



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*
Discipline ou spécialité : *Mathématiques Fondamentales*

Présentée et soutenue par *Laurent GUILLAUME*
Le mercredi 14 novembre 2012

Titre :
*Géométrie non-commutative et
calcul pseudodifférentiel
sur les variétés à coins fibrés*

JURY

<i>M. Moulay BENAMEUR</i>	<i>(Professeur, Metz)</i>
<i>M. Paulo CARRILLO-ROUSE</i>	<i>(MCF, Toulouse III)</i>
<i>Mme Claire DEBORD</i>	<i>(MCF, Clermont-Ferrand)</i>
<i>M. Bertrand MONTHUBERT</i>	<i>(Professeur, Toulouse III)</i>
<i>M. Georges SKANDALIS</i>	<i>(Professeur, Paris VII)</i>

Ecole doctorale : *ED MITT*
Unité de recherche : *IMT*
Directeur(s) de Thèse : *M. Bertrand MONTHUBERT*
Rapporteurs : *M. Victor NISTOR (Professeur, PennState, Etats-Unis)*
M. Georges SKANDALIS (Professeur, Paris VII)

Géométrie non-commutative et
calcul pseudodifférentiel sur les
variétés à coins fibrés

Laurent Guillaume

Remerciements

En premier lieu je souhaite exprimer ma gratitude envers Victor Nistor et Georges Skandalis pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je tiens aussi à remercier Moulay Benameur et Claire Debord d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Merci à Bertrand Monthubert pour sa confiance jamais démentie et ses conseils toujours judicieux : rien de tout cela n'aurait existé sans son intervention. Merci à Paulo Carrillo-Rouse pour sa gentillesse et pour le temps qu'il a consacré à parfaire mon éducation. Merci à Claire Debord, à Jean-Marie Lescure et à Iakovos Androulidakis pour les conversations fructueuses que nous avons pu échanger.

Merci à Georges Skandalis de montrer à tous avec bienveillance la voie hors des gouffres du dilettantisme. Je suis heureux d'avoir été le temps de ce travail un modeste membre de son aréopage.

Merci à ma famille et à mes amis pour leur soutien moral et leurs encouragements. Enfin et surtout merci à Diana de m'avoir permis de réaliser cet effort impossible : dans quelques années nous regarderons certainement avec tendresse ces moments de complicité et de doute, car ils seront pour nous l'expression vraie de notre amour sincère. Je te remercie d'être à mes côtés.

Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1. Théorie de l'indice	15
1 Théorie de l'indice pour les groupoïdes de Lie	15
1.1. \mathcal{G} -Calcul pseudodifférentiel	15
1.2. Indice lisse et indice analytique	16
2 Cohomologie cyclique relative	21
2.1. Cycles sur une algèbre	21
2.2. Cocycles cycliques et cohomologie cyclique	23
2.3. Le bicomplexe (b, B)	24
2.4. Cohomologie cyclique relative	26
3 Théorèmes d'indice en géométrie non-commutative	28
3.1. Accouplement avec la K -théorie	28
3.2. Caractère de Chern d'un module de Fredholm	29
3.3. Classe de Hirsch du caractère de Chern	30
3.4. Théorème d'indice local en géométrie non-commutative	31
3.5. Formule d'Atiyah-Patodi-Singer en cohomologie cyclique relative	32
Chapitre 2. Groupoïde d'éclatement des variétés à coins	35
1 Variétés à coins	35
1.1. Définition des variétés à coins	35
1.2. Variétés à coins plongés	35
1.3. Variétés à coins fibrés itérés	36
2 Équarrissages	37
2.1. Rappels sur la transversalité	37
2.2. Définitions	37
2.3. Équarrissage fibré	38
2.4. Variétés à coins fibrés	38
3 Groupoïde de déformation au cône normal	39
3.1. Groupoïdes - Algébroïdes	39
3.2. Déformation au cône normal D_φ	40
3.3. Structure différentielle	41
3.4. Groupoïde de déformation $\mathcal{D}_\varphi = D_\varphi \times \mathbb{R}_+^*$	42

3.5.	Isotropie des feuilletages singuliers	42
3.6.	Loi de composition sur \mathcal{D}_φ	43
4	Eclatement d'une sous-variété de codimension 1	44
4.1.	Motivation	44
4.2.	Recollement par une application	44
4.3.	Notations	45
4.4.	Définition de l'éclatement $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$	46
4.5.	Structure différentielle de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$	46
4.6.	Loi de composition	48
5	Eclatement par rapport à un équarrissage fibré	50
5.1.	Définition de l'éclatement	50
5.2.	Structure longitudinale de l'éclatement	50
5.3.	Moyennabilité de l'éclatement	51
5.4.	Le groupoïde d'une variété à coins plongés et fibrés	51
Chapitre 3. Calcul pseudodifférentiel sur les variétés à coins fibrés		53
1	b -stretched product et b -calcul	53
2	ϕ -stretched product et ϕ -calcul	54
3	ϕ -calcul et groupoïde des variétés à bord fibré	56
3.1.	Calcul pseudodifférentiel à support compact	56
3.2.	Comparaison des calculs sur X_ϕ^2 et $\Gamma_\phi(X)$	56
3.3.	Notations	57
3.4.	Plongement de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2	57
3.5.	Identification de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2	59
3.6.	Identification de $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et de $\Psi_{\phi,c}^\infty(X)$	59
4	Calcul pseudodifférentiel étendu	59
4.1.	Fonctions longueur à croissance polynomiale	60
4.2.	Fonction longueur pour les variétés à coins fibrés	60
4.3.	Définition du calcul pseudodifférentiel étendu	61
4.4.	Identification de $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et de $\Psi_\phi^\infty(X)$	61
4.5.	Identification de la restriction au bord et de l'opérateur normal	62
4.6.	Ellipticité totale et indice de Fredholm	62
4.7.	Croissance polynomiale et entropie des feuilletages	63
5	Algèbre de Schwartz des variétés à bord feuilleté	65
5.1.	Fonctions à décroissance rapide sur les déformations au cône normal	65
5.2.	Définition de l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(\mathcal{D}_\varphi)$	68
5.3.	Fonction de partition au voisinage du bord de $\Gamma_\phi(X)$	68
5.4.	Fonctions à décroissance rapide sur les variétés à bord feuilleté	69
5.5.	Identification de $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ et de $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$	70

Chapitre 4. Éléments de cohomologie cyclique des variétés à bord feuilleté	71
1 K -Théorie et cohomologie cyclique périodique de $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$	71
1.1. Produit croisé d'une algèbre par une action lisse de \mathbb{R}	71
1.2. L'algèbre $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ en tant que produit croisé $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$	72
1.3. Théorème d'isomorphisme en cohomologie cyclique périodique	74
2 Cohomologie cyclique relative	75
2.1. Suite exacte de restriction au bord	75
2.2. b -métrique et partie finie	76
2.3. Hypertrace sur \mathcal{T}	77
2.4. Trace régularisée sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$	78
2.5. Cocycle cyclique relatif fondamental	78
2.6. Cycles et cocycles cycliques sur $\partial\mathcal{S}_c$	80
3 Application au cas des fibrations	83
3.1. Diagramme à 6 termes en K -théorie	83
3.2. Le cas particulier du b -calcul	84
Chapitre 5. Pseudo-variétés stratifiées - Espace des strates	85
1 Définitions et notations	85
1.1. Stratifications	85
1.2. Pseudo-variétés stratifiées	86
2 Espace des strates	87
2.1. Diagramme de Hasse d'une stratification	89
2.2. Groupoïde d'une stratification	89
2.3. Algèbre de convolution et C^* -algèbre de la stratification	90
2.4. Fonction zêta et algèbre d'incidence de la stratification	90
2.5. Produit de stratifications et stabilité fonctorielle	92
3 Fonctions lisses et champs de vecteurs	93
3.1. Objets contrôlés	94
3.2. Désingularisation et variétés à coins fibrées	95
3.3. Structure lisse	96
3.4. Champs de vecteurs stratifiés	98
3.5. Flot des champs de vecteurs stratifiés	99
Chapitre 6. Feuilletages singuliers - Groupoïde d'holonomie	101
1 Feuilletages de Stefan-Sussmann	101
1.1. Feuilletages de Stefan	101
1.2. Théorème de Stefan-Sussmann	101
1.3. Feuilletages de Stefan-Sussmann	102
2 Feuilletages singuliers des pseudo-variétés stratifiées	103
2.1. Stratifications de type fini	103
2.2. Feuilletages singuliers	104
2.3. Exemples	104

3	Groupeïde d'holonomie sur une variété lisse	108
3.1.	Le cas régulier	108
3.2.	Holonomie et difféomorphismes locaux	109
3.3.	Feuilletage tiré en arrière	109
3.4.	Bi-submersions	110
3.5.	Bi-sections	110
3.6.	Atlas de bi-submersions	111
3.7.	Groupeïde d'un atlas	111
4	Groupeïde d'holonomie des pseudo-variétés stratifiées	112
4.1.	Atlas de bi-submersions près de l'identité	112
4.2.	Définition	112
5	Groupeïde d'holonomie des variétés à bord feuilleté	113
5.1.	Notations	114
5.2.	Feuilletage singulier de l'éclatement	114
5.3.	Identification de l'éclatement et du groupeïde d'holonomie	115
	Bibliographie	119

Introduction

L'algébrisation de problèmes issus de situations géométriques a offert aux mathématiques des succès considérables. Les questions millénaires de la duplication du cube, de la trisection de l'angle et de la quadrature du cercle dévoilent leur impossibilité dans l'étude des extensions quadratiques de corps, et la démonstration de la transcendance de π . Le traitement unifié des géométries non-euclidiennes homogènes, puis des espaces riemanniens généraux se transcrit naturellement dans le langage algébrique des fibrés principaux et de leurs connexions. La puissance de modélisation de l'algèbre commutative, à travers le développement de la géométrie algébrique, rejaillit sur de multiples champs mathématiques et inverse suggestivement le rapport algèbre/géométrie : espaces sans points, points denses de l'espace - achoppement pour le sens commun! - la structure algébrique enclôt alors un « espace » devenu subsidiaire.

Le programme d'une géométrie non commutative, initié par Alain Connes dans une série d'articles fondamentaux [**Con79**, **Con85**, **Con86**, **Con87**, **Con94**], vise à étendre ces correspondances fructueuses entre algèbre et espaces géométriques en s'affranchissant de l'hypothèse de commutativité. Il s'agit donc d'obtenir une traduction algébrique des propriétés essentielles d'un espace (théorie de la mesure, topologie, géométrie différentielle, géométrie riemannienne...) autorisant l'extension à des objets non-commutatifs. Les exemples historiques à l'origine du développement de la théorie ont montré la fécondité de cette approche : l'espace des feuilles d'un feuilletage ou des pavages de Penrose, pathologiques du point de vue classique, révèlent des structures non triviales subtiles lorsqu'ils sont étudiés au travers d'une algèbre non-commutative adaptée. Le lecteur curieux d'une vue d'ensemble pourra flâner avec plaisir dans le jardin non-commutatif entrouvert par [**CM06**], qui lui révélera ses essences singulières et précieuses.

On se propose dans cette thèse de situer la théorie de l'indice de certaines variétés singulières dans le cadre de la géométrie non-commutative. On s'intéressera aux pseudo-variétés stratifiées, initialement apparues dans les travaux de Thom [**Tho69**] et Mather [**Mat70**], qui constituent

une vaste classe d'espaces englobant entre autres les variétés à bord, à coins et à singularités coniques. Il s'agit en particulier d'obtenir l'analogue pour ces variétés stratifiées de l'espace des feuilles d'un feuilletage régulier. Construire et étudier cet objet, le groupoïde d'holonomie de la variété stratifiée, est une étape centrale pour comprendre les opérateurs pseudodifférentiels et les groupes de K -théorie réceptacles de leur indice.

Rappelons que dans le cadre classique d'une variété compacte sans bord M , un opérateur pseudodifférentiel elliptique D a un noyau et un conoyau de dimension finie. L'indice de Fredholm de D est l'entier :

$$\text{ind } D = \dim \ker D - \dim \text{Coker } D$$

Cet indice est stable pour toute perturbation compacte de D et sa valeur ne dépend que de données topologiques. La caractéristique d'Euler, la signature d'une variété spin et d'innombrables quantités issues de la physique sont les indices d'opérateurs particuliers. Atiyah et Singer ont introduit dans les années 60 des constructions fondamentales en K -théorie permettant de comprendre l'application $D \rightarrow \text{ind } D$ au travers du morphisme de groupes

$$\text{ind}_a : K^0(T^*M) \rightarrow \mathbb{Z},$$

appelé indice analytique de M .

Plus précisément, si $Ell(M)$ désigne l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels sur M , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ell(M) & \xrightarrow{\text{ind}} & \mathbb{Z} \\ \text{symb} \downarrow & \nearrow \text{ind}_a & \\ K^0(T^*M) & & \end{array}$$

où $Ell(M) \xrightarrow{\text{symb}} K^0(T^*M)$ est l'application surjective qui associe à un opérateur la classe de son symbole principal dans $K^0(T^*M)$. Atiyah et Singer définissent alors un indice topologique $\text{ind}_t : K^0(T^*M) \rightarrow \mathbb{Z}$ possédant des propriétés K -théoriques caractéristiques, montrent qu'un unique morphisme peut vérifier ces propriétés et que l'indice analytique les satisfait aussi. L'identité des indices analytique et topologique est le célèbre théorème d'Atiyah-Singer [AS63, AS68a, AS68b]. L'indice topologique peut être calculé par des méthodes cohomologiques (théorie de Chern-Weil) grâce au caractère de Chern $\text{ch} : K^0(TM) \rightarrow H^*(TM)$. Pour un opérateur elliptique P sur une variété M on obtient par exemple la formule :

$$(1) \quad \text{ind}_t([\sigma_P]) = \int_{TM} \text{ch}([\sigma_P]) \text{Td}(M)$$

où $\text{Td}(M)$ est une classe caractéristique de la variété M .

Dans le cadre moins classique d'espaces singuliers comme les espaces de feuilles des feuilletages réguliers, les orbifolds ou les variétés à coins, des constructions similaires s'obtiennent grâce à l'introduction des groupoïdes [Con79, CS84]. Un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Les groupoïdes généralisent les notions d'espace, de groupe et de relation d'équivalence. On dit qu'un groupoïde est *de Lie* lorsque les ensembles qui interviennent sont des variétés et les morphismes sont des applications différentiables. Un calcul pseudodifférentiel a été développé pour les groupoïdes de Lie [Con79, MP97, NWX99] et plus généralement pour des groupoïdes longitudinalement lisses tels que les *continuous family groupoids* [LMN00].

L'indice analytique des opérateurs elliptiques sur ces groupoïdes est un morphisme :

$$\text{ind}_a : K^0(A^*\mathcal{G}) \rightarrow K_0(C_r^*(\mathcal{G}))$$

où $A^*\mathcal{G}$ est l'algèbroïde du groupoïde \mathcal{G} et $C_r^*(\mathcal{G})$ la C^* -algèbre réduite de \mathcal{G} , qui joue le rôle de l'algèbre des fonctions continues sur l'espace singulier représenté par \mathcal{G} [Ren80]. Les indices ne sont donc plus en général de simples entiers mais des éléments du groupe de K -théorie $K_0(C_r^*(\mathcal{G}))$ (voir chapitre 1). Dans le cas d'une variété compacte sans bord M , on retrouve cependant l'indice classique puisque $\mathcal{G} = M \times M$, $A^*\mathcal{G} = T^*M$ et $K_0(C_r^*(\mathcal{G})) = K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$.

Pour étudier le groupe $K_0(C_r^*(\mathcal{G}))$ on dispose des outils de la cohomologie cyclique [Con79, Con87, Con94] qui fournit des invariants calculables au travers d'une sous-algèbre \mathcal{A} « lisse » et dense dans $C_r^*(\mathcal{G})$. La cohomologie cyclique périodique est une généralisation non-commutative de l'homologie de De Rham, un théorème de Connes assure que pour une variété compacte M , si $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ on retrouve :

$$HP^*(\mathcal{A}) \simeq H_*^{DR}(M, \mathbb{C}).$$

Une propriété importante pour \mathcal{A} est la stabilité par calcul fonctionnel holomorphe, qui assure que l'inclusion $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} = C_r^*(\mathcal{G})$ soit un isomorphisme en K -théorie. L'accouplement

$$(2) \quad \langle _ , _ \rangle : K_0(\mathcal{A}) \times HP^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

entre K -théorie et cohomologie cyclique périodique se prolonge dans ce cas sur $K_0(C_r^*(\mathcal{G}))$ et décrit donc un invariant homotopique en termes de données lisses.

Les travaux de Monthubert [Mon03] ont montré comment associer à toute variété à coins X un groupoïde longitudinalement lisse $\Gamma(X)$ et un calcul pseudodifférentiel associé $\Psi^\infty(\Gamma(X))$ qui coïncide avec le b -calcul de Melrose. Le b -calcul est un calcul pseudodifférentiel sur les variétés à coins introduit par Melrose pour comprendre et démontrer le théorème d'indice d'Atiyah-Patodi-Singer en suivant la démarche d'Atiyah-Singer [Mel93]. Pour étendre le théorème aux familles d'opérateurs, Melrose et Mazzeo ont ensuite analysé le cas d'un bord fibré et introduit un nouveau calcul, le ϕ -calcul [MM98]. D'autre part l'étude des variétés stratifiées et l'existence d'un processus de désingularisation permet de considérer toute pseudo-variété stratifiée comme espace quotient d'une variété à coins fibrés. On souhaite donc disposer d'outils équivalents en termes de groupoïde pour décrire le calcul pseudodifférentiel sur les variétés à coins fibrés. Plus généralement on souhaiterait définir un groupoïde décrivant tout feuilletage singulier d'une variété stratifiée.

Nous montrons dans ce travail qu'une telle construction existe pour le ϕ -calcul, en associant à toute variété à bord feuilleté, puis à toute variété à coins fibrés X un groupoïde d'éclatement $\Gamma_\phi(X)$ longitudinalement lisse. Nous montrons ensuite dans le cas fibré que le calcul pseudodifférentiel à support compact associé coïncide avec le ϕ -calcul à support compact de Melrose, et l'on introduit une algèbre étendue $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ stable par calcul fonctionnel holomorphe qui contient les opérateurs régularisants du ϕ -calcul. On définit sur ce calcul étendu certains éléments de cohomologie cyclique relative intervenant dans la formulation de problèmes d'indice supérieurs. Enfin on montre que le groupoïde d'éclatement possède une signification géométrique naturelle en tant que groupoïde d'holonomie de feuilletage singulier, ce qui rend sa construction indépendante de toute description particulière. On obtient ainsi une interprétation conceptuelle du ϕ -calcul comme calcul pseudodifférentiel associé au groupoïde d'holonomie du feuilletage singulier défini par la variété à bord fibré.

Le chapitre 1 rappelle des constructions importantes en théorie de l'indice comme l'indice analytique et la cohomologie cyclique relative.

Le chapitre 2 regroupe les définitions concernant les variétés à coins fibrés, les équarrissages et les groupoïdes de déformation au cône normal. Le groupoïde d'éclatement $\mathcal{G}_{V_{\mathcal{F}}}$ d'une sous-variété feuilletée (V, \mathcal{F}_1) de codimension 1 dans M est décrit par recollement du groupoïde d'holonomie de $M \setminus V$ et d'un groupoïde de déformation $\mathcal{D}_\varphi = D_\varphi \rtimes \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{G}_{V_{\mathcal{F}}} = \mathcal{D}_\varphi \bigcup_{\Psi} \mathcal{H}ol(M \setminus V).$$

On étend ensuite cette construction au cas des des variétés à coins fibrés par produit fibré des éclatements $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}_i}$ de chaque face. Le chapitre se termine par l'étude de la structure longitudinale de l'éclatement.

Le calcul pseudodifférentiel des variétés à coins fibrés est étudié dans le chapitre 3. On associe à toute variété à coins fibrés X un calcul pseudodifférentiel à support compact $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et un calcul étendu $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X)) = \Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X)) + \mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ à partir d'une fonction longueur ψ à croissance polynomiale. Cette algèbre contient les opérateurs du ϕ -calcul étendu. Pour certains feuilletages non triviaux ψ n'existe plus et l'on propose une construction alternative pour l'espace $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ des fonctions à décroissance rapide.

Le chapitre 4 traite de la cohomologie cyclique relative des variétés à bord feuilleté. L'opérateur de restriction ∂ sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ induit le couple d'algèbres $(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X)), \partial\mathcal{S}_c)$ et l'on cherche à produire plusieurs cocycles cycliques intéressants sur $\partial\mathcal{S}_c$. On construit en particulier un 0-cocycle cyclique relatif $(\bar{\tau}, \mu)$ obtenu à partir d'une trace régularisée $\bar{\tau}$ sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ généralisant la b -trace de Melrose aux variétés à bord feuilleté.

Le chapitre 5 introduit la définition des variétés stratifiées et décrit brièvement en quel sens toute variété stratifiée est le quotient d'une variété à coins fibrés. Une notion de structure lisse et de champs de vecteurs stratifiés est aussi proposée pour les variétés stratifiées.

Enfin le chapitre 6 présente la construction du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage singulier au sens de Skandalis et Androulidakis. Le groupoïde d'éclatement du chapitre 2 est alors ré-interprété en tant que groupoïde d'holonomie du feuilletage singulier défini par la variété à coins fibrés. Le groupoïde d'éclatement d'une variété à coins fibrés construit dans ce travail est donc un exemple explicite d'espace de feuilles singulier de la construction générale [AS06].

CHAPITRE 1

Théorie de l'indice

• • •

1 Théorie de l'indice pour les groupoïdes de Lie

Les éléments de théorie de l'indice présentés ci-dessous sont essentiellement issus des travaux de Connes [Con79], Monthubert-Pierrot [MP97] et Nistor-Weinstein-Xu [NWX99]. La construction des indices lisses et analytiques reprend la démarche exposée dans [Con94] et [CR07].

1.1. \mathcal{G} -Calcul pseudodifférentiel

Un \mathcal{G} -opérateur pseudodifférentiel est une famille différentiable d'opérateurs pseudodifférentiels $\{P_x\}_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ agissant sur $C_c^\infty(\mathcal{G}_x)$ de sorte que pour $\gamma \in \mathcal{G}$ et $U_\gamma : C_c^\infty(\mathcal{G}_{s(\gamma)}) \rightarrow C_c^\infty(\mathcal{G}_{r(\gamma)})$ l'opérateur induit, la condition de \mathcal{G} -invariance suivante est vérifiée

$$P_{r(\gamma)} \circ U_\gamma = U_\gamma \circ P_{s(\gamma)}.$$

Les opérateurs peuvent agir plus généralement sur les sections d'un fibré vectoriel $E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$. La condition de différentiabilité exacte est définie dans [NWX99].

Il ne sera ici question que d'opérateurs uniformément supportés, rappelons brièvement cette notion. Soit $P = (P_x, x \in \mathcal{G}^{(0)})$ un \mathcal{G} -opérateur, notons k_x le noyau de Schwartz de P_x . Le support de P et son support réduit sont définis par

$$\text{supp } P := \overline{\cup_x \text{supp } k_x}$$

$$\text{supp}_\mu P := \mu_1(\text{supp } P)$$

où $\mu_1(g', g) = g'g^{-1}$. On dira que P est uniformément supporté si $\text{supp}_\mu P$ est compact dans \mathcal{G} .

Dans la suite on notera $\Psi^m(\mathcal{G}, E)$ l'espace des \mathcal{G} -opérateurs pseudo-différentiels supportés uniformément. On notera aussi

$$\Psi^\infty(\mathcal{G}, E) = \bigcup_m \Psi^m(\mathcal{G}, E) \text{ et } \Psi^{-\infty}(\mathcal{G}, E) = \bigcap_m \Psi^m(\mathcal{G}, E).$$

REMARQUE 1.1. La condition de support réduit se justifie du fait que $\Psi^{-\infty}(\mathcal{G}, E)$ s'identifie à $C_c^\infty(\mathcal{G}, \text{End}(E))$ grâce au théorème du noyau de Schwartz ([**NWX99**]).

REMARQUE 1.2. $\Psi^\infty(\mathcal{G}, E)$ est une algèbre filtrée, *i.e.*

$$\Psi^m(\mathcal{G}, E)\Psi^{m'}(\mathcal{G}, E) \subset \Psi^{m+m'}(\mathcal{G}, E).$$

En particulier, $\Psi^{-\infty}(\mathcal{G}, E)$ est un idéal bilatère.

La notion de symbole principal s'étend aisément à $\Psi^{-\infty}(\mathcal{G}, E)$. Notons $\pi : A^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ la projection. Si $P = (P_x, x \in \mathcal{G}^{(0)}) \in \Psi^m(\mathcal{G}, E, F)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m sur \mathcal{G} , le symbole principal $\sigma_m(P_x)$ de P_x est une section C^∞ du fibré vectoriel $\text{End}(\pi_x^*r^*E, \pi_x^*r^*F)$ au-dessus de $T^*\mathcal{G}_x$, telle que le morphisme défini dans chaque fibre soit homogène de degré m .

L'existence de connections invariantes permet de définir l'exponentiation sur l'algèbroïde de Lie $A^*\mathcal{G}$ et fournit une section $\sigma_m(P)$ de $\text{End}(\pi^*E, \pi^*F)$ au-dessus de $A^*\mathcal{G}$ qui vérifie

$$(3) \quad \sigma_m(P)(\xi) = \sigma_m(P_x)(\xi) \in \text{End}(E_x, F_x) \text{ si } \xi \in A_x^*\mathcal{G}$$

modulo l'espace des symboles d'ordre $m - 1$. Les termes d'ordre m de $\sigma_m(P)$ restent invariants par le choix d'une connection différente et l'équation ci-dessus induit une unique application linéaire surjective

$$(4) \quad \sigma_m : \Psi^m(\mathcal{G}, E) \rightarrow \mathcal{S}^m(A^*\mathcal{G}, \text{End}(E, F)),$$

de noyau $\Psi^{m-1}(\mathcal{G}, E)$ ([**NWX99**], proposition 2), où $\mathcal{S}^m(A^*\mathcal{G}, \text{End}(E, F))$ désigne les sections du fibré $\text{End}(\pi^*E, \pi^*F)$ au-dessus de $A^*\mathcal{G}$, homogènes de degré m dans chaque fibre.

1.2. Indice lisse et indice analytique

DÉFINITION 1.3. Soit $P = (P_x, x \in \mathcal{G}^{(0)})$ un \mathcal{G} -opérateur pseudodifférentiel. P est dit elliptique si chaque P_x est elliptique.

L'ensemble des \mathcal{G} -opérateurs pseudodifférentiels elliptiques sera noté $\text{Ell}(\mathcal{G})$.

PROPOSITION 1.4. [**Con79**] Soit $P = (P_x, x \in \mathcal{G}^{(0)}) \in \Psi^m(\mathcal{G}, E)$ elliptique. Alors il existe $Q \in \Psi^{-m}(\mathcal{G}, E)$ tel que

$$I_E - PQ \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{G}, E) \text{ et } I_E - QP \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{G}, E),$$

où I_E dénote l'opérateur identité sur E .

L'existence du pseudo-inverse Q implique que P définit un élément inversible de $\Psi^\infty(\mathcal{G})/\Psi^{-\infty}(\mathcal{G})$. Il n'est pourtant pas toujours possible de trouver un \mathcal{G} -opérateur P' de la même classe que P , i.e. $P' - P \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{G})$, qui soit *inversible* dans $\Psi^\infty(\mathcal{G})$. Cette obstruction à un relèvement inversible est mesurée par l'*indice* de P , élément du groupe de K -théorie $K_0(\Psi^{-\infty}(\mathcal{G})) \cong K_0(C_c^\infty(\mathcal{G}))$. L'indice $ind P$ peut être explicité par une construction classique détaillée ci-dessous.

DÉFINITION 1.5. Soit A une algèbre unitaire sur \mathbb{C} , $I \subset A$ un idéal bilatère et $\pi : A \rightarrow A/I$ l'application quotient. Un quasi-isomorphisme est un triplet (E, F, σ) où E, F sont des A -modules projectifs de type fini et

$$\sigma : \pi_* E \rightarrow \pi_* F$$

est un isomorphisme de A/I -modules. Un quasi-isomorphisme (E, F, σ) sera dit dégénéré lorsque σ provient d'un isomorphisme $T : E \rightarrow F$.

REMARQUE 1.6. Tout élément P de A inversible modulo I définit le quasi-isomorphisme $(A, A, \pi(P))$.

REMARQUE 1.7. Il existe une notion naturelle de somme directe et d'isomorphisme sur l'ensemble des quasi-isomorphismes. Soient (E, F, σ) et (E', F', σ') deux quasi-isomorphismes, alors :

- $\sigma \oplus \sigma'$ est défini par le triplet $(E \oplus E', F \oplus F', \sigma \oplus \sigma')$
- $\sigma \cong \sigma'$ ssi il existe des isomorphismes $f : E \rightarrow E'$ et $g : F \rightarrow F'$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_* E & \xrightarrow{\sigma} & \pi_* F \\ \pi_* f \downarrow & & \downarrow \pi_* g \\ \pi_* E' & \xrightarrow{\sigma'} & \pi_* F'. \end{array}$$

On définit alors une relation d'équivalence par :

$$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \text{il existe des quasi-isomorphismes dégénérés } \tau \text{ et } \tau' \text{ tels que } \sigma \oplus \tau \cong \sigma' \oplus \tau'.$$

DÉFINITION 1.8 (K -théorie relative). L'ensemble $K(A, I)$ des classes d'équivalence de quasi-isomorphismes pour \sim est appelé K -théorie relative de I dans A .

PROPOSITION 1.9. $(K(A, I), \oplus)$ est un groupe abélien.

DÉMONSTRATION. L'associativité et la commutativité de \oplus sont immédiates. L'existence d'un inverse pour $(E, F, \sigma) \in K(A, I)$ tient au fait que $(E, F, \sigma) \oplus (F, E, \sigma^{-1})$ est dégénéré. En effet, soient $P : E \rightarrow F$ et $Q : F \rightarrow E$ des morphismes tels que $\pi_*(P) = \sigma$ et $\pi_*(Q) = \sigma^{-1}$. Posons

$$T = \begin{pmatrix} (1 - PQ)P + P & PQ - 1 \\ 1 - QP & Q \end{pmatrix}$$

Alors $\pi_*(T) = \sigma \oplus \sigma^{-1}$ et $T : E \oplus F \rightarrow F \oplus E$ est un isomorphisme d'inverse explicite

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} Q & 1 - QP \\ PQ - 1 & (1 - PQ)P + P \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(E, F, \sigma)^{-1} = (F, E, \sigma^{-1})$, ce qui achève la preuve. □

L'intérêt de la K -théorie relative réside dans la définition et la description aisée de ses éléments en termes de quasi-isomorphismes. Or, un calcul en K -théorie dû à Milnor [Mil71] permet son identification à la K -théorie algébrique usuelle :

PROPOSITION 1.10. Les groupes $K(A, I)$ et $K_0(I)$ sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. Posons $D(A, I) = \{(a, a') \in A \times A; a - a' \in I\}$. Les projections canoniques p_1 et p_2 suivant chaque facteur fournissent un diagramme commutatif de morphismes d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} D(A, I) & \xrightarrow{p_2} & A \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{\pi} & A/I \end{array}$$

Considérons $K'(A, I) = \text{Ker}\{K_0(D(A, I)) \xrightarrow{p_{1*}} K_0(A)\}$. En notant \tilde{I} l'unitarisation de I , on a $\tilde{I} \subset A$ et l'injection de \tilde{I} dans $D(A, I)$ par l'application diagonale canonique fournit immédiatement l'isomorphisme $K'(A, I) \cong K_0(I)$ au travers du diagramme commutatif suivant et de son image en K -théorie :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \tilde{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & D(A, I) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il reste à construire un isomorphisme entre $K(A, I)$ et $K'(A, I)$. Soit (E, F, σ) un quasi-isomorphisme sur (A, I) . Les applications $(\sigma\pi)_* : \begin{cases} E \rightarrow \pi_*(F) \\ e \rightarrow \sigma(e \otimes 1) \end{cases}$ et $\pi_* : \begin{cases} F \rightarrow \pi_*(F) \\ f \rightarrow f \otimes 1 \end{cases}$ permettent de définir

$$M(E, F, \sigma) = \{(e, f) \in E \times F; (\sigma\pi)_*(e) = \pi_*(f)\}.$$

Il apparaît que $M(E, F, \sigma)$ est un $D(A, I)$ -module projectif de type fini, avec $(p_1)_*(M) \cong E$ et $(p_2)_*(M) \cong F$, et que tout $D(A, I)$ -module projectif de type fini est de cette forme ([Mil71]). L'application $\alpha : K(A, I) \rightarrow K'(A, I)$ donnée par

$$\alpha([E, F, \sigma]) = [M(E, F, \sigma)] - [M(E, E, id)]$$

définit donc bien un morphisme de groupe.

Si maintenant $x = [M(E, F, \sigma)] - [M(E, F', \sigma')] \in K'(A, I)$, on définit $\beta : K'(A, I) \rightarrow K(A, I)$ par

$$\beta(x) = (E \oplus F', F \oplus E, \sigma \oplus (\sigma')^{-1}).$$

On obtient immédiatement que $\beta \circ \alpha = id_{K(A, I)}$ car :

$$(\beta \circ \alpha)([E, F, \sigma]) = [E \oplus E, F \oplus E, \sigma \oplus id] = [E, F, \sigma].$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(x) &= [M(E \oplus F', F \oplus E, \sigma \oplus (\sigma')^{-1})] - [M(E \oplus F', E \oplus F', id)] \\ &= [M(E, F, \sigma)] - [M(E, F', \sigma')] \\ &= x \end{aligned}$$

car $(\sigma')^{-1} \oplus \sigma'$ se relève en un isomorphisme comme dans la proposition 1.9, ce qui fournit l'isomorphisme $M(E \oplus F', F \oplus E, \sigma \oplus (\sigma')^{-1}) \oplus M(E, F', \sigma') \cong M(E, F, \sigma) \oplus M(E \oplus F', E \oplus F', id)$ et permet de conclure.

□

EXEMPLE 1.11. Soit $(A, A, \pi(P))$ le quasi-isomorphisme défini par un élément P de A inversible modulo I . L'élément de K -théorie $ind(P)$ correspondant est donné par $[e] - [e_0]$, où les deux idempotents $e, e_0 \in M_2(\tilde{I})$ sont explicitement $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e = Te_0T^{-1}$, avec T et T^{-1} comme en 1.9.

Dans le cas général où $P \in \Psi^m(\mathcal{G}, E, F)$, l'inclusion $C_c^\infty(\mathcal{G}^{(0)}) \subset \Psi^0(\mathcal{G})$ en tant qu'opérateurs de multiplication permet de pousser les $C_c^\infty(\mathcal{G}^{(0)})$ -modules E, F en des $\Psi^\infty(\mathcal{G})$ -modules \mathcal{E}, \mathcal{F} . L'existence d'un pseudo-inverse (proposition 1.4) combinée au théorème du noyau de Schwartz expriment alors précisément que $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, P)$ est un quasi-isomorphisme sur $(\Psi^\infty(\mathcal{G}), C_c^\infty(\mathcal{G}^{(0)}))$.

DÉFINITION 1.12 (Indice lisse). Soit P un \mathcal{G} -opérateur pseudo-différentiel elliptique. On appelle indice lisse l'élément $ind(P) \in K_0(C_c^\infty(\mathcal{G}))$ défini par le quasi-isomorphisme précédent.

Il est à noter que certains résultats d'annulation ou d'invariance par homotopie de l'indice ne sont valables que dans une complétion C^* -algébrique de $C_c^\infty(\mathcal{G})$ ([Con94], p.132). Ainsi une courbure scalaire longitudinale strictement positive sur une variété de type spin n'entraîne pas nécessairement la nullité de l'indice lisse de l'opérateur de Dirac. De plus, contrairement au cas classique d'une variété, l'application indice ne se factorise pas en général à travers la classe du symbole principal d'un \mathcal{G} -opérateur, ce qui compromet le calcul de l'indice lisse par les outils de K -théorie topologique, indice topologique et isomorphisme de Thom. La flèche pointillée n'existe donc pas nécessairement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Ell(\mathcal{G}) & \xrightarrow{ind} & K_0(C_c^\infty(\mathcal{G})) \\ \sigma \downarrow & \nearrow & \\ K^0(A^*\mathcal{G}) & & \end{array},$$

Un contre-exemple simple est donné par $(\mathbb{R}, +)$ en tant que groupoïde ([Con94] p. 142) :

PROPOSITION 1.13. *L'application $D \rightarrow ind(D) \in K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}))$ est une injection de l'espace projectif des polynômes non-nuls $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ dans $K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}))$.*

Ces limitations dans le cadre C^∞ motivent la définition suivante :

DÉFINITION 1.14 (Indice analytique). Soit $j : K_0(C_c^\infty(\mathcal{G})) \rightarrow K_0(C_r^*(\mathcal{G}))$ le morphisme de K -théorie induit par l'inclusion $C_c^\infty(\mathcal{G}) \subset C_r^*(\mathcal{G})$. On appelle indice analytique l'image par j de l'indice lisse.

Une des propriétés fondamentales de l'indice analytique est de pouvoir se factoriser à travers le symbole principal. Autrement dit, on a un

diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Ell(\mathcal{G}) & \xrightarrow{ind} & K_0(C_c^\infty(\mathcal{G})) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow j \\ K^0(A^*\mathcal{G}) & \xrightarrow{ind_a} & K_0(C_r^*(\mathcal{G})). \end{array}$$

où ind_a désigne le *morphisme* en K -théorie qui factorise l'indice analytique.

En effet, ind_a est le morphisme de bord associé à la suite exacte courte de C^* -algèbres ([Con79, CS84, MP97, NWX99])

$$(5) \quad 0 \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow \overline{\Psi^0(\mathcal{G})} \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*\mathcal{G}) \rightarrow 0$$

où $\overline{\Psi^0(\mathcal{G})}$ est une C^* -complétion de $\Psi^0(\mathcal{G})$, $S^*\mathcal{G}$ est le fibré en sphères de $A^*\mathcal{G}$ et σ est l'extension du symbole principal.

• • •

2 Cohomologie cyclique relative

La cohomologie cyclique est une généralisation au cadre non-commutatif de la théorie de De Rham. La version relative de cette théorie ([LMP09b]) est adaptée à la description d'algèbres définies relativement à un couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ d'algèbres de Fréchet. L'accouplement en (co)homologie cyclique relative :

$$\langle _, _ \rangle : HC_*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times HC^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$$

fournit une interprétation conceptuelle des formules d'indice de type McKean-Singer. En particulier pour le couple $(C^\infty(M), C^\infty(\partial M))$ on retrouve le théorème d'indice d'Atiyah-Patodi-Singer (section 3.5) en considérant un cocycle cyclique relatif $({}^b\text{Tr}, \mu)$ faisant intervenir la b-trace de Melrose.

2.1. Cycles sur une algèbre

DÉFINITION 2.1. Une algèbre différentielle graduée est une paire (Ω, d) où $\Omega = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k$ est une algèbre graduée et $d : \Omega \rightarrow \Omega$ est une différentielle de degré 1 et de courbure 0. d est donc une application linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

$$\cdot \text{Im}_d(\Omega^k) \subset \Omega^{k+1}$$

- $d(\omega_i \cdot \omega_j) = d(\omega_i)\omega_j + (-1)^i \omega_i d\omega_j$
- $d^2 = 0$.

Soit \mathcal{A} une algèbre sur \mathbb{C} .

DÉFINITION 2.2. Un cycle de dimension n sur \mathcal{A} est un triplet (Ω, ρ, \int) où (Ω, d) est une algèbre différentielle graduée, $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^0$ est un morphisme d'algèbres et $\int : \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}$ est une trace graduée fermée, i.e. :

- $\forall \omega_i \in \Omega^i, \omega_j \in \Omega^j$ avec $i + j = n$, $\int \omega_i \omega_j = (-1)^i \int \omega_j \omega_i$
- $\forall \omega \in \Omega^{n-1}$, $\int d\omega = 0$.

DÉFINITION 2.3. Le caractère d'un cycle de dimension n sur \mathcal{A} est la fonctionnelle $(n+1)$ -linéaire

$$\tau(a^0, a^1, \dots, a^n) = \int \rho(a^0) d\rho(a^1) \dots d\rho(a^n)$$

EXEMPLE 2.4. Soit M une variété lisse. Alors l'algèbre $\Omega(M)$ des formes différentielles sur M munie de la différentielle de De Rham est une algèbre différentielle graduée. Soit $C : \Omega^n(M) \rightarrow \mathbb{C}$ un courant fermé de degré n . $(\Omega(M), \text{Id}, C)$ est un cycle de dimension n sur $C^\infty(M)$. Son caractère est donné par

$$\tau_C(f^0, \dots, f^n) = C(f^0 df^1 \dots df^n)$$

EXEMPLE 2.5. Supposons \mathcal{A} involutive et soit (\mathcal{H}, F) un module de Fredholm sur \mathcal{A} , i.e. :

- \mathcal{H} est un espace de Hilbert muni d'une représentation involutive π de \mathcal{A} sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$
- F est un opérateur sur \mathcal{H} tel que $F = F^*$, $F^2 = 1$ et $[F, \pi(a)]$ est un opérateur compact pour tout $a \in \mathcal{A}$.

On suppose de plus que (\mathcal{H}, F) est $(n+1)$ -sommable, c'est à dire que pour tout $a \in \mathcal{A}$ $[F, \pi(a)]$ appartient à l'idéal de Schatten $\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts T tels que $\sum \lambda_k(|T|)^{n+1} < \infty$.

Le calcul « quantique » associé au module de Fredholm (\mathcal{H}, F) permet de définir un cycle de dimension n sur \mathcal{A} . Posons

$$\Omega^k = \left\{ \sum a^0 [F, a^1] \dots [F, a^k], a^0, \dots, a^k \in \mathcal{A} \right\}$$

On définit $d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ par $d\omega = F\omega - (-1)^k \omega F$. Comme $F^2 = 1$ on a $d^2 = 0$. De plus $\Omega = \bigoplus \Omega^k$ est une algèbre différentielle graduée. Posons $\text{Tr}'(T) = \frac{1}{2} \text{Trace}(F(FT + TF))$. La trace graduée fermée Tr_s est obtenue pour $\omega \in \Omega^n$ en posant

$$\begin{aligned} \text{Tr}_s \omega &= \text{Tr}'(\omega) & \text{si } n \text{ est impair} \\ \text{Tr}_s \omega &= \text{Tr}'(\gamma\omega) & \text{si } n \text{ est pair} \end{aligned}$$

L'élément γ est l'opérateur $\mathbb{Z}/2$ gradué associé à un module de Fredholm pair ([Con94], Définition IV.1). Alors (Ω, d, Tr_s) est un cycle de dimension n sur \mathcal{A} ([Con94], Proposition IV.1.1).

Le caractère de ce cycle est donné par la formule :

$$\tau_n(a^0, a^1, \dots, a^n) = \text{Tr}'(a^0[F, a^1] \dots [F, a^n]),$$

où γa^0 remplace a^0 lorsque n est pair.

2.2. Cocycles cycliques et cohomologie cyclique

Soit $C^k(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\otimes k})^*$ l'espace des fonctionnelles $(k+1)$ -linéaires φ sur \mathcal{A} et $b : C^k \rightarrow C^{k+1}$ l'opérateur cobord de Hochschild défini par

$$(b\varphi)(a^0, \dots, a^{k+1}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \varphi(a^0, \dots, a^j a^{j+1}, \dots, a^{k+1}) + (-1)^{k+1} \varphi(a^{k+1} a^0, \dots, a^k).$$

La relation $b^2 = 0$ permet de considérer le complexe de Hochschild $(C^\bullet(\mathcal{A}), b)$, dont la cohomologie lorsque \mathcal{A} est unitaire est par définition la cohomologie de Hochschild de \mathcal{A} , notée $HH^*(\mathcal{A})$.

Il est immédiat de constater que le caractère τ d'un cycle de dimension n sur \mathcal{A} est un élément de $C^n(\mathcal{A})$ qui vérifie $b\tau = 0$ et la condition de cyclicité :

$$\tau(a^1, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^n) \quad \forall a^0, \dots, a^n \in \mathcal{A}.$$

DÉFINITION 2.6. On appelle cocycle cyclique sur \mathcal{A} tout élément τ de $C^\bullet(\mathcal{A})$ qui vérifie les deux propriétés :

- τ est un cocylique : $b\tau = 0$
- τ est cyclique : $\tau(a^1, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^n) \quad \forall a^0, \dots, a^n \in \mathcal{A}$.

Le résultat suivant caractérise précisément les cocycles cycliques comme les caractères de cycles sur \mathcal{A} :

PROPOSITION 2.7 ([Con94], Proposition III.1.4). *Soit τ une fonctionnelle $(n+1)$ -linéaire sur \mathcal{A} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe un cycle (Ω, d, \int) de dimension n sur \mathcal{A} tel que*

$$\tau(a^0, \dots, a^n) = \int \rho(a^0) d\rho(a^1) \dots d\rho(a^n) \quad \forall a^0, \dots, a^n \in \mathcal{A}.$$

- (2) *Il existe une trace graduée fermée $\tilde{\tau} : \Omega^n(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$\tau(a^0, \dots, a^n) = \tilde{\tau}(a^0 da^1 \dots da^n).$$

(3) τ est un cocycle cyclique.

Soit $C_\lambda^n(\mathcal{A})$ le sous-espace de $C^n(\mathcal{A})$ des fonctionnelles $(n+1)$ -linéaires cycliques. Connes a montré que l'opérateur b se restreint à ce sous-espace $b : C_\lambda^n(\mathcal{A}) \rightarrow C_\lambda^{n+1}(\mathcal{A})$, $(C_\lambda^\bullet(\mathcal{A}), b)$ est donc un sous-complexe du complexe de Hochschild.

La cohomologie cyclique $HC^*(\mathcal{A})$ est définie comme la cohomologie du complexe $(C_\lambda^\bullet(\mathcal{A}), b)$. $HC^0(\mathcal{A})$ n'est autre que l'espace des traces sur \mathcal{A} .

REMARQUE 2.8. L'inclusion $C_\lambda^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{A})$ induit un morphisme $HC^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} HH^*(\mathcal{A})$ entre cohomologie cyclique et cohomologie de Hochschild. Ce morphisme n'est pas nécessairement injectif, comme le montre l'exemple $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. En effet dans ce cas $HC^n = 0$ lorsque n est impair et $HC^n = \mathbb{C}$ lorsque n est pair, tandis que $HH^0 = \mathbb{C}$ et HH^n est nul pour tout $n > 0$.

2.3. Le bicomplexe (b, B)

Connes a découvert que la cohomologie cyclique et la cohomologie de Hochschild sont reliées par une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow HC^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} HH^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{B} HC^{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} HC^{n+1}(\mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

L'opérateur $S : HC^{n-1}(\mathcal{A}) \rightarrow HC^{n+1}(\mathcal{A})$ est défini comme le cup produit en cohomologie cyclique [Con85] par un générateur de $HC^2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. On peut explicitement utiliser le cocycle $s_0 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ donné par $(a^0, a^1, a^2) \mapsto a^0 \cdot a^1 \cdot a^2$.

L'opérateur $B : HH^n(\mathcal{A}) \rightarrow HC^{n-1}(\mathcal{A})$ est induit par l'opérateur cobord $B : C^n(\mathcal{A}) \rightarrow C_\lambda^{n-1}(\mathcal{A})$ de Connes donné par la formule :

$$\begin{aligned} B\varphi(a^0, \dots, a^{n-1}) &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{(n-1)j} \varphi(1, a^j, \dots, a^{n-1}, a^0, \dots, a^{j-1}) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{(n-1)j} \varphi(a^j, 1, \dots, a^{j+1}, \dots, a^n, a^0, \dots, a^{j-1}). \end{aligned}$$

Cet opérateur a été introduit pour étudier le cobordisme des cycles sur \mathcal{A} (voir [Con94], III.1.β) : son image coïncide avec les différences de cycles cobordants. Il se décompose sous la forme $B = AB_0$ où $A : C^n(\mathcal{A}) \rightarrow C_\lambda^n(\mathcal{A})$ est l'opérateur d'anti-symétrisation

$$(A\tau)(a^0, \dots, a^n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \tau(a^0, a^{\sigma(1)}, \dots, a^{\sigma(n)})$$

et $B_0 : C^n(\mathcal{A}) \rightarrow C^{n-1}(\mathcal{A})$ est défini par

$$(B_0\tau)(a^0, \dots, a^{n-1}) = \tau(1, a^0, \dots, a^{n-1}) - (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^{n-1}, 1).$$

Les relations de cobord $b^2 = 0, B^2 = 0$ et de commutation graduée $bB + Bb = 0$ [Con85] permettent de considérer un bicomplexe associé aux opérateurs b et B . Soit $C_{\text{per}}^{n,m}(\mathcal{A}) \doteq C^{n-m}(\mathcal{A})$ si $n - m > 0$ et zéro sinon. Alors $b : C_{\text{per}}^{n,m}(\mathcal{A}) \rightarrow C_{\text{per}}^{n+1,m}(\mathcal{A})$ et $B : C_{\text{per}}^{n,m}(\mathcal{A}) \rightarrow C_{\text{per}}^{n,m+1}(\mathcal{A})$ définissent le bicomplexe $(C_{\text{per}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}), b, B)$ nommé bicomplexe (b, B) .

La cohomologie totale du bicomplexe (b, B) coïncide avec la cohomologie cyclique périodique $HP^*(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} . Une définition directe de $HP^*(\mathcal{A})$ est possible en termes de limite inductive des groupes de cohomologie cyclique pairs et impairs :

$$HP^0(\mathcal{A}) = \varinjlim HC^{2k} \quad \text{et} \quad HP^1(\mathcal{A}) = \varinjlim HC^{2k+1}$$

La cohomologie totale du bicomplexe $(C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}), b, B)$ défini par $C^{n,m}(\mathcal{A}) \doteq C^{n-m}(\mathcal{A})$ si $n > m \geq 0$ coïncide quant à elle avec la cohomologie cyclique $HC^*(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} .

Le complexe total du bicomplexe $(C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}), b, B)$ est le complexe $(\text{Tot}^{\bullet}C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}), b + B)$ défini par $\text{Tot}^n C = C^n \oplus C^{n-2} \oplus C^{n-4} \dots = \bigoplus_k C^{n-2k}$ muni de la différentielle $b + B$. La cohomologie cyclique de \mathcal{A} est donc calculable par la relation $HC^*(\mathcal{A}) = H^*((\text{Tot}^{\bullet}C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}), b + B))$.

Plus généralement, on appelle complexe mixte un espace vectoriel complexe \mathbb{Z}_+ -gradué $C^{\bullet} = (C^n)_{n \geq 0}$ muni de deux différentielles b et B , $b : C^n \rightarrow C^{n-1}$, $B : C^n \rightarrow C^{n+1}$ vérifiant $b^2 = B^2 = bB + Bb = 0$. Le complexe cyclique associé au complexe mixte (C^{\bullet}, b, B) est le complexe défini pour chaque entier n par $\bigoplus_k C^{n-2k}$ muni de la différentielle $b + B$. Le complexe cyclique coïncide alors avec le complexe total du bicomplexe

$$\begin{array}{ccccc} & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\ & & C^2 & \xleftarrow{B} & C^1 & \xleftarrow{B} & C^0 \\ & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\ & & C^1 & \xleftarrow{B} & C^0 & & \\ & & \downarrow b & & & & \\ & & C^0 & & & & \end{array},$$

et la cohomologie cyclique du complexe mixte (C^{\bullet}, b, B) est la cohomologie de son complexe cyclique.

Le bicomplexe (b, B) permet en pratique de définir et de décrire les éléments de $HP^*(\mathcal{A})$ de manière très explicite. Connes a montré dans le cas $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ que $HP^*(\mathcal{A})$ est canoniquement isomorphe à l'homologie de De Rham $H_*^{DR}(M, \mathbb{C})$.

2.4. Cohomologie cyclique relative

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux algèbres de Fréchet unitaires et $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme unitaire surjectif et continu. On peut associer à la suite exacte courte

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

la suite exacte de complexes mixtes

$$(7) \quad 0 \rightarrow (C^\bullet(\mathcal{B}), b, B) \longrightarrow (C^\bullet(\mathcal{A}), b, B) \longrightarrow (Q^\bullet, b, B) \rightarrow 0$$

où $C^\bullet(\mathcal{A})$ désigne le complexe mixte des cochaines de Hochschild sur \mathcal{A} et Q^\bullet est le complexe mixte obtenu par quotient homotopique (mapping cone) du morphisme de complexes mixtes $\sigma^* : C^\bullet(\mathcal{B}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{A})$.

La cohomologie relative de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est par définition la cohomologie du complexe mixte Q^\bullet .

Les théories de cohomologie relative peuvent être calculées à partir d'un complexe mixte quasi-isomorphe à Q^\bullet ([LMP09b]) :

$$(C^\bullet(\mathcal{A}) \oplus C^{\bullet+1}(\mathcal{B}), \tilde{b}, \tilde{B})$$

où

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b & -\sigma^* \\ 0 & -b \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}.$$

En particulier on obtient la cohomologie de Hochschild relative $HH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ à partir du complexe $(C^\bullet(\mathcal{A}) \oplus C^{\bullet+1}(\mathcal{B}), \tilde{b})$, la cohomologie cyclique relative $HC(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ à partir de $(\text{Tot}^\bullet C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}) \oplus \text{Tot}^{\bullet+1} C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{B}), \tilde{b} + \tilde{B})$, et la cohomologie cyclique périodique relative $HP(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ à partir de $(\text{Tot}^\bullet C_{\text{per}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}) \oplus \text{Tot}^{\bullet+1} C_{\text{per}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{B}), \tilde{b} + \tilde{B})$.

De plus le complexe $(\text{Tot}^\bullet C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}) \oplus \text{Tot}^{\bullet+1} C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{B}), \tilde{b} + \tilde{B})$ est isomorphe à la totalisation du complexe $(C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tilde{b} + \tilde{B})$ où $C^{p,q}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \doteq C^{p,q}(\mathcal{A}) \oplus C^{p,q+1}(\mathcal{B})$, ce qui donne finalement :

$$HC(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H((\text{Tot}^\bullet C^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tilde{b} + \tilde{B}))$$

et

$$HP(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H((\text{Tot}^\bullet C_{\text{per}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tilde{b} + \tilde{B}))$$

La notion de cycle s'étend aussi sans difficulté au cas relatif. Tout comme dans la situation classique, il est possible de décrire les cocycles cycliques relatifs comme caractères de cycles relatifs.

DÉFINITION 2.9. Un cycle relatif de dimension n sur $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est la donnée :

- (1) d'algèbres différentielles graduées (Ω, d) et $(\partial\Omega, d)$ sur \mathcal{A} resp. \mathcal{B} et d'un morphisme surjectif unitaire $r : \Omega \rightarrow \partial\Omega$ de degré 0,
- (2) de morphismes unitaires $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^0$ et $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \partial\Omega^0$ vérifiant $r \circ \rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{B}} \circ \sigma$,
- (3) d'une trace graduée \int de degré n sur Ω telle que $\int d\omega = 0$ si $r(\omega) = 0$.

DÉFINITION 2.10. Le caractère d'un cycle relatif de dimension n sur $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est le couple de fonctionnelles $(\varphi_n, \psi_{n-1}) \in C^n(\mathcal{A}) \oplus C^{n-1}(\mathcal{B})$ défini par :

$$\varphi_n(a^0, a^1, \dots, a^n) = \frac{1}{n!} \int \rho(a^0) d\rho(a^1) \dots d\rho(a^n)$$

$$\psi_{n-1}(b^0, b^1, \dots, b^{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!} \int' \rho(b^0) d\rho(b^1) \dots d\rho(b^{n-1})$$

Le caractère (φ_n, ψ_{n-1}) est alors un cocycle cyclique relatif de $\text{Tot}^n C^{\bullet, \bullet}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

EXEMPLE 2.11. Soit M une variété riemannienne complète à bord munie d'une b -métrique exacte. L'opérateur « famille indicielle » [Mel93] induit sur les opérateurs régularisants du b -calcul la suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}^b\Psi_{\text{Tr}}^{-\infty}(M) \longrightarrow {}^b\Psi^{-\infty}(M) \xrightarrow{I} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \Psi^{-\infty}(\partial M)) \rightarrow 0$$

où ${}^b\Psi_{\text{Tr}}^{-\infty}(M)$ désigne les opérateurs régularisants traçables.

Soit ${}^b\text{Tr}$ la b -trace de Melrose et $\mu \in C^2(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \Psi^{-\infty}(\partial M)))$ le 1-cocycle cyclique défini par :

$$\mu(A^0, A^1) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}_{\partial M} \left(\frac{dI(A^0, \lambda)}{d\lambda} I(A^1, \lambda) \right) d\lambda.$$

Alors $({}^b\text{Tr}, \mu)$ est un 0-cocycle cyclique relatif sur le couple d'algèbres $({}^b\Psi^{-\infty}(M), \mathcal{S}(\mathbb{R}, \Psi^{-\infty}(\partial M)))$.

Les théories duales d'homologie cyclique relative se définissent par des constructions similaires à celles présentées ci-dessus. On obtient la suite exacte courte de complexes homologiques mixtes

$$(8) \quad 0 \rightarrow (K^\bullet, b, B) \longrightarrow (C^\bullet(\mathcal{A}), b, B) \longrightarrow (C^\bullet(\mathcal{B}), b, B) \rightarrow 0$$

et le complexe mixte noyau K_\bullet est quasi-isomorphe au complexe mixte

$$(C_\bullet(\mathcal{A}) \oplus C_{\bullet+1}(\mathcal{B}), \tilde{b}, \tilde{B})$$

où

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -\sigma^* & -b \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}.$$

Enfin les groupes d'homologie et de cohomologie cyclique relative admettent un accouplement :

$$\langle _ , _ \rangle : HC_*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times HC^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$$

défini sur les (co)chaînes par la formule d'appariement :

$$\begin{aligned} \langle _ , _ \rangle : (C^{p,q}(\mathcal{A}) \oplus C^{p,q+1}(\mathcal{B})) \times (C_{p,q}(\mathcal{A}) \oplus C_{p,q+1}(\mathcal{B})) &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((\varphi, \psi), (\alpha, \beta)) &\mapsto \langle \varphi, \alpha \rangle + \langle \psi, \beta \rangle \end{aligned}$$

• • •

3 Théorèmes d'indice en géométrie non-commutative

Certains cocycles cycliques possèdent la propriété remarquable de s'apparier intégralement avec la K -théorie, et l'application $K_* \xrightarrow{\langle \cdot, \tau \rangle} \mathbb{Z}$ qu'ils définissent permet de calculer des formules d'indices en cohomologie cyclique. Le caractère de Chern d'un module de Fredholm est un exemple fondamental de cette situation.

3.1. Accouplement avec la K -théorie

Soit \mathcal{A} une algèbre unitaire, $\tau \in Z_\lambda^*(\mathcal{A})$ un cocycle cyclique sur \mathcal{A} et $e \in \mathcal{M}_k(\mathcal{A})$ un idempotent. La trace usuelle sur les matrices $\text{Tr} : \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est un générateur de $HC^0(\mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$ et le cup produit avec cet élément est une application $\sharp \text{Tr} : HC^n(\mathcal{A}) \rightarrow HC^n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C})) \approx HC^n(\mathcal{M}_k(\mathcal{A}))$.

Lorsque $\tau \in Z_\lambda^{2n}$ est pair, l'expression

$$\langle \tau, e \rangle = \frac{1}{n!} (\tau \# \text{Tr})(e, \dots, e)$$

ne dépend que des classes $[\tau] \in HC^{2n}$ et $[e] \in K_0(\mathcal{A})$ et définit donc un accouplement bilinéaire entre $K_0(\mathcal{A})$ et $HC^{\text{pair}}(\mathcal{A})$.

Lorsque $\tau \in Z_\lambda^{2n+1}$ est impair, et $u \in GL_k(\mathcal{A})$ on obtient un accouplement similaire de $HC^{\text{impair}}(\mathcal{A})$ à $K_1(\mathcal{A})$ par la formule

$$\langle \tau, u \rangle = \frac{2^{-n}}{\sqrt{2i}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1} (\tau \# \text{Tr})(u^{-1} - 1, u - 1, u^{-1} - 1, \dots, u - 1).$$

Les relations $\langle \tau, e \rangle = \langle S\tau, e \rangle$ et $\langle \tau, u \rangle = \langle S\tau, u \rangle$ permettent d'étendre ces accouplements en cohomologie cyclique périodique.

3.2. Caractère de Chern d'un module de Fredholm

Supposons maintenant \mathcal{A} involutive et soit (\mathcal{H}, F) un module de Fredholm finiment sommable sur \mathcal{A} . Pour tout n assez grand, les cocycles cycliques τ_n de l'exemple 2.5 sont les représentants d'une même classe de cohomologie cyclique périodique, appelée caractère de Chern de (\mathcal{H}, F) . Tout représentant $\tau \in HC^*(\mathcal{A})$ du caractère de Chern $\text{ch}_*(\mathcal{H}, F)$ vérifie alors :

$$\tau(K_0(\mathcal{A})) \subset \mathbb{Z}$$

Cette propriété d'intégralité se déduit d'une formule d'indice d'un opérateur de Fredholm construit à partir de (\mathcal{H}, F) . Dans le cas impair, si $P = \frac{1+F}{2}$ désigne la projection sur les valeurs propres positives de F , l'accouplement de $K_1(\mathcal{A})$ à τ coïncide avec l'application $K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$ définie par :

$$\varphi([u]) = \text{ind}(PuP), \quad u \in GL_1(\mathcal{A}).$$

Le cas pair fait intervenir la $\mathbb{Z}/2$ -graduation naturelle de $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ et l'application $K_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$ définie par (voir [Con94], Proposition IV.0.2)

$$\varphi([e]) = \text{ind}(e^- F e^+), \quad e \in \text{Proj}(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{M}_q(\mathbb{C})).$$

Le caractère de Chern d'un module de Fredholm permet donc de calculer l'application indice $\varphi : K_j(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ où $j=0$ ou 1 en fonction de la parité de (\mathcal{H}, F) par la formule :

$$\varphi(x) = \langle x, \text{ch}_*(\mathcal{H}, F) \rangle.$$

3.3. Classe de Hochschild du caractère de Chern

Les cocycles cycliques τ_n définissant le caractère de Chern font intervenir la trace ordinaire Tr qui est une donnée non locale. Pour un calcul explicite de l'accouplement en K -théorie il est crucial de disposer de formules locales et la trace de Dixmier Tr_ω est alors un outil fondamental ([Con94], Section IV.2).

En guise d'exemple dans le cas des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété lisse, $\text{Tr}_\omega(T)$ pour T d'ordre 1 coïncide avec le résidu de Wodzicky qui se calcule localement comme intégrale d'une densité sur M . Si

$$k(x, y) = -a(x) \log|x - y| + o(1)$$

désigne le noyau de T au voisinage de la diagonale, $k(x, y)$ diverge logarithmiquement et l'on pose

$$\int T = \int_M a(x).$$

Le terme de droite a toujours un sens ce qui permet d'étendre la formule aux opérateurs pseudodifférentiels de tout ordre.

Plus généralement la trace de Dixmier permet de définir des cocycles de Hochschild homologues au caractère de Chern en cohomologie de Hochschild :

THÉORÈME 3.1 ([Con94], Proposition IV.2.8). *Soit (\mathcal{H}, F) un module de Fredholm sur \mathcal{A} , et D un opérateur auto-adjoint non borné sur H tel que $D^{-1} \in L^{(n, \infty)}$, $\text{Signe}(D) = F$ et tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$ les opérateurs a et $[D, a]$ soient dans le domaine de toutes les puissances de la dérivation δ donnée par $\delta(x) = [[D], x]$.*

(1) *On définit un n -cocycle de Hochschild φ_ω sur \mathcal{A} par*

$$\varphi_\omega(a^0, a^1, \dots, a^n) = \lambda_n \text{Tr}_\omega(a^0 [D, a^1] \dots [D, a^n] |D|^{-n})$$

(2) *Pour tout n -cycle de Hochschild $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, $\langle \varphi_\omega, c \rangle = \langle \tau_n, c \rangle$ où $\tau_n \in HC^n(\mathcal{A})$ est le caractère de Chern de (\mathcal{H}, F) .*

Si de plus la cohomologie de Hochschild est Hausdorff, elle est le dual de l'homologie de Hochschild et φ_ω est alors l'image de τ_n par l'application I « oubli de cyclicité » de la suite exacte :

$$HC^{n-2}(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} HC^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} HH^n(\mathcal{A})$$

La non-nullité de $I(\tau_n)$ est donc une obstruction à l'existence d'un $(n - 2)$ -cocycle cyclique ϕ tel que $\tau_n = S\phi$. En particulier un représentant τ_d du caractère de Chern dont la dimension est minimale a

une classe de Hochschild $I(\tau_d) \neq 0$, ce qui implique l'existence de divergences logarithmiques mesurées par la valeur de la trace de Dixmier $\text{Tr}_\omega(|D|^{-d}) \neq 0$. Autrement dit le résidu de la fonction $\zeta(s) = \text{Tr}(|D|^{-s})$ ne s'annule pas en $s = d$.

EXEMPLE 3.2. Soit (\mathcal{H}, F) un module de Fredholm vérifiant les hypothèses précédentes et tel que $(D + i)^{-1}$ soit d'ordre $1/n$, $n = 2m$. Soit e un idempotent $e = e^2 = e^*$ dont toutes les composantes inférieures du caractère de Chern $\text{ch}(e)$ en homologie cyclique s'annulent :

$$\text{ch}_j(e) = 0, \quad j < m.$$

Alors $\text{ch}_m(e)$ est un cycle de Hochschild et l'accouplement du théorème précédent implique la formule d'indice locale [CL01] :

$$\text{ind } D_e^+ = (-1)^m \int \gamma(e - \frac{1}{2}) [D, e]^{2m} D^{-2m}$$

3.4. Théorème d'indice local en géométrie non-commutative

Le cocycle de Hochschild φ_ω construit à partir de la trace de Dixmier est calculable localement, mais n'est homologue au caractère de Chern qu'en cohomologie de Hochschild. Le résultat suivant définit les composantes (φ_n) d'un cocycle homologue au caractère de Chern dans le bicomplexe (b, B) .

DÉFINITION 3.3. Soit \mathcal{B} l'algèbre générée par les dérivations $\delta^k(a), \delta^k([|D|, a])$ du théorème précédent. On appelle spectre de dimension de \mathcal{A} le sous-ensemble $\Sigma \subset \mathbb{C}$ des singularités des fonctions analytiques

$$\zeta_b(z) = \text{Tr}(b|D|^{-z}), \quad \text{Re } z > p, \quad b \in \mathcal{B}.$$

On dira que le spectre de dimension est simple si ζ_b peut être étendue à $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ avec des pôles simples en Σ .

THÉORÈME 3.4 ([CM95]). *Sous les hypothèses du théorème précédent on suppose le spectre de dimension de \mathcal{A} simple et discret.*

- (1) L'égalité $\int P = \text{Res}_{z=0} \text{Tr}(P|D|^{-z})$ définit une trace sur l'algèbre générée par $\mathcal{A}, [D, a]$ et $|D|^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$.
- (2) La formule suivante a un nombre fini de termes non nuls qui définissent les composantes impaires $(\varphi_n)_{n=1,3,\dots}$ d'un cocycle dans le bicomplexe (b, B) de \mathcal{A} :

$$\varphi_n(a^0, a^1, \dots, a^n) = \sum_k c_{n,k} \int a^0 [D, a^1]^{(k_1)} \dots [D, a^n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$$

où l'on note $T^{(k)} = \Delta^k(T)$, $\Delta(T) = D^2T - TD^2$, k est un multi-index $|k| = k_1 + \dots + k_n$ et

$$c_{n,k} = (-1)^{|k|} \sqrt{2i} (k_1! \dots k_n!)^{-1} ((k_1+1) \dots (k_1+k_2+\dots+k_n+n))^{-1} \Gamma(|k| + \frac{n}{2}).$$

- (3) L'accouplement de la classe de cohomologie cyclique $(\varphi_n) \in HC^*(\mathcal{A})$ avec $K_1(\mathcal{A})$ donne l'indice de Fredholm de D à coefficients dans $K_1(\mathcal{A})$.

Une formule analogue existe dans le cas pair mais le terme φ_0 ne s'exprime pas en termes de résidus f car il n'est pas local lorsque \mathcal{H} est de dimension finie.

3.5. Formule d'Atiyah-Patodi-Singer en cohomologie cyclique relative

L'accouplement en cohomologie cyclique relative permet d'obtenir de manière particulièrement élégante des formules d'indice telles que celle d'Atiyah-Patodi-Singer. L'exemple ci-dessous est exposé par Lesch, Moscovici et Pflaum dans ([LMP09a], 1.5).

Soit D un opérateur gradué auto-adjoint non borné sur \mathcal{A} , dont on note α l'opérateur de graduation. On suppose de plus que D est un opérateur de Fredholm dont la projection $P_{\ker D}$ est traçable. On définit $A_0(t) = \alpha D \exp(-\frac{1}{2}tD^2)$ et $A_1(t) = \int_t^\infty D e^{\frac{t}{2}-s} D^2 ds$.

L'appariement de $\exp(-tD^2)$ avec ${}^b\text{Tr}$ n'est en général pas indépendant de t car ${}^b\text{Tr}$ n'est pas une trace. En revanche le couple $EXP_t(D) = (\alpha \exp(-tD^2), -\frac{1}{2}\sigma(A_0) \otimes \sigma(A_1))$ définit une classe d'homologie cyclique relative indépendante de t et homologue à $(\alpha P_{\ker D}, 0)$. La formule d'appariement permet d'obtenir une version relative de la formule de MacKean-Singer :

$$\begin{aligned} \text{ind}(D) &= \text{Tr}(\alpha P_{\ker D}) \\ &= \langle ({}^b\text{Tr}, \mu), (\alpha \exp(-tD^2), -\frac{1}{2}\sigma(A_0) \otimes \sigma(A_1)) \rangle \\ &= {}^b\text{Tr}(\alpha \exp(-tD^2)) - \frac{1}{2}\mu(\sigma(A_0), \sigma(A_1)) \end{aligned}$$

Lorsque $D = \Gamma \frac{d}{dx} + D_\partial$ est un b -opérateur de Dirac de composante tangentielle $D_\partial = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ le second terme dans l'expression précédente

n'est autre que l'invariant η de A :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mu(\sigma(A_0), \sigma(A_1)) &= \frac{-1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}_{\partial M} \left(\frac{dI(A^0, \lambda)}{d\lambda} I(A^1, \lambda) \right) d\lambda \\
&= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}_{\partial M} \left(\alpha \Gamma \int_t^{\infty} (i\lambda \Gamma + D_{\partial}) e^{-s(D_{\partial}^2 + \lambda^2)} ds \right) d\lambda \\
&= \frac{-1}{4\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \text{Tr}_{\partial M} \left(\begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix} e^{-sA^2} \right) ds \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \text{Tr}_{\partial M} \left(A e^{-sA^2} \right) ds \\
&\doteq \frac{1}{2} \eta_t(A).
\end{aligned}$$

Ainsi si D est de Fredholm on a pour tout $t > 0$:

$$\text{ind}(D) = {}^b \text{Tr}(\alpha e^{-tD^2}) - \frac{1}{2} \eta_t(A)$$

et la limite lorsque $t \searrow 0$ donne une démonstration de la formule d'Atiyah-Patodi-Singer dans le cadre du b -calcul. On généralisera dans la suite de ce travail le cocycle $({}^b \text{Tr}, \mu)$ au cas des variétés à bord feuilleté.

CHAPITRE 2

Groupoïde d'éclatement des variétés à coins

...

1 Variétés à coins

1.1. Définition des variétés à coins

Une variété à coins X est un espace topologique où tout point p admet un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, p étant de coordonnées nulles à travers ce difféomorphisme. L'entier k est appelé codimension du point p . Les composantes connexes de l'ensemble des points de codimension k sont appelées faces ouvertes de codimension k . Leurs clôtures sont les faces de X . Une face de codimension 1 est appelée hyperface de X . Le bord de X , noté ∂X , est la réunion des faces de codimension strictement positive.

1.2. Variétés à coins plongés

Les variétés à coins plongés ont été étudiées par Melrose pour comprendre et étendre le théorème d'indice d'Atiyah-Patodi-Singer (voir [Mel93]). Une description équivalente en termes d'équarrissages a été proposée par Monthubert dans [Mon03]. Les deux définitions sont données pour rappel ci-dessous (section 2.1 pour la définition par équarrissages).

DÉFINITION 1.1 (Variété à coins plongés, [Mel93]). Une variété à coins plongés X est une variété à coins munie d'une sous-algèbre $C^\infty(X)$ vérifiant les conditions suivantes :

- il existe une variété \tilde{X} et une application $j : X \rightarrow \tilde{X}$ pour laquelle

$$C^\infty(X) = j^*C^\infty(\tilde{X}),$$

- il existe une famille finie de fonctions $\rho_i \in C^\infty(\tilde{X})$, telles que

$$j(X) = \{y \in \tilde{X}, \forall i \in I, \rho_i(y) \geq 0\},$$

- pour tout $J \subset I$, et tout point de \tilde{X} où les $(\rho_j)_{j \in J}$ s'annulent simultanément, les différentielles $d\rho_j$ sont indépendantes.

Les fonctions ρ_i sont appelées fonctions de définition des hyperfaces.

REMARQUE 1.2. La première condition exprime la donnée d'une structure lisse telle que définie en 3.4.

REMARQUE 1.3. La donnée d'une fonction de définition ρ d'une hyperface F induit une trivialisatoin du fibré normal de l'intérieur de F .

EXEMPLES 1.4. Le coin, le carré, les cubes de dimension n sont des variétés à coins plongés. Le simplexe $\Sigma_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, t_0 + \dots + t_n = 1\}$ est une variété à coins plongés. La goutte à un coin n'est pas une variété à coins plongés, contrairement à la goutte à 2 coins.

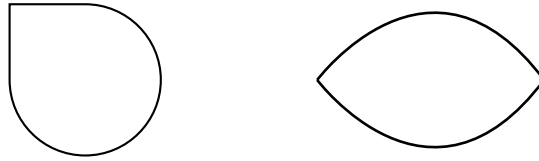


FIGURE 1. Les gouttes à un et deux coins.

1.3. Variétés à coins fibrés itérés

L'étude des pseudo-variétés stratifiées (chapitre 5) conduit à l'introduction d'une structure fibrée sur les variétés à coins plongés ([DLR11]). En effet l'existence d'un processus de désingularisation permet de considérer toute pseudo-variété stratifiée comme espace quotient d'une variété à coins fibrée (voir [ALMP09] et section 3.2). Pour une telle désingularisation, chaque hyperface F_i est l'espace total d'une fibration $\phi_i : F_i \rightarrow Y_i$ où Y_i est aussi une variété à coins, de telle sorte que la famille de fibrations $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$ vérifie les propriétés d'une *structure fibrée itérée* ([DLR11]), i.e. :

- $\forall I \subset \{1, \dots, k\}$ tel que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, l'ensemble $\{F_i, i \in I\}$ est totalement ordonné,
- si $F_i < F_j$, alors $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, $\phi_i : F_i \cap F_j \rightarrow Y_i$ est une submersion surjective et $Y_{ji} \doteq \phi_j(F_i \cap F_j) \subset Y_j$ est une hyperface de la variété

- à coins Y_j . De plus il existe une submersion surjective $\phi_{ji} : Y_{ji} \rightarrow Y_i$ qui vérifie $\phi_{ji} \circ \phi_j = \phi_i$ sur $F_i \cap F_j$.
- les hyperfaces de Y_j sont exactement les Y_{ji} avec $F_i < F_j$. En particulier si F_i est minimal Y_i est une variété sans bord.

On appellera variété à coins fibrés itérés une variété à coins plongés munie d'une structure fibrée itérée.

• • •

2 Équarrissages

On rappelle dans cette section la définition d'un équarrissage, qui s'avère être une notion très maniable pour associer à une variété à coins plongés un groupoïde de Lie « d'éclatement ». Ce groupoïde longitudinalement lisse, introduit dans la thèse de Monthubert [Mon03], définit un calcul pseudodifférentiel qui coïncide avec le b -calcul à support compact de Melrose. On peut ainsi parler du « groupoïde du b -calcul ». Ce groupoïde s'obtient par l'éclatement des sous-variétés de codimension 1 dans l'extension de X , puis par produit fibré des éclatements par rapport à chaque sous-variété composant l'équarrissage.

Nous montrerons dans ce chapitre qu'une construction similaire existe pour le ϕ -calcul, en introduisant un éclatement partiel associé à la fibration de chaque sous-variété. On définit à cet effet dans cette section la notion d'équarrissage fibré qui permet une mise en application directe du procédé d'éclatement.

2.1. Rappels sur la transversalité

Rappelons qu'une famille d'applications $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}, \phi_i : X_i \rightarrow Y$ est transverse si les orthogonaux (dans T^*Y) des espaces $d\phi_i(TX_i)$ sont en somme directe. Sous cette condition le produit fibré des X_i au-dessus de Y est une sous-variété lisse de $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$.

2.2. Définitions

DÉFINITION 2.1 (Équarrissage, [Mon03] 2.4). On appelle équarrissage la donnée d'une variété M et d'une famille finie $(V_i)_{i \in I}$ de sous-variétés de codimension 1 telles que $\forall J \subset I$, la famille d'inclusions des $(V_j)_{j \in J}$ soit transverse.

Si chaque sous-variété V_i est transversalement orientée, on dit que l'équarrissage est orienté. Si de plus chaque V_i sépare M en deux parties M_i^+ et M_i^- , on appelle partie positive de M l'intersection des M_i^+ .

La définition équivalente d'une variété à coins plongés en tant qu'équarrissage est alors :

DÉFINITION 2.2 (Variété à coins plongés, [Mon03] 2.5). Une variété à coins plongés X est la partie positive d'un équarrissage orienté $(M, (V_i)_{i \in I})$. On dit que $(M, (V_i)_{i \in I})$ est une extension de X .

2.3. Équarrissage fibré

DÉFINITION 2.3 (Équarrissage fibré). On appelle équarrissage fibré la donnée d'un équarrissage $(M, (V_i)_{i \in I})$ et d'une famille de fibrations $\phi_i : V_i \rightarrow Y_i$ telles que $\forall J \subset I$, la famille d'inclusions des $(V_j \times_{Y_j} V_j)_{j \in J}$ dans M^2 soit transverse.

2.4. Variétés à coins fibrés

DÉFINITION 2.4. Soit X une variété à coins plongés, et $(M, (V_i)_{i \in I})$ une extension de X . On dira que X est une variété à coins plongés et fibrés s'il existe une famille de fibrations $\phi_i : V_i \rightarrow Y_i$ telle que $(M, (V_i, \phi_i)_{i \in I})$ soit un équarrissage fibré.

EXEMPLE 2.5. Une famille de sous-variétés fibrées disjointes de codimension 1 est toujours transverse. En particulier les variétés à bord fibrés, objets du ϕ -calcul de Melrose, sont des variétés à coins fibrés.

EXEMPLE 2.6. $X = \mathbb{R}_+^3$. Soit $M = \mathbb{R}^3$, π_x, π_y et π_z les projections sur la base canonique, $V_x = \ker \pi_x$, $V_y = \ker \pi_y$, $V_z = \ker \pi_z$. Soit $\phi_x : V_x \rightarrow \{0\}$, $\phi_y : V_y \rightarrow \ker \pi_x \cap \ker \pi_y$, $\phi_z : V_z \rightarrow \ker \pi_y \cap \ker \pi_z$. Alors $(M, (V_x, \phi_x), (V_y, \phi_y), (V_z, \phi_z))$ est un équarrissage fibré.

EXEMPLE 2.7. Mêmes notations que l'exemple précédent, mais cette fois-ci $\phi'_x : V_x \rightarrow \{0\}$, $\phi'_y : V_y \rightarrow \ker \pi_y \cap \ker \pi_z$, $\phi'_z : V_z \rightarrow \ker \pi_x \cap \ker \pi_z$. Alors $(M, (V_x, \phi'_x), (V_y, \phi'_y), (V_z, \phi'_z))$ n'est pas un équarrissage fibré.

EXEMPLE 2.8. L'exemple 2.6 est un équarrissage fibré mais n'est pas une structure fibrée itérée. En effet $\phi_z(V_y \cap V_z) = V_z \cap \ker \pi_y$, $Y_{yz} = \phi_y(V_y \cap V_z) = \{0\}$ et il ne peut y avoir de surjection de Y_{yz} sur $Y_z = \ker \pi_y \cap \ker \pi_z$ puisque $\dim Y_{yz} = 0 < 1 = \dim Y_z$.

REMARQUE 2.9. La définition retenue de variété à coins fibrés permet d'assurer la lissité longitudinale du groupoïde d'éclatement (voir proposition 5.3). Les résultats de ce chapitre peuvent donc s'appliquer à des fibrations provenant d'autres structures qu'une structure fibrée itérée, dans la mesure où tout équarrissage fibré ne provient pas nécessairement d'une structure fibrée itérée (exemple 2.8).

Il est cependant parfaitement possible de se limiter à la catégorie des *équarrissages fibrés itérés*, c'est à dire des équarrissages dont les fibrations vérifient les propriétés de structure itérée.

• • •

3 Groupoïde de déformation au cône normal

On rappelle dans cette section quelques propriétés fondamentales des groupoïdes de déformation au cône normal. Ces objets importants en géométrie non-commutative permettent notamment la construction d'éléments en *KK*-théorie et la formulation de problèmes d'indices (groupoïde tangent de Connes). On définit ensuite un groupoïde de déformation \mathcal{D}_φ qui intervient dans la description du groupoïde d'éclatement des variétés à bord feuilleté.

3.1. Groupoïdes - Algébroïdes

3.1.1. Groupoïde

DÉFINITION 3.1. Un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les éléments sont inversibles. On dispose donc d'un ensemble d'objets (ou unités) $\mathcal{G}^{(0)}$ et d'un ensemble de flèches \mathcal{G} muni de deux applications source et but $s, r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$, ainsi que d'une loi de composition $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ associative sur l'ensemble des flèches composables $\mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(\gamma) = r(\eta)\}$.

On suppose par ailleurs qu'il existe une application unité $u : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$ telle que $r \circ u = s \circ u = \text{Id}$ et une application inverse $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ involutive telle que $s \circ i = r$.

Enfin, en notant $m(\gamma, \eta) = \gamma \cdot \eta$, tout élément γ de \mathcal{G} vérifie les relations $\gamma \cdot \gamma^{-1} = u(r(\gamma))$, $\gamma^{-1} \cdot \gamma = u(s(\gamma))$ et $r(\gamma) \cdot \gamma = \gamma \cdot s(\gamma) = \gamma$.

Un groupoïde de Lie est un groupoïde pour lequel \mathcal{G} et $\mathcal{G}^{(0)}$ sont des variétés C^∞ telles que toutes les applications ci-dessus soient C^∞ et s, r soient des submersions.

On note classiquement $\mathcal{G}_A = s^{-1}(A)$, $\mathcal{G}^B = r^{-1}(B)$ et $\mathcal{G}_A^B = \mathcal{G}_A \cap \mathcal{G}^B$.

3.1.2. Algébroïde

DÉFINITION 3.2. Soit M une variété C^∞ . Un algébroïde de Lie sur M est la donnée d'un fibré vectoriel $A \rightarrow M$, d'un crochet $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ sur le module $\Gamma(A)$ des sections de A et d'un morphisme de fibré $p : A \rightarrow TM$ appelé *ancree* ou *fléchage*, tels que :

- (1) $[\cdot, \cdot]$ soit \mathbb{R} -bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi,
- (2) $[V, fW] = f[V, W] + p(V)(f)W$ pour tout $V, W \in \Gamma(A)$ et $f \in C^\infty(M)$
- (3) $p([V, W]) = [p(V), p(W)]$ pour tout $V, W \in \Gamma(A)$.

Tout groupoïde de Lie \mathcal{G} définit un algébroïde de Lie $A\mathcal{G}$ par le fibré normal à l'inclusion $\mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}$. Les sections de $A\mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque avec les champs de vecteurs X sur \mathcal{G} qui sont s -verticaux et invariants à droite et on a ainsi une structure d'algèbre de Lie sur $\Gamma(A\mathcal{G})$.

Tout algébroïde de Lie définit un feuilletage par l'image de son ancre $p(C_c^\infty(M, A))$. En particulier tout groupoïde de Lie définit un feuilletage.

3.2. Déformation au cône normal D_φ

Soit M une variété C^∞ et N une sous-variété C^∞ de M . Soit $\mathcal{N}_N^M \rightarrow M$ le fibré vectoriel normal à l'inclusion $N \subset M : \mathcal{N}_N^M \rightarrow M = T_N M / TN$. La déformation au cône normal de l'inclusion $N \subset M$ est définie de manière ensembliste par :

$$D_N^M = \mathcal{N}_N^M \times 0 \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*.$$

Plus généralement, si G_1 et G_2 sont deux groupoïdes de Lie d'algébroïdes respectifs AG_1 et AG_2 vérifiant $AG_1 \subset AG_2$, on peut définir pour l'immersion induite $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ le groupoïde de déformation au cône normal par ([HS87]) :

$$D_\varphi = G_1 \times_{s_1} \mathcal{N} \times 0 \bigsqcup G_2 \times \mathbb{R}^*.$$

Le groupoïde G_1 agit sur le normal $\mathcal{N} = AG_2/AG_1$ par sa composante d'holonomie $h_{xy} : \mathcal{N}_x \rightarrow \mathcal{N}_y$:

$$(\gamma, v) = ((x, y, h), (y, \xi)) \mapsto \gamma \cdot v = (x, h^{-1}(\xi))$$

Ainsi $G_1 \times_{s_V} \mathcal{N} = \{(\gamma, v) \in G_1 \times \mathcal{N}, v \in \mathcal{N}_{s_1(\gamma)}\}$ est muni d'une loi de composition :

$$(9) \quad (\gamma_1, v) \cdot (\gamma_2, w) = (\gamma_1 \gamma_2, v + \gamma_1 \cdot w)$$

lorsque $t(\gamma_2) = s(\gamma_1)$, d'inverse $(\gamma, v)^{-1} = (\gamma^{-1}, -\gamma^{-1} \cdot v)$.

$G_2 \times \mathbb{R}^*$ est naturellement un groupoïde de Lie muni de la composition ponctuelle $(\gamma_1, t) \cdot (\gamma_2, t) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2, t)$.

D_φ est alors l'union des groupoïdes de Lie $G_1 \times_{s_V} \mathcal{N}$ et $G_2 \times \mathbb{R}^*$.

3.3. Structure différentielle

Dans le cas simple de l'inclusion canonique $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$, où $q = n - p$, la déformation au cône normal D_p^n est l'ensemble $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ muni de la structure C^∞ induite par la bijection $\Theta : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow D_p^n$:

$$\Theta(x, \xi, t) = \begin{cases} (x, \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (x, t\xi, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Dans le cas local d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et de la sous-variété $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, $D_V^U = V \times \mathbb{R}^q \times \{0\} \sqcup U \times \mathbb{R}^*$ est un sous-ensemble ouvert de D_p^n muni de la structure ci-dessus puisque $\Theta^{-1}(D_V^U)$ est l'ensemble

$$(10) \quad \Omega_V^U = \{(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, (x, t\xi) \in U\}$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ et donc une variété C^∞ .

Dans le cas général des variétés, supposons M de dimension n et N de dimension p . La structure différentielle sur D_N^M peut être décrite localement à partir des ouverts de D_p^n à l'aide de cartes adaptées.

DÉFINITION 3.3 ([CR07]). On appelle *carte adaptée à N* une carte coordonnée (\mathcal{U}, ϕ) de classe C^∞ en M qui satisfait :

- (1) $\phi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$
- (2) si $\mathcal{U} \cap N = \mathcal{V}$, $\mathcal{V} = \phi^{-1}(V)$ (où $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$) comme ci-dessus)

Soit (\mathcal{U}, ϕ) une carte adaptée à N . Lorsque $x \in \mathcal{V}$ on a $\phi(x) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$: on note ϕ_1 la composante de ϕ sur \mathbb{R}^p telle que $\phi(x) = (\phi_1(x), 0)$ et $d_n \phi_v : \mathcal{N}_v \rightarrow \mathbb{R}^q$ la composante normale de la dérivée $d\phi_v$ pour $x \in \mathcal{V}$. Soit $\tilde{\phi} : D_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \rightarrow D_V^U$ l'application définie par :

$$\tilde{\phi} : \begin{cases} \tilde{\phi}(v, \xi, 0) & = (\phi_1(v), d_n \phi_v(\xi), 0) \\ \tilde{\phi}(u, t) & = (\phi(u), t) \end{cases} \quad \text{si } t \neq 0$$

Alors l'application $\varphi = \Theta^{-1} \circ \tilde{\phi}$ obtenue par la composition

$$D_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \xrightarrow{\tilde{\phi}} D_V^U \xrightarrow{\Theta^{-1}} \Omega_V^U$$

est un difféomorphisme de $D_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ sur l'ouvert Ω_V^U de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ définit comme en 10.

La structure différentielle globale de D_N^M est alors décrite par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4 ([CR07]). Soit $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un atlas C^∞ de M dont les cartes sont adaptées à N . Alors $\{(D_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas C^∞ pour D_N^M .

3.4. Groupoïde de déformation $\mathcal{D}_\varphi = D_\varphi \rtimes \mathbb{R}_+^*$

Soit V une variété munie d'un feuilletage régulier \mathcal{F}_1 , défini par un sous-espace vectoriel intégrable $TF_1 \subset TV$, i.e. $C^\infty(V, TF_1)$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(V, TV)$. On note $\mathcal{N} = TV/TF_1$ et on suppose V munie d'une connexion w qui fournit une décomposition du fibré tangent $TV = TF_1 \oplus \mathcal{N}$.

Soit G_1 le groupoïde d'holonomie [Con82, Con94] associé à \mathcal{F}_1 et $\varphi : G_1 \rightarrow V \times V$ l'immersion induite par l'inclusion $TF_1 \subset TV$. On note D_φ le groupoïde normal de φ .

D_φ induit sur l'espace de ses unités $V \times \mathbb{R}$ un feuilletage singulier \mathcal{F}_{adp} défini par $\mathcal{F}_1 \times \{0\}$ et $TV \times \{t\}$ pour $t \neq 0$ qui résulte de l'intégration de l'algèbroïde de Lie adiabatique partiel \mathcal{A}_{adp} décrit dans ([Deb01], Exemple 4.5) :

$$\begin{aligned} p_{\text{adp}} : \mathcal{A}_{\text{adp}} = TF_1 \oplus \mathcal{N} \times \mathbb{R} &\rightarrow TV \times T\mathbb{R} \\ (v_1, v_2, t) &\mapsto (v_1 + tv_2, (t, 0)) \end{aligned}$$

En particulier le feuilletage de \mathbb{R} transverse à V induit par D_φ est trivial en points puisque chaque $t \neq 0$ définit une feuille $V \times \{t\}$ de $V \times \mathbb{R}$.

Or le feuilletage \mathcal{F} défini par les faces transversalement orientées V_i d'une variété à coins fibrés nécessite une structure transverse singulière de la forme $V_i \times \{0\}, V_i \times \mathbb{R}_+^*$ et $V_i \times \mathbb{R}_-^*$. On introduit à cet effet le groupoïde de déformation \mathcal{D}_φ obtenu par l'action transverse de \mathbb{R}_+^* sur D_φ donnée explicitement par :

$$(\lambda, h) = (\lambda, (\gamma, t)) \mapsto \lambda \cdot \gamma = (\gamma, \lambda \cdot t)$$

Les orbites de $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}_+^* \rtimes D_\varphi$ coïncident alors avec le feuilletage \mathcal{F} .

Une expression ensembliste de la variété \mathcal{D}_φ est :

$$\mathcal{D}_\varphi = (G_1 \times_{s_1} \mathcal{N} \times \mathbb{R}_+^*) \times \{0\} \bigsqcup V \times V \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^* \rightrightarrows V \times \mathbb{R}.$$

3.5. Isotropie des feuilletages singuliers

Supposons que V soit une sous-variété feuilletée de codimension 1 de M , transversalement orientée. Notons \mathcal{F} le feuilletage singulier sur M défini par le module des champs de vecteurs sur M tangents à V .

Il a déjà été noté que le groupoïde normal D_φ d'une immersion $\varphi : G_1 \rightarrow G_V = V \times V$ pouvait rendre compte de la non trivialité d'un

espace des feuilles G_1 sur V mais pas du comportement transverse du feuilletage singulier \mathcal{F} sur M .

Notons que cette information est présente dans le diagramme commutatif reliant les deux notions de feuilles des feuilletages singuliers [AS06] :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}_x & & \\ & & \downarrow & \searrow p & \\ \mathcal{J}_x & \xrightarrow{\ker} & \mathcal{F}/I_x\mathcal{F} & \xrightarrow{ev} & F_x \end{array}$$

où $F_x \subset T_x M$, $I_x = \{f \in C^\infty M, f(x) = 0\}$ et $\mathcal{F}/I_x\mathcal{F}$ est la localisation du module de champs de vecteurs \mathcal{F} . En particulier lorsque x appartient à V la situation devient :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim V}$$

Le groupe de Lie \mathbb{R}_+^* intègre l'isotropie du feuilletage encodée dans l'algèbre de Lie $\mathcal{J} = \mathbb{R}$:

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto \ln \lambda \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{D}_\varphi = D_\varphi \rtimes \mathbb{R}_+^*$ encode simultanément l'isotropie du feuilletage transverse à V et la non-trivialité de l'espace des feuilles sur V .

3.6. Loi de composition sur \mathcal{D}_φ

Tout élément g de \mathcal{D}_φ peut s'écrire sous la forme $g = (\gamma, \lambda, t)$, avec $\gamma = (g_1, \xi) \in G_1 \times_{s_1} \mathcal{N}$ si $t = 0$ et $\gamma \in G_V = V \times V$ si $t \neq 0$. (λ, t) est un élément du groupoïde $H = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ où \mathbb{R}_+^* agit sur \mathbb{R} par multiplication. Les applications source et but de H sont donc $s_H(\lambda, t) = t$ et $r_H(\lambda, t) = \lambda \cdot t$.

Si s_1, r_1 et s_V, r_V sont les applications source et but de G_1 et G_V , s_H, r_H celles de $H = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$, \mathcal{D}_φ est muni d'applications lisses s_φ et r_φ qui vérifient :

$$\begin{cases} s_\varphi((g_1, \xi), \lambda, 0) = (s_1(g_1), s_H(\lambda, 0)) \\ r_\varphi((g_1, \xi), \lambda, 0) = (r_1(g_1), r_H(\lambda, 0)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} s_\varphi(\gamma, \lambda, t) = (s_V(\gamma), s_H(\lambda, t)) \\ r_\varphi(\gamma, \lambda, t) = (r_V(\gamma), r_H(\lambda, t)) \end{cases} \quad \text{si } t \neq 0.$$

Soit $p : V \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow V$ la projection canonique, $\hat{s} = p \circ s_\varphi$ et $\hat{r} = p \circ r_\varphi$. Pour un élément $g = (\gamma, \lambda, t)$ de \mathcal{D}_φ donné, $\hat{s}(g)$ et $\hat{r}(g)$ ne dépendent que de l'élément $\gamma \in G_1 \times_{s_1} \mathcal{N} \sqcup G_V$. Pour alléger les notations on notera $\hat{s}(\gamma)$ et $\hat{r}(\gamma)$ les éléments correspondants.

La loi de composition sur \mathcal{D}_φ est alors le produit de la loi de composition sur D_φ en tant que groupoïde normal et la loi sur $H = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$. Si $g_1 = (\gamma_1, \lambda_1, t_1)$ et $g_2 = (\gamma_2, \lambda_2, t_2)$ sont deux éléments de \mathcal{D}_φ tels que $\hat{s}(\gamma_2) = \hat{r}(\gamma_1)$ et $s_H(\lambda_2, t_2) = r_H(\lambda_1, t_1)$, on pose :

$$g_1 \cdot g_2 = (\gamma_1 \cdot \gamma_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2, t_1)$$

• • •

4 Eclatement d'une sous-variété feuilletée de codimension 1

4.1. Motivation

On construit dans cette section un groupoïde d'éclatement $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ associé à une sous-variété feuilletée (V, \mathcal{F}_1) de codimension 1 dans M . Ce groupoïde de base M est obtenu par recollement du groupoïde d'holonomie de $M \setminus V$ et du groupoïde de déformation \mathcal{D}_φ introduit en 3.4 :

$$\mathcal{G}V_{\mathcal{F}} = \mathcal{D}_\varphi \bigcup_{\Psi} \mathcal{H}ol(M \setminus V)$$

$\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ encode l'espace des feuilles du feuilletage singulier \mathcal{F} défini par les champs de vecteurs sur M tangents à \mathcal{F}_1 en V . Cette propriété sera précisée dans le chapitre consacré aux feuilletages singuliers : on montrera que $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ n'est autre que le groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} (voir proposition 5.7).

On étend ensuite cette construction au cas des variétés à coins fibrés. Si X est définie par un équarrissage fibré \mathcal{E}_ϕ , on construit un groupoïde d'éclatement $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ de X obtenu par l'éclatement des sous-variétés V_i de codimension 1 dans l'extension de X , puis par produit fibré des éclatements $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}_i}$ composant l'équarrissage. $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ est longitudinalement lisse et permet d'associer à X un calcul pseudodifférentiel canonique. On étudiera les liens étroits qui lient $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ au ϕ -calcul de Melrose dans le chapitre 3.

4.2. Recollement par une application

Rappelons qu'étant données deux applications $f : Z \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow Y$ définies sur un même ensemble Z , la somme amalgamée (ou pushout) de X et Y le long de Z est définie comme le quotient de l'union disjointe $X \sqcup Y$ par la relation :

$$f(z) \simeq g(z), \quad \forall z \in Z.$$

La somme amalgamée est notée $X \sqcup_Z Y$.

En particulier si X et Y sont des espaces topologiques, A une partie non vide de Y et $\Psi : A \rightarrow X$ une application continue, la somme amalgamée de X et Y le long de A est appelée recollement de X et Y par Ψ , notée $X \sqcup_{\Psi} Y$. On dispose alors d'injection canoniques i_A, i_X et i_Y telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Psi} & X \\ i_A \downarrow & & \downarrow i_X \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & X \sqcup_{\Psi} Y. \end{array}$$

Si X, Y et A sont des variétés différentielles et $\Psi : A \rightarrow X$ un difféomorphisme, $X \sqcup_{\Psi} Y$ est naturellement une variété différentielle et les applications i_A, i_X et i_Y sont différentiables.

4.3. Notations

Soit M une variété et $V \subset M$ une sous-variété connexe de M de codimension 1 transversalement orientée. On suppose V munie d'un feuilletage régulier \mathcal{F}_1 , défini par un sous-espace vectoriel intégrable $TF_1 \subset TV$, i.e. $C^\infty(V, TF_1)$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(V, TV)$. On note $\mathcal{N} = TV/TF_1$ et on suppose par ailleurs M munie d'une connexion w , dont la restriction à V fournit une décomposition du fibré tangent $TV = TF_1 \oplus \mathcal{N}$.

On reprend les notations de la section 3.4 : G_1 est le groupoïde d'holonomie associé à \mathcal{F}_1 , D_φ le groupoïde normal de l'immersion $\varphi : G_1 \rightarrow V \times V$ et $\mathcal{D}_\varphi = D_\varphi \rtimes \mathbb{R}_+^*$ le groupoïde de déformation obtenu par l'action multiplicative de \mathbb{R}_+^* sur les unités de D_φ .

Soit $p : V \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow V$ la projection canonique, $\hat{s} = p \circ s_\varphi$ et $\hat{r} = p \circ r_\varphi$. Pour un élément $g = (\gamma, \lambda, t)$ de \mathcal{D}_φ donné, $\hat{s}(g)$ et $\hat{r}(g)$ ne dépendent que de l'élément $\gamma \in G_1 \times_{s_1} \mathcal{N} \bigsqcup G_V$. Pour alléger les notations on notera $\hat{s}(\gamma)$ et $\hat{r}(\gamma)$ les éléments correspondants.

Soit (N, π, V) un voisinage tubulaire de V dans M : N est un ouvert de M contenant V , $\pi : N \rightarrow V$ un fibré vectoriel de fibre type \mathbb{R} . Soit $\{f_i : N_i = \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}\}_{i \in I}$ une trivialisatation locale de N , dont on note $f_i = (\pi_i, \rho_i)_{i \in I}$ les composantes.

On pose enfin

$$\mathcal{D}_i^j = \{(\gamma, \lambda, t) \in \mathcal{D}_\varphi / \hat{s}(\gamma) \in V_i, \hat{r}(\gamma) \in V_j\},$$

4.4. Définition de l'éclatement $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$

Soit $A = \mathcal{D}_{\varphi}^{V \times \mathbb{R}^*} \subset \mathcal{D}_{\varphi}$ la restriction de \mathcal{D}_{φ} à la composante produit $V \times V \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$. On pose $A_i^j = \mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i^j = V_i \times V_j \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ et on considère les applications $\Psi_{ij} : A_i^j \rightarrow M^{\circ} \times M^{\circ}$ définies par

$$\Psi_{ij}(\gamma, \lambda, t) = (f_i^{-1}(\hat{s}(\gamma), t), f_j^{-1}(\hat{r}(\gamma), \lambda \cdot t))$$

Les A_i^j étant disjoints, on a $A = \sqcup_{i,j} A_i^j$ et on définit $\Psi : A \rightarrow M^{\circ} \times M^{\circ}$ par $\Psi(a) = \Psi_{ij}(a)$ si $a \in A_i^j$. Il est immédiat de vérifier que Ψ préserve l'orientation transverse de V dans M : $\Psi(A_i^{j+}) \subset (M^+ \setminus V)^2$, $\Psi(A_i^{j-}) \subset (M^- \setminus V)^2$. V étant connexe, l'image de Ψ est donc dans l'union des composantes connexes de $(M \setminus V)^2$, c'est à dire dans $\mathcal{H}ol(M \setminus V)$.

On définit alors $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ en tant qu'espace topologique comme le recollement de \mathcal{D}_{φ} et $\mathcal{H}ol(M \setminus V)$ par l'application Ψ :

$$\mathcal{G}V_{\mathcal{F}} = \mathcal{D}_{\varphi} \bigcup_{\Psi} \mathcal{H}ol(M \setminus V)$$

et l'on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \times V \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^* & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{H}ol(M \setminus V) \\ i_A \downarrow & & \downarrow i_{M \setminus V} \\ \mathcal{D}_{\varphi} & \xrightarrow{i_{\mathcal{D}}} & \mathcal{G}V_{\mathcal{F}}. \end{array}$$

4.5. Structure différentielle de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$

Soit $(\varphi_{ij})_{i,j \in I^2}$ un système de cartes sur \mathcal{D}_{φ} adapté à $\mathcal{D}_i^j \cap (G_1 \times \mathbb{R}_+^*)$. On pose $p = \dim G_1$ et $q = \dim \mathcal{N} = 2 \cdot \dim V - p$.

Soient U_i^j , W et Z des ouverts respectifs de \mathbb{R}^{p+q} , \mathbb{R}^p et \mathbb{R} qui vérifient $W = U_i^j \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ et $\tilde{\varphi}_{ij}^{-1}(U_i^j \times \mathbb{R}^*) \subset V_i \times V_j \times \mathbb{R}^*$.

La topologie sur \mathcal{D}_{φ} est engendré (voir section 10) par les ouverts $\Theta \circ \tilde{\varphi}_{ij}(\Omega_W^{U_i^j}) \times \exp Z$, où :

$$\Omega_W^{U_i^j} = \{(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, (x, t\xi) \in U_i^j\}.$$

En particulier \mathcal{D}_i^j est un ouvert de \mathcal{D}_{φ} engendré par l'image de $\Omega_W^{V_i \times V_j}$ et $Z = \mathbb{R}$. De même A_i^j est un ouvert de \mathcal{D}_{φ} engendré par l'image de $Z = \mathbb{R}$ et $\Omega_*^{V_i \times V_j} = \Omega_W^{V_i \times V_j} \cap (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^*)$.

On vérifie alors que $s_\varphi \times r_\varphi$ est une application ouverte sur A^2 puisque l'application $(t, \lambda) \mapsto (t, \lambda \cdot t)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$. L'application $\Psi_{ij} : A_i^j \rightarrow M^\circ \times M^\circ$ est donc ouverte en tant que composée des applications ouvertes $f_i \times f_j$ et $s_\varphi \times r_\varphi$.

Ainsi $i_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ définie par :

$$i_{\mathcal{D}}(g) = \begin{cases} \Psi(g) & \text{si } g \in A \\ g & \text{sinon} \end{cases}$$

est une application ouverte et l'on obtient un système de cartes $\mathcal{A} = \{(\Omega_i^j, \phi_{ij})_{i,j \in I^2}\}$ sur $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ en posant $\Omega_i^j = i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_i^j)$ et $\phi_{ij} = \varphi_{ij} \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}$.

Soit $\tilde{\mathcal{B}}$ un atlas de la variété lisse $M^\circ \times M^\circ$ et soit $\mathcal{B} = \{(\Omega_\beta, \varphi_\beta)\}$ l'atlas induit sur la variété $\mathcal{H}ol(M \setminus V)$.

La structure de variété sur $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ est obtenue par la structure produit de $M^\circ \times M^\circ$ et la structure différentielle induite par la famille (ϕ_{ij}) . Plus précisément, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est un atlas lisse sur $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$.

DÉMONSTRATION. Soit (Ω, φ) une carte de \mathcal{B} . Il faut montrer que toute carte de \mathcal{A} qui rencontre Ω est compatible avec φ . Soient i et j tels que $\Omega_i^j \cap \Omega \neq \emptyset$ et soit $\Phi_{ij} : \varphi(\Omega_i^j \cap \Omega) \rightarrow \phi_{ij}(\mathcal{D}_i^j)$ définie par $\Phi_{ij} = \phi_{ij} \circ \Psi_{ij}^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Il est immédiat de constater que $\Omega_i^j \cap \Omega \subset \Psi_{ij}(A_i^j) = N_i^+ \setminus V_i \times N_j^+ \setminus V_j \sqcup N_i^- \setminus V_i \times N_j^- \setminus V_j$ et que

$$\Psi_{ij}^{-1} : \begin{array}{ccc} \Omega_i^j \cap \Omega & \rightarrow & A_i^j \\ (x, y) & \rightarrow & (\pi_i(x), \pi_j(y), \rho_j(y)/\rho_i(x), \rho_i(x)) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image. Par suite Φ_{ij} est un changement de carte C^∞ et la compatibilité de \mathcal{A} et \mathcal{B} en découle. □

REMARQUE 4.2. Dans le cas général ci-dessus \mathcal{D}_φ décrit uniquement la structure différentielle de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ au voisinage de V . La description se simplifie si l'on dispose d'une trivialisations (π, ρ) où π et ρ sont définies globalement sur M . L'application Ψ est alors bijective, l'application inverse $\Psi^{-1} : \mathcal{H}ol(M \setminus V) \rightarrow V \times V \times \mathbb{R}_+^*$ étant définie par :

$$\Psi^{-1}(x, y) = (\pi(x), \pi(y), \rho(y)/\rho(x), \rho(x)).$$

Ainsi $i_A \circ \Psi^{-1}$ est injective et $i_{\mathcal{D}}$ est un difféomorphisme entre \mathcal{D}_φ et $\text{Im } i_{\mathcal{D}} = \mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$.

4.6. Loi de composition

Rappelons que le groupoïde G_1 agit sur le normal \mathcal{N} par sa composante d'holonomie $h_{xy} : \mathcal{N}_x \rightarrow \mathcal{N}_y$:

$$(\gamma, v) = ((x, y, h), (y, \xi)) \mapsto \gamma \cdot v = (x, h^{-1}(\xi))$$

Ainsi $G_1 \times_{s_V} \mathcal{N} \times \mathbb{R}_+^* = \{(\gamma, v, \lambda) \in G_1 \times \mathcal{N} \times \mathbb{R}_+^*, v \in \mathcal{N}_{s_1(\gamma)}\}$ est muni d'une loi de composition :

$$(11) \quad (\gamma_1, v, \lambda_1) \cdot (\gamma_2, w, \lambda_2) = (\gamma_1 \gamma_2, v + \gamma_1 \cdot w, \lambda_1 \cdot \lambda_2)$$

lorsque $t(\gamma_2) = s(\gamma_1)$, d'inverse $(\gamma, v, \lambda)^{-1} = (\gamma^{-1}, -\gamma^{-1} \cdot v, \lambda^{-1})$.

La loi de composition sur $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ est définie comme la loi (11) sur $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_1} = G_1 \times_{s_1} \mathcal{N} \times \mathbb{R}_+^*$ et la loi produit canonique sur $M_+^{\circ} \times M_+^{\circ} \sqcup M_-^{\circ} \times M_-^{\circ}$.

Les applications source et but de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ sont définies sur $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_V}$ et son complémentaire par :

$$s : \begin{cases} s(\gamma, \xi, \lambda) & = s_1(\gamma) \\ s(x, y) & = x \end{cases}$$

et

$$r : \begin{cases} r(\gamma, \xi, \lambda) & = r_1(\gamma) \\ r(x, y) & = y \end{cases}$$

La structure de groupoïde de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ se reformule aisément sur le groupoïde de déformation \mathcal{D}_{φ} . En fait \mathcal{D}_{φ} muni de sa loi de composition 3.6 est un groupoïde de Lie isomorphe à un voisinage de $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_1}$ dans $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$. Plus précisément, soit $i_{\mathcal{D}}$ l'inclusion de \mathcal{D}_{φ} dans $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ associée au recollement Ψ . Alors :

PROPOSITION 4.3. *Les groupoïdes de Lie \mathcal{D}_{φ} et $i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{\varphi}) \subset \mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. $i_{\mathcal{D}}$ est par construction un difféomorphisme de \mathcal{D}_{φ} sur $i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{\varphi})$. On constate que $i_{\mathcal{D}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$i_{\mathcal{D}} : \begin{cases} g = (\gamma, \lambda, t) \in \mathcal{D}_i^j \mapsto (f_i^{-1} \circ s_{\varphi}(g), f_j^{-1} \circ r_{\varphi}(g)) & \text{si } t \neq 0 \\ (\gamma, \lambda, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Soient $g_1 = (\gamma_1, \lambda_1, t_1)$ et $g_2 = (\gamma_2, \lambda_2, t_2)$ deux éléments de \mathcal{D}_{φ} .

La relation $i_{\mathcal{D}}(g_1) \cdot i_{\mathcal{D}}(g_2) = i_{\mathcal{D}}(g_1 \cdot g_2)$ est immédiate si $t_1 = 0$ puisque alors $i_{\mathcal{D}} = \text{Id}$.

Pour $t_1 \neq 0$, $g_1 \cdot g_2 = (\gamma_1 \cdot \gamma_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2, t_1)$. On calcule :

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{D}}(g_1) \cdot i_{\mathcal{D}}(g_2) &= (f_i^{-1} \circ s_{\varphi}(g_1), f_j^{-1} \circ r_{\varphi}(g_1)) \cdot (f_i^{-1} \circ s_{\varphi}(g_2), f_j^{-1} \circ r_{\varphi}(g_2)) \\ &= (f_i^{-1} \circ s_{\varphi}(g_1), f_j^{-1} \circ r_{\varphi}(g_2)) \text{ avec } t_2 = \lambda_1 \cdot t_1 \\ &= (f_i^{-1} \circ s_{\varphi}(g_1), f_j^{-1} \circ (\hat{r}(\gamma_2), \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot t_1)) \\ &= i_{\mathcal{D}}(g_1 \cdot g_2) \end{aligned}$$

Ainsi $i_{\mathcal{D}}(g_1) \cdot i_{\mathcal{D}}(g_2) = i_{\mathcal{D}}(g_1 \cdot g_2)$ pour tous les éléments composables de \mathcal{D}_{φ} et $i_{\mathcal{D}}$ est donc bien un morphisme de groupoïde de Lie.

□

4.6.1. *Le cas des fibrations* Supposons que le feuilletage \mathcal{F}_1 de V soit une fibration $\phi : V \rightarrow Y$. L'immersion $\varphi : G_1 \rightarrow G_V$ est alors un plongement, avec $G_1 = V \times_Y V$ et $G_V = V \times V$. L'holonomie d'une fibration est triviale et G_1 agit trivialement sur \mathcal{N} par :

$$(\gamma, v) = ((x, x'), (x', \xi)) \mapsto \gamma \cdot v = (x, \xi).$$

De plus pour une trivialisatoin locale trivialisant aussi la fibration $\phi : V \rightarrow Y$, on peut identifier \mathcal{N} comme le tiré en arrière de TY . L'éclatement s'exprime alors localement de manière ensembliste par :

$$\mathcal{G}V_{\phi|N_i} = (V_i \times_Y V_i \times_Y TY \times \mathbb{R}_+^*) \bigsqcup (N_i^+ \setminus V_i) \times (N_i^+ \setminus V_i) \bigsqcup (N_i^- \setminus V_i) \times (N_i^- \setminus V_i).$$

Les deux cas limites de fibration grossière $Y = \{pt\}$ et en points $Y = V$ correspondent aux situations géométriques du b -calcul et du 0-calcul. Les groupoïdes normaux D_{φ} sont alors respectivement isomorphes au groupoïde produit $V \times V$ et au groupoïde adiabatique de V . L'éclatement de la fibration grossière est le groupoïde d'éclatement décrit dans [Mon03] et [NWX99]. La définition de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ en tant que groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ du feuilletage \mathcal{F} (proposition 5.7) permet de donner à ces groupoïdes une signification géométrique indépendante de la construction particulière proposée.

REMARQUE 4.4. Une construction similaire permet de décrire une variété dont l'intérieur est également fibré par une fibration moins fine $\Phi : M \rightarrow B$: si $G_{\Phi} = V \times_{\Phi} V$ désigne le groupoïde d'holonomie de la fibration Φ restreint au bord, $\mathcal{G}V_{\Phi}$ s'obtient alors par recollement de \mathcal{D}_{φ} et de $\mathcal{H}ol(M, \Phi) = M \times_B M$ où $\mathcal{D}_{\varphi} = D_{\varphi} \times \mathbb{R}_+^*$ est construit à partir de la déformation au cône normal $\varphi : G_{\phi} \rightarrow G_{\Phi}$.

• • •

5 Eclatement par rapport à un équarrissage fibré

5.1. Définition de l'éclatement

DÉFINITION 5.1. Soit $\mathcal{E}_\phi = (M, (V_i, \phi_i)_{i \in I})$ un équarrissage fibré. L'éclatement de \mathcal{E}_ϕ est le produit fibré des éclatements $\mathcal{G}V_{i\phi}$ à travers les applications $s \oplus r : \mathcal{G}V_{i\phi} \rightarrow M^2$.

PROPOSITION 5.2. *L'éclatement d'un équarrissage fibré est un groupoïde de Lie.*

DÉMONSTRATION. Notons $\varphi_i = s \oplus r : \mathcal{G}V_{i\phi} \rightarrow M^2$. Soit $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$ un élément du produit fibré $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ des $\mathcal{G}V_{i\phi}$. Il existe alors une partie J de I telle que

$$(\gamma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in J} \mathcal{G}V_{i\phi|V_i} \prod_{i \notin J} \mathcal{G}V_{i\phi|(M \setminus V_i)}.$$

Il suffit donc de montrer la transversalité des morphismes $\varphi'_i : \mathcal{G}V_{i\phi|V_i} \rightarrow M^2, i \in J$ qui sont les projections canoniques et $\phi'_i : \mathcal{G}V_{i\phi|(M \setminus V_i)} \rightarrow M^2$ qui sont les inclusions. Les normaux de ces derniers étant nuls, il suffit de se limiter à $i \in J$. Or les projections canoniques se factorisent à travers les submersions $\psi_i : \mathcal{G}V_{i\phi|V_i} \rightarrow V_i \times_{Y_i} V_i$: si i_i désigne l'inclusion de $V_i \times_{Y_i} V_i$ dans M^2 , alors $\varphi'_i = i_i \circ \psi_i$. La transversalité des i_i est assurée par définition d'un équarrissage fibré. La surjectivité des différentielles $d\psi_i$ entraîne alors la transversalité des $\varphi'_i, i \in J$ et par suite celle des φ_i .

Ainsi $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ est une sous-variété de $\prod_{i \in I} \mathcal{G}V_{i\phi}$, naturellement munie de la loi de composition associée à l'inclusion, donc c'est un groupoïde de Lie.

□

5.2. Structure longitudinale de l'éclatement

PROPOSITION 5.3. *L'éclatement d'un équarrissage fibré est longitudinalement lisse.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in M$ et F la face ouverte contenant x . Soit J une partie de I telle que F soit l'intérieur de $\bigcap_{i \in J} V_j$. La fibre $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi^x$ de $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ en x se décompose sous la forme du produit fibré :

$$\prod_{i \in J} \mathcal{G}V_{i\phi|V_i}^x \prod_{i \notin J} \mathcal{G}V_{i\phi|(M \setminus V_i)}^x.$$

$\mathcal{G}V_{i\phi|_{(M \setminus V_i)}}^x = \emptyset$ lorsque $i \notin J$, puisque x est un élément de $\bigcap_{i \in J} V_i$. D'autre part lorsque $i \in J$, $\mathcal{G}V_{i\phi|_{V_i}}^x$ est le fibré vectoriel lisse $\mathcal{N}_{V_i \times_{Y_i} \{x\}}^{V_i \times V_i \times \mathbb{R}_+^*}$. La transversalité des applications $s \oplus r : \mathcal{G}V_{i\phi} \rightarrow M^2$ en restriction à $\mathcal{G}V_{i\phi}^x$ entraîne alors la lissité du produit fibré $\prod_{i \in J} \mathcal{G}V_{i\phi|_{V_i}}^x$ et par suite celle de la fibre $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi^x$.

□

5.3. Moyennabilité de l'éclatement

PROPOSITION 5.4. *L'éclatement d'un équarrissage fibré est un groupoïde moyennable.*

DÉMONSTRATION. Les arguments sont essentiellement ceux de la preuve de la proposition 3.5. de [Mon03]. Si \mathcal{G} est un groupoïde et U un ouvert de \mathcal{G} , alors \mathcal{G} est moyennable si et seulement si \mathcal{G}_U et $\mathcal{G}_{X \setminus U}$ sont moyennables (voir [Ren80]). Par ailleurs un groupoïde pour lequel $\varphi = s \oplus r : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^{(0)})^2$ est surjective et ouverte est moyennable si et seulement si ses groupes d'isotropie le sont.

Dès lors $\mathcal{G}V_\phi$ est moyennable : l'isotropie de $\mathcal{G}V_{\phi|M \setminus V} = (M \setminus V)^2$ est nulle, et celle de $\mathcal{G}V_{\phi|V}$ est isomorphe à $T_y Y \times \mathbb{R}$, qui est moyennable en tant que groupe abélien.

$\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ est alors également moyennable en tant que produit fibré de groupoïdes moyennables.

□

5.4. Le groupoïde d'une variété à coins plongés et fibrés

DÉFINITION 5.5. Soit X une variété à coins plongés et fibrés, et \mathcal{E}_ϕ un équarrissage fibré associé à X . Le groupoïde de X est la restriction à X de l'éclatement $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$, $\Gamma_\phi(X) = (\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi)_X^X$.

REMARQUE 5.6. Chaque V_i sépare M en deux d'après la définition 2.1.

REMARQUE 5.7. L'inclusion j de $\Gamma_\phi(X)$ dans $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ définit une structure lisse $(\Gamma_\phi(X), j, \mathcal{G}\mathcal{E}_\phi)$ sur $\Gamma_\phi(X)$.

REMARQUE 5.8. Dans le cas d'une variété à bord connexe fibré $\phi : \partial X \rightarrow Y$ une expression ensembliste du groupoïde de X est :

$$\Gamma_\phi(X) = (\partial X \times_Y \partial X \times_Y TY \times \mathbb{R}_+^*) \sqcup X^\circ \times X^\circ.$$

Le fait que $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ soit longitudinalement lisse (Prop. 5.3) implique immédiatement que le groupoïde $\Gamma_\phi(X)$ associé à une variété à coins plongés et fibrés X soit longitudinalement lisse. Les travaux de Monthubert-Pierrot [MP97] et Nistor-Weinstein-Xu [NWX99] ont montré comment définir pour tout groupoïde différentiable longitudinalement lisse G un calcul pseudodifférentiel $\Psi_c^\infty(G)$.

On peut donc associer à toute variété à coins plongés et fibrés X un calcul à support compact $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$. On étudie dans le chapitre suivant les propriétés de ce calcul et on montrera les liens étroits qu'il entretient avec le ϕ -calcul de Melrose.

CHAPITRE 3

Calcul pseudodifférentiel sur les variétés à coins fibrés

Nous rappelons brièvement la définition d'un calcul pseudodifférentiel particulier défini par Melrose et Mazzeo pour les variétés à bords fibrés, le ϕ -calcul [MM98]. Il s'agit d'une généralisation du b -calcul, construite à partir d'une désingularisation géométrique de la variété à coins X^2 et des fibrations de son bord.

Nous associons ensuite à toute variété à coins fibrés X un calcul pseudodifférentiel $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ à partir du groupoïde d'éclatement $\Gamma_\phi(X)$ construit dans le chapitre 2 et montrons que le ϕ -calcul s'identifie au calcul pseudodifférentiel sur ce groupoïde dans le cas des variétés à bord fibré.

Enfin dans le cas des variétés à bord feuilleté nous introduisons une algèbre de type Schwartz $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ qui permet de définir un calcul étendu $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X)) = \Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X)) + \mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ et nous montrons que cette algèbre contient les opérateurs du ϕ -calcul étendu.

On obtient ainsi une interprétation conceptuelle du ϕ -calcul comme calcul pseudodifférentiel associé au groupoïde d'éclatement des variétés à bord fibré.

...

1 b -stretched product et b -calcul

Soit X une variété compacte C^∞ à bord. Le b -stretched product de X ([Mel93]) est une variété compacte C^∞ à coins définie par le recollement

$$X_b^2 = X^2 \setminus (\partial X)^2 \cup S_+N,$$

où $S_+N = (N_{(\partial X)^2}^{X^2} - \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ est un espace fibré trivialisable sous la forme $(\partial X)^2 \times [-1, 1]$ par le choix d'une fonction de définition ρ de ∂X . Le plongement de $X^2 \setminus (\partial X)^2$ dans $X^2 \times [-1, 1]$ par

$$(x, y) \rightarrow \left(x, y, \frac{\rho(x) - \rho(y)}{\rho(x) + \rho(y)}\right)$$

permet d'identifier X_b^2 à une sous-variété de $X^2 \times [-1, 1]$. Un autre plongement possible dans $X \times X \times \mathbb{R}$ est donné par :

$$X_b^2 = \{(x, y, t) \in X \times X \times \mathbb{R}, (1 - t)\rho(x) = (1 + t)\rho(y)\}.$$

Le b -stretched product comporte trois composantes de bord, $lb = \{(x, y, -1) \in \partial X \times X \times \mathbb{R}\} \simeq \partial X \times X$, $rb = \{(x, y, 1) \in X \times \partial X \times \mathbb{R}\} \simeq X \times \partial X$ et S_+N .

La diagonale $\Delta_b = \{(x, x, 0) \in X \times X \times \mathbb{R}\}$ intersecte uniquement la composante de bord S_+N et cette intersection est transverse, ce qui permet une définition directe d'opérateurs à noyaux de Schwartz sur X_b^2 , les opérateurs du b -calcul (voir [Mel93]). Le noyau K d'un b -opérateur pseudodifférentiel est un élément de $I^\infty(X_b^2, \Delta_b, \Omega^{\frac{1}{2}})$ dont le développement en série de Taylor s'annule sur $lb \cup rb$ (K est une fonction C^∞ au voisinage de $lb \cup rb$, puisque l'intersection de $lb \cup rb$ avec Δ_b est vide). La situation pour $X = \mathbb{R}_+$ est illustrée sur la figure suivante :

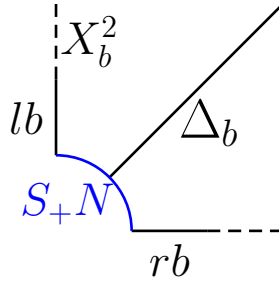


FIGURE 1. Le b -stretched product de R_+ .

...

2 ϕ -stretched product et ϕ -calcul

Lorsque le bord de X est muni d'une fibration $\phi : \partial X \rightarrow Y$, la construction du ϕ -calcul nécessite non seulement que la diagonale Δ_b intersecte transversalement la composante S_+N mais aussi la sous-variété Φ de S_+N définie par

$$\Phi = \{(x, y, 0) \in S_+N \simeq (\partial X)^2 \times [-1, 1], \phi(x) = \phi(y)\}.$$

Cette condition est réalisée en introduisant le ϕ -stretched product [MM98], qui s'obtient par le recollement

$$X_\phi^2 = X_b^2 \setminus \Phi \cup S_+N_\phi$$

où $S_+N_\phi = (N_\Phi^{X_b^2} - \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ est un espace fibré localement trivialisable par le choix d'une fonction de définition ρ de ∂X et une trivialisatation locale $\tilde{\phi}$ de ϕ sur ∂X .

Les composantes de bord du ϕ -stretched product sont lb , rb , S_+N_ϕ et sb , l'adhérence de $S_+N \setminus \Phi$ dans X_ϕ^2 . On montre que lorsque $\dim Y = q$, $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ est difféomorphe au sous-ensemble des éléments $(x, x', S, Y) \in X \times X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ tels que :

$$\rho(x') = \rho(x)(1 + S\rho(x)) \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x') - \rho(x)Y$$

La diagonale $\Delta_\phi = \{(x, x) \in X_\phi^2\}$ intersecte uniquement la composante de bord S_+N_ϕ et cette intersection est transverse, ce qui permet une définition directe d'opérateurs à noyaux de Schwartz sur X_ϕ^2 , les opérateurs du ϕ -calcul (voir [MM98]). La définition est essentiellement la même qu'au paragraphe précédent. Le noyau K d'un ϕ -opérateur pseudodifférentiel est un élément de $I^\infty(X_\phi^2, \Delta_\phi, \Omega^{\frac{1}{2}})$ dont le développement en série de Taylor s'annule sur $lb \cup rb \cup sb$ (K est une fonction C^∞ au voisinage de $lb \cup rb \cup sb$, puisque l'intersection de $lb \cup rb \cup sb$ avec Δ_ϕ est vide). La situation pour $X = \mathbb{R}_+$ est illustrée sur la figure 2.

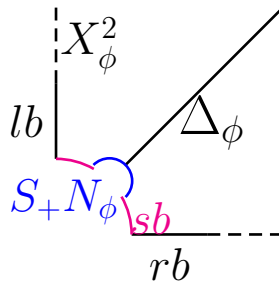


FIGURE 2. Le ϕ -stretched product de R_+ pour la fibration triviale.

• • •

3 ϕ -calcul et groupoïde des variétés à bord fibré

Nous montrons que le groupoïde d'éclatement $\Gamma_\phi(X)$ introduit précédemment s'identifie à la sous-variété ouverte $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ de X_ϕ^2 et que le ϕ -calcul s'identifie au calcul pseudodifférentiel $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ sur ce groupoïde.

La proposition 5.7 du dernier chapitre montrera que $\Gamma_\phi(X)$ est le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage singulier défini par X° et la fibration du bord. On obtient ainsi une interprétation conceptuelle du ϕ -calcul comme calcul pseudodifférentiel associé au groupoïde d'holonomie du feuilletage singulier défini par la variété à bord fibré.

3.1. Calcul pseudodifférentiel à support compact

DÉFINITION 3.1. Soit X une variété à coins plongés et fibrés. On appelle calcul pseudodifférentiel à support compact sur X l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ sur le groupoïde longitudinalement lisse $\Gamma_\phi(X)$.

3.2. Comparaison des calculs sur X_ϕ^2 et $\Gamma_\phi(X)$

On dispose d'une part du ϕ -stretched product X_ϕ^2 et du ϕ -calcul associé, et d'autre part du groupoïde $\Gamma_\phi(X) = (\mathcal{GE}_\phi)_X^X$ et de son calcul pseudodifférentiel $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$.

La définition du ϕ -calcul ressemble à celle d'un calcul pseudodifférentiel sur un groupoïde. Deux points font cependant obstacle à cette interprétation. Premièrement, le ϕ -stretched product n'est pas un groupoïde de Lie. Deuxièmement, le noyau de Schwartz des ϕ -opérateurs pseudodifférentiels doit satisfaire une condition supplémentaire d'annulation en série de Taylor sur $lb \cup rb \cup sb$.

Or il peut être bon de rappeler que, par exemple, les fonctions C^∞ sur le cercle qui s'annulent en série de Taylor en 0 sont identifiables à l'espace de Schwartz de \mathbb{R} , les fonctions C^∞ sur \mathbb{R} à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. L'objet $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ est donc un candidat naturel pour une définition alternative du ϕ -calcul.

Nous montrons ici que $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ est en effet un groupoïde, et que le ϕ -calcul s'identifie au calcul pseudodifférentiel sur ce groupoïde, qui n'est autre que le groupoïde d'éclatement $\Gamma_\phi(X)$ introduit précédemment. Pour comparer les deux calculs, on étudie tout d'abord les

espaces qui supportent les noyaux de Schwartz et l'on construit à cet effet un plongement i_s de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2 (proposition 3.2). L'image de ce plongement est la sous-variété ouverte $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ (proposition 3.5) et l'on obtient en corollaire l'égalité des calculs $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et $\Psi_{\phi,c}^\infty(X)$ (proposition 3.4).

3.3. Notations

Soit X une variété à bord munie d'une fibration $\phi : \partial X \rightarrow Y$, on pose $p = \dim \partial X - \dim Y$ et $q = \dim Y$. On note ∂X_j les composantes connexes de ∂X munies des fibrations induites $\phi_j : \partial X_j \rightarrow Y_j$, et $\mathcal{E}_\phi = (M, (\partial X_j, \phi_j)_{j \in J})$ l'équarrissage fibré dont la partie positive définit X et sa fibration. Les composantes connexes ∂X_j étant disjointes, l'éclatement $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ de \mathcal{E}_ϕ coïncide avec l'union $\cup_{j \in J} \mathcal{G}\partial X_j \phi$ des groupoïdes d'éclatement des ∂X_j dans M . On explicite ci-dessous un atlas C^∞ de $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ sur lequel le plongement est défini.

Soit $\{(\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{W}_\alpha \times \mathbb{R}_+^*, \varphi_\alpha = \psi_\alpha \times \log)\}$ un atlas C^∞ de $\cup_{j \in J} \partial X_j \times \partial X_j \times \mathbb{R}_+^*$ dont les cartes sont adaptées à chaque $\mathcal{H}ol(\phi_j) \times \mathbb{R}_+^* = \partial X_j \times_{Y_j} \partial X_j \times \mathbb{R}_+^*$. Pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\alpha$ fixé, $U = \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ adapté à $V = U \cap (\mathbb{R}^{2p+q} \times \{0\} \times \{0\})$ et la composition :

$$\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\alpha} \mathcal{D}_V^U \xrightarrow{\Theta^{-1}} \Omega_V^U$$

est un difféomorphisme de \mathcal{D}_V^U sur l'ouvert Ω_V^U de $\mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ défini par (voir aussi section 3.3) :

$$\Omega_V^U = \{(x, \xi, \lambda, t) \in \mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, t\xi, t \cdot e^\lambda) \in U\}.$$

3.4. Plongement de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2

Soit $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ l'application C^∞ définie par $(x, \xi, \lambda) \mapsto (x, \xi, e^\lambda - 1)$. On pose $U' = F(U)$ et $V' = F(V)$. La relation $F(x, 0, 0) = (x, 0, 0)$ implique que l'application $\tilde{F} : \Omega_V^U \rightarrow \Omega_{V'}^{U'}$ (voir 5.1) soit un difféomorphisme.

Considérons alors l'application $\Theta_\alpha : \mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ définie par la composition :

$$\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \xrightarrow{\Theta^{-1} \circ \tilde{\varphi}_\alpha} \Omega_{V_\alpha}^{U_\alpha} \xrightarrow{\tilde{F}} \Omega_{V'_\alpha}^{U'_\alpha}$$

et sa projection $\pi\Theta_\alpha : \mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ sur les deux derniers facteurs.

Si s et r désignent les applications sources et but de $\Gamma_\phi(X)$, on définit $i_s : \Gamma_\phi(X) \rightarrow X \times X \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ pour $\gamma \in i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha})$ par :

$$i_s(\gamma) = (s(\gamma), r(\gamma), \pi\Theta_\alpha \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(\gamma))$$

PROPOSITION 3.2. *L'application i_s est un plongement de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2 .*

DÉMONSTRATION. Notons $\tilde{\phi} : \mathcal{W}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^q$ la projection de ψ_α sur le facteur \mathbb{R}^q de $\psi_\alpha(\mathcal{W}_\alpha) \subset \mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q$. L'expression 4.5 de $i_{\mathcal{D}}^{-1}$ pour un élément (x, y) de $X^\circ \times X^\circ$ montre que

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(x, y) = (\psi_\alpha(\pi(x), \pi(y)), \log \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \rho(x)).$$

La relation

$$F(\psi_\alpha(\pi(x), \pi(y)), \log \frac{\rho(y)}{\rho(x)}) = \left(\psi_\alpha(\pi(x), \pi(y)), \frac{\rho(y) - \rho(x)}{\rho(x)} \right)$$

implique alors

$$\pi\Theta_\alpha \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(x, y) = \left(\frac{\tilde{\phi}(\pi(x), \pi(y))}{\rho(x)}, \frac{\rho(y) - \rho(x)}{\rho^2(x)} \right).$$

Or $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ est la sous-variété de $X \times X \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ des éléments (x, y, Y, S) tels que $\rho(y) = \rho(x)(1 + S\rho(x))$ et $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(y) - \rho(x)Y$. L'élément $i_s(x, y) = (x, y, Y, S)$ où $Y = \frac{\tilde{\phi}(\pi(x), \pi(y))}{\rho(x)}$ et $S = \frac{\rho(y) - \rho(x)}{\rho^2(x)}$ appartient donc à $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ puisque :

$$\rho(x)(1 + S\rho(x)) = \rho(x)\left(1 + \frac{\rho(y) - \rho(x)}{\rho(x)}\right) = \rho(y)$$

et

$$\tilde{\phi}(y) - \rho(x)Y = \tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(\pi(x), \pi(y)) = \tilde{\phi}(x).$$

L'holonomie triviale des fibrations implique l'injectivité des applications sources et but de $\Gamma_\phi(X)$ et l'injectivité de i_s en restriction à l'intérieur de $\Gamma_\phi(X)$. Par ailleurs la fibre en 0 d'une déformation $\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}$ est diffeomorphe à l'ensemble $\Omega_{V_0}^U = \{(x, \xi, \lambda, 0) \in \mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^* \times \{0\}, x \in V\}$, ce qui assure la surjectivité de $\pi\Theta_\alpha \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}$ en restriction au bord $\bigcup_\alpha \mathcal{D}_{V_\alpha 0}^{\mathcal{U}_\alpha}$ de $\Gamma_\phi(X)$.

Ainsi $i_s(\Gamma_\phi(X)) \subset X^2$ est en bijection avec $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$, la définition de i_s en tant que composée d'applications lisse permet de conclure que i_s est un plongement de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2 , d'image $X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$.

□

3.5. Identification de $\Gamma_\phi(X)$ dans X_ϕ^2

PROPOSITION 3.3. $\Gamma_\phi(X)$ est une sous-variété ouverte de X_ϕ^2 et

$$X_\phi^2 \setminus \Gamma_\phi(X) = lb \cup rb \cup sb.$$

DÉMONSTRATION. Les composantes de bord (non-disjointes) de X_ϕ^2 sont

$$\partial X_\phi^2 = lb \cup rb \cup sb \cup S_+ N_\phi.$$

La relation $i_s(\Gamma_\phi(X)) = X_\phi^2 \setminus lb \cup rb \cup sb$ établie dans la démonstration précédente montre alors que la sous-variété fermée $lb \cup rb \cup sb$ est le complémentaire dans X_ϕ^2 de l'image du plongement i_s , ce qui assure le résultat.

□

3.6. Identification de $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et de $\Psi_{\phi,c}^\infty(X)$

Notons $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ l'algèbre des opérateurs à support compact sur $\Gamma_\phi(X)$ et $\Psi_{\phi,c}^\infty(X)$ l'algèbre des opérateurs à support compact du ϕ -calcul. La sous-variété $lb \cup rb \cup sb$ est disjointe d'un voisinage de Δ_ϕ . Le calcul pseudodifférentiel à support compact sur $\Gamma_\phi(X)$ coïncide donc avec les sections distributionnelles sur X_ϕ^2 qui s'annulent sur un voisinage de $lb \cup rb \cup sb$. Autrement dit, on a l'identification $I_c^\infty(\Gamma_\phi(X)) = I_c^\infty(X_\phi^2)$ et en corollaire le résultat suivant :

THÉORÈME 3.4. *Les calculs à support compact $\Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et $\Psi_{\phi,c}^\infty(X)$ coïncident.*

• • •

4 Calcul pseudodifférentiel étendu

On définit un calcul pseudodifférentiel étendu $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$ sur le groupoïde d'éclatement $\Gamma_\phi(X)$ d'une variété à coins fibrés :

$$\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X)) = \Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X)) + \mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X)).$$

L'algèbre $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ des fonctions à décroissance rapide, construite à partir d'une fonction longueur ψ à croissance polynomiale (lemme 4.2), est naturellement stable par calcul fonctionnel holomorphe. Elle contient les opérateurs régularisants du ϕ -calcul (proposition 4.4) et le ϕ -calcul étendu vérifie la relation d'inclusion : $\Psi_\phi^\infty(X) \subset \Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$.

4.1. Fonctions longueur à croissance polynomiale

DÉFINITION 4.1 ([Mon03], 1.4). Soit G un groupoïde de Lie et μ un système de Haar sur G . Une fonction longueur à croissance polynomiale est une fonction de classe C^∞ $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- φ est sous-additive, i.e. $\varphi(\gamma_1\gamma_2) \leq \varphi(\gamma_1) + \varphi(\gamma_2)$,
- $\forall \gamma \in G, \varphi(\gamma^{-1}) = \varphi(\gamma)$,
- φ est propre,
- $\exists c, N, \forall x \in G^{(0)}, \forall r \in \mathbb{R}_+, \mu_x(\varphi^{-1}([0, r])) \leq c(r^N + 1)$.

Une fonction longueur φ permet de définir l'espace

$$\mathcal{S}^0 = \{f \in C_0(G, \Omega^{1/2}), \forall P \in \mathbb{C}[X], \sup_{\gamma \in G} |P(\varphi(\gamma))f(\gamma)| < \infty\}$$

où le fibré des demi-densités $\Omega^{1/2}$ est le fibré en droites sur G dont la fibre en $\gamma \in G$ est l'espace vectoriel des applications

$$\rho : \Lambda^k T_\gamma G^{r(\gamma)} \otimes \Lambda^k T_\gamma G_{s(\gamma)} \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que $\rho(\lambda\nu) = |\lambda|^{1/2}\rho(\nu), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

L'espace $\mathcal{S}_\varphi(G)$ des fonctions à décroissance rapide sur G est défini dans ([Mon03], 1.5) comme le sous-espace de \mathcal{S}^0 constitué des fonctions f telles que :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall (v_1, \dots, v_l) \in C^\infty(\mathcal{A}G)^l, \forall k \leq l, (v_1 \dots v_k \cdot f \cdot v_{k+1} \dots v_l) \in \mathcal{S}^0.$$

$\mathcal{S}_\varphi(G)$ est l'idéal des opérateurs régularisants du calcul pseudo-différentiel étendu $I_s^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{1/2}) = I_c^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{1/2}) + \mathcal{S}_\varphi(G)$. C'est aussi une sous-algèbre de $C^*(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe ([LMN05], théorème 6).

4.2. Fonction longueur pour les variétés à coins fibrés

Soit X une variété à coins plongés et fibrés définie par un équarrissage $\mathcal{E}_\phi = (M, (V_i, \phi_i)_{i \in [1, N]})$. Chaque éclatement $\mathcal{G}V_{i\phi}$ est difféomorphe par le plongement i_s de la proposition 3.2 à une sous-variété fermée de $M \times M \times \mathbb{R}^{q_i} \times \mathbb{R}$. La partie positive de leur produit fibré au-dessus de $M \times M$ est donc difféomorphe (à travers un difféomorphisme i) à une sous-variété fermée de $X \times X \times \prod_{i \in [1, N]} \mathbb{R}^{q_i} \times \mathbb{R}^N$. Soit $\pi : X \times X \times \prod_{i \in [1, N]} \mathbb{R}^{q_i} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \prod_{i \in [1, N]} \mathbb{R}^{q_i} \times \mathbb{R}^N$ la projection canonique, on définit une fonction longueur sur $\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi$ par $\psi(\gamma) = \|\pi \circ i(\gamma)\|$.

LEMME 4.2. $\psi : \mathcal{G}\mathcal{E}_\phi \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction longueur à croissance polynomiale.

DÉMONSTRATION. Sur chaque carte $i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}) \subset \mathcal{G}V_{i_\phi}$ de la proposition 3.2, $\psi_i = \|\pi\Theta \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(\gamma)\|$ vérifie $\psi_i(\gamma) = \|\xi\| + \|\lambda\|$ où $(x, \xi, \lambda, t) = \Theta^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(\gamma)$. Chaque ψ_i est donc un morphisme de groupoïde et $\psi = \sum_{i \in [1, N]} \psi_i$ est sous-additive.

π est propre car X est compact, d'autre part $i(\Gamma_\phi(X))$ est fermé dans $X \times X \times \prod_{i \in [1, N]} \mathbb{R}^{q_i} \times (\mathbb{R})^N$, donc $\psi = \|\pi \circ i\|$ est propre.

Enfin pour $x \in X$ l'expression locale des ψ_i montre qu'il existe deux constantes c_1, c_2 telles que pour $r \geq 1$, $\mu_x(\psi^{-1}([0, r])) < c_1 \text{vol}(B_{\mathbb{R}^M}(0, r))$ où $M = N + \sum_i q_i$ et pour $r < 1$, $\mu_x(\psi^{-1}([0, r])) \leq \sup_{x \in X} \mu_x(\psi^{-1}([0, 1])) = c_2$. En posant $c = \max(c_1, c_2)$ on obtient $\mu_x(\psi^{-1}([0, r])) \leq c(r^M + 1)$.

Comme X est compact on peut le recouvrir d'un nombre fini de voisinages et obtenir une inégalité sur X pour ψ . Donc ψ est à croissance polynomiale.

□

4.3. Définition du calcul pseudodifférentiel étendu

On dispose à présent des éléments suffisants pour définir un calcul pseudodifférentiel étendu sur une variété à coins fibrés :

DÉFINITION 4.3. Soit X une variété à coins fibrés et $\Gamma_\phi(X)$ le groupoïde longitudinalement lisse associé. On appelle calcul pseudodifférentiel étendu sur X l'algèbre $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$ des opérateurs pseudodifférentiels sur $\Gamma_\phi(X)$ définie par :

$$\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X)) = \Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X)) + \mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$$

où $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X)) = \mathcal{S}_\psi((\mathcal{G}\mathcal{E}_\phi)_X^X)$ est l'espace des fonctions à décroissance rapide par rapport à la fonction longueur ψ du lemme précédent.

$\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ est l'idéal des opérateurs régularisants du calcul pseudodifférentiel étendu $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$.

4.4. Identification de $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et de $\Psi_\phi^\infty(X)$

Les opérateurs régularisants du ϕ -calcul sont les noyaux C^∞ sur X_ϕ^2 qui s'annulent en série de Taylor sur $lb \cup rb \cup sb$. Or Melrose montre ([MM98], Proposition 4) qu'un noyau $K(x, x')$ qui s'annule en série de Taylor par rapport aux puissances de $\rho(x), \tilde{\phi}(x)$ est un noyau à décroissance rapide par rapport aux variables $Y = \frac{\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(x')}{\rho(x)}$ et $S = \frac{\rho(x) - \rho(x')}{\rho(x)}$, c'est à dire par rapport à $\pi\Theta \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(x, x')$.

Ainsi tout opérateur régularisant du ϕ -calcul défini par restriction au complémentaire de $lb \cup rb \cup sb$ une fonction à décroissance rapide sur $\Gamma_\phi(X)$, soit $\Psi_\phi^{-\infty}(X) \subset \mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$.

On obtient en corollaire le résultat suivant :

THÉORÈME 4.4. *Le calcul pseudodifférentiel étendu $\Psi^\infty(\Gamma_\phi(X)) = \Psi_c^\infty(\Gamma_\phi(X)) + \mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ contient les opérateurs du ϕ -calcul :*

$$\Psi_\phi^\infty(X) \subset \Psi^\infty(\Gamma_\phi(X))$$

4.5. Identification de la restriction au bord et de l'opérateur normal

Contrairement au cas d'une variété lisse sans coins, les opérateurs régularisants ne sont pas nécessairement compacts. Les obstructions à la compacité sont décrites pour le ϕ -calcul par l'introduction d'une algèbre indiciale $I(A, \xi, \lambda) \in \Psi_{\text{sus}(\phi)}(\partial X)$ et d'un opérateur normal $N_\phi : \Psi_\phi^\infty(X) \rightarrow \Psi_{\text{sus}(\phi)}(\partial X)$ à valeur dans une algèbre suspendue de noyaux sur ∂X invariants par translation et à décroissance rapide à l'infini (voir [Mel193], [MM98]).

Dans le cadre des variétés à coins fibrés, la famille indiciale $I(A, \xi, \lambda)$ est définie par Melrose ([MM98], proposition 5) comme la restriction du noyau à $ff(X_\phi^2)$. L'opérateur normal N_ϕ de Melrose coïncide donc avec l'opérateur ∂ de restriction au bord du groupoïde $\Gamma_\phi(X)$. L'invariance par translation de la famille indiciale vue comme élément de $\partial\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ n'est autre que l'invariance par $TY \times \mathbb{R}$ d'une famille d'opérateurs sur $\mathcal{S}_\psi(\partial X \times_Y \partial X \times_Y TY \times \mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}(TY \times \mathbb{R}, C_c^\infty(\partial X \times_Y \partial X))$.

4.6. Ellipticité totale et indice de Fredholm

Soit $\overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X))$ la clôture en norme de $\Psi^0(\Gamma_\phi(X))$ dans l'algèbre des multiplicateurs de $C_r^*(\Gamma_\phi(X))$. Rappelons que l'application symbole σ induit la suite exacte :

$$0 \rightarrow C_r^*(\Gamma_\phi(X)) \longrightarrow \overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X)) \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*\Gamma_\phi(X)) \rightarrow 0$$

et que l'indice analytique $\text{ind}_a : K^0(A^*\Gamma_\phi(X)) \rightarrow K_0(C_r^*(\Gamma_\phi(X)))$ est à valeurs dans la K -théorie de la C^* -algèbre du groupoïde $\Gamma_\phi(X)$. L'indice analytique n'est donc pas en général un indice de Fredholm, ses valeurs ne sont pas des éléments de \mathbb{Z} . Pour obtenir un opérateur de Fredholm il est nécessaire d'introduire des conditions supplémentaires, l'ellipticité classique (le fait que le symbole soit inversible) n'étant pas suffisante.

La condition d'ellipticité totale s'obtient très naturellement à partir du groupoïde d'éclatement. En effet $\partial\Gamma_\phi = (\Gamma_\phi(X))_{\partial X}^{\partial X}$ est un fermé saturé de $\Gamma_\phi(X)$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_r^*(X^\circ \times X^\circ) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & C_r^*(\Gamma_\phi(X)) & \longrightarrow & \overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X)) & \xrightarrow{\sigma} & C_0(S^*\Gamma_\phi(X)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_r^*(\partial\Gamma_\phi) & \longrightarrow & \overline{\Psi}_0(\partial\Gamma_\phi) & \longrightarrow & C_0(S^*\partial\Gamma_\phi) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

La relation $C_r^*(X^\circ \times X^\circ) = \ker(\sigma) \cap \ker(\partial) = \ker(\sigma \oplus \partial)$ montre que $\sigma \oplus \partial$ se factorise à travers l'application σ_τ :

$$\overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X)) \xrightarrow{\sigma_\tau} C_0(S^*\Gamma_\phi(X)) \times_{\partial X} \overline{\Psi}_0(\partial\Gamma_\phi)$$

où $C_0(S^*\Gamma_\phi(X)) \times_{\partial X} \overline{\Psi}_0(\partial\Gamma_\phi)$ désigne le produit fibré de $C_0(S^*\Gamma_\phi(X))$ et de $\overline{\Psi}_0(\partial\Gamma_\phi)$ au-dessus de $C_0(S^*\partial\Gamma_\phi)$.

DÉFINITION 4.5. On dira qu'un opérateur $P \in \overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X))$ est *totale-ment elliptique* si l'élément $\sigma_\tau(P)$ est inversible.

L'application σ_τ induit d'après le diagramme précédent la suite exacte :

$$0 \rightarrow C^*(X^\circ \times X^\circ) \simeq \mathcal{K} \rightarrow \overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X)) \xrightarrow{\sigma_\tau} C_0(S^*\Gamma_\phi(X)) \times_{\partial X} \overline{\Psi}_0(\partial\Gamma_\phi)$$

Par conséquent, un opérateur de $\overline{\Psi}_0(\Gamma_\phi(X))$ est inversible modulo les compacts si et seulement si son image dans $C_0(S^*\Gamma_\phi(X)) \times_{\partial X} \overline{\Psi}_0(\partial\Gamma_\phi)$ est inversible. Cette dernière condition est équivalente à la double condition que l'opérateur soit elliptique et que sa restriction au bord soit inversible.

On retrouve en particulier la propriété exprimée dans la première partie de [MR05] : un opérateur du ϕ -calcul est totalement elliptique lorsque son symbole et l'opérateur normal $N_\phi = \partial$ sont conjointement inversibles, et l'opérateur est de Fredholm si et seulement si il est totalement elliptique.

4.7. Croissance polynomiale et entropie des feuilletages

La définition de $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ est limitée par l'existence d'une fonction longueur à croissance polynomiale. Or il existe de nombreux feuilletages

non triviaux n'admettant pas de telles fonctions, comme par exemple les feuilletages à entropie non nulle présentés ci-dessous. On proposera dans la section 5.7 la définition d'une algèbre $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ qui reste valide pour tout feuilletage régulier du bord.

Soit (M, \mathcal{F}) une variété compacte munie d'un feuilletage régulier. Soit $\{\phi_i : U_i \rightarrow P_i \times T_i\}$ un recouvrement de M par des cartes distinguées et $T = T_1 \cup \dots \cup T_k \subset M$ la transversale complète associée. La classe d'holonomie de tout chemin c d'origine x peut s'exprimer comme composition de l germes des difféomorphismes $h_{ij} : T_i \rightarrow T_j$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. On dit que $\gamma = [h_c]$ est au plus de longueur l et on note $\|\gamma\|$ la plus petite longueur l de γ possible. L'orbite de $x \in T$ de rayon l est défini par $\mathcal{O}_l(x) = \{\gamma \in \mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})_x^T \mid \|\gamma\| \leq l\}$. Le cardinal de cette orbite définit la fonction de croissance $\phi(x, l) = \#\mathcal{O}_l(x)$. Une orbite est dite à croissance polynomiale si $\phi(x, l) \lesssim l^d$, à croissance sous-exponentielle si $\phi(x, l) \lesssim \exp(l)$, à croissance exponentielle si $\phi(x, l) \sim \exp(l)$. Le type de croissance des orbites est indépendant de tout choix.

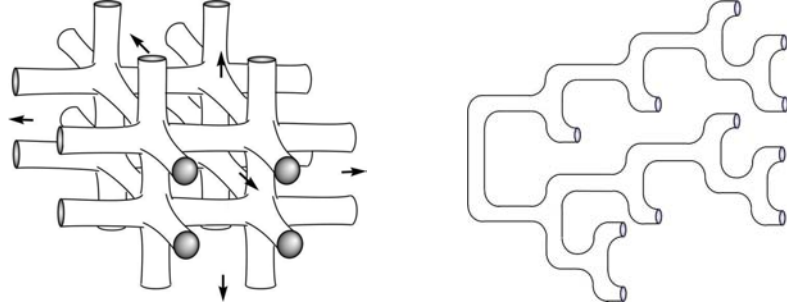


FIGURE 3. Une feuille à croissance polynomiale de degré 3. Une feuille à croissance exponentielle.

DÉFINITION 4.6 ([GLW88]). Soit $\epsilon > 0$ et $l > 0$. Un sous-ensemble $\mathcal{E} \subset T$ est dit (ϵ, l) -séparé si pour tout $\omega, \omega' \in \mathcal{E} \cap T_i$ il existe $\gamma \in \mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})_{T_i}^T$ tel que $\|\gamma\| \leq l$ et $d_T(h_\gamma(\omega), h_\gamma(\omega')) \geq \epsilon$.

La fonction d'expansion mesure le maximum de cette quantité :

$$h(\mathcal{F}, \epsilon, l) = \max\{\#\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \subset T \text{ est } (\epsilon, l)\text{-séparé}\}$$

et l'entropie de \mathcal{F} détermine le type de croissance exponentielle de la fonction d'expansion :

$$h(\mathcal{F}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln h(\mathcal{F}, \epsilon, l)}{l}$$

Ainsi l'information essentielle contenue dans l'invariant $h(\mathcal{F})$ est la présence ou non pour \mathcal{F} d'une complexité exponentielle dans la dynamique de ses orbites. Un feuilletage d'entropie > 0 possède au moins une feuille à croissance exponentielle et n'admet donc pas de fonction longueur à croissance polynomiale. En particulier :

EXEMPLE 4.7. Le feuilletage de Hirsch (seconde illustration de la Figure 3) a une entropie strictement positive. Le groupoïde d'holonomie de \mathcal{F} est semi-conjugué au pseudo-groupe généré par l'application $\phi : z \rightarrow z^2$ sur \mathbb{S}^1 . Après l itérations, la dérivée de l'application inverse ϕ^{-1} a pour norme 2^l ce qui permet l'estimation $h(\mathcal{F}, \epsilon, l) \sim (2\pi/\epsilon) \cdot 2^l$. Ainsi $h(\mathcal{F}) = \log 2 > 0$.

• • •

5 Une algèbre de Schwartz pour les variétés à bord feuilleté

On construit ici une algèbre $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ de fonctions C^∞ sur le groupoïde d'éclatement $\Gamma_\phi(X)$ d'une variété à bord feuilleté. Cette algèbre est constituée de fonctions à décroissance rapide le long des fibres et coïncide avec $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ lorsque le feuilletage est une fibration.

La définition proposée est valide pour tout feuilletage régulier du bord, y compris en l'absence de fonction longueur à croissance polynomiale.

5.1. Fonctions à décroissance rapide sur les déformations au cône normal

On rappelle dans cette section les notions intervenant dans la définition d'un espace de Schwartz $\mathcal{S}_c(D_N^M)$ pour les déformations au cône normal. Cet espace est un champ d'espaces vectoriels sur \mathbb{R} , dont les fibres sont :

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_c(\mathcal{N}_N^M) \text{ en } t = 0, \text{ et} \\ &C_c^\infty(M) \text{ pour } t \neq 0. \end{aligned}$$

La définition originelle de $\mathcal{S}_{cc}(D_N^M)$ dans [CR07] supposait l'utilisation de cartes adaptées $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{U} \times [0, 1])$ à support compact sur la composante $[0, 1]$ du groupoïde tangent de base $M \times [0, 1]$. La définition retenue ici pour $\mathcal{S}_c(D_N^M)$ est une extension naturelle de cette construction au groupoïde adiabatique de base $M \times \mathbb{R}$, qui relaxe cette hypothèse en imposant uniquement une décroissance rapide à l'infini sur \mathbb{R} , $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. L'abandon de toute hypothèse sur le support

aboutit à l'algèbre $\mathcal{S}(D_N^M)$ des fonctions à décroissance rapide en zéro. Ces trois algèbres sont liées par la relation d'inclusion :

$$\mathcal{S}_{cc}(D_N^M) \subset \mathcal{S}_c(D_N^M) \subset \mathcal{S}(D_N^M).$$

5.1.1. La situation dans \mathbb{R}^n

DÉFINITION 5.1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un sous-ensemble ouvert. On pose $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

- (1) Soit K un sous-ensemble localement compact de $U \times \mathbb{R}$. On dira que K est un compact conique longitudinal de $U \times \mathbb{R}$ relatif à V si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $K_t = K \cap (U \times \{t\})$ est compact et si $K_0 \subset V$.
- (2) Si de plus $K \subset U \times [0, 1]$ est compact, on dira que K est un compact conique de $U \times [0, 1]$ relatif à V . On retrouve la définition d'un compact conique au sens de [CR07].
- (3) Soit $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$. On dira que g est (resp. longitudinale) à support compact conique s'il existe un compact conique (resp. longitudinal) K de $U \times \mathbb{R}$ relatif à V tel que si $t \neq 0$ et $(x, t\xi, t) \notin K$ alors $g(x, \xi, t) = 0$.
- (4) Soit $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$. On dira que g est à décroissance rapide si la condition suivante est satisfaite :

$\forall k, m, n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^p$ et $\alpha \in \mathbb{N}^q$ il existe $C_{(k,m,n,l,\alpha)} > 0$ tel que

$$(1 + \|\xi\|^2)^k (1 + t^2)^m \|\partial_x^l \partial_\xi^\alpha \partial_t^n g(x, \xi, t)\| \leq C_{(k,m,n,l,\alpha)}$$

- (5) On note $\mathcal{S}(\Omega_V^U)$ l'ensemble des applications $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$ à décroissance rapide.
- (6) On note $\mathcal{S}_c(\Omega_V^U)$ l'ensemble des applications $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$ longitudinalement à support compact conique et à décroissance rapide.
- (7) On note $\mathcal{S}_{cc}(\Omega_V^U)$ [CR07] l'ensemble des applications $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$ à support compact conique et à décroissance rapide.

Soient $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $U' \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ deux ouverts et soit $F : U \rightarrow U'$ un difféomorphisme C^∞ dont la seconde composante dans une décomposition $F = (F_1, F_2)$ adaptée à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ satisfait $F_2(x, 0) = 0$. Alors l'application $\tilde{F} : \Omega_V^U \rightarrow \Omega_{V'}^{U'}$ définie par :

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{t} F(x, t\xi) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

est un difféomorphisme C^∞ et on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2 ([CR07]). Soit $g \in \mathcal{S}_{cc}(\Omega_{V'}^U)$, alors $\tilde{g} \doteq g \circ \tilde{F} \in \mathcal{S}_{cc}(\Omega_V^U)$.

REMARQUE 5.3. Comme expliqué dans [CR07], le fait que \tilde{F} soit C^∞ s'obtient immédiatement grâce au développement en série de Taylor de F :

$$F(x, \xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi + h(x, \xi) \cdot \xi$$

où $h : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une application C^∞ telle que $h(x, 0) = 0$. Alors

$$\frac{1}{t}F(x, t\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi + h(x, t\xi) \cdot \xi$$

ce qui permet de conclure.

5.1.2. *Le cas des déformations au cône normal* Les fonctions à décroissance rapide d'une déformation au cône normal sont les fonctions dont l'image sur Ω_V^U associée à toute carte adaptée est un élément de $\mathcal{S}(\Omega_V^U)$.

DÉFINITION 5.4. Soit $g \in C^\infty(D_N^M)$.

- (1) Soit K un sous-ensemble localement compact de $M \times \mathbb{R}$. On dira que K est un compact conique longitudinal de $M \times \mathbb{R}$ relatif à N si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $K_t = K \cap (M \times \{t\})$ est compact et si $K_0 \subset N$.
- (2) Si de plus $K \subset M \times [0, 1]$ est compact, on dira que K est un compact conique de $M \times [0, 1]$ relatif à N . On retrouve la définition d'un compact conique au sens de [CR07].
- (3) On dira que g est (resp. longitudinalement) à support compact conique s'il existe un compact conique (resp. longitudinal) K de $M \times \mathbb{R}$ relatif à N tel que si $t \neq 0$ et $(m, t) \notin K$ alors $g(m, t) = 0$.
- (4) On dira que g est à décroissance rapide en zéro si pour toute carte adaptée (\mathcal{U}, ϕ) relative à N et pour toute $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, l'application $g_\chi \in C^\infty(\Omega_V^U)$ définie par :

$$g_\chi(x, \xi, t) = (g \circ \phi^{-1})(x, \xi, t) \cdot (\chi \circ P_D \circ \phi^{-1})(x, \xi, t)$$

est un élément de $\mathcal{S}(\Omega_V^U)$.

L'application $P_D : D_N^M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ est la projection C^∞ définie par ([CR07], Exemple 3.2.3) :

$$P_D := \begin{cases} (x, \xi, 0) & \mapsto (x, 0) & \text{si } t = 0 \\ (m, t) & \mapsto (m, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On note respectivement $\mathcal{S}(\mathcal{D}_N^M)$, $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_N^M)$ et $\mathcal{S}_{cc}(\mathcal{D}_N^M)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide en zéro, le sous-espace des fonctions longitudinalement à support compact conique et le sous-espace des fonctions à support compact conique.

5.2. Définition de l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(\mathcal{D}_\varphi)$

Soit X une variété à bord dont le bord ∂X est muni d'un feuilletage régulier \mathcal{F}_1 . Rappelons que $\mathcal{D}_\varphi = D_\varphi \rtimes \mathbb{R}_+^*$ désigne le groupoïde de déformation décrivant localement $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ à travers le morphisme de groupoïde $i_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ (voir section 4.5). D_φ est la déformation au cône normal définie à partir de l'immersion $\varphi : \mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) \rightarrow \partial X \times \partial X$.

DÉFINITION 5.5. Soit $g \in C^\infty(\mathcal{D}_\varphi)$.

- (1) On dira que g est longitudinalement à support compact conique s'il existe un compact conique longitudinal K de $\partial X \times \partial X \times \mathbb{R}$ relatif à $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)$ tel que si $t \neq 0$ et $(m, t) \notin K$ alors $g(m, \lambda, t) = 0$.
- (2) On dira que g est à décroissance rapide en zéro si pour toute carte adaptée $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}', \phi \times \phi')$ relative à $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) \times \mathbb{R}_+^*$ et pour toute $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{U} \times \mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, l'application $g_\chi \in C^\infty(\Omega_{V \times V'}^{U \times U'})$ définie par :

$$g_\chi(x, \xi, \lambda, t) = (g \circ (\phi \times \phi')^{-1})(x, \xi, \lambda, t) \cdot (\chi \circ P_{\mathcal{D}} \circ (\phi \times \phi')^{-1})(x, \xi, \lambda, t)$$

est un élément de $\mathcal{S}(\Omega_{V \times V'}^{U \times U'})$.

L'application $P_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \partial X \times \partial X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est la projection C^∞ définie par les applications source et but sur \mathcal{D}_φ :

$$P_{\mathcal{D}} := \{ (\gamma, \lambda, t) \mapsto ((\hat{s}(\gamma), \hat{r}(\gamma)), \lambda \cdot t, t) \}$$

On note respectivement $\mathcal{S}(\mathcal{D}_\varphi)$ et $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide en zéro et le sous-espace des fonctions longitudinalement à support compact conique.

5.3. Fonction de partition au voisinage du bord de $\Gamma_\phi(X)$

Posons $\mathcal{D}_\varphi^+ = \{(\gamma, \lambda, t) \in \mathcal{D}_\varphi / t \geq 0\}$. On a déjà souligné en 4 que l'application $i_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ préserve l'orientation de ∂X ce qui prouve la relation :

$$(12) \quad i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_\varphi^+) = i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_\varphi)|_{M^+} = (\Gamma_\phi(X))_{N^+}^{N^+}.$$

On souhaite construire des fonctions de partition $\{\chi, \mu\}$ associées aux ouverts $(\Gamma_\phi(X))_{N^+}^{N^+}$ et $X^\circ \times X^\circ$ de X .

Soit $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un recouvrement de $\partial X \times \partial X$ dont les cartes sont adaptées à $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)$. Considérons le recouvrement ouvert de $\partial X \times \partial X \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ qui consiste en l'union de $\{\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$ et $\partial X \times \partial X \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\{\chi_\alpha, \lambda\}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement :

- $0 \leq \chi_\alpha, \lambda \leq 1$
- $\text{supp}\lambda \subset \partial X \times \partial X \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
- $\text{supp}\chi_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\chi_\alpha \in C_c^\infty(\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$
- $\sum_\alpha \chi_\alpha + \lambda = 1$

Soit $P_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \partial X \times \partial X \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ la projection définie en (5.2). Soit enfin $\chi \in C^\infty(\Gamma_\phi(X))$ la fonction définie sur l'ouvert $(\Gamma_\phi(X))_{N^+}^{N^+}$ par :

$$\chi = \sum_\alpha \chi_\alpha \circ P_{\mathcal{D}} \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}$$

et prolongée par zéro sur son complémentaire. On pose $\mu = 1 - \chi$, et on montre alors :

LEMME 5.6. $\{\chi, \mu\}$ est une partition de l'unité associée aux ouverts $(\Gamma_\phi(X))_{N^+}^{N^+}$ et $X^\circ \times X^\circ$ de $\Gamma_\phi(X)$.

DÉMONSTRATION. Les conditions $0 \leq \chi, \mu \leq 1$ et $\chi + \mu = 1$ sont immédiates à vérifier. La condition sur le support de λ implique $\lambda = 0$ et $\sum_\alpha \chi_\alpha = 1$ en restriction à $\partial \mathcal{D}_\varphi^+$. Ainsi $\chi((\Gamma_\phi(X))_{\partial \mathcal{D}_\varphi^+}^{\partial X}) = 1$ et $\text{supp}\mu \subset X^\circ \times X^\circ$. Enfin la condition sur le support des χ_α et la relation (12) $i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_\varphi^+) = (\Gamma_\phi(X))_{N^+}^{N^+}$ implique $\text{supp}\chi \subset (\Gamma_\phi(X))_{N^+}^{N^+}$.

□

5.4. Fonctions à décroissance rapide sur les variétés à bord feuilleté

Soit $f \in C^\infty(\Gamma_\phi(X))$ et $\{\chi, \mu\}$ une fonction de partition au voisinage du bord. Posons $f_\chi = f \cdot \chi$ et $f_\mu = f \cdot \mu$, de telle sorte que $f = f_\chi + f_\mu$.

DÉFINITION 5.7. L'espace de Schwartz sur $\Gamma_\phi(X)$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\Gamma_\phi(X))$ dont la pré-image $f_\chi \circ i_{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D}_φ^+ est longitudinalement à support compact conique et à décroissance rapide en zéro.

$$\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X)) = \{f \in C^\infty(\Gamma_\phi(X)) , f_\chi \circ i_{\mathcal{D}} \in \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi^+)\}$$

REMARQUE 5.8. La condition (2) de la définition de $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi^+)$ assure que la définition de $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ est indépendante du choix d'une autre partition $\{\chi', \mu'\}$.

REMARQUE 5.9 (voir aussi [CR07], (72)). La relation $\text{supp}\mu \subset X^\circ \times X^\circ$ implique $f_\mu \in C_c^\infty(X^\circ \times X^\circ)$. La donnée d'une partition de l'unité comme ci-dessus fournit donc une décomposition explicite de $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_\phi(X)) &= \chi \cdot \mathcal{S}(\mathcal{D}_\varphi^+) \circ i_{\mathcal{D}}^{-1} + \mu \cdot C_c^\infty(X^\circ \times X^\circ) \\ &= \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \cdot \mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}_{\alpha}}^{\mathcal{U}_{\alpha}}) \circ i_{\mathcal{D}}^{-1} + \mu \cdot C_c^\infty(X^\circ \times X^\circ). \end{aligned}$$

5.5. Identification de $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ et de $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$

On a montré dans le cas des fibrations qu'il existait une fonction longueur ψ et une algèbre naturelle $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ de fonctions à décroissance rapide.

Montrons que $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ n'est autre que $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ lorsque \mathcal{F}_1 est une fibration du bord :

PROPOSITION 5.10. *Les algèbres $\mathcal{S}_\psi(\Gamma_\phi(X))$ et $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ coïncident lorsque X est une variété à bord fibré.*

DÉMONSTRATION. La condition de support compact conique est triviale lorsque X est une variété compacte. Avec les notations de la section 3.3, pour toute carte (\mathcal{U}, ϕ) de $V_i \times V_i$ adaptée à $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) = V_i \times_{Y_i} V_i$, la carte $\tilde{\phi} = (\mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*, \phi \times \log)$ est adaptée relativement à $V_i \times_{Y_i} V_i \times \mathbb{R}_+^*$. Posons $p = \dim V_i - \dim Y_i$, $q = \dim Y_i$, $\tilde{U} = \tilde{\phi}(\mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*) = U \times \mathbb{R}$ et $\tilde{V} = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^{2p+q} \times \{0\} \times \{0\})$. La fibre du normal à l'inclusion $\mathcal{V} \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*$ est de dimension q et l'expression 10 de la carte locale $\Omega_{\tilde{V}}^{\tilde{U}}$ devient : $\Omega_{\tilde{V}}^{\tilde{U}} = \{(x, \xi, \lambda, t) \in \mathbb{R}^{2p+q} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \in U\}$.

La condition de décroissance rapide (4) de la définition 5.1 sur $\Omega_{\tilde{V}}^{\tilde{U}}$ coïncide alors avec la propriété définissant \mathcal{S}_ψ puisque pour $\gamma \in \Gamma_\phi(X)$ tel que $\Theta^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}(\gamma) = (x, \xi, \lambda, t) \in \Omega_{\tilde{V}}^{\tilde{U}}$, on a $\psi(\gamma) = \|\xi\| + \|\lambda\|$ et

$$|P(\varphi(\gamma))(v_1 \dots v_k \cdot f \cdot v_{k+1} \dots v_l)(\gamma)| \leq C_{(k,m,n,p,\alpha)} < \infty$$

où $(v_1, \dots, v_l) \in C^\infty(\mathcal{A}\Gamma_\phi(X))^l$ agit localement par dérivation $\partial_x^p \partial_\xi^\alpha \partial_t^n$ et $k = \lfloor \frac{\deg P}{2} \rfloor$.

□

CHAPITRE 4

Éléments de cohomologie cyclique des variétés à bord feuilleté

• • •

1 K -Théorie et cohomologie cyclique périodique de $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$

1.1. Produit croisé d'une algèbre par une action lisse de \mathbb{R}

DÉFINITION 1.1 ([ENN88], 2.1). Soit \mathcal{A} une algèbre de Fréchet dont la topologie est définie par une suite croissante de semi-normes $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$. Un morphisme $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(M)$ est une action lisse si :

- (1) pour tout $a \in \mathcal{A}$ la fonction $t \mapsto \alpha_t(a)$ est fortement C^∞ .
- (2) pour $m, k \in \mathbb{N}$ fixés, il existe $n, j \in \mathbb{N}$ et une constante positive C telle que pour tout $a \in \mathcal{A}$:

$$\left\| \frac{d^k}{dt^k} \alpha_t(a) \right\|_m \leq C(1+t^2)^{j/2} \|a\|_n$$

EXEMPLE 1.2. Un flot lisse sur une variété compacte et sans bord est une action lisse.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ étant nucléaire, le produit tensoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ peut être considéré comme un espace fonctionnel $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ pour tout espace \mathcal{A} complet, Hausdorff et localement convexe ([ENN88], 2.4). En particulier lorsque \mathcal{A} est définie comme en 1.1 la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ est induite par les semi-normes :

$$\|f\|_{k,m} = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1+t^2)^{k/2} \left\| \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right\|_k.$$

Si α est une action lisse de \mathbb{R} sur \mathcal{A} , on définit une loi de produit sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ par la formule :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha_u(f) \cdot \alpha_{t-u}(g) du.$$

DÉFINITION 1.3 ([ENN88], 2.5). L'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ munie du produit ci-dessus est appelée produit croisé de \mathcal{A} par l'action lisse α .

1.2. L'algèbre $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ en tant que produit croisé $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$

Soit D la déformation au cône normal de l'immersion $\varphi : \mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) \rightarrow \partial X \times \partial X$. L'algèbre $\mathcal{S}_c(D)$ des fonctions à décroissance rapide et longitudinalement à support compact conique sur D a été définie en 5.1.2. Supposons que le feuilletage \mathcal{F}_1 du bord ∂X soit tel que $\mathcal{S}_c(D)$ soit une algèbre de Fréchet. Alors l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ peut être identifiée au produit croisé d'une action lisse de \mathbb{R} sur $\mathcal{S}_c(D)$.

PROPOSITION 1.4. *Soit \mathcal{F}_1 tel que $\mathcal{S}_c(D)$ soit une algèbre de Fréchet. Alors il existe une action lisse de \mathbb{R} sur $\mathcal{S}_c(D)$ telle que les algèbres $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$ soient isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soit $H = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ le groupoïde d'action de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} par multiplication. Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'isomorphisme de groupe défini par la fonction \log , et $H^* = \phi^*(H) = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$ le groupoïde induit par ϕ . Soit π_1 la projection sur le premier facteur, on pose $\mu = \pi_1 \circ \phi^*(\lambda, t) = \log(\lambda)$, de sorte que $\phi^*(\lambda, t) = (\mu, t)$ pour tout (λ, t) dans H .

Soit

$$\Delta := \begin{cases} \mathcal{D}_\varphi & \rightarrow & H^* \times \mathcal{D} \\ (\gamma, \lambda, t) & \mapsto & \phi^*(\lambda, t) \times (\gamma, t) \end{cases}$$

L'image de Δ s'identifie au produit fibré $\Delta(\mathcal{D}_\varphi) \simeq H^* \times_{\mathbb{R}} \mathcal{D}$.

Considérons l'application $\Delta^* : \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi) \rightarrow C^\infty(\Delta(\mathcal{D}_\varphi))$ définie par la formule

$$\Delta^* f(g) = f(\Delta^{-1}(g)).$$

Soit $f \in \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$. Le point (2) de la définition de $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ implique :

$$\begin{aligned} \Delta_1 f &= \Delta^* f(\mu, t, \cdot, \cdot) \in \mathcal{S}(D) & \forall (\mu, t) \in H^* \\ \Delta_2 f &= \Delta^* f(\cdot, \cdot, \gamma, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \forall (\gamma, t) \in D. \end{aligned}$$

Le point (1) de la définition de $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ implique alors que $\Delta_1 f$ soit longitudinalement à support compact conique, d'où $\Delta_1 f \in \mathcal{S}_c(D)$.

Soit α l'action de \mathbb{R} sur $\Delta_1 f$ définie par :

$$\alpha_\mu(\Delta_1 f)(\gamma, t) = f(\gamma, \phi^{*-1}(\mu, t))$$

et soit Θ l'application :

$$\Theta := \begin{cases} \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi) & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D)) \\ f & \rightarrow & \mu \mapsto \alpha_\mu(\Delta_1 f) \end{cases}$$

Montrons que Θ est bien définie et fournit l'isomorphisme cherché.

ϕ^{*-1} est une fonction C^∞ explicitement définie par $\phi^{*-1}(\mu, t) = (\exp(\mu), t)$. La relation $\alpha_\mu(\Delta_1 f)(\gamma, t) = f(\gamma, \phi^{*-1}(\mu, t))$ implique alors la lissité de la fonction $\mu \mapsto \alpha_\mu(\Delta_1 f)$ et la condition (1) de la définition 1.1.

Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini du support compact conique de $\Delta_1 f$ par des cartes adaptées et soient l, m et n des entiers. $(U_i \times \mathbb{R}_+^*, \varphi_i \times \phi)_{i \in I}$ est alors un recouvrement fini du support longitudinalement compact conique de f . La formule de Leibniz appliquée à l'expression précédente et la condition (3) de la définition 5.1 implique sur chaque U_i l'existence d'entiers k, a_1, \dots, a_n et de constantes $C_{(k, m, 0, l, a_j)}^i$ tels que :

$$(1 + \mu^2)^k \left\| \frac{d^n}{d\mu^n} \alpha_\mu(\Delta_1 f)(\mu) \right\| \leq 2^n \sum_j C_{(k, m, 0, l, a_j)}^i \leq 2^n \cdot n \sup_{j \in [0, n]} \|\Delta_1 f|_{U_i}\|_j.$$

Soit $j_0 \in [0, n]$ un indice où la borne supérieure précédente est atteinte. La relation $\|\Delta_1 f\|_{j_0} = \sup_{i \in I} \|\Delta_1 f|_{U_i}\|_{j_0}$ entraîne alors la condition (2) de la définition 1.1. Ainsi α est bien une action lisse de \mathbb{R} sur $\mathcal{S}_c(D)$, ce qui assure l'existence de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$ et la validité de la définition de Θ .

Montrons enfin que Θ est un isomorphisme d'algèbre. Soit $\eta = (\gamma, \lambda, t)$ un élément de \mathcal{D}_φ . L'inversibilité de Θ est assuré par la formule $\Theta^{-1}(\mu \rightarrow g_\mu)(\eta) = g_{\phi^*(\lambda, t)}(\gamma, t)$. Soit $d\nu$ une mesure de Haar sur le groupoïde de Lie D , $d\lambda/\lambda$ la mesure sur \mathbb{R}_+^* pré-image par ϕ de la mesure de Lebesgue. Notons $\pi\Delta_1$ et $\pi\Delta_2$ la composée de Δ et des projections respectives sur H^* et \mathcal{D} . On pose $\mu = \pi_1 \circ \pi\Delta_1(\eta)$ et $\nu = \pi\Delta_2(\eta)$. La loi de composition sur \mathcal{D}_φ induit sur $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ la loi de convolution :

$$f * g(\eta) = \int_{\mathcal{D}_\varphi^{r(\eta)}} f(\eta_1) g(\eta_1^{-1} \cdot \eta) d\eta_1$$

La s-fibre de $\eta = (\gamma, \lambda, t)$ est déterminé par t :

$$\mathcal{D}_\varphi^{r(\eta)} = \begin{cases} (\gamma_1, \lambda_1, 0) \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)}^{\partial X \times \partial X} \times \mathbb{R}_+^* \times \{0\}, & \hat{r}(\gamma_1) = \hat{r}(\gamma) & \text{si } t = 0 \\ (\gamma_1, \lambda_1, t_1) \in \partial X \times \partial X \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, & \hat{r}(\gamma_1) = \hat{r}(\gamma), \lambda_1 \cdot t_1 = \lambda \cdot t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On obtient donc $f * g$ par les deux formules :

$$\begin{aligned} f * g(\gamma, \lambda, t=0) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)}^{\partial X \times \partial X}} f \circ \Delta^{-1}(\mu_1, 0, \nu_1) \cdot g \circ \Delta^{-1}(\mu - \mu_1, 0, \nu_1^{-1} \cdot \nu) d\nu_1 d\mu_1 \\ f * g(\gamma, \lambda, t>0) &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{D^{\hat{r}(\eta)}} f \circ \Delta^{-1}(\lambda_1, t_1, \nu_1) \cdot g \circ \Delta^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}, t_1, \nu_1^{-1} \cdot \nu\right) \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} d\nu_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{D^{\hat{r}(\eta)}} f \circ \Delta^{-1}(\phi^{*-1}(\mu_1, t_1), \nu_1) \\ &\quad \cdot g \circ \Delta^{-1}(\phi^{*-1}(\mu - \mu_1, t_1), \nu_1^{-1} \cdot \nu) d\nu_1 d\mu_1 \end{aligned}$$

La relation $f(\eta) = f \circ \Delta^{-1}(\phi^{*-1}(\mu, t), \nu)$ pour tout $\eta \in \mathcal{D}_\varphi$ implique alors :

$$\begin{aligned} f * g(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{D^{\hat{r}(\eta)}} \alpha_{\mu_1}(\Delta_1 f)(\nu_1) \alpha_{\mu - \mu_1}(\Delta_1 g)(\nu_1^{-1} \cdot \nu) d\nu_1 d\mu_1 \\ &= \Theta(f) * \Theta(g)(\mu, \nu) \end{aligned}$$

et $\Theta(f * g) : \mu \rightarrow f * g(\mu, \nu)$ vérifie donc la relation $\Theta(f * g) = \Theta(f) * \Theta(g)$ ce qui achève la preuve.

□

1.3. Théorème d'isomorphisme en cohomologie cyclique périodique

La proposition 1.4 montre que pour certains feuilletages l'algèbre $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ peut être identifiée au produit croisé d'une action lisse de \mathbb{R} sur l'algèbre de type Schwartz $\mathcal{S}_c(D)$ d'une déformation au cône normal. Cette relation implique des liens entre la K -théorie et la cohomologie cyclique périodique de ces deux algèbres.

Supposons $\mathcal{S}_c(D)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe, et soit $\beta : K^i(\mathcal{S}_c(D)) \rightarrow K^{i+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D)))$ l'isomorphisme de Connes-Thom associé à l'action de α sur $\mathcal{S}_c(D)$ ([Con81],[ENN88] section 6). Le théorème 1 de [ENN88] montre l'existence d'une application naturelle en cohomologie cyclique :

$$\sharp_\alpha : H_\lambda^*(\mathcal{S}_c(D)) \rightarrow H_\lambda^{*+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D)))$$

qui commute avec l'opérateur S (voir section 2.3) et définit donc un isomorphisme : $HP^*(\mathcal{S}_c(D)) \simeq HP^{*+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D)))$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} K^i(\mathcal{S}_c(D)) & \xrightarrow{\text{ch}} & HP^*(\mathcal{S}_c(D)) \\ \beta \downarrow & & \downarrow \sharp_\alpha \\ K^{i+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))) & \xrightarrow{\text{ch}} & HP^{*+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))) \end{array}$$

De plus la proposition 1.4 montre l'existence d'un isomorphisme $\Theta : \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$, qui induit des isomorphismes respectifs Θ_K et Θ_{HP} en K -théorie et cohomologie cyclique périodique et assure ainsi la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} K^{i+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))) & \xrightarrow{\text{ch}} & HP^{*+1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))) \\ \Theta_K^{-1} \downarrow & & \downarrow \Theta_{HP}^{-1} \\ K^{i+1}(\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)) & \xrightarrow{\text{ch}} & HP^{*+1}(\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)) \end{array}$$

Posons $\sharp_{\mathcal{D}} = \Theta_{HP}^{-1} \circ \sharp_\alpha$ et $\beta_{\mathcal{D}} = \Theta_K^{-1} \circ \beta$. En combinant les deux diagrammes précédent on obtient :

PROPOSITION 1.5. *Soit \mathcal{F}_1 tel que $\mathcal{S}_c(D)$ soit une algèbre de Fréchet stable par calcul fonctionnel holomorphe. Alors il existe un isomorphisme $\sharp_{\mathcal{D}} : HP^*(\mathcal{S}_c(D)) \rightarrow HP^{*+1}(\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi))$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} K^i(\mathcal{S}_c(D)) & \xrightarrow{\text{ch}} & HP^*(\mathcal{S}_c(D)) \\ \beta_{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \sharp_{\mathcal{D}} \\ K^{i+1}(\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)) & \xrightarrow{\text{ch}} & HP^{*+1}(\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)) \end{array}$$

• • •

2 Cohomologie cyclique relative des variétés à bord feuilleté

On montre que l'opérateur de restriction ∂ sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ induit le couple d'algèbres $(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X)), \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N}))$.

On construit ensuite un 0-cocycle cyclique relatif $(\bar{\tau}, \mu)$ sur ce couple, obtenu à partir d'une trace régularisée $\bar{\tau}$ sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ généralisant la b -trace de Melrose aux variétés à bord feuilleté. Le cocycle $(\bar{\tau}, \mu)$ peut être considéré comme le cocycle fondamental de la variété à bord feuilleté. Il permettra dans un travail ultérieur de formuler un théorème d'indice d'Atiyah-Patodi-Singer pour les variétés à bord feuilleté.

2.1. Suite exacte de restriction au bord

Soit X une variété à bord dont le bord ∂X est muni d'un feuilletage régulier \mathcal{F}_1 . On note D la déformation au cône normal de l'immersion $\varphi : \mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) \rightarrow \partial X \times \partial X$, et \mathcal{N} la fibre de D en 0 : $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)}^{\partial X \times \partial X}$.

La restriction de $\Gamma_\phi(X)$ à son bord $\partial\Gamma_\phi(X) = (\Gamma_\phi(X))_{\partial X}^{\partial X}$ induit l'opérateur de restriction ∂ sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$. Notons $\partial\mathcal{S}_c$ l'image de ∂ et $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ son noyau. \mathcal{T} est l'idéal de $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ constitué des fonctions s'annulant sur $\partial\Gamma_\phi(X)$:

$$(13) \quad 0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X)) \xrightarrow{\partial} \partial\mathcal{S}_c \rightarrow 0$$

Le résultat suivant précise la structure de $\partial\mathcal{S}_c$:

PROPOSITION 2.1. *Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$ le produit croisé de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}_c(\mathcal{N})$ par l'action de \mathbb{R} de la proposition 1.4. Alors $\partial\mathcal{S}_c \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$.*

DÉMONSTRATION. Soit α l'action de \mathbb{R} sur $\mathcal{S}_c(D)$ de la proposition 1.4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$ est définie par l'action de α en restriction à $\partial D = \mathcal{N}$: $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N}) = \partial_{\mathcal{N}}\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$.

Soit $\Theta : \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D))$ l'isomorphisme introduit dans la démonstration de la proposition 1.4. La stabilité de la s-fibre de \mathcal{D}_φ en 0 sous l'action de α implique la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{S}_c(\partial\mathcal{D}_\varphi) \\ \Theta \downarrow & & \downarrow \Theta_\partial \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}_c(D)) & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{N}}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N}) \end{array}$$

et $\Theta_\partial \doteq \Theta \circ \partial = \partial_{\mathcal{N}} \circ \Theta$ est un isomorphisme entre $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_\varphi)$ et $\text{Im } \partial_{\mathcal{N}} \circ \Theta = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$.

Enfin par construction de $\Gamma_\phi(X)$, $i_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \Gamma_\phi(X)$ est l'identité en restriction au bord $\partial\mathcal{D}_\varphi$, d'où $\partial\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_c(\partial\mathcal{D}_\varphi) \xrightarrow{\Theta_\partial} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$.

□

2.2. b -métrique et partie finie

Soit $\mathcal{D}_\varphi^{(0)} = V \times \mathbb{R}$ l'espace des unités de \mathcal{D}_φ et $\mathcal{D}_\varphi^{(0)+} = V \times \mathbb{R}^+$ la variété à bord associée. On muni $\mathcal{D}_\varphi^{(0)+}$ d'une b -métrique, i.e. d'une métrique riemannienne complète

$$g = g_V + \frac{dt^2}{t^2}$$

sur l'ouvert $V \times \mathbb{R}_+^*$ de $\mathcal{D}_\varphi^{(0)+}$.

Si dv désigne une mesure sur V et dt la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , g est induite par la mesure produit $d\mu_{\mathcal{D}} = dv \cdot \frac{dt}{t}$ sur $\mathcal{D}_\varphi^{(0)+}$.

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ n'est pas localement intégrable en 0, mais elle définit une distribution $P.F(\frac{1}{t})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. En effet pour tout $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, on a :

$$(14) \quad \int_\epsilon^\infty h(t) \frac{dt}{t} = -h(0) \log \epsilon + R(\epsilon)$$

où $R(\epsilon)$ admet une limite lorsque ϵ tend vers 0. On appelle partie finie la distribution $P.F(\frac{1}{t})$ définie par :

$$\langle P.F(\frac{1}{t}), h \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(\epsilon)$$

On définit alors une distribution $\bar{\tau}_{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{S}_c(\mathcal{D}_{\varphi}^{(0)+})$ en posant :

$$\langle \bar{\tau}_{\mathcal{D}}, f \rangle = \langle P.F\left(\frac{1}{t}\right), \int_V f(v, t) dv \rangle$$

2.3. Hypertrace sur \mathcal{T}

On pose $d\mu^* = i_{\mathcal{D}}^*(d\mu_{\mathcal{D}})$ la mesure induite par $d\mu_{\mathcal{D}}$ sur l'ouvert $i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{\varphi}^{(0)+})$ de $\Gamma_{\phi}^{(0)}(X)$ et l'on étend $d\mu^*$ à $\Gamma_{\phi}^{(0)}(X)$ par la mesure de M sur $\Gamma_{\phi}^{(0)}(X) \setminus i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{\varphi}^{(0)+})$. On note $d\mu$ la mesure ainsi définie sur $\Gamma_{\phi}^{(0)}(X)$.

On définit alors une fonctionnelle linéaire τ sur $\mathcal{T} = \ker \partial$ en posant :

$$\tau(f) = \int_{\Gamma_{\phi}^{(0)}(X)} f d\mu.$$

PROPOSITION 2.2. τ est une hypertrace sur \mathcal{T} , i.e. τ vérifie :

$$\tau(xa) = \tau(ax), \text{ pour tout } a \in \mathcal{S}_c(\Gamma_{\phi}(X)), x \in \mathcal{T}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $u : \Gamma_{\phi}^{(0)}(X) \rightarrow \Gamma_{\phi}(X)$ l'application unité de $\Gamma_{\phi}(X)$. $\Gamma_{\phi}^{(0)}(X) \subset \Gamma_{\phi}(X)$ en tant que sous-groupeïde étant simplement un espace, la composition par u fournit une suite exacte d'algèbres commutatives :

$$0 \rightarrow u^*(\mathcal{T}) \rightarrow u^*(\mathcal{S}_c(\Gamma_{\phi}(X))) \xrightarrow{\partial} u^*(\partial\mathcal{S}_c(\Gamma_{\phi})) \rightarrow 0$$

où $u^*(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \circ u = \mathcal{T}_{|\Gamma_{\phi}^{(0)}(X)}$. Notons que toute trace sur l'algèbre commutative $u^*(\mathcal{T})$ est alors trivialement une hypertrace sur $u^*(\mathcal{T})$.

Définissons $\tau_u : u^*(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tau_u(f) = \int_{\Gamma_{\phi}^{(0)}} f d\mu = \int_{D_{\varphi}^{(0)+}} f \circ i_{\mathcal{D}} d\mu_{\mathcal{D}} + \int_{M \setminus i_{\mathcal{D}}(D_{\varphi}^{(0)+})} f.$$

La pré-image $u^*(\mathcal{T}) \circ i_{\mathcal{D}}$ est constituée de fonction C^{∞} à décroissance rapide sur $D_{\varphi}^{(0)+}$ s'annulant sur le bord $V \times \{0\}$, pour lesquelles l'intégration par rapport à $d\mu_{\mathcal{D}}$ est donc finie d'après l'équation (14). Ainsi τ_u est bien définie et c'est une hypertrace sur $u^*(\mathcal{T})$.

On conclut en constatant que τ se factorise à travers le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{u^*} & u^*(\mathcal{T}) \\ & \searrow \tau & \downarrow \tau_u \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

□

2.4. Trace régularisée sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$

Soit $\bar{\tau}$ la fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi^{(0)}(X))$ par :

$$(15) \quad \bar{\tau}(f) = \bar{\tau}_{\mathcal{D}}(f \circ i_{\mathcal{D}}) + \int_{M \setminus i_{\mathcal{D}}(D_\varphi^{(0+)})} f.$$

PROPOSITION 2.3. $\bar{\tau}$ est une extension linéaire de τ sur $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$.

DÉMONSTRATION. La linéarité et la continuité de $\bar{\tau}$ sont immédiates en tant que somme de distributions. Il reste à vérifier que $\bar{\tau}$ coïncide avec τ sur $\mathcal{T} = \ker \partial$.

Soit $f \in \mathcal{T}$, on pose $f_{\mathcal{D}} = f \circ i_{\mathcal{D}}$. Comme $(\tau - \bar{\tau})(f) = (\tau_{\mathcal{D}} - \bar{\tau}_{\mathcal{D}})(f_{\mathcal{D}})$, il suffit de montrer le résultat sur \mathcal{D}_φ .

Or pour tout $v \in V$ on a $f_{\mathcal{D}}(v, 0) = 0$ et l'équation (14) donne alors :

$$\langle P.F(\frac{1}{t}), \int_V f_{\mathcal{D}}(v, t) dv \rangle = \int \int_V f_{\mathcal{D}}(v, t) dv \frac{dt}{t}$$

soit $\bar{\tau}_{\mathcal{D}}(f_{\mathcal{D}}) = \int f_{\mathcal{D}} d\mu_{\mathcal{D}} = \tau_{\mathcal{D}}(f_{\mathcal{D}})$, ce qui achève la preuve. □

2.5. Cocycle cyclique relatif fondamental

Soit μ la fonctionnelle bilinéaire définie sur $\partial\mathcal{S}_c$ par :

$$\mu(\partial(a_0), \partial(a_1)) = \bar{\tau}([a_0, a_1])$$

PROPOSITION 2.4. $(\bar{\tau}, \mu)$ est 0-cocycle cyclique relatif sur $(\mathcal{S}_c, \partial\mathcal{S}_c)$.

DÉMONSTRATION. μ est bien définie : si $a_0, a_1, a'_0, a'_1 \in \mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ vérifient $\partial(a_0) = \partial(a'_0)$ et $\partial(a_1) = \partial(a'_1)$, alors $a_0 - a'_0$ et $a_1 - a'_1$ sont dans $\mathcal{T} = \ker \partial$ et :

$$\bar{\tau}([a_0 - a'_0, a_1 - a'_1]) = \tau([a_0 - a'_0, a_1 - a'_1]) = 0$$

puisque τ est une trace. Ainsi la définition de μ est indépendante du choix des représentants dans $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$.

Montrons à présent que le couple $(\bar{\tau}, \mu)$ définit un cocycle relatif pour l'opérateur cobord $(\tilde{b} + \tilde{B})$ (voir section 2.4) où

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b & -\partial^* \\ 0 & -b \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}.$$

On constate d'une part que μ définit un 1-cocycle cyclique sur $\partial\mathcal{S}_c$: la cyclicité découle immédiatement de l'antisymétrie du commutateur $[\cdot, \cdot]$ et la relation de cocycle est vérifiée puisque

$$\begin{aligned} b\mu(\partial(a_0), \partial(a_1), \partial(a_2)) &= \bar{\tau}([a_0a_1, a_2]) - \bar{\tau}([a_0, a_1a_2]) \\ &= \bar{\tau}([a_0a_1, a_2] - [a_0, a_1a_2]) \\ &= \bar{\tau}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part le cobord b de $\bar{\tau}$ vérifie la relation :

$$\begin{aligned} b\bar{\tau}(a_0, a_1) &= \bar{\tau}(a_0a_1) - \bar{\tau}(a_1a_0) \\ &= \bar{\tau}([a_0, a_1]) \\ &= \bar{\tau}(\partial^*([\partial(a_0), \partial(a_1)])) \\ &= \partial^*(\mu(\partial(a_0), \partial(a_1))) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $(b + B)\bar{\tau} = \partial^*\mu$. μ étant un cocycle cyclique, $(b + B)\mu = 0$ et le couple $(\bar{\tau}, \mu)$ vérifie $(\tilde{b} + \tilde{B})(\bar{\tau}, \mu) = 0$.

Ainsi $(\bar{\tau}, \mu)$ est bien un 0-cocycle relatif sur le couple d'algèbres $(\mathcal{S}_c, \partial\mathcal{S}_c)$.

□

Rappelons que dans le cadre du b -calcul on dispose d'un cocycle cyclique relatif $({}^b\text{Tr}, \mu)$ (section 2.11) dont l'accouplement avec une classe d'homologie cyclique relative $EXP_t(D)$ donne une version relative de la formule de MacKean-Singer (voir section 3.5). Le cocycle cyclique relatif $(\bar{\tau}, \mu)$ introduit ici est une extension aux variétés à bord feuilleté du cocycle cyclique relatif $({}^b\text{Tr}, \mu)$. En particulier $(\bar{\tau}, \mu)$ coïncide avec $({}^b\text{Tr}, \mu)$ lorsque le feuilletage est trivial :

PROPOSITION 2.5. $(\bar{\tau}, \mu) = ({}^b\text{Tr}, \mu)$ pour le feuilletage trivial du bord en ses faces.

DÉMONSTRATION. Soit Δ le cylindre $\partial M \times (-\infty, 0]$ et $M^\circ \stackrel{\psi_b}{\cong} \partial M \times (-\infty, 0] \cup_{\partial M} M^1$ l'intérieur de M dans la géométrie du b -calcul, i.e. muni d'une extrémité cylindrique avec $\psi_b(m) = (\pi(m), \log(\rho(m)))$.

Si A est le noyau d'un b -opérateur pseudo-différentiel, la restriction A_Δ de A à Δ peut s'écrire $A_\Delta(v, x) = \partial A(v) + A_1(v, x)$ où A_Δ et A_1 sont lisses et $A_1(v, x)$ décroît en e^x lorsque $x \rightarrow -\infty$. La b -trace de A (voir [Mel93] ou [Loy05] 2.4) est par construction la partie finie du développement :

$$\text{Tr}(A|_{x \geq R}) = \text{Tr}(A|_{M^1}) + \int_{-R}^0 \int_{\partial M} A_\Delta(v, x) dv dx$$

Or $d\mu_{\mathcal{D}} = dv \cdot \frac{dt}{t}$ est la pré-image par $\psi_b \circ i_{\mathcal{D}}$ de la mesure $dv dx$ sur Δ , donc l'intégration de A_{Δ} sur Δ coïncide avec $\int (A_{\Delta} \circ \psi_b \circ i_{\mathcal{D}}) d\mu_{\mathcal{D}} = \tau(A_{\Delta} \circ \psi_b)$ et

$$P.F. \left(\int_{-\infty}^0 \int_{\partial M} A_{\Delta}(v, x) dv dx \right) = \bar{\tau}_{\mathcal{D}}(A_{\Delta} \circ \psi_b \circ i_{\mathcal{D}}).$$

d'où ${}^b \text{Tr} = \bar{\tau}$.

L'égalité des 1-cocycles cycliques relatifs découle alors immédiatement de la définition de μ en terme de b -trace ([Me193]) :

$$\mu(\partial A, \partial B) = {}^b \text{Tr}([A, B]).$$

□

2.6. Cycles et cocycles cycliques sur $\partial\mathcal{S}_c$

On montre comment produire plusieurs cocycles cycliques intéressants sur $\partial\mathcal{S}_c$. On obtient ainsi l'équivalent pour les variétés à bord feuilleté de constructions déjà connues de manière entièrement naturelle à partir du couple $(\mathcal{S}_c, \partial\mathcal{S}_c)$.

2.6.1. *Cycle fondamental sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$* [[LMP06], exemple 2.13] Soit $\mathcal{E}^{\bullet} \doteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^p) \otimes \Lambda^{\bullet}$ les formes différentielles sur \mathbb{R}^p à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$. Si $d_{\mathbb{R}^p}$ est la différentielle extérieure et $\tau = \int_{\mathbb{R}^p}$, on obtient un cycle $(\mathcal{E}, d_{\mathbb{R}^p}, \tau)$ de degré p sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ sous l'identification naturelle $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p) \cong \mathcal{E}^0$.

Comme $HP^{p+1} \bmod 2(\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)) \cong 0$ et que le caractère de ce cycle fournit un isomorphisme $HP^p \bmod 2(\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)) \cong \mathbb{C}$, il est approprié d'appeler $(\mathcal{E}, d_{\mathbb{R}^p}, \tau)$ le cycle fondamental sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$.

2.6.2. *Cycle sur $\partial\mathcal{S}_c$ par cup-produit* Soit $C = (\Omega, d_{\mathcal{F}_1}, \tau)$ un cycle de degré n sur $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)$ et $p = \text{codim}(\mathcal{F}_1) + 1$. On construit un cycle de degré $n + p$, le *cup-produit* de $(\Omega, d_{\mathcal{F}_1}, \tau)$ par le cycle fondamental de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ de la manière suivante :

$$(\Omega^{\bullet} \cup \mathcal{E}^{\bullet})^k \doteq \bigoplus_{i+j=k} \Omega^i \otimes \mathcal{E}^j.$$

L'identification $\Omega^i \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^p) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^p, \Omega^i)$ permet de considérer les éléments de $\Omega^i \otimes \mathcal{E}^j$ comme des j -formes différentielles sur \mathbb{R}^p à valeur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p, \Omega^i)$. La différentielle sur $(\Omega^{\bullet} \cup \mathcal{E}^{\bullet})^k$ est définie par :

$$\tilde{d}(a \otimes \omega) = d_{\mathcal{F}_1} a \otimes \omega + (-1)^i a \otimes d_{\mathbb{R}^p} \omega$$

et pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p, \Omega^i)$ par :

$$\tilde{d}(fd\mu_I) = (d_{\mathcal{F}_1} \circ f)d\mu_I + (-1)^i d_{\mathbb{R}^p}(fd\mu_I).$$

On définit enfin une fonctionnelle linéaire $\tilde{\tau}$ sur $(\Omega^\bullet \cup \mathcal{E}^\bullet)^{n+p}$ en posant :

$$\tilde{\tau}(fd\mu_1 \wedge \cdots \wedge d\mu_p) = \int_{\mathbb{R}^p} \tau(f(\mu))d\mu.$$

et $\tilde{\tau}\Omega^i \otimes \mathcal{E}^j = 0$ pour $j < p$.

Si l'on dispose d'une identification $\partial\mathcal{S}_c \stackrel{\Theta_\theta}{\simeq} \mathcal{S}(\mathbb{R}^p, C_c^\infty(\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)))$, on vérifie alors que le cup-produit $(\Omega, d_{\mathcal{F}_1}, \tau) \cup (\mathcal{E}, d_{\mathbb{R}^p}, \tau) \doteq (\Omega^\bullet \cup \mathcal{E}^\bullet, \tilde{d}, \tilde{\tau})$ est un cycle de degré $n+p$ sur $\partial\mathcal{S}_c$.

2.6.3. *1-cocycle μ_θ* Comme on l'a déjà souligné, la b -trace ${}^b\text{Tr}$ n'est pas une trace. Sa valeur sur les commutateurs est liée aux familles indicielles des opérateurs par la formule suivante ([Mel93],[Loy05], théorème 2.5) :

$$(16) \quad {}^b\text{Tr}[A, B] = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}_{\partial M} \left(\frac{dI(A, \lambda)}{d\lambda} I(B, \lambda) \right) d\lambda.$$

On peut généraliser cette formule de transgression au cas des variétés à bord feuilleté en introduisant un 1-cocycle μ_θ qui coïncide avec μ pour le b -calcul.

Soit θ un 0-cocycle cyclique sur $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)$, et $\tilde{\tau}_\theta$ le caractère du p -cycle obtenu sur $\partial\mathcal{S}_c$ par cup-produit avec le cycle fondamental sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$: $\tilde{\tau}_\theta(f) = \int_{\mathbb{R}^p} \theta(f(\mu))d\mu$. Soit χ la fonction caractéristique de \mathbb{R}_- , on définit un 1-cocycle cyclique sur $\partial\mathcal{S}_c$ en posant :

$$\mu_\theta(a_0, a_1) = \tilde{\tau}_\theta(a_0[\chi, a_1]).$$

Lorsque $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) = \partial M \times \partial M$ et $\theta = \text{Tr}_{\partial M}$, $\partial\mathcal{S}_c \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}, C_c^\infty(\partial M \times \partial M))$ d'après la proposition 2.1. On peut alors montrer que $\mu_\theta = \mu$ en introduisant la transformée de Hilbert :

$$\mathcal{H}(f) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{i}{\pi} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(x)}{x-y} dy.$$

Si F désigne la transformée de Fourier, on sait que $\chi = \frac{1}{2} (1 + F^{-1} \circ \mathcal{H} \circ F)$ et que $[\mathcal{H}, f]$ est un opérateur intégral dont le noyau est $\frac{1}{i\pi} \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
 \mu_\theta(a_0, a_1) &= \tilde{\tau}_\theta(a_0 [\chi, a_1]) = \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\theta(a_0 [1 + F^{-1} \circ \mathcal{H} \circ F, a_1]) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\theta(a_0 [\mathcal{H}, a_1]) = \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\theta\left(a_0 \cdot \left(\frac{1}{i\pi} d_{\mathbb{R}}(a_1)\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \tilde{\tau}_\theta(a_0 d_{\mathbb{R}}(a_1)) = -\frac{1}{2\pi i} \tilde{\tau}_\theta(d_{\mathbb{R}}(a_0) a_1) \\
 &= \mu(a_0, a_1)
 \end{aligned}$$

$a_0 = \partial A$ et $a_1 = \partial B$ étant respectivement les familles indicielles $I(A, \lambda)$ et $I(B, \lambda)$ de A et B , la dernière égalité n'est autre que la formule (16). Ainsi μ_θ est bien une généralisation aux variétés à bord feuilleté du cocycle μ de transgression.

2.6.4. *2-cocycle de Godbillon-Vey* Soit $(\delta^{(i)})_{i=1,2,3}$ la famille de dérivations sur \mathcal{S}_c construite à partir du logarithme $\phi = \log(\varphi)$ de la fonction modulaire φ sur $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1)$: $\delta_3 = [\chi, \cdot]$, $\delta_2 = [\phi, \cdot]$, $\delta_1 = [\dot{\phi}, \cdot]$.

$\bar{\tau}$ définissant un poids sur \mathcal{S}_c , il est possible d'introduire une 2-cochaîne ψ_{GV} sur \mathcal{S}_c analogue dans le cas feuilleté au cocycle de Godbillon-Vey :

$$\begin{aligned}
 \psi_{GV}(a_0, a_1, a_2) &= \frac{1}{2!} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_2} \text{sign}(\alpha) \bar{\tau}(a_0, \delta_{\alpha(1)} a_1 \delta_{\alpha(2)} a_2) \\
 &= \frac{1}{2} (\bar{\tau}(a_0, \delta_1 a_1 \delta_2 a_2) - \bar{\tau}(a_0, \delta_2 a_1 \delta_1 a_2))
 \end{aligned}$$

La 2-cochaîne cyclique associée est alors :

$$\tau_{GV}(a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{3} \sum_{\alpha \text{ cyclic} \in \mathfrak{S}_3} \psi_{GV}(a_{\alpha(0)}, a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}).$$

Le cobord $b\tau_{GV}$ de τ_{GV} définit un 3-cocycle cyclique sur $\partial\mathcal{S}_c$ par la formule :

$$\sigma_{GV}(a_0, a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{3!} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_3} \text{sign}(\alpha) \tilde{\tau}_{\text{Tr}}(a_0 \delta_{\alpha(1)} a_1 \delta_{\alpha(2)} a_2 \delta_{\alpha(3)} a_3).$$

On retrouve ainsi les constructions proposées dans [MP11], en évitant l'introduction ad-hoc d'un « cylindre infini » encodé ici naturellement dans le groupoïde d'holonomie $\Gamma_\phi(X)$.

• • •

3 Application au cas des fibrations

3.1. Diagramme à 6 termes en K -théorie

Supposons que \mathcal{F}_1 soit une fibration $\partial X \rightarrow Y$ de la variété compacte ∂X . Alors $\mathcal{H}ol(\mathcal{F}_1) = \partial X \times_Y \partial X$ est compact en tant que fermé du compact $\partial X \times \partial X$ et $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\partial X \times_Y \partial X}^{\partial X \times \partial X}$. De plus l'algèbre $\mathcal{S}_c(D)$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Fréchet par la condition (3) de la définition 5.1 et $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ est une algèbre de Fréchet.

La décomposition en ouvert saturé $\Gamma_\phi(X) = \partial\Gamma_\phi(X) \cup X^\circ \times X^\circ$ permet d'identifier $\mathcal{T} = \ker \partial$ à l'algèbre $C_0^\infty(X^\circ \times X^\circ)$ qui est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^0(X^\circ \times X^\circ) \simeq \mathcal{K}$.

La suite exacte à 6 termes associée à la suite (13) de restriction au bord est donc :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})) \\ & & & & \downarrow \\ & \uparrow & & & 0 \\ K_1(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

L'algèbre $\mathcal{S}_c(\mathcal{N})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_0(\mathcal{N}^*)$ ([CR07], proposition 4.1.8). L'isomorphisme de Connes-Thom $K_0(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{N})) \simeq K_1(\mathcal{S}_c(\mathcal{N}))$ et la relation $K_*(\mathcal{S}_c(\mathcal{N})) \simeq K^*(\mathcal{N}^*)$ donnent alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) & \longrightarrow & K^1(\mathcal{N}^*) \\ & & & & \downarrow \\ & \uparrow & & & 0 \\ K^0(\mathcal{N}^*) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Si l'on suppose de plus une fibration triviale $\mathcal{N} \simeq \partial X \times_Y \partial X \times_Y TY$, le diagramme peut être présenté de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) & \longrightarrow & K_1(C_0(TY)) \\ & & & & \downarrow \\ & \uparrow & & & 0 \\ K_0(C_0(TY)) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

3.2. Le cas particulier du b -calcul

Lorsque $Y = \{pt\}$, on obtient $K_0(C_0(TY)) = \mathbb{Z}$, $K_1(C_0(TY)) = 0$. Les flèches de bord sont données par la matrice des nombres d'incidence ([Mon03], proposition 5.3) et

$$\begin{cases} K_0(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) = 0 \\ K_1(\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))) = 0 \end{cases}$$

L'algèbre $\mathcal{S}_c(\Gamma_\phi(X))$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*(\mathcal{H}ol(X, \mathcal{F}))$. On retrouve ainsi le résultat ([Mon03], 7.1) selon lequel la K -théorie de $C^*(\Gamma_\phi(X))$ pour une variété à bord connexe est nulle. Les diagrammes 3.1 sont une généralisation de ce résultat lorsque l'espace des feuilles n'est plus réduit à un point.

CHAPITRE 5

Pseudo-variétés stratifiées - Espace des strates

Les pseudo-variétés stratifiées, initialement apparues dans les travaux de Thom [Tho69] et Mather [Mat70], constituent une vaste classe d'espaces singuliers particulièrement intéressants, englobant entre autres les variétés à bord, à coins et à singularités coniques. Debord et Lescurre ont en particulier établi dans [DL09] que la dualité de Poincaré en K-théorie s'obtient pour ces espaces au travers d'un groupoïde de Lie, analogue non commutatif de l'espace tangent d'une variété classique. Nous verrons par la suite que la non-commutativité de ces espaces se révèle au travers d'autres aspects de leur géométrie.

• • •

1 Définitions et notations

Les définitions relatives aux pseudo-variétés stratifiées sont basées sur l'article de référence de Verona [Ver84], bien que la présentation retenue ici s'inspire dans une large mesure du contenu de [DL09].

X désigne dans la suite un espace métrisable localement compact.

1.1. Stratifications

DÉFINITION 1.1. Soit $s \subset X$ un sous-ensemble localement fermé de X . On appelle triplet pour s dans X la donnée d'un élément $(\mathcal{N}_s, \pi_s, \rho_s)$ où :

- \mathcal{N}_s est un voisinage ouvert de s dans X
- $\pi_s : \mathcal{N}_s \rightarrow s$ est une rétraction continue, i.e. $\pi_s|_s = Id_s$
- $\rho_s : \mathcal{N}_s \rightarrow [0, +\infty[$ est une application continue telle que $s = \rho_s^{-1}(0)$.

DÉFINITION 1.2. Deux triplets $(\mathcal{N}_s, \pi_s, \rho_s)$ et $(\mathcal{N}'_s, \pi'_s, \rho'_s)$ sont dits équivalents s'ils coïncident au voisinage de s , i.e. s'il existe un voisinage U de s dans X tel que $\mathcal{N}_s \cap U = \mathcal{N}'_s \cap U$, $\pi_s|_{\mathcal{N}_s \cap U} = \pi'_{s'}|_{\mathcal{N}'_s \cap U}$ et $\rho_s|_{\mathcal{N}_s \cap U} = \rho'_{s'}|_{\mathcal{N}'_s \cap U}$.

DÉFINITION 1.3. Un *tube* de s dans X est une classe d'équivalence de triplets $(\mathcal{N}_s, \pi_s, \rho_s)$. Pour simplifier les notations on confondra un tube avec la donnée de l'un de ses représentants.

DÉFINITION 1.4. Une *stratification faible* de X consiste en la donnée d'un couple (S, N) où :

- $S = \{s_i\}$ soit une partition localement finie de X en sous-variétés lisses et localement fermées, appelées strates, qui vérifient $s_i \cap \overline{s_j} \neq \emptyset$ si et seulement si $s_i \subset \overline{s_j}$. On notera alors $s_i \leq s_j$ et $s_i < s_j$ si de plus $s_i \neq s_j$.
- $N = \{(\mathcal{N}_s, \pi_s, \rho_s)\}_{s \in S}$ est une famille de tubes des strates, encore appelé ensemble des données de contrôle. On impose par ailleurs que ρ_s soit surjective ou nulle partout. De plus si $\mathcal{N}_{s_i} \cap s_j \neq \emptyset$ on requiert que l'application $(\pi_{s_i}, \rho_{s_i}) : \mathcal{N}_{s_i} \cap s_j \rightarrow s_i \times]0, +\infty[$ soit une submersion lisse.
- $s_i \cap s_j \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{N}_{s_i} \cap s_j \neq \emptyset$ et $\mathcal{N}_{s_i} \cap \mathcal{N}_{s_j} \neq \emptyset$ si et seulement si $s_i \leq s_j$ ou $s_j \leq s_i$.
- pour toutes strates s, t telles que $s < t$, on a $\pi_t(\mathcal{N}_s \cap \mathcal{N}_t) \subset \mathcal{N}_s$ et l'égalité $\pi_s \circ \pi_t = \pi_s$ est vérifiée sur $\mathcal{N}_s \cap \mathcal{N}_t$.

DÉFINITION 1.5. Une *stratification* de X est une stratification faible qui vérifie de plus que pour toutes strates s, t telles que $s < t$, l'égalité $\rho_s \circ \pi_t = \rho_s$ soit vérifiée sur $\mathcal{N}_s \cap \mathcal{N}_t$.

DÉFINITION 1.6. Soit (S, N) une stratification faible de X . La *profondeur* d'une strate $s \in S$ dans X est l'entier

$$depth_X(s) = \sup\{n \in \mathbb{N} / \exists (s_i)_{i=0..n} \in S, s = s_0 < s_1 < \dots < s_n\}$$

DÉFINITION 1.7. La profondeur de X est l'entier défini par :

$$depth(X) = \sup\{depth_X(s) / s \in S\}$$

Une stratification est naturellement filtrée par l'union X_j des strates de dimension $\leq j$:

$$\emptyset \subset X_0 \subset \dots \subset X_n = X.$$

L'entier n est appelé *dimension* de X et $X^o \doteq X \setminus X_{n-1}$ la partie *régulière* de X . Les strates incluses dans X^o seront dites *régulières*, tandis que les strates incluses dans $X \setminus X^o$ seront dites *singulières*.

1.2. Pseudo-variétés stratifiées

DÉFINITION 1.8. Une pseudo-variété stratifiée est un triplet (X, S, N) où X est un espace métrisable localement compact, (S, N) est une stratification de X et la partie régulière X^o est un ouvert dense de X .

Si (X, S_X, N_X) et (Y, S_Y, N_Y) sont deux pseudo-variétés stratifiées, un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme de pseudo-variétés stratifiées ssi

$S_Y = \{f(s), s \in S_X\}$ et $\forall s \in S_X, f|_s$ est un difféomorphisme sur $f(s)$.

$$\pi_{f(s)} \circ f = f \circ \pi_s \text{ et } \rho_s = \rho_{f(s)} \circ f \forall s \in S_X.$$

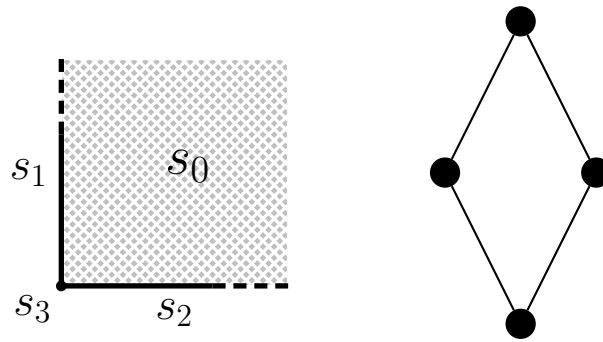


FIGURE 1. R_+^2 et le diagramme de Hasse de sa stratification naturelle.

...

2 Espace des strates

Une pseudo-variété stratifiée (X, S, N) définit naturellement un ordre partiel \leq sur $S = \{s_i\}_{i \in I}$ par la relation :

$$\forall i, j \in I, s_i \leq s_j \iff s_i \subset \overline{s_j}.$$

La structure de cette relation d'ordre partiel, constitutive de la stratification, rattache donc l'espace des strates S à la famille des *posets* (contraction de l'anglais "partially ordered set"). Ces objets, classiques en théorie combinatoire, nourrissent également certains développements de modèles d'espaces non-commutatifs étroitement liés aux représentations irréductibles de C^* -algèbres approximativement finies (voir [Lan97]).

Nous proposons ici d'étudier l'espace des strates S au travers d'un groupoïde canoniquement associé à la stratification et à sa structure d'ordre partiel.

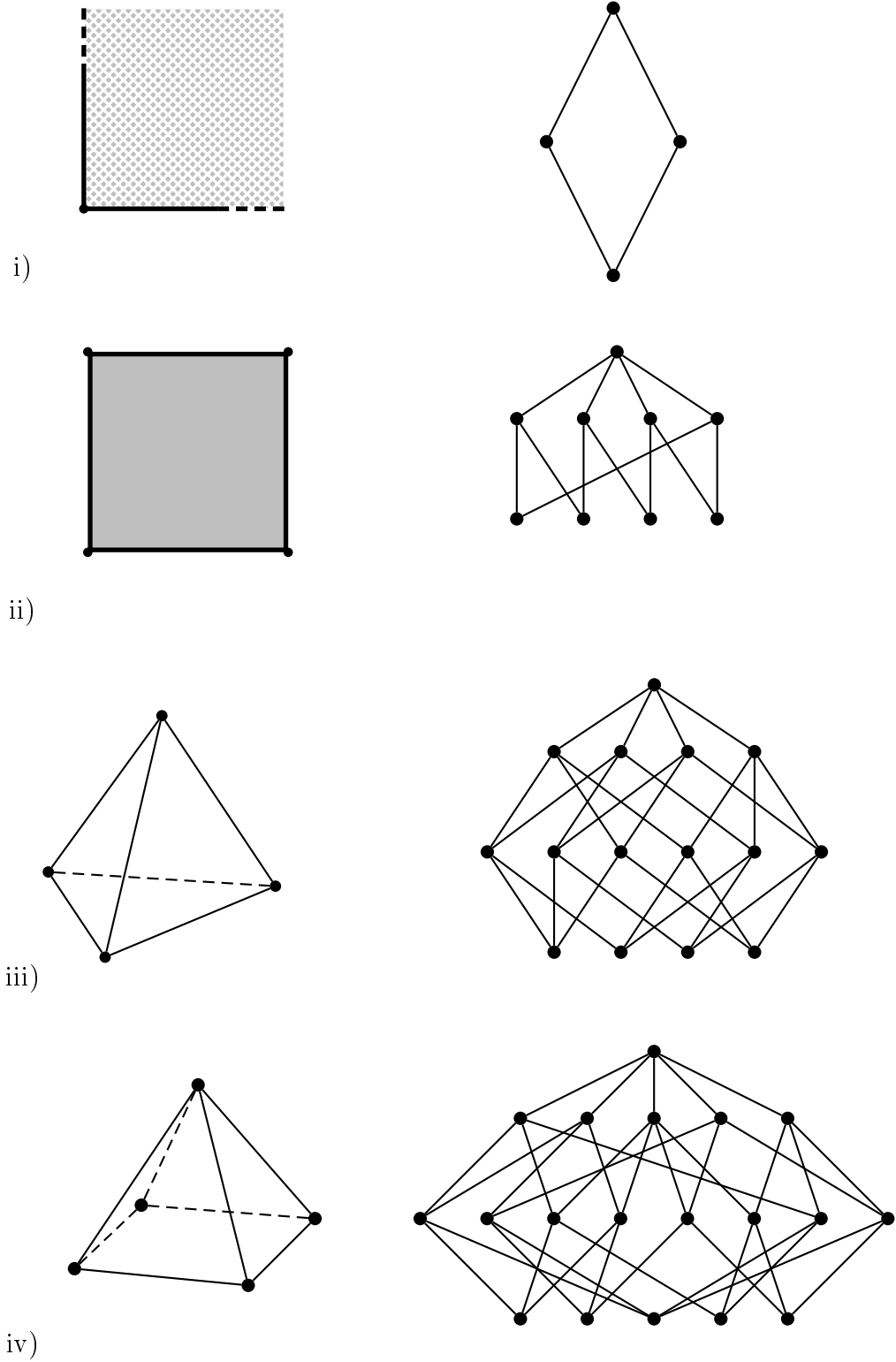


FIGURE 2. Quatre exemples de pseudo-variétés stratifiées et du diagramme de Hasse de leur stratification naturelle : i) un coin, ii) un carré, iii) un tétraèdre et iv) une pyramide à base carrée.

2.1. Diagramme de Hasse d'une stratification

Une description classique d'un poset consiste à représenter son diagramme de Hasse. Soit (X, S, N) une pseudo-variété stratifiée, s et t deux strates de S . On dira que t *couvre* s si $s < t$ et si aucun élément u de S ne vérifie $s < u < t$. On appellera (s, t) une paire couvrante de S .

Le diagramme de Hasse de la stratification est le graphe dont les sommets sont les éléments de S , et les arêtes sont ses paires couvrantes.

Il est d'usage de représenter le diagramme de Hasse de telle façon que si t couvre s , le sommet t soit situé à un niveau supérieur à celui du sommet s . On peut noter par ailleurs qu'une strate n'admet pas en général de strate couvrante, et que la profondeur de la stratification se lit particulièrement aisément sur ce diagramme.

2.2. Groupoïde d'une stratification

Nous proposons une description alternative de l'espace des strates S , à l'aide d'un groupoïde canoniquement associé à la stratification. Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence induite par \leq sur S :

$$\forall i, j \in I, s_i \mathcal{R} s_j \iff s_i \leq s_j \text{ ou } s_j \leq s_i$$

Le groupoïde G_S de la stratification est alors le graphe de la relation \mathcal{R} :

$$G_S = \{(i, j) \in I^2 / s_i \leq s_j \text{ ou } s_j \leq s_i\}$$

G_S est canoniquement muni d'une structure de groupoïde sur S .

L'inverse et la composition sont donnés par :

$$(i, j)^{-1} = (j, i)$$

$$(i, j) \cdot (j, k) = (i, k)$$

L'espace des unités est canoniquement identifié à S :

$$G_S^{(0)} = \{(i, i) \in I^2 / i \in I\}$$

$$u : \begin{cases} S & \rightarrow G_S^{(0)} \\ s_i & \rightarrow (i, i) \end{cases}$$

Enfin les applications source et but sont définies naturellement par :

$$s((i, j)) = s_i$$

$$r((i, j)) = s_j$$

G_S est engendré par la famille $\{(i, j) \in I^2 / s_i \leq s_j\}$.

2.3. Algèbre de convolution et C^* -algèbre de la stratification

La condition de finitude locale imposée à la stratification induit une topologie discrète sur G_S qui peut être vu comme un groupoïde de Lie discret. Il admet en particulier un système de Haar discret $(\mu_x)_{x \in G_S^{(0)}}$, une algèbre de convolution $C_c^\infty(G_S)$ et une C^* -algèbre réduite $C_r^*(G_S)$ trivialement discrètes. Le résultat suivant précise la structure de ces deux algèbres pour une stratification finie :

PROPOSITION 2.1. *Lorsque S est un ensemble fini, les algèbres $C_c^\infty(G_S)$ et $C_r^*(G_S)$ coïncident et sont isomorphes à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_{|S|}(\mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION. La trivialité de la topologie conduit immédiatement à l'identification de $C_c^\infty(G_S)$ et $C_r^*(G_S)$. Par ailleurs en notant γ_{ij} un élément (i, j) de G_S , et $i \sim j$ si $s_i \leq s_j$ ou $s_j \leq s_i$, on a :

$$(f * g)(\gamma_{ik}) = \sum_{i \sim j \sim k} f(\gamma_{ij})g(\gamma_{jk})$$

On reconnaît alors la loi de composition matricielle usuelle.

□

REMARQUE 2.2. Ce résultat s'applique en particulier lorsque X est un espace compact.

2.4. Fonction zêta et algèbre d'incidence de la stratification

L'inversibilité des éléments de G_S traduit la réflexivité de \mathcal{R} et la non-orientation du graphe qui la représente.

Un élément fondamental de $C_r^*(G_S)$ permet cependant d'accéder à l'orientation de la stratification. Cet élément, dénommé classiquement *fonction zêta* pour un poset, est la fonction indicatrice de la relation \leq :

$$\zeta_S(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\gamma) \leq r(\gamma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ζ_S appartient à la sous-algèbre de $C_r^*(G_S)$ notée $\mathcal{A}(G_S)$, qui peut être vue comme l'espace des fonctions définies sur le graphe de \leq , en tant qu'ensemble de paires ordonnées :

$$\mathcal{A}(G_S) = \{f \in C_r^*(G_S) / \text{Ker} \zeta_S \subset \text{Ker} f\}$$

On retrouve en $\mathcal{A}(G_S)$ l'algèbre d'incidence de la stratification.

PROPOSITION 2.3. $f \in \mathcal{A}(G_S)$ est inversible $\iff 0 \notin f(G_S^{(0)})$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathcal{A}(G_S)$ et $\gamma \in G_S$ tel que $s(\gamma) > r(\gamma)$. Alors $\gamma \in \text{Ker} f$ par définition de $\mathcal{A}(G_S)$ et la matrice de f est donc triangulaire supérieure, inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

□

En particulier, ζ_S est inversible dans $\mathcal{A}(G_S)$. Son inverse μ_S est appelée *fonction de Möbius*.

EXEMPLE 2.4. Exemple : Soient f et g des fonctions définies sur S et liées par la relation $f(s_j) = \sum_{s_i \leq s_j} g(s_i)$. Une inversion matricielle de ζ_S fournit immédiatement la relation :

$$g(s_j) = \sum_{s_i \leq s_j} \mu((i, j))g(s_i)$$

L'analogie avec la formule d'inversion de Möbius en arithmétique justifie la terminologie employée.

Un développement lumineux en ouverture de [Con94] interprète l'introduction par Heisenberg de la mécanique des matrices comme la substitution conceptuelle d'un groupoïde au groupe des fréquences des raies spectrales d'un atome. Cette avancée capitale pour la physique quantique, guidée par la loi empirique de Ritz-Rydberg en spectroscopie, implique l'abandon de la simple structure d'espace au profit de structures plus élaborées, et constitue l'origine historique même de la démarche suivie en géométrie non-commutative.

Il est réjouissant de voir apparaître dans le contexte purement géométrique des variétés stratifiées le groupoïde $\Delta = \{(i, j) / i, j \in I\}$ ([Con94] p.38) constitutif d'une observable quantique. La proposition suivante délimite l'espace des variétés stratifiées « classiques », pour lesquelles le groupoïde G_S se réduit à son espace des unités :

PROPOSITION 2.5. Soit $\underline{X} = (X, S, N)$ une pseudo-variété stratifiée. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) G_S est un espace isomorphe à S
- ii) $C_r^*(G_S)$ est une algèbre commutative
- iii) \underline{X} est de profondeur nulle
- iv) $\forall s \in S, s$ est une union de composantes connexes de X
- v) $\zeta_S = \mathbf{1}_{G_S^{(0)}}$

$$\text{vi) } C_r^*(G_S) = \mathcal{A}(G_S)$$

DÉMONSTRATION. $i) \Leftrightarrow ii)$: L'espace des unités de G_S est canoniquement isomorphe à S . $C_r^*(G_S)$ se réduit donc à l'algèbre commutative $C^0(S)$ lorsque G_S est un espace. S'il existe au contraire $i, j \in I / s_i < s_j$, la sous-algèbre de $C_r^*(G_S)$ des fonctions à support dans $\begin{pmatrix} \gamma_{ii} & \gamma_{ij} \\ \gamma_{ji} & \gamma_{jj} \end{pmatrix}$ est isomorphe à l'algèbre non-commutative $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$i) \Leftrightarrow iii)$: L'existence de $i, j \in I / s_i < s_j$ équivaut à la positivité stricte de la profondeur de la stratification.

$iii) \Leftrightarrow iv)$: Si $\text{depth}(\underline{X}) = 0$ alors toute strate s_i de S vérifie $\forall s_j \neq s_i, s_i \cap \overline{s_j} = \emptyset$ donc s_i est à la fois ouverte et fermée dans X , i.e. s_i est une union de composantes connexes de X . La réciproque est immédiate.

$i) \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow vi)$: immédiat par définition de ζ_S et $\mathcal{A}(G_S)$.

□

2.5. Produit de stratifications et stabilité fonctorielle

Soient $\underline{X} = (X, S_X, N_X)$ et $\underline{Y} = (Y, S_Y, N_Y)$ deux pseudo-variétés stratifiées. Leur produit $(X \times Y, S_{X \times Y}, N_{X \times Y})$ est naturellement défini dans la catégorie des variétés faiblement stratifiées :

- (1) l'espace topologique sous-jacent est $X \times Y$.
- (2) La famille des strates est $S_{X \times Y} = S_X \times S_Y$.
- (3) La famille des tubes $N_{X \times Y} = (\mathcal{N}_{X \times Y}, \pi_{X \times Y}, \rho_{X \times Y})$ est constituée à partir des relations :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{X \times Y} = \mathcal{N}_X \times \mathcal{N}_Y \\ \pi_{X \times Y}(a, b) = (\pi_X(a), \pi_Y(b)) \\ \rho_{X \times Y}(a, b) = \rho_X(a) + \rho_Y(b) \end{cases}$$

Il est direct de constater que les données de contrôle vérifient les hypothèses de stratification faible. La stabilité par produit ne subsiste cependant pas dans la catégorie des variétés stratifiées, soumises à la condition $\rho_s \circ \pi_t = \rho_s$ pour toutes strates s, t telles que $s < t$. La situation est plus précisément la suivante :

PROPOSITION 2.6 ([Ver84] 1.2.9). $(X \times Y, S_{X \times Y}, N_{X \times Y})$ est une pseudo-variété stratifiée si et seulement si \underline{X} ou \underline{Y} est de profondeur nulle.

Une conséquence de ce résultat est que la non-commutativité des espaces de strates représente une obstruction à l'existence d'un produit

compatible avec la transformation fonctorielle $\rho_{X \times Y}(a, b) = \rho_X(a) + \rho_Y(b)$. Conserver simultanément cette relation et la stabilité par produit dans la catégorie des variétés stratifiées s'avère impossible. La plus grande sous-catégorie dans laquelle ces deux propriétés sont conjointement valides n'est autre que la catégorie des variétés stratifiées « classiques », pour lesquelles l'espace des strates est commutatif.

Le résultat suivant fournit une alternative autorisant à travailler avec des produits de variétés stratifiées :

PROPOSITION 2.7. *Il existe une famille de tubes $\tilde{N}_{X \times Y}$ telle que $(X \times Y, S_{X \times Y}, \tilde{N}_{X \times Y})$ soit une pseudo-variété stratifiée.*

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur la profondeur d de $S_{X \times Y}$. Si $d=0$, la proposition précédente permet de conclure. Supposons $d > 0$. La restriction de $X \times Y$ à ses strates de profondeur $< d$ fournit une famille de tubes $N^{d-1} = (\mathcal{N}^{d-1}, \pi^{d-1}, \rho^{d-1})$. Notons s et t deux strates respectives de \underline{X} et \underline{Y} telles que $s \times t$ soit de profondeur d . Il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{N}}_{s \times t}$ de $\mathcal{N}_s \times \mathcal{N}_t$ sur lequel la fonction lisse suivante est définie :

$$\tilde{\rho}_{s \times t}(u, v) = \begin{cases} \rho_s^{d-1}(u, v) & \text{si } \rho_s^{d-1}(u, v) \geq \rho_t^{d-1}(u, v)/2 \\ \rho_t^{d-1}(u, v) & \text{si } \rho_t^{d-1}(u, v) \geq \rho_s^{d-1}(u, v)/2 \\ z & \text{racine d'une fonction de transition } g(u, v, z) \end{cases}$$

avec par exemple $g(u, v, z) = (\rho_s^{d-1}(u, v) - \frac{z}{2})^2 + (\rho_t^{d-1}(u, v) - \frac{z}{2})^2 - \frac{z^2}{2}$. On pose alors $\tilde{\pi}_{s \times t} = (\pi_s, \pi_t)$ et pour toute strate s de profondeur $< d$,

$$\tilde{\mathcal{N}}_s = \bigcap_{s' < s} \{x \in \mathcal{N}^{d-1}, \rho_s^{d-1}(x) < \rho_{s'}(x)\}.$$

Il est alors aisé de vérifier que la famille de tubes $\tilde{N}_{X \times Y} = \{(\tilde{\mathcal{N}}_s, \tilde{\pi}_s, \tilde{\rho}_s)\}_{s \in S_{X \times Y}}$ satisfait les propriétés de stratification forte.

□

• • •

3 Fonctions lisses et champs de vecteurs

Les classes de fonctions et de champs de vecteurs contrôlés, définies dans [Ver84], présentent de fortes contraintes au voisinage des strates, qui requièrent notamment localement la constance le long des fibres des rétractions. Il est pourtant souhaitable dans de nombreuses situations

géométriques de considérer des hypothèses de rigidité moindres, qui autorisent en particulier une composante normale aux strates évanescence à la limite uniquement.

Une définition alternative de l'algèbre des fonctions lisses d'une variété stratifiée, ainsi que des champs de vecteurs associés est proposée. Les objets seront considérés comme lisses sur la variété stratifiée s'ils proviennent d'objets lisses sur un plongement de la variété, au travers d'une application « pushforward » associée. Les définitions de ces objets lisses sont détaillées ci-dessous, après un bref rappel des objets contrôlés utilisés par Verona, initialement définis par Mather [Mat70].

3.1. Objets contrôlés

$\underline{X} = (X, S_X, N_X)$ et $\underline{Y} = (Y, S_Y, N_Y)$ désigneront dans cette partie deux pseudo-variétés faiblement stratifiées.

DÉFINITION 3.1 (Morphismes de stratifications, [Ver84] 1.2.4). Un *morphisme faible* entre \underline{X} et \underline{Y} est une application continue $f : X \rightarrow Y$ satisfaisant les conditions suivantes pour toute strate $s \in S_X$:

- stabilité : $\exists t \in S_Y / f(s) \subset t$
 - différentiabilité : $f|_s : s \rightarrow f(s)$ est une fonction lisse
 - compatibilité : \exists ouvert $\Omega \supset s / \forall x \in \Omega \cap \mathcal{N}_s, \pi_{f(s)} \circ f(x) = f \circ \pi_s(x)$
- f sera un *morphisme* si par ailleurs :

$$\forall x \in \Omega \cap \mathcal{N}_s, \rho_s(x) = \rho_{f(s)} \circ f(x).$$

DÉFINITION 3.2 (Fonctions contrôlées, [Ver84] 1.2.8). Soit M une variété lisse. Une fonction *contrôlée* de \underline{X} vers M est un morphisme faible entre \underline{X} et \underline{M} .

DÉFINITION 3.3 (Champs de vecteurs contrôlés, [Ver84] 2.1). Un champ de vecteur faiblement contrôlé sur \underline{X} est une famille $\xi = (\xi_s)_{s \in S_X}$ telle que pour toute strate $s \in S_X$:

- $s \ni x \rightarrow \xi(x) \in T_x s$ soit un champ de vecteur lisse sur s
 - \exists ouvert $\Omega \supset s / \forall t \in S_X, s < t$ and $x \in \Omega \cap \mathcal{N}_t, d\pi_s \cdot \xi(x) = \xi(\pi_s(x))$
- ξ sera dit *contrôlé* si par ailleurs :

$$\forall x \in \Omega \cap \mathcal{N}_t, d\rho_s \cdot \xi(x) = 0.$$

On voit ici apparaître la condition de constance locale le long des fibres de π_s .

3.2. Désingularisation et variétés à coins fibrées

Soit \underline{X} une pseudo-variété stratifiée de profondeur k . Si s est une strate singulière de \underline{X} , on introduit une structure naturelle de pseudo-variété stratifiée sur le link $L_s \doteq \rho_s^{-1}(1)$ ainsi que sur le *mapping cone* ouvert de (L_s, π_s) :

$$c_{\pi_s}L_s = L_s \times [0, +\infty[/ \sim \pi_s$$

où $(l, t) \sim_{\pi_s} (l', t')$ si et seulement si $(l, t) = (l', t')$ ou $t = t' = 0$ et $\pi_s(l) = \pi_s(l')$. On note $[l, t]$ la classe dans $c_{\pi_s}L_s$ de (l, t) .

Les travaux fondamentaux de Thom [Tho69] et Mather [Mat70] ont montré que les pseudo-variétés stratifiées sont localement triviales au voisinage de leurs strates : il existe des données de contrôle sur \underline{X} et une rétraction continue $f_s : \mathcal{N}_s \setminus s \rightarrow L_s$ telles que l'application

$$\begin{aligned} \Psi_s : \mathcal{N}_s &\rightarrow c_{\pi_s}L_s \\ z &\rightarrow \begin{cases} [f_s(z), \rho_s(z)] & \text{si } z \notin s \\ z & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

soit un isomorphisme de variétés stratifiées.

Cette trivialité locale permet d'appliquer le processus de désingularisation à \underline{X} ([BHS91],[DL09] 2.0.3). Il s'agit de substituer L_s à chaque strate minimale s de \underline{X} , et d'obtenir ainsi une variété stratifiée $\underline{2X}$ de profondeur $k - 1$. Si S_0 désigne l'ensemble des strates de profondeur 0, notons $X_b = X \setminus \cup_{s \in S_0} \{z \in X, \rho_s(z) < 1\}$ et $L = \cup_{s \in S_0} \{z \in X, \rho_s(z) = 1\} \subset X_b$. $2X$ est défini en recollant deux copies X_b^\pm de X_b par $L \times [-1, 1]$:

$$2X = X_b^- \cup L \times [-1, 1] \cup X_b^+.$$

Il existe une surjection continue $p : \underline{2X} \rightarrow \underline{X}$ donnée par l'identité sur X_b^\pm et par $p(l, t) = \Psi_s^{-1}([l, |t|])$ pour $(l, t) \in L_s \times [-1, 1]$. Ce processus fournit après k itérations une variété lisse notée \tilde{X} , ainsi qu'une surjection continue $p_k : \tilde{X} \rightarrow \underline{X}$ dont la restriction à $p_k^{-1}(X^o)$ est un revêtement trivial d'ordre 2^k . Il est possible d'obtenir un feuillet de ce revêtement en considérant la restriction de p à la variété à bord $2X^+ = L \times [0, 1] \cup X_b^+$. La désingularisation itérée k fois produit alors une variété à coins \tilde{X}^+ dont les faces sont fibrées par les relations π_s ([DLR11]). Cette construction montre que toute pseudo-variété stratifiée peut-être considérée comme espace quotient d'une variété à coins fibrés. Le cas important des variétés à coins fibrés est étudié en détail au chapitre 2.

3.3. Structure lisse

DÉFINITION 3.4. Une structure lisse sur \underline{X} est un triplet (\underline{X}, j, M) où M est une variété lisse et $j : X \rightarrow M$ un homéomorphisme sur son image, dont la restriction à chaque strate de \underline{X} est un plongement lisse.

Le théorème suivant assure que tout espace stratifié possède une structure lisse :

THÉORÈME 3.5 ([Teu81],[Gor]). *Pour tout espace stratifié (X, S, N) de dimension finie, il existe $n \in \mathbb{N}$, un ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $j : X \rightarrow F$ tel que :*

- pour toute strate $s \in S$, $j|_s$ soit un plongement lisse,
- pour toute fonction contrôlée $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ j^{-1}$ soit une fonction lisse,
- l'image $\{j(s), s \in S\}$ soit une stratification de Whitney de F .

Rappelons que si V et W sont deux sous-variétés d'une variété M , x un point de V et (y_k) une suite d'éléments de W qui converge vers x , et telle que $T_{y_k}W$ converge vers un sous-espace vectoriel τ de T_xM , la condition (A) de Whitney s'exprime par $T_xV \subset \tau$. La condition (B) impose que les droites $(x_k y_k)$ convergent dans une carte locale vers une droite $d \in T_xM$ et que $d \subset \tau$. La condition (B) implique la condition (A) [Whi47]. La stratification $\{j(s), s \in S\}$ du théorème précédent vérifie en particulier la propriété (B) de Whitney.

La donnée d'une structure lisse sur \underline{X} permet de définir les objets lisses associés : fonctions, espace tangent et champs de vecteurs. On suppose dans la suite une telle structure (\underline{X}, j, M) fixée.

DÉFINITION 3.6 (Fonctions lisses). Pour toute fonction $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, posons $\tilde{f}_! = \tilde{f} \circ j$. L'algèbre des fonctions lisses sur \underline{X} est définie par :

$$C_{\underline{X}}^\infty = \{f \in C^0(X) / \exists \tilde{f} \in C^\infty(M), f = \tilde{f}_!\}$$

REMARQUE 3.7. Cette définition est équivalente à demander l'existence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\ j \uparrow & \nearrow f & \\ X & & \end{array}$$

REMARQUE 3.8. L'application

$$! : \begin{cases} C^\infty(M) & \rightarrow & C^0(X) \\ \tilde{f} & \rightarrow & \tilde{f}_! \end{cases}$$

est clairement un morphisme d'anneau, qui induit sur $C^0(X)$ une structure de $C^\infty(M)$ -module. L'algèbre des fonctions lisses sur \underline{X} est par définition l'image de ce morphisme $C^\infty_{\underline{X}} = !C^\infty(M)$.

REMARQUE 3.9. L'inclusion $C^\infty_{\underline{X}} \subset C^0(X)$ induit sur $C^\infty_{\underline{X}}$ une structure de $C^\infty(M)$ -module.

L'espace tangent sur \underline{X} est obtenu en considérant le diagramme suivant sur chaque strate s de \underline{X} :

$$\begin{array}{ccccc} j^*i_M^*(TM) & \xrightarrow{dj} & i_M^*(TM) & \xrightarrow{di_M} & TM \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & \xrightarrow{j} & \hat{s} \doteq j(s) & \xrightarrow{i_M} & M \end{array}$$

où i_M désigne l'inclusion dans M .

Bien sûr $i_M^*(TM) = T_{\hat{s}}M$ et dj est un isomorphisme entre Ts et $T\hat{s}$. Posons $T^sM = j^*(i_M^*(TM))$. Le sous-fibré vectoriel $j^*(T\hat{s}) \subset T^sM$ est canoniquement identifiable à Ts par dj .

DÉFINITION 3.10 (Espace tangent). On définit l'espace tangent de \underline{X} comme l'espace :

$$T^X M = \bigcup_{s \in S_X} T^s M.$$

La projection canonique $TM \xrightarrow{p} M$ induit sur $T^X M$ une projection $T^X M \xrightarrow{p^*} X$ définie sur chaque strate par $p^* = j^{-1} \circ p \circ dj$. On munit $T^X M$ de la topologie induite par p^* .

PROPOSITION 3.11. $T^X M$ est un fibré vectoriel sur X dont la restriction à chaque strate est un fibré lisse.

DÉMONSTRATION. Soit (Ω, ϕ) une trivialisaton locale du fibré vectoriel $TM \xrightarrow{p} M$. Soit $U = j^{-1}(\Omega)$ et $\psi : U \times \mathbb{R}^{\dim M} \rightarrow T^X_U M$ définie par $\psi(x, v) = j^*(\phi(j(x), v))$. La continuité de j permet de vérifier que (U, ψ) est une trivialisaton locale de $T^X M$, qui est donc un fibré vectoriel. La lissité sur chaque strate est immédiate par définition de $T^s M$.

□

DÉFINITION 3.12 (Champs de vecteurs lisses). Pour tout champ de vecteur $\tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM)$, posons $\tilde{\eta}_l = j^*(\tilde{\eta} \circ j)$. Les champs de vecteurs lisses sur \underline{X} sont alors définis par :

$$C^\infty(X, T^X M) = \{ \eta \in C^0(X, T^X M) / \exists \tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM), \eta = \tilde{\eta}_l \}$$

REMARQUE 3.13. Cette définition est équivalente à demander l'existence du diagramme commutatif suivant pour chaque strate :

$$\begin{array}{ccc} T^s M & \xleftarrow{dj^{-1}} & T_{\hat{s}} M \\ \eta \uparrow & & \uparrow \tilde{\eta} \\ s & \xrightarrow{j} & \hat{s} \end{array}$$

REMARQUE 3.14. $C_{\underline{X}}^\infty \subset C^0(X)$ agit sur $C^0(X, T^X M)$ par multiplication et induit sur $C^0(X, T^X M)$ une structure de $C^\infty(M)$ -module.

L'application

$$! : \begin{cases} C^\infty(M, TM) & \rightarrow & C^0(X, T^X M) \\ \tilde{\eta} & \rightarrow & \tilde{\eta}! \end{cases}$$

est clairement un morphisme de $C^\infty(M)$ -module, de noyau

$$\{\tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM) / \tilde{\eta}_{j(X)} = 0\}.$$

Les champs de vecteurs lisses sur \underline{X} sont par définition l'image de ce morphisme $C^\infty(X, T^X M) = !C^\infty(M, TM)$.

REMARQUE 3.15. Le flot engendré par l'image dans TM des sections de $T^X M$ ne stabilise pas en général les strates de $j(X)$. En ce sens, un champ de vecteur lisse n'autorise donc pas toujours une exponentiation sur \underline{X} .

3.4. Champs de vecteurs stratifiés

PROPOSITION 3.16. Soit $\chi_M = \{\tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM) / \forall s \in S_X, \tilde{\eta}_{\hat{s}} \in T\hat{s}\}$. χ_M est un $C^\infty(M)$ -module de $C^\infty(M, TM)$ stable par crochet de Lie.

DÉMONSTRATION. Soient $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ et $\tilde{\eta} \in \mathcal{F}$. Soient $s \in S_X$ et $x \in \hat{s}$, alors $\tilde{\eta}(x) \in T_x \hat{s}$ et par suite $\tilde{f}(x)\tilde{\eta}(x) \in T_x \hat{s}$. Ainsi χ_M est bien un $C^\infty(M)$ -module.

Par ailleurs si $\tilde{\eta}$ et $\tilde{\nu}$ sont deux éléments de χ_M , $\tilde{\eta}|_{\hat{s}}$ et $\tilde{\nu}|_{\hat{s}}$ définissent des éléments de $C^\infty(\hat{s}, T\hat{s})$ et leur crochet appartient donc à $C^\infty(\hat{s}, T\hat{s})$. Ainsi $[\tilde{\eta}, \tilde{\nu}]|_{\hat{s}} \in T\hat{s}$ et χ_M est bien stable par crochet de Lie.

□

DÉFINITION 3.17 (Champs de vecteurs stratifiés). Un champ de vecteur stratifié sur \underline{X} est un champ de vecteur lisse tangent aux strates de \underline{X} . On note $\chi_{\underline{X}}$ l'ensemble des champs de vecteurs stratifiés :

$$\chi_{\underline{X}} = \{\eta \in C^\infty(X, T^X M) / \forall s \in S_X, x \in s, \eta(x) \in T_x s\}.$$

REMARQUE 3.18. Les champs de vecteurs stratifiés sur \underline{X} sont l'image par $!$ du $C^\infty(M)$ -module $\chi_M : \chi_{\underline{X}} = !\chi_M$.

PROPOSITION 3.19. $\chi_{\underline{X}}$ est un $C_{\underline{X}}^\infty$ -module et une algèbre de Lie.

DÉMONSTRATION. Le premier point est immédiat d'après la remarque précédente.

Pour le deuxième point, définissons le crochet de Lie par $[\eta, \nu] = j^*([\tilde{\eta}, \tilde{\nu}])$ où $\tilde{\eta}_i = \eta$ et $\tilde{\nu}_i = \nu$. Pour tout $s \in S_X, x \in s, \tilde{\eta}(j(x))$ et $\tilde{\nu}(j(x))$ appartiennent à $T\hat{s}$, ainsi que leur crochet. La stabilité de $[\cdot, \cdot]$ sur $\chi_{\underline{X}}$ en découle.

□

REMARQUE 3.20. La définition du crochet de Lie sur $\chi_{\underline{X}}$ fait de l'application $! : \chi_M \rightarrow \chi_{\underline{X}}$ un morphisme d'algèbre de Lie.

La définition des champs de vecteurs stratifiés retenue ici rejoint l'approche de M.-H. Schwartz dans le sens où un élément de $\chi_{\underline{X}}$ est considéré de manière prépondérante par l'action de son flot, et l'étude des difféomorphismes locaux associés. Lorsque X est analytique complexe, les définitions de champs de vecteurs stratifiés coïncident.

3.5. Flot des champs de vecteurs stratifiés

Rappelons qu'un flot sur un espace métrique X est une application continue $\varphi : J \rightarrow X, (x, t) \mapsto \varphi(x, t) = \varphi_x(t)$ définie sur un ouvert $J \subset X \times \mathbb{R}$ et qui satisfait les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout $x \in X$ il existe t_x^-, t_x^+ avec $-\infty \leq t_x^- < 0 < t_x^+ \leq +\infty$ tels que $J_x \doteq J \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ soit égal à l'intervalle $]t_x^-, t_x^+[$.
- (2) Pour tout $x \in X$ la relation $\varphi_x(0) = x$ est vérifiée.
- (3) Si $t \in J_x$ et $s \in J_{\varphi_x(t)}$ alors $t+s \in J_x$ et $\varphi_x(t+s) = \varphi(\varphi_x(t), s)$.

L'ensemble des flots sur X est muni d'une relation d'ordre définie par $\varphi \leq \varphi'$ lorsque les flots $\varphi : J \rightarrow X$ et $\varphi' : J' \rightarrow X$ satisfont $J \subset J'$ et $\varphi(x, t) = \varphi'(x, t)$ pour tout $(x, t) \in J$. Lorsque $X \subset M$ est une sous-variété de M et $V : X \rightarrow TM$ un champ de vecteur lisse tangent à X , le résultat classique d'existence et d'unicité d'une équation différentielle ordinaire assure l'existence d'un unique flot maximal $\varphi : J \rightarrow X$ tel que pour tout $x \in X$ et $t \in J_x$

$$(FI) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_x(t) = V(\varphi_x(t)) \text{ et } \varphi_x(0) = x.$$

Lorsque X est une variété stratifiée immergée dans M se pose la question de l'existence d'un flot φ associé à un champ de vecteur stratifié V , de telle sorte que la relation (FI) soit vérifiée.

Il importe par ailleurs que la famille $\{\varphi_x\}$ soit compatible avec la stratification de X , c'est à dire que les courbes intégrales issues des points d'une strate restent incluses dans la strate. Cette condition de stabilité justifie la définition suivante :

DÉFINITION 3.21 (Flot intégral d'un champ de vecteur stratifié). Un flot $\varphi : J \rightarrow X$ sur la variété stratifiée \underline{X} est dit stratifié si pour tout élément (x, t) de J tel que x soit dans s , $\varphi_x(t)$ soit aussi dans s .

Si V est un champ de vecteur stratifié sur \underline{X} , on appelle flot intégral de V un flot stratifié $\varphi : J \rightarrow X$ tel que pour toute strate $s \in S_X$ les courbes $\{\varphi_x\}_{x \in s}$ soient lisses et que pour tout $(x, t) \in J \cap (s \times \mathbb{R})$ la condition (FI) soit satisfaite.

Le résultat suivant est sans difficulté mais important :

PROPOSITION 3.22. *Tout champ de vecteur stratifié $V \in \chi_{\underline{X}}$ admet un unique flot intégral maximal.*

DÉMONSTRATION. Soit V un champ de vecteur stratifié sur \underline{X} et \tilde{V} un champ de vecteur lisse sur M tel que $\tilde{V}|_X = V$. Notons $\tilde{\varphi} : \tilde{J} \rightarrow M$ le flot intégral maximal de \tilde{V} , et $J = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}, (j(x), t) \in \tilde{J}\}$. On définit $\varphi : J \rightarrow X$ par $\varphi(x, t) = j^{-1} \circ \tilde{\varphi}(j(x), t)$ et on souhaite montrer que φ est l'unique flot intégral maximal de V .

La maximalité provient du fait que si un autre flot $\varphi' : J' \rightarrow X$ vérifie $\varphi' \geq \varphi$, son image par l'homéomorphisme j définit un flot $\tilde{\varphi}' \geq \tilde{\varphi}$, et la maximalité de $\tilde{\varphi}$ implique $\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}$ et $\varphi' = \varphi$. Un argument similaire permet d'obtenir l'unicité du flot φ .

Par définition V vérifie sur toute strate s de X la condition $V|_s \in Ts$, donc $\tilde{V}|_{\hat{s}} \in T\hat{s}$ ce qui assure l'existence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ts & \xrightarrow{dj} & T\hat{s} \\ \uparrow V|_s & & \uparrow \tilde{V}|_{\hat{s}} \\ s & \xrightarrow{j} & M \end{array}$$

Le fait que le flot φ soit stratifié, que les courbes $\{\varphi_x\}_{x \in s}$ soient lisses et que pour tout $(x, t) \in J \cap (s \times \mathbb{R})$ la condition (FI) soit satisfaite en découle immédiatement.

Ainsi φ est bien l'unique flot intégral maximal de V .

□

CHAPITRE 6

Feuilletages singuliers - Groupoïde d'holonomie

Une variété feuilletée est une variété partitionnée en sous-variétés immergées, appelées feuilles. Une telle partition présente génériquement des singularités lorsque la dimension des feuilles varie. Les feuilletages de Stefan-Sussmann ont pour feuilles des sous-variétés intégrales de modules champs de vecteurs localement de type fini et intégrables. On dispose en particulier pour ces feuilletages d'une construction générale [AS06] permettant d'obtenir le groupoïde d'holonomie qui les intègre. On étend ici cette construction dans le cadre des pseudo-variétés stratifiées.

• • •

1 Feuilletages de Stefan-Sussmann

1.1. Feuilletages de Stefan

Un feuilletage de Stefan sur une variété lisse M est une partition de M par des sous-variétés connexes immergées telles que si $(x, v) \in TM$ est un vecteur tangent en x à la feuille F_x passant par x , il existe un champ de vecteur local V sur M tel que :

- (1) x est dans le domaine de V et $V_x = v$,
- (2) pour tout y dans le domaine de V , (y, V_y) appartient à l'espace tangent TF_y à la feuille F_y passant par y .

EXEMPLE 1.1. La partition de \mathbb{R}^2 par les droites horizontales sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ et les points sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un feuilletage de Stefan. La partition de \mathbb{R}^2 par les points sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ et la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ n'est pas un feuilletage de Stefan.

1.2. Théorème de Stefan-Sussmann

L'espace $C_c^\infty(M, TM)$ des champs de vecteurs à support compact sur M est un $C^\infty(M)$ -module projectif localement de type fini. Rappelons

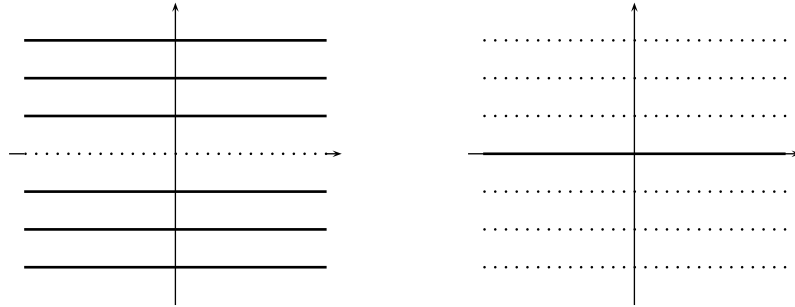


FIGURE 1. Deux feuilletages de \mathbb{R}^2 , respectivement de Stefan et non de Stefan.

qu'un sous-module de $C_c^\infty(M, TM)$ est dit *intégrable* s'il est stable par crochet de Lie.

Soit \mathcal{F} un sous-module de $C_c^\infty(M, TM)$ et x un point de M . Notons $e_x : \mathcal{F} \rightarrow T_x M$ l'évaluation de \mathcal{F} en x . On distingue deux notions de fibre pour \mathcal{F} au point x :

- les vecteurs tangents à \mathcal{F} sont l'image $F_x = e_x(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} dans $T_x M$ et définissent un sous-espace vectoriel de $T_x M$
- la fibre $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}/I_x \mathcal{F}$ où $I_x = \{f \in C^\infty(M), f(x) = 0\}$.

L'existence d'une partition de M en sous-variétés dont les espaces tangents coïncident avec les images F_x de \mathcal{F} en tout point x est donnée par le théorème de Stefan-Sussman :

THÉORÈME 1.2 ([Ste74, Sus73]). *Soit \mathcal{F} un sous-module intégrable de $C_c^\infty(M, TM)$, localement de type fini. Alors il existe une partition de M en sous-variétés connexes dont l'espace tangent en tout $x \in M$ est F_x .*

Le théorème de Stefan-Sussman est donc une généralisation aux distributions de rang non constant du théorème de Frobenius, qui énonce qu'un sous-fibré F de TM définit un feuilletage régulier sur M si et seulement si F est intégrable.

1.3. Feuilletages de Stefan-Sussmann

Contrairement au cas régulier, la connaissance de la partition en feuilles ne détermine plus un unique module de champs de vecteurs tangents. Un exemple simple est le feuilletage de Stefan de \mathbb{R} par $\mathbb{R}^-, \{0\}$ et \mathbb{R}^+ : ses feuilles sont les variétés intégrales de chacun des modules $\mathcal{F}_k = \langle x^k \frac{\partial}{\partial x} \rangle$, bien que tous ces modules soient distincts.

Il convient donc dans le cadre singulier d'inclure le module spécifique \mathcal{F} définissant le feuilletage :

DÉFINITION 1.3. Un feuilletage de Stefan-Sussmann sur M est la donnée d'une partition en sous-variétés connexes et d'un sous-module intégrable de $C_c^\infty(M, TM)$ localement de type fini associé.

Les résultats précédents permettent d'adopter pour définition d'un feuilletage singulier l'énoncé suivant :

DÉFINITION 1.4 ([AS06]). Un feuilletage sur M est un sous-module intégrable de $C_c^\infty(M, TM)$ localement de type fini.

EXEMPLE 1.5. Rappelons qu'un algébroïde de Lie sur M est la donnée d'un fibré vectoriel $A \rightarrow M$, d'un crochet $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ sur le module $\Gamma(A)$ des sections de A et d'un morphisme de fibré $p : A \rightarrow TM$ appelé *ancree* ou *fléchage* (voir section 3.1.2).

Tout algébroïde de Lie définit un feuilletage par l'image de son ancree $p(C_c^\infty(M, A))$. En particulier tout groupoïde de Lie définit un feuilletage.

EXEMPLE 1.6. Un feuilletage régulier est un sous-fibré F de TM dont les sections forment un algébroïde de Lie, ce qui signifie que $C^\infty(M, F)$ est stable par crochet de Lie. Les sections de $C_c^\infty(M, F)$ forment un feuilletage au sens précédent. De plus $\mathcal{F}_x = F_x$ pour tout $x \in M$, les deux notions de fibre coïncident dans le cas régulier.

• • •

2 Feuilletages singuliers des pseudo-variétés stratifiées

2.1. Stratifications de type fini

DÉFINITION 2.1. Soit \underline{X} une pseudo-variété stratifiée. On dira que \underline{X} est de type fini s'il existe une structure lisse (\underline{X}, j, M) sur \underline{X} dont le module de champs de vecteurs stratifiés $\chi_{\underline{X}}$ associé soit localement de type fini.

La proposition suivante relie les stratifications de type fini aux feuilletages de Stefan-Sussmann :

PROPOSITION 2.2. *Soit (\underline{X}, j, M) une structure lisse sur \underline{X} et soit $\chi_M = \{\tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM) / \forall s \in S_X, \tilde{\eta}_s \in T\hat{s}\}$. Alors $\chi_{\underline{X}}$ est localement de type fini si et seulement si (M, χ_M) est un feuilletage de Stefan-Sussmann.*

DÉMONSTRATION. Si (M, χ_M) est un feuilletage de Stefan-Sussmann, χ_M est localement de type fini. Soit $x \in X$ et ξ_1, \dots, ξ_n des générateurs de χ_M au voisinage de $j(x)$. Alors ξ_1, \dots, ξ_n génèrent $\chi_{\underline{X}}$ au voisinage de x et $\chi_{\underline{X}}$ est bien localement de type fini.

Réciproquement, supposons que (M, χ_M) ne soit pas un feuilletage de Stefan-Sussmann. On a montré en 3.16 que χ_M est toujours un $C^\infty(M)$ -sous-module de $C^\infty(M, TM)$ stable par crochet de Lie, donc χ_M n'est pas localement de type fini. Or $j(X)$ est fermé dans M , donc $M \setminus j(X)$ est ouvert et $\chi_{M|M \setminus j(X)}$ est localement de type fini puisque $\chi_{M|M \setminus j(X)} = C^\infty(M \setminus j(X), TM|_{M \setminus j(X)})$. On en déduit que $\chi_{M|j(X)}$ n'est pas localement de type fini et l'isomorphisme de $C^\infty(M)$ -module $\chi_{\underline{X}} \simeq !\chi_{M|j(X)}$ permet de conclure que $\chi_{\underline{X}}$ n'est pas localement de type fini.

□

2.2. Feuilletages singuliers

DÉFINITION 2.3 (Feuilletage singulier). Soit \underline{X} une pseudo-variété stratifiée de type fini. On appellera feuilletage singulier sur \underline{X} un sous-module intégrable de $\chi_{\underline{X}}$ localement de type fini.

Soit $\mathcal{F} \subset \chi_{\underline{X}}$ un feuilletage singulier de \underline{X} . Considérons le module de champs de vecteurs $\mathcal{F}_M \subset \chi_M$ sur M défini par :

$$\mathcal{F}_M = \{\tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM) , \tilde{\eta}| \in \mathcal{F}\}.$$

PROPOSITION 2.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- a) \mathcal{F} est un feuilletage singulier de \underline{X}
- b) (M, \mathcal{F}_M) est un feuilletage de Stefan-Sussmann

DÉMONSTRATION. L'application $! : \chi_{M|j(X)} \rightarrow \chi_{\underline{X}}$ est par construction de $\chi_{\underline{X}}$ un isomorphisme de $C^\infty(M)$ -module et d'algèbre de Lie. La relation $\mathcal{F} = !\mathcal{F}_M$ implique alors $b) \Rightarrow a)$, tandis que la relation $\mathcal{F}_{M|M \setminus j(X)} = C^\infty(M \setminus j(X), TM|_{M \setminus j(X)})$ sur l'ouvert $M \setminus j(X)$ montre que $\mathcal{F}_M \simeq C^\infty(M \setminus j(X), TM|_{M \setminus j(X)}) + \mathcal{F}$, d'où $a) \Rightarrow b)$.

□

2.3. Exemples

EXEMPLE 2.5 (Le cas lisse). Soit (M, \mathcal{F}) une variété lisse munie d'un feuilletage singulier. \underline{M} est la variété stratifiée constituée de l'unique strate M . Alors $(\underline{M}, M, \text{Id})$ est une structure lisse sur \underline{M} , $\chi_{\underline{M}} = C^\infty(M, TM)$ et \mathcal{F} est un feuilletage singulier de \underline{M} .

EXEMPLE 2.6. Une variété à coins est une stratification de type fini.

Montrons d'abord qu'une variété à coins partitionnée en ses faces ouvertes est une pseudo-variété stratifiée :

PROPOSITION 2.7. *Une variété à coins partitionnée en ses faces ouvertes est une pseudo-variété stratifiée.*

DÉMONSTRATION. Rappelons d'abord comment construire pour toute variété à coins X un plongement $j : X \rightarrow M$ dans une variété lisse M : Toute variété à coins X admet des partitions de l'unité positives (Ω_i, a_i) telles que $\sum_i a_i^2 = 1$ ([Mel96], section 1.6). Le champ de vecteur radial $V = \sum_i a_i^2 \cdot V_i$ exprimé localement dans des cartes $x_i : X \cap \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ par $V_i = \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k}$ est donc bien défini globalement. L'image du flot $\phi : X \times J \rightarrow X$ de V pour des valeurs $t < \epsilon$ suffisamment petites permet d'obtenir un plongement j de X dans la variété $M = X^\circ$ ([Mel96], section 1.14). Le théorème de plongement de Whitney appliqué à M assure par ailleurs l'existence d'une carte globale $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. On veut montrer que la stratification $(j(X), S)$ de $j(X) \subset M$ en ses faces ouvertes vérifie la condition (B) de Whitney. La condition (B) étant indépendante du système de cartes utilisé [Pf01], ceci impliquera l'existence de données de contrôle sur X d'après le théorème de Mather [Mat70]. Soit donc s et t deux faces ouvertes de $j(X)$ telles que $s \subset \bar{t}$, $x \in s$ et $(x_k)_{k \in N}, (y_k)_{k \in N}$ deux suites de points $x_k \in s, y_k \in t$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (1) $x_k \neq y_k$ et $\lim x_k = \lim y_k = x$.
- (2) La suite de droites $\overline{\varphi(x_k)\varphi(y_k)} \subset \mathbb{R}^n$ converge dans l'espace projectif vers une droite l .
- (3) La suite d'espaces tangents $T_{y_k}t$ converge dans la Grassmannienne vers un sous-espace $\tau \subset T_x M$.

Soit k la codimension de x et Ω un voisinage de x dans $j(X)$ difféomorphe à $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dans la carte ϕ . \mathbb{R}_+ est naturellement stratifié par 0 et \mathbb{R}_+^* , avec $\rho_0 = id$ et $\pi_0 = 0$. La proposition 2.7 assure que $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ admet une stratification (S, N) en faces ouvertes, en tant que produit de \mathbb{R}^{n-k} par \mathbb{R}_+^k . La suite $(d\phi(T_{y_k}t))$ est constante et la condition (3) implique que $d\phi(\tau)$ s'identifie à l'espace tangent en un point quelconque de la face ouverte $\phi(t)$. Les conditions (1) et (2) exprimées dans la carte ϕ avec $\phi(y_k) \in \phi(t)$ et $\lim \phi(x_k) = 0$ impliquent alors $l \subset \tau$ ce qui permet de conclure.

□

Montrons ensuite qu'une variété à coins est une stratification de type fini :

DÉMONSTRATION. Il est connu que toute variété à coins est localement une variété à coins plongés ([Me196], section 1.13). Soit $x \in X$ et Ω un voisinage de x diffeomorphe à $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, soient $(V_i, \rho_i)_{i \in [1, k]}$ des fonctions de définition des hyperfaces et $(y_j)_{j \in [1, n-k]}$ des coordonnées de \mathbb{R}^{n-k} telles que $\Omega \stackrel{\varphi}{\simeq} (V_i, \rho_i, y_j)$. L'expression générale d'un champ de vecteur V sur $\varphi(\Omega)$ est

$$V = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \sum a_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad a_i, a_j \in C^\infty$$

et la condition de tangence à chaque V_i , $V \rho_i \in \rho_i C^\infty$ implique $a_i \in \rho_i C^\infty$ d'où :

$$V = \sum^k a_i \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \sum^{n-k} a_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad a_i, a_j \in C^\infty$$

ce qui prouve que χ_X est généré localement par la famille $\{\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$.

□

EXEMPLE 2.8 (Espace de module des 3-sphères non-commutatives). Une sphère non-commutative de dimension n (n impair) est l'espace S dual de la $*$ -algèbre \mathcal{A} générée par les composants U_j^i d'une solution unitaire $U \in \mathcal{M}_d(\mathcal{A})$, $d = 2^{\frac{n-1}{2}}$ de l'équation :

$$\text{ch}_{\frac{k}{2}}(U) = 0, \quad \forall k < n, \quad k \text{ impair}, \quad \text{ch}_{\frac{n}{2}}(U) \neq 0$$

qui généralise au cadre non-commutatif l'annulation des classes de Chern inférieures du générateur de Bott de la K -théorie des sphères S^n .

Connes et Dubois-Violette ont décrit complètement l'espace des sphères non-commutatives de dimension 3 [CDV01], sous la forme d'une famille Σ de déformation à trois paramètres de la sphère S^3 . Σ est feuilleté par une relation d'équivalence identifiant deux éléments S_u^3 et $S_{u'}^3$ qui génèrent une même algèbre quadratique paramétrée par une déformation $\mathbb{R}_u^4 = \mathbb{R}_{u'}^4$, de \mathbb{R}^4 . Ce feuilletage est déterminé par les orbites du flot du champ de vecteur suivant :

$$Z = \sum_{k=1}^3 \sin(2\phi_k) \sin(\phi_l + \phi_m - \phi_k) \frac{\partial}{\partial \phi_k}$$

Σ admet des feuilles singulières constituées de points isolés et de deux familles à 1-paramètre $C_\pm \subset \Sigma$. Sur la partie régulière un élément

S_u^3 génère une algèbre \mathbb{R}_u^4 isomorphe à une algèbre de Sklyanin à deux paramètres, ces algèbres interviennent dans la description des équations de Yang-Baxter. Sur les feuilles singulières un élément S_u^3 génère une algèbre \mathbb{R}_u^4 isomorphe à une déformation à un paramètre \mathbb{C}_θ^2 de \mathbb{C}^2 .

La dimension de Hochschild est préservée sur l'espace Σ des déformations et permet des calculs d'indices selon les méthodes présentées dans la partie 1 (voir exemple 3.2). Le calcul différentiel des triplets spectraux pour les éléments singuliers de Σ est développé dans ([CDV01], section 13). Le cas général est étudié dans [CDV05]. Cet exemple souligne l'importance de disposer d'outils généraux d'étude des feuilletages singuliers.

EXEMPLE 2.9 (Feuilletage maximal et feuilletage trivial). Soit \underline{X} une pseudo-variété stratifiée de type fini. Alors $\mathcal{F} = \chi_{\underline{X}}$ est un feuilletage singulier de \underline{X} appelé feuilletage maximal. $\mathcal{F} = 0$ est un feuilletage singulier de \underline{X} en points, appelé feuilletage trivial. On dira que \underline{X} est une stratification maximale si $\mathcal{F} = \chi_{\underline{X}}$ est le feuilletage grossier de \underline{X} en ses strates.

EXEMPLE 2.10 (Espace de cônes). Soit X un espace de cônes de type fini à géométrie bornée, muni d'une métrique de cône g complète ([Pff01] 3.10.5, [ALMP09]). Soit \mathcal{F} le module des champs de vecteurs de norme bornée sur X^o . Alors \mathcal{F} définit un feuilletage singulier sur X .

DÉMONSTRATION. On recouvre X par des cartes trivialisantes adaptées. Soit $x \in X$, $s_1 \in S_X$ la strate de x , \mathcal{U}_1 un voisinage de x dans s_1 vérifiant la condition de trivialité locale : $\pi_{s_1}^{-1}(\mathcal{U}_1) \simeq \mathcal{U}_1 \times C(L_{s_1})$. Pour tout $s_2 \subset L_{s_1}$ et $x' \in s_2$, il existe à nouveau un voisinage \mathcal{U}_2 et une trivialisation $\pi_{s_2}^{-1}(\mathcal{U}_2) \simeq \mathcal{U}_2 \times C(L_{s_2})$. La construction se poursuit jusqu'à ce que la sous-strate d'un link soit de profondeur nulle. On obtient par récurrence en moins de $\text{depth}(S_X)$ étapes un ouvert $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times C(\mathcal{U}_1 \times C(\mathcal{U}_3 \times \cdots \times C(\mathcal{U}_s)) \cdots)$ de X avec $s \leq \text{depth}(S_X)$. On choisit un système local $y^{(j)}$ sur chaque \mathcal{U}_j et un système de coordonnées radiales r_j sur chaque cône $C(L_{s_j})$. Alors $(y^{(1)}, r_1, y^{(2)}, r_2, \dots, y^{(s)})$ est un système complet de coordonnées sur \mathcal{U} et \mathcal{F} est localement généré par :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^{(s)}}, \left\{ \prod_{i=1}^j r_i \frac{\partial}{\partial r_{s-j}}, \prod_{i=1}^j r_i \frac{\partial}{\partial y^{(s-j)}} \right\}_{j \in [1, s-1]} \right\}.$$

□

EXEMPLE 2.11 (Tore plein non-commutatif). Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. \mathbb{Z}^2 agit sur \mathbb{R}^2 par translations et laisse stable le feuilletage de Kronecker $\{y = \theta \cdot x + t\}$ de \mathbb{R}^2 . Soit T_θ^2 le feuilletage régulier induit sur le

tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. La C^* -algèbre du groupoïde d'holonomie de T_θ^2 est classiquement désignée sous le nom de *tore non-commutatif*.

Notons D^1 le disque unité de bord S^1 et $P^2 = D^1 \times D^1$ le tore plein de bord $S^1 \times S^1 = T^2$. P^2 est naturellement stratifié par son bord et son intérieur et χ_{P^2} est le module des champs de vecteurs sur P^2 tangent au bord, donc $\underline{P^2}$ est une stratification de type fini.

Soit $\mathcal{F}_\theta \subset \chi_{\underline{P^2}}$ le module des champs de vecteurs tangent aux feuilles de T_θ^2 . \mathcal{F}_θ est localement de type fini et stable par crochet de Lie car il est défini par un algébroïde de Lie quasi-régulier (section 4). On appellera *tore plein non-commutatif* la C^* -algèbre du groupoïde d'holonomie de la variété P^2 muni du feuilletage singulier \mathcal{F}_θ .



FIGURE 2. Le tore plein non-commutatif.

...

3 Groupoïde d'holonomie sur une variété lisse

La construction du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage singulier exposée dans [AS06] repose sur les notions essentielles de bi-submersions, de bi-sections et d'atlas. On motive ces notions en rappelant tout d'abord la définition classique dans le cas régulier.

3.1. Le cas régulier

Soit M une variété lisse. L'holonomie d'un feuilletage régulier (M, \mathcal{F}) est construite de manière standard à partir des chemins tangents aux feuilles. Soit c un chemin tangent à \mathcal{F} allant de x à y , soit U_x et U_y

deux voisinages respectifs sur lesquels \mathcal{F} induit un feuilletage trivial. Il existe une décomposition distinguée $U_x \simeq P_x \times T_x$ où P_x est une plaque de U_x et T_x est une sous-variété transverse à \mathcal{F}_{U_x} passant par x , difféomorphe au quotient U_x/P_x .

Quitte à restreindre les transversales locales T_x et T_y , le chemin c induit un difféomorphisme d'holonomie $h_c : T_x \rightarrow T_y$ et l'on appelle *holonomie* du chemin c le germe en x de h_c . On montre que les classes d'holonomie de chemins ne dépendent que des points sources et but et sont indépendantes du choix des transversales.

La composition des chemins induit une loi de groupoïde sur l'ensemble $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ de ces classes, appelé groupoïde d'holonomie. L'application suivante fournit une carte de $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ au voisinage d'un point $\gamma = (x, h_t, y)$:

$$\begin{aligned} P_i \times T_i \times P_j &\rightarrow \mathcal{H}ol(M, \mathcal{F}) \\ (x, t, y) &\mapsto (x, h_t, y) \end{aligned}$$

et définit une structure de variété sur le groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$.

3.2. Holonomie et difféomorphismes locaux

La construction précédente repose sur l'existence de transversales locales. Cette structure n'existe plus nécessairement dans le cas singulier, et l'idée forte développée dans ([HS87],[Deb01]) est de la remplacer par des « isomorphismes généralisés » entre espaces d'orbites de groupoïdes locaux. Plus précisément, si $U \simeq P \times T$ est un ouvert distingué de la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) , le groupoïde $G_U = P \times P \times T$ intègre $F|_U$ et tout difféomorphisme $h : T_i \rightarrow T_j$ induit une équivalence de Morita de G_{U_i} sur G_{U_j} donnée par :

$$((\pi_1, \pi_2), (\pi_3, h \circ \pi_2)) : P_i \times T_i \times P_j \rightarrow U_i \times U_j.$$

On montre ([Deb01], Proposition 16) que toute équivalence de Morita entre G_i et G_j est de cette forme, et qu'il existe donc une correspondance bijective entre les équivalences de Morita des groupoïdes G_i et G_j et l'ensemble des difféomorphismes de T_i sur T_j . L'identification d'éléments d'un atlas généralisé se substitue donc à la notion moins robuste de germe de difféomorphisme transverse. La notion d'atlas d'une famille de bi-submersions est une géométrisation épurée de ce principe.

3.3. Feuilletage tiré en arrière

Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage singulier sur une variété lisse M . Toute application $\phi : N \rightarrow M$ induit un $C^\infty(N)$ -sous-module de $C_c^\infty(N, TN)$

défini par

$$\phi^{-1}(\mathcal{F}) = \{V \in C_c^\infty(N, TN), d\phi(V) \in \phi^*(\mathcal{F})\},$$

où $\phi^*(\mathcal{F})$ est le tiré en arrière sur N du module \mathcal{F} .

ϕ est dite transverse à \mathcal{F} si l'application $\phi^*(\mathcal{F}) \oplus C_c^\infty(N, TN) \rightarrow C_c^\infty(N, \phi^*(TM))$ définie par $(\chi, \eta) \mapsto \chi + d\phi(\eta)$ est surjective.

$\phi^{-1}(\mathcal{F})$ est toujours stable par crochet de Lie et lorsque ϕ est transverse, $\phi^{-1}(\mathcal{F})$ est localement de type fini. $(N, \phi^{-1}(\mathcal{F}))$ est alors un feuilletage de N .

3.4. Bi-submersions

Une bi-submersion est un objet géométrique qui encode une famille de difféomorphismes locaux préservant le feuilletage \mathcal{F} . C'est un "morceau" du groupoïde d'holonomie.

DÉFINITION 3.1 ([AS06], Définition 2.1). Une bi-submersion de (M, \mathcal{F}) est une variété lisse U munie de deux submersions $s, t : U \rightarrow M$ qui vérifient :

- $s^{-1}(\mathcal{F}) = t^{-1}(\mathcal{F})$.
- $s^{-1}(\mathcal{F}) = C_c^\infty(U, \ker ds) + C_c^\infty(U, \ker dt)$.

EXEMPLE 3.2. Lorsque \mathcal{F} est défini par l'algèbroïde AG d'un groupoïde de Lie G (exemple 1.5), (G, s, t) est une bi-submersion de (M, \mathcal{F}) .

EXEMPLE 3.3 ([AS06], Proposition 2.10). Si $x \in M$ et V_1, \dots, V_n forment une base de \mathcal{F}_x , il existe un voisinage U de $(x, 0)$ dans $M \times \mathbb{R}^n$ où l'exponentielle $t_U(y, a) = \exp(\sum_{i=1}^n a_i V_i)(y)$ est définie et tel que (U, s_U, t_U) soit une bi-submersion, s_U étant la projection sur le premier facteur. Une telle bi-submersion est dite *près de l'identité*.

3.5. Bi-sections

DÉFINITION 3.4. Soient (U, s_U, t_U) et (V, s_V, t_V) deux bi-submersions. Un morphisme de bi-submersions est une application lisse $f : U \rightarrow V$ telle que $s_U = s_V \circ f$ et $t_U = t_V \circ f$.

DÉFINITION 3.5. Une bi-section de (U, s, t) est une sous-variété V de U localement fermée telle que les restrictions de s et t à V soient des difféomorphismes sur des ouverts de M .

On dira que $u \in U$ transporte un difféomorphisme local ϕ préservant le feuilletage s'il existe une bi-section V de U telle que $u \in V$ et $\phi = t|_V \circ (s|_V)^{-1}$.

Les bi-sections permettent la comparaison des bi-submersions qui les contiennent : on montre ([AS06], corollaire 2.11) que deux points u et v de bi-submersions respectives U et V transportent les mêmes difféomorphismes si et seulement si il existe un morphisme de bi-submersions f défini dans un voisinage de u tel que $f(u) = v$.

3.6. Atlas de bi-submersions

Si (U, s_U, t_U) et (V, s_V, t_V) sont deux bi-submersions, l'inverse $U^{-1} = (U, t_U, s_U)$ et la composition $U \circ V = (U_W, t_W, s_W)$ où $U_W = U \times_{s_U, t_V} V$, $s_W(u, v) = s_V(v)$, $t_W(u, v) = t_U(u)$ sont des bi-submersions. Les propriétés de composition d'une famille de bi-submersions généralisent la loi algébrique de composition sur un groupoïde de Lie. La notion d'atlas impose l'existence de suffisamment de bi-submersions pour assurer la stabilité par composition.

DÉFINITION 3.6. Soit $\mathcal{U} = (U_i, s_i, t_i)_{i \in I}$ une famille de bi-submersions. Une bi-submersion (U, s, t) est *adaptée* à \mathcal{U} si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe un voisinage U' de u et un morphisme de bi-submersion $U' \rightarrow U_i$ vers un élément de \mathcal{U} .

DÉFINITION 3.7. La famille de bi-submersions $\mathcal{U} = (U_i, s_i, t_i)_{i \in I}$ est un *atlas* si :

- a) $\bigcup_{i \in I} s_i(U_i) = M$.
- b) l'inverse de tout élément de \mathcal{U} est adapté à \mathcal{U} .
- c) la composition $U \circ V$ de deux éléments quelconques de \mathcal{U} est adapté à \mathcal{U} .

Un atlas $\mathcal{V} = (V_j, s_j, t_j)_{j \in J}$ est adapté à \mathcal{U} si tout élément de \mathcal{V} est adapté à \mathcal{U} . On dira que \mathcal{U} et \mathcal{V} sont *équivalents* s'ils sont adaptés l'un à l'autre. Il existe un *atlas minimal* adapté à tout autre atlas : il s'agit de l'atlas généré par les bi-submersions près de l'identité (exemple 3.3).

3.7. Groupoïde d'un atlas

DÉFINITION 3.8. Le groupoïde d'un atlas $\mathcal{U} = (U_i, s_i, t_i)_{i \in I}$ est le quotient de $U = \amalg_{i \in I} U_i$ par la relation d'équivalence qui identifie $u \in U_i$ à $u' \in U_j$ si U_i transporte en u les mêmes difféomorphismes locaux que U_j en u' .

DÉFINITION 3.9 ([AS06], Définition 3.5). Le *groupoïde d'holonomie* d'une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) est le groupoïde de l'atlas minimal engendré par les bi-submersions près de l'identité.

• • •

4 Groupoïde d'holonomie des pseudo-variétés stratifiées

4.1. Atlas de bi-submersions près de l'identité

Soit $\mathcal{F} \subset \chi_{\underline{X}}$ un feuilletage de \underline{X} et x un point de X . Tout champ de vecteur $\eta \in \chi_{\underline{X}}$ définit un unique flot intégral maximal (proposition 3.22) sur \underline{X} . Soient V_1, \dots, V_n des champs de vecteurs qui forment une base de \mathcal{F}_x , il existe donc un voisinage U de $(x, 0)$ dans $X \times \mathbb{R}^n$ où l'exponentielle $t_U(y, a) = \exp(\sum_{i=1}^n a_i V_i)(y)$ est définie. Si l'on note s_U la projection sur le premier facteur, on désignera le triplet (U, s_U, t_U) comme une bi-submersion près de l'identité pour $(\underline{X}, \mathcal{F})$.

Si (U_M, s_{U_M}, t_{U_M}) désigne une bi-submersion près de l'identité au point $j(x) \in M$ du feuilletage (M, \mathcal{F}_M) , on vérifie immédiatement que $(j^{-1}(U_M \cap j(X)), j^{-1} \circ s_{U_M}, j^{-1} \circ t_{U_M})$ définit une bi-submersion près de l'identité pour $(\underline{X}, \mathcal{F})$ au sens précédent, que l'on notera $(U_{\underline{X}}, s_{\underline{X}}, t_{\underline{X}})$. La composition des flots permet de définir la composition $U_{\underline{X}} \circ V_{\underline{X}}$ des bi-submersions $U_{\underline{X}}$ et $V_{\underline{X}}$. De plus on peut identifier deux points x et x' de bi-submersions $U_{\underline{X}}$ et $U'_{\underline{X}}$ sur \underline{X} s'il existe deux bi-submersions U_M et U'_M sur M dont $U_{\underline{X}}$ et $U'_{\underline{X}}$ sont les images et telles que U_M et U'_M transportent les mêmes difféomorphismes en $j(x)$ et $j(x')$. Le quotient de l'atlas formé des bi-submersions près de l'identité pour $(\underline{X}, \mathcal{F})$ par cette relation s'identifie à travers j à un groupoïde que l'on considèrera comme le groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(\underline{X}, \mathcal{F})$ de $(\underline{X}, \mathcal{F})$.

On donne dans le paragraphe suivant une définition plus directe de ce groupoïde d'holonomie (définition 4.1) à partir de $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F}_M)$.

4.2. Définition

Soit \underline{X} une pseudo-variété stratifiée de type fini et de structure lisse (\underline{X}, j, M) . Soit $\mathcal{F} \subset \chi_{\underline{X}}$ un feuilletage singulier de \underline{X} .

Considérons le module de champs de vecteurs $\mathcal{F}_M \subset \chi_M$ sur M défini par :

$$\mathcal{F}_M = \{\tilde{\eta} \in C^\infty(M, TM) , \tilde{\eta}! \in \mathcal{F}\}.$$

(M, \mathcal{F}_M) est d'après la proposition 2.4 un feuilletage de Stefan-Sussman, pour lequel on dispose des outils pour construire le groupoïde d'holonomie. On peut ainsi associer de manière bijective à tout feuilletage singulier \mathcal{F} de \underline{X} un groupoïde d'holonomie à partir de (M, \mathcal{F}_M) :

DÉFINITION 4.1. On appellera groupoïde d'holonomie de \mathcal{F} la restriction à $j(X)$ du groupoïde d'holonomie du feuilletage (M, \mathcal{F}_M) :

$$\mathcal{H}ol(\underline{X}, \mathcal{F}) = \mathcal{H}ol(M, \mathcal{F}_M)_{j(X)}.$$

REMARQUE 4.2. \mathcal{F}_M étant un sous-module de χ_M , les strates de $j(X)$ sont stables sous les flots de \mathcal{F}_M et $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F}_M)_{j(X)} = \mathcal{H}ol(M, \mathcal{F}_M)_{j(X)}^{j(X)}$.

L'existence de $\mathcal{H}ol(\underline{X}, \mathcal{F})$ au sens de la définition 4.1 est essentiellement la proposition ([AS06], 2.10) appliquée à un plongement de la variété stratifiée \underline{X} . Explicitons cependant le résultat auquel aboutissent les constructions présentées dans cette partie :

THÉORÈME 4.3. *Tout feuilletage singulier \mathcal{F} d'une variété stratifiée de type fini \underline{X} admet un groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(\underline{X}, \mathcal{F})$ au sens de la définition 4.1.*

DÉMONSTRATION. Soit (\underline{X}, j, M) la structure lisse associée à \mathcal{F} . (M, \mathcal{F}_M) étant un feuilletage de Stefan-Sussman (proposition 2.4), la proposition 2.10 de [AS06] (exemple 3.3) assure l'existence d'un atlas de bi-submersions près de l'identité pour (M, \mathcal{F}_M) et l'existence du groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F}_M)$ (définition 5.3). L'existence de $\mathcal{H}ol(\underline{X}, \mathcal{F})$ au sens de la définition 4.1 est alors assurée.

□

• • •

5 Groupoïde d'holonomie des variétés à bord feuilleté

On a construit dans le chapitre 2 le groupoïde d'éclatement $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ d'une sous-variété feuilletée (V, \mathcal{F}_1) de codimension 1 dans M . Le module \mathcal{F} des champs de vecteurs tangents à \mathcal{F}_1 en V définit un feuilletage singulier sur M . On identifie ici $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ au groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ du feuilletage singulier (M, \mathcal{F}) .

On vérifie pour cela que le groupoïde d'éclatement $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ intègre l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} et vérifie la condition de minimalité qui définit le groupoïde $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$.

5.1. Notations

Soit M une variété, et $V \subset M$ une sous-variété de M de codimension 1 transversalement orientée. On suppose V munie d'un feuilletage régulier \mathcal{F}_1 , défini par un sous-espace vectoriel intégrable $TF_1 \subset TV$, i.e. $C^\infty(V, TF_1)$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(V, TV)$. On note $\mathcal{N} = TV/TF_1$ et on suppose par ailleurs M munie d'une connexion w , dont la restriction à V fournit une décomposition du fibré tangent $TV = TF_1 \oplus \mathcal{N}$.

Soit (N, π, V) un voisinage tubulaire de V dans M : N est un ouvert de M contenant V , $\pi : N \rightarrow V$ un fibré vectoriel de fibre type \mathbb{R} . Soit $\{f_i : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}\}_{i \in I}$ une trivialisatation locale de N , d'où l'on déduit la trivialisatation

$$\{(f_i)_* : TN_i \doteq TN|_{V_i} \rightarrow TV_i \times T\mathbb{R}\}.$$

5.2. Feuilletage singulier de l'éclatement

Considérons alors l'algébroïde de Lie $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = TM$ dont le fléchage p est défini par sur chaque N_i par :

$$(f_i)_*(p((f_i)^{-1}(v_1, v_2, t, \lambda))) = (v_1 + tv_2, t, t\lambda)$$

lorsque $(v_1, v_2, (t, \lambda)) \in TF_{1i} \oplus \mathcal{N}_i \times T_t(\mathbb{R})$, et par l'identité sur $T(M \setminus N)$.

$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ définit par ce fléchage un feuilletage (M, \mathcal{F}) . Rappelons qu'un feuilletage est quasi-régulier lorsque il est défini par un algébroïde de Lie dont le fléchage est injectif sur un ouvert dense.

PROPOSITION 5.1. *Le feuilletage (M, \mathcal{F}) est quasi-régulier.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que le fléchage de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ est injectif sur l'ouvert dense $M \setminus V$, ce qui découle immédiatement de l'injectivité de l'application $(t, \lambda) \mapsto (t, t\lambda)$ pour $t \neq 0$.

□

Un résultat de Claire Debord ([**Deb01**], Thm 4.3) valable pour tout feuilletage quasi-régulier, assure alors l'existence d'un groupoïde de Lie $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ dont l'algébroïde de Lie est $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Il s'agit d'un groupoïde de base M qui intègre le feuilletage défini par $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

La surjectivité immédiate de l'application $(t, \lambda) \mapsto (t, t\lambda)$ pour $t \neq 0$, et donc celle du fléchage de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ sur $M \setminus V$ implique que les feuilles de ce feuilletage sont $M \setminus V$ et les feuilles de \mathcal{F}_1 . $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ est un groupoïde qui

intègre l'espace de ces feuilles et l'on peut se demander s'il en existe d'autres. La propriété suivante fournit une réponse à cette question.

Un algébroïde de Lie \mathcal{A} est dit extrême pour le feuilletage \mathcal{F} si pour tout algébroïde de Lie \mathcal{A}' définissant aussi \mathcal{F} , il existe un morphisme d'algébroïde de Lie de \mathcal{A}' vers \mathcal{A} . Lorsque le feuilletage \mathcal{F} est quasi-régulier, l'extrémalité de \mathcal{A} est équivalente ([Deb01]) à l'existence d'un unique groupoïde G « minimal » intégrant \mathcal{A} , dans le sens où pour tout autre groupoïde de Lie H définissant \mathcal{F} il existe un morphisme différentiable de groupoïde de H vers G . En ce sens, on peut définir $\mathcal{G}V_\phi$ comme le « plus petit » groupoïde de Lie définissant \mathcal{F} . En effet :

PROPOSITION 5.2. $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ est extrême pour (M, \mathcal{F}) .

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que le fléchage p de $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ induit un isomorphisme entre $\Gamma(\mathcal{A}_\mathcal{F})$, l'espace vectoriel des sections locales de $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ et $\Gamma(T\mathcal{F})$, l'espace vectoriel des champs de vecteurs locaux tangents à \mathcal{F} . La condition sur $M \setminus V$ résulte immédiatement de la bijectivité du fléchage $p|_{M \setminus V}$. La condition sur V s'obtient par un développement en série de Taylor d'un champ de vecteur tangent en V aux feuilles du feuilletage \mathcal{F}_1 . Si l'on note x_i, y_i, t des coordonnées locales associées aux directions définies respectivement par TF_{1i}, \mathcal{N}_i et $T_t(\mathbb{R})$, un champ de vecteur $\xi \in \mathcal{F}$ sera localement généré par la famille libre $\langle t \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}, t \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle$, ce qui assure l'isomorphisme annoncé.

□

DÉFINITION 5.3. On appelle groupoïde d'holonomie de (M, \mathcal{F}) le groupoïde de Lie minimal $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ dont l'algébroïde de Lie est $\mathcal{A}_\mathcal{F}$. La proposition précédente montre que $\mathcal{H}ol(M, \mathcal{F})$ est le quotient de l'atlas de bi-submersions près de l'identité des champs de vecteurs tangents en V aux feuilles de \mathcal{F}_1 .

5.3. Identification de l'éclatement et du groupoïde d'holonomie

LEMME 5.4. $\mathcal{G}V_\mathcal{F}$ est un groupoïde de Lie s -connexe et semi-régulier.

DÉMONSTRATION. La s -connexité de $\mathcal{G}V_\mathcal{F}$ est immédiate par définition. Le groupoïde \mathcal{D}_ϕ est muni de la structure différentielle d'une déformation au cône normal. Les ouverts de $G_V \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ et les ensembles de la forme $\Theta(\Omega_V^U) \exp Z$, $\Omega_V^U = \{(x, x', \xi, t) \in \mathbb{R}^{2p} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, x', t\xi) \in U\}$ forment une base d'ouverts réguliers de la topologie de \mathcal{D}_ϕ . Ainsi \mathcal{D}_ϕ est semi-régulier et d'après la proposition 4.3 $\mathcal{G}V_\mathcal{F}$ l'est aussi.

□

PROPOSITION 5.5 ([**Deb01**]). *Soit H un groupoïde de Lie s -connexe semi-régulier. Alors H est un quasi-graphoïde si et seulement si l'ensemble $\{x \in H^{(0)}, H_x^x = \{x\}\}$ des unités ayant un groupe d'isotropie trivial est dense dans $H^{(0)}$.*

COROLLAIRE 5.6. $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ est un quasi-graphoïde.

DÉMONSTRATION. Il est immédiat de constater que l'isotropie de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ est triviale au-dessus de M° . $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ étant s -connexe et semi-régulier (lemme 5.4), c'est un quasi-graphoïde d'après le résultat de la proposition 5.5.

□

PROPOSITION 5.7. $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ est le groupoïde d'holonomie $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$ de (M, \mathcal{F}) .

DÉMONSTRATION. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les systèmes de cartes introduit en 4.5 pour décrire la structure différentielle de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$. $\mathcal{A} = \{(\Omega_i^j, \phi_{ij})_{i,j \in I^2}\}$ où $\phi_{ij} = \varphi_{ij} \circ i_{\mathcal{D}}^{-1}$ et $\Omega_i^j = i_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_i^j)$. $\mathcal{B} = \{(\Omega_\beta, \varphi_\beta)\}$ est un atlas de la variété $M_+^\circ \times M_+^\circ \sqcup M_-^\circ \times M_-^\circ$.

Sur $\Omega_{\mathcal{B}} = \bigcup \Omega_\beta$ les applications source et but de $\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ sont définies par :

$$\begin{cases} s(x, y) = x \\ r(x, y) = y \end{cases}$$

L'algébroïde $\mathcal{A}\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}$ en restriction à $M \setminus N \subset \Omega_{\mathcal{B}}$ est donc $\mathcal{A}_{M \setminus N} = \bigcup \ker(ds|_{\{(x,x), x \in M \setminus V\}}) = T(M \setminus V)$ muni du fléchage identité $p : \mathcal{A}_{M \setminus N}^\circ \rightarrow T(M \setminus V)$ puisque $dr|_{T(M \setminus V)} = \text{Id}$. Ainsi $\mathcal{A}\mathcal{G}V_{\mathcal{F}}|_{M \setminus N} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}}|_{M \setminus N}$.

L'immersion de groupoïde $\varphi : G_1 \rightarrow V \times V$ induit quant à elle un morphisme injectif d'algébroïde de Lie $\varphi_*^A : \mathcal{A}_1 \rightarrow TV$, où $\mathcal{A}_1 = TF_1$. La connexion ω permet d'identifier TV à $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{N}$ où $\mathcal{N} = TV/\mathcal{A}_1$ et le fléchage de l'algébroïde \mathcal{A}_φ du groupoïde normal D_φ est :

$$\begin{aligned} p_D : \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{N} \times \mathbb{R} &\rightarrow T(V \times \mathbb{R}) = TV \times T\mathbb{R} \\ (v_1, v_2, t) &\mapsto (p_2(v_1 + tv_2), (t, 0)) \end{aligned}$$

La loi de composition sur \mathcal{D}_φ est donnée par le produit de la loi de composition sur D_φ et l'action de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} par multiplication. Ainsi $\mathcal{A}\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{N} \oplus T\mathbb{R}$ et le fléchage p_φ de $\mathcal{A}\mathcal{D}_\varphi$ est obtenu par :

$$\begin{aligned} p_\varphi : \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{N} \times T\mathbb{R} &\rightarrow T(V \times \mathbb{R}) = TV \times T\mathbb{R} \\ (v_1, v_2, t, \lambda) &\mapsto (p_2(v_1 + tv_2), (t, t \cdot \exp \lambda)) \end{aligned}$$

L'isomorphisme $di_{\mathcal{D}}^{-1} : \mathcal{AGV}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{AD}_{\varphi}$ induit par $i_{\mathcal{D}}^{-1}$ sur $\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcup \Omega_i^j = N$ implique alors l'égalité $p|_N = p_{\varphi} \circ di_{\mathcal{D}}^{-1}$ et $\mathcal{AGV}_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}|_N}$.

Ainsi $\mathcal{GV}_{\mathcal{F}}$ est un quasi-graphoïde qui intègre l'algèbroïde de Lie $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ sur M . $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ étant extrémal, $\mathcal{GV}_{\mathcal{F}}$ est bien le groupoïde d'holonomie $\mathcal{Hol}(M, \mathcal{F})$ du feuilletage (M, \mathcal{F}) .

□

Enfin on obtient en corollaire une interprétation similaire pour le groupoïde d'éclatement d'une variété à coins fibrés :

COROLLAIRE 5.8. *Soit X une variété à coins fibrés définie par un équarrissage fibré $\mathcal{E}_{\phi} = (M, (V_i, \phi_i)_{i \in I})$. Soit \mathcal{F} le module de champs de vecteurs tangents aux fibrations de chaque face. Alors \mathcal{GE}_{ϕ} est le groupoïde d'holonomie $\mathcal{Hol}(M, \mathcal{F})$ de (M, \mathcal{F}) .*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{Hol}(M, \mathcal{F})$ le groupoïde d'holonomie de (M, \mathcal{F}) . D'après la proposition 5.7 précédente pour $i, j \in I$ la minimalité de $\mathcal{GV}_{i\phi}$ et $\mathcal{GV}_{j\phi}$ implique l'existence de morphismes p_i et p_j tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Hol}(M, \mathcal{F}) & \xrightarrow{p_i} & \mathcal{GV}_{i\phi} \\ p_j \downarrow & & \downarrow s_i \oplus r_i \\ \mathcal{GV}_{j\phi} & \xrightarrow{s_j \oplus r_j} & M^2 \end{array}$$

Il existe donc un morphisme de groupoïde $u : \mathcal{Hol}(M, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{GE}_{\phi}$ d'après la propriété universelle du produit fibré \mathcal{GE}_{ϕ} . La minimalité de $\mathcal{Hol}(M, \mathcal{F})$ implique alors que u soit un isomorphisme et $\mathcal{GE}_{\phi} \simeq \mathcal{Hol}(M, \mathcal{F})$ est le groupoïde d'holonomie de (M, \mathcal{F}) .

□

Le groupoïde d'éclatement $\Gamma_{\phi}(X)$ d'une variété à coins fibrés possède donc une signification géométrique naturelle en tant que groupoïde d'holonomie de feuilletage singulier et sa construction est indépendante de toute description particulière. Il s'agit d'un exemple explicite d'espace de feuilles singulier au sens de [AS06]. On obtient ainsi une interprétation conceptuelle du ϕ -calcul comme calcul pseudodifférentiel associé au groupoïde d'holonomie du feuilletage singulier défini par la variété à bord fibré.

L'existence d'une construction générale [AS06] des espaces de feuilles montre que des situations plus singulières encore peuvent être étudiées et il serait intéressant de poursuivre la description explicite de tels objets à l'image des constructions proposées dans ce travail.

Bibliographie

- [ALMP09] Pierre Albin, Eric Leichtnam, Rafe Mazzeo, and Paolo Piazza, *The signature package on witt spaces, i. index classes*, arxiv :math.DG/09061568 (2009).
- [AS63] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.
- [AS68a] ———, *The index of elliptic operators. I*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–530.
- [AS68b] ———, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.
- [AS06] Iakovos Androulidakis and Georges Skandalis, *The holonomy groupoid of a singular foliation*, arxiv :math.DG/0612370 (2006).
- [BHS91] J.-P. Brasselet, G. Hector, and M. Saralegi, *Théorème de de Rham pour les variétés stratifiées*, Ann. Global Analy. Geom. **9** (1991), no. 3, 211–243.
- [CDV01] Alain Connes and Michel Dubois-Violette, *Noncommutative finite-dimensional manifolds. i. spherical manifolds and related examples*, Communications in Mathematical Physics **230** (2001), 52.
- [CDV05] A Connes and M Dubois-Violette, *Non commutative finite dimensional manifolds ii. moduli space and structure of non commutative 3-spheres*, Group **3** (2005), no. C, 96.
- [CL01] Alain Connes and Giovanni Landi, *Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations*, Com. Math. Phys. (2001).
- [CM95] Alain Connes and Henri Moscovici, *The local index formula in noncommutative geometry*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 2, 174–243.
- [CM06] Alain Connes and Matilde Marcolli, *A walk in the noncommutative garden*, arxiv :math.QA/0601054 (2006).
- [Con79] Alain Connes, *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 725, Springer, Berlin, 1979, pp. 19–143.
- [Con81] ———, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* algebra by an action of R* , Advances in Mathematics **39** (1981), no. 1, 31 – 55.
- [Con82] ———, *A survey of foliations and operator algebras*, Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980), Proc.

- Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 521–628.
- [Con85] ———, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1985), no. 62, 257–360.
- [Con86] ———, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 123, Longman Sci. Tech., Harlow, 1986, pp. 52–144.
- [Con87] ———, *Cyclic cohomology and noncommutative differential geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 879–889.
- [Con94] ———, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [CR07] Paulo Carrillo-Rouse, *Indices analytiques à support compact pour des groupoides de Lie*, Thèse de Doctorat à l'Université de Paris 7 (2007).
- [CS84] Alain Connes and Georges Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 6, 1139–1183.
- [Deb01] Claire Debord, *Holonomy groupoids of singular foliations*, J. Differential Geom. **58** (2001), no. 3, 467–500.
- [DL09] Claire Debord and Jean-Marie Lescure, *K-duality for stratified pseudomanifolds*, Geometry and Topology **13** (2009), 49–86.
- [DLR11] C. Debord, J.-M. Lescure, and F. Rochon, *Pseudodifferential operators on manifolds with fibred corners*, ArXiv e-prints (2011).
- [ENN88] G. Elliott, T. Natsume, and R. Nest, *Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed products*, Acta Mathematica **160** (1988), 285–305, 10.1007/BF02392278.
- [GLW88] É Ghys, R Langevin, and P Walczak, *Entropie geometrique des feuilletages*, Acta Math (1988), no. 168.
- [Gor] R.M. Goresky, *Thesis*.
- [HS87] Michel Hilsum and Georges Skandalis, *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), no. 3, 325–390.
- [Lan97] Giovanni Landi, *An introduction to noncommutative spaces and their geometry*, Lecture Notes in Physics : Monographs, vol. 51, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [LMN00] Robert Lauter, Bertrand Monthubert, and Victor Nistor, *Pseudodifferential analysis on continuous family groupoids*, Doc. Math. **5** (2000), 625–655 (electronic).
- [LMN05] Robert Lauter, Bertrand Monthubert, and Victor Nistor, *Spectral invariance for certain algebras of pseudodifferential operators*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu **4** (2005), no. 03, 405–442.

- [LMP06] M. Lesch, H. Moscovici, and M. Pflaum, *Relative pairing in cyclic cohomology and divisor flows*, ArXiv Mathematics e-prints (2006).
- [LMP09a] M. Lesch, H. Moscovici, and M. J. Pflaum, *Connes-Chern character for manifolds with boundary and eta cochains*, ArXiv e-prints (2009).
- [LMP09b] Matthias Lesch, Henri Moscovici, and M.J. Pflaum, *Relative pairing in cyclic cohomology and divisor flows*, J. K-Theory **3** (2009), no. 2, 359–407.
- [Loy05] Paul Loya, *Dirac operators, boundary value problems, and the b-calculus*, Contemp. Math. **366** (2005), 241—280.
- [Mat70] J.N. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed Notes, 1970.
- [Mel93] Richard B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notes in Mathematics, vol. 4, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1993.
- [Mel96] ———, *Differential analysis on manifolds with corners*, unpublished book, 1996.
- [Mil71] John Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72.
- [MM98] Rafe Mazzeo and Richard B. Melrose, *Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries*, arxiv :math.DG/9812120 (1998).
- [Mon03] Bertrand Monthubert, *Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners*, J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 1, 243–286.
- [MP97] Bertrand Monthubert and François Pierrot, *Indice analytique et groupoïdes de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 2, 193–198.
- [MP11] H. Moriyoshi and P. Piazza, *Eta cocycles, relative pairings and the Godbillon-Vey index theorem*, ArXiv e-prints (2011).
- [MR05] R. B. Melrose and F. Rochon, *Index in K-theory for families of fibred cusp operators*, ArXiv Mathematics e-prints (2005).
- [NWX99] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu, *Pseudodifferential operators on differential groupoids*, Pacific J. Math. **189** (1999), no. 1, 117–152.
- [Pfl01] Markus J. Pflaum, *Analytic and geometric study of stratified spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1768, Springer, Berlin, 2001.
- [Ren80] Jean Renault, *A groupoid approach to C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer, Berlin, 1980.
- [Ste74] P Stefan, *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proceedings of the London Math. Society (1974), no. 29, 699–713.
- [Sus73] J Sussmann, H, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. of the A.M.S. (1973), no. 180, 171–188.
- [Teu81] Michael Teufel, *Abstract prestratified sets are (b)-regular*, J. Differential Geom. **16** (1981), no. 3, 529–536.

- [Tho69] René Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 240–284.
- [Ver84] Andrei Verona, *Stratified mappings-structure and triangulability*, Lecture Notes in Mathematics **1102** (1984).
- [Whi47] H. Whitney, *Complexes of manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33** (1947), 10–11.

Titre : Géométrie non-commutative et calcul pseudodifférentiel sur les variétés à coins fibrés.

Résumé :

On utilise les outils de la géométrie non-commutative pour étudier la théorie de l'indice de certaines variétés singulières. On associe à toute variété à bord feuilleté, puis à toute variété à coins fibrés un groupoïde d'éclatement longitudinalement lisse.

On montre ensuite dans le cas fibré que le calcul pseudodifférentiel à support compact associé coïncide avec le ϕ -calcul de Melrose et l'on introduit une algèbre étendue d'opérateurs régularisants dont on montre la stabilité par calcul fonctionnel holomorphe. On définit sur ce calcul étendu certains éléments de cohomologie cyclique relative intervenant dans la formulation de problèmes d'indice supérieurs.

Enfin on montre que le groupoïde d'éclatement construit dans ce travail possède une signification géométrique naturelle en tant que groupoïde d'holonomie de feuilletage singulier, il s'agit d'un exemple explicite d'espace de feuilles singulier au sens de Androulidakis et Skandalis.

Ce résultat nous permet d'obtenir une interprétation conceptuelle du ϕ -calcul comme calcul pseudodifférentiel associé au groupoïde d'holonomie du feuilletage singulier défini par la variété à bord fibré.

Title : Noncommutative geometry and pseudodifferential calculus on manifolds with fibred corners.

Abstract :

Tools from noncommutative geometry are used to study the index theory of some singular manifolds. We associate to every manifold with foliated boundary, then to every manifold with fibred corners a longitudinally smooth groupoid.

We then show in the fibred case that the associated compactly supported pseudodifferential calculus coincides with Melrose's ϕ -calculus and we introduce an extended algebra of smoothing operators that is shown to be stable under holomorphic functional calculus. Some elements of relative cyclic cohomology arising in higher index problems are defined over this extended algebra.

Finally we show that the groupoid we built has a natural geometric meaning as a holonomy groupoid of singular foliation, it is an explicit example of a singular leaf space in the sense of Androulidakis and Skandalis.

This result allows the conceptual interpretation of ϕ -calculus as the pseudodifferential calculus associated with the holonomy groupoid of the singular foliation defined by the manifold with fibred boundary.