de définir  $K$  à partir d'un critère extérieur au problème de minimisation (notamment suivant des intérêts liés à la discrétisation du problème, voir le Chapitre C).

Enfin, la détermination de la solution  $P$  de l'équation de Riccati algébrique étant coûteuse tant en calcul qu'en mémoire, le nudging évite cet

écueil en proposant un observateur simplifié dont la convergence est dorénavant caractérisée suivant un critère classique : la condition d'observabilité.

### Horizon de temps $T$ fini

En horizon de temps fini et à condition de choisir à nouveau  $B$  correctement, on peut aussi obtenir une solution stationnaire  $\Pi(t) \equiv kI$  à l'équation de Riccati, qui est cette fois-ci différentielle (voir notamment le Théorème 6.1.9 de [69]) et ce à la seule condition de choisir la condition initiale  $\Pi(0) = M = kI$ . Donc c'est l'unique solution, et elle résout le problème sur intervalle de temps fini.

Le caractère antiadjoint de l'opérateur  $A$  nous permet donc d'obtenir des solutions très particulières à l'équation de Riccati lorsque nous profitons de la liberté de choix dont nous disposons en ce qui concerne l'opérateur de contrôle en posant  $B = C^*K^{1/2}$ , et le contrôle obtenu est optimal en un sens linéaire quadratique.

### Application aux observateurs itératifs

En reprenant les notations de la Sous-section V.1, on a donc prouvé l'équivalence entre l'observation (et donc la stabilisation, ainsi que la détection) directe et rétrograde, c'est-à-dire portant sur l'équation directe ou l'équation rétrograde, pour les équations régies par un opérateur antiadjoint.

Dans le cas du BFF appliqué à la TTA, on en déduit donc que la condition d'observation suffit à prouver qu'étant donnés  $K^f$  et  $K^b$ , il existe un unique rappel direct et un unique rappel rétrograde qui s'expriment à l'aide des solutions  $P^f$  et  $P^b$  de l'équation de Riccati (V.2.14). Par la même occasion, il est prouvé que les observateurs direct et rétrograde associés à ces rappels sont exponentiellement stables. Les semi-groupes associés admettent donc un taux de croissance strictement négatif et, sur un intervalle de temps  $(0, T)$  suffisamment long, à savoir tel que :

$$T > T^o,$$

l'erreur diminue strictement à chaque itération.

### V.2.3 Observation et équations d'onde

Dans cette partie, nous rappelons brièvement quelques résultats essentiels concernant l'observation et le contrôle des équations d'onde. L'opérateur  $L$  est supposé être de la forme  $c(x)\Delta$ , où  $\Delta$  est le Laplacien de Dirichlet sur un ouvert borné régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et où la vitesse  $c$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et est strictement positive. Le Hilbert  $H$  est  $L^2(\Omega, c^{1/2}dx)$ . Le domaine d'observation  $\mathcal{S}$  est inclus dans  $\bar{\Omega}$ . On note :

$$\Omega_T = (0, T) \times \Omega \text{ et } \mathcal{S}_T = (0, T) \times \mathcal{S}.$$

L'opérateur d'observation  $C$  et l'opérateur de contrôle  $B$  sont respectivement la restriction au domaine d'observation et l'espace d'observation  $U$  est  $L^2(\mathcal{S}_T)$  et l'extension des fonctions de  $L^2(\mathcal{S}_T)$  à  $\Omega_T$  par 0.

Dans les sous-sections précédentes, nous avons montré que l'étude de la convergence du BFF se ramène à celle de l'observabilité associée au Problème (V.1.1). Afin de mieux comprendre celle-ci, nous introduisons donc quelques éléments de théorie du contrôle géométrique.

Nous nous inspirons principalement des références suivantes : [56, 155, 156, 273], et ne fournissons pas les preuves de ces résultats classiques.

#### Dualité entre contrôlabilité et observabilité

Dans la sous-partie précédente, nous avons bien vu l'importance que peut revêtir le problème de contrôlabilité I.0.3 page 98 pour la résolution du problème de la TTA. Rappelons que ce problème consiste à savoir s'il existe un contrôle  $u$  tel que  $p(T) = f$  pour toute condition initiale  $(p_0, p_1) \in V \times H$ . Le problème considéré étant linéaire, on se ramène au cas où  $f \equiv 0$ . En d'autres termes, on se demande si l'opérateur :

$$\begin{aligned} R & : U \longrightarrow V \times H \\ & u \longmapsto (p_0, p_1), \end{aligned}$$

qui, à tout contrôle  $u \in U$  associe la condition initiale de la solution du problème :

$$\begin{cases} p'' - Lp = \mathbf{1}_{\mathcal{S}}u, \\ p(0) = p_0, \\ p'(0) = p_1, \end{cases}$$

telle que  $p(T) = 0$  est surjectif.

Deux notions importent donc dans ce cadre :

**Définition V.2.17.** *On dit que la paire  $(A,B)$  est exactement contrôlable si  $R$  est surjectif, c'est-à-dire si toute condition initiale peut être contrôlée à zéro en temps  $T$ , et qu'elle est approximativement contrôlable si  $\text{Im}(R)$  est dense, c'est-à-dire si l'on peut contrôler un ensemble dense de conditions initiales.*

En mettant en évidence leur relation de dualité, la méthode HUM de Lions [155] ramène l'étude de l'opérateur  $R$  à celle de l'opérateur  $S$  défini par :

$$\begin{aligned} S &: V \times H \longrightarrow U \\ (q_0, q_1) &\longmapsto Cq = q|_{\mathcal{S}_T}, \end{aligned}$$

où  $q \in \mathcal{C}^0(0,T;V) \cap \mathcal{C}^1(0,T;H)$  est la solution faible du problème :

$$\begin{cases} q'' - Lq = 0, \\ q(0) = q_0, \\ q'(0) = q_1. \end{cases}$$

Dans le cadre de la TTA, on a donc :

$$S(f,0) = \mathcal{W}f,$$

pour tout  $f \in V$ , avec les notations de la Sous-section III.1 page 34 du Chapitre A.

La méthode HUM repose alors sur la relation de dualité entre  $R$  et  $S$  qui fait l'objet du théorème suivant :

**Théorème V.2.18.** Soit la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  définie sur  $(V \times H)^2$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \quad (V \times H)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((p_0, p_1), (q_0, q_1)) &\longmapsto \langle p_0, q_1 \rangle_H - \langle p_1, q_0 \rangle_H. \end{aligned}$$

On a alors, pour tout  $u \in U$  et tout  $(q_0, q_1) \in V \times H$  :

$$\mathcal{B}(Ru, (q_0, q_1)) = \langle g, S(q_0, q_1) \rangle_{L^2(S_T)}.$$

De ce théorème peuvent être déduits deux résultats classiques essentiels à la compréhension de notre problème. Ceux-ci mettent en lumière le lien entre contrôlabilité et injectivité de  $S$  et donc, par restriction dans l'espace des conditions initiales, injectivité de  $\mathcal{W}$ , dans le cas de la TTA. Nous énonçons ces résultats dans le corollaire ci-dessous.

L'injectivité de  $\mathcal{W}$  étant une condition naturelle à respecter en TTA, ces résultats mettent donc en évidence le fait que les méthodes de résolution reposant sur la théorie du contrôle optimal que nous proposons sont bien adaptées au problème qui nous intéresse.

**Corollaire V.2.19.** On a les deux équivalences suivantes :

- La paire  $(A, B)$  est approximativement contrôlable si et seulement si le noyau de  $S$  est réduit à  $\{(0, 0)\}$ .
- La paire  $(A, B)$  est exactement contrôlable si et seulement si il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $(q_0, q_1) \in V \times H$ , on a :

$$\int_0^T \int_S |S(q_0, q_1)|^2 dxdt \geq c \left[ \|q_0\|_V^2 + \|q_1\|_H^2 \right].$$

**Remarque V.2.20.** En TTA, puisque  $q_1 \equiv 0$ , le cadre ci-dessus s'adapte en remplaçant l'espace des conditions initiales  $V \times H$  par  $V$ . Aussi la première équivalence du corollaire précédent concerne l'injectivité du problème de la TTA et la seconde, qui est plus forte, la condition d'observation.

Nous consacrons les quelques prochains paragraphes aux problèmes d'observabilité liés aux équations d'onde.

### Observabilité des équations d'onde

La condition d'observabilité est étroitement liée à diverses caractéristiques géométriques de notre problème, à savoir à la propagation des rayons géométriques associés à la vitesse  $c$  et à la surface d'observation  $\mathcal{S}$ . En effet, Bardos, Lebeau et Rauch ont prouvé l'équivalence entre la condition d'observabilité et un critère géométrique couramment appelé *condition d'optique géométrique* (COG) – voir [31] ainsi que [30]. À la suite des travaux de Ralston [200] et Lagnese [151], les auteurs cités ont prouvé ce résultat dans un cadre régulier (vitesse et frontière de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). Plus tard, dans [54], Burq obtiendra la même condition nécessaire et suffisante, mais pour les domaines à frontière  $\mathcal{C}^3$  et les équations à coefficients  $\mathcal{C}^2$ , à l'aide des mesures de défaut microlocales introduites par Gérard [97].

Pour une introduction à ces questions, le lecteur intéressé pourra se référer au cours de Burq et Gérard suivant : [56].

La COG peut être interprétée ainsi : Étant donné un domaine  $\Omega$ , un domaine d'observation  $\mathcal{S}$ , une vitesse  $c$  et un horizon de temps  $T$ , tout rayon géométrique<sup>16</sup> associé à  $c$  atteint le domaine  $\mathcal{S}$  en un temps inférieur à  $T$  en se propageant dans  $\Omega$  selon les lois de l'optique géométrique, les rayons tangents à la frontière de  $\Omega$  pouvant soit être diffractés, soit pénétrer la frontière (consulter [31] pour plus de détails).

Généralement, condition d'observation et COG sont tout aussi difficiles à vérifier l'une que l'autre, en pratique. Le cas de données complètes est le plus simple à étudier : l'hypothèse de vitesse non trapping est alors classique, mais les hypothèses des Théorèmes 6.3 et 6.5 de [56] suffisent : si tout rayon géométrique pénètre la surface d'observation, alors le problème considéré est observable. Dans l'article [156], l'auteur préfère contourner ces critères en exhibant une condition équivalente dans le domaine fréquentiel.

Enfin, nous aborderons brièvement les aspects numériques des problèmes d'observabilité dans la Sous-section I.3.3 page 212 du Chapitre C.

### Injectivité de $\mathcal{W}$ et condition d'observation

---

16. Voir la Sous-section III.2.4 page 46 du Chapitre A pour une définition des rayons géométriques.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude du lien entre condition d'observation et injectivité de l'opérateur  $\mathcal{W}$ . Comme nous l'avons montré, la condition d'observation a été largement étudiée depuis une vingtaine d'année. Elle constitue donc un moyen intéressant d'étudier l'injectivité du problème de la TTA.

Dans le cadre de la TTA, l'inégalité d'observation s'écrit :

$$\|\mathcal{W}f\|_{L^2(\mathcal{S}_T)} \geq c \|f\|_V \text{ pour tout } f \in V,$$

où  $c$  est une constante dépendant de  $\Omega$ , de  $\mathcal{S}$ , de la vitesse  $x \mapsto c(x)$  et de  $T$ .

Cette inégalité implique donc l'injectivité de  $\mathcal{W}$ .

Qu'en est-il de la réciproque ? Le lemme suivant précise le lien entre ces deux propriétés :

**Lemme V.2.21.** Étant donnés deux espaces de Banach  $E$  et  $F$ , et un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in E$  :

$$\|x\|_E \leq C \|Ax\|_F.$$

(ii)  $A$  est injectif et  $\text{Im}(A) = A(E)$  est fermée.

PREUVE. Supposons tout d'abord que  $A$  vérifie (ii). On considère l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \bar{A} &: E \longrightarrow \text{Im}(A) \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Alors l'inverse de  $\bar{A}$  existe et admet pour domaine  $\text{Im}(A)$ . Ainsi, d'après le Théorème de l'application ouverte  $\bar{A}^{-1}$  est continu, on en déduit que l'assertion (i) est vérifiée.

Réciproquement, si la condition (i) est satisfaite, alors  $A$  est injectif, comme précédemment, l'opérateur  $\bar{A}$  est bien défini et établit une bijection continue entre  $E$  et  $\text{Im}(A)$ , qui est donc fermée.  $\square$

Puisque la connaissance de l'image de  $\mathcal{W}$  nous est généralement inaccessible, ce lemme ne saura cependant pas nous aider en pratique. Une nouvelle

fois, si les observations sont complètes, la situation est plus simple à décrire : dans la Sous-section 6.2 de [56], il est montré qu'en supposant que  $\mathcal{S}$  est un ouvert contenant la frontière  $\gamma$  de  $\Omega$ , l'hypothèse que toute géodésique entre dans  $\mathcal{S}$  est équivalente à la condition d'observabilité. En effet, lorsqu'un rayon ne pénètre pas le domaine d'observation, les mesures de défaut micro-locales permettent de construire une solution dont l'énergie est concentrée au voisinage de ce rayon. Ainsi, si l'inégalité d'observation n'est pas satisfaite, il existe une solution de l'équation modèle telle que  $f \neq 0$  et  $\mathcal{W}f = 0$  (voir [56, Remarque 6.4]). Ainsi, pour des observations complètes, la condition d'observation est équivalente à l'injectivité de  $\mathcal{W}$ .

Si par contre les observations ne sont pas complètes, il faut tenir compte des possibles rencontres entre les géodésiques et la frontière  $\Gamma$  : la notion de rayon prend alors le relais de celle de géodésique, afin de préciser les comportements des rayons tangents à  $\Gamma$  (voir [31, 55]).

Pour approfondir cette étude, il faudrait caractériser les situations où l'image de  $\mathcal{W}$  n'est pas fermée et, pour le moment, nous pouvons conclure que :

- L'opérateur  $\mathcal{W}$  est injectif si et seulement si la paire  $(A, B)$  est approximativement contrôlable.
- L'opérateur  $\mathcal{W}$  est injectif et son image est fermée si et seulement si la paire  $(A, B)$  est exactement contrôlable.

Comme nous l'avons précisé en Sous-section III.3.2 page 57 du Chapitre A, lorsque la condition d'observation n'est pas respectée, les singularités de l'objet observé ne peuvent *a priori* pas être reconstruites. Cette propriété sera numériquement constatée dans le Chapitre C. En vue d'une application numérique, nous traduisons en termes de filtrage l'approche de type contrôle que nous avons exposée ci-dessus.



## Chapitre C

# Mises en œuvre numériques

SUITE AUX DEUX PREMIERS CHAPITRES, consacrés à l'état de l'art et à nos contributions théoriques au domaine de la tomographie thermoacoustique, ce dernier chapitre est consacré à la mise en œuvre numérique des méthodes introduites au cours du Chapitre B : la technique variationnelle décrite en Section III page 121, abrégée en CG (pour *Conjugate Gradient*, voir ci-dessous, en Sous-section I.3 page 208), et les algorithmes BFN et BFF – vus en Sections IV page 131 et V page 175. Les expérimentations numériques sont menées avec pour objectif de comparer ces méthodes à des méthodes usuelles sur les critères suivants (l'ordre proposé n'étant pas hiérarchisé) : coût numérique, difficulté de mise en œuvre, qualité de reconstruction, adaptabilité à différentes conditions (modèle, type d'observations...), robustesse (au bruit, à la diminution de l'échantillonnage des données, etc.)

Dans une première partie, la Section I page 201, nous aborderons les problèmes propres à la discrétisation des équations d'onde, et en particulier à l'observation et à la détermination d'observateurs discrets. Nous consacrons ensuite une section aux expérimentations numériques permettant de comparer nos différentes techniques aux méthodes usuelles – Section II page 215.



## I Discrétisations, filtrage et observation

### I.1 Discrétisation des équations d'ondes

Dans cette sous-section, nous introduisons brièvement quelques notions relatives à la discrétisation de l'équation d'ondes suivante :

$$p'' = c(x)\Delta p.$$

La vitesse  $c$  sera souvent omise dans les notations, puisque sa présence n'influence pas les méthodes de discrétisation de cette dernière équation.

L'intervalle de temps  $[0, T]$  est uniformément discrétisé, avec un pas de temps  $\delta t$ , de même que le domaine spatial  $\Omega$  (discrétisation uniforme dans toutes les directions d'espace), pour un pas d'espace noté  $\delta x$ .

Nous utilisons des discrétisations par différences finies en domaine temporel (ou *Finite Difference Time Domain*, FDTD), et plus précisément les  $\theta$ -schémas (centrés et implicites, dits  $\theta$ -FDTD) qui sont classiques dans la discrétisation des équations d'onde et pour lesquels la dérivée seconde en temps ainsi que le Laplacien sont approchés par leur approximation d'ordre 2 centrée. On obtient la discrétisation suivante :

$$\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}),$$

où :

$$\Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}) = \theta \Delta_{\delta x} p_{n-1} + (1 - 2\theta) \Delta_{\delta x} p_n + \theta \Delta_{\delta x} p_{n+1},$$

avec  $\Delta_{\delta x}$  une discrétisation centrée du Laplacien<sup>1</sup> et  $\theta \in [0, 1/2]$ . Pour  $\theta = 0$ , on retrouve le schéma FDTD explicite usuel.

Outre sa précision (ordre 2 en espace et en temps), ce schéma est apprécié pour différentes caractéristiques qu'il partage avec les équations d'ondes, dont les propriétés de réversibilité temporelle et de conservation d'énergie (voir [9, p. 59]). Enfin, puisque ce schéma est inconditionnellement stable

---

1. Parmi ces discrétisations, on trouvera le schéma centré à 3 ou 5 points en dimension 1, le schéma centré à 5 ou 9 points classique, en croix, ou encore hybride en dimension 2, etc.

pour  $\theta \in [1/4, 1/2]$ , sauf mention contraire, nous posons  $\theta = 1/4$  (sans condition CFL) en espace monodimensionnel et  $\theta = 0$  si l'espace est bidimensionnel (afin de retrouver un schéma explicite), en respectant alors la CFL suivante :

$$\frac{\delta t}{\delta x} < 1.$$

En dimension 2, les domaines choisis sont carrés afin de privilégier une mise en œuvre simple.

### I.1.1 Notations et contexte.

Étant donné un domaine d'observation discret encore noté  $\mathcal{S}$ , nous notons toujours  $C$  l'opérateur qui, à l'état discret  $p$ , associe  $Cp$  égal à  $p$  sur le domaine observé et nul ailleurs.

#### En dimension 1

Des expérimentations concernant les méthodes de filtrage seront menées en dimension 1 d'espace car la complexité algorithmique de ces méthodes impose un domaine d'espace réduit pour mener à bien de premiers tests.

On considère un domaine observé monodimensionnel  $\Omega = (-1/2, 1/2)$  et on se donne un intervalle temporel  $(0, T) = (0, 1)$ . Tous deux sont discrétisés uniformément avec pour pas respectifs  $\delta x = 1/100$  (le domaine est donc divisé en 100 pixels) et  $\delta t = 1/200$ .

L'équation des ondes est discrétisée par le biais du schéma  $\theta$ -FDTD introduit précédemment.

Les méthodes considérées s'écrivent, en accord avec les notations introduites dans la Sous-section V.1 page 175 du Chapitre B :

$$\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}) \pm PC^*KC \begin{pmatrix} p_{n-1} - p_{n-1}^o \\ p_n - p_n^o \end{pmatrix},$$

où :

$$\Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}) = \theta \Delta_{\delta x} p_{n-1} + (1 - 2\theta) \Delta_{\delta x} p_n + \theta \Delta_{\delta x} p_{n+1},$$

avec  $\theta = 0.25$ , où les opérateurs  $C$ ,  $P$  et  $K$  sont les équivalents discrets de leurs homologues des BFF continus<sup>2</sup> et où  $\pm$  est à déterminer selon que l'évolution est directe et rétrograde. Le terme  $(p_{n-1} - p_{n-1}^o \quad p_n - p_n^o)^T$  nous autorise à considérer des dérivations numériques dans les termes correctifs des rappels.

Enfin, les capteurs sont situés périodiquement sur le domaine observé, tous les  $\delta_{data}$  pixels à partir du premier.

### En dimension 2

Décrivons maintenant le contexte choisi en vue de comparer le nudging direct et rétrograde (BFN), la méthode variationnelle (CG), le Renversement Temporel (TR) et les Neumann Series (NS) introduites par [198], suivant la démarche proposée dans [42].

On travaille en domaine d'espace bidimensionnel pour des raisons de coût numérique. Ainsi, l'objet à reconstruire est situé dans le domaine observé  $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$  discrétisé par une grille de  $256^2$  pixels. Le pas d'espace vaut donc  $\delta x = 1/256$ .

Les capteurs sont situés sur le cercle  $S(0, \sqrt{2}/2)$ , de sorte qu'ils entourent l'objet, et différentes configurations sont considérées. Par défaut, 800 capteurs sont utilisés lorsque les données sont complètes (afin que tout point du cercle soit observé sans redondance de pixels). Certaines reconstructions seront cependant obtenues avec moins de capteurs pour étudier la robustesse des techniques. Lorsqu'un bruit est ajouté aux données, nous considérerons un bruit blanc gaussien additif d'un niveau de 15%, sauf précision contraire.

Le temps final  $T = \sqrt{2}$  est choisi minimal afin de laisser l'information parvenir aux capteurs lorsque la vitesse est constante, égale à 1<sup>3</sup>.

Pour effectuer les calculs, nous utilisons le domaine étendu suivant :

$$[-0.5 - \sqrt{2} - \varepsilon; 0.5 + \sqrt{2} + \varepsilon]^2,$$

---

2. Voir à nouveau la Sous-section V.1 page 175 du Chapitre B. L'opérateur  $C$  pourra notamment interpoler des données en certains points de la grille discrète, tandis que la définition de  $P$  et  $K$  va demander un traitement particulier, dont nous exposons différentes formes possibles ci-dessous – voir par exemple la Sous-section I.2 page suivante.

3. Les résultats obtenus peuvent être significativement améliorés en augmentant l'horizon temporel – voir [198] et la Sous-section II.2.9 page 254.

où  $\varepsilon$  représente des pixels supplémentaires ajoutés afin que toute réflexion sur le bord soit évitée.

Dans ce cadre bidimensionnel, le modèle est implémenté avec  $\theta = 0$ , de sorte que l'on retrouve l'approximation des équations d'onde classique, par différences finies en domaine temporel (FDTD), c'est-à-dire par schéma d'Euler explicite centré et discrétisation à cinq points du Laplacien, notée  $\Delta_{\delta x}$ .

Muni de ce cadre, nous introduisons les méthodes dont nous faisons usage dans les prochaines sous-sections.

## I.2 Filtrage et meilleure estimation

Nous avons vu l'utilité de la formulation de type contrôle usitée en Section V page 175 du chapitre B. Afin d'anticiper sur les difficultés et faiblesses numériques imposées par la grande complexité des méthodes de contrôle optimal, nous abordons ici le problème de la détermination d'un rappel permettant la convergence des méthodes de reconstruction itératives BFF sous l'angle de l'*estimation optimale*.

Plus précisément, on étudie différentes manières de définir un opérateur  $P$  stabilisant l'observateur  $A - PC^*KC$  : d'abord avec l'opérateur de nudging  $PC^*KC = kC^*C$ , où  $k > 0$ , puis à l'aide de filtres (dans le contexte offert par le Corollaire V.2.15 page 190 du Chapitre B).

Nous présentons donc le filtre de Kalman-Bucy avant d'en présenter la version discrète, à savoir le *filtre de Kalman*. Cette approche nous permet d'utiliser des filtres de rang réduit, tels le *filtre SEEK* (pour *Singular Evolutionive Extended Kalman filter*), que nous introduisons par la même occasion. Ces deux dernières méthodes seront utilisées pour résoudre le problème de la TTA et le SEEK servira par ailleurs à définir une méthode itérative de type BFF (voir les sous-parties I.3 page 208 et II page 215).

### I.2.1 Le filtre de Kalman-Bucy

Dans cette sous-section, nous rappelons brièvement ce en quoi consiste le filtre de Kalman-Bucy (continu) afin de mettre en évidence le lien que celui-

ci entretient avec les techniques et résultats présentés en Section V page 175 du chapitre B.

Nous nous inspirons des références suivantes : l'article originel de Kalman et Bucy [126], où il apparaît clairement que le filtre de Kalman-Bucy optimise l'observateur de Luenberger, ainsi que les notes de cours d'assimilation de données ou de commande optimale [36, 44, 237].

Le filtre de Kalman-Bucy fournit le rappel permettant de définir l'approximation de l'état réel qui minimise la covariance d'erreur dans la situation décrite dans les lignes suivantes.

On suppose que l'état réel est régi par l'équation différentielle linéaire :

$$\mathbf{x}^t' = \mathbf{M}\mathbf{x}^t + \boldsymbol{\nu}$$

et que le modèle théorique est gouverné par l'équation :

$$\mathbf{x}^f' = \mathbf{M}\mathbf{x}^f.$$

L'erreur  $\boldsymbol{\nu}$  représente donc l'*erreur modèle*.

Étant données des observations  $\mathbf{y}^o$ , on note l'*erreur d'observation*  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , de sorte que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y}^o - \mathbf{C}\mathbf{x}^t$ , où  $\mathbf{C}$  est l'opérateur d'observation. On suppose ensuite que les erreurs  $\boldsymbol{\nu}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont des processus gaussiens blancs de moyenne nulle et on note leur *matrice de covariance* respective  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ , dites *d'erreur modèle* et *d'erreur d'observation*.

**Définition I.2.1.** FILTRE DE KALMAN-BUCY. *Soit une ébauche (d'état initial)  $\mathbf{x}^f(0)$  et  $\mathbf{P}^f(0)$ , le filtre de Kalman-Bucy consiste en les deux équations différentielles suivantes (une estimant l'état  $\mathbf{x}$  et une pour la matrice de covariance  $\mathbf{P}$ , de type Riccati différentielle) :*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}^o - \mathbf{C}\mathbf{x}), \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{M}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{M}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}^T,\end{aligned}$$

et le gain de Kalman, noté  $\mathbf{K}$ , est défini par  $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}$ .

Précisons les liens entretenus entre les résultats de la Section V page 175 du chapitre B et le filtre de Kalman-Bucy. Tout d'abord, l'équation de Riccati considérée ici est différentielle car l'horizon de temps est fini. Il est possible de montrer sous des hypothèses favorables que la solution de l'équation de Riccati algébrique est obtenue asymptotiquement à partir de la différentielle (consulter [69]).

Ensuite, dans la formulation ci-dessus, le rappel par retour d'état est réalisé par le biais d'un opérateur de la forme  $PC^*KC$  de même que dans le chapitre précédent. En comparaison du rappel de type nudging, pour lequel le rappel s'écrit  $C^*KC$  et où l'on a donc  $P = \text{Id}_H$ , on peut considérer que  $P$  donne un poids au rappel vis-à-vis du modèle.

La version discrète du filtre de Kalman-Bucy est présentée ci-dessous, à l'occasion de l'introduction du filtre SEEK.

### I.2.2 Techniques de filtrage usuelles : du filtre de Kalman au filtre SEEK

On reprend les notations des paragraphes précédents, mais dans un cadre discret, cette fois-ci, afin de présenter les résultats essentiels concernant le *filtre de Kalman*<sup>4</sup> et de décrire la manière dont en est dérivé le *filtre SEEK*, qui est un *filtre de Kalman de rang réduit* présenté dans [204].

Ces deux algorithmes comprennent deux étapes, l'une de *prévision* et l'autre d'*analyse*, dans lesquelles les observations sont prises en compte afin de corriger la prévision. Pour ce faire, deux types de variables sont considérées : d'abord les états prédit et analysé ( $\mathbf{x}^f$  et  $\mathbf{x}^a$ , resp.), puis les matrices de covariance d'erreur qui leur sont associées ( $\mathbf{P}^f$  et  $\mathbf{P}^a$ ), ou la racine carrée de ces dernières ( $\mathbf{S}^f$  et  $\mathbf{S}^a$ ).

Les filtres de Kalman et SEEK sont définis comme suit :

---

4. Ces résultats, bien connus, ont été introduits dans l'article [127] de Kalman. L'ouvrage classique [255] constitue une excellente introduction au filtre de Kalman.



**Définition I.2.2.** FILTRE DE KALMAN ET FILTRE SEEK. Soit  $\mathbf{x}_0^f$ ,  $\mathbf{P}_0^f$  et  $\mathbf{S}_0^f = \mathbf{P}_0^{f1/2}$ . Ci-dessous, une itération du filtre de Kalman :

**Filtre de Kalman (KF)**

Étape d'analyse

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_n &= [\mathbf{P}_n^{f-1} + C^T \mathbf{R}^{-1} C]^{-1} C^T \mathbf{R}^{-1}, \\ \mathbf{x}_n^a &= \mathbf{x}_n^f - \mathbf{K}_n [C \mathbf{x}_n^f - \mathbf{y}_n^o], \\ \mathbf{P}_n^a &= [I_n - \mathbf{K}_n C] \mathbf{P}_n^f,\end{aligned}$$

Étape de prévision

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1}^f &= \mathbf{M} \mathbf{x}_n^a, \\ \mathbf{P}_{n+1}^f &= \mathbf{M} \mathbf{P}_n^a \mathbf{M}^T + \mathbf{Q},\end{aligned}$$

et une itération du filtre SEEK :

**Filtre SEEK**

Étape d'analyse

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_n &= \mathbf{S}_n^f [I_r + (C \mathbf{S}_n^f)^T \mathbf{R}^{-1} (C \mathbf{S}_n^f)]^{-1} (C \mathbf{S}_n^f)^T \mathbf{R}^{-1}, \\ \mathbf{x}_n^a &= \mathbf{x}_n^f - \mathbf{K}_n [C \mathbf{x}_n^f - \mathbf{y}_n^o], \\ \mathbf{S}_n^a &= \mathbf{S}_n^f [I_r + (C \mathbf{S}_n^f)^T \mathbf{R}^{-1} (C \mathbf{S}_n^f)]^{-1/2},\end{aligned}$$

Étape de prévision

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1}^f &= \mathbf{M} \mathbf{x}_n^a, \\ \mathbf{S}_{n+1}^f &= \mathbf{M} \mathbf{S}_n^a,\end{aligned}$$

où  $I_k$  est la matrice identité  $k \times k$  (dans l'espace d'état discret si  $k = n$  et dans l'espace de rang réduit si  $k = r$ ) et  $\mathbf{K}_n$  est soit le gain de Kalman, minimiseur de la trace de la covariance d'erreur de  $\mathbf{x}_i^a$ , soit le gain de Kalman de rang réduit, dans le cas du SEEK.

Le filtre SEEK utilise donc une formulation de type racine carrée du filtre de Kalman et profite de celle-ci pour réduire la dimension des matrices de covariance considérées.

**Remarque I.2.3.** En théorie, on a, pour le SEEK :

$$\mathbf{P}_n^f = \mathbf{S}_n^f \mathbf{S}_n^{fT} + \mathbf{Q},$$

mais puisque l'erreur modèle, et donc sa matrice de covariance  $\mathbf{Q}$ , ne sont pas connues (ce qui est aussi souvent le cas en pratique), on pose :

$$\mathbf{P}_n^f = (1 + \gamma)\mathbf{S}_n^f\mathbf{S}_n^{fT},$$

où  $\gamma \in (0,1)$ , ce qui évite une décomposition supplémentaire dans une itération de filtre SEEK. Nous utilisons la même configuration pour le filtre de Kalman.

Dans le KF, si l'espace d'état est de dimension  $n$ , alors l'étape de prévision nécessite  $2n$  évolutions du modèle afin de déterminer la matrice de covariance d'erreur de prévision  $\mathbf{P}^f$  à partir de la matrice de covariance d'erreur d'analyse  $\mathbf{P}^a$ , ce qui fait du filtre de Kalman un filtre très coûteux en terme de calculs.

Le SEEK constitue un moyen donc de considérer un gain sous-optimal afin de réduire ce coût. En effet, le gain fourni par le SEEK est de rang réduit  $r \leq n$  et plus simple à obtenir. Puisque les matrices de covariance d'erreur sont symétriques et définies-positives, Pham et al. [238] ont suggéré de faire usage de la décomposition suivante : si  $P$  est une matrice symétrique définie-positives de taille  $n \times n$  dont les  $r \leq n$  plus grandes valeurs propres sont notées  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$  ainsi que leur vecteurs propres correspondant  $V_1, \dots, V_r$ , la *décomposition réduite* de  $P$  est la matrice  $n \times r$  définie par  $S = [\sqrt{\lambda_1}V_1 \dots \sqrt{\lambda_r}V_r]$ . Ainsi, puisque le SEEK utilise la décomposition réduite  $S^f$  de  $P^f$ , seulement  $r$  itérations du modèle sont nécessaires à la définition de la matrice de covariance d'erreur de prévision.

### I.3 Précisions sur les méthodes comparées

Dans cette sous-section, nous présentons brièvement les méthodes comparées ci-après : les méthodes usuelles, puis les méthodes usuelles de filtrage et enfin nos techniques de reconstruction itératives.

### I.3.1 Techniques usuelles

Peu classiques en TTA, les méthodes de filtrage ont largement fait la preuve de leur efficacité en assimilation de données météorologiques et océanographiques. Nous proposons donc d'en tester deux représentantes : les filtres KF et SEEK présentés en Sous-section I.2 page 204.

En TTA, le Renversement Temporel est une technique à privilégier dès lors que les vitesses considérées sont variables, ce qui sera notre cas, d'autant plus qu'elle a été améliorée dans l'article [198], grâce à l'usage de Séries de Neumann (NS). Celles-ci permettent d'itérer le processus du TR afin de corriger la reconstruction obtenue. Nous utiliserons donc les NS et en profiterons pour donner les résultats obtenus à leur première itération, c'est-à-dire le résultat du TR.

Pour ces deux méthodes, nous implémentons une évolution rétrograde du modèle discrétisé et, pour le TR, nous forçons l'état aux valeurs fournies par les données sur le domaine d'observation. Une première ébauche de reconstruction est ainsi obtenue, que nous notons  $f_0$ . Les NS consistent en une correction itérative de l'ébauche ainsi obtenue en obtenant des ébauches successives par renversement temporel appliqué aux solutions de ces mêmes ébauches projetées sur le domaines d'observation : selon le Théorème 3 [198, p. 6], nous calculons des approximations successives  $f_n$  de  $f$  théoriquement convergentes et qui sont définies par les sommes partielles suivantes :

$$f_n = \sum_{k=0}^n K^k f_0.$$

La formule suivante, que nous utilisons dans notre implémentation des NS, éclaire sur leur caractère correctif :

$$f_n = f_0 + K \sum_{k=0}^{n-1} K^k f_0 = f_0 + K f_{n-1}.$$

### I.3.2 Nos méthodes

En comparaison des méthodes précitées, nous testerons trois méthodes que nous avons définies en Section III page 121 (méthode variationnelle), Section IV page 131 (BFN et BFN-D, de la définition IV.1.11 page 144) et Section V page 175 (BFF) du Chapitre B, ainsi qu'une méthode reposant sur l'usage du filtre de Kalman.

#### Méthode variationnelle (CG)

La méthode variationnelle fait appel à un algorithme de descente, pour lequel nous choisissons une simple méthode de Gradient Conjugué (dorénavant abrégée par CG, se référer à [61], par exemple), notre objectif n'étant pas de discuter la qualité des méthodes de descente (de nombreuses études existent déjà à ce sujet), mais d'observer le comportement des méthodes variationnelles en comparaison des méthodes usuelles en TTA. Par défaut, le coefficient de régularisation  $\alpha$  est nul : d'autres valeurs sont testées qui stabilisent l'algorithme, mais fournissent des reconstructions floues, de sorte que les erreurs minimales obtenues sont meilleures sans régularisation.

#### Filtrage de Kalman (KF)

La méthode faisant appel au filtre de Kalman (notée KF par la suite) est implémentée comme suit : une évolution directe est calculée par filtrage de Kalman sur l'intervalle  $(0, T)$ , un état final est donc obtenu puis le temps est remonté à partir de celui-ci suivant l'équation du modèle afin de définir une condition initiale, c'est-à-dire une ébauche de reconstruction.

#### Les Filtrages Directs et Rétrogrades

Deux méthodes de reconstruction par filtrage itératif sont ensuite étudiées : le BFN appliqué à la TTA et un BFF, pour lequel l'opérateur  $P$  est celui du SEEK, qui est donc défini comme une approximation de rang réduit de l'opérateur optimal de Kalman, lequel fournit la stabilité de l'observateur  $A - PC^*R^{-1}C$  sous la condition d'observabilité.

Nous avons donc fourni une formulation commune à ces méthodes. On itère les évolutions directes et rétrogrades suivantes :

$$\frac{p_{n+1}^f - 2p_n^f + p_{n-1}^f}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x}^\theta(p_{n-1}^f, p_n^f, p_{n+1}^f) - P^f C^* K^f C F \begin{pmatrix} p_{n-1}^f - p_{n-1}^o \\ p_n^f - p_n^o \end{pmatrix},$$

et :

$$\frac{p_{n+1}^b - 2p_n^b + p_{n-1}^b}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x}^\theta(p_{n-1}^b, p_n^b, p_{n+1}^b) - P^b C^* K^b C F \begin{pmatrix} p_{n-1}^b - p_{n-1}^{ob} \\ p_n^b - p_n^{ob} \end{pmatrix},$$

où la notation  $p^{ob}$  rappelle le renversement temporel imposé aux données lors de l'évolution retour et où :

$$F = \begin{pmatrix} -1/\delta t & 1/\delta t \end{pmatrix},$$

dans le cas du BFN, et  $F \equiv I$  sinon. En effet, si nous introduisons artificiellement la dérivée temporelle dans le cas du BFN (pour des raisons expliquées en Section IV page 131 du Chapitre B), la méthode de filtrage n'appelle en rien à œuvrer sur la dérivée temporelle de l'état.

Les opérateurs  $P^s$  et  $K^s$ , pour  $s \in \{f, b\}$ , sont définis de même que dans la Section V page 175 du Chapitre B, c'est-à-dire de sorte que, étant donné  $K^s$ , l'opérateur  $P^s$  est solution de l'équation de Riccati algébrique associée (sous réserve d'existence). Ainsi, si la condition d'observabilité est respectée pour un temps  $T^o$ , alors l'algorithme BFF défini sur un intervalle  $(0, T)$  avec  $T > T^o$  converge.

Supposons que la paire  $(A, C)$  est observable. Soit  $s \in \{f, b\}$ . Nous proposons deux principales démarches afin de définir ces opérateurs : dans le cas du BFN, on choisit  $K^s = k^s I$ , où  $k^s > 0$  reste à déterminer, d'où  $P^s = I$  ; dans le cas où l'on suppose les erreurs modèle et d'observation connues (ainsi que leurs matrices de covariance  $Q$  et  $R$ ), on pose  $K^s = R^{-1}$  et, dans une version discrète, le filtre de Kalman définit  $P^s$ . Dans nos implémentations, nous opterons alors pour le filtre SEEK puisque le KF nous est apparu trop coûteux : le BFF faisant appel au filtre SEEK sera dorénavant appelé BF-SEEK.

Reste à définir les coefficients de nudging direct et rétrograde : d'un point de vue théorique, plus grand nous choisirons ces coefficients et plus rapide sera la convergence de la solution vers les observations (cela apparaît bien dans la sous-partie IV.2.3 page 160 du chapitre B). La discrétisation de la dérivée temporelle du rappel impose cependant de choisir un coefficient de rappel inférieur à  $1/\delta t$  (voir la sous-partie II.2.3 page 227). Aussi, afin d'obtenir la meilleure convergence possible tout en rendant le choix des coefficients de nudging aussi peu arbitraire que possible, on pose  $k^f = k^b = 0.9/\delta t$ .

Puisque la convergence des BFF repose sur l'inégalité d'observation, une petite digression s'impose au sujet de la version (semi-)discrète de celle-ci. La prochaine sous-section y est dédiée.

### I.3.3 Atténuation numérique des méthodes de reconstruction itératives

Les discussions menées dans le Chapitre B concernant l'observabilité, dans la Section V page 175 notamment, ont leur équivalent en dimension finie, et donc dans le cadre de la discrétisation des équations proposée dans le présent chapitre : la condition d'observation (semi-)discrète fait aussi intervenir une inégalité d'observation similaire au cas de la dimension infinie, voir la définition V.2.4 page 184. À nouveau, l'inégalité d'observation et équivalente à la stabilisation du système discrétisé. Nous omettons les détails, lesquels sont présentés dans [273] et les références qui y sont proposées.

La dégénérescence de la constante d'observation lorsque le pas d'espace tend vers 0 est cependant un phénomène bien connu : celle-ci peut tendre vers 0 lorsque  $\partial x \rightarrow 0$ , ce qui traduit le fait que le terme stabilisant l'équation discrète n'approche pas le continu de façon satisfaisante. On dit dans cette situation que la constante d'observation (et par extension la contrôlabilité discrète, l'observabilité, etc.) n'est pas uniforme. L'étude de ce problème commence avec les travaux fondateurs de R. Glowinski et est notamment poursuivie par E. Zuazua, S. Micu, A. Münch, E. Trélat.

Afin de compenser ce phénomène ou toute autre condition d'observation détériorée (liée à la configuration des capteurs ou du bruit présent dans les données), nous proposons de mettre en œuvre la solution suggérée dans [201]

qui permet de rendre la constante d'observation uniforme en ajoutant un terme d'atténuation thermo-visqueux artificiel dans le schéma  $\theta$ -FDTD. Les équations des BFF deviennent alors :

**Définition I.3.1.** ÉQUATIONS DES BFF ATTÉNUÉES : LE BFF ATTÉNUÉ. *Les équations des filtres directs et rétrogrades atténués appliquées aux équations d'onde s'écrivent :*

$$\frac{p_{n+1}^s - 2p_n^s + p_{n-1}^s}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}^s, p_n^s, p_{n+1}^s) + \varepsilon \Delta_{\delta x} \frac{p_n^s - p_{n-1}^s}{\delta t} - P^s C^* K^s C \begin{pmatrix} p_{n-1}^s - p_{n-1}^{os} \\ p_n^s - p_n^{os} \end{pmatrix},$$

avec les notations introduites précédemment,  $s \in \{f, b\}$  et ou bien  $\varepsilon = 0$ , ou bien :

$$\varepsilon = (\delta x)^{\alpha}, \alpha \in (1, 2).$$

Partant d'une ébauche de reconstruction  $f_1$ , on pose tout d'abord :

$$p_0^f = f_1 \text{ et } p_1^f = p_0^f,$$

ce qui permet de définir une solution directe  $p^f$ , et en particulier un état final  $(p_{N-1}^f, p_N^f)$ . À partir de cet état final, le renversement temporel est assuré grâce aux conditions initiales relatives à  $p^b$  :

$$p_0^b = p_N^f \text{ et } p_1^b = p_{N-1}^f.$$

Nous verrons que cette atténuation artificielle permet en outre de combattre les effets des hautes-fréquences liées à la discrétisation du problème (qui ne sont donc pas physiques) et le bruit présent dans les données.

Le modèle atténué sera aussi utilisé pour le CG, le TR et les NS, et la puissance de l'atténuation  $\alpha$  est déterminée de manière empirique, voir la sous-partie II.2.5 page 246.

**Remarque I.3.2.** *Il est à noter que l'atténuation artificielle n'est introduite dans le schéma numérique qu'en vue d'améliorer les méthodes et leurs*

*reconstructions. Les solutions tant directes que rétrogrades sont donc atténuées. C'est-à-dire que l'atténuation « change de signe » de même que dans la définition IV.1.11 page 144 : le nouvel algorithme ainsi défini, qui est atténué afin de répondre à des nécessités numériques, est donc un algorithme de type BFN Diffusif, mais avec des rappels généraux, fournis sous forme de filtres.*



## II Résultats numériques

Cette section est dédiée à la présentation des résultats liés à nos expérimentations numériques. Différentes méthodes sont comparées que nous avons présenté en Sous-section I.3 page 208. Les expérimentations sont menées dans deux cadres différents correspondant à deux sous-sections : une première étude est conduite en dimension 1, dans laquelle des méthodes de filtrage sont aussi introduites (Sous-section II.1), puis une seconde, en dimension 2, dans laquelle BFN et CG sont comparés à deux méthodes usuelles (Sous-section II.2 page 224).

### II.1 BFN et BFF monodimensionnels

#### II.1.1 Présentation

Nous comparons cinq méthodes qui sont : le Renversement Temporel (TR), le Nudging Direct et Rétrograde (BFN), le SEEK Direct et Rétrograde (BF-SEEK), le SEEK et le Filtre de Kalman (KF)

On définit les coefficient des filtres de manière empirique. On pose tout d'abord  $\mathbf{R} = 0.3I$ ,  $\gamma = 0.01$ , puis on définit le rang réduit du SEEK :  $r = 120$ , lequel est automatiquement réduit si  $\text{Rank} [I + (C\mathbf{S}_i^f)^T \mathbf{R}^{-1} (C\mathbf{S}_i^f)] < r$ .

Nous l'avons précisé en Sous-section I.3 page 208, et nous le justifierons lors de l'étude bidimensionnelle (Sous-section II.2 page 224), les coefficients de nudging (direct et rétrograde) valent  $0.9\delta t$ .

On note  $\nu$  le niveau de bruit gaussien additif potentiellement ajouté aux données, d'un niveau de 30% dans ce cas monodimensionnel lorsque  $\nu$  est indiqué, ce qui est supérieur aux niveaux de bruit considérés habituellement.

Doté de parties régulières (constant ou variable) ainsi que de bords francs, l'objet à reconstruire est représenté sur la Figure II.1.1.

Les erreurs précisées sont des erreurs en moyenne quadratique données en pourcentage.

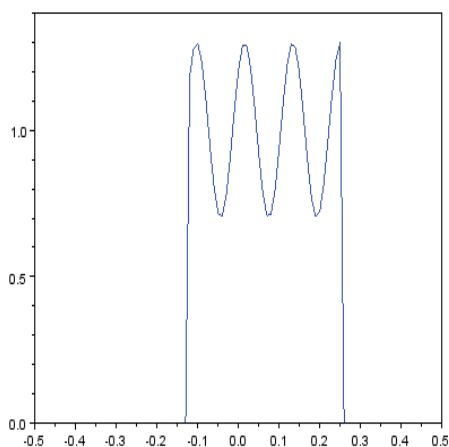


FIGURE II.1.1 – Objet à reconstruire.

### II.1.2 Observations complètes (I)

Le Tableau II.1.1 présente les erreurs relatives en moyenne quadratique lorsque 10 capteurs sont uniformément disposés dans le domaine observé.

Les reconstructions associées à ces résultats sont représentées sur les Figures II.1.2 page 218 et II.1.3 page 219.

### II.1.3 Observations complètes (II)

Nous détériorons ensuite les conditions d'observation : seulement 2 capteurs sont considérés ici (aux deux extrémités de l'intervalle d'espace), et nous testons une première fois l'introduction de l'atténuation artificielle, afin d'observer son effet sur les reconstructions en présence de bruit. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau II.1.2 et les Figures II.1.4 page 220 et II.1.5 page 221.

### II.1.4 Observations partielles

Une dernière situation est considérée, pour laquelle un unique capteur est disposé dans le domaine observé, à l'une de ses extrémités. Les résultats sont présentés dans le Tableau II.1.3 et les Figures II.1.6 page 222 et II.1.7 page 223.

Configuration	TR	BFN	BF-SEEK	SEEK	KF
$\delta_{data} = 10$	5.4	0.5 (100)	0.6 (3)	5.8	6
$\delta_{data} = 10, \nu$	38.8	16.3 (5)	10.3 (2)	12.4	15.7

TABLEAU II.1.1 – Erreurs relatives en moyenne quadratique minimales et nombre d’itérations correspondant (entre parenthèses, limité à 100) pour 10 capteurs ( $\delta_{data} = 10$ ), données bruitées (lorsque  $\nu$  est précisé,  $\nu = 30\%$ ) ou pas.

Configuration	TR	BFN	BF-SEEK	SEEK	KF
$\delta_{data} = 99$	8.3	2.6 (100)	6.3 (1)	15.9	44.2
$\delta_{data} = 99, \nu$	14.1	10.8 (3)	19.9 (1)	23.7	46.4
$\delta_{data} = 99, \nu, \alpha$	9.8	20.7 (3)	12.2 (1)	20.1	42

TABLEAU II.1.2 – Erreurs relatives en moyenne quadratique minimales et nombre d’itérations correspondant (entre parenthèses, limité à 100) pour 2 capteurs ( $\delta_{data} = 99$ ), données bruitées (lorsque  $\nu$  est précisé,  $\nu = 30\%$ ) ou pas, avec ou sans atténuation numérique ( $\alpha = 2$  lorsque  $\alpha$  est précisé, où  $\delta x^\alpha$  est le coefficient d’atténuation).

Configuration	TR	BFN	BF-SEEK	SEEK	KF
$\delta_{data} > 99$	51.1	20.7(7)	83.3 (3) 31.8 if $\alpha = 1.8$ (3)	92.7	95

TABLEAU II.1.3 – Erreurs relatives en moyenne quadratique minimales et nombre d’itérations correspondant (entre parenthèses, limité à 100) pour 1 capteur ( $\delta_{data} > 99$ ), données non bruitées, avec ou sans atténuation numérique ( $\alpha = 2$  lorsque  $\alpha$  est précisé, où  $\delta x^\alpha$  est le coefficient d’atténuation).

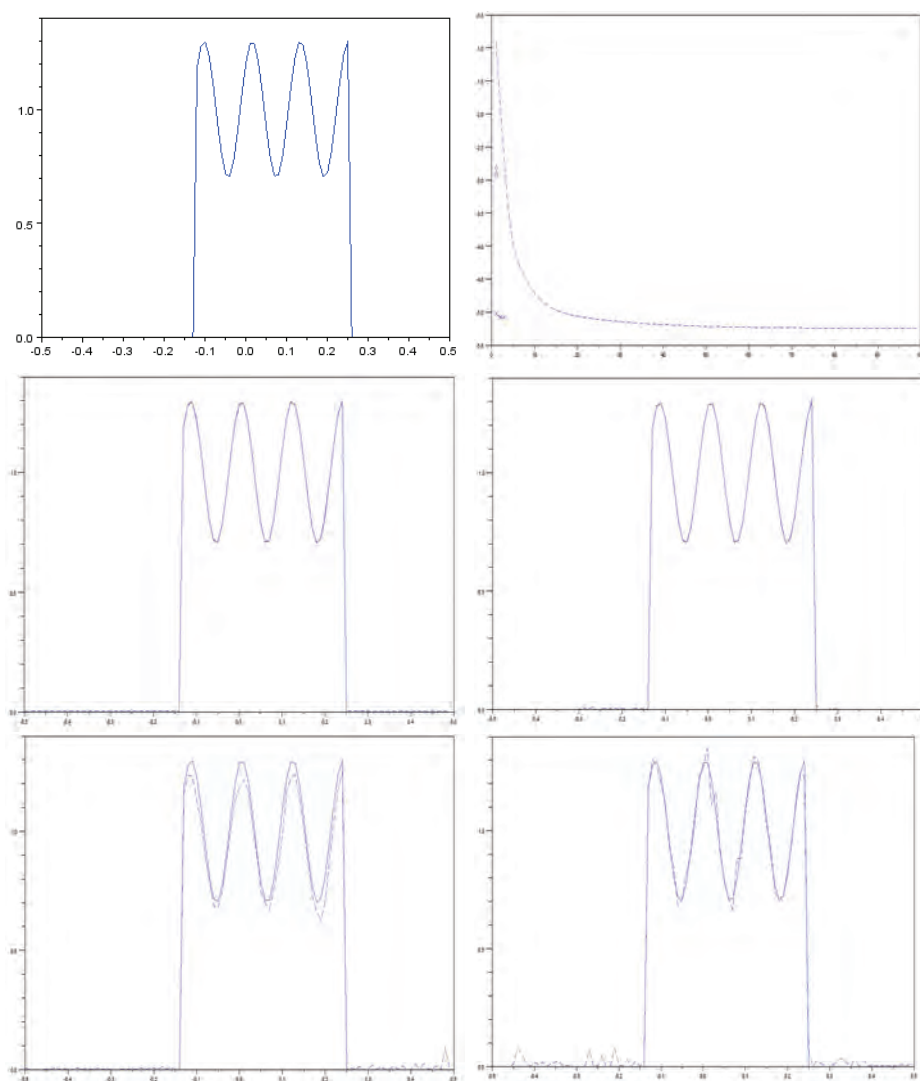


FIGURE II.1.2 – Données non bruitées et réparties tous les  $\delta_{data} = 10$  pixels (10 capteurs) : objet à reconstruire, tracés des erreurs de chacune des méthodes (BFN en ligne discontinue, BF-SEEK en lignes et croix, KF en losange et TR en rond) et reconstruction par BFN (100), BF-SEEK (3), KF et TR (objet en ligne continue).

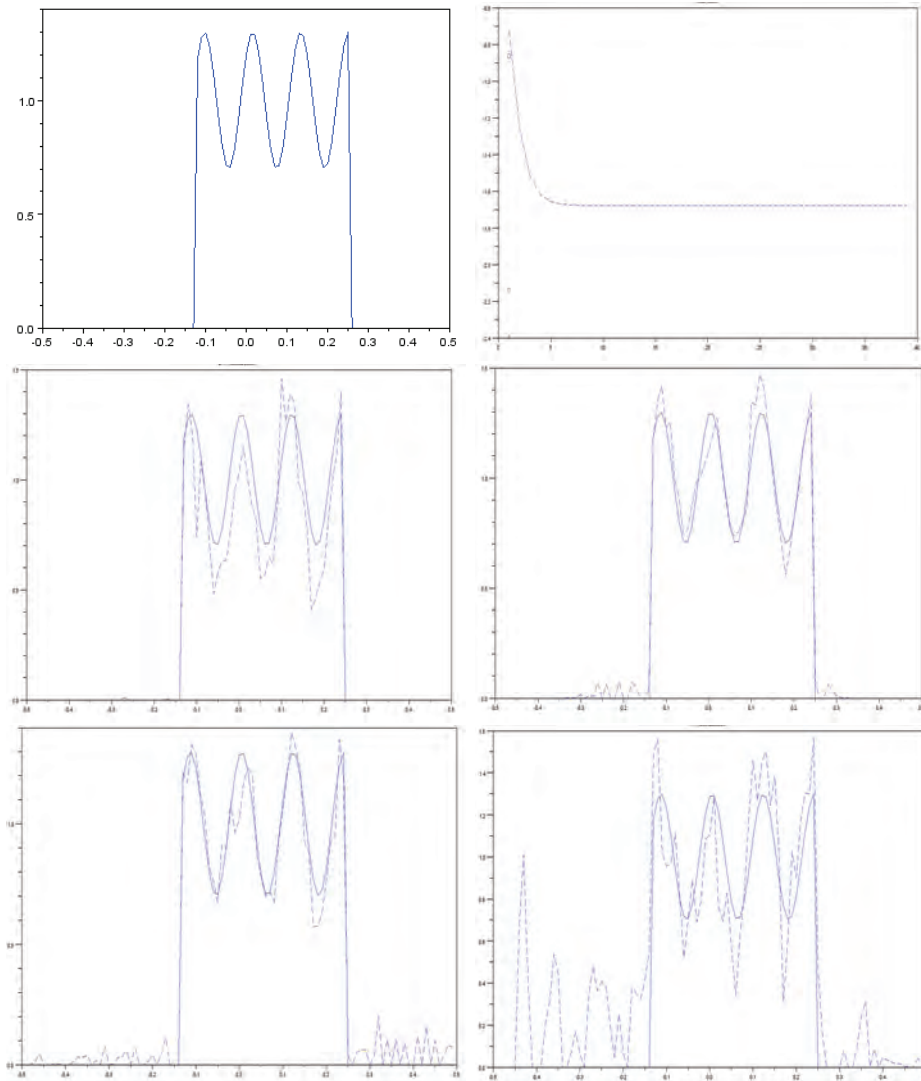


FIGURE II.1.3 – Données bruitées (30%) et réparties tous les  $\delta_{data} = 10$  pixels (10 capteurs) : objet à reconstruire, tracés des erreurs de chacune des méthodes (BFN en ligne discontinue, BF-SEEK en lignes et croix, KF en losange et TR en rond) et reconstruction par BFN (37), BF-SEEK (1), KF et TR (objet en ligne continue).

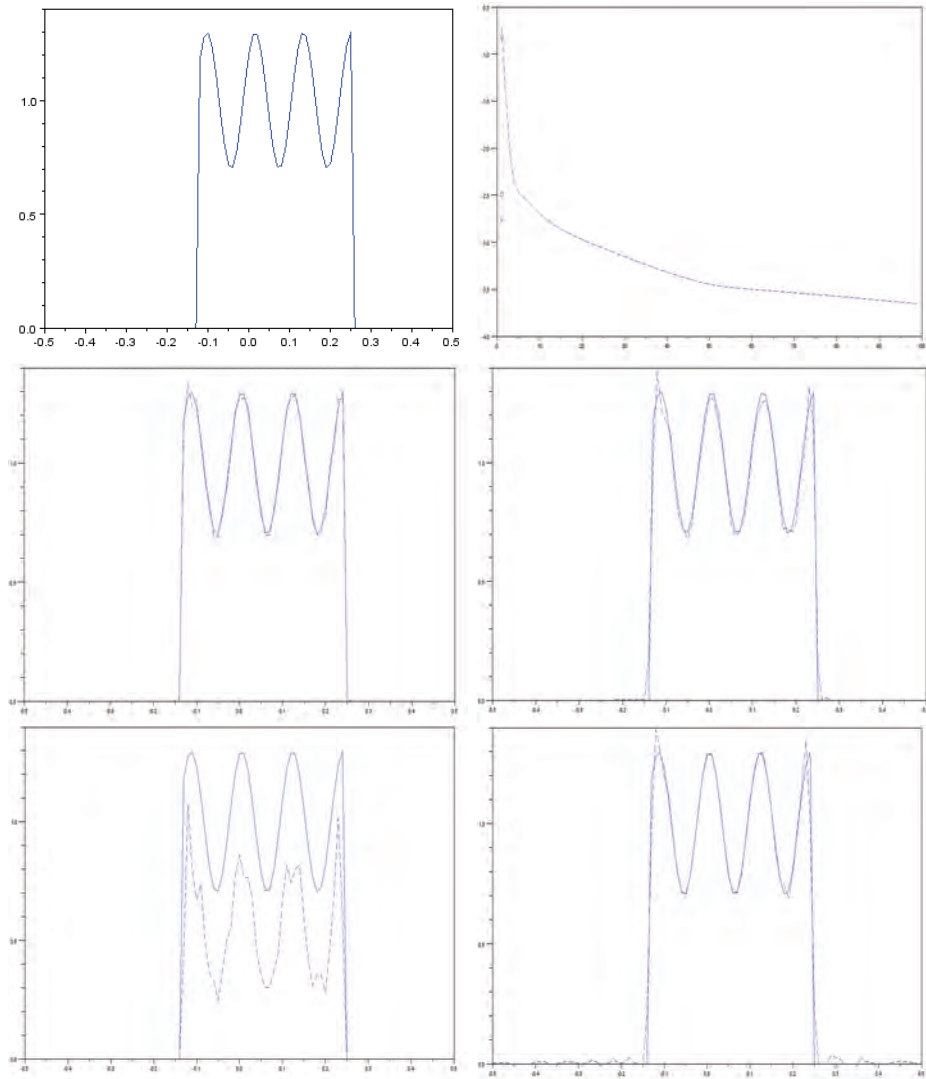


FIGURE II.1.4 – Données bruitées (30%) et réparties tous les  $\delta_{data} = 99$  pixels (2 capteurs) : objet à reconstruire, tracés des erreurs de chacune des méthodes (BFN en ligne discontinue, BF-SEEK en lignes et croix, KF en losange et TR en rond) et reconstruction par BFN (100), BF-SEEK (1), KF et TR (objet en ligne continue).

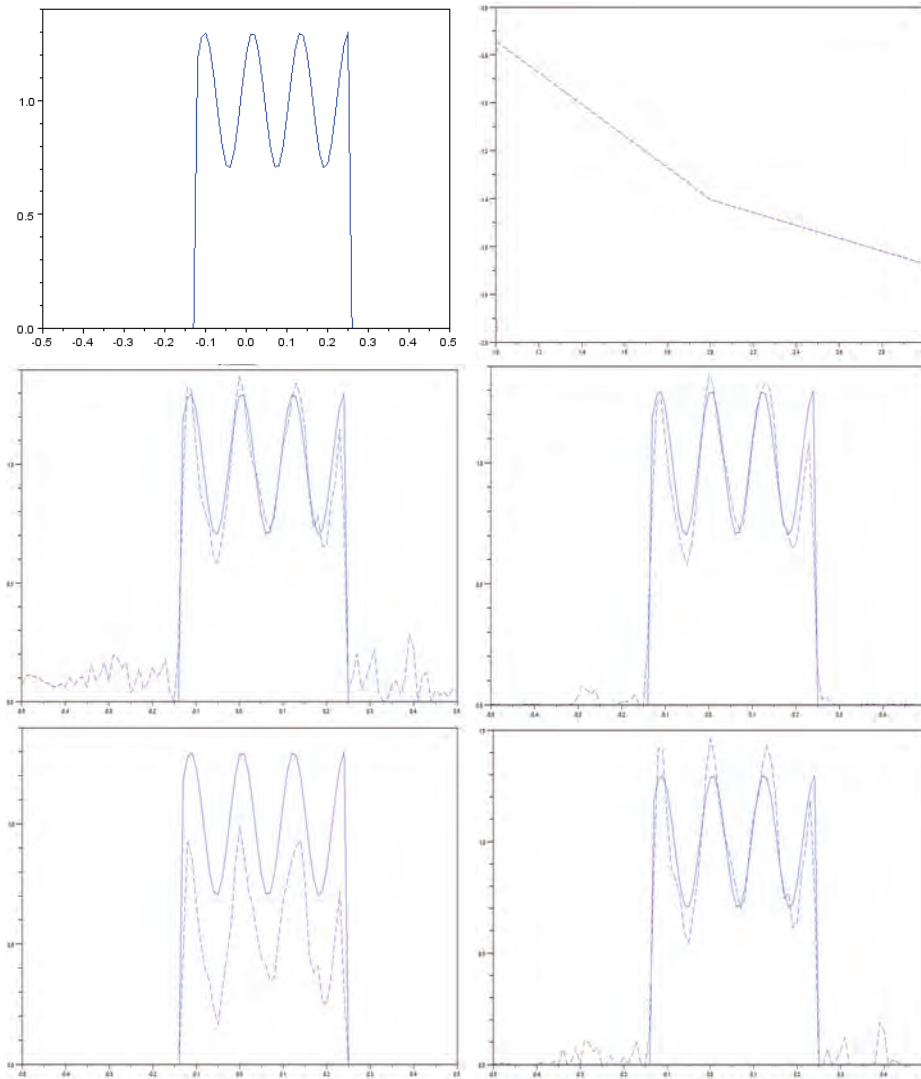


FIGURE II.1.5 – Données bruitées (30%) et réparties tous les  $\delta_{data} = 99$  pixels (2 capteurs), schéma atténué ( $\alpha = 2$ ) : objet à reconstruire, tracés des erreurs de chacune des méthodes (BFN en ligne discontinue, BF-SEEK en lignes et croix, KF en losange et TR en rond) et reconstruction par BFN (3), BF-SEEK (1), KF et TR (objet en ligne continue).

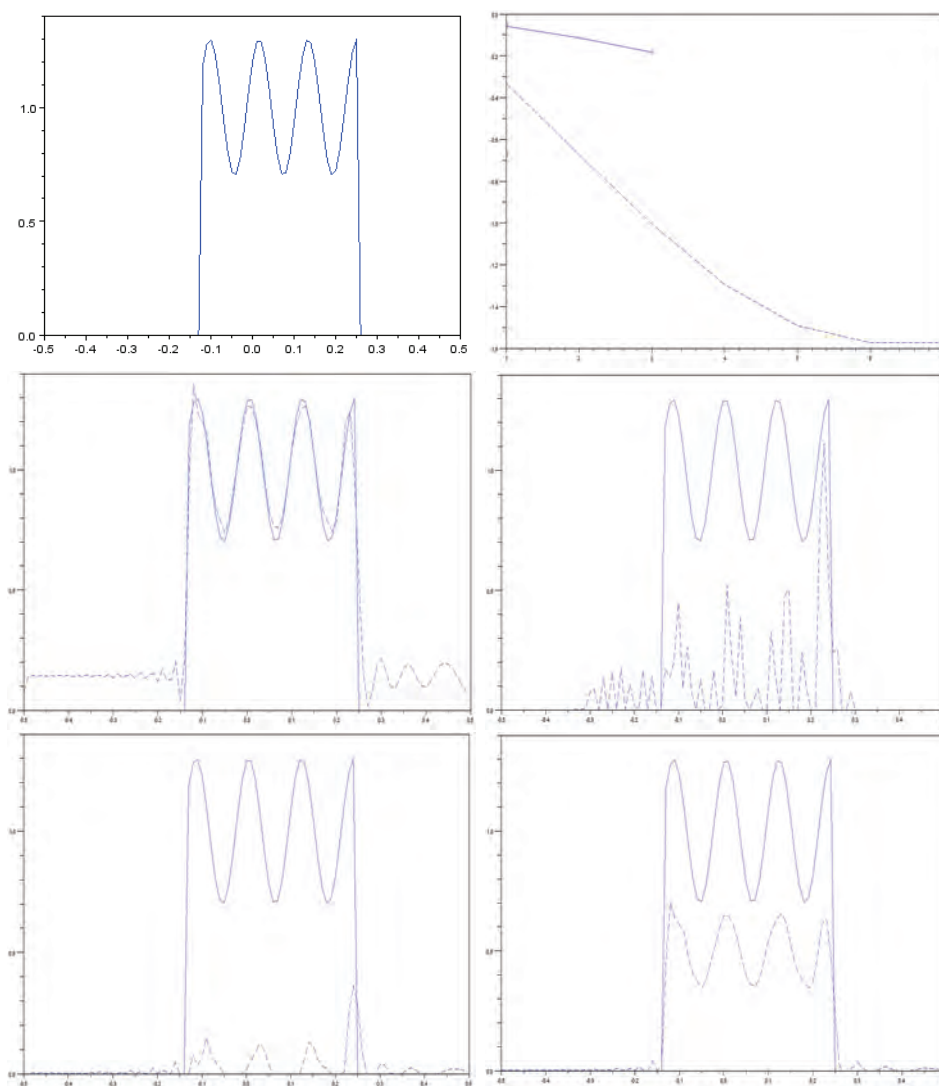


FIGURE II.1.6 – Données non bruitées et réparties tous les  $\delta_{data} > 99$  pixels (1 capteur) : objet à reconstruire, tracés des erreurs de chacune des méthodes et reconstruction par BFN (7), BF-SEEK (3), KF et TR (objet en ligne continue).



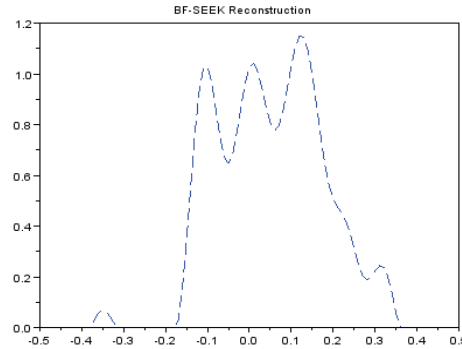


FIGURE II.1.7 – Données non bruitées et réparties tous les  $\delta_{data} > 99$  pixels (1 capteur), schéma atténué ( $\alpha = 1.8$ ) : BF-SEEK (3).

Les méthodes itératives (BFN et BF-SEEK) font ici la preuve de leur robustesse, et l'atténuation a un effet remarquable sur le BF-SEEK : cette fois-ci, l'atténuation ne contre pas les effets du bruit, mais compense une situation d'observation défavorable avec succès. Si la méthode est stabilisée, la reconstruction demande cependant à être encore améliorée.

### II.1.5 Bilan

Alors que le filtre de Kalman (KF) est peu sensible à l'adjonction de bruit dans les données, il se montre très instable face à la diminution du nombre de capteurs. Aussi, le SEEK et le BF-SEEK constituent des améliorations notables tant du point de vue du coût des calculs effectués que de la qualité de la reconstruction.

On peut noter, en ce qui concerne les coûts de calcul, que le BFN ne nécessite, sur une grille monodimensionnelle composée de  $N$  pixels,  $O(N)$  calcul à chaque pas de temps, tandis que le coût du filtre de Kalman s'évalue en  $O(N^2)$  et le filtre SEEK en  $O(rN)$  pour un rang réduit de dimension  $r$ <sup>5</sup>. Il faut cependant tenir compte du nombre d'itérations nécessaires à la convergence des différentes méthodes pour conclure au sujet de leur com-

5. Dans les deux derniers cas, l'opération la plus coûteuse est la mise à jour de la matrice d'erreur de prévision, dont le coût s'élève plus précisément à  $8N^2$  pour le filtre de Kalman et  $8rN$  par aller-retour pour le filtre SEEK.

plexité : contrairement au BF-SEEK, le BFN peine à converger lorsque les observations ne sont pas bruitées, mais la présence de bruit dans les données implique une convergence plus rapide de ces deux méthodes (en moins de cinq itérations), ce qui donne un large avantage au BFN.

S'il ne reste que 2 capteurs, l'atténuation numérique est une technique intéressante pour combattre les effets du bruit et de la diminution du nombre de capteurs lorsqu'elle est utilisée avec le TR et le BF-SEEK. Dans le cas du BFN, on observe qu'elle peut au contraire détériorer la reconstruction. Nous verrons l'effet remarquable de l'usage d'un schéma atténué en dimension 2, ce qui laisse penser qu'une meilleure configuration est envisageable en dimension 1.

Lorsque l'on ne conserve plus qu'un seul capteur, seuls les observateurs itératifs (BFN et BFF) apparaissent suffisamment robustes pour fournir une reconstruction intéressante de l'objet ; il faut cependant faire à nouveau usage du schéma atténué dans le cas du BF-SEEK pour en conserver la stabilité (voir la Figure II.1.7 de la page précédente).

Par ailleurs, le BFN reconstruit mieux la zone variable que la constante (dans laquelle il ne « redescend » pas suffisamment), tandis que l'on constate une tendance inverse pour le KF et le TR.

Enfin, l'intérêt porté aux techniques de reconstruction à observateurs itératifs (ou aux techniques dites de *back and forth* ou de *forward-backward*) sont justifiées dès lors que le BF-SEEK améliore significativement le filtre SEEK dans toutes les situations que nous avons testées.

## II.2 BFN et CG bidimensionnels : résultats numériques

Les résultats et leur analyse proposés dans cette sous-section reprennent largement ceux que nous avons présentés dans l'article [42]. Ils résument les études que nous avons menées au sujet du BFN, du CG, du TR et des NS.

Les taux de convergence des méthodes, et principalement du CG et des NS, sont suffisamment élevés pour que 10 itérations offrent une bonne approximation de la meilleure solution obtainable, en général. Nous limiterons donc le nombre d'itération des méthodes à 10, sauf mention contraire.

Les tableaux d'erreurs fournis précisent l'erreur relative en moyenne quadratique (pourcentage) obtenue par la meilleure ébauche de reconstruction parmi les dix premières. Entre parenthèses, nous noterons le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention de cette reconstruction.

Fait remarquable, le BFN, le CG et les NS fournissent des courbes d'erreurs dotées d'un minimum (lorsqu'elles sont tracées en fonction du nombre d'itérations).

### II.2.1 Objets et vitesses utilisés

La figure II.2.8 représente les objets bidimensionnels que l'on souhaite reconstruire, notés  $f_0$  jusqu'alors.

Le premier objet considéré, constitué de carrés, permet de mettre en avant des phénomènes typiques de l'observation des phénomènes ondulatoires et de la propagation d'ondes (voir les reconstructions exposées en Sous-sections III.3.1 page 49 et III.3.2 page 57 du Chapitre A).

Le deuxième objet, dénommé fantôme de Shepp-Logan, nous permettra d'affiner l'analyse et la comparaison des méthodes et de leurs propriétés (ce fantôme est l'un des objets de reconstruction usuels utilisés en TTA).

Enfin, le troisième objet représente l'intérieur d'un crâne et a été choisi pour ses bords francs, ses zones régulières et sa structure complexe.

Tous ces objets sont implémentés sous la forme d'une matrice  $256 \times 256$ .

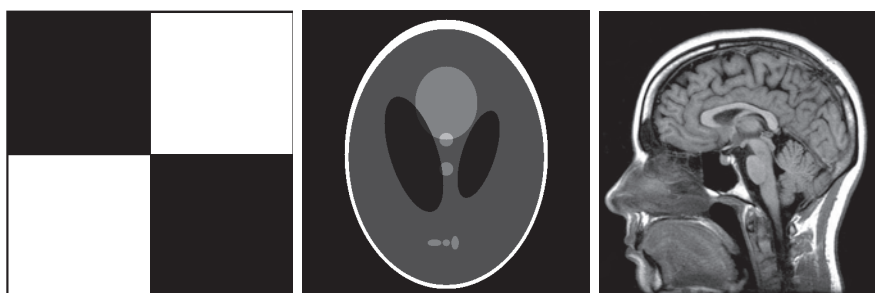


FIGURE II.2.8 – Les objets à reconstruire  $f_0$  : carrés, Shepp-Logan et crâne.

Quatre vitesses sont utilisées. D'abord une vitesse constante de référence  $c = 1$ , puis trois variables, choisies comme dans l'article [198], afin

de simplifier la comparaison entre nos méthodes et celles proposées dans celui-ci. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned}
 c(x,y) &= 1 + 0.2 \sin(2\pi x) + 0.1 \cos(2\pi y), \\
 c(x,y) &= \frac{9(x^2 + y^2)}{1 + 9(x^2 + y^2)} + \exp(-90(x^2 + y^2)) \\
 &\quad - 0.4 \exp(-10(3\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2), \\
 c(x,y) &= 1.25 + \sin(2\pi x) \cos(2\pi y).
 \end{aligned} \tag{II.2.1}$$

Ces vitesses sont représentées sur la Figure II.2.9 et respectivement abrégées par NTS, TS1 and TS2 (pour *Non Trapping Speed*, *Trapping Speed 1* et *Trapping Speed 2*), puisque la première est de type non trapping alors que les deux suivantes sont trapping. Aucune transition régulière n'est assurée entre la vitesse interne au domaine observé et la vitesse extérieure (qui est, elle, toujours constante et égale à 1).

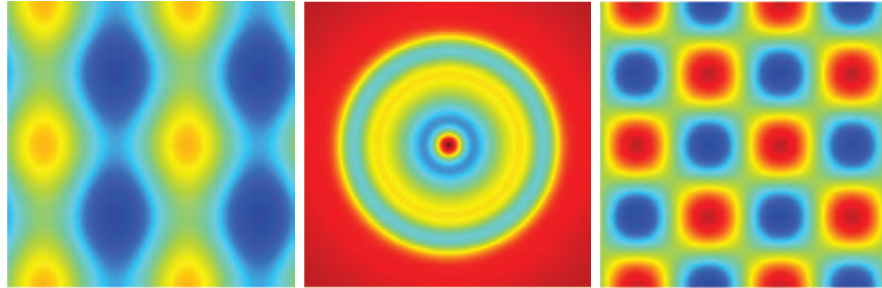


FIGURE II.2.9 – Les trois vitesses variables : NTS, TS1 and TS2 (from equations (II.2.1)).

## II.2.2 Résultats introductifs

Dans la première situation considérée, les données sont complètes et non bruitées. Les résultats qui s'y rapportent sont présentés dans le Tableau II.2.4 page ci-contre.

L'influence de la vitesse choisie  $y$  est mise en évidence, ainsi que les différences de réaction de chacune des méthodes en regard de ce choix. La meilleure reconstruction est offerte par les NS, qui sont suivies par le BFN,

le CG et enfin par le TR. Ce dernier est largement amélioré par l'itération que permettent les NS.

Carte de vitesse	BFN	CG	TR	NS
$c \equiv 1$	2.3 (10)	7.1 (3)	6.8	1.4 (10)
NTS	3.2 (10)	7.5 (4)	8.2	2.3 (10)
TS1	7.1 (10)	16.5 (5)	36.6	1.6 (10)
TS2	7 (10)	10.7 (5)	15.9	6.6 (10)

TABLEAU II.2.4 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan : erreur relative en moyenne quadratique (nombre d'itérations, lequel est par ailleurs limité à 10).

Afin de bien comparer l'effet des différentes vitesses variables, les reconstructions et tracés associés à chacune d'elles sont représentés sur les Figures II.2.10 page suivante à II.2.17 page 235.

Le BFN peut être sensiblement amélioré par l'augmentation du nombre d'itération, comme on peut le constater dans le Tableau II.2.5, où 100 itérations sont calculées au lieu de 10 précédemment (les NS ont, elles, quasiment convergé en 10 itérations).

Nombre d'itérations	$c \equiv 1$	NTS	TS1	TS2
10	2.3	3.2	7.1	7
100	1	1.5	1.2	4.1

TABLEAU II.2.5 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan : erreur relative en moyenne quadratique (BFN, 10 et 100 itérations).

### II.2.3 Influence des coefficients de nudging

Pour définir les coefficients de nudging  $k^f$  et  $k^b$  – définis notamment en Sous-section I.3.2 page 210, nous avons mené des tests sachant que d'une part ces coefficients donnent un poids aux rappels, et donc aux données, vis-à-vis du modèle et d'autre part qu'afin d'exercer un rappel au moyen

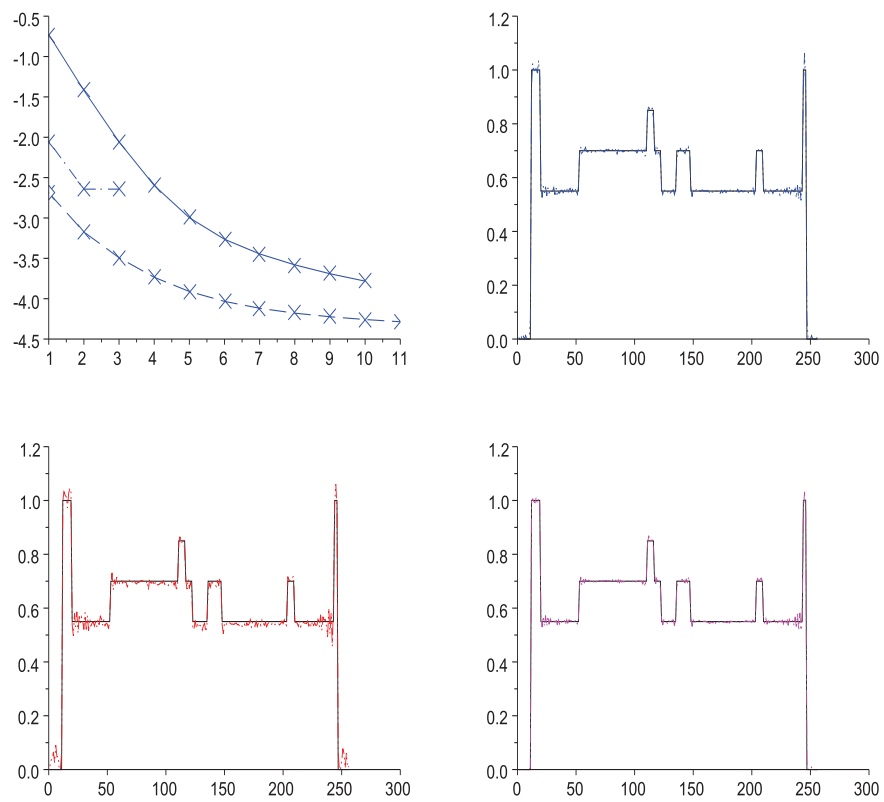
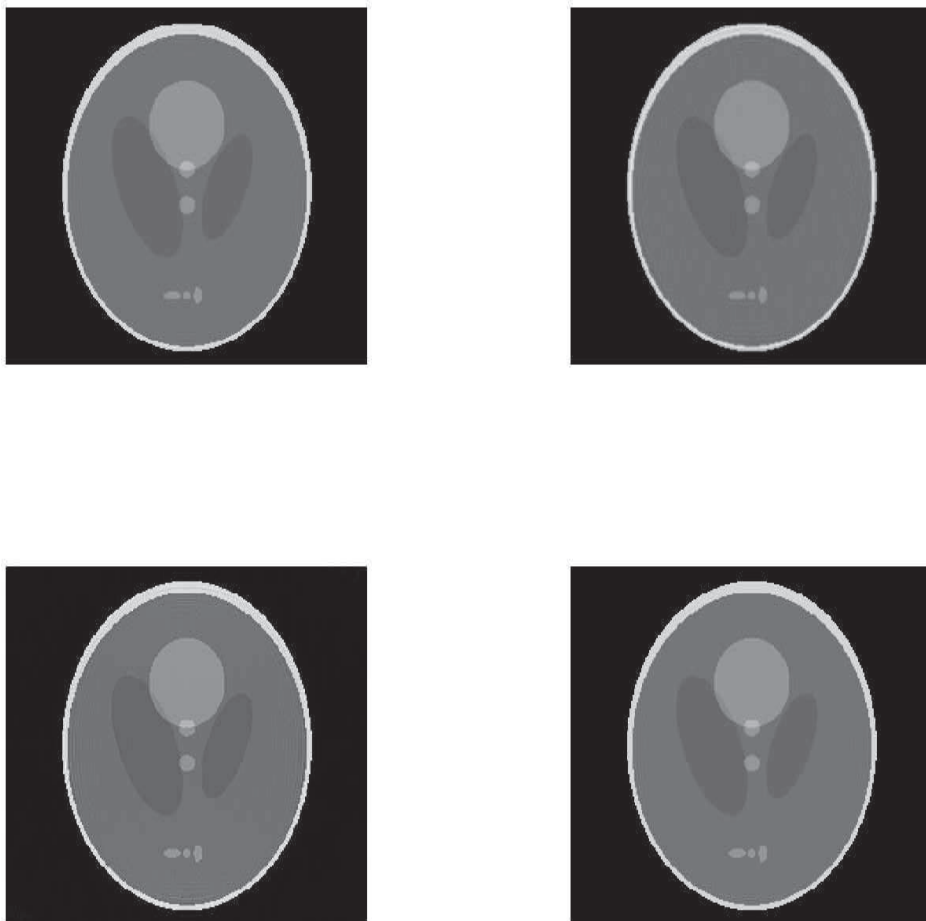


FIGURE II.2.10 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
2.3 (10)	7.1 (3)	6.8	1.4 (10)

FIGURE II.2.11 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

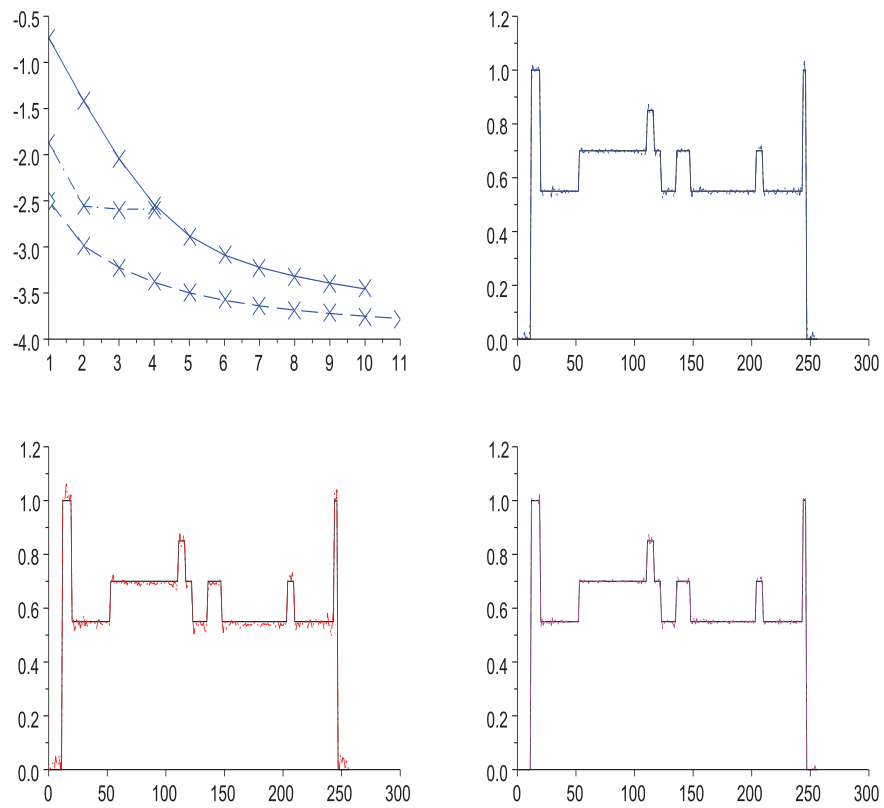
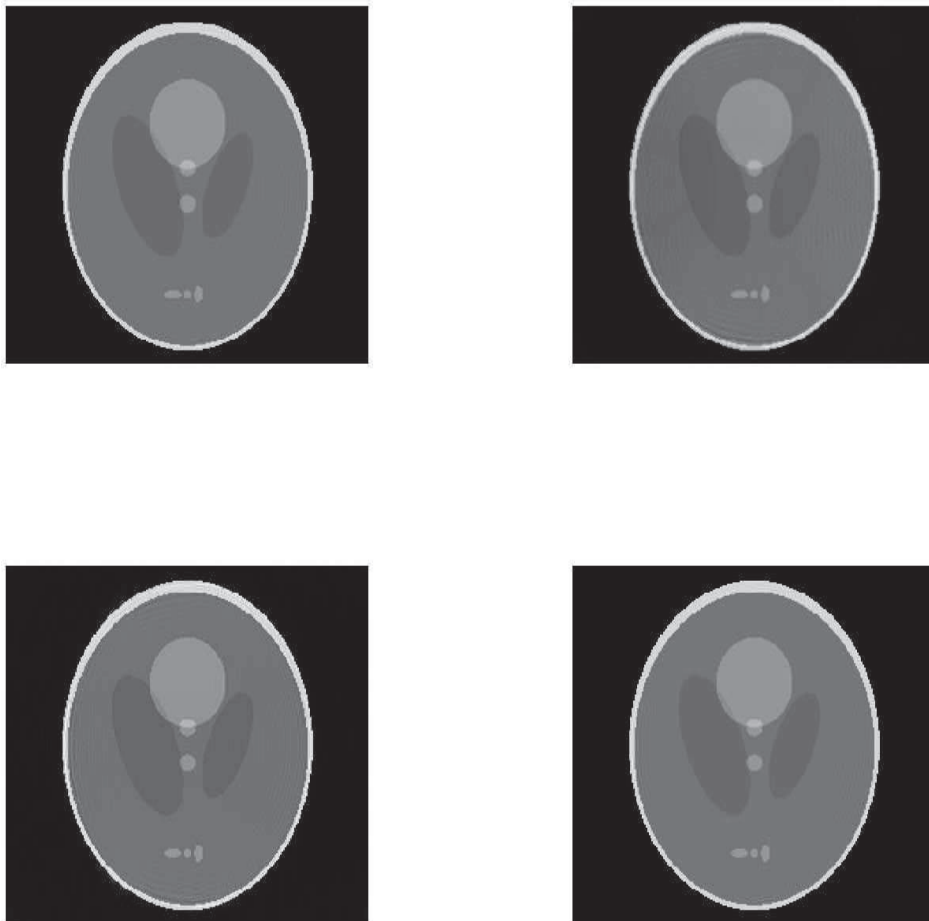


FIGURE II.2.12 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse NT : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).





BFN	CG	TR	NS
3.2 (10)	7.5 (4)	8.2	2.3 (10)

FIGURE II.2.13 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse NT : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

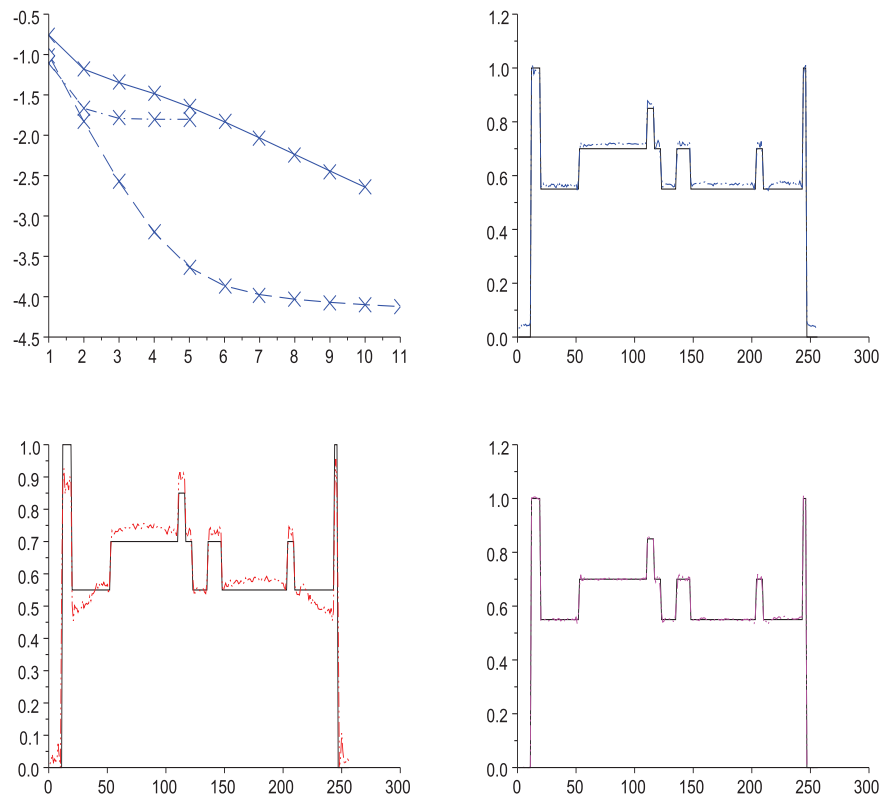
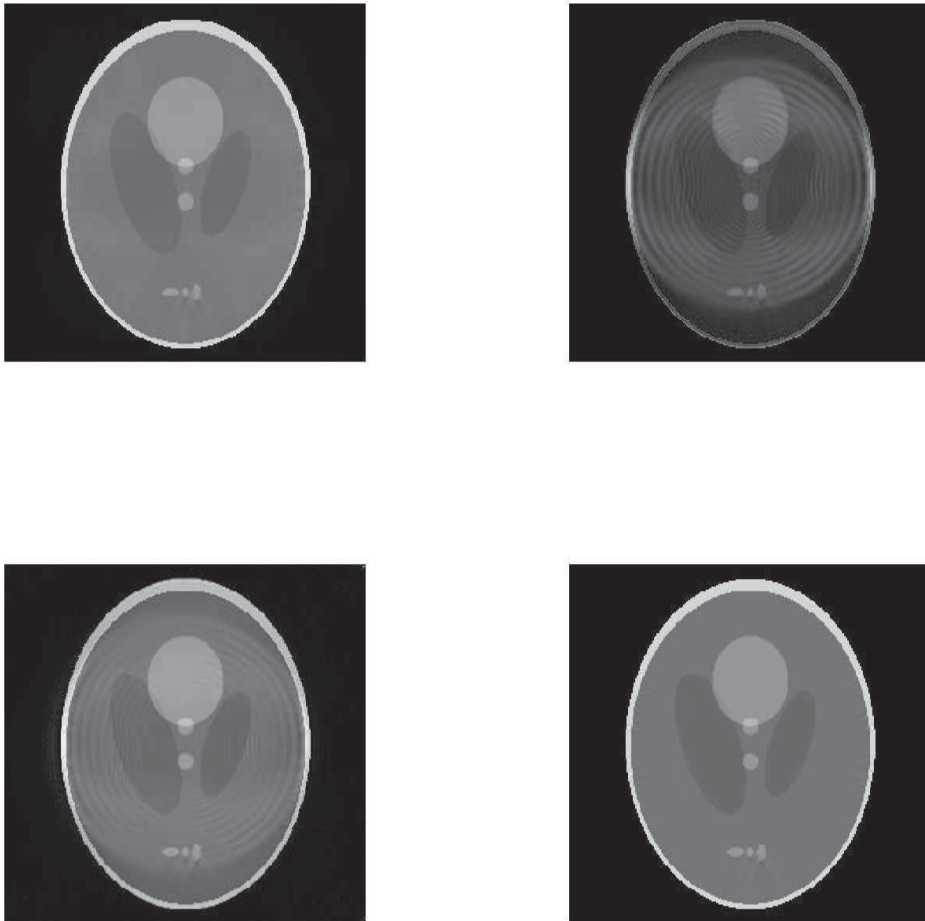


FIGURE II.2.14 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS1 : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
7.1 (10)	16.5 (5)	36.6	1.6 (10)

FIGURE II.2.15 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS1 : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

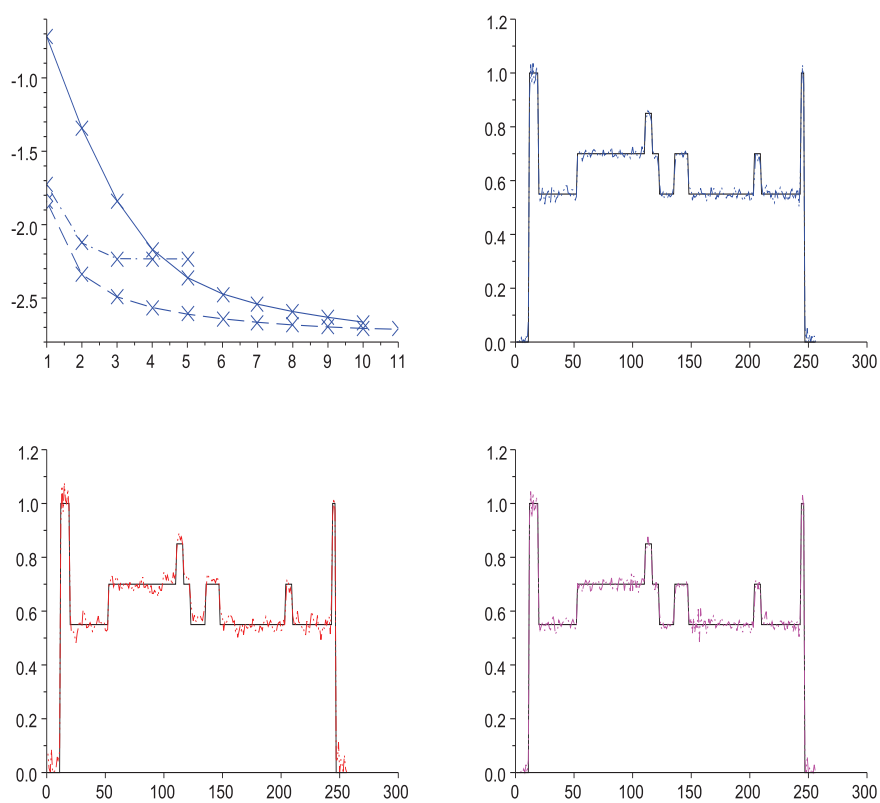
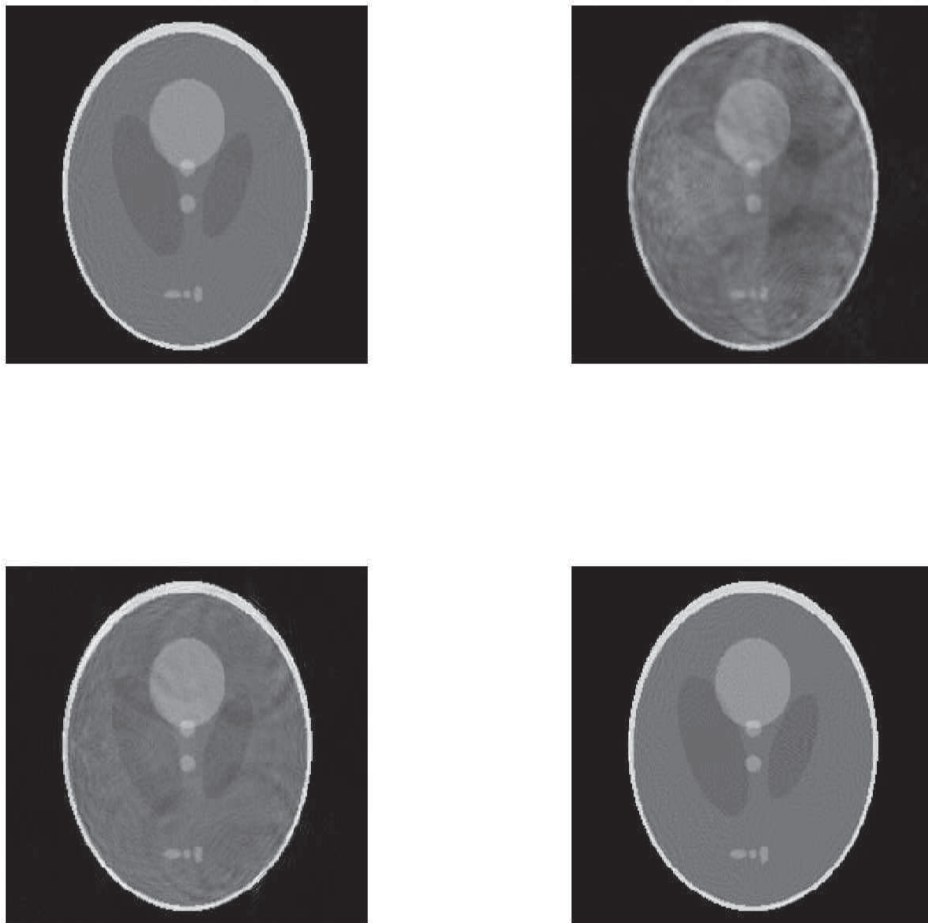


FIGURE II.2.16 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
7 (10)	10.7 (5)	15.9	6.6 (10)

FIGURE II.2.17 – Données complètes et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

des dérivées temporelles, ils doivent ne pas excéder le pas de temps  $\delta t$ , *a priori* tout du moins. On constate en effet que pour un niveau de bruit élevé (supérieur à 20%), si les coefficients de rappel sont supérieurs ou égaux à  $\delta t^{-1}$ , alors le schéma devient instable et la solution numérique explose.

Les Tableaux II.2.6 et II.2.7 fournissent les résultats obtenus dans le cas de données bruitées à 15% (niveau de bruit que nous utiliserons, en général, par la suite), où l'on suppose que :

$$k^f = k^b = \frac{\tau}{\delta t}.$$

$\tau$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$It_{cv}$	9	8	6	5	4	4	4	4
$\varepsilon_{cv}$	36.3	33.2	32.4	31.7	31	30.3	29.8	29.3

TABLEAU II.2.6 – Données complètes et bruitées (15%), fantôme de Shepp-Logan : erreur relative en moyenne quadratique minimale ( $\varepsilon_{cv}$ ) et nombre d'itérations ( $It_{cv}$ ) correspondant en fonction des valeurs des coefficients de nudging ( $k^f = k^b = \tau\delta t^{-1}$ ).

$\tau$	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5 et plus
$It_{cv}$	3	3	3	3	3	3	<i>NaN</i>
$\varepsilon_{cv}$	28.8	28.3	28	27.7	27.4	27.2	<i>NaN</i>

TABLEAU II.2.7 – Données complètes et bruitées (15%), fantôme de Shepp-Logan : erreur relative en moyenne quadratique minimale ( $\varepsilon_{cv}$ ) et nombre d'itérations ( $It_{cv}$ ) correspondant en fonction des valeurs des coefficients de nudging ( $k^f = k^b = \tau\delta t^{-1}$ ).

Aussi les coefficients de nudging doivent être aussi grands que possible (afin de tirer les solutions vers les données autant que possible), mais sans négliger le modèle, qui est aussi source d'informations, et ce d'autant plus que les données sont bruitées, ni prendre le pas sur la dérivation temporelle. Les coefficients exercent donc une pondération entre modèle et données qui

explique le fait que la valeur du « meilleur » coefficient dépend du niveau de bruit. Dans le cas considéré précédemment, par exemple, la reconstruction reste stable lorsque  $1 \leq \tau \leq 1.4$  et continue d'être de meilleure qualité et plus rapidement lorsque  $\tau$  croît.

Ces résultats justifient le choix fait dans notre étude :

$$k^f = k^b = \frac{0.9}{\delta t}.$$

#### II.2.4 Robustesse vis-à-vis du bruit

Nous introduisons ensuite un bruit additif gaussien dans les données et les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau II.2.8 tandis que les reconstructions et tracé relatifs à ces situations sont présentés sur les Figures II.2.18 page suivante à II.2.25 page 245.

Premier constat : un bruit d'un niveau de 15% a plus d'effets que les perturbations de la vitesse constante proposées (voir par exemple les différentes erreurs pour le BFN en fonction des vitesses, avec et sans bruit). Ce constat est cependant à nuancer selon les méthodes : le BFN et le CG apparaissent plus sensibles au bruit tandis que le TR reste relativement robuste face au bruit et réagit moins bien aux perturbations de la vitesse.

Il est à noter que le TR offre une excellente ébauche de reconstruction, à tel point que les itérations des NS peuvent s'avérer inutiles.

Carte de vitesse	BFN	CG	TR	NS
$c \equiv 1$	28.8 (3)	35.5 (8)	26.8	26.8 (1)
NTS	27 (3)	33.3 (9)	24.8	24.8 (1)
TS1	38.8 (2)	37.7 (6)	42.8	35.8 (2)
TS2	28.9 (3)	34.3 (5)	27.4	27.4 (1)

TABLEAU II.2.8 – Données complètes bruitées (niveau de bruit de 15%), fantôme de Shepp-Logan : erreur relative en moyenne quadratique (nombre d'itérations).

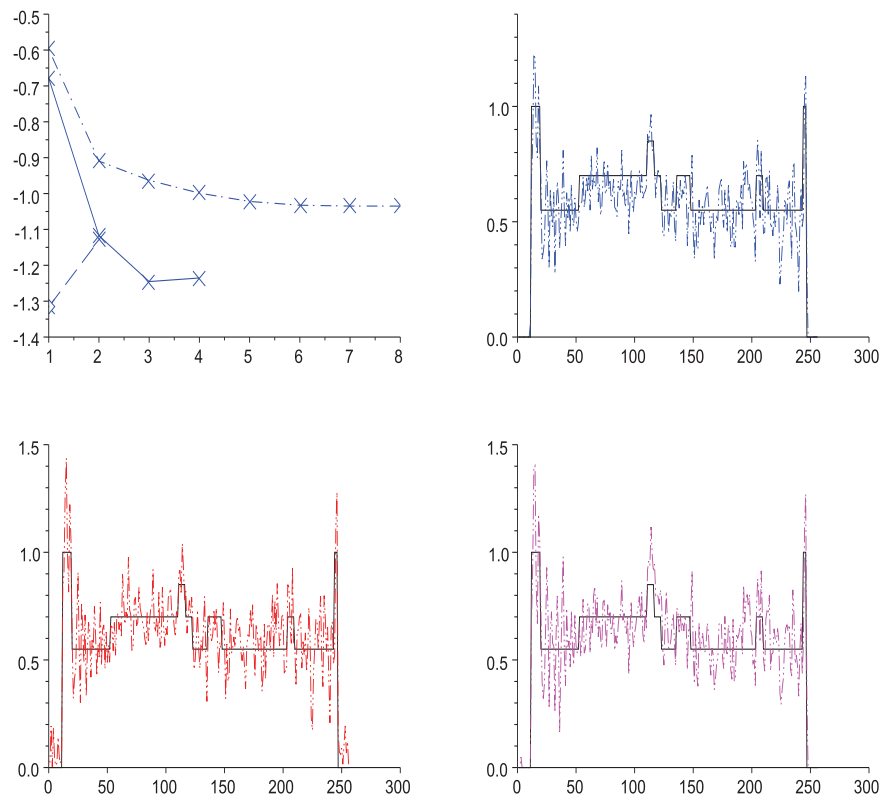
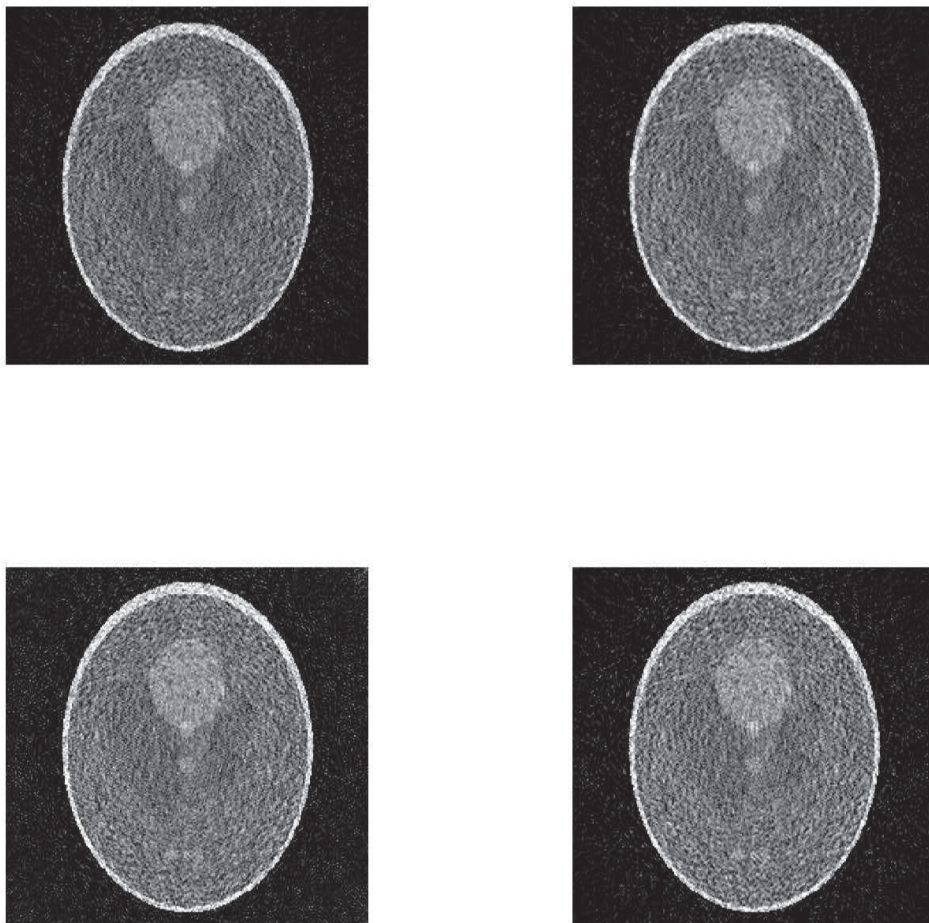


FIGURE II.2.18 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).





BFN	CG	TR	NS
28.8 (3)	35.5 (8)	26.8	26.8 (1)

FIGURE II.2.19 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

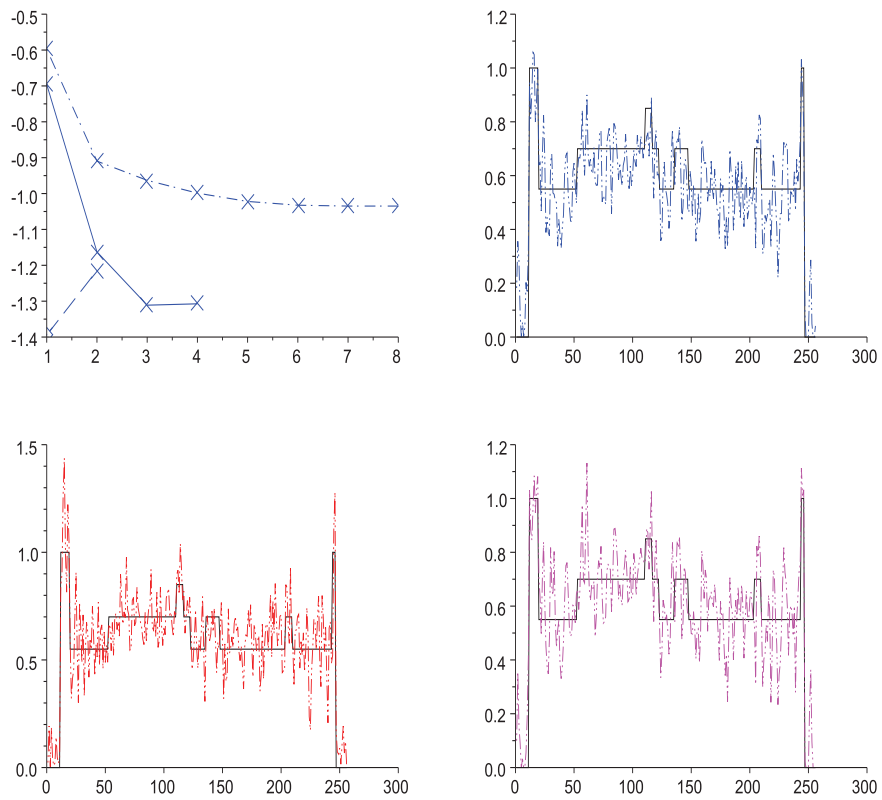
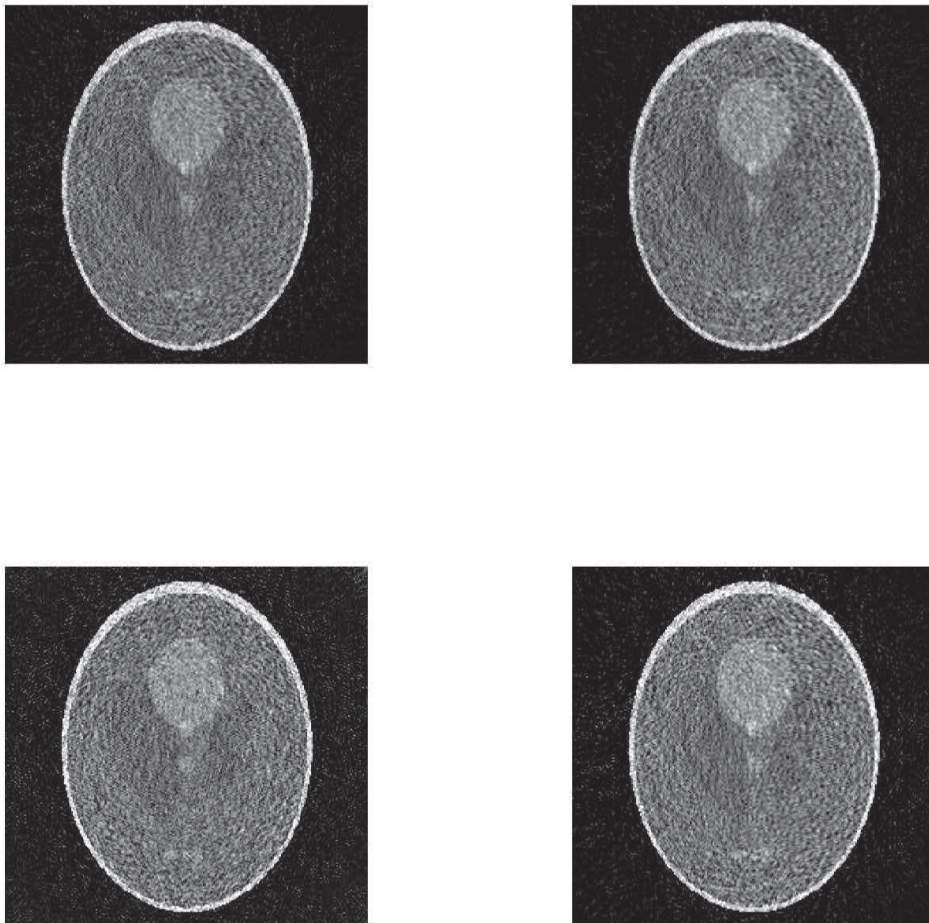


FIGURE II.2.20 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse NT : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
27 (3)	33.3 (9)	24.8	24.8 (1)

FIGURE II.2.21 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse NT : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

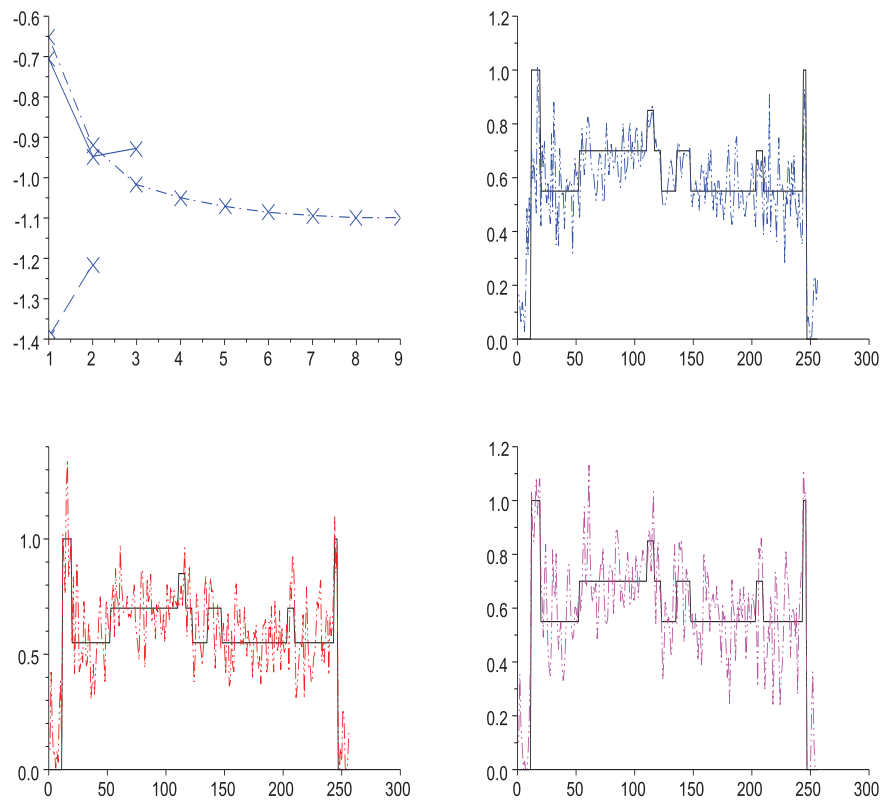
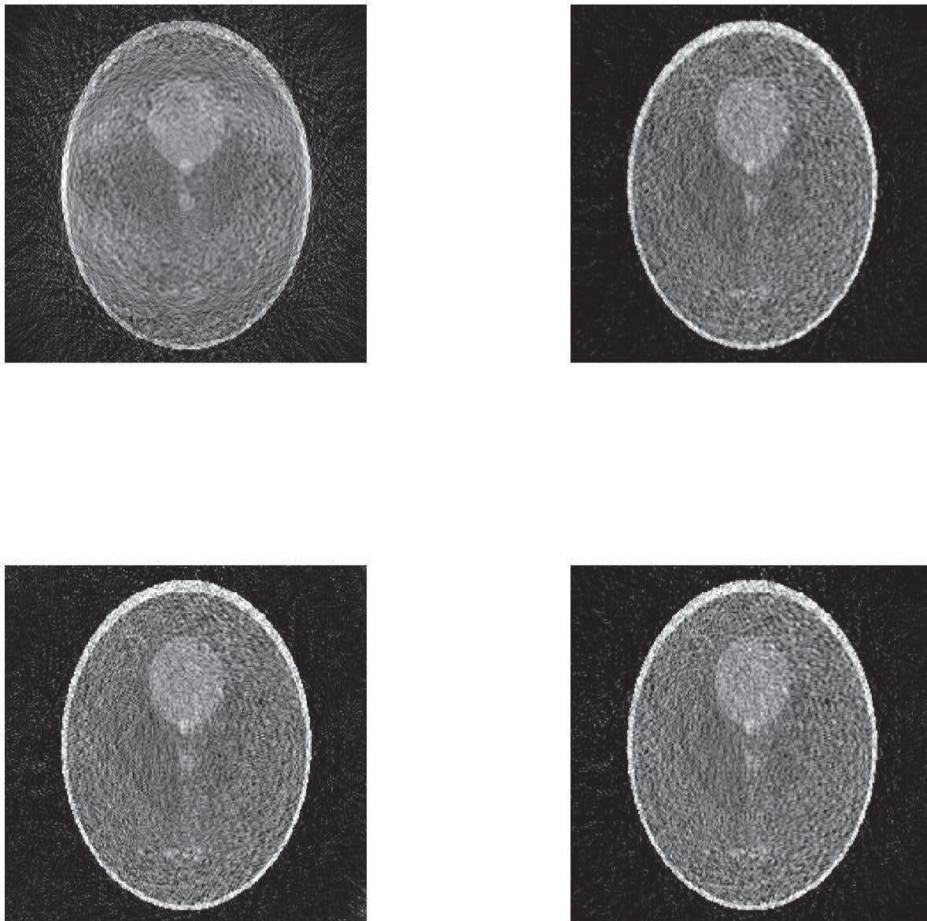


FIGURE II.2.22 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS1 : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
38.8 (2)	37.7 (6)	42.8	35.8 (2)

FIGURE II.2.23 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS1 : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

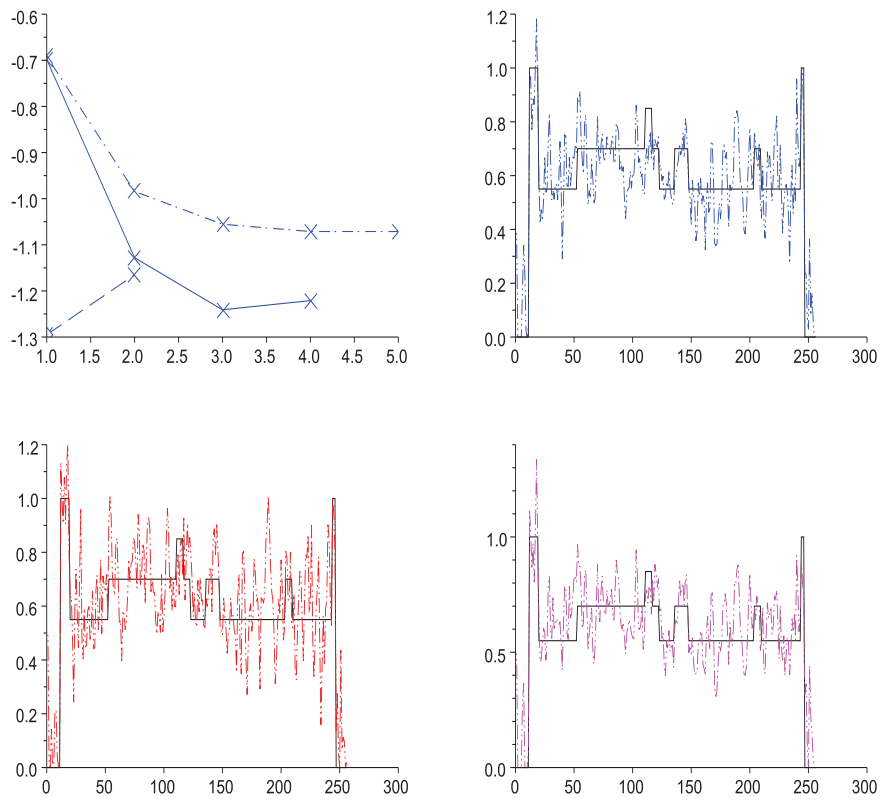
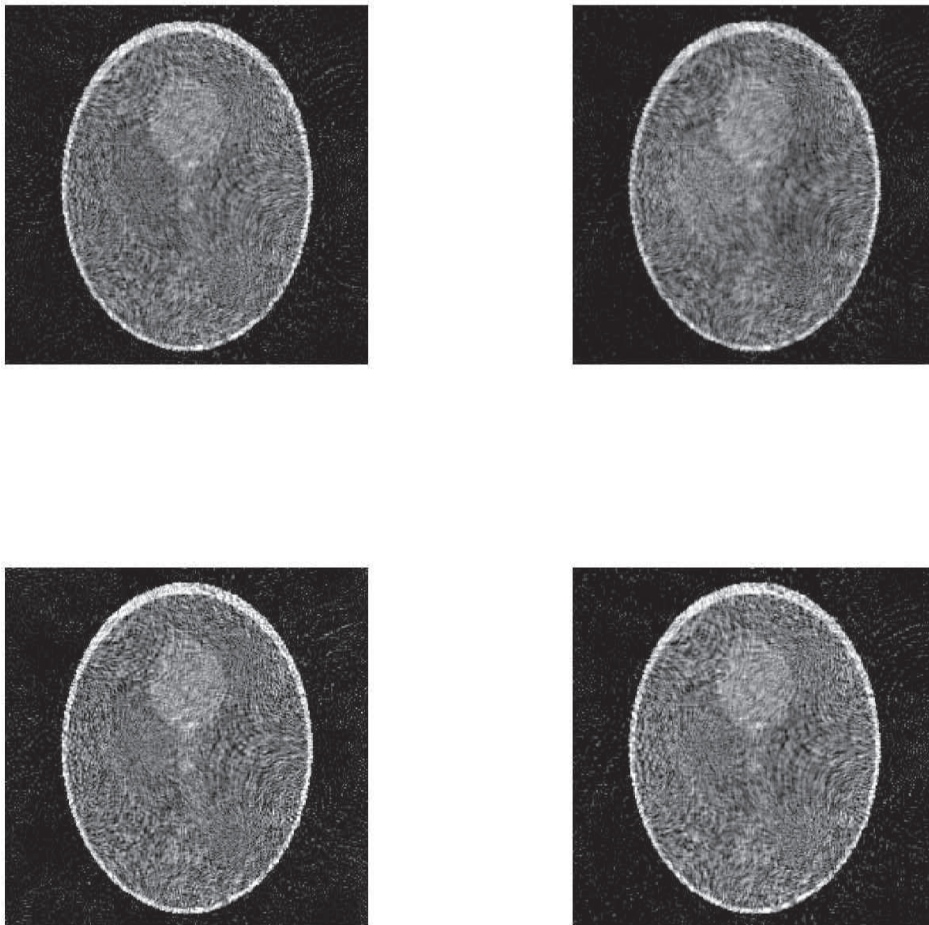


FIGURE II.2.24 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).





BFN	CG	TR	NS
28.9 (3)	34.3 (5)	27.4	27.4 (1)

FIGURE II.2.25 – Données complètes et bruitées à 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

### II.2.5 Régularisation numérique

Nous proposons ici un premier test de la méthode de régularisation présentée en Sous-section I.3 page 208 : nous introduisons donc une atténuation numérique artificielle de type thermovisqueuse pondérée par un coefficient  $\varepsilon = \delta x^\alpha > 0$  restant à définir.

N'ayant pas obtenu de critère théorique pertinent permettant une prédétermination de  $\alpha$ , nous tentons une première détermination empirique du meilleur coefficient possible. Concernant les données, on reprend celles de la situation précédente (Tableau II.2.8 page 237), et tentons d'atténuer le bruit en faisant varier le coefficient d'atténuation pour chacune des méthodes. Les résultats sont présentés dans le tableau II.2.9 et les meilleures reconstructions obtenues pour chacune des méthodes sont exposées plus loin, dans les Figures II.2.35 et II.2.36.

Un minimum apparaît parmi les erreurs minimales atteintes par chacune des méthodes, mais on peut supposer que la valeur optimale ainsi obtenue pour  $\alpha$  est dépendante de la configuration considérée (position, répartition et nombre de capteurs, choix de l'objet, etc). On vérifie cependant que, sous des conditions fortement différentes, la valeur (empiriquement) optimale de  $\alpha$  est sensiblement la même (voir le Tableau II.2.18 page 274).

Dorénavant, lorsque nous ne précisons que le fait que  $\varepsilon \neq 0$ , la valeur choisie pour  $\alpha$  sera la meilleure déterminée précédemment : 2.1 pour le BFN, 1.7 pour le CG et les NS et 1.8 pour le TR.

On constate enfin qu'en ajoutant un bruit d'un niveau de 15% dans un cas de vitesse constante, chacune des méthodes offre une reconstruction intéressante, puisque dotée d'une erreur inférieure à 20%, et ce grâce au schéma atténué utilisé.

### II.2.6 Influence du coefficient de régularisation du CG

Afin d'approfondir l'étude de stabilité de nos méthodes, intéressons-nous à la régularisation proposée pour le CG dans la Section III page 121 du Chapitre B.



	BFN	CG	TR	NS
$\alpha = 0$	28.8 (3)	35.5 (8)	26.8	26.8 (1)
$\alpha = 1.6$	25.5 (10)	21 (1)	20.4	17.6 (3)
$\alpha = 1.7$	22.9 (10)	19.8 (1)	18.4	17.1 (2)
$\alpha = 1.8$	20.6 (10)	20.4 (1)	17.3	17.3 (1)
$\alpha = 1.9$	18.8 (10)	23.7 (1)	17.3	17.3 (1)
$\alpha = 2$	17.6 (10)	29.9 (1)	18.3	18.3 (1)
$\alpha = 2.1$	17.4 (10)	34.9 (2)	20.2	20.2 (1)
$\alpha = 2.2$	18.1 (10)	35.9 (2)	22.1	22.1 (1)

TABLEAU II.2.9 – Vitesse constante et données complètes bruitées (niveau de bruit de 15%), fantôme de Shepp-Logan : reconstruction par un schéma atténué. Erreur relative en moyenne quadratique (nombre d'itérations, limité à 10) en fonction du coefficient d'atténuation numérique  $\varepsilon = \partial x^\alpha$ .

Nous réduisons le nombre de capteurs de moitié (en ne considérant que les données issues d'un capteur sur deux), ceux-ci étant toujours disposés sur un cercle entourant l'objet. Cette situation renforce le caractère mal posé de la formulation variationnelle (voir à nouveau la Section III page 121 du Chapitre B), nous introduisons donc un paramètre de régularisation  $\alpha$ .

Comme on peut le constater sur la Figure II.2.26, même si l'algorithme converge lorsque le coefficient  $\alpha$  est suffisamment influent (cette stabilisation de la méthode correspond d'ailleurs aux résultats théoriques cités précédemment), l'erreur relative minimale atteinte par les reconstructions successives en est affectée. Aussi, par la suite, lorsque rien ne sera précisé au sujet de ce coefficient, il sera choisi nul par défaut et l'on préférera la régularisation par atténuation introduite dans le schéma numérique.

### II.2.7 Restriction de la quantité de données disponibles : angle de vue limité

Nous proposons ici d'étudier le comportement des différentes méthodes lorsque l'angle de vue par lequel les données sont obtenues est restreint à la moitié du cercle d'observation.

Dans cette situation, les méthodes sont tout d'abord comparées en l'absence de bruit, voir les Figures II.2.27 et II.2.28.

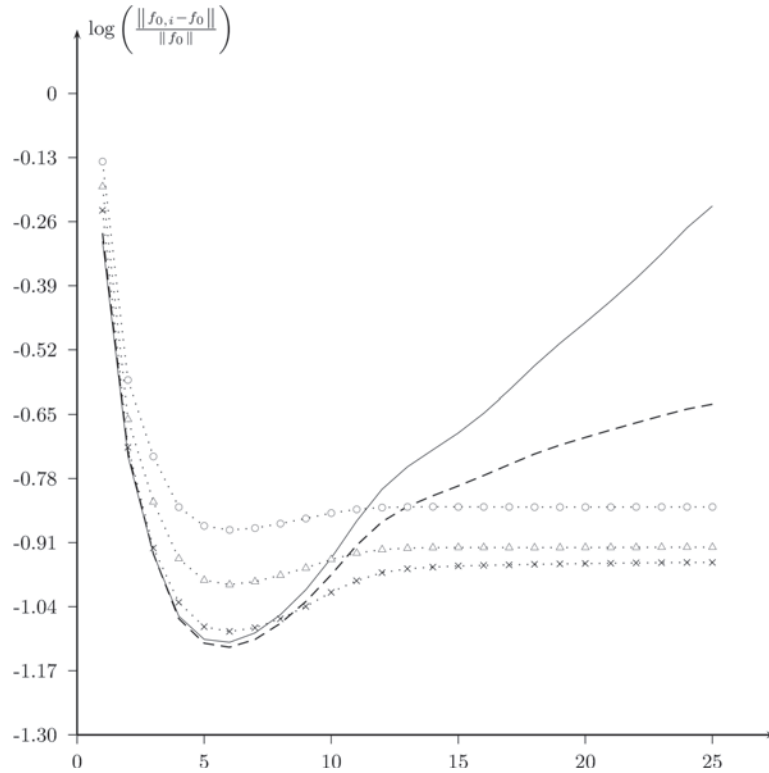


FIGURE II.2.26 – Données bruitées (niveau de bruit de 20%), un capteur sur deux est considéré. Tracés du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations pour le CG régularisé avec  $\alpha = 0$  (ligne),  $\alpha = 0.01$  (pointillés),  $\alpha = 0.05$  (croix),  $\alpha = 0.075$  (triangles) and  $\alpha = 0.1$  (cercles).

À nouveau les NS réagissent excellemment à cette situation, tandis que le BFN atteint l'erreur minimale du CG en environ 5 itérations, tout en continuant d'améliorer la reconstruction lors des itérations suivantes. Cependant, même avec la moins bonne reconstruction, le CG converge en moins d'itérations et fournit une bonne ébauche de reconstruction plus rapidement que les autres méthodes. Aussi les différentes méthodes considérées gagneraient sûrement à être hybridées.

En conservant toujours la même configuration de base, on ajoute du bruit dans les données, puis on régularise les schémas par atténuation numérique. Les erreurs associées à ces reconstructions sont précisées dans le

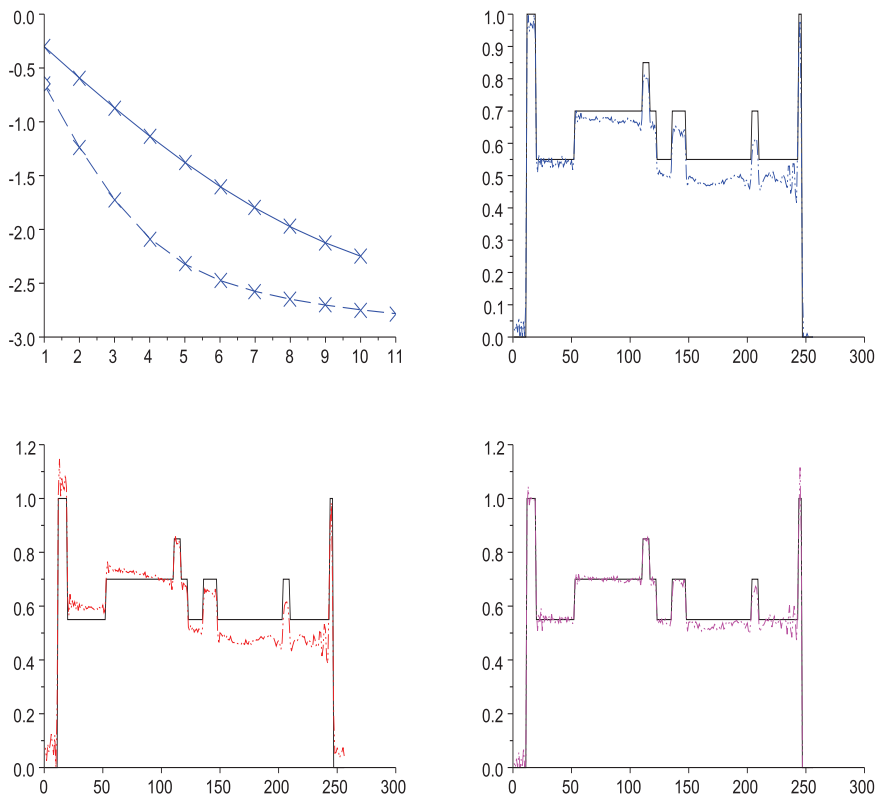
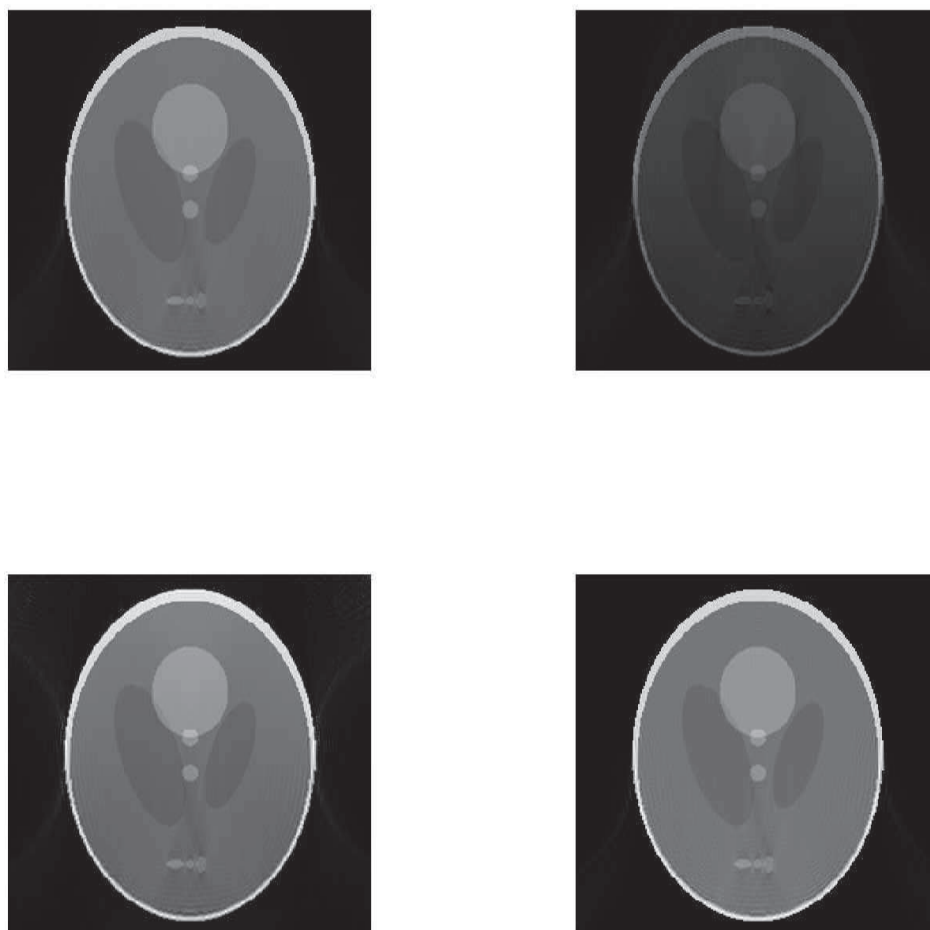


FIGURE II.2.27 – Données incomplètes, disponibles sur le demi-cercle supérieur, et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : tracé des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
10.6 (10)	16 (6)	52	6.2 (10)

FIGURE II.2.28 – Données incomplètes, disponibles sur le demi-cercle supérieur, et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

Tableau II.2.10 et les Figures II.2.29 et II.2.30 page 253 représentent les reconstructions relatives au cas bruité sans atténuation.

Configuration	BFN	CG	TR	NS
Sans bruit, $\varepsilon = 0$	10.6 (10)	16 (6)	52	6.2 (10)
15% de bruit, $\varepsilon = 0$	36.4 (8)	40 (10)	55.7	38.7 (3)
15% de bruit, $\varepsilon \neq 0$	23.1 (10)	26.7 (5)	54.5	22.3 (6)

TABLEAU II.2.10 – Données incomplètes, disponibles sur le demi-cercle supérieur, et non bruitées, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10). Trois cas considérés : données non bruitées, données bruitées, avec et sans atténuation numérique.

En présence de bruit, l'erreur minimale atteinte augmente conséquemment pour chacune des méthodes, mais principalement pour le TR et, une nouvelle fois, l'atténuation corrige remarquablement cette situation, sauf pour le TR, qui y semble fort peu sensible. Les reconstructions et tracés associés à cette dernière situation sont représentés sur les Figures II.2.35 page 261 et II.2.36 page 262.

### II.2.8 Restriction de la quantité de données disponibles : éparpillement

Cette fois-ci, les données restent disposées uniformément sur l'ensemble du cercle d'observation, mais seul un capteur sur  $\sigma$  est considéré. Le nombre de capteur est donc diminué et le cercle d'observation est incomplet. Cette configuration permet à la fois de tester la stabilité des méthodes en regard de la quantité d'information disponible, mais aussi de questionner la redondance d'information contenue dans les données. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau II.2.11.

Constatons tout d'abord la redondance d'information contenue dans les données : une qualité de reconstruction relativement similaire est obtenue dans chacune de ces situations, et particulièrement avec le CG, qui fait montre d'une robustesse remarquable ici. Cette propriété est encore plus

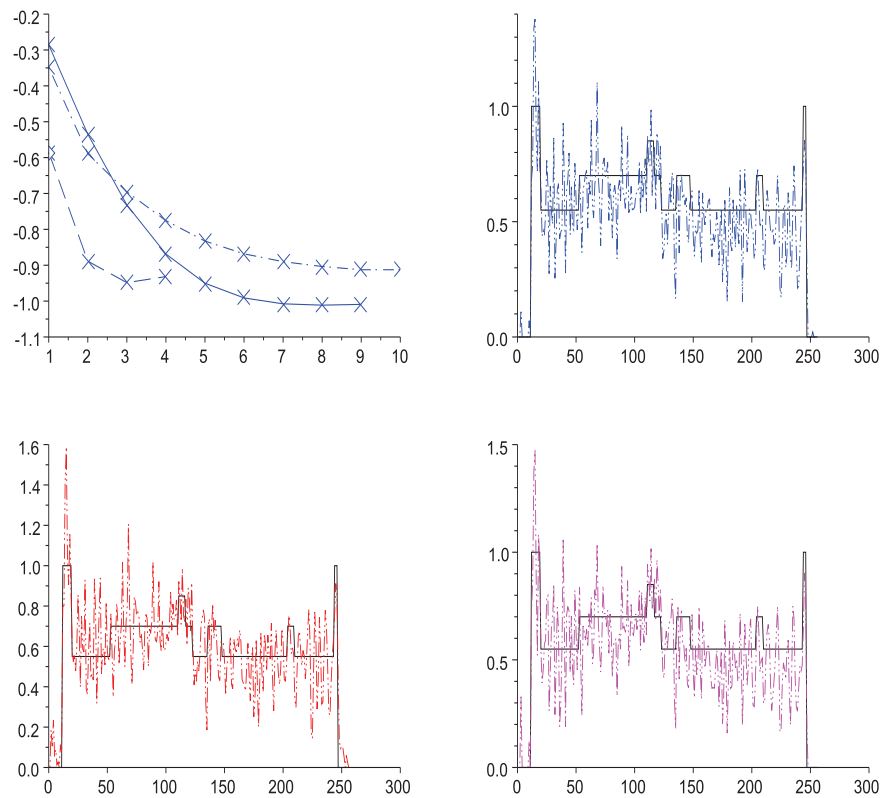
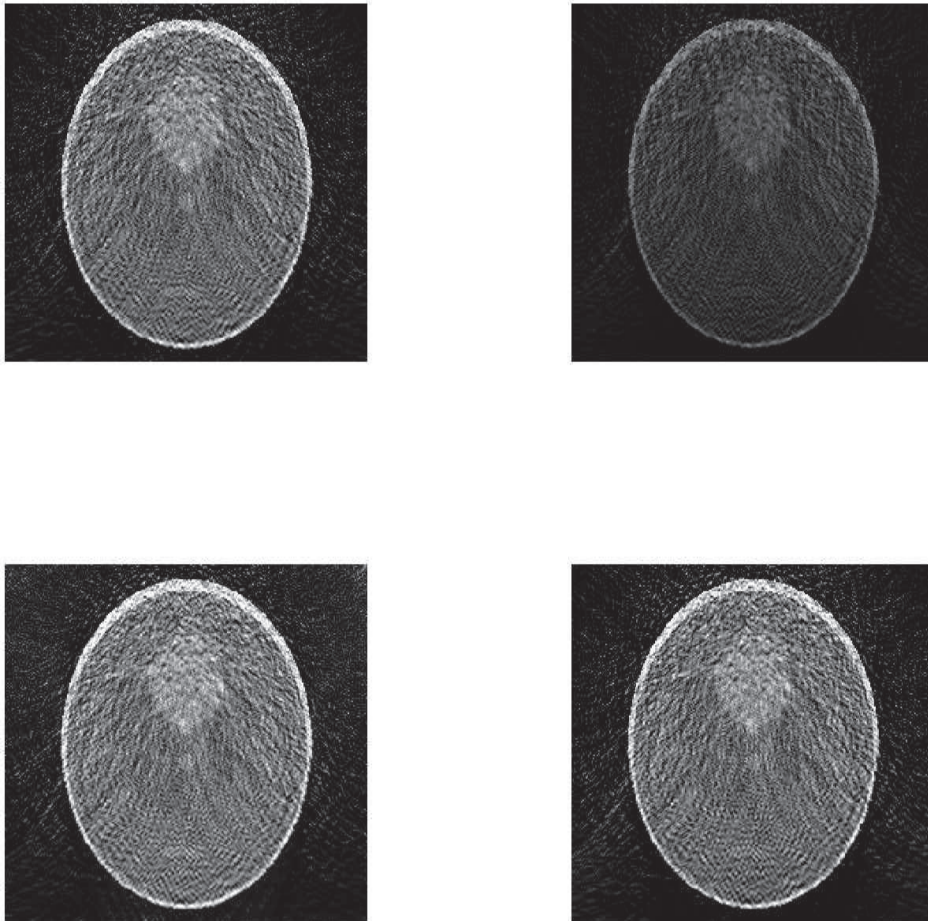


FIGURE II.2.29 – Données incomplètes, disponibles sur le demi-cercle supérieur, et bruitées (15%), fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : tracé du logarithme des erreurs relatives en moyenne quadratique en fonction du nombre d'itérations (BFN en ligne continue, CG en points et tirets alternés et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
36.4 (8)	40 (10)	55.7	38.7 (3)

FIGURE II.2.30 – Données incomplètes, disponibles sur le demi-cercle supérieur, et bruitées (15%), fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : reconstructions par le BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

Configuration	BFN	CG	TR	NS
$\sigma = 1$	2.3 (10)	7.1 (3)	6.8	1.4 (10)
$\sigma = 2$	5.4 (10)	8.9 (4)	13.2	4.5 (10)
$\sigma = 4$	12.1 (10)	12.4 (4)	23.9	11.5 (10)
$\sigma = 8$	25.3 (10)	15 (5)	33.3	18.5 (10)

TABLEAU II.2.11 – Données incomplètes non bruitées (un capteur sur  $\sigma$  est considéré), fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : erreur relative en moyenne quadratique (nombre d’itérations, limité à 10).

évidente en laissant évoluer les algorithmes jusqu’à convergence, mais il faut dépasser la centaine d’itérations dans le cas du BFN et des NS, notamment, lorsque  $\sigma = 8$ . On constate aussi que le principal défaut introduit dans les reconstructions avec l’éparpillement des données est la mauvaise reconstruction de l’intensité de l’objet, alors que les formes sont reconstruites avec peu d’anomalies.

### II.2.9 Influence de l’horizon de temps

Afin de mieux tenir compte de l’influence de l’horizon de temps sur le fonctionnement des méthodes, on se propose de le doubler dans le cadre d’une situation fort défavorable à une bonne reconstruction. On cumule ainsi vitesse trapping et données bruitées et incomplètes. On rassemble les résultats obtenus dans le Tableau II.2.12.

Configuration	BFN	CG	TR	NS
$T = \sqrt{2}$	46.3 (4)	50.9 (8)	66	51.9 (3)
$T = 2\sqrt{2}$	35.9 (4)	39.8 (6)	41.6	41.6 (1)

TABLEAU II.2.12 – Vitesse trapping TS1 et données bruitées à 15% et incomplètes (sur le demi-cercle supérieur). Comparaison des erreurs relatives en moyenne quadratique des quatre méthodes selon le temps final.



Bien entendu, les reconstructions obtenues sont toutes insatisfaisantes, mais ce test permet de remarquer qu'en doublant la valeur de l'horizon de temps et dans le cas des NS, le temps d'évolution est deux fois plus long, mais ce fait est largement compensé par le fait que seule une itération suffit à obtenir une bien meilleure reconstruction. On constate par la même occasion un manque d'information dans les données lorsque le temps final est trop réduit.

### II.2.10 En cumulant les tares (I).

Étudions maintenant quelques dernières situations, qui cumulent les différentes difficultés rencontrées jusqu'alors.

Dans cette optique, le Tableau II.2.13 contient les erreurs minimales obtenues en cas de données incomplètes, fournies sur le demi-cercle, mais en cas de vitesses variables et pour  $\sigma = 1$ .

Carte de vitesse	BFN	CG	TR	NS
$c \equiv 1$	36.4 (8)	40 (10)	55.7	38.7 (3)
NTS	36.3 (8)	40.6 (10)	55.8	38.6 (3)
TS1	46.3 (4)	50.9 (8)	66	51.9 (3)
TS2	39.1 (8)	42.3 (9)	58.5	41.5 (4)

TABLEAU II.2.13 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) avec 15% de bruit, fantôme de Shepp-Logan : erreur relative en moyenne quadratique (nombre d'itérations, limité à 10).

Ainsi, ne serait-ce qu'avec 15% de bruit, même si les données sont disponibles sur la moitié de la surface d'observation complète, les résultats obtenus sont déjà largement détériorés.

L'atténuation peut à nouveau être d'un excellent recours, ce que l'on peut vérifier en cas de vitesse trapping (TS2). Les erreurs minimales relatives à cette situation sont présentées et comparées dans le Tableau II.2.14. On trouvera les reconstructions, tracés d'erreurs et profils associés dans les Figures II.2.31 page suivante à II.2.34 page 259.

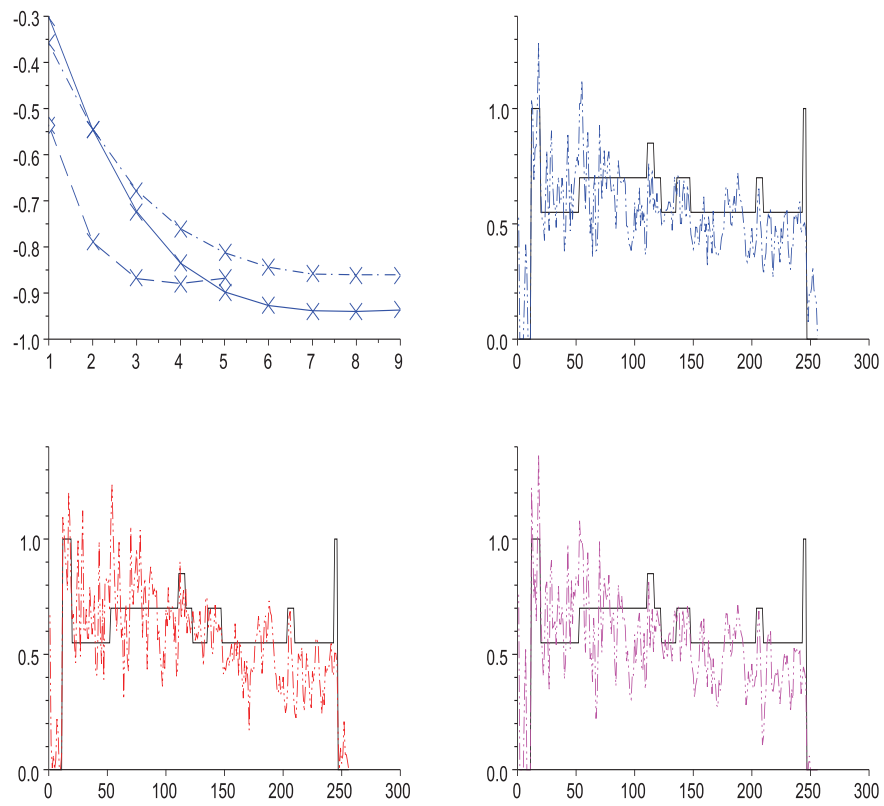
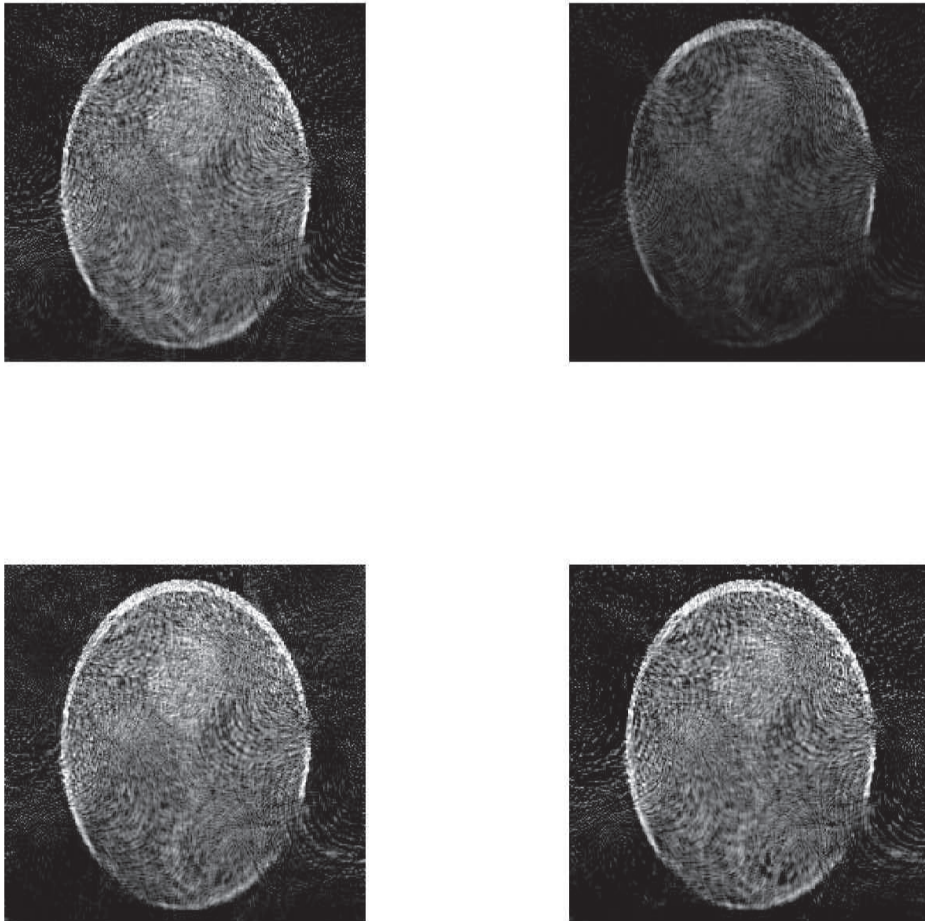


FIGURE II.2.31 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) et 15% de bruit, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue).



BFN	CG	TR	NS
39.1 (8)	42.3 (9)	58.5	41.5 (4)

FIGURE II.2.32 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) et 15% de bruit, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

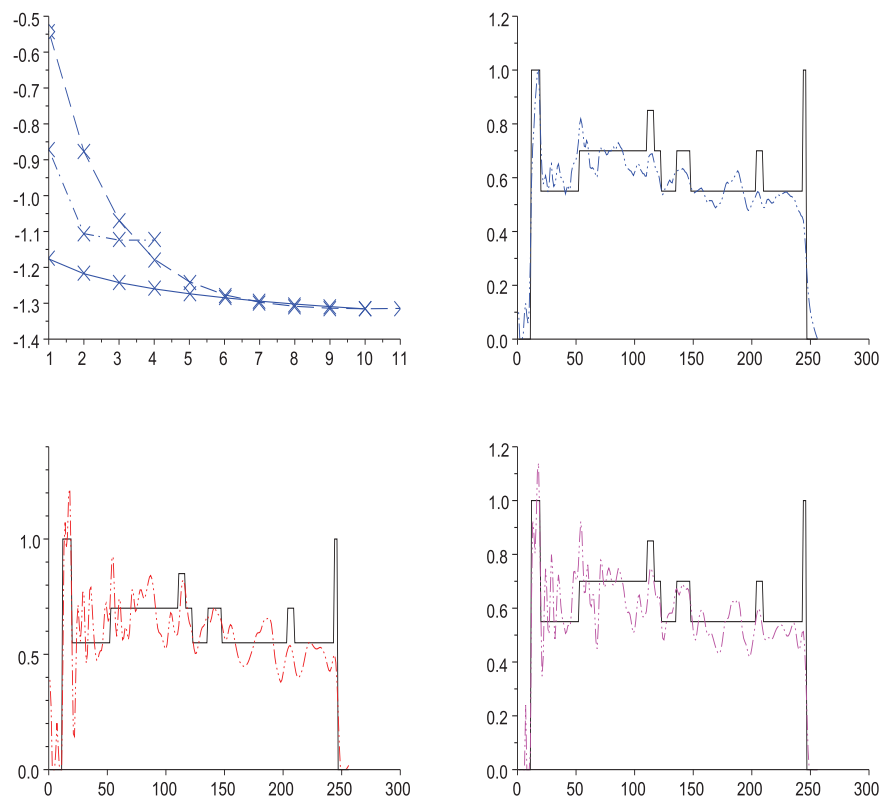
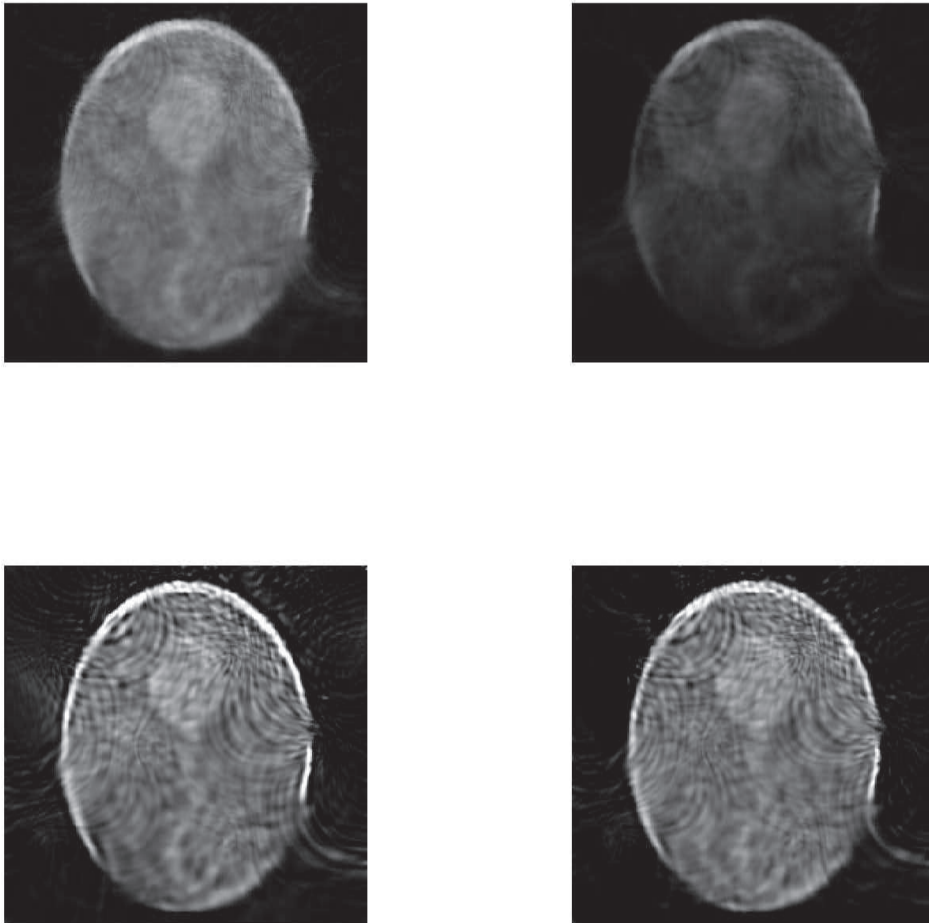


FIGURE II.2.33 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) et 15% de bruit, fantôme de Shepp-Logan, vitesse TS2 et schéma atténué : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue).



BFN	CG	TR	NS
26.8 (10)	32.5 (4)	57.8	26.8 (10)

FIGURE II.2.34 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) et 15% de bruit, fantôme de Shepp-Logan, vitesse TS2 et schéma atténué : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

Configuration	BFN	CG	TR	NS
$\varepsilon = 0$	39.1 (8)	42.3 (9)	58.5	41.5 (4)
$\varepsilon \neq 0$	26.8 (10)	32.5 (4)	57.8	26.8 (10)

TABLEAU II.2.14 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) avec 15% de bruit, fantôme de Shepp-Logan et vitesse TS2 : erreurs relatives en moyenne quadratique (nombre d'itérations, limité à 10).

### II.2.11 En cumulant les tares (II).

On commence par une situation repère : les résultats exposés dans les Figures II.2.35 et II.2.36 sont obtenus à partir de données complètes bruitées et à vitesse constante, mais à l'aide du schéma atténué. Pour rappel et comparaison, le Tableau II.2.15 fournit les erreurs obtenues dans cette situation avec et sans atténuation.

Configuration	BFN	CG	TR	NS
$\varepsilon = 0$	28.8 (4)	35.5 (8)	26.8	26.8 (1)
$\varepsilon \neq 0$	17.6 (10)	19.8 (2)	17.3	17.1 (2)

TABLEAU II.2.15 – Données complètes bruitées de 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante : tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique avec et sans atténuation numérique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

On détériore ensuite la configuration en considérant des données incomplètes seulement fournies sur le demi-cercle supérieur. Les données sont toujours bruitées et la vitesse constante. Voir les Figures II.2.37 et II.2.38.

### II.2.12 En cumulant les tares (III).

Supposons ensuite que *seul un capteur sur deux fournit des données*, que la vitesse des ondes est constante et que le niveau de bruit inclus dans les données est de 15%. On détériore la situation d'observation petit à petit, et l'on compare les résultats obtenus avec et sans atténuation.

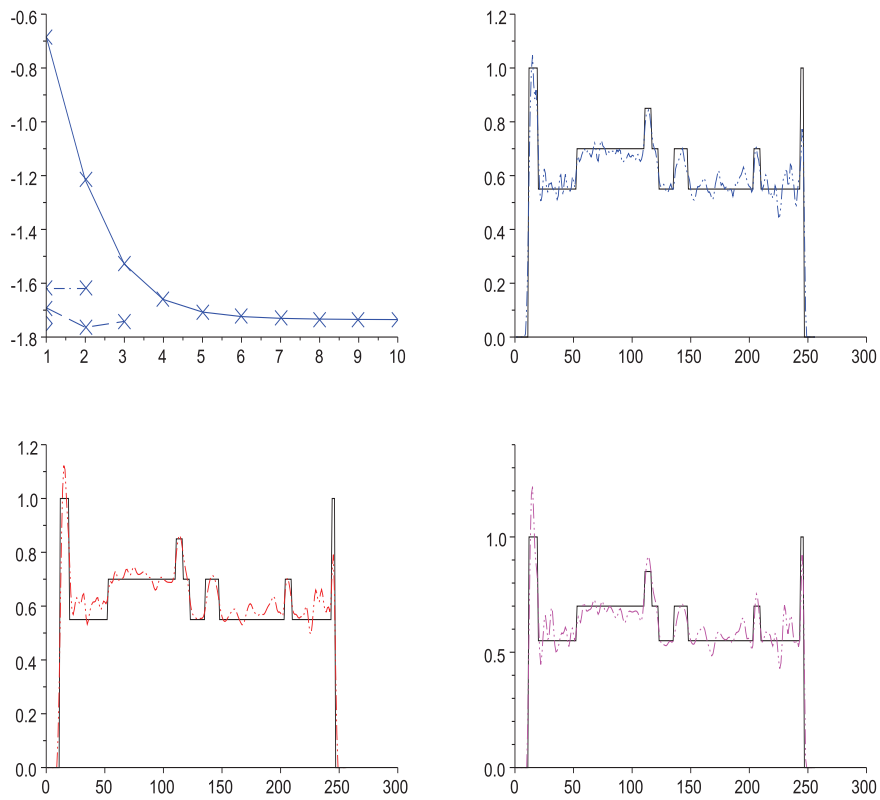
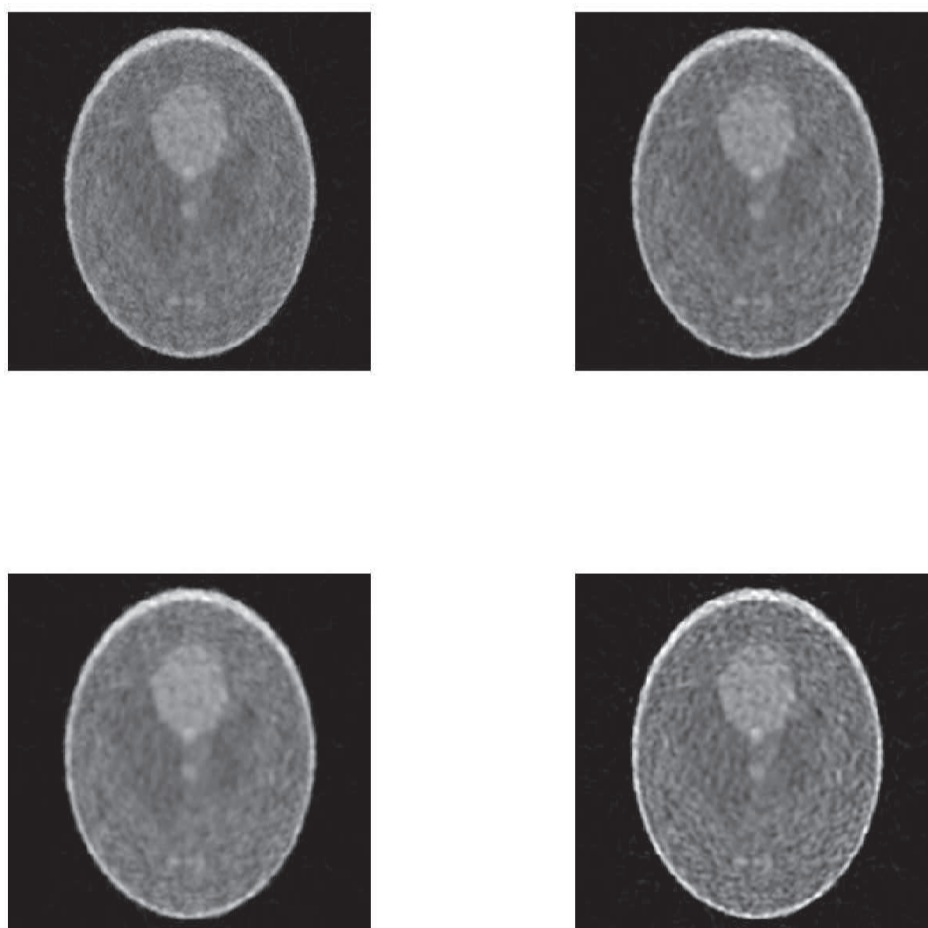


FIGURE II.2.35 – Données complètes bruitées de 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante, avec atténuation numérique : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
17.6 (10)	19.8 (2)	17.3	17.1 (2)

FIGURE II.2.36 – Données complètes bruitées de 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante, avec atténuation numérique : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).



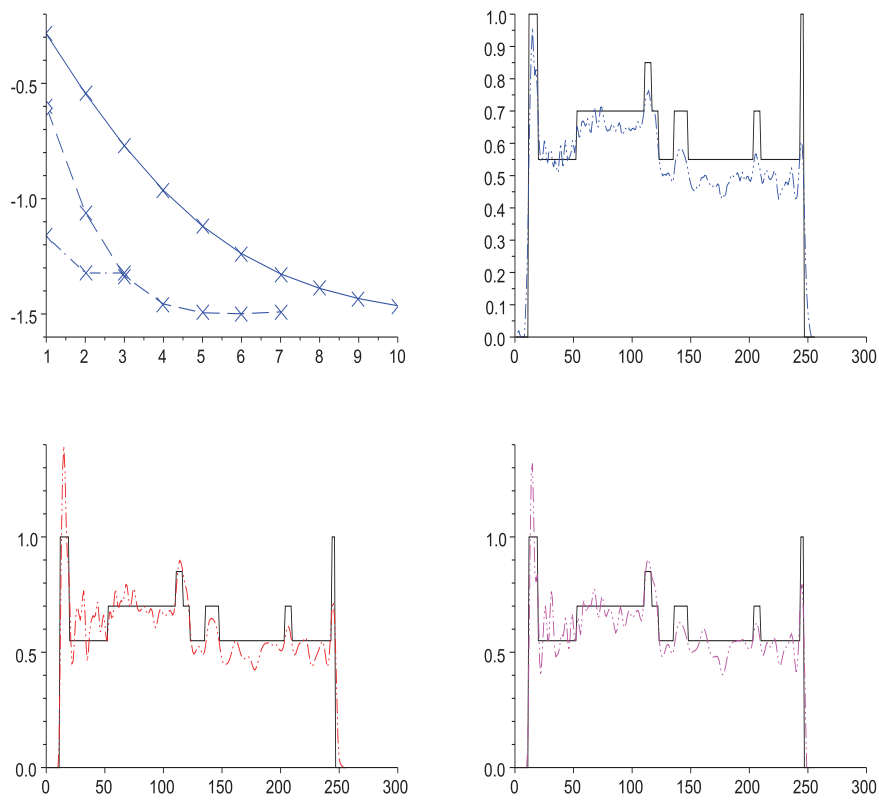
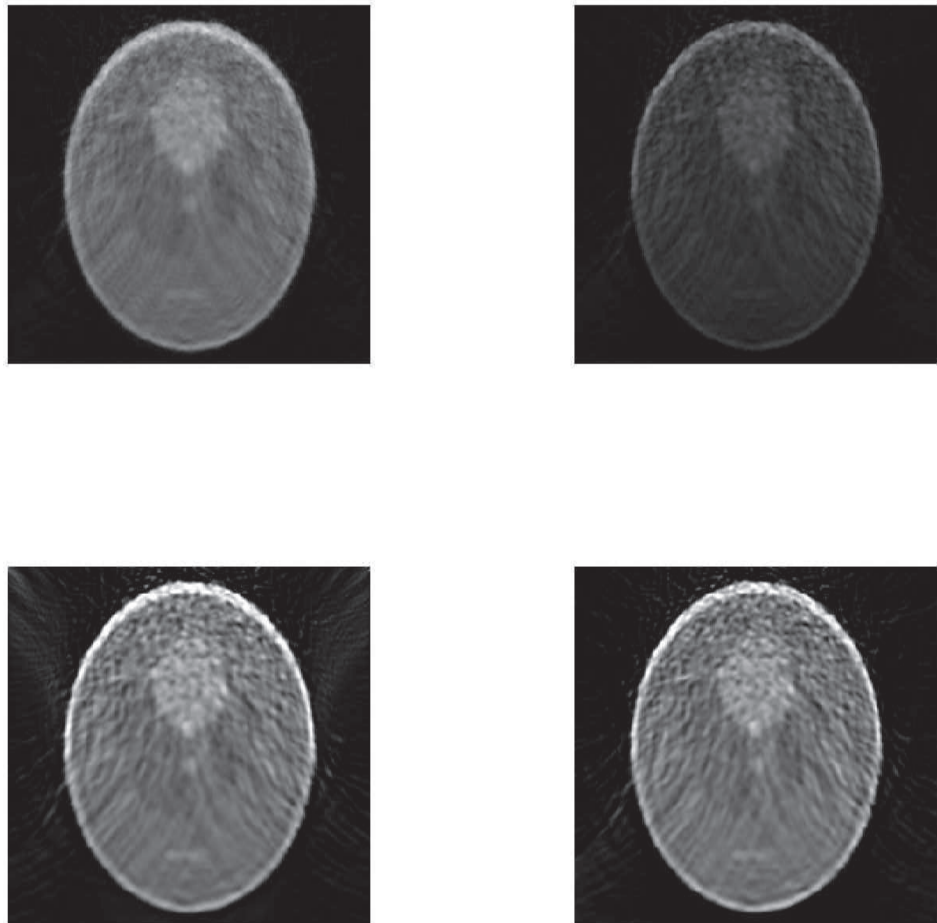


FIGURE II.2.37 – Données complètes bruitées de 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante, avec atténuation numérique : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
23.1 (10)	26.7 (5)	54.5	22.3 (6)

FIGURE II.2.38 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur) bruitées de 15%, fantôme de Shepp-Logan et vitesse constante, avec atténuation numérique : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

Le dernier objet, un crâne, a été choisi dans ces tests afin de considérer un objet de structure plus complexe.

Un premier tableau d'erreur nous servira de repère : on présente avant tout les résultats obtenus avec et sans atténuation numérique lorsque les données sont disposées tout autour du domaine observé, il en résulte les erreurs minimales inscrites dans le Tableau II.2.16 et les reconstructions, tracés d'erreur et profils des Figures II.2.39 page suivante à II.2.42 page 269.

Configuration	BFN	CG	TR	NS
$\varepsilon = 0$	41.9 (4)	53.2 (7)	38.4	38.4 (1)
$\varepsilon \neq 0$	30.4 (10)	29.3 (3)	31.5	31.5 (1)

TABLEAU II.2.16 – Données incomplètes et bruitées (sur le cercle entier, mais avec  $\sigma = 2$ ), fantôme crânien et vitesse constante : tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

Puis on restreint les données au demi-cercle supérieur, et les résultats sont exposés dans la Figure II.2.43 and II.2.44.

Ci-dessous (Tableau II.2.17), on vérifie à nouveau la validité de l'atténuation numérique. Les reconstructions, tracés d'erreur et profils correspondant à ce cas atténué sont représentés dans les Figures II.2.45 page 272 et II.2.46 page 273.

Configuration	BFN	CG	TR	NS
$\varepsilon = 0$	52.5 (8)	58.9 (10)	64.4	54.4 (3)
$\varepsilon \neq 0$	38.4 (10)	34.5 (4)	60.6	31.5 (10)

TABLEAU II.2.17 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur et pour  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien et vitesse constante : tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

Aussi, même si les reconstructions obtenues ne sont pas satisfaisantes, ces situations représentent des conditions réelles qui peuvent être particulièrement défavorables (le niveau de bruit pouvant largement dépasser les 15%,

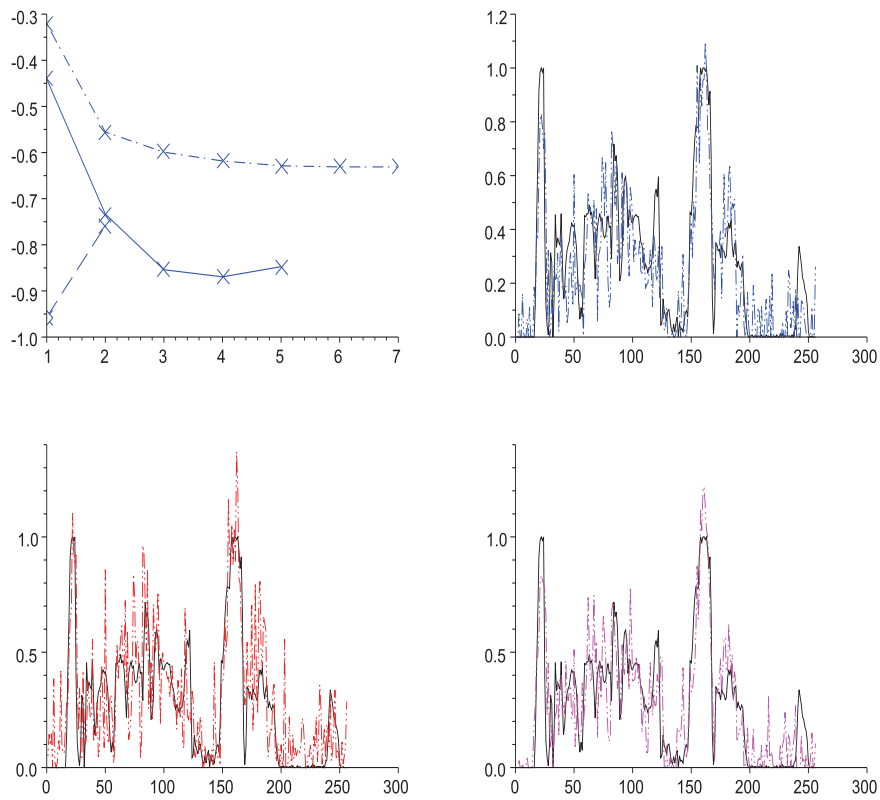
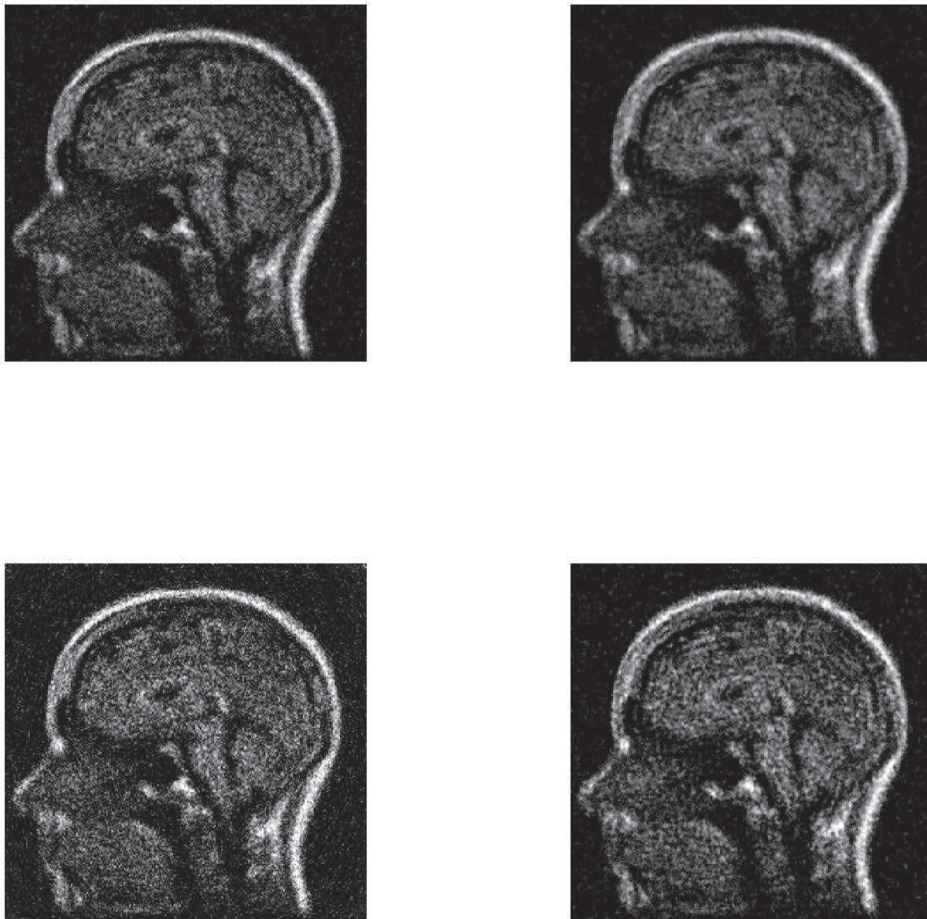


FIGURE II.239 – Données incomplètes (sur le cercle entier, mais avec  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien et vitesse constante : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
41.9 (4)	53.2 (7)	38.4	38.4 (1)

FIGURE II.2.40 – Données incomplètes (sur le cercle entier, mais avec  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien et vitesse constante : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

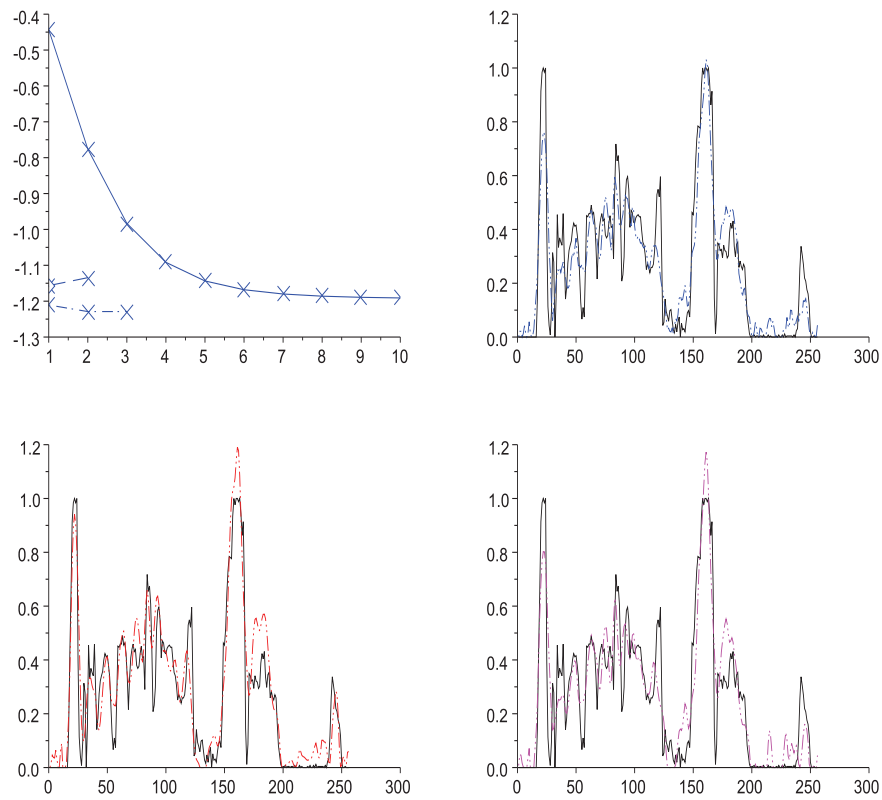
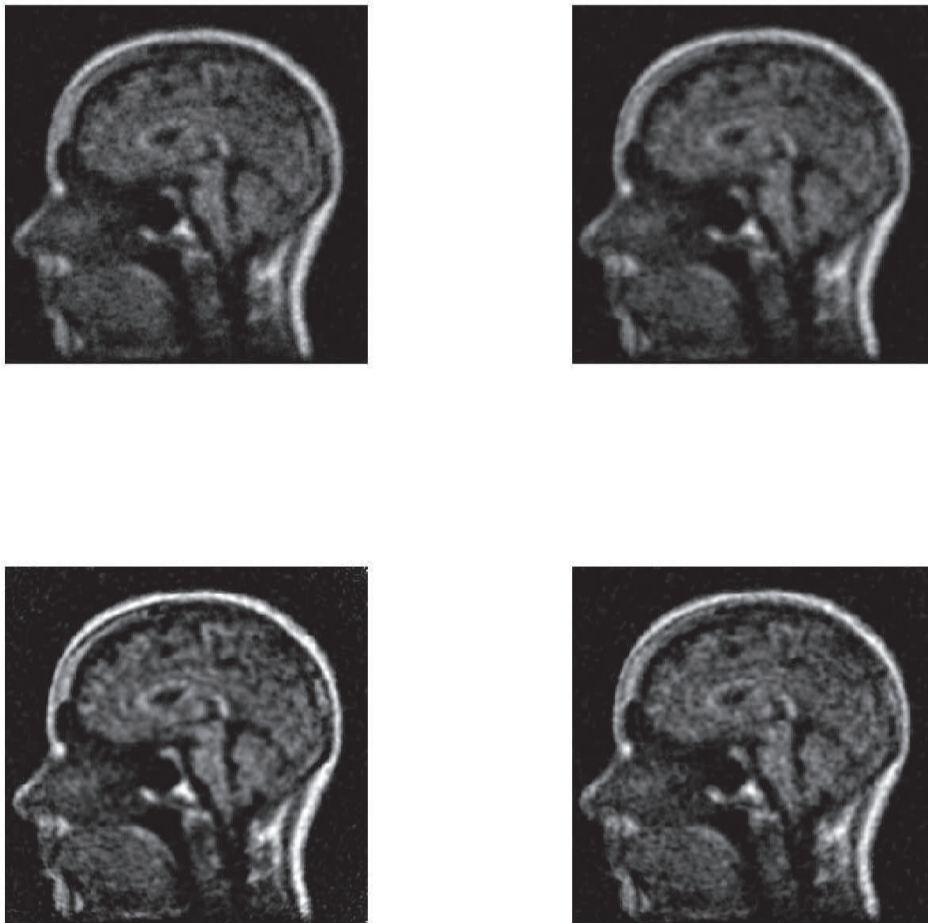


FIGURE II.241 – Données incomplètes (sur le cercle entier, mais avec  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien, vitesse constante et atténuation : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
30.4 (10)	29.3 (3)	31.5	31.5 (1)

FIGURE II.2.42 – Données incomplètes (sur le cercle entier, mais avec  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien, vitesse constante et atténuation : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

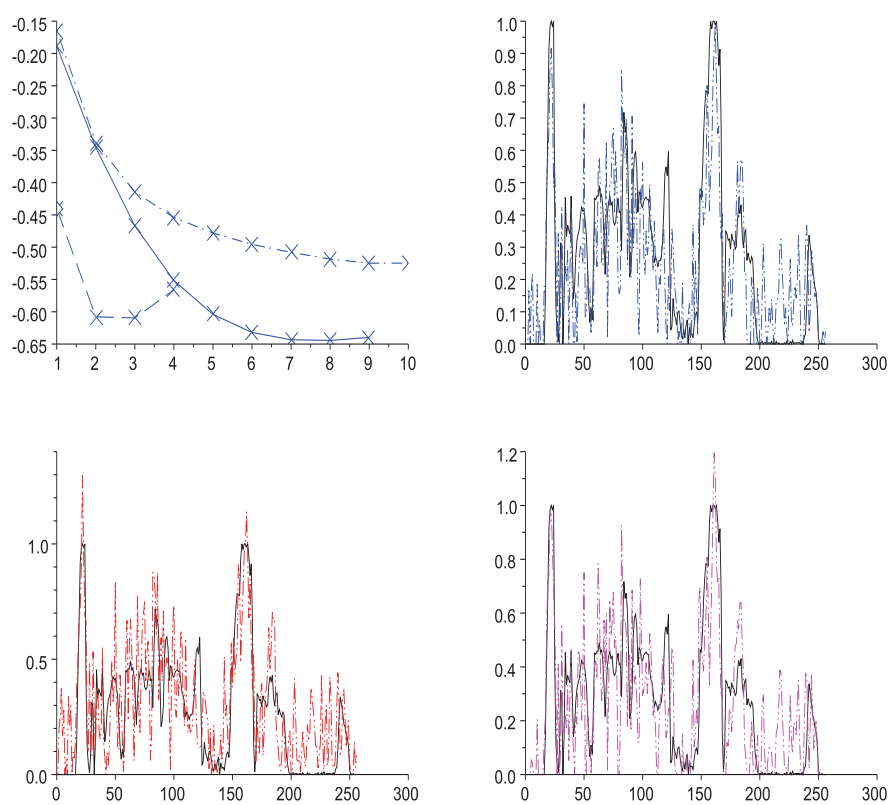
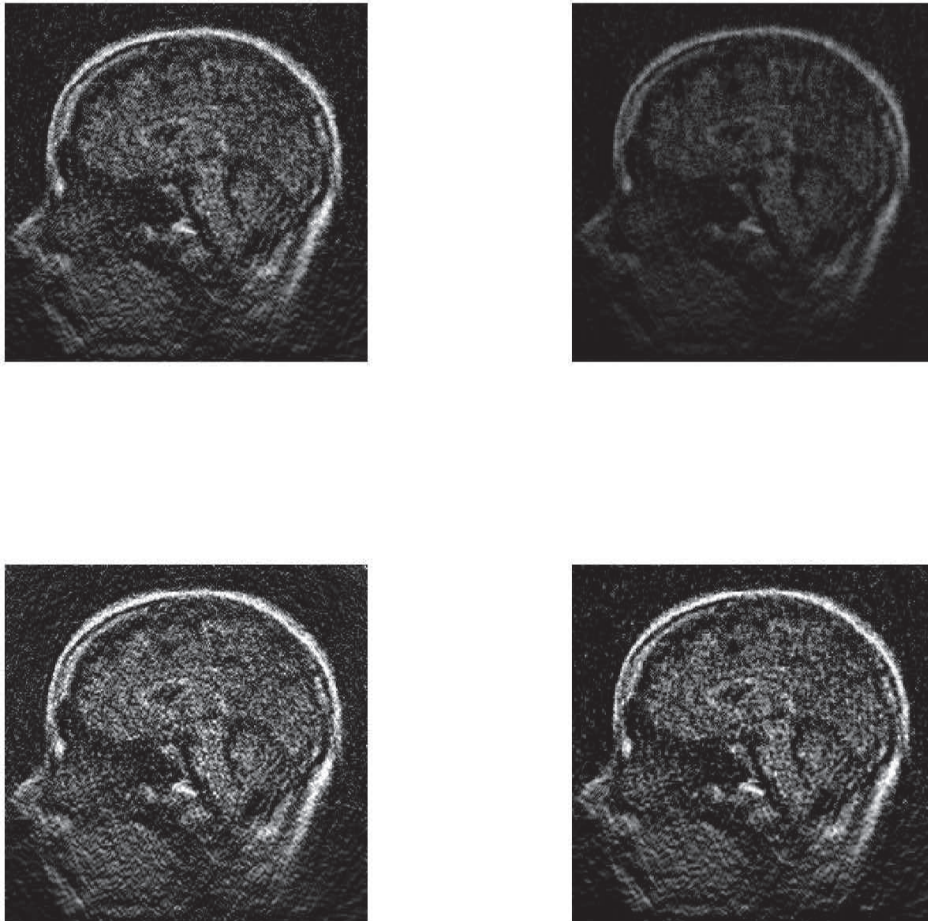


FIGURE II.2.43 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur et pour  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien et vitesse constante : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).





BFN	CG	TR	NS
52.5 (8)	58.9 (10)	64.4	54.4 (3)

FIGURE II.2.44 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur et pour  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien et vitesse constante : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

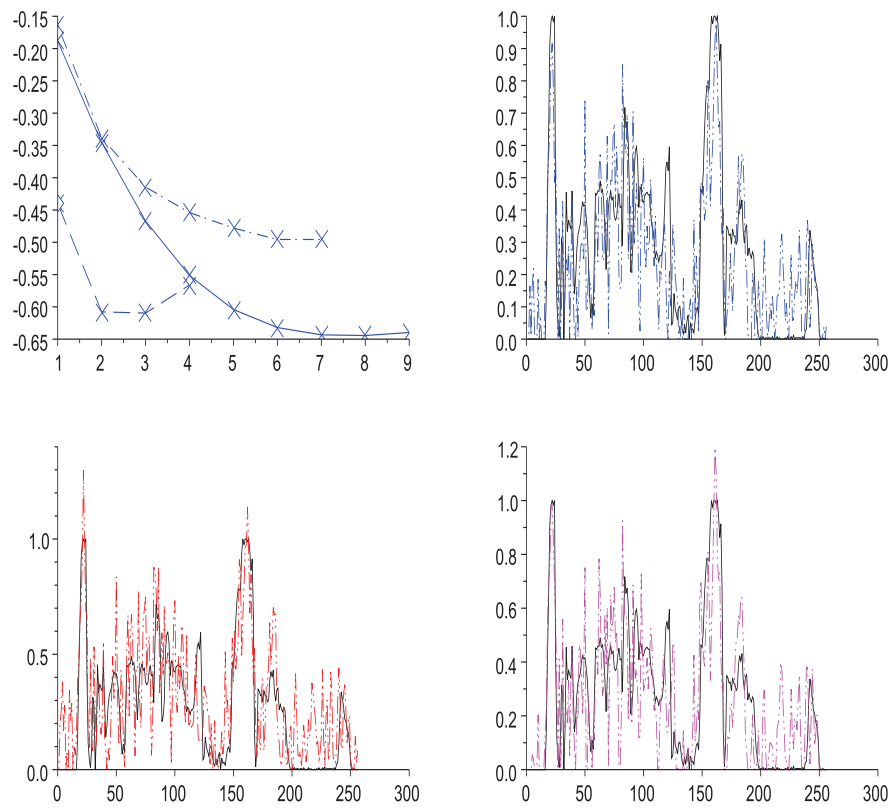
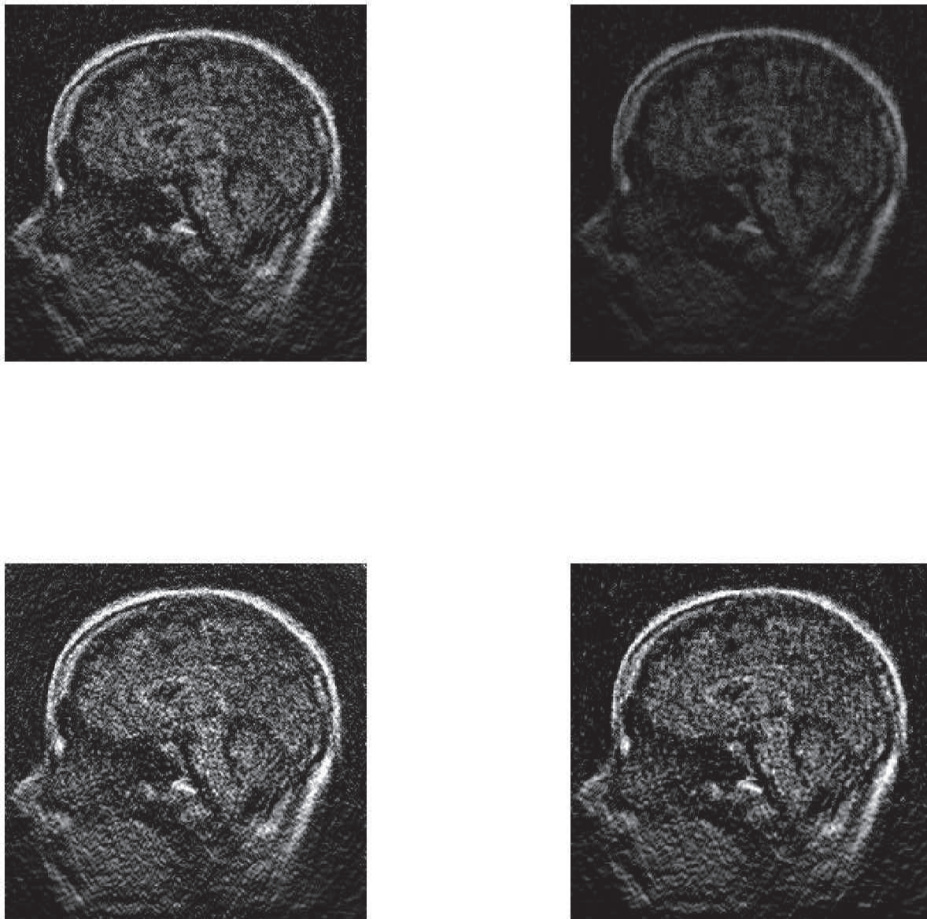


FIGURE II.2.45 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur et pour  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien, vitesse constante et schéma atténué : tracé du logarithme de l'erreur relative en moyenne quadratique (BFN en ligne continue, CG en traits et points et NS en ligne discontinue) et profils verticaux (colonne de pixels centrale, BFN, CG, NS).



BFN	CG	TR	NS
38.4 (10)	34.5 (4)	60.6	31.5 (10)

FIGURE II.2.46 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur et pour  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien, vitesse constante et schéma atténué : reconstructions par BFN (en haut à gauche), TR (en haut à droite), CG (en bas à gauche) et NS (en bas à droite) et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

notamment) et nous permettent de tester la robustesse et les limites de validité des méthodes considérées.

### II.2.13 Compléments

#### Le coefficient d'atténuation

Poursuivons avec une étude concernant l'optimalité du coefficient d'atténuation  $\partial_t^\alpha$ . Le Tableau II.2.18 fournit les erreurs minimales obtenues avec le BFN au terme des dix premières itérations en fonction de la valeur de  $\varepsilon$  dans la situation précédente.

$\varepsilon$	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
Erreur	52.7	49.7	46.8	44.2	42.1	40.9	40.7	41.4	42.9	44.8

TABLEAU II.2.18 – Données incomplètes (sur le demi-cercle supérieur et pour  $\sigma = 2$ ) et bruitées de 15%, fantôme crânien, vitesse constante et schéma atténué : tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique obtenues avec le BFN en 10 itérations.

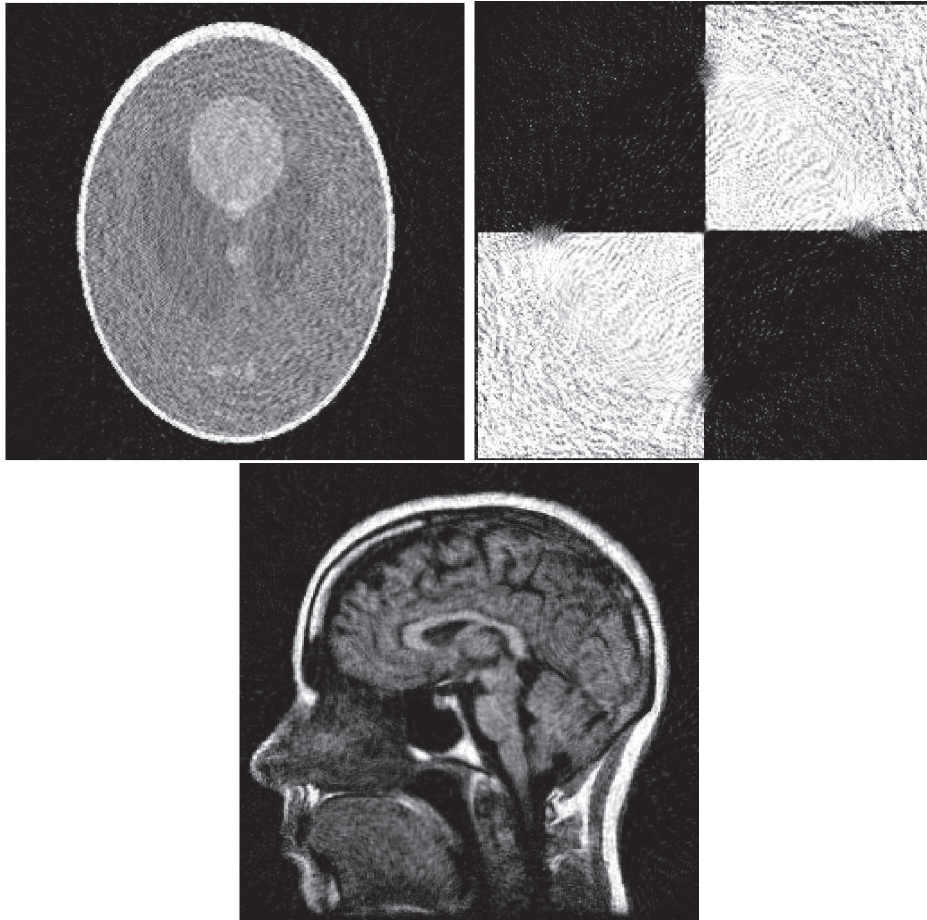
Finalement, le meilleur coefficient (2.2) est très proche de celui obtenu en Sous-section II.2.5 page 246 (2.1), il apparaît donc peu dépendant des conditions d'observation de l'objet.

#### Hybridation du TR et du BFN

Sans surprise, l'hybridation des méthodes proposées fournit des résultats intéressants. Nous en proposons quelques-uns dans les lignes suivantes.

Tout d'abord, la Figure II.2.47 page suivante présente la reconstruction et l'erreur minimale obtenues pour chacun des trois objets avec chacune des vitesses variable en présence d'un bruit de 10% : fantôme de Shepp-Logan et vitesse NT, carrés et vitesse TS1, crâne et vitesse TS2.

La convergence de l'algorithme est particulièrement rapide, et sans perte de qualité. En effet, alors que 10 itérations de BFN ou de NS étaient insuffisantes, l'algorithme hybride converge en quelques itérations, avec une erreur minimale excellente. Ces résultats sont confirmés par les Tableaux d'erreur II.2.19 et II.2.20, où le bruit présent dans les données est de 10



Shepp-Logan et NT	Carrés et TS1	Crâne et TS2
38.4 (TR+BFN(3))	34.5 (TR+BFN(7))	31.5 (TR+BFN(4))

FIGURE II.2.47 – Données complètes et bruitées (10%) : fantôme de Shepp-Logan et vitesse NT, carrés et vitesse TS1, crâne et vitesse TS2. Première ébauche par TR et reconstruction par BFN et tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique (erreur, nombre d'itérations, limité à 10).

et 20% et dans lesquels sont fournis, à titre de comparaison, les résultats obtenables par simple BFN ou TR.

	TR	BFN(3)	TR+BFN(1)
$c \equiv 1$	21,4	19,9	19,3
NT	21,5	20,5	19,3
T1	41,1	28,5(10)	27,8
T2	24	20,7	20,1

TABLEAU II.2.19 – Données complètes et bruitées (10%), fantôme de Shepp-Logan : vitesses NT, TS1 et TS2. Tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique des reconstruction par TR, BFN et hybridation TR+BFN.

	TR	BFN(3)	TR+BFN(1)
$c \equiv 1$	37,4	35,4	35,4
NT	37,2	35,6	35,3
T1	49	45,5	43,7
T2	35	33,9	33,3

TABLEAU II.2.20 – Données complètes et bruitées (20%), fantôme de Shepp-Logan : vitesses NT, TS1 et TS2. Tableau des erreurs relatives en moyenne quadratique des reconstruction par TR, BFN et hybridation TR+BFN.

Deux derniers tests permettent de confirmer l'adaptabilité des méthodes considérée : nous proposons d'une part une reconstruction pour laquelle le modèle à partir duquel les données est atténué et d'autre part un cas où une source extérieure est ajoutée.

Dans le premier cas, les données sont simulées à l'aide d'un modèle thermovisqueux usuel, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{L} = \partial_{tt} - \Delta - \mu \partial_t \Delta,$$

avec  $\mu = 10^{-4}$ , et l'atténuation n'est pas supposée connue. Aussi le modèle utilisé dans les méthodes est non atténué. L'algorithme hybride converge



après une unique itération de BFN et le résultat est présenté dans la Figure II.2.48.

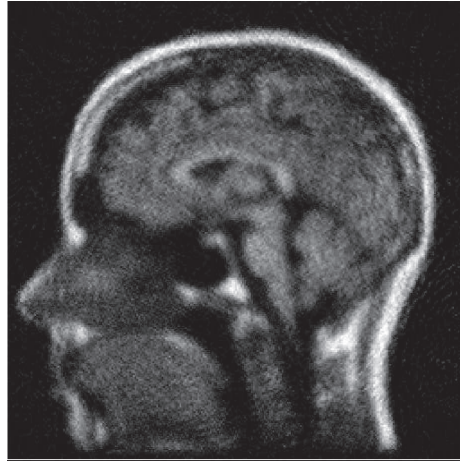


FIGURE II.2.48 – Données complètes et bruitées (10%), données acquises par modèle atténué, méthodes non atténuées, reconstruction par TR+B FN(1) : erreur relative en moyenne quadratique minimale de 29.4%.

Malgré une importante erreur modèle, la reconstruction obtenue permet de distinguer de nombreux niveaux d'intensité, même si la régularisation imposée aux données par le biais de l'atténuation a un effet régularisant, ce qui induit une reconstruction floue.

Le second cas considéré inclut une source d'ondes de pression extérieure à l'objet ainsi qu'au domaine observé. Lors de la génération des données, une source est donc ajoutée à l'objet initial sous la forme d'une fonction indicatrice d'un cercle (situé en haut à droite de l'objet, voir la reconstruction sur la Figure II.2.49 page suivante) et d'une intensité de 30% de celle de l'objet.

Une nouvelle fois, la convergence de l'algorithme hybride est rapide. L'effet de la source extérieure est notable : la technique de reconstruction semble ne pas distinguer entre l'objet et la source extérieure, qui se détériorent donc l'un l'autre.

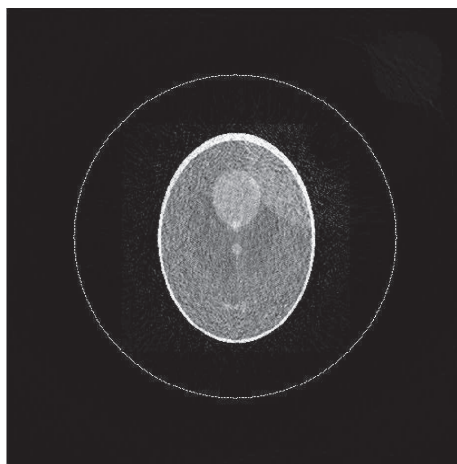


FIGURE II.2.49 – Données complètes et bruitées (10%), données acquises avec source extérieure, reconstruction par TR+BFN(3) : erreur relative en moyenne quadratique minimale de 21.7%.

### II.2.14 Bilan

Comme l'ont constaté d'autres auteurs avant nous (voir [15, 145] notamment), la méthode variationnelle (CG) fournit de bonnes reconstructions en peu d'itérations en comparaison des autres méthodes, mais nécessite de nombreuses itérations avant d'offrir sa convergence, ce qui laisse envisager qu'elle puisse fournir une première ébauche de reconstruction pour une autre méthode. Par ailleurs, le CG apparaît fort robuste vis-à-vis du bruit et de l'incomplétude des données (que ce soit par limitation de l'angle de vue ou par éparpillement).

Dans l'ensemble, le BFN et les NS fournissent des reconstructions équivalentes, toutes deux de bonne qualité, et ce pour un coût similaire. Au final, les reconstructions des NS sont globalement meilleures, mais la méthode se montre moins robuste au bruit et à la restriction de la quantité de capteurs. Quoiqu'il en soit, les NS améliorent nettement le TR en toute situation.

L'atténuation numérique constitue une régularisation intéressante qui permet de compenser partiellement le bruit et l'incomplétude des données, et ce quelle que soit la méthode considérée. Remarquons enfin que cette atténuation artificielle peut nous permettre de stabiliser le BFN dans le cas



de milieux diffusifs tant que la perte d'énergie physique n'excède pas l'artificielle (le changement de signe de l'atténuation permettant de conserver un problème bien posé en rétrograde).

Selon que les données sont complètes ou non, on pourra donc choisir le CG ou le TR pour obtenir une première ébauche, puis utiliser les NS ou le BFN pour reconstruire l'objet (si l'on utilise le BFN, il converge alors une seule itération dans les situations les plus défavorables considérées précédemment).

Rappelons aussi que plusieurs dizaines d'itérations sont nécessaires pour obtenir la meilleure reconstruction de l'objet lorsque les données sont complètes et/ou non bruitées ou que le schéma est atténué. Pour les configurations plus défavorables, considérer une dizaine d'itération est cependant suffisant.



# Conclusion

À partir du problème de la TTA, nous avons défini des méthodes de reconstruction itératives souples et adaptatives, de complexité variée : le *Back and Forth Nudging*, d'implémentation et d'usage simple, une méthode variationnelle et le *Back and Forth SEEK*, plus élaboré. À cette occasion, nous avons mis en évidence une nouvelle classe de méthodes de résolution de problèmes inverses, qui rassemble BFN et BF-SEEK, que sont les *algorithmes de Back and Forth Filtering*. Une formulation commune a en effet émergé pour les méthodes de reconstruction à observateurs itératifs (quel que soit le type d'observateur considéré) dont nous avons suggéré l'usage, ce qui nous a permis de définir un cadre favorable à l'existence et à l'unicité de leurs solutions.

Cette étude nous a révélé l'importance des opérateurs diagonalisables, seuls aptes à ce jour à fournir un cadre au renversement temporel d'équations non réversibles. Nous avons profité de ce cadre pour proposer une nouvelle preuve ainsi qu'une extension d'un théorème de Agranovsky et Kuchment.

Après ces définitions et cette première étude d'existence et unicité, restait à étudier la possible convergence des algorithmes ainsi définis. Nous nous sommes donc intéressé à la stabilisation itérative des systèmes d'évolution réversibles, c'est-à-dire à ceux régis par un opérateur antiadjoint, et nous avons profité d'une caractéristique particulière des équations de Riccati appliquées à ces derniers pour obtenir la stabilité de différents observateurs, dont les classiques nudging et filtre de Kalman, sous la condition usuelle et naturelle d'observabilité.

Si l'hypothèse de réversibilité permet d'obtenir existence et unicité des solutions des algorithmes sans difficulté, elle est de surcroît nécessaire à l'étude de la convergence des algorithmes BFF. Une particularité de ces méthodes est que le modèle  $y$  est considéré comme une contrainte faible, ce qui offre de nombreuses libertés d'usage quant à la modélisation des phénomènes physiques mis en jeu. Nous profitons des conditions de validité larges de ces méthodes pour définir et étudier les BFF dans des conditions d'observation réalistes et alléger les approximations faites sur le modèle : ondes à vitesse variable, possiblement atténuées, données incomplètes...

Par ailleurs, dans le cas particulier du BFN, nous avons prouvé la convergence théorique géométrique de l'algorithme et obtenu un taux de convergence explicite dans un cadre d'observation idéal, lequel est nettement inférieur à celui constaté dans les expérimentations numériques.

Les méthodes de renversement temporel se trouvent donc enrichies de différentes techniques, lesquelles ont par ailleurs fait l'objet d'expérimentations comparatives et parmi lesquelles nous pouvons recenser : le renversement temporel usuel (TR), sa version itérative faisant appel aux séries de Neumann (NS), la formulation en horizon de temps infini au moyen de solutions explicites de Agranovsky et Kuchment, l'usage du filtre de Kalman suivi d'un renversement temporel (KF) et les Filtrages Directs et Rétrogrades, les BFF (BFN et BF-SEEK).

Les expérimentations menées montrent que les techniques de reconstruction introduites offrent une alternative intéressante aux méthodes usuelles en TTA : leur simplicité de mise en œuvre (dans le cas du BFN), leur souplesse d'usage (vis-à-vis des conditions d'observation, du type de modèle pris en compte, etc.) et leur robustesse n'entravent en rien la qualité des reconstructions obtenues. Les BFF offrent en effet des erreurs relatives au moins comparables aux meilleures techniques de reconstruction existant à ce jour, à savoir le Renversement Temporel et sa version itérée.

L'usage de filtres, tels le filtre de Kalman et le filtre SEEK, peut en outre permettre de tenir compte d'une éventuelle connaissance de la qualité des capteurs ou des approximations faites sur le modèle. Cette possibilité nécessite cependant des réglages précis en ce qui concerne les paramètres des

filtres. Avec le BFN, cette difficulté est écartée puisque l'unique paramètre est défini selon des critères strictement numériques dont nous avons prouvé la validité.

Toujours du point de vue de l'implémentation des méthodes, nous avons mis en évidence les effets remarquables de l'usage de l'atténuation numérique du schéma de discrétisation, tant du point de vue de la régularisation de la reconstruction en cas de données bruitées que de la compensation de conditions d'observation défavorables. Dans le cas du CG, cette régularisation s'est montrée plus intéressante que la régularisation de type Tykhonov qui est aussi étudiée. Cette atténuation numérique peut en outre permettre de considérer une atténuation (physique, celle-ci) dans le modèle, puisqu'elle ferait du problème rétrograde un problème bien posé tant que l'atténuation physique n'excéderait pas la numérique. Jusqu'alors, les tests relatifs à cette situation montrent cependant un excès de régularisation que nous n'avons pas su combattre.

L'hybridation des méthodes considérées s'est montrée très pertinente puisque les résultats obtenus sont de qualité équivalente à ceux des meilleures méthodes testées pour une convergence en quelques itérations, même lorsque plus d'une centaine d'itérations était nécessaire pour obtenir une telle convergence.

Si nos preuves de convergence du BFN nécessitent soit vitesse constante et observations complètes, soit satisfaction de l'hypothèse d'observabilité, nous avons prouvé que cet algorithme reste efficace dans des situations beaucoup plus générales. Outre sa robustesse au bruit et à l'incomplétude des données et malgré le meilleur taux de convergence du CG et des NS, le comportement asymptotique du BFN et l'erreur relative minimale atteinte sont meilleurs dans les situations d'observation les plus défavorables. Si les complexités du BFN et des NS sont comparables, ces dernières fournissent une meilleure reconstruction en général, mais apparaissent moins robustes que le BFN.

Le taux de convergence de la méthode variationnelle justifie qu'elle puisse fournir une première ébauche de reconstruction en quelques itérations, d'autant plus qu'elle reste intéressante lorsque les données sont incomplètes.

Avec l'augmentation de la dimension d'espace, nous pouvons nous attendre à un coût de calcul excessif en ce qui concerne les méthodes de filtrage. Si nous avons anticipé cette difficulté avec l'usage d'un filtre de rang réduit, cela est apparu insuffisant pour pouvoir mener à bien des tests en dimension 2 dans le cas du BF-SEEK. Nous avons envisagé deux principales solutions, à savoir l'usage de méthodes hybrides et de *Perfectly Matched Layers*. Nous avons implémenté ces dernières sans entièrement parvenir à les adapter à notre problème. Des travaux en cours devraient permettre une mise en œuvre rapide de ces méthodes, en vue de laquelle l'inadaptation des PML aux schémas d'ordre 2 (en temps) doit être interprétée et corrigée.

Étant donnés les résultats que nous avons obtenus, l'étude théorique des algorithmes BFF demande principalement à être étendue à des modèles non linéaires et, en ce qui concerne plus particulièrement l'étude de convergence de ces algorithmes, une extension à des modèles non réversibles est souhaitable. Cependant, même dans le cas linéaire, les expérimentations numériques laissent penser que le taux de convergence théorique explicite obtenu n'est pas optimal et peut être précisé.

Enfin, nous avons proposé deux possibilités d'usage complémentaires des BFF : soit l'erreur d'observation est suffisamment connue pour en tenir compte et définir un filtre de type Kalman (éventuellement de rang réduit, selon les capacités de calcul disponibles), soit ce n'est pas le cas et le BFN constitue une alternative dont on sait caractériser la convergence. Afin d'approfondir l'étude comparative menée sur le BFN et le BF-SEEK, il serait intéressant d'effectuer des tests avec données réelles, munis d'informations sur la précision des capteurs.

# Bibliographie

- [1] *Biomedical optoacoustics*. Proceedings of SPIE, 2000–2011.
- [2] *Inverse Problems*, volume 23. 2007.
- [3] M. Agranovsky, C. Berenstein, and P. Kuchment. Approximation by spherical waves in  $L^p$ -spaces. *Journal of Geometric Analysis, Springer*, 6(3) :365–383, 1996.
- [4] M. Agranovsky, D. Finch, and P. Kuchment. Range conditions for a spherical mean transform. *Arxiv preprint arXiv : 0902.4272*, 2009.
- [5] M. Agranovsky and P. Kuchment. Uniqueness of reconstruction and an inversion procedure for thermoacoustic and photoacoustic tomography with variable sound speed. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :2089, 2007.
- [6] M. Agranovsky, P. Kuchment, and L. Kunyansky. On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography. *Arxiv preprint arXiv : 0706.1303*, 2007.
- [7] M. Agranovsky, P. Kuchment, and E.T. Quinto. Range descriptions for the spherical mean radon transform. *Journal of Functional Analysis, Elsevier*, 248(2) :344–386, 2007.
- [8] M.L. Agranovsky and E.T. Quinto. Injectivity sets for the radon transform over circles and complete systems of radial functions. *Journal of Functional Analysis, New York, Academic Press*, 139(2) :383–414, 1996.

- [9] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. École polytechnique, 2005.
- [10] G. Ambartsoumian and P. Kuchment. On the injectivity of the circular radon transform. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 21 :473, 2005.
- [11] G. Ambartsoumian and P. Kuchment. A range description for the planar circular radon transform. *SIAM journal on mathematical analysis, [Philadelphia] Society for Industrial and Applied Mathematics*, 38(2) :681, 2007.
- [12] H. Ammari. *An introduction to mathematics of emerging biomedical imaging*, volume 62. Springer Verlag, 2009.
- [13] H. Ammari, E. Bonnetier, Y. Capdeboscq, M. Tanter, M. Fink, et al. Electrical impedance tomography by elastic deformation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68(6) :1557–1573, 2008.
- [14] H. Ammari, E. Bossy, V. Jugnon, and H. Kang. Mathematical modeling in photoacoustic imaging of small absorbers. *SIAM review*, 52(4) :677, 2010.
- [15] H. Ammari, E. Bretin, V. Jugnon, and A. Wahab. Photoacoustic imaging for attenuating acoustic media. *Mathematical modeling in biomedical imaging II, Springer*, pages 57–84, 2012.
- [16] M.A. Anastasio, J. Zhang, D. Modgil, and P.J.L. Rivière. Application of inverse source concepts to photoacoustic tomography. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S21, 2007.
- [17] M.A. Anastasio, J. Zhang, X. Pan, Y. Zou, G. Ku, and L.V. Wang. Half-time image reconstruction in thermoacoustic tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 24(2) :199–210, 2005.
- [18] M.A. Anastasio, J. Zhang, E.Y. Sidky, Y. Zou, D. Xia, and X. Pan. Feasibility of half-data image reconstruction in 3-d reflectivity tomography with a spherical aperture. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 24(9) :1100–1112, 2005.
- [19] L.E. Andersson. On the determination of a function from spherical averages. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19 :214, 1988.



- [20] V.G. Andreev, A.A. Karabutov, and A.A. Oraevsky. Detection of ultrawide-band ultrasound pulses in optoacoustic tomography. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 50(10) :1383–1390, 2003.
- [21] R.A. Anthes. Data assimilation and initialization of hurricane prediction models. *Journal of Atmospheric Sciences*, 31 :702–719, 1974.
- [22] D. Auroux. *Etude de différentes méthodes d'assimilation de données pour l'environnement*. PhD thesis, Université de Nice, 2006.
- [23] D. Auroux. The Back and Forth Nudging algorithm applied to a Shallow water model, comparison and hybridization with the 4D-VAR. *International journal for numerical methods in fluids*, 61(8) :911–929, 2009.
- [24] D. Auroux and J. Blum. Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems. *Comptes Rendus Mathématique*, 340(12) :873–878, 2005.
- [25] D. Auroux and J. Blum. The back and forth nudging algorithm for oceanographic data assimilation. *Proc. WMODA*, 5 :273–1, 2009.
- [26] D. Auroux, J. Blum, et al. A nudging-based data assimilation method : the back and forth nudging (bfm) algorithm. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15 :305–319, 2008.
- [27] D. Auroux, J. Blum, and M. Nodet. Diffusive back and forth nudging algorithm for data assimilation. *Comptes Rendus Mathématique*, 2011.
- [28] D. Auroux and S. Bonnabel. Symmetry-based observers for some water-tank problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(5) :1046–1058, 2011.
- [29] D. Auroux and M. Nodet. The Back and Forth Nudging algorithm for data assimilation problems : theoretical results on transport equations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 18(2) :318–342, 2012.
- [30] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Un exemple d'utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation de problèmes

- hyperboliques. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, pages 11–31, 1988.
- [31] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30 :1024, 1992.
- [32] A.G. Bell. *On the production and reproduction of sound by light*. 1880.
- [33] A. Berrington de Gonzalez, M. Mahesh, K.P. Kim, M. Bhargavan, R. Lewis, F. Mettler, and C. Land. Projected cancer risks from computed tomographic scans performed in the united states in 2007. *Archives of internal medicine, Am. Med. Assoc.*, 169(22) :2071, 2009.
- [34] L. Bers, F. John, and M. Schechter. *Partial differential equations*. Interscience Publishers, 1964.
- [35] E. Blayo, J. Verron, and J.M. Molines. Assimilation of TOPEX-POSEIDON altimeter data into a circulation model of the North Atlantic. *Journal of geophysical research*, 99(C12) :24691–24, 1994.
- [36] M. Bocquet. Introduction aux principes et méthodes de l’assimilation de données en géophysique. *Notes de cours de l’École Nationale Supérieure des Techniques Avancées*, 2005.
- [37] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon. Invariant asymptotic observers. *Arxiv preprint math/0612193*, 2006.
- [38] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon. A non-linear symmetry-preserving observer for velocity-aided inertial navigation. In *American Control Conference, 2006*, pages 2910–2914. IEEE, 2006.
- [39] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon. Symmetry-preserving observers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(11) :2514–2526, 2008.
- [40] S. Bonnabel, P. Martin, P. Rouchon, et al. Groupe de lie et observateur non-linéaire. In *Conférence Internationale Francophone d’Automatique, Bordeaux, France, 2006*.
- [41] X. Bonnefond. *Contributions à la tomographie thermoacoustique. Modélisation et inversion*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2010.

- [42] X. Bonnefond and S. Marinescu. Application of a nudging technique to thermoacoustic tomography. *Inverse Problems and Imaging. Arxiv preprint : 1112.0654*, Accepté, 2011.
- [43] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse problems*, 21 :1087, 2005.
- [44] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. *Meteorological training course lecture series. ECMWF*, 2002.
- [45] T. Bowen. Radiation-induced thermoacoustic soft tissue imaging. In *1981 Ultrasonics Symposium*, pages 817–822. IEEE, 1981.
- [46] T. Bowen. Radiation-induced thermoacoustic imaging, May 31 1983. US Patent 4,385,634.
- [47] D.J. Brenner, C.D. Elliston, E.J. Hall, and W.E. Berdon. Estimated risks of radiation-induced fatal cancer from pediatric CT. *American Journal of Roentgenology, Am. Roentgen Ray. Soc.*, 176(2) :289–296, 2001.
- [48] D.J. Brenner and E.J. Hall. Computed tomography - an increasing source of radiation exposure. *New England Journal of Medicine, Mass Medical Soc*, 357(22) :2277–2284, 2007.
- [49] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, 1983.
- [50] P. Burgholzer, J. Bauer-Marschallinger, H. Grün, M. Haltmeier, and G. Paltauf. Temporal back-projection algorithms for photoacoustic tomography with integrating line detectors. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S65, 2007.
- [51] P. Burgholzer, H. Grün, M. Haltmeier, R. Nuster, and G. Paltauf. Compensation of acoustic attenuation for high-resolution photoacoustic imaging with line detectors. In *Proc. SPIE*, volume 6437, page 643724, 2007.
- [52] P. Burgholzer, C. Hofer, G. Paltauf, M. Haltmeier, and O. Scherzer. Thermoacoustic tomography with integrating area and line detectors.

- Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 52(9) :1577–1583, 2005.
- [53] P. Burgholzer, G.J. Matt, M. Haltmeier, and G. Paltauf. Exact and approximative imaging methods for photoacoustic tomography using an arbitrary detection surface. *Phys. Rev. E, American Physical Society*, 75 :046706, 2007.
- [54] N. Burq. Contrôlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers. *Asymptotic Analysis*, 14(2) :157, 1997.
- [55] N. Burq and P. Gérard. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(7) :749–752, 1997.
- [56] N. Burq and P. Gérard. *Contrôle optimal des équations aux dérivées partielles*. École polytechnique, Département de mathématiques, 2003.
- [57] I.G. Calasso, W. Craig, and G.J. Diebold. Photoacoustic point source. *Physical review letters, APS*, 86(16) :3550–3553, 2001.
- [58] S.S. Chaudhary, R.K. Mishra, A. Swarup, and J.M. Thomas. Dielectric properties of normal & malignant human breast tissues at radiowave & microwave frequencies. *Indian journal of biochemistry & biophysics*, 21(1) :76, 1984.
- [59] G. Chen. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17 :66, 1979.
- [60] W.F. Cheong, S.A. Prahl, and A.J. Welch. A review of the optical properties of biological tissues. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 26(12) :2166–2185, 1990.
- [61] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1982.
- [62] C. Clason and M.V. Klibanov. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1) :1, 2010.
- [63] D.L. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer Verlag, 1998.

- [64] W.A. Cooper, T.W. Schlatter, T. Gal-Chen, and D.B. Parsons. *The analysis of observations with applications in atmospheric science*. NCARhttp : //www.asp.ucar.edu/colloquium/1992/notes/part1/, 1992.
- [65] J.A. Copland, M. Eghtedari, V.L. Popov, N. Kotov, N. Mamedova, M. Motamedi, A.A. Oraevsky, et al. Bioconjugated gold nanoparticles as a molecular based contrast agent : implications for imaging of deep tumors using optoacoustic tomography. *Mol. Imaging Biol*, 6(5) :341–349, 2004.
- [66] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics, Vol. II. Partial differential equations. Third edition*. Interscience publishers. John Wiley & Sons, 1962.
- [67] B.T. Cox, S.R. Arridge, and P.C. Beard. Photoacoustic tomography with a limited-aperture planar sensor and a reverberant cavity. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S95, 2007.
- [68] R.F. Curtain and G. Weiss. Exponential stabilization of well-posed systems by colocated feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(1) :273, 2007.
- [69] R.F. Curtain and H.J. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21. Springer, 1995.
- [70] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 8. Évolution : semi-groupe, variationnel*. Masson, Paris, 1988.
- [71] H.C. Davies and R.E. Turner. Updating prediction models by dynamical relaxation : an examination of the technique. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 103(436) :225–245, 1977.
- [72] G.J. Diebold, M.I. Khan, and S.M. Park. Photoacoustic "signatures" of particulate matter : optical production of acoustic monopole radiation. *Science, American Association for the Advancement of Science*, 250(4977) :101, 1990.
- [73] G.J. Diebold and M.T. O'Connor. Chemical amplification of optoacoustic signals. *Nature Publishing Group*, 1983.

- [74] G.J. Diebold and T. Sun. Generation of ultrasonic waves from a layered photoacoustic source. *Nature, Nature Publishing Group*, 355(6363) :806–808, 1992.
- [75] G.J. Diebold, T. Sun, and M.I. Khan. Photoacoustic monopole radiation in one, two, and three dimensions. *Physical review letters, APS*, 67(24) :3384–3387, 1991.
- [76] F.A. Duck. *Physical properties of tissue : a comprehensive reference book*. Academic Pr, 1990.
- [77] J.M.C. Duhamel. Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques. *Journal de l'École Polytechnique*, 15 :1–57, 1837.
- [78] M.A. Eghtedari, J.A. Copland, V.L. Popov, N.A. Kotov, M. Motamedi, and A.A. Oraevsky. Bioconjugated gold nanoparticles as a contrast agent for detection of small tumors. In *Proceedings of SPIE*, volume 4960, page 76, 2003.
- [79] Y.V. Egorov and M.A. Shubin. Linear partial differential equations. foundations of the classical theory. *Itoji Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya"*, *All-Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences*, 30 :5–255, 1988.
- [80] L. Ehrenpreis. *The universality of the Radon transform*. Oxford University Press, USA, 2003.
- [81] R.O. Esenaliev, I.V. Larina, K.V. Larin, D.J. Deyo, M. Motamedi, and D.S. Prough. Optoacoustic technique for noninvasive monitoring of blood oxygenation : a feasibility study. *Applied optics, Optical Society of America*, 41(22) :4722–4731, 2002.
- [82] R.O. Esenaliev, Y.Y. Petrov, O. Hartrumpf, D.J. Deyo, and D.S. Prough. Continuous, noninvasive monitoring of total hemoglobin concentration by an optoacoustic technique. *Applied optics, Optical Society of America*, 43(17) :3401–3407, 2004.
- [83] G. Evans, J.M. Blackledge, and P. Yardley. *Analytic methods for partial differential equations*. Springer Verlag, 2000.

- [84] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.
- [85] J.A. Fawcett. Inversion of n-dimensional spherical averages. *SIAM Journal on Applied Mathematics, JSTOR*, pages 336–341, 1985.
- [86] D. Finch et al. Trace identities for solutions of the wave equation with initial data supported in a ball. *Mathematical methods in the applied sciences, Wiley Online Library*, 28(16) :1897–1917, 2005.
- [87] D. Finch, M. Haltmeier, et al. Inversion of spherical means and the wave equation in even dimensions. *Arxiv preprint math/0701426*, 2007.
- [88] D. Finch, S.K. Patch, and Rakesh. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 35 :1213, 2004.
- [89] D. Finch and Rakesh. The range of the spherical mean value operator for functions supported in a ball. *Inverse Problems*, 22 :923–38, 2006.
- [90] D. Finch and Rakesh. Recovering a function from its spherical mean values in two and three dimensions. In L.H. Wang, editor, *Photoacoustic Imaging and Spectroscopy*. CRC Press, 2009.
- [91] M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 39(5) :555–566, 1992.
- [92] B.D. Fornage, X. Jin, M. Xu, K.K. Hunt, and L.V. Wang. Thermoacoustic and photoacoustic tomography of thick biological tissues toward breast imaging. *Technology in cancer research & treatment*, 4(5), 2005.
- [93] M.H. Forouzanfar, K.J. Foreman, A.M. Delossantos, R. Lozano, A.D. Lopez, C.J.L. Murray, and M. Naghavi. Breast and cervical cancer in 187 countries between 1980 and 2010 : a systematic analysis. *The Lancet, Elsevier*, 2011.
- [94] K.R. Foster. Thermal and nonthermal mechanisms of interaction of radio-frequency energy with biological systems. *Plasma Science, IEEE Transactions on*, 28(1) :15–23, 2000.

- [95] M.P. Fronheiser, S.A. Ermilov, H.P. Brecht, A. Conjusteau, R. Su, K. Mehta, and A.A. Oraevsky. Real-time optoacoustic monitoring and three-dimensional mapping of a human arm vasculature. *Journal of biomedical optics*, 15 :021305, 2010.
- [96] B. Gebauer and O. Scherzer. Impedance-acoustic tomography. *Siam J. Appl. Math.*, 69(2) :565–576, 2008.
- [97] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Communications in partial differential equations*, 16(11) :1761–1794, 1991.
- [98] H. Grün, G. Paltauf, M. Haltmeier, and P. Burgholzer. Photoacoustic tomography using a fiber based fabry-perot interferometer as an integrating line detector and image reconstruction by model-based time reversal method. In *European Conference on Biomedical Optics*. Optical Society of America, 2007.
- [99] B.Z. Guo and H.J. Zwart. Riesz spectral systems. *En ligne*, 2001.
- [100] V.E. Gusev, A.A. Karabutov, and K. Hendzel. *Laser optoacoustics*. American Institute of Physics, 1993.
- [101] G. Haine and K. Ramdani. Observateurs itératifs en horizon fini. application à la reconstruction de données initiales pour des EDP d'évolution. *Journal Europeen des Systemes Automatisés-JESA-APII*, 45(7) :715, 2011.
- [102] M. Haltmeier, O. Scherzer, P. Burgholzer, R. Nuster, G. Paltauf, and N. Bellomo. Thermoacoustic tomography and the circular radon transform : exact inversion formula. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Singapore ; Teaneck, NJ : World Scientific*, 17(4) :635, 2007.
- [103] M. Haltmeier, O. Scherzer, P. Burgholzer, and G. Paltauf. Thermoacoustic computed tomography with large planar receivers. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 20 :1663, 2004.
- [104] M. Haltmeier, O. Scherzer, and G. Zangerl. A reconstruction algorithm for photoacoustic imaging based on the nonuniform FFT. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 28(11) :1727–1735, 2009.



- [105] M. Haltmeier, T. Schuster, and O. Scherzer. Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry. *Mathematical methods in the applied sciences, Wiley Online Library*, 28(16) :1919–1937, 2005.
- [106] M. Haltmeier and G. Zangerl. Spatial resolution in photoacoustic tomography : effects of detector size and detector bandwidth. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 26 :125002, 2010.
- [107] J.D. Hamilton and M. O'Donnell. High frequency ultrasound imaging with optical arrays. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 45(1) :216–235, 1998.
- [108] A. Haraux. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. *Port. Math*, 46(3) :245–258, 1989.
- [109] S. Helgason. *Groups and geometric analysis : integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, volume 113. Academic press, 1984.
- [110] W.R. Hendee and E.R. Ritenour. *Medical imaging physics*. John Wiley and Sons, 2002.
- [111] G.T. Herman. *Fundamentals of computerized tomography : image reconstruction from projection*. Springer, 2nd edition edition, 2009.
- [112] C.G.A. Hoelen, F.F.M. De Mul, R. Pongers, and A. Dekker. Three-dimensional photoacoustic imaging of blood vessels in tissue. *Optics letters, Optical Society of America*, 23(8) :648–650, 1998.
- [113] J.E. Hoke and R.A. Anthes. The initialization of numerical models by a dynamic-initialization technique(fluid flow models for wind forecasting). *Monthly Weather Review*, 104 :1551–1556, 1976.
- [114] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential equations*, volume 1 & 2. Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1983–1985), 1983.
- [115] Y. Hristova. Time reversal in thermoacoustic tomography – an error estimate. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 25 :055008, 2009.
- [116] Y. Hristova, P. Kuchment, and L. Nguyen. Reconstruction and time reversal in thermoacoustic tomography in acoustically homogeneous and

- inhomogeneous media. *Inverse Problems*, IOP Publishing, 24 :055006, 2008.
- [117] J. Hsieh. *Computed tomography : principles, design, artifacts, and recent advances*, volume 114. Society of Photo Optical, 2003.
- [118] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127. Springer, 2006.
- [119] K. Ito, K. Ramdani, and M. Tucsnak. A time reversal based algorithm for solving initial data inverse problems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 4(3), 2011.
- [120] X. Jacob. *Thèse : Applications de l'interaction d'ondes élastiques à la mesure des propriétés non-linéaires des matériaux et à la caractérisation de champs de pression*. 2005.
- [121] J.A. Jensen. A new calculation procedure for spatial impulse responses in ultrasound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, *Acoustical Society of America*, 105(6) :3266–3274, 1999.
- [122] X. Jin and L.V. Wang. Thermoacoustic tomography with correction for acoustic speed variations. *Physics in medicine and biology*, IOP Publishing, 51 :6437, 2006.
- [123] F. John. *Plane waves and spherical means*. Interscience Publ., 1955.
- [124] C.C. Johnson and A.W. Guy. Nonionizing electromagnetic wave effects in biological materials and systems. *Proceedings of the IEEE*, 60(6) :692–718, 1972.
- [125] W.T. Joines, Y. Zhang, C. Li, and R.L. Jirtle. The measured electrical properties of normal and malignant human tissues from 50 to 900 mhz. *Medical Physics*, 21 :547, 1994.
- [126] R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83 :95, 1961.
- [127] R.E. Kalman et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960.
- [128] E. Kalnay, S.K. Park, Z.X. Pu, and J. Gao. Application of the quasi-inverse method to data assimilation. *Monthly weather review*, 128(3) :864–875, 2000.

- [129] R.E. Kistler. *A study of data assimilation techniques in an autobarotropic, primitive equation, channel model*. PhD thesis, Pennsylvania State University., 1974.
- [130] M.V. Klibanov and F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, pages 1653–1675, 1991.
- [131] K.P. Köstli and P.C. Beard. Two-dimensional photoacoustic imaging by use of Fourier-transform image reconstruction and a detector with an anisotropic response. *Applied optics, Optical Society of America*, 42(10) :1899–1908, 2003.
- [132] R. Kowar. Integral equation models for thermoacoustic imaging of acoustic dissipative tissue. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 26 :095005, 2010.
- [133] R. Kowar and O. Scherzer. Photoacoustic imaging taking into account attenuation. *ArXiv preprint : 1009.4350*, 2010.
- [134] R. Kowar, O. Scherzer, and X. Bonnefond. Causality analysis of frequency-dependent wave attenuation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, Wiley Online Library*, 34(1) :108–124, 2011.
- [135] T.N. Krishnamurti, X. Jishan, H.S. Bedi, K. Ingles, and D. Oosterhof. Physical initialisation for numerical weather prediction over the tropics. *Tellus*, 43A :53–81, 1991.
- [136] R.A. Kruger, W.L. Kiser Jr, K.D. Miller, H.E. Reynolds, D.R. Reinecke, G.A. Kruger, and P.J. Hofacker. Thermoacoustic CT : imaging principles. In *Proceedings of SPIE*, volume 3916, page 150, 2000.
- [137] R.A. Kruger, W.L. Kiser Jr, D.R. Reinecke, and G.A. Kruger. Thermoacoustic computed tomography using a conventional linear transducer array. *Medical physics*, 30 :856, 2003.
- [138] R.A. Kruger, K.K. Kopecky, A.M. Aisen, D.R. Reinecke, G.A. Kruger, and W.L. Kiser. Thermoacoustic CT with radio waves : a medical imaging paradigm. *Radiology, Radiological Society of North America*, 211(1) :275, 1999.

- [139] R.A. Kruger, P. Liu, C.R. Appledorn, et al. Photoacoustic ultrasound (paus) – reconstruction tomography. *Medical physics*, 22 :1605, 1995.
- [140] R.A. Kruger, K.D. Miller, H.E. Reynolds, W.L. Kiser, D.R. Reinecke, and G.A. Kruger. Breast cancer in vivo : contrast enhancement with thermoacoustic CT at 434 MHz – feasibility study. *Radiology, Radiological Society of North America*, 216(1) :279–283, 2000.
- [141] R.A. Kruger, D.R. Reinecke, and G.A. Kruger. Thermoacoustic computed tomography – Technical considerations. *Medical physics*, 26 :1832, 1999.
- [142] K.P. Köstli, M. Frenz, H. Bebie, and H.P. Weber. Temporal backward projection of optoacoustic pressure transients using Fourier transform methods. *Phys. Med. Biol.*, 46 :1863–1872, 2001.
- [143] G. Ku, X. Wang, G. Stoica, and L.V. Wang. Multiple-bandwidth photoacoustic tomography. *Physics in medicine and biology, IOP Publishing*, 49 :1329, 2004.
- [144] P. Kuchment. Mathematics of hybrid imaging. A brief review. *Arxiv preprint arXiv : 1107.2447*, 2011.
- [145] P. Kuchment and L. Kunyansky. Mathematics of thermoacoustic tomography. *European Journal of Applied Mathematics, Cambridge Univ Press*, 19(2) :191–224, 2008.
- [146] P. Kuchment and L. Kunyansky. Synthetic focusing in ultrasound modulated tomography. *Arxiv preprint arXiv : 0901.2552*, 2009.
- [147] L. Kunyansky. Fast reconstruction algorithms for the thermoacoustic tomography in certain domains with cylindrical or spherical symmetries. *Arxiv preprint arXiv : 1102.1413*, 2011.
- [148] L.A. Kunyansky. Explicit inversion formulae for the spherical mean radon transform. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :373, 2007.
- [149] L.A. Kunyansky. A series solution and a fast algorithm for the inversion of the spherical mean radon transform. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S11, 2007.

- [150] P.J. La Rivière, J. Zhang, and M.A. Anastasio. Image reconstruction in optoacoustic tomography for dispersive acoustic media. *Optics letters, Optical Society of America*, 31(6) :781–783, 2006.
- [151] J. Lagnese. Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21 :68, 1983.
- [152] L.E. Larsen and J.H. Jacobi. *Medical applications of microwave imaging*. IEEE Press, 1986.
- [153] R. Lattès and J.L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*, volume 15. Dunod, 1967.
- [154] P. Lax and R.S. Phillips. *Scattering theory*. New York and London : Academic Press, XII, 276 p, 1967.
- [155] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Tome1, Contrôlabilité exacte. Tome 2, Perturbations)*. Masson, 1988.
- [156] K. Liu. Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM journal on control and optimization*, 35 :1574, 1997.
- [157] P. Liu. Image reconstruction from photoacoustic pressure signals. In *Proceedings of SPIE*, volume 2681, page 285, 1996.
- [158] A.C. Lorenc, R.S. Bell, and B. Macpherson. The meteorological office analysis correction data assimilation scheme. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 117 :59–89, 1991.
- [159] A.C. Lorenc, R.S. Bell, and B. Macpherson. The meteorological office analysis correction data assimilation scheme. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 117 :59–89, 1991.
- [160] D.G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *Military Electronics, IEEE Transactions on*, 8(2) :74–80, 1964.
- [161] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 16(6) :596–602, 1971.
- [162] D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Autom. Cont.*, 11 :2 :190–197, April 1966.

- [163] W.H. Lyne, R. Swinbank, and N.T. Birch. A data assimilation experiment and the global circulation during the FGGE special observing periods. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 108 :575–594, 1982.
- [164] S. Marinescu. Iterative reconstruction methods for wave equations. In *ESAIM : Proceedings*, volume 35, pages 257–262. EDP Sciences, 2012.
- [165] K. Maslov, H.F. Zhang, S. Hu, and L.V. Wang. Optical-resolution photoacoustic microscopy for in vivo imaging of single capillaries. *Optics letters, Optical Society of America*, 33(9) :929–931, 2008.
- [166] K. Maslov, H.F. Zhang, and L.V. Wang. Effects of wavelength-dependent fluence attenuation on the noninvasive photoacoustic imaging of hemoglobin oxygen saturation in subcutaneous vasculature in vivo. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S113, 2007.
- [167] P.M. Meaney, M.W. Fanning, D. Li, S.P. Poplack, and K.D. Paulsen. A clinical prototype for active microwave imaging of the breast. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 48(11) :1841–1853, 2000.
- [168] G. Miguez-Macho, G.L. Stenchikov, and A. Robock. Spectral nudging to eliminate the effects of domain position and geometry in regional climate model simulations. *J. Geophys. Res*, 109 :D13104, 2004.
- [169] J. Mobley and T. Vo-Dinh. Optical properties of tissue. *Biomedical photonics handbook, CRC Press*, 2 :1–2, 2003.
- [170] F. Natterer. *The mathematics of computerized tomography*, volume 32. Society for Industrial Mathematics, 2001.
- [171] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical methods in image reconstruction*, volume 5. Society for Industrial Mathematics, 2001.
- [172] L.V. Nguyen. A family of inversion formulas in thermoacoustic tomography. *Arxiv preprint arXiv : 0902.2579*, 2009.
- [173] L.V. Nguyen. On singularities and instability of reconstruction in thermoacoustic tomography. *Arxiv preprint arXiv :0911.5521*, 2009.
- [174] L.V. Nguyen. Range description for a spherical mean transform on spaces of constant curvatures. *Arxiv preprint arXiv : 1107.1746*, 2011.

- [175] J.J. Niederhauser, D. Frauchiger, H.P. Weber, and M. Frenz. Real-time optoacoustic imaging using a schlieren transducer. *Applied physics letters*, 81 :571, 2002.
- [176] J.J. Niederhauser, M. Jaeger, and M. Frenz. Real-time three-dimensional optoacoustic imaging using an acoustic lens system. *Applied physics letters*, 85 :846, 2004.
- [177] J.J. Niederhauser, M. Jaeger, R. Lemor, P. Weber, and M. Frenz. Combined ultrasound and optoacoustic system for real-time high-contrast vascular imaging in vivo. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 24(4) :436–440, 2005.
- [178] S.J. Norton. Reconstruction of a two-dimensional reflecting medium over a circular domain : exact solution. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 67.4 :1266, 1980.
- [179] S.J. Norton and M. Linzer. Ultrasonic reflectivity imaging in three dimensions : exact inverse scattering solutions for plane, cylindrical and spherical apertures. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, (2) :202–220, 1981.
- [180] S.J. Norton and T. Vo-Dinh. Optoacoustic diffraction tomography : analysis of algorithms. *JOSA A, Optical Society of America*, 20(10) :1859–1866, 2003.
- [181] A.A. Oraevsky, R.O. Esenaliev, S.L. Jacques, and F.K. Tittel. Laser optoacoustic tomography for medical diagnostics : principles. In *Proceedings of SPIE*, volume 2676, page 22, 1996.
- [182] V. Palamodov. Remarks on the general funk-radon transform and thermoacoustic tomography. *Arxiv preprint math/0701204*, 2007.
- [183] G. Paltauf, R. Nuster, M. Haltmeier, and P. Burgholzer. Experimental evaluation of reconstruction algorithms for limited view photoacoustic tomography with line detectors. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S81, 2007.
- [184] G. Paltauf, R. Nuster, M. Haltmeier, and P. Burgholzer. Photoacoustic tomography using a mach-zehnder interferometer as an acoustic line

- detector. *Applied optics, Optical Society of America*, 46(16) :3352–3358, 2007.
- [185] G. Paltauf and H. Schmidt-Kloiber. Measurement of laser-induced acoustic waves with a calibrated optical transducer. *Journal of applied physics*, 82 :1525, 1997.
- [186] G. Paltauf and H. Schmidt-Kloiber. Pulsed optoacoustic characterization of layered media. *Journal of Applied Physics*, 88 :1624, 2000.
- [187] G. Paltauf, H. Schmidt-Kloiber, and M. Frenz. Photoacoustic waves excited in liquids by fiber-transmitted laser pulses. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104 :890, 1998.
- [188] G. Paltauf, H. Schmidt-Kloiber, KP Köstli, and M. Frenz. Optical method for two-dimensional ultrasonic detection. *Applied physics letters*, 75 :1048, 1999.
- [189] G. Paltauf, JA Viator, SA Prahl, and SL Jacques. Iterative reconstruction algorithm for optoacoustic imaging. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112 :1536, 2002.
- [190] SK Patch. Thermoacoustic tomography – consistency conditions and the partial scan problem. *Physics in Medicine and Biology, IOP Publishing*, 49 :2305, 2004.
- [191] SK Patch and M. Haltmeier. Thermoacoustic tomography – ultrasound attenuation artifacts. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2006. IEEE*, volume 4, pages 2604–2606. IEEE, 2006.
- [192] S.K. Patch and O. Scherzer. Guest editors’ introduction. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 23 :S01, 2007.
- [193] Y.Y. Petrov, I.Y. Petrova, I.A. Patrikeev, R.O. Esenaliev, and D.S. Prough. Multiwavelength optoacoustic system for noninvasive monitoring of cerebral venous oxygenation : a pilot clinical test in the internal jugular vein. *Optics letters, Optical Society of America*, 31(12) :1827–1829, 2006.
- [194] K.D. Phung and X. Zhang. Time reversal focusing of the initial state for kirchhoff plate. *SIAM J. Appl. Math*, 68(6) :1535–1556, 2008.



- [195] M.C. Pilatou, N.J. Voogd, F.F.M. de Mul, W. Steenbergen, and L.N.A. van Adrichem. Analysis of three-dimensional photoacoustic imaging of a vascular tree in vitro. *Review of scientific instruments*, 74 :4495, 2003.
- [196] DA Popov and DV Sushko. A parametrix for the problem of optical-acoustic tomography. In *Doklady. Mathematics*, volume 65, pages 19–21. MAIK Nauka/Interperiodica, 2002.
- [197] D.A. Popov and D.V. Sushko. Image restoration in optical-acoustic tomography. *Problems of Information Transmission, Springer*, 40(3) :254–278, 2004.
- [198] J. Qian, P. Stefanov, G. Uhlmann, and H. Zhao. An efficient neumann-series based algorithm for thermoacoustic and photoacoustic tomography with variable sound speed. *SIAM Journal on Imaging Sciences, Society for Industrial and Applied Mathematics*, 4(3) :850–883, 2011.
- [199] R. Radu, M. Déqué, and S. Somot. Spectral nudging in a spectral regional climate model. *Tellus A*, 60(5) :898–910, 2008.
- [200] J.V. Ralston. Solutions of the wave equation with localized energy. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(6) :807–823, 1969.
- [201] K. Ramdani, T. Takahashi, and M. Tucsnak. Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations - application to lqr problems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 13 :503–527, 2007.
- [202] K. Ramdani, M. Tucsnak, and G. Weiss. Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers. *Automatica*, 46(10) :1616–1625, 2010.
- [203] S. Riette and D. Caya. Sensitivity of short simulations to the various parameters in the new CRCM spectral nudging. *Research activities in Atmospheric and Oceanic Modelling*, pages 7–39, 2002.
- [204] D. Rozier, F. Birol, E. Cosme, P. Brasseur, JM Brankart, J. Verron, et al. A reduced-order kalman filter for data assimilation in physical oceanography. *SIAM review*, 49(3) :449, 2007.

- [205] D.L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *Siam Review*, pages 639–739, 1978.
- [206] O. Scherzer. *Handbook of mathematical methods in imaging*. Springer Verlag, 2010.
- [207] O. Scherzer, M. Grasmair, H. Grossauer, M. Haltmeier, and F. Lenzen. *Variational methods in imaging, volume 167 of Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2009.
- [208] N.L. Seaman. Newtonian nudging : a four-dimensional approach to data assimilation. mesoscale data assimilation. In *Summer Colloquium, Advanced Study Program*, pages 263–277, 1990.
- [209] M.A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer Verlag, 2001.
- [210] M.W. Sigrist. Laser generation of acoustic waves in liquids and gases. *Journal of applied physics, AIP*, 60(7) :R83–R122, 1986.
- [211] R.I. Siphanto, K.K. Thumma, RGM Kolkman, T.G. Leeuwen, F.F.M. Mul, J.W. Neck, L.N.A. Adrichem, and W. Steenbergen. Serial noninvasive photoacoustic imaging of neovascularization in tumor angiogenesis. *Optics express, Optical Society of America*, 13(1) :89–95, 2005.
- [212] M. Sivaramakrishnan, K. Maslov, H.F. Zhang, G. Stoica, and L.V. Wang. Limitations of quantitative photoacoustic measurements of blood oxygenation in small vessels. *Physics in medicine and biology, IOP Publishing*, 52 :1349, 2007.
- [213] M. Slemrod. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space. *SIAM Journal on Control*, 12 :500, 1974.
- [214] C.G. Soares, R. Weisse, J.C. Carretero, and E. Alvarez. A 40 years hindcast of wind, sea level and waves in European waters. In *Proceedings of 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2002.
- [215] D.R. Stauffer and J.W.E.N. Bao. Optimal determination of nudging coefficients using the adjoint equations. *Tellus A*, 45(5) :358–369, 1993.

- [216] D.R. Stauffer and N.L. Seaman. Use of four-dimensional data assimilation in a limited-area mesoscale model. Part I : Experiments with synoptic-scale data. *Monthly Weather Review*, 118(6) :1250–1277, 1990.
- [217] P. Stefanov and G. Uhlmann. Linearizing non-linear inverse problems and an application to inverse backscattering. *Journal of Functional Analysis, Elsevier*, 256(9) :2842–2866, 2009.
- [218] P. Stefanov and G. Uhlmann. Thermoacoustic tomography with variable sound speed. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 25 :075011, 2009.
- [219] P. Stefanov and G. Uhlmann. Thermoacoustic tomography arising in brain imaging. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 27 :045004, 2011.
- [220] D. Steinhauer. A reconstruction procedure for thermoacoustic tomography in the case of limited boundary data. *Arxiv preprint arXiv : 0905.2954*, 2009.
- [221] D. Steinhauer. A uniqueness theorem for thermoacoustic tomography in the case of limited boundary data. *Arxiv preprint arXiv : 0902.2838*, 2009.
- [222] G.G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 8 :287–319, 1845.
- [223] R.S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. World Scientific Pub Co Inc, 2003.
- [224] N.V. Sushilov and R.S.C. Cobbold. Frequency-domain wave equation and its time-domain solutions in attenuating media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115 :1431, 2004.
- [225] T.L. Szabo. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America, [New York : Acoustical Society of America]*, 96(1) :491–500, 1994.
- [226] T.L. Szabo. Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97 :14, 1995.

- [227] O. Talagrand. On the mathematics of data assimilation. *Tellus*, 33(4) :321–339, 1981.
- [228] O. Talagrand. A study of the dynamics of four-dimensional data assimilation. *Tellus*, 33(1) :43–60, 1981.
- [229] O. Talagrand. Assimilation of observations, an introduction. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 75, No. 1B :191–209, 1997.
- [230] O. Talagrand and P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113 :1311–1328, 1987.
- [231] O. Talagrand and P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II : Numerical results. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113 :1329–1347, 1987.
- [232] A.C. Tam. Applications of photoacoustic sensing techniques. *Reviews of Modern Physics, APS*, 58(2) :381, 1986.
- [233] A. Taruttis, E. Herzog, D. Razansky, and V. Ntziachristos. Real-time imaging of cardiovascular dynamics and circulating gold nanorods with multispectral optoacoustic tomography. *Optics Express, Optical Society of America*, 18(19) :19592–19602, 2010.
- [234] B.E. Treeby and B.T. Cox. Fast, tissue-realistic models of photoacoustic wave propagation for homogeneous attenuating media. In *Proc. SPIE*, volume 7177, page 717716, 2009.
- [235] B.E. Treeby and B.T. Cox. Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional laplacian. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127 :2741, 2010.
- [236] B.E. Treeby, E.Z. Zhang, and B.T. Cox. Photoacoustic tomography in absorbing acoustic media using time reversal. *Inverse Problems, IOP Publishing*, 26 :115003, 2010.
- [237] E. Trélat. Commande optimale. *Notes de cours*, 2007.
- [238] D. Tuan Pham, J. Verron, and M. Christine Roubaud. A singular evolutive extended kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine systems*, 16(3) :323–340, 1998.

- [239] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semi-groups*. Birkhauser, 2009.
- [240] B.R. Vainberg. On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as  $t \rightarrow \infty$  of solutions of non-stationary problems. *Russian Mathematical Surveys, IOP Publishing*, 30-2 :1–58, 1975.
- [241] B.R. Vainberg. *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*. CRC, 1989.
- [242] J. Verron. Altimeter data assimilation into an ocean circulation model : sensitivity to orbital parameters. *Journal of Geophysical Research*, 95(C7) :11443–11, 1990.
- [243] J. Verron and W. Holland. Impact de données d’altimétrie satellitaire sur les simulations numériques des circulations générales océaniques aux latitudes moyennes. In *Annales Geophysicae*, volume 7, pages 31–46, 1989.
- [244] P.A. Vidard, F.X. Le Dimet, and A. Piacentini. Determination of optimal nudging coefficients. *Tellus A*, 55(1) :1–15, 2003.
- [245] H. von Storch, H. Langenberg, and F. Feser. A spectral nudging technique for dynamical downscaling purposes. *Monthly weather review*, 128(10) :3664–3673, 2000.
- [246] K.M. Waldron, J. Paegle, and J.D. Horel. Sensitivity of a spectrally filtered and nudged limited-area model to outer model options. *Monthly weather review*, 124(3) :529–547, 1996.
- [247] K. Wang and M.A. Anastasio. Photoacoustic and thermoacoustic tomography : Image formation principles. *Chapter 18 in [206]*.
- [248] L.H. Wang and H.I. Wu. *Biomedical optics. Principles and imaging*. Wiley-Interscience, 2007.
- [249] L.V. Wang. Prospects of photoacoustic tomography. *Medical physics*, 35 :5758, 2008.
- [250] L.V. Wang. *Photoacoustic imaging and spectroscopy*, volume 144. CRC, 2009.

- [251] X. Wang, Y. Pang, G. Ku, X. Xie, G. Stoica, and L.V. Wang. Noninvasive laser-induced photoacoustic tomography for structural and functional in vivo imaging of the brain. *Nature Biotechnology*, 21(7) :803–806, 2003.
- [252] X. Wang, X. Xie, G. Ku, L.V. Wang, and G. Stoica. Noninvasive imaging of hemoglobin concentration and oxygenation in the rat brain using high-resolution photoacoustic tomography. *Journal of biomedical optics*, 11 :024015, 2006.
- [253] Y. Wang, X. Xie, X. Wang, G. Ku, K.L. Gill, D.P. O’Neal, G. Stoica, and L.V. Wang. Photoacoustic tomography of a nanoshell contrast agent in the in vivo rat brain. *Nano Letters, ACS Publications*, 4(9) :1689–1692, 2004.
- [254] Z. Wang, K.K. Droegemeier, L. White, and I.M. Navon. Application of a new adjoint Newton algorithm to the 3D ARPS storm-scale model using simulated data. *Monthly Weather Review*, 125(10) :2460–2478, 1997.
- [255] G. Welch and G. Bishop. An introduction to the kalman filter. *University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC*, 7(1), 1995.
- [256] M. Xu and L.V. Wang. Time-domain reconstruction for thermoacoustic tomography in a spherical geometry. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(7) :814–822, 2002.
- [257] M. Xu and L.V. Wang. Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography. *Physical Review E, APS*, 71(1) :016706, 2005.
- [258] M. Xu and L.V. Wang. Photoacoustic imaging in biomedicine. *Review of scientific instruments*, 77 :041101, 2006.
- [259] Y. Xu, D. Feng, and L.V. Wang. Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography. i. planar geometry. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(7) :823–828, 2002.
- [260] Y. Xu and L.V. Wang. Effects of acoustic heterogeneity in breast thermoacoustic tomography. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 50(9) :1134–1146, 2003.

- [261] Y. Xu, L.V. Wang, G. Ambartsoumian, and P. Kuchment. Reconstructions in limited-view thermoacoustic tomography. *Medical Physics*, 31 :724, 2004.
- [262] Y. Xu, M. Xu, and L.V. Wang. Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography. ii. cylindrical geometry. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(7) :829–833, 2002.
- [263] Y.S. Yang, S. Vaithilingam, H.T.J. Ma, S. Salehi-Had, O. Oralkan, B.T. Khuri-Yakub, and S. Guccione. Development of nanoparticle-based gold contrast agent for photoacoustic tomography. In *Nsti Nanotech*, volume 1, pages 708–711, 2008.
- [264] B. Yin, D. Xing, Y. Wang, Y. Zeng, Y. Tan, and Q. Chen. Fast photoacoustic imaging system based on 320-element linear transducer array. *Physics in medicine and biology, IOP Publishing*, 49 :1339, 2004.
- [265] J. Zabczyk. Remarks on the algebraic Riccati equation in Hilbert space. *Applied Mathematics & Optimization*, 2(3) :251–258, 1975.
- [266] E.Z. Zhang, J. Laufer, and P. Beard. Three-dimensional photoacoustic imaging of vascular anatomy in small animals using an optical detection system. In *Proc. SPIE*, volume 6437, pages 64370S1–64370S7, 2007.
- [267] H.F. Zhang, K. Maslov, G. Stoica, and L.V. Wang. Functional photoacoustic microscopy for high-resolution and noninvasive in vivo imaging. *Nature Biotechnology, Nature Publishing Group*, 24(7) :848–851, 2006.
- [268] H.F. Zhang, K. Maslov, and L.V. Wang. In vivo imaging of subcutaneous structures using functional photoacoustic microscopy. *Nature protocols, Nature Publishing Group*, 2(4) :797–804, 2007.
- [269] J. Zhang and M.A. Anastasio. Reconstruction of speed-of-sound and electromagnetic absorption distributions in photoacoustic tomography. In *Proceedings of SPIE*, volume 6086, page 608619, 2006.
- [270] J. Zhang, K. Wang, Y. Yang, and M.A. Anastasio. Simultaneous reconstruction of speed-of-sound and optical absorption properties in photoacoustic tomography via a time-domain iterative algorithm. In *Proc. SPIE*, volume 6856, page 68561, 2008.

- [271] Q. Zhang, N. Iwakuma, P. Sharma, B.M. Moudgil, C. Wu, J. McNeill, H. Jiang, and S.R. Grobmyer. Gold nanoparticles as a contrast agent for in vivo tumor imaging with photoacoustic tomography. *Nanotechnology, IOP Publishing*, 20 :395102, 2009.
- [272] X. Zou, I.M. Navon, and F.X. Le Dimet. An optimal nudging data assimilation scheme using parameter estimation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 118(508) :1163–1186, 1992.
- [273] E. Zuazua. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM review*, pages 197–243, 2005.



# Articles

Nous présentons une partie de nos travaux dans les pages qui suivent, sous la forme de deux articles : le premier [164] résume les résultats que nous avons obtenus au sujet des BFF et a été publié, tandis que le second [42] est consacré à l'étude du BFN appliqué à la TTA et dont la publication a été acceptée.



## ITERATIVE RECONSTRUCTION METHODS FOR WAVE EQUATIONS

SÉBASTIEN MARINESQUE<sup>1</sup>

**Abstract.** Some new iterative techniques are defined to solve reversible inverse problems and a common formulation is explained. Numerical improvements are suggested and tests validate the methods.

**Résumé.** Nous définissons des techniques itératives inédites pour la résolution de problèmes inverses réversibles et en fournissons une formulation commune. Après avoir suggéré des améliorations pour leur implémentation, des expérimentations sont présentées qui valident ces méthodes.

## INTRODUCTION

The classical ThermoAcoustic Tomography (TAT) problem formulates as follows. Consider an object  $f_0$  contained in an open set  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^n$  which emits an acoustic pressure wave at  $t = 0$ , considered as a Dirac pulse. This wave is modeled as a solution of:

$$\begin{cases} Lp = 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ p(0) = f_0, \\ \partial_t p(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $L$  is an operator modeling an acoustic wave phenomenon. Then this pressure wave is observed (e.g. thanks to piezoelectric sensors) and a set of observations is obtained from the solution  $p$ . That can be expressed thanks to an observation operator  $C$  mapping a solution  $p$  to observations  $Cp$ . The inverse TAT problem consists in developing and studying methods to reconstruct  $f_0$  from  $Cp$  and to define situations in which this reconstruction is possible. In the three past decades many techniques have been developed, offering effectual results (see works from authors of [1], [5] [11], [13], [16] among others).

The new techniques we propose in section 1 rely on the following ideas, influenced by [2]: if the system we consider is reversible in time, then the initial state to reconstruct can be seen, backward in time, as a state to reach, so that usual control and filtering techniques can be used to solve this inverse problem. For this purpose, we first used the Back and Forth Nudging algorithm (see [2]) in [4]. With filtering techniques, as the Kalman filter defined in [7] and one of its reduced rank formulations, the SEEK filter (cf. [12]), we introduce now possible improvements of this method (in subsection 2.2) and test them (in subsection 2.3). In subsection 1.3, we explain too a common way to formulate and study these iterative reconstruction techniques.

Of course, many assumptions are necessary to obtain a favorable observation situation: the way the wave propagates, depending on the media and on the kind of the wave, the final time and the number, size and position of the sensors command the information contained in the data (see e.g. [9], [10] and the references therein). Moreover, even if the continuous problem is well set, numerical issues still put up some resistance, as considering noisy data, algorithmic complexity or apparition of spurious high-frequency oscillations during

<sup>1</sup> Université Paul Sabatier, Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex

numerical implementations (the paper [18] surveys this point). We deal here with this issue, as done in [14]: we introduce an artificial attenuation term that not only yields a regularization of the solution but corrects degenerated observation configurations for which filtering techniques are not helpful.

## 1. ITERATIVE STABILIZATION AND FILTERING FOR WAVE EQUATIONS

This section is devoted to main results about stabilization of the wave equation and Kalman-Bucy filter. Then we define iterative stabilizing methods.

### 1.1. Observation and stabilization of the wave equation

We assume that  $L = \partial_{tt} - \Delta$  is the D'Alembert operator. If necessary, we can suppose that  $f_0 = 0$  and consider the stabilization problem for the initial value problem related to  $L$  instead of the inverse TAT problem. Similar considerations are also valid for linear variable speed (reversible) wave equations.

Define  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$ , for any  $p \in \mathcal{C}^0((0, T); H_0^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T); L^2)$ , and  $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$  on  $H = H_0^1 \times L^2$ , then  $D(A) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1$  and equation (1) writes:

$$\begin{cases} \mathbf{p}' = A\mathbf{p}, \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = (f_0 \ 0)^T, \end{cases} \quad (2)$$

for which we consider usual weak, classical or mild solutions, according to the regularity of the initial state.

The observations are defined in a Hilbert space  $U$ . It is convenient, when working with wave equations, to consider the time derivative of the observations, so that we assume that  $C \in \mathcal{L}(L^2, U)$  and use equally  $Cp'$  or  $Cp$ . In the practice of TAT, we only get observations from  $p$  and use its time derivative when needed.

Concerning stabilizability and controllability of wave equations, we have the fundamental criterion:

**Definition 1.1.** The *observation inequality* is satisfied if there exists  $T, M > 0$  such that:

$$\int_0^T \|Cp'\|_U^2 dt \geq M \|\mathbf{p}_0\|_H^2, \quad (3)$$

for all  $\mathbf{p}_0 \in H$ , where  $p$  is the solution of (1) with initial data  $\mathbf{p}_0$ . Scalar  $M$  is called *observability constant*.

Indeed, in [10], one finds the following result:

**Proposition 1.2.** *The three following propositions are equivalent:*

- (i) *The observation inequality (3) is satisfied.*
- (ii) *For every positive-definite self-adjoint operator  $T \in L(U)$ , the operator  $A - C^*TC$  generates an exponentially stable  $C_0$ -semigroup on  $H$ .*
- (iii) *The system  $(A, C^*)$  is exactly controllable.*

Many geometrical interpretations to the observation inequality have been presented, mostly known as *Geometric Optics Condition* (GOC from [3]). In particular, these results explain this heuristic situation: when  $Cp' = \mathbb{1}_\omega p'$ , where  $\omega$  is an open subset of  $\Omega$ , then enough energy from  $\mathbf{p}_0$  has to pass through  $\omega$  to get enough information to reconstruct  $\mathbf{p}_0$ . It depends on many parameters such as the position of the sensors, the speed map of the wave equation, the final time  $T$ , etc.

In this context, we introduce a first reconstruction method, the Kalman-Bucy filter.

### 1.2. The Kalman-Bucy filter

We recall the main results concerning the (continuous) Kalman-Bucy filter. It yields a way to approximate the real state that minimizes the error variance in the following situation (see [8]):

Assume that the true state solves the linear differential equation  $\mathbf{x}^{t'} = \mathbf{M}\mathbf{x}^t + \boldsymbol{\nu}$  and the theoretical model is governed by  $\mathbf{x}^{f'} = \mathbf{M}\mathbf{x}^f$ . Given data  $\mathbf{y}^o$ , we denote the observation error by  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , so as  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y}^o - C\mathbf{x}^t$ . Errors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  and  $\boldsymbol{\nu}$  are null mean white Gaussian noise processes and their respective covariance matrices are  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{R}$ .

**Definition 1.3.** Given  $\mathbf{x}^f(0)$  and  $\mathbf{P}^f(0)$ , the *Kalman-Bucy filter* consists in the two following differential equations, one to estimate the state  $\mathbf{x}$  and one for the covariance matrix  $\mathbf{P}$ , of a differential Riccati type:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}^o - C\mathbf{x}), \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{M}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{M}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1}C\mathbf{P},\end{aligned}$$

and the Kalman gain  $\mathbf{K}$  is given by  $\mathbf{K} = \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1}$ .

Let us explain some links between subsections 1.1 and 1.2. In the filters formulations, the feedback is realized thanks to an operator written  $PC^*TC$  as feedbacks write  $C^*TC$  and  $P = \text{Id}_H$  in subsection 1.1. Thus one can consider here that  $P$  weights the feedback in comparison to the model. See [17] for some results similar to Proposition 1.2 about feedbacks  $PC^*TC$ .

We are studying different ways to define the stabilizing operator  $P$ , first with the nudging operator  $PC^*TC = kC^*C$ , where  $k > 0$ , that is in the framework of Proposition 1.2, then with filters. It leads to the following back and forth reconstruction algorithms.

### 1.3. Iterative initial data reconstruction methods for inverse problems

We get benefits from the reversibility of the wave equations, go back in time and use data again during a backward evolution, from  $t = T$  to  $t = 0$ , to deduce an approximation of  $f_0$ . Such an idea has lead D. Auroux and J. Blum to define the Back and Forth Nudging algorithm in [2], then D. Auroux and E. Cosme improved it with the Back and Forth SEEK (from private communication, see below for a description of the BF-SEEK). These techniques can be formulated for any sequences of positive operators  $(P_k^f)$ ,  $(T_k^f)$ ,  $(P_k^b)$ ,  $(T_k^b)$  as follows:

**Definition 1.4.** Given a set of observations  $Cp^o$  and a rough estimate  $p_0$ , define  $p_0^b(0) = p_0$ . An *iterative reconstruction method* consists in iterating a back and forth process. The forward solution is given by:

$$\partial_{tt}p_k^f = \Delta p_k^f - P_k^f C^* T_k^f C (p_k^f - p^o) \text{ in } (0, T) \times \Omega, \quad (4)$$

with initial data  $p_k^f(0) = p_{k-1}^f(0)$  and  $p_k^{f'}(0) = 0$  and the backward solution solves:

$$\partial_{tt}p_k^b = \Delta p_k^b + P_k^b C^* T_k^b C (p_k^b - p^o) \text{ in } (0, T) \times \Omega, \quad (5)$$

with *final* data  $p_k^b(T) = p_k^f(T)$  and  $p_k^{b'}(T) = p_k^{f'}(T)$ . The process is iterated for  $k \geq 1$ .

Concerning  $PC^*TC$ , it is left implicit that time or space derivatives of  $(p_k^f - p^o)$  and  $(p_k^b - p^o)$  can be considered. The sign preceding  $P_k^b C^* T_k^b C (p_k^b - p^o)$  changes for convenience of notation as one can notice that, when  $T$  contains a first-order time derivative, then the backward equation (5) writes forward:

$$\partial_{tt}p_k^b = \Delta p_k^b - P_k^b C^* T_k^b C (p_k^b - p^o),$$

thanks to the variable substitution  $t \mapsto T - t$ . Finally, the correcting term still helps to stabilize the system.

Note that unlike many usual methods, the model is considered here as a weak constraint, which can be useful since it may not be well known (e.g. refer to [6] about simulation of inhomogeneous acoustic speed model and relative issues in TAT).

Finally, this kind of algorithms yields successive estimates  $(p_k^b(0))_{k \geq 0}$  of the initial object to reconstruct. As explained by Proposition 1.2 one knows that, under favorable observation conditions, both forward and backward equations are related to exponentially stable semigroups, that leads to the convergence of the algorithm.

## 2. NUMERICAL EXPERIMENTS

### 2.1. Discretization and numerical considerations

Consider the 1-D domain  $\Omega = (-1/2, 1/2)$  and  $(0, T) = (0, 1)$  both uniformly gridded with steps  $\delta x = 1/100$  and  $\delta t = 1/200$ . We deal with the classical finite difference time domain theta-scheme ( $\theta$ -FDTD) to simulate the wave equation. Sensors are located periodically every  $\delta_{data}$  grid points from the first one.

Upper discussion about observability, stabilizability and controllability have their matching in this situation: a discrete observation condition occur, similar to (3), which is equivalent too to the discrete stabilizability of the system (we omit details, see [18] and the reference therein when  $\theta = 0$ ). In order to compensate for possibly damaged observation conditions, due either to sensors configuration or to noise, we carry out the solution suggested in [14], adding an artificial viscous heating attenuation term in the  $\theta$ -FDTD, that leads to:

$$\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}) + \varepsilon \Delta_{\delta x} \frac{p_n - p_{n-1}}{\delta t} \pm PC^*TC \begin{pmatrix} p_{n-1} - p_{n-1}^o \\ p_n - p_n^o \end{pmatrix},$$

where  $\Delta_{\delta x}^{\theta}(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}) = \theta \Delta_{\delta x} p_{n-1} + (1 - 2\theta) \Delta_{\delta x} p_n + \theta \Delta_{\delta x} p_{n+1}$ ,  $\theta = 0.25$ ,  $\varepsilon = 0$  or  $\varepsilon = (\delta x)^{\alpha}$ ,  $\alpha \in (1, 2)$ , and  $\pm$  stands to express both forward and backward implementations.

The term  $(p_{n-1} - p_{n-1}^o \quad p_n - p_n^o)^T$  allows us to consider derivatives of the correcting term in the feedbacks.

### 2.2. From Kalman to SEEK filter

Only main results about the Kalman filter are given and we describe then how to derive the SEEK filter from it (as in [15]). These algorithms divide into two steps, a *forecast* one and an *analysis* one, in which are taken account the observations to correct the forecast, and two different kinds of parameters are considered, first the states ( $\mathbf{x}^f$  and  $\mathbf{x}^a$ ), then the relative error covariance matrices ( $\mathbf{P}^f$  and  $\mathbf{P}^a$ ) or their square root ( $\mathbf{S}^f$  and  $\mathbf{S}^a$ ). Definitions of the Kalman and SEEK filters are explained respectively on left and right columns below.

**Definition 2.1.** Given  $\mathbf{x}_0^f$ ,  $\mathbf{P}_0^f$  and  $\mathbf{S}_0^f = \mathbf{P}_0^{f1/2}$ , one iterates:

<b>Kalman Filter (KF)</b>	<b>SEEK Filter</b>
<i>Analysis step</i>	<i>Analysis step</i>
$\mathbf{K}_n = [\mathbf{P}_n^{f-1} + C^T \mathbf{R}^{-1} C]^{-1} C^T \mathbf{R}^{-1},$	$\mathbf{K}_n = \mathbf{S}_n^f [I_r + (C \mathbf{S}_n^f)^T \mathbf{R}^{-1} (C \mathbf{S}_n^f)]^{-1} (C \mathbf{S}_n^f)^T \mathbf{R}^{-1},$
$\mathbf{x}_n^a = \mathbf{x}_n^f - \mathbf{K}_n [C \mathbf{x}_n^f - \mathbf{y}_n^o],$	$\mathbf{x}_n^a = \mathbf{x}_n^f - \mathbf{K}_n [C \mathbf{x}_n^f - \mathbf{y}_n^o],$
$\mathbf{P}_n^a = [I_n - \mathbf{K}_n C] \mathbf{P}_n^f,$	$\mathbf{S}_n^a = \mathbf{S}_n^f [I_r + (C \mathbf{S}_n^f)^T \mathbf{R}^{-1} (C \mathbf{S}_n^f)]^{-1/2},$
<i>Forecast step</i>	<i>Forecast step</i>
$\mathbf{x}_{n+1}^f = \mathbf{M} \mathbf{x}_n^a,$	$\mathbf{x}_{n+1}^f = \mathbf{M} \mathbf{x}_n^a,$
$\mathbf{P}_{n+1}^f = \mathbf{M} \mathbf{P}_n^a \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}.$	$\mathbf{S}_{n+1}^f = \mathbf{M} \mathbf{S}_n^a.$

where  $I_k$  is the  $k \times k$  identity matrix (in the discrete state space if  $k = n$  and in the reduced rank space if  $k = r$ ) and  $\mathbf{K}_n$  is the Kalman gain, minimizing the trace of the error covariance on  $\mathbf{x}_n^a$ , or the reduced rank Kalman gain in SEEK.

Theoretically, one has  $\mathbf{P}_n^f = \mathbf{S}_n^f \mathbf{S}_n^{fT} + \mathbf{Q}$  in SEEK, but since  $\mathbf{Q}$  is not well known, we define  $\mathbf{P}_n^f = (1 + \gamma) \mathbf{S}_n^f \mathbf{S}_n^{fT}$ , where  $\gamma \in (0, 1)$ , which avoids an additional decomposition in SEEK. It is set similarly in KF.

In KF, if the state space has a range of  $n$ , the forecast step necessitates  $2n$  model evolution steps to get the forecast error covariance matrix from the analysis error covariance matrix, such that a less optimal gain may be considered to reduce calculation cost. This is the purpose of the SEEK to yield such a gain by considering a reduced rank gain more simple to obtain. Since the error covariance matrices are symmetric and positive-definite, Pham et al. [12] suggested to consider the following decomposition: if  $P$  is a symmetric positive-definite  $n \times n$  matrix whose  $r \leq n$  larger eigenvalues are  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$  and their corresponding eigenvectors  $V_1, \dots, V_r$ , the *reduced decomposition* of  $P$  is defined as the  $n \times r$  matrix  $S = [\sqrt{\lambda_1} V_1 \dots \sqrt{\lambda_r} V_r]$ . Since SEEK consists in using the reduced decomposition  $S^f$  of  $P^f$ ,  $r$  model runs define the forecast error covariance matrix.

### 2.3. Results

Four methods are compared: Time Reversal (TR), Back and Forth Nudging (BFN), Back and Forth SEEK (BF-SEEK) and Kalman Filter (KF). Let us set  $\mathbf{R} = 0.3I$ ,  $\gamma = 0.01$  for both BF-SEEK and KF, and the reduced rank  $r = 120$ , which is reduced when  $\text{Rank} [I + (CS_i^f)^T \mathbf{R}^{-1} (CS_i^f)] < r$ . An additive white Gaussian noise of level  $\nu$  is added to the data when said. The nudging gain is set to  $0.9\delta t$  for implementation limitations.

Table 1 and Fig. 1 and 2 show RMS errors and some relative reconstructions obtained in various situations. The object to reconstruct is shown on the upper left part of figure 1 then, to the right, one sees TR and BFN reconstructions, followed by BF-SEEK and KF reconstructions.

Settings	TR	BFN	BF-SEEK	SEEK	KF
$\delta_{data} = 10$	5.4	0.5 (100)	0.6 (3)	5.8	6
$\delta_{data} = 10, \nu = 30\%$	38.8	16.3 (5)	10.3 (2)	12.4	15.7
$\delta_{data} = 99$	8.3	2.6 (100)	6.3 (1)	15.9	44.2
$\delta_{data} = 99, \nu = 30\%$	14.1	10.8 (14)	19.9 (1)	23.7	46.4
$\delta_{data} = 99, \nu = 30\%, \alpha = 2$	9.8	20.7 (8)	12.2 (1)	20.1	42
$\delta_{data} > 99$	51.1	20.7(7)	83.3 (3) 31.8 if $\alpha = 1.8$ (3)	92.7	95

TABLE 1. RMS errors and number of iterations to converge (in brackets) for 10 ( $\delta_{data} = 10$ ), 2 ( $\delta_{data} = 99$ ) and 1 ( $\delta_{data} > 99$ ) sensor(s), noisy ( $\nu = 30\%$ ) or noiseless data, with or without the numerical attenuation  $\delta x^\alpha$ .

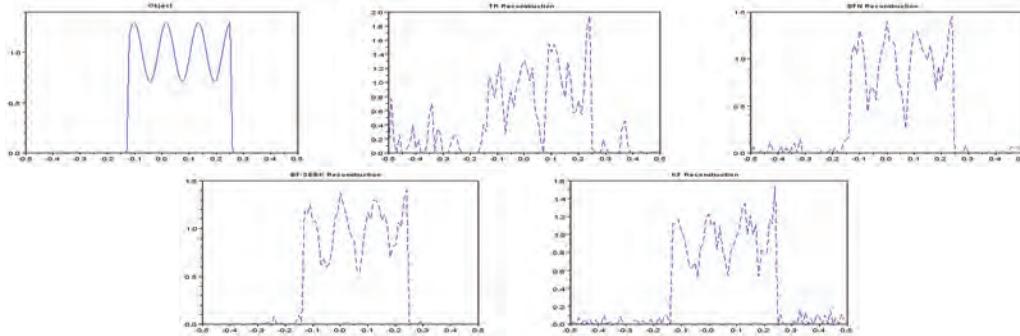


FIGURE 1. Object to reconstruct and reconstructions by TR, BFN, BF-SEEK and KF for  $\delta_{data} = 10$  and  $\nu = 30\%$ .

As KF reacts quite well to noise addition, it shows much more sensitivity to the number of sensors and easily fails. SEEK and BF-SEEK offer obvious improvements for both calculation cost and reconstruction error (Fig. 1). When 2 sensors are left, one can observe possible interesting effects of the attenuation term against noise with TR and BF-SEEK. Nevertheless, it may damage the reconstruction (with BFN). When only 1 sensor is left, only BFN and BF-SEEK are robust enough to yield a good approximation of the object, but BF-SEEK needs to be corrected with the attenuation to keep stable (Fig. 2).

All in all, interests in Back and Forth techniques are justified since BF-SEEK improves significantly the SEEK filter in any situation we test.

### 3. CONCLUSIONS

A common formulation for iterative stabilization of reversible evolution systems is given. It is used to define methods which solve some inverse problems for wave equations. Experiments show that the techniques we

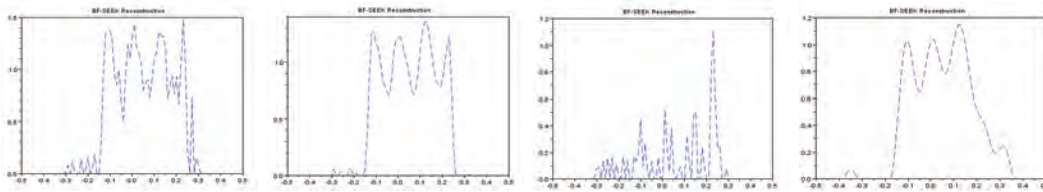


FIGURE 2. BF-SEEK reconstructions. Case  $\delta_{data} = 99$  and  $\nu = 30\%$ :  $\alpha = 0$  (a) and  $\alpha = 2$  (b). Case  $\delta_{data} > 99$ :  $\alpha = 0$  (c) and  $\alpha = 1.8$  (d).

introduced may offer an alternative to usual inverse methods for TAT problem. In applications, knowledge about the quality of the sensors, the background and the model approximations can be used by filters, but in this case they need to be precisely tuned.

The use of an artificial attenuation is motivated by good results, and allows one to consider lossy medium in back and forth implementations when the physical loss does not exceed the numerical attenuation.

When space dimension increases, we first face an excessive calculation cost (one BF-SEEK iteration with rank 60 equals almost one thousand BFN in computation time). So one would get interested in hybrid methods, e.g. getting first estimates with TR and BFN and then reconstructing the solution with filters. A solution is offered by Perfectly Matched Layers to reduce the space domain of calculation and for which a first order discrete scheme formulation is necessary for the filters.

## REFERENCES

- [1] M. Agranovsky, P. Kuchment and L. Kunyansky, 2009, *On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic and photoacoustic tomography*, Ch. 8 in L. H. Wang (Editor) "Photoacoustic imaging and spectroscopy", CRC Press, pp. 89-101.
- [2] D. Auroux and J. Blum, 2005, *Back and Forth Nudging algorithm for data assimilation problems*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 340, pp. 873-878.
- [3] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, 1992, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., Vol. 30, pp. 1024-1065.
- [4] X. Bonnefond and S. Marinescu, 2010, *Application of a nudging technique for thermoacoustic tomography*, Preprint.
- [5] D. Finch, S. Patch and Rakesh, 2004, *Determining a function from its mean values over a family of spheres*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 35 (5), pp. 1213-1240.
- [6] X. Jin and L. V. Wang, 2006, *Thermoacoustic tomography with correction for acoustic speed variations*, Med. Biol., Vol. 51, pp. 6437-6448.
- [7] R. E. Kalman, 1960, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 35-45.
- [8] R. E. Kalman and R. S. Bucy, 1961, *New result in linear filtering and production theory*, J. Basic Eng., Maroh., pp. 95-108.
- [9] P. Kuchment and L. Kunyansky, 2010, *Mathematics of thermoacoustic tomography*, Chapter 19 in Vol. 2 of "Handbook of Mathematical Methods in Imaging", pp. 817-866, Springer Verlag, arXiv: 0912.2022v1.
- [10] K. Liu, *Locally distributed control and damping for the conservative systems*, SIAM J. Control Optim., 1997, Vol. 35 (5), pp. 1574-1590.
- [11] G. Paltauf, R. Nuster, M. Haltmeier and P. Burgholzer, 2007, *Photoacoustic tomography using a Mach-Zehnder interferometer as acoustic line detector*, Appl. Opt., Vol. 46, pp. 3352-3358.
- [12] D. T. Pham, J. Verron and M. C. Roubaud, 1998, *A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography*, J. Marine Sys., Vol. 16, pp. 323-340.
- [13] J. Qian, P. Stefanov, G. Uhlmann and H. Zhao, 2010, *A new numerical algorithm for thermoacoustic and photoacoustic tomography with variable sound speed*, arxiv.org/abs/1101.3729.
- [14] K. Ramdani, T. Takahashi and M. Tucsnak, 2007, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations, Application to LQR problems*, ESAIM: COCV, Vol. 13 (3), pp. 503-527.
- [15] D. Rozier, F. Birol, E. Cosme, P. Brasseur, J. M. Brankart and J. Verron, 2007, *A reduced-order Kalman filter for data assimilation in physical oceanography*, SIAM Rev., Vol. 49 (3), pp. 449-465.
- [16] M. Xu and L.V. Wang, 2006, *Photoacoustic imaging in biomedecine*, Rev. Sci. Instrum., Vol. 77 (4), 041101.
- [17] J. Zabczyk, 1976, *Remarks on the algebraic Riccati equation in Hilbert space*, Appl. Math. Optim., Vol. 2 (3), pp. 251-258.
- [18] E. Zuazua, 2005, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*, SIAM Rev., Vol. 47 (2), pp. 197-243.



# Application of a nudging technique to thermoacoustic tomography

Xavier Bonnefond and Sébastien Marinesque

December 3, 2011

## Abstract

ThermoAcoustic Tomography (TAT) is a promising, non invasive, medical imaging technique whose inverse problem can be formulated as an initial condition reconstruction. In this paper, we introduce a new algorithm originally designed to correct the state of an evolution model, the *back and forth nudging* (BFN), for the TAT inverse problem. We show that the flexibility of this algorithm enables to consider a quite general framework for TAT. The backward nudging algorithm is studied and a proof of the geometrical convergence rate of the BFN is given. A method based on Conjugate Gradient (CG) is also introduced. Finally, numerical experiments validate the theoretical results with a better BFN convergence rate for more realistic setups and a comparison is established between BFN, CG and a usual inversion method.

## 1 Introduction

ThermoAcoustic Tomography (TAT) is a hybrid imaging technique that uses ultrasound waves produced by a body submitted to a radiofrequency pulse, uniformly deposited throughout the body. The absorption of this initial energy causes a non-uniform thermal expansion, leading to the propagation of a pressure wave outside the body to investigate. This wave is then measured all around the body with piezoelectric transducers or, more recently, thanks to interferometry techniques.

It appears that the absorption of the initial pulse is highly related to the physiological properties of the tissue [19]. As a result, the magnitude of the

ultrasonic emission (*i.e.* thermoacoustic signal), which is proportional to the local energy deposition, reveals physiologically specific absorption contrast. See [38, 22, 32, 44] for an introduction to the experimental setup. Considering that the initial illumination is a Dirac distribution in time, the problem of recovering the absorptivity of the investigated body from the thermoacoustic signal is equivalent to recovering the initial condition of a Cauchy problem involving the wave equation from the knowledge of the solution on a surface surrounding the imaging object [37]. Note that the experimental constraints do not allow the acquisition surface to completely surround the tissues to investigate, so that one cannot expect a better situation than measurements on a half-sphere (as in breast cancer detection for example). Moreover, several experimentation constraints limit the number of sensors, so that the methods of reconstruction considered must be robust to the space sampling.

Many works dealing with TAT have been achieved during the last decade (see [23] for an overview, or [1, 43]), and many of the methods used in these papers strongly depend on a set of additional assumptions, among which:

- the *homogeneity of the tissues*, leading to a constant speed of sound for the pressure wave;
- the *lack of frequency-dependent attenuation*, so that the pressure wave obeys the classical, undamped, wave equation;
- the *complete data situation*, where the acquisition surface is considered to enclose the whole body.

The study of TAT in the case of an homogeneous medium without attenuation gave rise to explicit inversion formulas. These latter usually require that the acquisition set is a closed surface, even if they can be approximated in the *limited view* situation (where the surface is a half-sphere for example). Among these, filtered backprojection formulas, even though they have been very successfully implemented in several situations, seem to face some issues when the source has support partly outside the observation surface, or when the data sampling is not sufficient (see [12, 15]). Fourier's type formulas, which offer a much better numerical efficiency, apply on very specific geometries (see [24, 31, 46]) or imply some additional approximations, like an interpolation from spherical to cartesian coordinates [2, 11, 13, 14, 45, 47]. Even though some of these techniques give rise to very efficient reconstruction schemes (especially in [24]), so far it is not clear if they can be extended

to less restrictive acquisition geometries or to an attenuated wave with non constant speed (see [25] for an answer about the acquisition surface).

Moreover, since the work of Burgholzer *et al* (see [9]), the *time reversal* method (first suggested in [12]) has been applied with success to the TAT (see *e.g.* [16, 17]). Even though the first known results on this method required a complete data framework, recent works by Stefanov *et al* extended it to a Neumann Series method in a fairly general situation (incomplete data, known variable sound speed and external source) with very good results in [33, 39].

In this paper, we show that the framework of TAT lends itself to the application of some *data assimilation* techniques. These latter, mainly used in geophysics, aim at correcting the state of an evolutionary model by means of data, in order to obtain a good approximation of the real state (see [40] for an introduction). The particular data assimilation method proposed here is based on a *nudging* technique: given an evolution model of the state and direct observation (our data), it consists in adding, inside the model equation, a newtonian recall of the state solution to the observations (or data), which is usually called the feedback or nudging term [4]. As we shall see, from a practical point of view, this method can be successfully used to manage the usual issues of the TAT inverse problem as incomplete data, external source and variable sound speed (when given, however). So far, however, the theoretical convergence result for the nudging technique is based on a classical result about stabilization of the wave equation [26, 36], which requires somehow a geometric optics condition (see [6] or [27] for an overview). This geometric condition, whose verification is not a simple matter, is not automatically satisfied in an incomplete data framework or with a variable sound speed. Consequently the proof provided in this article only stands in a very favorable situation (3d case, constant speed and complete data), but does not depend on usual stabilization techniques and yields explicit convergence rates.

Different nudging terms can be found in the literature, and most of them have been used to assimilate data in physical oceanography as in [21, 28, 30] and more recently in [5]. Fundamental articles offer the basis of most popular techniques as Kalman filter [20], Kalman-Bucy filter [8] and Luenberger observer [29].

Since the basic nudging method showed its limits in real conditions by using the data once, Auroux and Blum proposed to extend the method by adding a resolution backward in time and iterating the process, thus defining the

*back and forth nudging* (BFN) algorithm. They presented this technique in [3, 4] and implemented it with computationally efficient results in comparison with traditional data assimilation methods, like optimal filters (from extended Kalman's to particle filters) or other optimal minimization techniques (variational methods), which appear costfull respectively in memory needs and computing time – see the brief introductions of Talagrand in [40, 41, 42] for further details about data assimilation and a relevant bibliography. Recently, a more general formulation of the BFN using observers has been presented by Ramdani, Tucsnak and Weiss in [35].

As inverse problems are often solved by means of variational techniques, we also introduce a least squares method based on the Conjugate Gradient (CG).

The two methods introduced are compared to the Neumann Series presented in [33], which is one of the best existing method which fits the variable speed case and partial data settings.

This paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the TAT inverse problem in a quite general form, *i.e.* without the use of the usual assumptions, then we describe the BFN algorithm and we state the main result of this article: the convergence Theorem 3. Then Section 3 is devoted to the proof of this result. In Section 4, we describe the variational method that uses CG algorithm. Finally, we give numerical results in Section 5.

## Notation

In the following, we shall use this notation:

- The open ball with center  $x \in \mathbb{R}^3$  and radius  $r > 0$  is denoted by  $B(x, r)$ ;
- Its boundary, the sphere with center  $x$  and radius  $r$ , is noted  $S(x, r)$ ;
- For every  $x \in \mathbb{R}^3$  and  $0 < r_1 < r_2$ , we define the spherical shell of center  $x$  and radii  $r_1, r_2$ :

$$A(x, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 < \|x - y\| < r_2\},$$

and if  $x = 0$ :

$$A(r_1, r_2) = A(0, r_1, r_2);$$

- For any set  $S$  of  $\mathbb{R}^3$  and  $r_1 > 0$ , we denote by  $T(S, r_1)$  the set  $S$  extended to the points at a distance lower than  $r_1$  from  $S$ :

$$T(S, r_1) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in S, \|y - x\| < r_1\}.$$

## 2 Presentation of the method

### 2.1 The general TAT problem

In the following, we will denote by  $p_{\text{exact}}(x, t)$  the pressure wave resulting from the thermal expansion of the body. We will make the assumption that the measurement process of this pressure is subject to some perturbation  $p_{\text{noise}}$ , such that the actual data can be written  $p_{\text{data}} := p_{\text{exact}} + p_{\text{noise}}$ . In thermoacoustic tomography, the data are nothing but  $\{p_{\text{data}}(x, t) \mid x \in \mathcal{S}\}$ , where  $\mathcal{S}$  is a surface surrounding the body to investigate. The pressure  $p_{\text{exact}}$  satisfies the Cauchy problem (see [37] for a detailed calculation):

$$\begin{cases} Lp_{\text{exact}}(x, t) = E_{\text{dep}}(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [-1, \infty), \\ p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where  $L$  is the differential operator governing the wave, most likely the wave operator, or a damped wave operator, and  $E_{\text{dep}}$  is the energy deposited in the body around the time  $t = 0$  (so we have to consider a negative initial time, e.g.  $t = -1$ ). This energy can be written:

$$E_{\text{dep}} = e(x) \frac{dj}{dt}(t),$$

$$e(x) := \frac{\beta c}{c_p} I_{em}(x) \Psi(x),$$

where  $e$  is called the *normalized energy deposition function*. Here  $\beta$  is the *thermal expansion coefficient*,  $c_p$  is the *specific heat capacity*,  $c$  the sound speed and  $I_{em}$  is the *radiation intensity* of the initial energy pulse. All these parameters, including the time shape  $j$  of the pulse, are known and we see that the knowledge of  $E_{\text{dep}}$  is sufficient to compute the absorption density  $\Psi$  inside the body, which is our purpose.

So far, the general thermoacoustic problem can be formulated in the following way:

Let  $p_{\text{exact}}(x, t)$  be solution of:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lp_{\text{exact}}(x, t) = f_0(x) \frac{dj}{dt}(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [-1, \infty), \\ p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (1)$$

where  $j$  is known and  $f_0$  is the object to reconstruct, with compact support in the unit ball  $B(0, 1)$ . Can we compute  $f_0$ , or a good approximation of  $f_0$ , from the knowledge of  $p_{\text{data}} = p_{\text{exact}} + p_{\text{noise}}$  on a surface  $\mathcal{S}$  surrounding  $B(0, 1)$  ?

## 2.2 Reduction to the homogeneous case

As we have seen, even though it is not possible in practice, the initial energy deposition is meant to be a Dirac pulse in time at  $t = 0$ , that is  $\frac{dj}{dt} = \delta'_0$ . Let  $q_0$  be solution, which is no longer to be considered for negative time values, where it is the null solution, of the Cauchy problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lq_0(x, t) = f_0(x) \delta'_0(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ q_0(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t q_0(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right.$$

which is equivalent to:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lq_0(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ q_0(x, 0) = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t q_0(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (2)$$

according to Duhamel's principle (see [10]), provided that  $L$  is a (damped) wave operator. Then  $p_{\text{data}}$  is solution of (1) if and only if  $p_{\text{data}} = j *_t q_0$ , which means that a deconvolution operation on the thermoacoustic signal  $p_{\text{exact}}$  leads to the knowledge of the solution  $q_0$  of (2) on the same surface  $\mathcal{S}$  surrounding the object.

In the following, we will still denote by  $p_{\text{exact}}$  the solution of (2), assuming that we know this latter for all  $x$  in  $\mathcal{S}$ , and all  $t$  in  $\mathbb{R}_+$ .

### 2.3 Some useful facts about the standard wave equation

In this section we give some basic properties of the following wave equation:

$$\begin{cases} L_0 u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = l(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = h(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3)$$

where  $l$  and  $h$  are two  $C^\infty$  functions with compact support in  $B(0, 1)$ , and  $L_0 := \partial_{tt} - \Delta$ . All this material can be found in [18] for example. According to Huyghens' principle in the strong sense, for every couple  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ , the classical solution  $u(x_0, t_0)$  of (3) only depends on the values of  $l$  and  $h$  on the backward characteristic cone:

$$\|x - x_0\| = |t - t_0|.$$

As a matter of fact, when the initial conditions  $l$  and  $h$  have their support in  $B(0, 1)$ , the solution at any time  $\tilde{t}$  has its support in  $B(0, 1 + \tilde{t})$ .

Huyghens' principle leads to the energy conservation for the solution  $u$  of (3).

**Definition 1.** For every time  $T$ , we call *energy* of  $u$  the quantity:

$$E_u(T) := \frac{1}{2} \left( \|u(\cdot, T)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\partial_t u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right).$$

The variation of the energy of  $u$  is estimated from the following identity:

$$\partial_t u (\partial_{tt} u - \Delta u) = 0 = \partial_t \left[ \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{(\partial_t u)^2}{2} \right] - \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u).$$

Since  $u$  has a compact support, integrating for  $0 < t < T$  and over the whole space yields:

$$E_u(T) = E_u(0).$$

Note that if  $h$  is zero, we have:

$$E_u(0) = \frac{1}{2} \|l\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2.$$

## 2.4 Nudging

Now, let us introduce the application of the BFN algorithm to the general TAT problem.

Assume that the observation surface  $\mathcal{S}$  is included in the sphere  $S(0, 1)$ . As exposed in Section 2.1, our purpose is to compute an approximation of the original object  $f_0$  from an incomplete set of data  $\phi p_{\text{data}}$ , where  $p_{\text{data}}$  is the solution (possibly contaminated by noise) of the wave equation (2) and where  $\phi$  allows the knowledge of  $p_{\text{data}}$  only on the observation surface  $\mathcal{S}$ . Theoretically speaking,  $\phi$  should be  $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$ , but in practice the discretization process allows us to choose a  $C^\infty$  function with compact support. Indeed, given a resolution, there exists  $\varepsilon > 0$  such that any function supported in  $T(\mathcal{S}, \varepsilon)$  and equal to 1 on  $\mathcal{S}$  has the same discrete counterpart as  $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$  (see Figure 1). This is the reason why we will make the following assumptions on  $\phi$ :

- i  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leq \phi(x) \leq 1;$
- ii  $\phi$  has a compact support in  $T(\mathcal{S}, \varepsilon);$
- iii  $\forall x \in T(\mathcal{S}, \varepsilon/2), \quad \phi(x) = 1.$

Finally, in order to avoid some technical difficulties, we will assume that the initial object  $f_0$  has his support in  $B(0, 1 - \varepsilon)$  and is such that every Cauchy problem we shall consider has a classical solution, say  $C^\infty$ .

We may proceed as follows:

**Definition 2** (Iterate of the BFN algorithm for TAT).

1. [Forward evolution]

*From an rough estimate  $f_{0,1}$  of the object to reconstruct  $f_0$ , defined as an approximate of the initial condition supported in  $B(0, 1 - \varepsilon)$ , we first consider a solution  $p_1$  of Problem (3) with initial conditions  $l = f_{0,1}$  and  $h = 0$  (as usual in TAT).*

*We compute this solution until time  $T = 2$ , chosen so that both  $p_1(\cdot, t)$  and  $p_{\text{exact}}(\cdot, t)$  (just as every function with compact support in the ball  $B(0, 1 - \varepsilon)$ ) vanish on  $B(0, 1 + \varepsilon)$  for all  $t \geq T$  (cf Huyghens' principle in Section 2.3).*



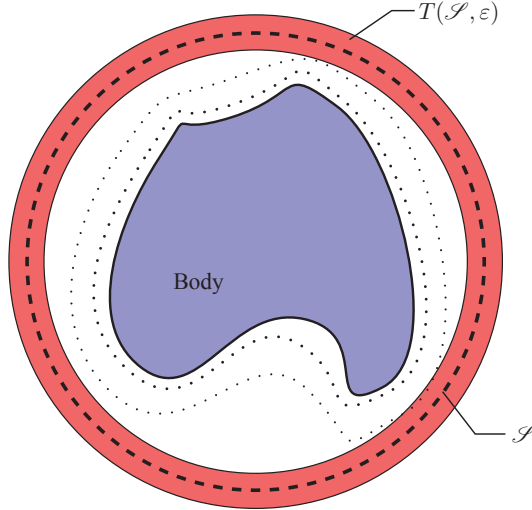


Figure 1: The body to investigate is surrounded by the acquisition surface  $\mathcal{S}$ , and generates a pressure wave.

Thus at this final time, in the noise-free situation, the innovation term  $p_1 - p_{\text{data}}$ , defined as the difference between the solution  $p_1$  of Problem (3) and the data, is still a solution of (3) with  $l = f_0 - f_{0,1}$  and  $h = 0$  and has an energy matching up to:

$$E_{p_1 - p_{\text{data}}}(T) = E_{p_1 - p_{\text{data}}}(0) = \frac{1}{2} \|\nabla(f_0 - f_{0,1})\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2,$$

since the conservation of energy for the wave equation holds in this situation.

## 2. [Backward evolution]

Then we apply the backward nudging method to make the solution evolve back in time, with, as announced, the addition in the backward equation of a newtonian feedback, which adjusts the solution along its evolution by recalling it to the observed data.

Namely, we add to  $L$  the feedback correction term  $k\phi\partial_t(\cdot - p_{\text{data}})$ , for some nudging parameter  $k \in \mathbb{R}_+$ . And we compute the backward solution starting from the final state of the forward implementation, i.e.  $p_1(x, T)$  and  $\partial_t p_1(x, T)$ , until the initial time  $t = 0$ .

We obtain a corrected solution  $\tilde{p}_1$  of the Cauchy problem, called back-

ward nudging problem:

$$\begin{cases} L\tilde{p}_1(x, t) = k\phi(x)\partial_t(\tilde{p}_1 - p_{\text{data}})(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ \tilde{p}_1(x, T) = p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t\tilde{p}_1(x, T) = \partial_t p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4)$$

In order to obtain an equation in forward time, let us consider the map  $t \mapsto \tilde{p}_1(T - t)$ , still denoted by  $\tilde{p}_1$ . The Cauchy problem becomes:

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{p}_1 = -k\phi(x)\partial_t(\tilde{p}_1 + p_{\text{data}})(x, T - t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ \tilde{p}_1(x, 0) = p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t\tilde{p}_1(x, 0) = -\partial_t p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (5)$$

where  $\tilde{L}$  is the operator  $L$  backwards in time.

Obviously, in practice, when  $L$  is not the wave operator, there is no reason for this operator to be reversible. Nevertheless the newtonian feedback may act as a regularization term and keep the computation stable.

### 3. [Update of the estimate]

Finally, after this back and forth evolution, a new estimate  $\tilde{p}_1(T)$  is obtained, but in order to iterate the process we need the new estimate to be supported in  $B(0, 1 - \varepsilon)$ , just like  $f_0$  and  $f_{0,1}$ . This is simply done by defining:

$$f_{0,2}(x) := \mathbb{1}_{B(0,1-\varepsilon)}\tilde{p}_1(x, T), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

The last step can be easily justified by the fact that, since  $f_0$  is supported in  $B(0, 1 - \varepsilon)$ :

$$\|f_0 - \tilde{p}_1(\cdot, T)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)} \geq \|f_0 - \mathbb{1}_{B(0,1-\varepsilon)}\tilde{p}_1(\cdot, T)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}.$$

This scheme is then iterated, constructing a sequence of estimates  $(f_{0,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ , which may converge to  $f_0$ . The following theorem, proved in Section 3, ensures that the convergence is geometrical in  $H_0^1(\mathbb{R}^3)$  under the assumptions:

- (i)  $L$  is the standard wave operator  $\partial_{tt} - \Delta$ ;
- (ii) The data are noise-free, i.e.  $p_{\text{data}} = p_{\text{exact}}$  (see Section 2.1), and the observation surface  $\mathcal{S}$  is the whole sphere  $S(0, 1)$ ;

- (iii) The object to reconstruct  $f_0$  is a  $C^\infty$  function with compact support in  $B(0, 1)$ ;
- (iv)  $f_{0,1}$  and  $f_{0,2}$  are two consecutive estimates of  $f_0$  obtained as described in Definition 2.

**Theorem 3.** Under the assumptions (i)-(iv), there exists  $1 > s > 0$  only depending on  $f_0$ ,  $\phi$  and the nudging parameter  $k > 0$  such that:

$$\|f_0 - f_{0,2}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)} \leq s \|f_0 - f_{0,1}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}. \quad (6)$$

We only consider this ideal framework for the sake of the proof, but numerical results given in Section 5 apply with more realistic assumptions and show a better convergence rate.

### 3 Proof of Theorem 3

This section is devoted to the proof of Theorem 3. We study the case where  $L = L_0 := \partial_{tt} - \Delta$  is the standard wave operator. Let  $\phi$ ,  $f_0$  and  $p_{\text{data}}$  be as in Theorem 3. In particular, for the sake of the proof, we make the assumptions that the data are noise-free and that, since  $\mathcal{S} = S(0, 1)$ , the set  $T(\mathcal{S}, \varepsilon/2)$  is equal to  $A(1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$ . We shall use the notation:

$$L_k := \partial_{tt} - \Delta + k\phi\partial_t, \quad k \in \mathbb{R}_+.$$

We first study the existence of the objects used in the BFN approximation scheme.

#### 3.1 Solution of the backward nudging equation

The proof of the following theorem can be found in [7], Chapter 2.8.

**Theorem 4.** Given three  $C^\infty$ -functions  $\phi$ ,  $l$  and  $h$  with compact support and  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $T > 0$  there exists a unique  $C^\infty$  solution  $p$  of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} L_k p(x, t) = -k\phi(x)\partial_t p_{\text{data}}(x, T - t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ p(x, 0) = l(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p(x, 0) = h(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (7)$$

Moreover, for every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ ,  $p(x_0, t_0)$  only depends on the values of  $l$ ,  $h$ ,  $\phi$  and  $p_{\text{data}}(\cdot, T - \cdot)$  in the backward characteristic cone:

$$\|x - x_0\| \leq |t - t_0|.$$

In particular, this means that for every sketch  $f_{0,1}$  with compact support and of class  $C^\infty$ , the solution  $\tilde{p}_1$  of the backward nudging equation (7) exists, and for all  $t \in [0, T]$  the function  $\tilde{p}_1(\cdot, t)$  has a compact support. This property will be helpful to apply an energy method.

Now, it is easy to show that if  $\tilde{p}_1$  is solution of (7) with initial conditions  $l(x) = \tilde{p}_1(x, 0) = p_1(x, T)$  and  $h(x) = \partial_t \tilde{p}_1(x, 0) = -\partial_t p_1(x, T)$ , then the function  $u := \tilde{p}_1 - p_{\text{data}}(\cdot, T - \cdot)$  is solution of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} L_k u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ u(x, 0) = p_1(x, T) - p_{\text{data}}(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = -\partial_t (p_1 - p_{\text{data}})(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (8)$$

and satisfies:

$$E_u(0) = E_{p_1 - p_{\text{data}}}(T) = \frac{1}{2} \|f_{0,1} - f_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Since, from the definition of  $f_{0,2}$ :

$$E_u(T) \geq \frac{1}{2} \|\tilde{p}_1(\cdot, T) - f_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} \|f_{0,2} - f_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2,$$

we only need to prove that:

$$E_u(T) \leq s E_u(0), \quad \text{for some } 0 < s < 1,$$

to complete the proof of Theorem 3. This is the purpose of the next section.

### 3.2 Energy inequality

We have the following identity for every solution  $u$  of (7):

$$\partial_t u L_k u = 0 = \partial_t \left[ \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{(\partial_t u)^2}{2} \right] + k \phi (\partial_t u)^2 - \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u).$$

Recall that  $u$  has a compact support for every  $t$ , thus, integrating the latter equality over the whole space and for  $0 < t < T$ , we get:

$$E_u(T) - E_u(0) = -k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t u)^2. \quad (9)$$

Consequently, the loss of energy of  $u$  is exactly the amount of its 'energy' passing through the support of  $\phi$  during time  $T$ .

In [12], in order to invert the spherical Radon transform, Finch *et al* proved the following *trace identity*, which will be useful to estimate (9):

**Theorem 5.** Suppose  $h_i \in C_0^\infty(B(0, \rho))$  and  $u_i$  is the solution of (3) for  $l = 0$  and  $h = h_i$ ,  $i = 1, 2$ . Then we have the identity

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} h_1 h_2 = \frac{-1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0, \rho)} t u_1 \partial_{tt} u_2.$$

From this we will obtain a key estimate of the 'energy' passing through the sphere  $S(0, \rho)$ . Indeed, if  $u$  is solution of (3) with  $h = 0$ , taking  $h_1 = f$  and  $h_2 = \Delta f$  in the theorem yields:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f \Delta f = \frac{-1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0, \rho)} t (\partial_t u)^2,$$

which gives:

$$\frac{1}{2} \|f\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0, \rho)} t (\partial_t u)^2. \quad (10)$$

Let us introduce the solution  $u_0$  of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} L_0 u_0(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ u_0(x, 0) = p_1(x, T) - p_{\text{data}}(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_{0t}(x, 0) = -\partial_t p_1(x, T) + \partial_t p_{\text{data}}(x, 0), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

which is nothing but  $(p_1 - p_{\text{data}})(\cdot, T - \cdot)$ .

Then  $u = u_0 + v$  where  $v$  is solution of:

$$\begin{cases} L_0 v(x, t) = -k \phi \partial_t (u_0 + v)(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ v(x, 0) = \partial_t v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

The calculation of the energy of  $v$  yields:

$$E_v(T) = -k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi \partial_t u_0 \partial_t v - k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t v)^2.$$

Thanks to the Cauchy-Schwarz inequality, one has:

$$E_v(T) \leq k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)} H(T) - k H(T)^2, \quad (11)$$

where:

$$H(T) := \left\| \sqrt{\phi} \partial_t v \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)}.$$

Moreover, we have:

$$E_v(T) \geq \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t v)^2(\cdot, T) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t v)^2(\cdot, T) = \frac{d}{dT} (H^2)(T).$$

So that, dividing by  $H(T)$  in (11) we find:

$$\frac{d}{dT} H(T) + kH(T) \leq k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)}.$$

A classical calculation shows that this differential inequation yields:

$$H(T) \leq \int_0^T k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,s] \times \mathbb{R}^3)} e^{k(s-T)} ds,$$

and since the map  $s \mapsto \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,s] \times \mathbb{R}^3)}$  is increasing with  $s$ , we finally get:

$$H(T) \leq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} (1 - e^{-kT}).$$

This inequality expresses the fact that despite the feedback part of Equation (7), its solution  $u$  keeps a certain amount of energy on the support of  $\phi$ , which is proportional to the same energy for  $u_0$ . Indeed:

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} &\geq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} - H(T) \\ &\geq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} e^{-kT}, \end{aligned}$$

thus:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t u)^2 \geq \underbrace{\left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t u_0)^2 \right)}_A e^{-2kT}. \quad (12)$$

The last step of this proof is the estimation of  $A$ . We have:

$$A \geq \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t u_0)^2 = \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2 (T-t),$$

so that:

$$A \geq \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2 = \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \int_0^T \int_{S(0, \rho)} (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2.$$

Since  $p_1 - p_{\text{data}}$  vanishes on  $A(1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$  for every  $t > T$ :

$$A \geq \frac{1}{T} \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \int_0^\infty \int_{S(0,\rho)} t(\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2.$$

Finally, applying (10) to  $p_1 - p_{\text{data}}$ , one has:

$$A \geq \frac{1}{T} \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \rho \frac{1}{2} \|f - f_{0,1}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2 d\rho,$$

which yields:

$$A \geq \frac{\varepsilon}{T} E_u(0). \quad (13)$$

Combining the above estimate with (9) and (12), we get:

$$E_u(T) \leq \left(1 - \frac{k\varepsilon}{T} e^{-2kT}\right) E_u(0),$$

which was the inequality to prove, with  $s := 1 - \frac{k\varepsilon}{T} e^{-2kT} < 1$ .

**Remark 6.** *Since we know that  $T = 2$ , there exists an optimal choice for the nudging parameter  $k$  which leads to  $s = 1 - \frac{\varepsilon}{8e}$ . Even though this theoretical convergence rate does not seem satisfactory, we shall see in Section 5 that the actual convergence is much faster in practice.*

## 4 Variational approach

We deal now with a variational formulation of the inverse TAT problem, that leads to some new reconstruction techniques.

In this section, we consider the reconstruction of an object  $f_0 \in H_0^1(B(0,1))$  from a set of observations  $p_{\text{data}} = p_{\text{exact}} + p_{\text{noise}}$ . Here,  $p_{\text{exact}} := \mathscr{W} f_0$  where the linear operator  $\mathscr{W}$  maps an initial condition  $f$  to its related solution of the Cauchy problem (3) with a null derivative initial condition  $h = 0$ , restricted to a non-empty, open observation set  $A_\varepsilon \subset A(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Namely,  $\mathscr{W}$  can be written  $\mathscr{W} = \Phi W$ , with:

$$\begin{aligned} W: H_0^1(B(0,1)) &\longrightarrow C^0([0,T]; H_0^1(B(0,R))) \\ f &\longmapsto Wf, \end{aligned}$$

where  $Wf$  is the weak solution of (3) with the initial conditions  $l = f$  and  $h = 0$ . Even though  $Wf$  is defined on the whole space  $\mathbb{R}^3$ , we can

choose  $R > 0$  large enough for any solution of (3) to keep a null trace on  $S(0, R)$ , such that the restriction of  $Wf$  to  $B(0, R)$  is in  $H_0^1(B(0, R))$  for every  $t \in [0, T]$ . The operator  $\Phi$  is the restriction operator:

$$\begin{aligned} \Phi: L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3) &\longrightarrow L^2([0, T] \times A_\varepsilon) \\ g &\longmapsto g|_{A_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Our purpose is to solve the inverse problem:

$$\mathcal{W}f = p_{\text{data}},$$

by means of the following minimization problem:

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left| \begin{array}{l} \text{Minimize } J_\alpha(f) \\ \text{s.t. } f \in H_0^1(B(0, 1)). \end{array} \right.$$

Here,  $J_\alpha$  is the Tikhonov functional:

$$\begin{aligned} J_\alpha: H_0^1(B(0, 1)) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{W}f - p_{\text{data}}\|_{L^2(A_\varepsilon)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \|f\|_{L^2(B(0, 1))}^2, \end{aligned}$$

with  $\alpha > 0$ . Since  $\mathcal{W}$  is a bounded linear operator,  $J_\alpha$  is a strictly convex (thanks to the regularization parameter  $\alpha$ ), differentiable and coercive functional, and any solution of  $(\mathcal{P}_\alpha)$  is characterized by:

$$\nabla J_\alpha(f) = \mathcal{W}^*(\mathcal{W}f - p_{\text{data}}) + \alpha f = 0.$$

For any  $\alpha > 0$ , the above equation has a unique solution:

$$f_\alpha = (\mathcal{W}^*\mathcal{W} + \alpha I)^{-1} \mathcal{W}^* p_{\text{data}},$$

so that Problem  $(\mathcal{P}_\alpha)$  is well-posed. We have chosen to solve this latter by means of the conjugate gradient method, which requires, at each iteration, the computation of  $\nabla J_\alpha$ .

Now, one has, for every  $\psi \in C_0^\infty(B(0, 1))$  and  $f \in H_1^0(B(0, 1))$ :

$$\begin{aligned} \langle \nabla J_\alpha(f), \psi \rangle_{L^2(B(0, 1))} &= \langle \mathcal{W}^*(\mathcal{W}f - p_{\text{data}}), \psi \rangle + \alpha \langle f, \psi \rangle \\ &= \underbrace{\langle \mathcal{W}f - p_{\text{data}}, \mathcal{W}\psi \rangle}_{G_{f, \psi}} + \alpha \langle f, \psi \rangle, \end{aligned}$$



with:

$$\begin{aligned} G_{f,\psi} &= \int_0^T \int_{A_\varepsilon} (Wf - p_{\text{data}}) W\psi \\ &= \int_0^T \int_{B(0,R)} \mathbb{1}_{A_\varepsilon} (Wf - p_{\text{data}}) W\psi. \end{aligned}$$

Considering the weak solution  $u^*$  of the adjoint equation:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u^*(x, t) - \Delta u^*(x, t) = \mathbb{1}_{A_\varepsilon}(Wf - p_{\text{data}}), \\ u^*(x, T) = 0, \\ \partial_t u^*(x, T) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

and since  $W\psi \in C_0^\infty(B(0, R))$ , we have:

$$G_{f,\psi} = \int_0^T \int_{B(0,R)} \partial_{tt}u^* W\psi + \int_0^T \int_{B(0,R)} \langle \nabla u^*, \nabla W\psi \rangle.$$

Since  $B(0, R)$  has been chosen large enough, applying Green's formula and integrating by parts yield:

$$\begin{aligned} G_{f,\psi} &= \int_0^T \int_{B(0,R)} u^* L W\psi - \int_{B(0,R)} \partial_t u^*(x, 0) W\psi(0) dx \\ &= \langle -\partial_t u^*(\cdot, 0), \psi \rangle. \end{aligned}$$

Finally:

$$\nabla J_\alpha(f) = -\partial_t u^*(\cdot, 0) + \alpha f.$$

This calculation ensures that each iteration of the conjugate gradient algorithm necessitates successively the computations of  $Wf$  and of its adjoint state  $u^*$ , whose algorithmic complexity is comparable to one iteration of the BFN algorithm. This should be noted that the computation of the adjoint state requires the storage of  $Wf - p_{\text{data}}$  on  $A_\varepsilon$ , which is not required in the BFN algorithm.

Note that even if we have formulated the calculation of  $\nabla J_\alpha$  in a continuous framework, its discrete counterpart leads to similar considerations. Obviously, the behaviour of the method strongly depends on the scheme chosen to compute solutions of (3).

## 5 Numerical implementation

In order to test the numerical behavior of the BFN method, we have implemented it in several situations. In particular, we have considered the case where the data are available only on a half-sphere, so that the illustration fits the practical experimental set-up.

### 5.1 Implementation framework

We now describe the numerical context chosen to compare Back and Forth Nudging (BFN) and the Conjugate Gradient (CG) techniques to a reasonable algorithm, namely the Neumann Series (NS) (since it is shown in [33] that the use of NS significantly improves the Time Reversal (TR) algorithm, we mainly chose to consider NS results).

We work now in a 2D framework for numerical costs reasons. The object to reconstruct is in  $[-0.5, 0.5]^2$  gridded with  $256^2$  pixels, such that the space step is  $\delta x = 1/256$ .

Sensors are located on the circle  $S(0, \sqrt{2}/2)$  surrounding the object, on which various distributions are considered. If no additional information is given, 800 detectors are used when the data are complete. Nevertheless some reconstructions were computed with less detectors in order to bring to light the robustness of the techniques. When a multiplicative white Gaussian noise is added to the data, their level is set to 15%.

The final time  $T = \sqrt{2}$  is then taken minimal in order to leave waves traveling to the sensors when sound speed is constant with value 1. Note that the four studied methods can significantly be improved by increasing  $T$  (*cf.* [33]). We use the domain  $[-0.5 - \sqrt{2} - \varepsilon; 0.5 + \sqrt{2} + \varepsilon]^2$  for the computation, where  $\varepsilon$  represents a few pixels, which is large enough to avoid reflection effects on its boundary.

The model is computed by means of the classical finite difference time domain (FDTD) method (explicit Euler scheme and classical five points discretization of the Laplace operator  $\Delta_{\delta x}$ ).

Figure 2 represents the 2-dimensional objects to reconstruct, latter denoted by  $f_0$ . Squares able to give rise to typical phenomenons of observation of wave-like systems while the second object, known as the Shepp-Logan phan-

tom, allows good analysis and comparisons of the ability of the methods. The third object has been considered for combining sharp contours with smoother areas. Each is implemented as a 256 by 256 matrix.



Figure 2: The initial objects  $f_0$ : squares, Shepp-Logan and skull.

Four sound speeds are used. First a constant one  $c = 1$ , then three other one, variable, which are chosen as in [33], respectively defined as:

$$\begin{aligned}
 c(x, y) &= 1 + 0.2 \sin(2\pi x) + 0.1 \cos(2\pi y), \\
 c(x, y) &= \frac{9(x^2 + y^2)}{1 + 9(x^2 + y^2)} + \exp(-90(x^2 + y^2)) \\
 &\quad - 0.4 \exp(-10(3\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2), \\
 c(x, y) &= 1.25 + \sin(2\pi x) \cos(2\pi y).
 \end{aligned} \tag{15}$$

They are plotted on figure 3 and abbreviated respectively NTS, TS1 and TS2, as the first is a Non-Trapping Speed while the two other are Trapping Speeds. No cutoff is used to smooth the transition between variable internal speed and constant external speed (always being 1).

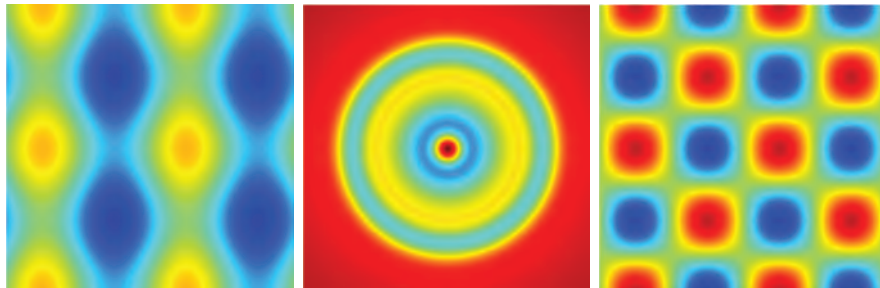


Figure 3: The different variable speeds: NTS, TS1 and TS2 (from equations (15)).

Concerning the parameters of the algorithms, the regularization parameter  $\alpha$  in CG method equals 0. Other values were tested that stabilized the algorithm but always blur the reconstructions so that we get higher errors than without regularization. The observed convergence rates of CG and NS methods are fairly high, so that only 10 iterations yield a good approximation of the best achievable solutions. With regard to the two nudging coefficients, while we can theoretically affirm that the larger it is, the faster the solution tends to the observations (thanks to the energy equality (9)), the discretization of the time-derivative of the solution imposes a coefficient  $k$  not larger than  $1/\delta t$ . In order to obtain the best convergence and to make the choice of  $k$  less arbitrary (and fitting with the limits of the numerical method), it is defined as  $0.9/\delta t$ .

The following tables give the relative mean square error obtained with the best estimation obtained after at most 10 iterations and, in brackets, the corresponding number of iterations required. Note that BFN, CG and NS furnishes convex error plots with a minimum.

Finally, as it has been suggested in [34], we also have used an artificial numerical attenuation to offset spurious high-frequency effects and noise, with interesting consequences. Then for BFN, NS and CG techniques, the numerical model becomes:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\delta t^2} = \Delta_{\delta x} u_n + \delta x^\varepsilon \Delta_{\delta x} \frac{u_n - u_{n-1}}{\delta t},$$

where the value for  $\varepsilon$  is empirically set and an optimal value appears for each method, which are approximately 2 for BFN and 1.7 for CG and NS in a complete data situation.

The attenuation being only introduced in a numerical improvement view, it is set to attenuate both back and forth solutions, should the case arise, and when the data are corrupted by noise.

## 5.2 Implementation results

The first results are given in Table 1 in a noiseless complete data situation. One sees that variable speeds can have various effects, depending on the method we use. NS offers the best reconstruction, then BFN and finally CG.

These techniques can be consequently improved by increasing the number of

Speed map	BFN	CG	NS
$c \equiv 1$	2.3(10)	7.1(3)	1.4(10)
NTS	3.2(10)	7.5(4)	2.3(10)
TS1	7.1(10)	16.5(5)	1.6(10)
TS2	7(10)	10.7(5)	6.6(10)

Table 1: Noiseless complete data for Shepp-Logan phantom: relative mean square error (number of iterations, limited to 10).

iterations as we can see in Table 2 for the BFN, where 100 iterations instead of 10 are computed.

$c \equiv 1$	NTS	TS1	TS2
1	1.5(100)	1.2(100)	4.1(100)

Table 2: Noiseless complete data from Shepp-Logan phantom: relative mean square error (BFN, 100 iterations).

When adding a 15% level noise in the constant speed situation, one sees on Table 3 that any method offers an interesting reconstruction: one gets less than 20% error for 15% noise thanks to the attenuating scheme.

BFN	CG	NS
17.6(10)	19.8(2)	17.1(2)

Table 3: Noisy complete data (15% noise) from Shepp-Logan phantom with the constant speed. Reconstruction with attenuating scheme: relative mean square error (number of iterations, limited to 10).

About the propagation of the singularities and their observation, we put the light on the effect of getting incomplete data (in a noiseless situation) in Fig. 4. The sensors are located on the upper half circle, that illustrate the practical case where the observed body cannot be surrounded by the observation surface.

In this situation (constant speed and noiseless data on the half circle), the three methods are compared in Fig. 5 and 6. NS is excellent, while BFN

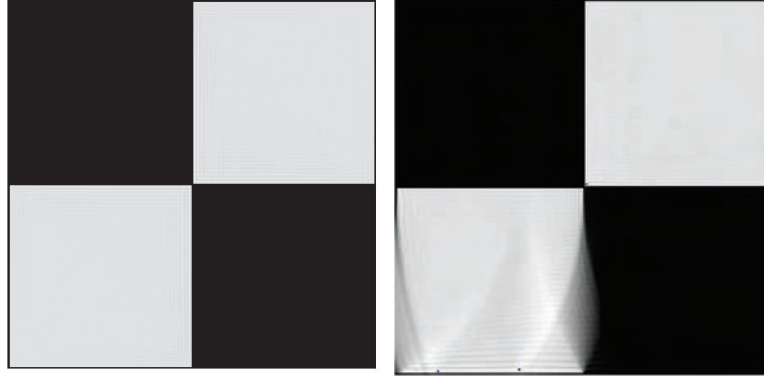


Figure 4: Reconstructions by 100 BFN iterations. Squares observed singularities. Complete (1.1% error) and half-circle (10.4%) noiseless data with constant speed.

equivalent to CG convergence in about 5 iterations, but keeps on improving the reconstruction along next iterations. As always, even if its reconstruction is the worst one, CG converges in less iterations and yields a good rough estimate faster than the others.

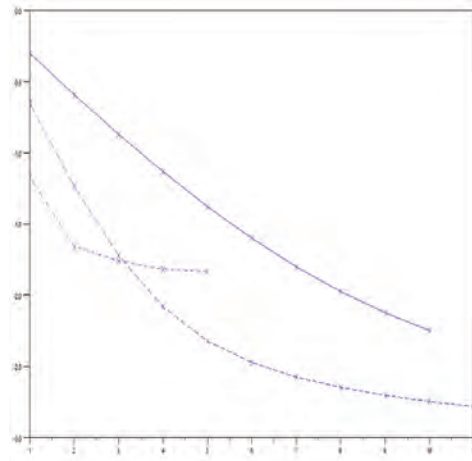
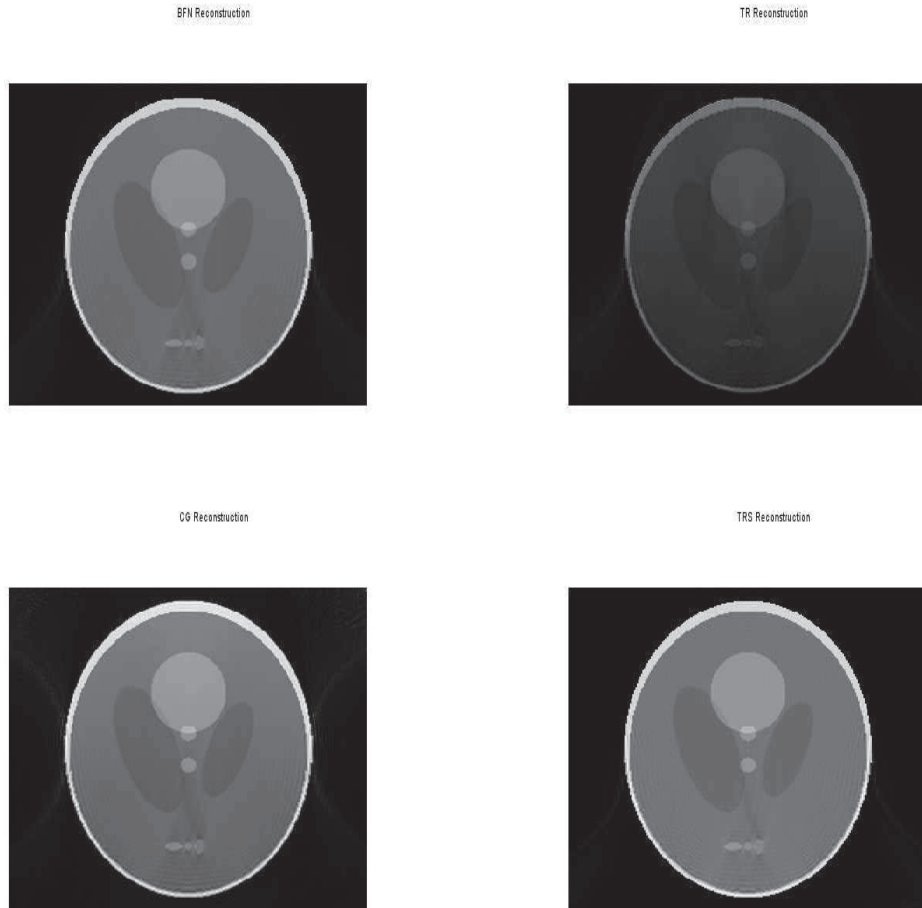


Figure 5: Incomplete noiseless data on the half circle from Shepp-Logan phantom with constant speed: relative mean square error plots (BFN in solid line, CG in dashed-dotted line and NS in dashed line).

Still testing the robustness of the methods, we reduce the number of sensors,



BFN	CG	TR	NS
10.6(10)	16(6)	52	6.2(10)

Figure 6: Incomplete noiseless data on the half circle from Shepp-Logan phantom with constant speed: reconstructions with BFN (top left), TR (top right), CG (bottom left) and NS (bottom right) and relative mean square errors table (error, number of iterations, limited to 10).

which are still homogeneously located on the observation circle, but only one out of  $\sigma$  is considered in the data. The results shown in Table 4 highlight some redundancy aspect of the data since the reconstructions have a similar quality in all situations, particularly with CG which is very robust here.

That is obvious at convergence of the algorithms, but one must consider more than 100 iterations for BFN and NS when  $\sigma = 8$ . Finally, if the intensity is not well recovered, forms are reconstructed with few artifacts.

Settings	BFN	CG	NS
$\sigma = 1$	2.3(10)	7.1(3)	1.4(10)
$\sigma = 2$	5.4(10)	8.9(4)	4.5(10)
$\sigma = 4$	12.1(10)	12.4(4)	11.5(10)
$\sigma = 8$	25.3(10)	15(5)	18.5(10)

Table 4: Partial noiseless data (one out of  $\sigma$  sensor records data) from Shepp-Logan phantom with constant speed: relative mean square errors (number of iterations, limited to 10).

Then we sum up the different unfavorable conditions from above and show the results on Fig. 7 and 8. Here data are acquired on the half circle, only one out of two sensors is considered, a 15% level noise is added and the speed is constant. The last object, a skull, has been chosen in this last experiment in order to consider a more complex structured object.

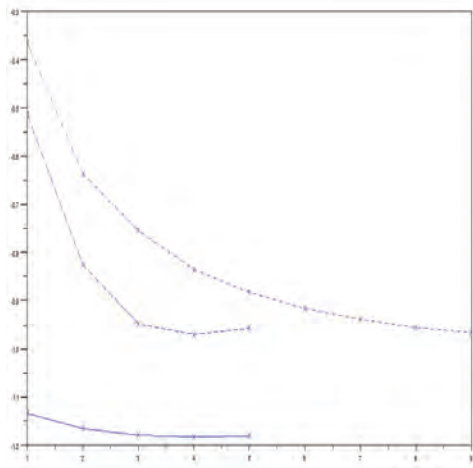
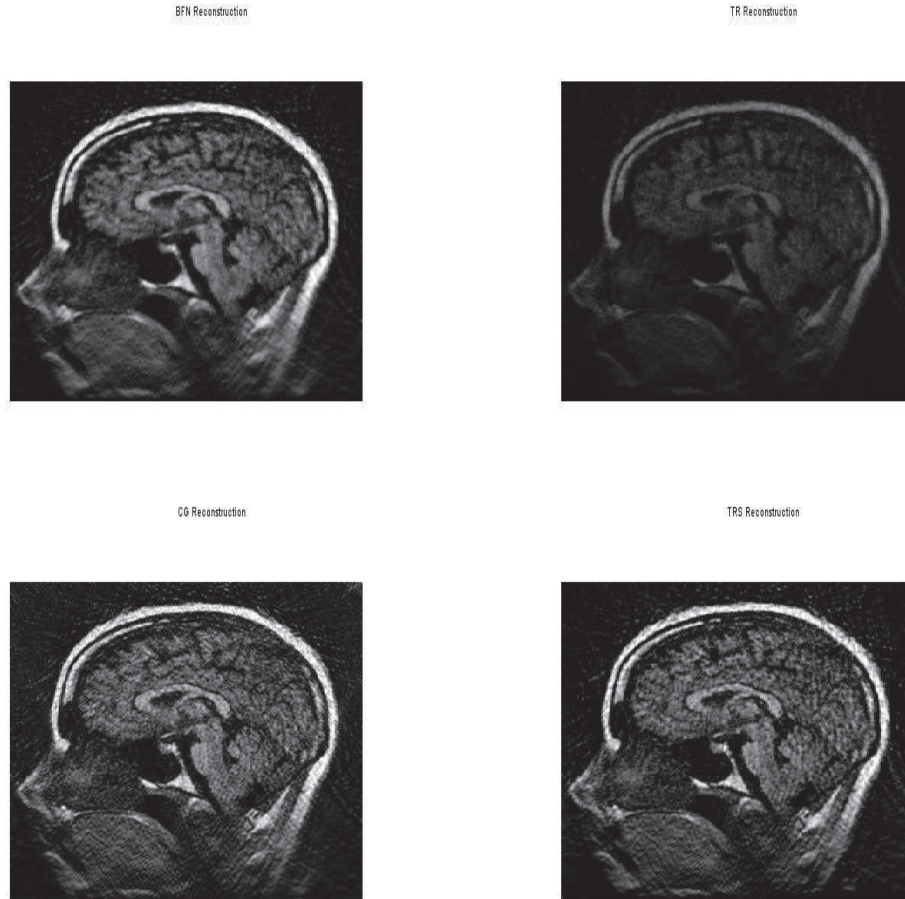


Figure 7: Incomplete partial data ( $\sigma = 2$ ) on the half circle with 15% noise from skull phantom and with constant speed: relative mean square error plots (BFN in solid line, CG in dashed-dotted line and NS in dashed line).

Finally, even if the reconstructions obtained in this last situation are not





BFN	CG	TR	NS
30.7(4)	37.8(10)	59.9	37.9(4)

Figure 8: Incomplete 15% noise data on the half circle from skull phantom with constant speed and partial data ( $\sigma = 2$ ): reconstructions with BFN (top left), TR (top right), CG (bottom left) and NS (bottom right) and relative mean square errors table (error, number of iterations, limited to 10).

satisfying, it may fit with very bad real conditions (where the noise level can be far greater than 15% for example) and allows us to test the robustness of the methods. In this view, Table 5 shows the errors if we consider variable speeds in a similar case but with  $\sigma = 1$ .

Speed map	BFN	CG	NS
$c \equiv 1$	36.4(8)	40(10)	38.7(3)
NTS	36.3(8)	40.6(10)	38.6(3)
TS1	46.3(4)	50.9(8)	51.9(3)
TS2	39.1(8)	42.3(9)	41.5(4)

Table 5: Incomplete 15% noise data on the half circle from Shepp-Logan phantom: relative mean square errors (number of iterations, limited to 10).

### 5.3 Implementation conclusions

CG reacts much badly to noise addition above all, but it provides good reconstructions after a couple of iterations in comparison with BFN and NS, so that it can be used to get a rough estimate for another method. Moreover CG keeps interesting when data are incomplete, not overreacting. On the whole, BFN and NS provide good and quite equivalent reconstructions with a similar cost. Finally, NS furnishes better reconstruction, but appears less robust than BFN to noise and to restriction of the number of sensors. Numerical attenuation provides a good regularization that offsets noise for NS and BFN. Notice that this artificial numerical attenuation may allow us to consider lossy medium in back and forth evolutions as the physical loss does not exceed the artificial one.

Depending on whether data are complete or not, one may choose CG to get a first rough estimate, then NS or BFN to reconstruct the object. It has to be said that not stopping iterations to 10 often improves results in noiseless and/or complete data situations, but that this number of iterations provides the best estimate in less favorable settings.

## 6 Conclusions

We have established the theoretical geometrical convergence of the TAT-BFN algorithm, with an explicit convergence rate in an ideal situation. In principle, this method enables to make weak assumptions in the TAT modeling (variable sound speed, damping, incomplete data, etc.), since the model is considered as a weak constraint. Even though the proof of the convergence has only been stated in an ideal framework, the numerical implementation

of the algorithm showed that the BFN method remains efficient in more general situations. Indeed this technique still yields robust reconstructions in the noisy and incomplete data situation. Even though the convergence rates of the Conjugate Gradient and of the Neumann Series methods appear to be better, the BFN provides more satisfactory asymptotic behavior and minimal relative error, along with a low numerical complexity, in quite unfavorable observation situations.

From these preliminary results, one should now focus on their generalization to more realistic wave equations. For example, one may introduce some damping in the model and study the theoretical validity and convergence of the methods. Our first attempts in this direction (mainly numerical implementations) suggest future interesting developments.

## References

- [1] M. Agranovsky, P. Kuchment, and L. Kunyansky. “On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic and photoacoustic tomography”. In: *Photoacoustic imaging and spectroscopy. Ch. 8*. Ed. by Wang L.H. CRC Press, 2009, pp. 89–101.
- [2] M.A. Anastasio et al. “Application of inverse source concepts to photoacoustic tomography”. In: *Inverse Problems* 23.6 (2007), S21–S35.
- [3] D. Auroux and J. Blum. “A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems: the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm”. In: *Nonlin. Proc. Geophys.* 15 (2008), pp. 305–319.
- [4] D. Auroux and J. Blum. “The Back and Forth Nudging algorithm for oceanographic data assimilation”. In: *Proc. WMODA 5*. 2009, pp. 273.1–273.8.
- [5] D. Auroux and S. Bonnabel. “Symmetry-based observers for some water-tank problems”. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 56.5 (2011), pp. 1046–1058.
- [6] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. “Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary”. In: *SIAM J. Contr. Optim.* 30 (1992), pp. 1024–1065.
- [7] L. Bers, F. John, and M. Schechter. *Partial differential equations*. Interscience Publishers, 1964.

- [8] R.S. Bucy and P.D. Joseph. *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*. Ed. by John Wiley and Sons. Providence, Rhode Island, 2nd edition, 2005.
- [9] P. Burgholzer et al. “Exact and approximative imaging methods for photoacoustic tomography using an arbitrary detection surface.” In: *Phys. Rev. E* 75.4 (2007), p. 046706.
- [10] R. Courant and D. Hilbert. *Meth. Math. Phys.* Ed. by Wiley. Vol. 2. 1989.
- [11] B.T. Cox, S.R. Arridge, and P.C. Beard. “Photoacoustic tomography with a limited-aperture planar sensor and a reverberant cavity”. In: *Inverse Problems* 23 (2007), S97–S112.
- [12] D. Finch, Rakesh, and S. Patch. “Determining a function from its mean values over a family of spheres”. In: *SIAM J. Math. Anal.* 35.5 (2004), pp. 1213–1240.
- [13] M. Haltmeier and O. Scherzer. “Thermoacoustic tomography and the circular Radon transform : exact inversion formula”. In: *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 17.4 (2007), pp. 635–655.
- [14] M. Haltmeier, O. Scherzer, and G. Zangerl. “A reconstruction algorithm for photoacoustic imaging based on the nonuniform FFT”. In: *IEEE Trans. Med. Imaging* 28.3 (2009), pp. 1727–1730.
- [15] M. Haltmeier, T. Schuster, and O. Scherzer. “Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry”. In: *Math. Meth. Appl. Sci.* 28 (2005), pp. 1919–1937.
- [16] Y. Hristova. “Time reversal in thermoacoustic tomography - an error estimate.” In: *Inverse Problems* 25.055008 (2009).
- [17] Y. Hristova, P. Kuchment, and L. Nguyen. “Reconstruction and time reversal in thermoacoustic tomography in acoustically homogeneous and inhomogeneous media”. In: *Inverse Problems* 24.055006 (2008). DOI: 10.1088/0266-5611/24/5/055006.
- [18] F. John. *Plane Waves and Spherical Means*. Ed. by Wiley Interscience. New York, 1955.
- [19] W. Joines et al. “The measured electrical properties of normal and malignant human tissues from 50 to 900 mhz”. In: *Med. Phys.* 21 (1994), pp. 547–550.
- [20] R.E. Kalman. “A new approach to linear filtering and prediction problems”. In: *Trans. ASME, ser. D, J. Basic Eng.* 82 (1960), pp. 35–45.

- [21] T.N. Krishnamurti et al. “Physical initialisation for numerical weather prediction over the tropics”. In: *Tellus* 43A (1991), pp. 53–81.
- [22] R.A. Kruger, K.M. Stantz, and W.L. Kiser. “Thermoacoustic CT of the breast”. In: *Proc. SPIE* 4682 (2002), pp. 521–525.
- [23] P. Kuchment and L. Kunyansky. “Mathematics of Photoacoustic and Thermoacoustic Tomography”. In: *arXiv:0912.2022v1* (2009).
- [24] L. Kunyansky. “A series solution and a fast algorithm for the inversion of the spherical mean Radon transform”. In: *Inverse Problems* 23 (2007), s11–s200.
- [25] L. Kunyansky. “Thermoacoustic tomography with detectors on an open curve: an efficient reconstruction algorithm”. In: *Inverse Problems* 24.5 (2008).
- [26] J.-L. Lions. “Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems”. In: *SIAM Rev.* 30.1 (1988), pp. 1–68.
- [27] K. Liu. “Locally distributed control and damping for the conservative systems”. In: *SIAM J. Contr. Optim.* 35.5 (1997), pp. 1574–1590.
- [28] A.C. Lorenc, R.S. Bell, and B. Macpherson. “The meteorological office analysis correction data assimilation scheme”. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 117 (1991), pp. 59–89.
- [29] D.G. Luenberger. “Observers for Multivariable Systems”. In: *IEEE Trans. Autom. Cont.* AC–11:2 (April 1966), 190–197.
- [30] W.H. Lyne, R. Swinbank, and N.T. Birch. “A data assimilation experiment and the global circulation during the FGGE special observing periods”. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 108 (1982), pp. 575–594.
- [31] S.J. Norton and M. Linzer. “Ultrasonic reflectivity imaging in three dimensions: Exact inverse scattering solutions for plane, cylindrical and spherical apertures”. In: *IEEE Trans. Med. Imaging* 28 (1981), pp. 2002–2020.
- [32] G. Paltauf et al. “Photoacoustic tomography using a Mach-Zehnder interferometer as acoustic line detector”. In: *Appl. Opt.* 46 (2007), pp. 3352–3358.
- [33] J. Qian et al. “An efficient Neumann-series based algorithm for Thermoacoustic and Photoacoustic Tomography with variable sound speed”. In: *to appear in SIAM J. Imag. Sci.* (2010).

- [34] K. Ramdani, T. Takahashi, and M. Tucsnak. “Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations - Application to LQR problems”. In: *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 13 (2007), pp. 503–527.
- [35] K. Ramdani, M. Tucsnak, and G. Weiss. “Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers”. In: *Automatica* 46 (2010), pp. 1616–1625.
- [36] D. L. Russel. “Controllability and stabilizability theory for linear PDE’s: recent progress and open questions”. In: *SIAM Rev.* 20 (1978), pp. 639–739.
- [37] O. Scherzer et al. *Variational methods in imaging*. Ed. by Springer. Appl. Math. Sci. 196. New York, 2009.
- [38] K.M. Stantz, R.A. Kruger, and W.L. Kiser. “Thermoacoustic CT of the breast”. In: *Proc. SPIE* 4682 (2002), pp. 521–525.
- [39] P. Stefanov and G. Uhlmann. “Thermoacoustic tomography with variable sound speed”. In: *Inverse Problems* 25.075011 (2009).
- [40] O. Talagrand. “Assimilation of Observations, an Introduction”. In: *J. Meteorol. Soc. Japan* 75, No. 1B (1997), pp. 191–209.
- [41] O. Talagrand and P. Courtier. “Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory”. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 113 (1987), pp. 1311–1328.
- [42] O. Talagrand and P. Courtier. “Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II : Numerical Results”. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 113 (1987), pp. 1329–1347.
- [43] L.H. Wang, ed. *Photoacoustic imaging and spectroscopy*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2009.
- [44] M. Xu and L.V. Wang. “Photoacoustic imaging in biomedicine”. In: *Rev. Sci. Instrum.* 77.4 (2006), p. 041101.
- [45] Y. Xu, D. Feng, and L. V. Wang. “Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography: I. Planar geometry”. In: *IEEE Trans. Med. Imaging* 21.7 (2002), pp. 823–828.
- [46] Y. Xu, M. Xu, and L. V. Wang. “Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography: II. Cylindrical geometry”. In: *IEEE Trans. Med. Imaging* 21.7 (2002), pp. 829–833.
- [47] Y. Xu et al. “Reconstructions in limited-view thermoacoustic tomography”. In: *Med. Phys.* 31.4 (2004), pp. 724–733.









## RÉSUMÉ

À partir du problème de la tomographie thermoacoustique (TTA), nous avons défini, étudié et mis en oeuvre diverses méthodes itératives de reconstruction : le Nudging Direct et Rétrograde (BFN), d'implémentation et d'usage simple, une méthode variationnelle (VT) et le SEEK Direct et Rétrograde (BF-SEEK), plus élaboré, ainsi qu'une méthode couplant filtre de Kalman (KF) et renversement temporel (TR). À l'occasion d'une formulation commune aux méthodes séquentielles précitées, nous avons mis en évidence une nouvelle classe de méthodes de résolution de problèmes inverses : les algorithmes de Filtrage Direct et Rétrograde (BFF). Outre l'existence et l'unicité des solutions (notamment des rétrogrades), sont étudiés divers cadres caractérisant la convergence théorique des algorithmes. Ainsi, un cadre théorique général est précisé pour que le BFN soit bien posé. Puis, dans le cadre offert par la TTA, l'existence et l'unicité de ses solutions ainsi que la convergence géométrique de l'algorithme sont prouvés, avec un taux de convergence explicite, et une description de ses comportements numériques est proposée. Dans la continuité de ces premiers résultats, l'étude – théorique et numérique – de généralisations à un modèle et à un cadre de travail plus réalistes est menée : ainsi sont considérés différents cas-types d'objets à reconstruire ou de positionnement et d'éparpillement des capteurs, des modèles d'équation d'onde atténuée, des vitesses variables (trapping ou non), ou encore la présence de bruits extérieurs à l'objet. Puis des outils de contrôle et d'estimation optimaux permettent de caractériser d'une part la convergence du BFN, et d'autre part les rappels définissant des BFF convergents, et le problème est ramené à un critère d'observabilité. Avec pour points de comparaison les méthodes les plus souples et efficaces du moment (le TR et une variante itérée), de nombreuses expérimentations sont menées afin de tester les différents BFF et la VT. D'où l'on déduit que, robustes, de complexité variée et adaptatives, les méthodes proposées constituent une excellente alternative aux méthodes de reconstruction usuelles, notamment en TTA et tout particulièrement dans des situations d'observation dégradées.

## ABSTRACT

We define, study and implement various iterative reconstruction methods for Thermoacoustic Tomography (TAT) : the Back and Forth Nudging (BFN), easy to implement and to use, a variational technique (VT) and the Back and Forth SEEK (BF-SEEK), more sophisticated, and a coupling method between Kalman filter (KF) and Time Reversal (TR). A unified formulation is explained for the sequential techniques aforementioned that defines a new class of inverse problem methods : the Back and Forth Filters (BFF). In addition to existence and uniqueness (particularly for backward solutions), we study many frameworks that ensure and characterize the convergence of the algorithms. Thus we give a general theoretical framework for which the BFN is a well-posed problem. Then, in application to TAT, existence and uniqueness of its solutions and geometrical convergence of the algorithm are proved, and an explicit convergence rate and a description of its numerical behaviour are given. Next, theoretical and numerical studies of more general and realistic framework are led, namely different objects, speeds (with or without trapping), various sensor configurations and samplings, attenuated equations or external sources. Then optimal control and best estimate tools are used to characterize the BFN convergence and converging feedbacks for BFF, under observability assumptions. Finally, we compare the most flexible and efficient current techniques (TR and an iterative variant) with our various BFF and the VT in several experiments. Thus, robust, with different possible complexities and flexible, the methods that we propose are very interesting reconstruction techniques, particularly in TAT and when observations are degraded.