



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Discipline ou spécialité : *Mécanique des fluides et mathématiques appliquées*

Présentée et soutenue par *Ludovic MARTIN*
Le *30 juin 2010*

Titre : *Conception aérodynamique robuste*

JURY

Olivier PIRONNEAU, président
Alain DERVIEUX, rapporteur
Bijan MOHAMMADI, rapporteur
Gilbert ROGE, co-directeur
Pierre DEGOND, examinateur

Ecole doctorale : *Université Paul Sabatier*
Unité de recherche : *Institut de Mathématiques de Toulouse / Dassault Aviation*
Directeur(s) de Thèse : *Mohamed MASMOUDI*
Rapporteurs : *Alain DERVIEUX et Bijan MOHAMMADI*



THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE

Université Paul Sabatier

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE

DASSAULT AVIATION

DOMAINES DE RECHERCHE : MÉCANIQUE DES FLUIDES ET MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES

Présentée par

Ludovic Martin

Conception aérodynamique robuste

Directeur de thèse : **M. Mohamed Masmoudi**

Co-direction : **M. Gilbert Rogé**

Soutenue le 30 juin 2010
Devant la Commission d'Examen

JURY

M. Olivier Pironneau	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie	Président
M. Alain Dervieux	Directeur de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis	Rapporteur
M. Bijan Mohammadi	Professeur à l'Université Montpellier II	Rapporteur
M. Pierre Degond	Directeur de recherche à l'Institut de Toulouse	Examineur

Remerciement

Cette thèse de trois ans fut pour moi l'occasion de côtoyer des personnes passionnées par leur métier et désireuses de faire partager leur savoir. En ce sens, cette expérience fut pour moi extrêmement enrichissante et formatrice. En effet, la transition entre le monde universitaire (représenté par l'**Université Paul Sabatier**, et plus particulièrement par l'**Institut de Mathématiques de Toulouse**) et le monde industriel (représenté par le groupe **Dassault Aviation**) a idéalement complété ma formation scientifique. Or, pour pouvoir profiter pleinement d'une telle expérience, il est nécessaire de se sentir bien intégré aux différents groupes de travail. Ce fut parfaitement le cas durant cette thèse. Dans ce contexte, les remerciements qui vont suivre arrivent tout naturellement et avec une profonde sincérité.

Il est important de préciser le contexte général de cette thèse. Celle-ci fut une **thèse CIFRE** (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche) prise en charge par l'**ANRT** (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie). Les thèses **CIFRE** sont intégralement financées par le ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche qui en a confié la mise en œuvre à l'**ANRT**. Un grand merci donc à cet organisme privé.

Je tiens à remercier très chaleureusement mes deux principaux encadrants, à savoir le directeur de thèse **Mohamed Masmoudi** (Professeur des Universités à l'Institut de Mathématiques de Toulouse) et le co-directeur de thèse **Gilbert Rogé** (ingénieur cadre au sein de Dassault Aviation).

– Il n'est pas possible de réussir une bonne thèse sans un directeur motivé et désireux de

contribuer au bon déroulement de celle-ci. Sur ce plan-là, j'ai eu beaucoup de chance. **Mohamed Masmoudi** m'a bien soutenu et donné de nombreux conseils, notamment en ce qui concerne la méthode des perturbations singulières constituant le chapitre 3 de cette thèse. Je tiens donc à remercier **Mohamed** pour cette aide précieuse.

- Un merci tout spécial à **Gilbert Rogé** qui m'a épaulé et conseillé tout au long de ces trois ans de thèse. Sa connaissance des outils et contraintes industriels me fut d'une aide inestimable. Bien plus, sa bonne humeur et son plaisir évident de faire partager ses connaissances furent pour moi sources de motivation permanente, même dans les moments un peu plus difficiles.

Un grand merci à tous les membres du jury, en commençant par le président **Olivier Pironneau**. Malgré son emploi du temps chargé, il n'a pas hésité à endosser cette fonction. Je n'oublie pas les deux rapporteurs : **Alain Dervieux** et **Bijan Mohammadi**, ainsi que le sixième membre du jury : **Pierre Degond**. Leurs félicitations à l'issue de la soutenance (qui s'est déroulée le 30 juin 2010 à l'**Université Paul Sabatier** de Toulouse) m'ont fait très plaisir.

Je voudrais également remercier chaleureusement les nombreuses personnes que j'ai pu rencontrer à **Dassault Aviation** et qui n'ont jamais hésité à répondre à mes multiples interrogations (et en plus avec le sourire). Je pense en particulier à :

- **Philippe Perrier, Christian Lucius, Jean-Claude Courty** et **Michel Mallet** : pour leur accueil au sein du service d'Aérodynamique Avancée.
- **Alain Naïm, Jean-Pierre Figeac** et **Nicolas Flandrin** : pour tout ce qui touche au maillage.
- **Steven Kleinveld** : en ce qui concerne le logiciel de déformation du maillage surfacique (*GANIMEDE*, présenté à l'annexe C de cette thèse).
- **Laurent Daumas** : pour l'utilisation du code de résolution des équations d'Euler (*EUGENIE*, présenté à l'annexe A de cette thèse).
- **Frédéric Chalot, Sylvain Joly** et **Vincent Levasseur** : pour l'utilisation du code de résolution des équations de Navier-Stokes (*AETHER*, présenté à l'annexe B de cette thèse).
- **Albert Garcia, Philippe Thomas, Thomas Delille, Eric Gounot** et **Grégoire De Nanteuil** : concernant les outils informatiques et la connection au réseau industriel.
- **Frank Dagrau** : pour la chaîne automatique d'adaptation de maillage.
- **Nicolas Héron** : pour la partie acoustique.
- **Sébastien Le Gallo, Laeticia Larriau Labree, Bony Quach, Mathilde Hocquet** et **Marie-Pierre Leclerc** : en ce qui concerne les outils de conception avancée.

- **Jean-Pierre Rosenblum** : pour son contact avec la conférence AIAA sur la prise en compte des incertitudes.
- **Eric Garrigues** et **Thierry Fanion** : pour le lien avec la discipline des structures.
- **Michel Ravachol**, **Quang Dinh**, **Erick Herbin** et **Emmanuel Ledinot** : pour la partie recherche innovante dans les domaines de l’optimisation ou des incertitudes, par exemple.
- **Elizabeth Martinez** et **Isabelle Giroux** : pour la partie administrative.

Je souhaite également remercier vivement les nombreux stagiaires, thésards, post-doctorants ou prestataires qui ont animé à leur manière le bureau et qui, eux aussi, ont toujours été là pour répondre à mes questions. Sans être exhaustif, je tiens à citer : **Jonathan Chetboun** (niçois et fier de l’être), **Stéphane Galdeano**, **Franciszka Dembinska**, **Pierre-Elie Normand** (comme son nom l’indique, normand *et fier de l’être ?*), **Yann Revalor**, **Nicolas Parent**, **Mickaël Méheut**, **Sophie Borel-Sandou**, **Samuel Nosal** et **Lionel Rosenberg** (breton pur beurre).

Pour être toujours plus performant d’un point de vue professionnel, la pratique d’un sport avec les collègues de travail est importante. L’organisation d’une séance de *football* le mardi (et même parfois le jeudi) avant la pause déjeuner a permis de mieux connaître et d’apprécier plusieurs membres de **Dassault Aviation**. Voici quelques joueurs composant la *dream-team* : **Laurent Daumas** (coach incontestable et incontesté, fidèle supporter de Montpellier, *comme moi!*¹), **Aurélien Merlet** (très bon jeu de tête!), **Boris Clemencon**, **Quentin Carayol** (avec son mental de gagneur), **Gilbert Rogé**, **Bruno Mangin** (très rapide d’exécution), **Sébastien Le Gallo** (le meilleur techniquement!), **Lionel Rosenberg** (certainement le plus rapide), **Yves Marengi**, **Julien Pibarot**, **Nicolas Réau**, **Olivier Gavouyere** (très combatif), **Vincent Levasseur**, **Sylvain Joly** (à la fois élégant et efficace balle au pied), **Sébastien Vigneron**, **Adrien Cavecchia**, **Mickaël Méheut** (infranchissable en un-contre-un), **Patrick Vial** (excellente vision du jeu), **Romain Barennes**, **Matthieu Robert**, **Romain Chana**, **Florent Poleszczuk** (lui aussi très bon de la tête), **Franck Dagrau** (fameux tireur de coup-franc), **Thomas Delille**, **Jean-Jacques Vallée** ou encore **Irondino Martins** (excellent défenseur central). En tout cas, chacun apporte ses qualités techniques et humaines pour offrir un instant de détente, de sport et de convivialité très appréciable.

Je n’oublie pas les personnes que j’ai pu rencontrer à l’**Université Paul Sabatier** de Tou-

1. Pour information, je supporte les quatre équipes de *football* suivantes : le Paris-Saint-Germain, Montpellier Hérault, l’Ajax Amsterdam et Manchester United.

louse, notamment : **Marie-Laure Auset**, **Agnès Requis** ou **Pierre Degond**.

Je souhaite également faire ici un clin d'œil à certaines personnes qui ont particulièrement compté dans ma formation. Je pense au **professeur Cook** (de l'**Université de Delft**, au Pays-Bas), à **Michel Fouquembergh** (d'**EADS CCR**) ou au **professeur Tatitscheff** (professeur de mathématiques au **Collège Stanislas**, niveau classes préparatoires).

Je tiens à souligner que tous ceux que je n'ai pas cités ont aussi toute ma gratitude.

Enfin, je termine par un merci tout spécial à **mes proches** qui m'ont toujours soutenu et encouragé durant ces trois années de thèse et plus largement tout au long de mon parcours scolaire et professionnel.

This work was partially supported by the NODESIM-CFD project "Non-deterministic Simulation for CFD-based Design Methodologies", a collaborative project funded by the European Community represented by the CEC, Research Directorate-General, in the 6th Framework Programme, under Contract AST5-CT-2006-030959.

Table des matières

Introduction générale	1
I Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique	9
Introduction	9
1 Exemple motivant le calcul des dérivées secondes	10
2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques	14
2.1 Présentation des notations adoptées	14
2.2 Expression de la dérivée première d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre aérodynamique	16
2.3 Expression de la dérivée première d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre géométrique	17
2.4 Expression de la dérivée seconde d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre aérodynamique	19
2.5 Expression de la dérivée seconde d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre géométrique	20
2.6 Récapitulatif des formules mathématiques de dérivée	23
3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation	24
3.1 Principe de la différentiation automatique de code	24
3.2 Différentiation automatique de code à l'ordre 1 par le mode direct (<i>tangent mode</i>)	27

3.3	Différentiation automatique de code à l'ordre 1 par le mode inverse (<i>reverse mode</i>)	29
3.4	Différentiation automatique de code à l'ordre 2 par le mode direct exécuté deux fois (<i>tangent-on-tangent mode</i>)	33
3.5	Récapitulatif des différents modes de différentiation retenus	35
3.6	Processus de validation des routines différenciées	36
4	Descriptif du processus nécessaire à l'estimation d'une dérivée seconde d'observation aérodynamique via la technique de différentiation automatique	42
5	Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)	46
5.1	Contexte de la validation : méthodologie générale et notations	47
5.2	Validation des dérivées premières et secondes sur un problème Navier-Stokes	52
5.2.1	Etude de sensibilité sur un cas à 1° d'incidence (problème 2D) .	52
5.2.2	Etude de sensibilité sur un cas à 2.79° d'incidence (problème 2D)	54
5.2.3	Validation partielle des sensibilités secondes sur un problème 3D	57
	Conclusion	61
	Bibliographie	63
	Références	63
II	Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières	65
	Introduction	65
1	Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe	67
1.1	Présentation du lagrangien	67
1.2	Etat de l'art sur l'utilisation du lagrangien pour fiabiliser une observation scalaire	68
1.3	Méthode de la correction adjointe	72
1.4	Méthode des perturbations singulières	73
2	Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)	76
2.1	Présentation générale	76
2.1.1	Intérêt de la remise à jour de l'adjoint pour la prédiction générale de l'observation	76

2.1.2	Convergence de l'estimation de l'observation pour différentes variantes de la méthode des perturbations singulières	79
2.1.3	Estimation a priori de l'erreur commise par la technique des perturbations singulières	82
2.1.4	Mise en évidence de la progression géométrique de l'erreur . . .	85
2.1.5	Efficacité de la méthode des perturbations singulières : comparaison avec le résidu Euler	87
Conclusion		89
Bibliographie		91
	Références	91
III Propagation d'incertitude en milieu industriel		95
Introduction		95
1	Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes	97
1.1	Contexte de l'étude	97
1.2	Outils statistiques pour la quantification de l'incertitude	99
1.3	Méthodes de propagation d'incertitude	105
1.3.1	Technique Monte-Carlo	106
1.3.2	Technique Monte-Carlo approchée	110
1.3.3	Technique du chaos polynomial	113
1.3.4	Méthode des moments (ou technique de perturbation)	117
1.3.5	Stratégie générale pour l'étude comparée des méthodes de propagation d'incertitude	133
2	Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6	140
2.1	Etude comparative entre la méthode des moments et la méthode du chaos polynomial	140
2.2	Analyse d'incertitude sur la base de la méthode des moments	147
2.2.1	Influence de la forme de la loi d'entrée sur le comportement aléatoire de la sortie	147
2.2.2	Influence de l'écart-type de la loi d'entrée sur le comportement aléatoire de la sortie	149
2.2.3	Etude de l'effet croisé de deux variables incertaines	151
2.2.4	Estimation de l'erreur liée à la méthode des moments	154

2.2.5	Détermination des variables les plus influentes vis-à-vis de l'observation	156
2.2.6	Evaluation des probabilités de défaillance	158
Conclusion		161
Bibliographie		163
	Références	163
IV Optimisation sous incertitude		167
Introduction		167
1	Présentation de l'algorithme génétique pour résoudre un problème d'optimisation sous incertitude	170
1.1	Pourquoi faire appel à la génétique en face d'un problème d'optimisation sous incertitude ?	170
1.2	Structure générale d'un algorithme génétique pour résoudre un problème de minimisation	172
1.3	Formulation du problème d'optimisation sous incertitude : introduction aux variantes SOGA et MOGA d'algorithme génétique	173
1.4	Comparaison des méthodes SOGA et MOGA	174
1.4.1	Mise en application du critère de qualité (SOGA <i>vs</i> MOGA)	174
1.4.2	Passage d'une génération à l'autre (SOGA <i>vs</i> MOGA)	176
1.4.3	Exploitation des résultats obtenus (SOGA <i>vs</i> MOGA)	178
2	Application de l'optimisation sous incertitude sur un cas-test Euler	181
2.1	Présentation du contexte général de l'étude	181
2.2	Optimisation sous incertitude avec probabilité de défaillance	182
2.2.1	Cas à deux objectifs : minimisation de la moyenne de la traînée, en plus d'une probabilité de défaillance sur la portance	183
2.2.2	Cas à trois objectifs : minimisation de la moyenne et de l'écart-type de la traînée, en plus d'une probabilité de défaillance sur la portance	185
2.2.3	Cas à trois objectifs : minimisation de la moyenne et de l'asymétrie de la traînée, en plus d'une probabilité de défaillance sur la portance	187
2.3	Récapitulatif des deux types de problème d'optimisation sous incertitude	189

Conclusion	191
Bibliographie	193
Références	193
Conclusion générale et perspectives	195

Table des matières

Introduction générale

La recherche industrielle doit relever deux défis majeurs : l'innovation et la compétitivité. Ces deux aspects sont, d'une certaine manière, complémentaires. La quête de performance stimule l'émergence de méthodes innovantes. En même temps, l'innovation renforce l'attractivité des produits industriels en les rendant plus performants.

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la modélisation aérodynamique pour l'aéronautique. Plus exactement, nous serons confrontés aux enjeux de la simulation numérique pour la modélisation d'écoulement de fluide compressible. A ce titre, les nombreuses références et applications seront dédiées à la création d'un avion innovant. Néanmoins, les techniques qui vont être présentées sont, pour la grande majorité, directement transposables à d'autres secteurs d'activité. En guise d'exemple, citons le domaine automobile, ferroviaire, la météorologie ou encore la finance. L'aéronautique nous permet d'illustrer sur un cas concret les diverses méthodologies constituant ce mémoire.

La définition de la forme optimale (la plus aérodynamique possible) de la voilure demande bien sûr des essais en vol et en soufflerie. Toute la question est de savoir le rôle qu'il faut attribuer aux trois stratégies (à savoir les simulations numériques, les tests en soufflerie et les essais en vol) destinées à concevoir le futur avion. Il y a peu, les moyens informatiques ne permettaient pas d'effectuer la grande majorité des simulations nécessaires. Pour fixer les idées, le traitement numérique de la grande vitesse d'un avion en vol croisière n'est envisageable que depuis cinq ans environ. Les situations particulières de basse vitesse (atterrissage ou décollage) ne sont traitées que depuis un ou deux ans. Ainsi, la modélisation fluide (CFD pour *Computational Fluid Dynamics*) possède des limites que l'on repousse sans cesse.

Ce progrès permet de limiter la part de tests en soufflerie ou d'essais en vol. Cette limitation est fondamentale pour la réduction des coûts de production d'un avion. Le test en soufflerie (et a fortiori l'essai en vol) est beaucoup plus onéreux qu'une simulation numérique. Pour donner un ordre de grandeur, le coût décroît d'un facteur dix lorsque l'on remplace une validation de soufflerie par un calcul sur ordinateur. Le même facteur dix apparaît entre le prix associé à un essai en vol et à un test en soufflerie. Le progrès des modélisations d'écoulement par la voie du numérique permet de limiter les alternatives coûteuses et donc de baisser le coût global de conception d'un avion.

Bien plus, le passage au numérique possède un second avantage décisif vis-à-vis des autres moyens de simulation d'écoulement (soufflerie ou test en vol). Il s'agit de la réduction du temps de simulation. Cet aspect est primordial en contexte industriel. Le retard dans la production d'un nouvel avion peut lui faire perdre de son attractivité. La réduction des délais liés à la conception et à la création de l'avion participe ainsi activement à sa rentabilité et à son attrait.

Pour pouvoir être simulés par ordinateur, l'avion et le fluide extérieur doivent être discrétisés. En particulier, on tronque le domaine d'étude par une frontière artificielle. Le résultat de cette discrétisation va permettre d'effectuer une résolution des équations de la mécanique des fluides. Les multiples phénomènes physiques en jeu, dûs à la perturbation de l'écoulement du fluide par la présence de l'avion, vont pouvoir être analysés via le calcul numérique. Se pose bien sûr le problème de la validité des résultats de la simulation numérique. Il ne faut pas perdre de vue que de multiples approximations sont à adopter pour rendre la simulation abordable. Ces hypothèses simplificatrices touchent aussi bien la géométrie de l'appareil que les innombrables phénomènes physiques qui peuvent avoir lieu. Le domaine discrétisé, sur lequel s'appuie la simulation numérique, n'existe pas dans la vie réelle et demande donc des compromis entre précision et temps de calcul.

Malgré les simplifications apportées au problème aérodynamique à résoudre, la simulation numérique s'avère très coûteuse d'un point de vue calculatoire. Or, bien souvent, la pertinence ou non d'une variante de forme de voilure va dépendre de la valeur de quelques grandeurs scalaires. Typiquement, les coefficients de portance et de traînée sont fréquemment utilisés pour mesurer la qualité de la forme proposée. Plus la finesse (quotient de la portance sur la traînée) est forte, plus la voilure étudiée est intéressante d'un point de vue aérodynamique. Bien sûr, d'autres critères vont rentrer en ligne de compte pour pouvoir accepter cette forme. Par exemple, la faisabilité, d'un point de vue structurel, est évidemment incontournable.

Dans ce contexte, un fort besoin en méthodologies innovantes, destinées à réduire le coût de calcul, se ressent. Cette thèse cherche à répondre à cette problématique. Il s'agit de toujours mieux maîtriser le calcul de grandeurs scalaires, c'est-à-dire le plus efficacement possible. Par efficace, on entend le fait d'éviter d'effectuer un nombre massif de simulations numériques. L'enjeu global de la thèse est donc d'avoir accès à des observations aérodynamiques scalaires cohérentes et précises pour un coût de calcul le plus faible possible. Souvent, pour appliquer nos idées innovantes, nous nous baserons sur l'estimation d'une unique observation. Il va de soit que les méthodologies présentées peuvent être répétées autant de fois qu'il y a de grandeurs scalaires à étudier. Le fait de ne considérer qu'une seule observation est choisi par souci de simplification.

La présente thèse s'est déroulée au sein de Dassault Aviation à Saint-Cloud, en collaboration avec l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT). Les codes industriels ont donc été utilisés pour illustrer les multiples contributions de ce mémoire. Le groupe Dassault Aviation possède un solveur des équations d'Euler 3D (géométrie en dimension trois) fonctionnant en volume fini. La technique des éléments finis est utilisée par le logiciel traitant les équations de Navier-Stokes (2D ou 3D). Une annexe est dédiée à la présentation de chacun de ces deux solveurs. Par ailleurs, tous les maillages traités seront non structurés et composés exclusivement de triangles (en 2D) ou de tétraèdres (en 3D).

Nos travaux vont donc proposer diverses stratégies pour maîtriser efficacement l'observation scalaire étudiée. Plus précisément, on peut les classer en trois catégories. Ce classement permet de regrouper les méthodes qui visent le même but : la maîtrise de l'observation. Les trois familles de méthodes peuvent être résumées par les mots-clé suivants : évaluation, fiabilité et optimisation. En voici succinctement la signification :

- Evaluation : il s'agit de prédire la valeur de l'observation aérodynamique lorsque certaines variables du calcul sont modifiées. On cherche ainsi à construire l'évolution (locale ou globale) de l'observation scalaire vis-à-vis de la variation de quelques paramètres d'entrée.
- Fiabilité : l'objectif est d'augmenter le niveau de confiance qu'il est possible d'accorder à une valeur d'observation aérodynamique issue d'une simulation numérique.
- Optimisation : nous cherchons la valeur de quelques paramètres d'entrée permettant à l'observation, en sortie du code de calcul, de respecter certains objectifs (par exemple, le fait de vouloir minimiser la traînée à portance fixée).

Chacun de ces trois points regroupe un certain nombre de concepts. Chaque concept va faire l'objet d'un chapitre de la présente thèse. Pour donner un avant-goût du contenu de ce mémoire, voici une présentation rapide des différentes stratégies étudiées.

- Le premier chapitre est dédié à **l'estimation des sensibilités premières et secondes de l'observation vis-à-vis de paramètres d'entrée du code de calcul**. La méthodologie suivie est la différentiation automatique des codes informatiques. Deux types de paramètre de dérivation seront envisagés. Nous verrons qu'un paramètre de type aérodynamique, c'est-à-dire indépendant du maillage utilisé pour la résolution numérique du problème, se traite différemment d'un paramètre géométrique. Après avoir illustré l'apport des dérivées secondes sur une étude liée à la propagation des incertitudes, nous détaillerons les formules mathématiques obtenues pour les sensibilités d'ordres 1 et 2 vis-à-vis des deux types de paramètre. En particulier, la formulation de la dérivée seconde de l'observation vis-à-vis d'un paramètre aérodynamique sera étendue au cas d'un paramètre géométrique. On parlera alors de formulation double adjointe. L'étape de différentiation automatique des codes informatiques sera ensuite décrite en détail. En particulier, nous mettrons l'accent sur les différents modes de fonctionnement du différentiateur automatique en précisant les avantages et inconvénients de chacun d'eux. La manière de valider pas à pas ce travail de différentiation sera également abordée. La présentation des codes industriels de calcul, notamment ceux résolvant les équations d'Euler et de Navier-Stokes, est fournie en annexes (A et B respectivement). Nous nous attacherons à donner une description complète des étapes successives nécessaires à l'estimation de la dérivée seconde d'une observation aérodynamique. En dernier lieu, nous analyserons la pertinence des dérivées premières et secondes calculées via la différentiation automatique des codes industriels. Pour cela, les tangentes et courbures seront tracées sur la courbe d'évolution de l'observation différentiée. Cette validation globale se fera sur un cas-test Navier-Stokes de référence.
- Le second chapitre concerne **la prédiction de l'effet d'une perturbation de maillage sur la valeur d'une observation aérodynamique scalaire**. L'objectif est d'éviter de résoudre complètement les équations de la mécanique des fluides à chaque modification de la géométrie du problème. On serait alors en mesure de prévoir à faible coût l'impact

d'un changement de forme sur certaines grandeurs aérodynamiques d'intérêt (comme la traînée ou la portance).

L'idée de base est de tenir compte du caractère non linéaire (voire singulier) de la relation entre l'observation étudiée et la perturbation de maillage. Pour cela, nous proposons la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe couramment utilisée. Devant une perturbation singulière (changement de la topologie par exemple), nous verrons que cette extension est indispensable. En effet, la correction adjointe n'est pas seulement imprécise mais erronée. Une contribution singulière liée à la perturbation vient fausser l'estimation adjointe.

Dans le monde industriel, les perturbations de forme de l'objet aérodynamique étudié sont souvent accompagnées de simples déplacements de sommets. Les perturbations de maillage sont alors régulières. On reste donc dans le cadre d'une telle modification de maillage. Nous montrerons que, même dans ce cas, la méthode des perturbations singulières s'avère essentielle à la prise en compte de la non-linéarité de la variation de l'observation scalaire.

La méthode des perturbations singulières consiste à remettre à jour en quelques itérations pseudo-stationnaires la solution des équations de la mécanique des fluides en initialisant par la solution non perturbée. Cette mise à jour peut même n'être que locale, n'affectant alors qu'un voisinage de la zone perturbée.

L'aspect non linéaire est capté rapidement avec un schéma itératif de résolution. Pour faire l'analogie avec le traitement d'un signal, on peut dire que l'on estime ainsi les hautes fréquences du signal induit par une modification géométrique. L'adjoint, quant à lui, sera utilisé pour capter les basses fréquences. Ainsi, au lieu de faire appel à l'observation elle-même, on propose de raisonner plutôt en terme de lagrangien. Avec cette méthodologie, il est possible d'estimer des tendances locales (sensibilités) ou globales d'évolution. Finalement, les meilleurs résultats seront obtenus lorsque la remise à jour touche non seulement la solution CFD, mais aussi l'adjoint du problème. On tient ainsi compte des deux types d'influence (basses et hautes fréquences).

Notons que la technique de perturbation singulière fut appliquée à la prédiction d'une observation aérodynamique scalaire en fin de thèse. Ainsi, nous n'avons pas exploité l'ensemble des domaines d'application de cette méthode. Pour fixer les idées, l'adaptation de maillage et la propagation d'incertitude (évoquée lors du chapitre suivant de la thèse) pourront être impactées par cette contribution innovante.

- Le troisième chapitre est dédié à **la propagation des incertitudes au sein d'un code de calcul complexe**. L'hypothèse initiale est que certains paramètres d'entrée sont incertains. Ils sont donc modélisés par des variables aléatoires respectant chacune une loi de probabilité spécifique. De même, l'observation en sortie du code de calcul, qui dépend de ces paramètres incertains, va devenir aussi aléatoire. L'objectif de ce chapitre va être de décrire le plus précisément possible l'aléa existant sur la valeur de l'observation. Les différentes stratégies existant dans la littérature seront évaluées en terme de faisabilité et de précision en contexte industriel. Parmi les diverses options possibles (Monte-Carlo, Monte-Carlo approchée, méthode des moments et chaos polynomial), nous montrerons que la méthode des moments est la voie la plus prometteuse. Elle utilise un développement de Taylor de l'observation pour en calculer analytiquement les moments statistiques. Malheureusement, la connaissance de ce type d'information peut ne pas suffire. Dans

un contexte multi-disciplinaire, nous avons en effet besoin d'estimer la loi de probabilité associée à l'observation aléatoire. Nous proposons alors de faire appel à l'approximation de Pearson (ou système de Pearson). Une loi de probabilité est construite à partir des quatre premiers moments statistiques. Une analyse du système de Pearson permettra de juger de la fiabilité de cette approximation. Cette méthodologie, combinant méthode des moments et système de Pearson, sera alors mise en œuvre sur un cas-test industriels (Euler).

- Le quatrième et ultime chapitre porte sur **l'optimisation sous incertitude**. L'idée est de résoudre un problème d'optimisation écrit en terme probabiliste. Nous privilégierons la méthode génétique, qui possède l'avantage d'offrir une vision plus globale du problème que l'optimisation à base de directions de descente. Or, cet aspect est fondamental en optimisation sous incertitude, où la solution cherchée est souvent le meilleur compromis entre plusieurs objectifs.

Nous commencerons par proposer une méthodologie générale pour adapter efficacement la technique génétique au traitement d'objectifs de type statistique. L'idée est de faire appel à la méthode des moments et, éventuellement, à l'approximation de Pearson. Deux faits sont à souligner. Tout d'abord, il est possible de remplacer la méthode des moments par une autre technique de propagation d'incertitude. Nous analyserons d'ailleurs les performances obtenues en adoptant plutôt la méthode Monte-Carlo approchée. D'autre part, nous verrons que le fait d'utiliser ou de ne pas utiliser le système de Pearson dépend directement du type d'objectif traité. Un objectif sera un moment statistique ou une probabilité de défaillance. **La prise en compte de probabilité en optimisation sous incertitude constitue l'une des contributions marquantes de cette thèse**. Nous utiliserons un cas-test industriel pour valider notre méthodologie d'optimisation sous incertitude.

Cet ultime chapitre sera particulièrement instructif car il va réutiliser les résultats de plusieurs chapitres précédents de la thèse (dérivées d'observation, méthode des moments, approximation de Pearson, ...).

La figure 1 récapitule les divers points de la thèse qui viennent d'être énumérés. Chacun d'eux est associé à l'un des trois grands axes de maîtrise d'une observation scalaire (évaluation, fiabilité et optimisation). D'autres domaines y sont ajoutés, à savoir la construction d'une surface de réponse adaptative (thématique d'évaluation), l'adaptation de maillage (thématique de fiabilité) et l'optimisation déterministe sans ou avec contrainte (thématique d'optimisation).

Cette introduction générale a mis en lumière le fil conducteur de la thèse. Un lien fort unit les quatre chapitres de ce mémoire, à savoir la maîtrise efficace de l'observation aérodynamique. Malgré tout, nous avons pris le parti de concevoir chaque chapitre comme une entité indépendante avec sa propre introduction, conclusion et bibliographie. La conclusion générale sera là pour rappeler la cohérence et l'unité de l'ensemble de ce travail.

Valorisations de la thèse :

Les trois ans de thèse (entre mars 2007 et mars 2010) furent notamment l'occasion de faire part

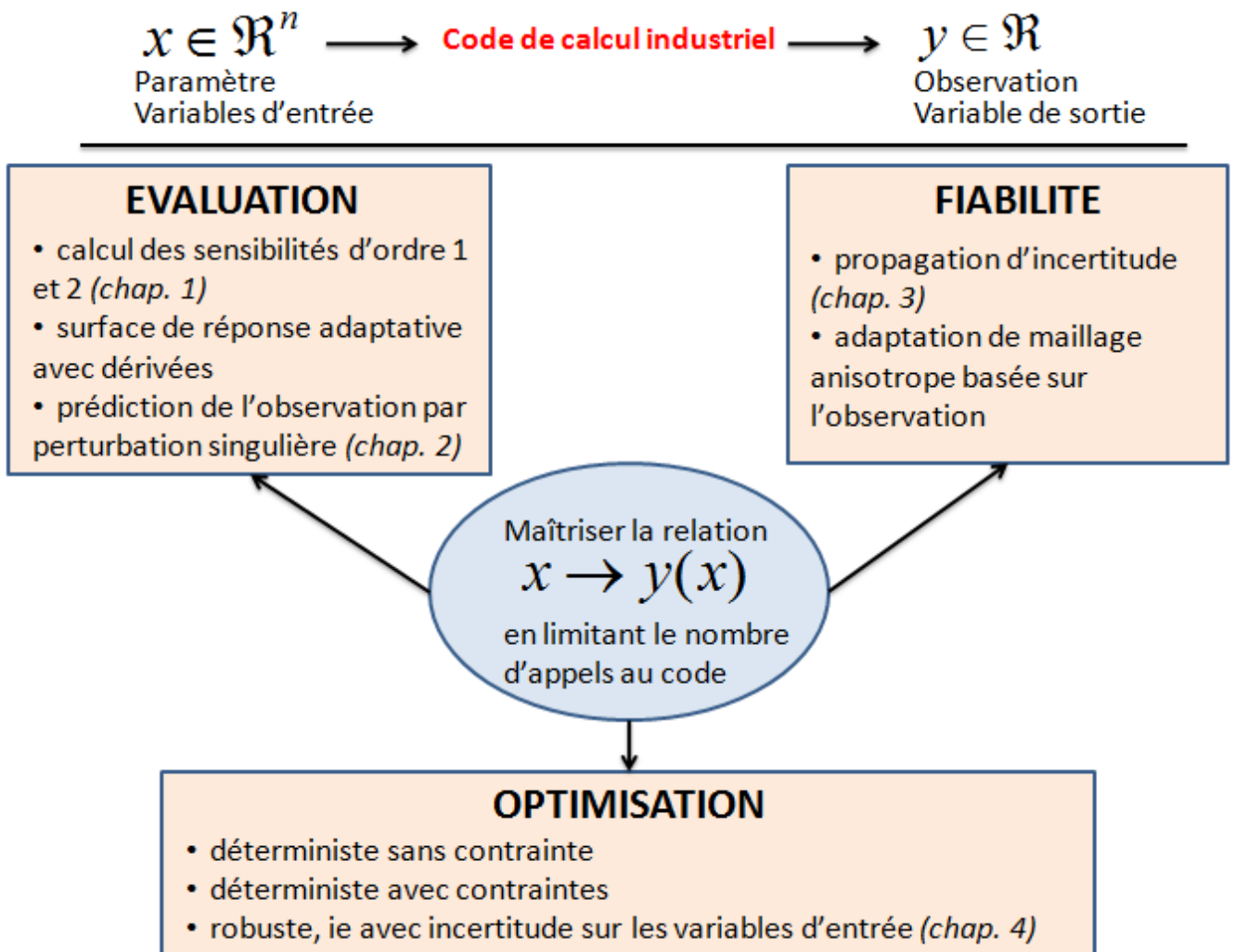


Figure 1 – Récapitulatif du plan général de la thèse.

au monde scientifique et industriel des travaux effectués. Voici un récapitulatif des principales valorisations ayant jalonées cette thèse :

- Présentation murale (poster) au 39^e Congrès national d'Analyse NUMérique (CANUM 2008). Ce congrès s'est tenu à Saint Jean de Monts (Vendée) du 26 au 30 mai 2008. Le poster présenté a pour titre : *calcul de la sensibilité d'ordre 2 d'une observation aérodynamique vis-à-vis d'un paramètre de forme*. Un prix récompensant les meilleurs posters fut d'ailleurs reçu à cette occasion.
- Publication d'une note pour un Compte-Rendu à l'Académie des Sciences (CRAS). La note a pour titre : *goal-oriented anisotropic grid adaptation*. Soumise le 6 février 2008, la note fut acceptée après révision le 4 septembre 2008.
- Présentation orale au 44^e Colloque d'Aérodynamique Appliquée, dédié à la maîtrise des incertitudes en aérodynamique expérimentale et numérique. Ce colloque s'est tenu à l'Ecole Centrale de Nantes du 23 au 25 mars 2009. La communication a pour titre : *analyse d'incertitude utilisant les dérivées d'ordre 2*.

- Présentation orale à la 4^e biennale de la Société française des Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI 2009). Ce congrès s’est tenu à la Colle sur Loup (Alpes Maritimes) du 25 au 29 mai 2009. La communication a pour titre : *réduction de l’incertitude sur l’évaluation d’une observation aérodynamique dans un contexte industriel*.
- Participation au projet européen NODESIM-CFD (*NON-Deterministic SIMulations for CFD-based design methodologies*). Une présentation orale a d’ailleurs eu lieu le 11 février 2010 à l’ONERA (Châtillon).
- Publication dans la série ESAIM (*European Series in Applied and Industrial Mathematics*). L’article publié en 2009 a pour titre : *calcul de la sensibilité d’ordre 2 d’une observation aérodynamique*. En voici la référence : ESAIM : Proc. 27 (2009) 138-155.
- Présentation orale à la seconde conférence internationale *ENGINEERING OPTimization* (ENGOPT 2010). Cette conférence s’est tenue à Lisbonne du 6 au 9 septembre 2010. La présentation a porté sur l’utilisation des dérivées secondes exactes de la fonction-coût en optimisation sans contrainte ou avec contraintes grâce à la méthode de Newton. L’application a concerné la minimisation de la traînée vis-à-vis de paramètres géométriques sur le cas-test de l’aile ONERA M6.

Chapitre I

Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Dans le contexte aéronautique, la performance d'un avion se mesure généralement par la donnée de quelques grandeurs scalaires. Par exemple, les coefficients de traînée et de portance définissent la qualité aérodynamique de la forme de l'objet et notamment de sa voilure. La maîtrise de l'évolution de ces observations scalaires vis-à-vis de certains paramètres (de type aérodynamique ou géométrique) du calcul s'avère donc essentielle pour la conception d'un avion performant. En particulier, les dérivées renseignent sur le comportement de l'évolution au voisinage d'un point. La connaissance de la valeur de la tangente (dérivée première) et de la courbure (dérivée seconde) locales peut représenter une source d'informations très utiles. Ce chapitre indique la stratégie retenue pour le calcul des dérivées premières et secondes d'observation aérodynamique scalaire en milieu industriel. Cette présentation théorique est suivie d'une validation détaillée sur des cas-test Euler et Navier-Stokes.

Introduction

La performance aérodynamique de la forme d'une voilure se résume à la donnée de quelques observations scalaires d'intérêt. Il s'agit principalement de la traînée (force s'opposant au mouvement) et de la portance (force garantissant le maintien de l'avion). Pour simplifier, le but de l'optimisation de forme est de déterminer la forme minimisant la traînée tout en maximisant la portance. La géométrie d'une voilure est paramétrée par un ensemble de variables de contrôle sur lesquelles il est possible de jouer pour déformer à loisir la forme. Au final, l'optimiseur prescrit une valeur particulière pour chacune de ces variables géométriques.

Tout repose sur le lien existant entre l'observation aérodynamique à optimiser (traînée ou portance) et les paramètres contrôlant la forme de l'objet. Il s'avère donc primordial de bien maîtriser l'évolution de ces observations devant une variation de chacun des paramètres d'optimisation considérés. Dans cette optique, les dérivées livrent une information cruciale quant au comportement de l'observation au voisinage d'un point de l'espace des paramètres. Ainsi, la connaissance des tangentes (**dérivées premières**) et des courbures (**dérivées secondes**) va faciliter grandement l'étude (et donc l'optimisation) de la traînée.

Pour disposer des dérivées d'une fonction, il est possible de se tourner vers la technique des

différences finies. Sur un cas mono-variable, il faut trois estimations de fonction pour pouvoir calculer les dérivées premières et secondes (valeur nominale du paramètre de dérivation et perturbations à gauche et à droite de cette valeur nominale). Ce nombre passe à neuf dans le cas de deux variables. La progression quadratique du nombre de calculs à effectuer vis-à-vis du nombre de variables de dérivation limite fortement l'usage des différences finies.

Pour contourner cette difficulté, il est naturel de faire appel à l'adjoint du problème. Ce dernier permet de reformuler les dérivées d'ordres 1 et 2 et de les estimer à mémoire de stockage et à coût de calcul limités (l'adjoint étant solution d'une équation linéaire). De plus, on peut montrer que l'adjoint permet de rendre linéaire (et non plus quadratique) la relation entre le coût de calcul et le nombre de variables de dérivation.

Le calcul des sensibilités par la technique adjointe demande de différencier l'ensemble des routines liant les variables de dérivation et l'observation. Une bonne maîtrise du code CFD est donc indispensable à cette tâche de **différentiation automatique de code**. Contrairement aux différences finies, cette alternative est donc intrusive. Il faut modifier le code de calcul de l'intérieur et non pas s'en servir comme une simple boîte noire.

Notons qu'une alternative possible à la différenciation automatique et à la méthode des différences finies aurait été d'utiliser la technique de la dérivation complexe. Cette variante est très intrusive au sens où il faut rendre complexe l'ensemble des variables traitées par le code de calcul résolvant les équations de la mécanique des fluides.

La question légitime qui se pose concerne l'ordre de dérivation souhaité. En clair, les dérivées secondes constituent-elles un réel apport vis-à-vis de l'ordre 1 déjà disponible ? Face à cette interrogation, nous débutons ce chapitre par une valorisation rapide des sensibilités secondes en propagation d'incertitude (prélude du chapitre 4 de la thèse). Une fois confirmé l'intérêt de l'ordre 2, nous formulons les expressions retenues des dérivées premières et secondes d'une observation scalaire face à deux types de paramètre (aérodynamique et géométrique). Deux adjoints sont utilisés, l'un relié au résidu fluide (Euler ou Navier-Stokes) et l'autre à la déformation de maillage (uniquement dans le cadre de paramètre géométrique). Nous détaillons ensuite la méthodologie pour effectuer le travail de différenciation automatique des codes industriels (Euler et Navier-Stokes) de Dassault Aviation et la manière de valider les modifications. Bien plus, nous soulignons la pertinence de la formulation des dérivées calculées, en terme de stockage mémoire et de coût de calcul.

La seconde partie du chapitre porte sur la validation des dérivées secondes implémentées. On se focalise sur la validation des dérivées de la traînée en présence des équations de Navier-Stokes 2D (profil RAE2822). On vérifiera la cohérence des sensibilités premières et secondes vis-à-vis de paramètres géométriques. Enfin, nous terminerons l'étude par la validation des dérivées secondes sur un cas-test Navier-Stokes 3D (profil RAE2822 dupliqué).

1 Exemple motivant le calcul des dérivées secondes

Les codes industriels de Dassault Aviation résolvant les équations de la mécanique des fluides (Euler et Navier-Stokes) étaient différenciés à l'ordre 1 avant même le début de cette thèse. Les dérivées premières d'une observation aérodynamique étaient donc disponibles. Un des grands travaux de cette thèse fut de différencier ces codes à l'ordre 2 afin d'avoir accès aux sensibilités secondes des observations.

Avant de se lancer dans la méthodologie utilisée pour mener à bien cette tâche, il est primordial de **justifier**

I.1 Exemple motivant le calcul des dérivées secondes

L'importance des dérivées secondes. L'exemple très simple qui va suivre fut d'ailleurs à l'origine de la prise de décision de différencier les codes industriels à l'ordre 2. Cet exemple s'inscrit dans l'étude de la propagation d'incertitude du chapitre 4 de ce mémoire. D'autres chapitres de cette thèse utiliseront ces sensibilités secondes pour diverses problématiques. Citons l'optimisation déterministe (chap. 6 et 7) ou la construction d'une surface de réponse avec dérivées (chap. 2). Ces travaux confirmeront l'importance considérable de cet effort de différenciation des codes industriels de Dassault Aviation à l'ordre 2.

Présentons maintenant notre exemple, dont le thème général est la propagation d'incertitude. L'idée de base est d'estimer l'aléa sur une observation lorsque certaines variables (influençant la valeur de cette observation) sont incertaines.

Considérons une fonctionnelle scalaire $f(x)$ dépendant d'une variable scalaire x . Son expression analytique est la suivante :

$$f(x) = x \cos(x)^2$$

Par ailleurs, sept valeurs nominales de paramètre x sont définies. Ces dernières (notées $(x_i)_{1 \leq i \leq 7}$) valent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0.653271187 \\ x_2 = x_1 + 0.05 \\ x_3 = x_1 + 0.1 \\ x_4 = 1.1 \\ x_5 = \frac{\pi}{2} + 0.1 \\ x_6 = \frac{\pi}{2} + 0.05 \\ x_7 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

Ces sept valeurs de paramètre sont placées sur la courbe de la fonction $f(x)$ (figure I.1).

On s'aperçoit que les valeurs x_1 et x_7 correspondent respectivement à un maximum et à un minimum de la fonction f . De plus, les données x_2 et x_3 sont proches du maximum local x_1 tandis que les données x_5 et x_6 sont proches du minimum local x_7 . Enfin, le point x_4 se situe à mi-chemin entre les deux extrema locaux x_1 et x_7 de la fonction f .

L'idée est de perturber ces sept valeurs nominales $(x_i)_{1 \leq i \leq 7}$. Pour cela, on définit sept variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq 7}$ comme suit :

$$X_i = x_i + \Delta \quad \forall i \in \{1, \dots, 7\}$$

où Δ désigne une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type $\frac{1}{10}$. Ainsi, la variable aléatoire X_i (avec $i \in \{1, \dots, 7\}$) suit la loi normale de moyenne x_i et d'écart-type $\frac{1}{10}$.

La propagation d'incertitude consiste à estimer l'aléa engendré par chacune des sept variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq 7}$ sur la fonctionnelle f . Il s'agit donc de décrire le plus précisément possible la loi de probabilité suivie par les quantités $(f(X_i))_{1 \leq i \leq 7}$.

Dans le chapitre 4 de ce mémoire (chapitre dédié à la prise en compte de l'incertitude en aérodynamique), nous montrerons que la technique la plus appropriée pour propager l'incertitude est la méthode des moments.

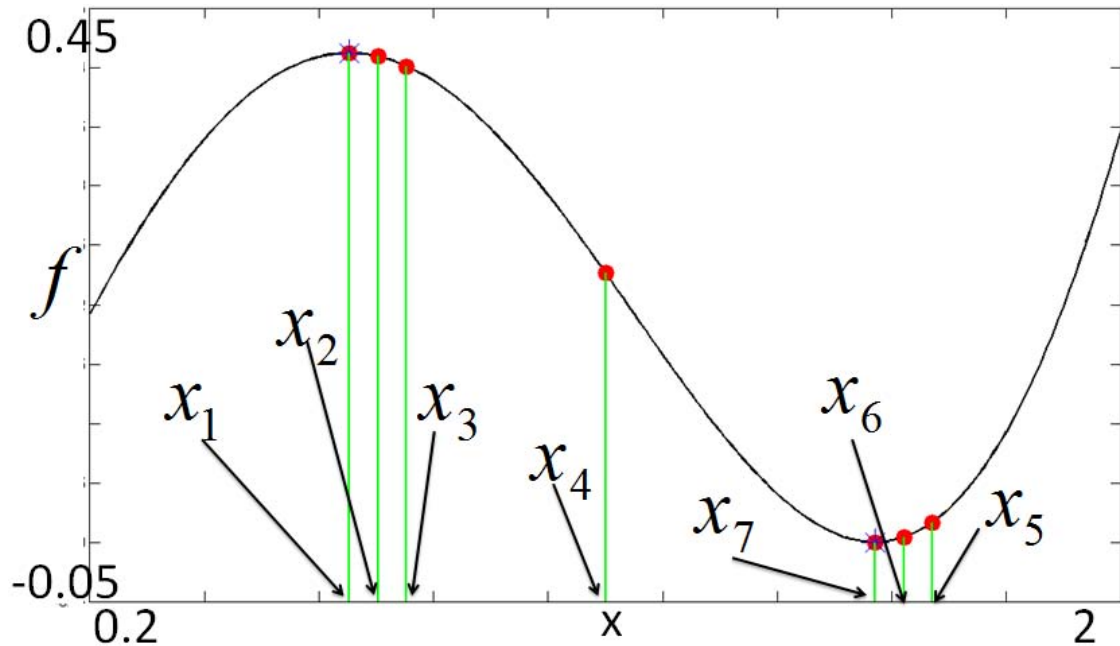


Figure I.1 – Fonction $f(x)$ avec la position des sept valeurs nominales $(x_i)_{1 \leq i \leq 7}$ (points rouges) ainsi que la position des deux extrema locaux de f (étoiles bleues).

Le principe de base de la méthode des moments est de calculer analytiquement la moyenne et l'écart-type de l'observation aérodynamique sur la base de son développement de Taylor.

Sur notre cas simple, la méthode des moments revient donc à calculer la moyenne et l'écart-type des variables aléatoires $(f(X_i))_{1 \leq i \leq 7}$ en utilisant le développement de Taylor de la fonction $f(x)$ vis-à-vis du paramètre x . Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 pour de plus amples précisions.

Se pose bien sûr le problème de savoir jusqu'à quel ordre aller dans le développement de Taylor de la fonction f . Sur ce cas analytique, nous pouvons immédiatement envisager les ordres 1 et 2. Les méthodes des moments d'ordres 1 et 2 seront notées respectivement M_1 et M_2 . L'idée est de comparer l'estimation des sept moyennes et écarts-type fournis par ces deux techniques M_1 et M_2 par rapport aux valeurs de référence données par la méthode Monte-Carlo M_{MC} .

Pour mener une telle comparaison, quatre erreurs sont calculées pour chacune des sept quantités incertaines $(f(X_i))_{1 \leq i \leq 7}$. Explicitons-les pour la variable aléatoire $f(X_{i_0})$ (avec $i_0 \in \{1, \dots, 7\}$). Deux erreurs se rattachent à la moyenne. Notées $e_{\mu_{i_0}}^{(1)}$ et $e_{\mu_{i_0}}^{(2)}$, elles correspondent aux erreurs relatives entre les moyennes de $f(X_{i_0})$ calculées par la méthode Monte-Carlo et par la méthode des moments d'ordres 1 et 2 respectivement. Elles valent donc :

$$\begin{cases} e_{\mu_{i_0}}^{(1)} = 100 \frac{|\mu_{i_0}^{(M_{MC})} - \mu_{i_0}^{(M_1)}|}{|\mu_{i_0}^{(M_{MC})}|} \\ e_{\mu_{i_0}}^{(2)} = 100 \frac{|\mu_{i_0}^{(M_{MC})} - \mu_{i_0}^{(M_2)}|}{|\mu_{i_0}^{(M_{MC})}|} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où $\mu_{i_0}^{(M)}$ désigne la moyenne de $f(X_{i_0})$ calculée par la méthode M . On définit les mêmes types d'erreur pour

I.1 Exemple motivant le calcul des dérivées secondes

l'écart-type de $f(X_{i_0})$. Les erreurs $e_{\sigma_{i_0}}^{(1)}$ et $e_{\sigma_{i_0}}^{(2)}$ sont calculées par les formules suivantes :

$$\begin{cases} e_{\sigma_{i_0}}^{(1)} = 100 \frac{|\sigma_{i_0}^{(M_{MC})} - \sigma_{i_0}^{(M_1)}|}{|\sigma_{i_0}^{(M_{MC})}|} \\ e_{\sigma_{i_0}}^{(2)} = 100 \frac{|\sigma_{i_0}^{(M_{MC})} - \sigma_{i_0}^{(M_2)}|}{|\sigma_{i_0}^{(M_{MC})}|} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

où $\sigma_{i_0}^{(M)}$ désigne l'écart-type de $f(X_{i_0})$ calculé par la méthode M . Comme l'indiquent les formules, toutes les erreurs relatives sont en pourcentage.

Les résultats obtenus sont récapitulés par le tableau I.1.

	$e_{\mu_i}^{(1)}$	$e_{\mu_i}^{(2)}$	$e_{\sigma_i}^{(1)}$	$e_{\sigma_i}^{(2)}$
$i = 1$	2.8	3.2e-2	100	2.4
$i = 2$	2.7	2.3e-2	38.9	4.6
$i = 3$	2.7	1.4e-2	12.8	5.1
$i = 4$	7.8e-1	6.3e-2	4.9	5.0
$i = 5$	52.5	9.5e-2	23.2	3.7
$i = 6$	80.9	5.2e-2	46.3	4.4
$i = 7$	100	3.2e-1	100	2.1e-1

Tableau I.1 – Erreurs relatives (en pourcentage) de la méthode des moments sur la moyenne et l'écart-type de la fonction analytique f .

Le fait essentiel à noter est que, plus la valeur nominale x_i (avec $i \in \{1, \dots, 7\}$) est proche d'un extremum local de la fonction f , plus l'erreur relative de la méthode des moments d'ordre 1 est forte. Ceci se vérifie tant pour la moyenne (erreur $e_{\mu_i}^{(1)}$) que pour l'écart-type (erreur $e_{\sigma_i}^{(1)}$). On atteint même 100% d'erreur pour les deux extrema locaux x_1 et x_7 . La méthode des moments d'ordre 1 ne donne donc aucune information en ces points-là. Cette constatation est logique car la dérivée première de la fonction est alors nulle.

Ainsi, le fait de considérer uniquement les sensibilités premières ne permet pas d'approximer correctement la moyenne et l'écart-type de la fonction au voisinage des extrema locaux. Or, la propagation d'incertitude va souvent servir à estimer la robustesse d'une solution fournie par un optimiseur, donc potentiellement proche d'un extremum de la fonction. Cette constatation a mis en évidence le besoin de pousser le développement de Taylor au moins à l'ordre 2.

Les erreurs relatives obtenues avec la méthode des moments d'ordre 2 restent toutes inférieures à 1% pour la moyenne et 6% pour l'écart-type. D'autre part, on ne remarque pas de différence entre un extremum local de la fonction (x_1 et x_7) et un point quelconque (x_4). Avec les dérivées secondes de la fonction, la méthode des moments donne donc de très bons résultats sur une fonctionnelle f non quadratique, y compris au voisinage d'un extremum.

Cet exemple très simple a montré le caractère essentiel des dérivées secondes pour mener une étude de propagation d'incertitude efficace (ie avec la méthode des moments).

Fort de cette justification, nous pouvons nous atteler à la différentiation des codes industriels de Dassault Aviation à l'ordre 2. On commence par expliciter la formulation des sensibilités premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de certains types de paramètre d'entrée.

2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques

Nous allons expliciter les **formules des sensibilités d'ordres 1 et 2** d'une observation aérodynamique par rapport à deux types de paramètre d'entrée du code CFD (aérodynamique et géométrique). L'objectif est d'aboutir à des expressions de dérivées nécessitant le plus faible coût de calcul possible tout en restant réalisable du point de vue de la place-mémoire.

Commençons donc par fixer les notations

2.1 Présentation des notations adoptées

La forme d'un objet avionique (voilure, fuselage, avion complet, ...) doit être testée d'un point de vue aérodynamique. Nous parlerons de la peau pour désigner la surface de l'objet étudié. Pour être calculable, le milieu extérieur doit être limité par une frontière infinie artificielle. Celle-ci est placée suffisamment loin de l'objet pour ne pas perturber la résolution des équations de la mécanique des fluides. Dans toute la suite, l'entier d_i désignera la dimension du problème.

Bien sûr, l'ensemble constitué de la frontière infinie, du milieu extérieur et de la peau de l'objet aérodynamique doit être discrétisé. Le maillage qui va résulter de cette discrétisation constituera le support de la résolution numérique des équations fluides.

La définition du maillage utilisé pour mener les calculs est essentielle pour aboutir à des résultats réalistes. Les notations liées directement au maillage sont données ci-dessous.

- La première étape pour constituer le maillage est de discrétiser la peau de l'objet. La géométrie est fournie par un outil de Conception Assistée par Ordinateur (CAO). La discrétisation de la surface géométrique va définir le maillage-peau, noté M_p . Ainsi, le maillage-peau se présente comme un réseau de N_p sommets connectés entre eux et répartis sur la peau de l'objet aérodynamique étudié. Les coordonnées de tous les sommets-peau sont notées X_p . Cette quantité X_p regroupe donc $d_i N_p$ réels (d_i étant la dimension du problème).
- Ensuite, il s'agit de mailler le milieu extérieur, compris entre la frontière infinie d'une part et par la peau de l'objet aérodynamique d'autre part. Le maillage volumique M_v devra respecter la discrétisation de la peau définie lors de l'étape précédente. Ce maillage M_v est constitué de N_v sommets connectés entre eux, avec bien sûr $N_v > N_p$. Les coordonnées de l'ensemble de ces N_v sommets sont notées X_v (avec $X_p \subset X_v$).

La définition des maillages M_v et M_p constitue la partie géométrique du problème fluide à résoudre.

Une fois établie la géométrie du problème, les équations de la mécanique des fluides sont résolues en chaque sommet du maillage volumique M_v . Il peut s'agir des équations d'Euler ou de Navier-Stokes. A ce stade-là, aucune différence n'est faite entre ces deux systèmes d'équations.

Plus précisément, la résolution des équations de la mécanique des fluides consiste à déterminer la densité, l'énergie et la quantité de mouvement en chacun des N_v sommets du maillage volumique. La solution finale sera notée W . Cette quantité W , appelée aussi vecteur d'état, est de taille $(d_i + 2)N_v$. En notant E le système d'équations fluides, on a alors l'égalité suivante :

$$E(W) = 0 \tag{I.4}$$

I.2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques

Par souci de simplicité, on omet volontairement d'expliciter la dépendance de E et W vis-à-vis du maillage M_v utilisé.

Le fait d'avoir estimé numériquement la solution W du problème aérodynamique va nous servir à calculer certaines observations scalaires d'intérêt. La notation $J = J(W)$ désignera l'observation sur laquelle nous allons nous focaliser. Les plus connues des observations sont les coefficients de traînée et de portance. Rappelons que la traînée (resp. la portance) est la composante des efforts exercés sur le corps, dans la direction opposée (resp. perpendiculaire) à la vitesse relative du corps par rapport au fluide. Associé à l'observation scalaire J , on définit l'adjoint fluide ψ (cf [GIL03]). Ce dernier est solution de l'équation linéaire suivante :

$$\psi^T \frac{\partial E}{\partial W} = \frac{\partial J}{\partial W} \quad (\text{I.5})$$

L'adjoint fluide ψ possède la spécificité d'être de norme maximale dans les zones du maillage qui influencent la valeur de l'observation J .

L'objectif est donc d'exprimer les dérivées premières et secondes de l'observation J vis-à-vis de deux types différents de paramètre d'entrée du problème.

- Le premier type de paramètre envisagé correspond à la **classe des variables aérodynamiques**. Une telle variable (notée λ) a la spécificité d'être indépendante de la définition du maillage. Sa valeur n'influe donc pas sur la position des sommets utilisés pour la résolution des équations fluides. Comme exemple de paramètre aérodynamique λ , nous pouvons citer le nombre de Mach M_a ou l'angle d'incidence α , donnant l'orientation de l'écoulement à l'infini.
- Le second type de paramètre envisagé correspond à la **classe des variables géométriques**. Cette fois-ci, une telle variable influence directement le maillage considéré pour la résolution des équations. En effet, les paramètres géométriques (notés ν) permettent de contrôler la forme de l'objet aérodynamique autour duquel l'écoulement est analysé. A chaque nouvelle valeur d'un paramètre géométrique, il faut donc redéfinir les maillages peau M_p et volumique M_v avant de pouvoir résoudre les équations fluides. Dans le cas de l'étude d'un profil d'aile, quelques variables géométriques sont régulièrement modifiées pour établir la forme optimale. Il s'agit de l'épaisseur relative e_P , de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C et de l'angle de rotation globale α_R . Notons que ce dernier paramètre est la traduction géométrique de l'angle d'incidence α (variable aérodynamique).

Pour la première classe de paramètre (variable aérodynamique λ), on peut réécrire les équations fluides et l'observation avec les dépendances adéquates.

$$\begin{cases} E(\lambda, W(\lambda)) = 0 \\ J = J(\lambda, W(\lambda)) \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

En particulier, on note une dépendance de l'observation J vis-à-vis de la variable aérodynamique λ de type explicite et de type implicite, via le vecteur d'état W . Ces deux dépendances sont primordiales pour ensuite estimer les dérivées de J par rapport à λ .

La seconde classe de paramètre (variable géométrique ν) se traite différemment. En effet, contrairement aux paramètres aérodynamiques, les variables géométriques n'influencent pas directement l'observation J . En revanche, la dépendance de J vis-à-vis de ν se fait par l'intermédiaire du maillage volumique M_v utilisé pour la résolution du problème. On considérera donc plutôt les écritures suivantes :

$$\begin{cases} E(X_v(\nu), W(X_v(\nu))) = 0 \\ J = J(X_v(\nu), W(X_v(\nu))) \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Dans ce cas, il est donc primordial d'expliciter la dépendance des grandeurs manipulées vis-à-vis des coordonnées X_v du maillage volumique.

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Partant d'un maillage volumique initial, la question qui se pose est de savoir comment remailler ce dernier lorsque les paramètres géométriques sont modifiés. Pour le maillage-peau, on se contente de le déformer en même temps que l'objet. Par contre, le nouveau maillage volumique va s'obtenir en propageant la déformation de la peau à l'ensemble du maillage. Pour cela, on utilise l'opérateur L d'élasticité linéaire. Un autre système d'équations (en plus des équations E de la mécanique des fluides) doit être résolu pour déterminer le nouveau maillage. Ce dernier s'écrit :

$$L(X_p(\nu), X_v(\nu)) = 0 \quad (\text{I.8})$$

Cet opérateur L propage donc la déformation du maillage peau M_p (de coordonnées X_p) au maillage volumique M_v (de coordonnées X_v) pour chaque nouvelle valeur du paramètre géométrique ν .

Un nouvel adjoint (noté ϕ) va alors être introduit. Il est rattaché à la déformation de maillage occasionnée par les paramètres géométriques ν . L'adjoint ϕ (appelé adjoint de déformation) est solution de l'équation linéaire suivante :

$$\phi^T \frac{\partial L}{\partial X_v} = \frac{\partial J}{\partial X_v} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial X_v} \quad (\text{I.9})$$

Nanti de toutes ces notations, nous pouvons passer à la formulation des sensibilités de l'observation J , en commençant par les dérivées premières vis-à-vis d'un paramètre aérodynamique.

2.2 Expression de la dérivée première d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre aérodynamique

On souhaite donc exprimer la dérivée première de l'observation scalaire J vis-à-vis d'un paramètre aérodynamique λ , à savoir la quantité $\frac{dJ}{d\lambda}$.

Une première possibilité consiste à faire appel à la technique des **différences finies** (cf [HIC78]). Deux défauts majeurs viennent obscurcir cette voie. Tout d'abord, le coût de calcul est important, surtout lorsque le nombre de paramètres de dérivation augmente. Par ailleurs, la précision est directement dépendante de la perturbation choisie. Certains travaux ont cherché à améliorer cette méthodologie, comme [NAR95]. Une seconde possibilité est la voie de la **dérivée complexe** ([LYN67], [MAR00], [MAR03] ou [SQU98]). Contrairement à la technique des différences finies, la dérivée première ne souffre alors plus d'un problème de précision. En effet, on évite de faire apparaître une différence de fonctions. Deux points ne plaident pas en faveur de cette stratégie de différentiation complexe. Tout d'abord, il est bien sûr nécessaire de modifier intégralement le code de calcul, en passant les variables utilisées dans le domaine complexe. Cette remarque est incontestablement un frein à la différentiation complexe, surtout en présence d'un code de calcul industriel comportant un grand nombre de routines. Par ailleurs, l'avantage de la différentiation complexe sur la technique des différences finies se restreint à la dérivée première. Notons que certaines études (comme [LAI08]) cherchent à réduire l'imprécision de la dérivée seconde complexe. L'extension de la méthode complexe au calcul des dérivées d'ordre strictement supérieur à 1 est envisageable et semble prometteuse (**méthode multi-complexe**, cf [SAM10] ou [LAN10]). La troisième possibilité envisagée pour l'estimation des dérivées premières et secondes d'une observation scalaire consiste à utiliser la voie de la **différentiation automatique** de code, en faisant intervenir la solution adjointe du problème (cf [JAM95]). Dans notre étude, nous nous focaliserons sur cette manière de faire. Plus précisément, nous partons des travaux de Ghates et Giles [GHA07] qui se sont focalisés sur des paramètres aérodynamiques de dérivation, pour étendre les formulations de dérivées d'une observation scalaire au cas de paramètres géométriques.

I.2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques

L'observation J à différentier par rapport à λ s'écrit :

$$J = J(\lambda, W(\lambda)) \quad (\text{I.10})$$

La différentiation première de J par rapport à λ donne la relation suivante :

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{dW}{d\lambda} \quad (\text{I.11})$$

Or, la grandeur $\frac{dW}{d\lambda}$ est solution d'un système linéaire spécifique. Il s'agit d'éviter ce coût supplémentaire en cherchant une expression équivalente de cette quantité.

Pour cela, on part de l'égalité donnée par la résolution du problème de base, à savoir :

$$E(\lambda, W(\lambda)) = 0 \quad (\text{I.12})$$

La différentiation première, par rapport au paramètre λ , de cette dernière égalité fournit la relation cherchée, à savoir :

$$\frac{dW}{d\lambda} = -\left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (\text{I.13})$$

Après remplacement de la dérivée $\frac{dW}{d\lambda}$ par cette expression équivalente, on aboutit à l'égalité :

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (\text{I.14})$$

Or, on peut reconnaître l'adjoint fluide ψ au sein de cette expression. En effet, on a :

$$\psi^T = \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} \quad (\text{I.15})$$

La **dérivée première de l'observation aérodynamique scalaire J vis-à-vis du paramètre aérodynamique λ** se simplifie donc de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial \lambda}} \quad (\text{I.16})$$

De ce fait, la détermination de la sensibilité de J par rapport à λ nécessite de résoudre l'équation linéaire vérifiée par l'adjoint fluide ψ . Il faut également avoir différentié à l'ordre 1 les codes de calcul par rapport au paramètre aérodynamique considéré (à cause des quantités $\frac{\partial J}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial E}{\partial \lambda}$). Nous reviendrons sur cette tâche de différentiation ultérieurement.

2.3 Expression de la dérivée première d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre géométrique

On souhaite donc exprimer la dérivée première de l'observation scalaire J vis-à-vis d'un paramètre géométrique ν , à savoir la quantité $\frac{dJ}{d\nu}$.

L'observation scalaire J est différentiée par rapport au paramètre géométrique ν . On rappelle la relation

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

liant les deux grandeurs en question :

$$J = J(X_v(\nu), W(X_v(\nu))) \quad (\text{I.17})$$

Le paramètre géométrique ν influence l'observation J par l'intermédiaire de la déformation qu'il engendre sur la géométrie du problème. Les coordonnées X_v du maillage volumique dépendent donc directement de la valeur de la variable ν , d'où l'égalité précédente.

A partir de là, la différentiation de J par rapport à ν est effectuée.

$$\frac{dJ}{d\nu} = \left(\frac{\partial J}{\partial X_v} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial X_v} \right) \frac{dX_v}{d\nu} \quad (\text{I.18})$$

On souhaite éviter de calculer les quantités $\frac{\partial W}{\partial X_v}$ et $\frac{dX_v}{d\nu}$. Il s'agit donc de trouver des expressions équivalentes de chacune de ces deux grandeurs.

Pour cela, on part des deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} E(X_v(\nu), W(X_v(\nu))) = 0 \\ L(X_p(\nu), X_v(\nu)) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

On reconnaît le système E d'équations de la mécanique des fluides d'une part et le système L d'élasticité linéaire destiné à propager la déformation de la peau à l'ensemble du maillage volumique d'autre part.

Les systèmes d'équations E et L sont différenciés par rapport aux coordonnées volumiques X_v et par rapport au paramètre ν respectivement. Les égalités cherchées en découlent :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial X_v} = -\left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} \frac{\partial E}{\partial X_v} \\ \frac{dX_v}{d\nu} = -\left(\frac{\partial L}{\partial X_v}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{dX_p}{d\nu} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Après remplacement, il vient :

$$\frac{dJ}{d\nu} = -\left(\frac{\partial J}{\partial X_v} - \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} \frac{\partial E}{\partial X_v}\right) \left(\frac{\partial L}{\partial X_v}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{dX_p}{d\nu} \quad (\text{I.21})$$

Comme pour le paramètre aérodynamique λ , l'adjoint ψ apparaît dans la formulation précédente. En effet, on a :

$$\psi^T = \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} \quad (\text{I.22})$$

ce qui permet de simplifier l'expression de la dérivée $\frac{dJ}{d\nu}$ de la manière suivante :

$$\frac{dJ}{d\nu} = -\left(\frac{\partial J}{\partial X_v} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial X_v}\right) \left(\frac{\partial L}{\partial X_v}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{dX_p}{d\nu} \quad (\text{I.23})$$

De là, l'adjoint ϕ de déformation va permettre de condenser encore la formulation proposée. En effet, on sait que :

$$\phi^T = \left(\frac{\partial J}{\partial X_v} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial X_v}\right) \left(\frac{\partial L}{\partial X_v}\right)^{-1} \quad (\text{I.24})$$

On aboutit ainsi à l'expression finale de la **dérivée première de l'observation aérodynamique scalaire**

I.2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques

J vis-à-vis du paramètre géométrique ν :

$$\boxed{\frac{dJ}{d\nu} = -\phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{dX_p}{d\nu}} \quad (\text{I.25})$$

Cette égalité suppose que les opérateurs E et L sont différentiés à l'ordre 1 vis-à-vis des coordonnées volumiques du maillage.

Par ailleurs, pour estimer $\frac{dJ}{d\nu}$, deux systèmes linéaires doivent être résolus, dont les adjoints fluides ψ et de déformation ϕ sont les solutions respectives. Notons que l'adjoint ψ n'intervient pas directement dans la formulation mais influence l'adjoint ϕ .

Etant dans le cadre de petites déformations, l'opérateur d'élasticité L se résout en une seule itération (ou étape). La stratégie multi-étapes, essentielle lorsque les déformations sont trop importantes, n'a pas lieu d'être. N'étant pas en présence d'une résolution multi-étapes pour la déformation, l'opérateur L est linéaire vis-à-vis des coordonnées du maillage. Ainsi, la matrice $\frac{\partial L}{\partial X_v}$ à inverser pour déterminer l'adjoint ϕ de déformation est constante, donc quasiment immédiate à inverser. Le coût lié à la détermination de l'adjoint de déformation ϕ peut donc être négligé.

De ce fait, le coût de calcul pour estimer la dérivée première $\frac{dJ}{d\nu}$ équivaut à celui d'un système linéaire, dont la solution est l'adjoint fluide ψ .

Enfin, le terme $\frac{dX_p}{d\nu}$ vient directement du logiciel de CAO qui s'est chargé d'effectuer la déformation de la peau du maillage, conformément au paramètre géométrique ν .

2.4 Expression de la dérivée seconde d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre aérodynamique

On souhaite donc exprimer la dérivée seconde de l'observation scalaire J vis-à-vis du paramètre aérodynamique λ , à savoir la quantité $\frac{d^2 J}{d\lambda^2}$.

Une première façon de faire consiste à différentier par rapport à λ l'expression de la dérivée première $\frac{dJ}{d\nu}$ établie précédemment.

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (\text{I.26})$$

D'emblée, on s'aperçoit que des dérivées d'adjoint vont intervenir, ce qui compliquerait l'estimation de la dérivée seconde cherchée.

Pour éviter cela, on repart plutôt de la formulation sans adjoint, à savoir :

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{dW}{d\lambda} \quad (\text{I.27})$$

Différentier cette relation par rapport au paramètre λ donne l'expression suivante :

$$\frac{d^2 J}{d\lambda^2} = D_\lambda^{(a)} J + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{d^2 W}{d\lambda^2} \quad (\text{I.28})$$

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

où l'opérateur $D_\lambda^{(a)}$ regroupe les dérivées secondes partielles.

$$D_\lambda^{(a)} \cdot = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial W} \frac{dW}{d\lambda} + \left(\frac{dW}{d\lambda}\right)^T \frac{\partial^2}{\partial W^2} \frac{dW}{d\lambda} \quad (\text{I.29})$$

Le but est désormais d'éviter d'avoir à évaluer le terme $\frac{d^2W}{d\lambda^2}$. Pour cela, l'égalité suivante :

$$E(\lambda, W(\lambda)) = 0 \quad (\text{I.30})$$

est différenciée deux fois par rapport au paramètre aérodynamique λ . Ceci permet d'aboutir à la relation cherchée.

$$\frac{d^2W}{d\lambda^2} = -\left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} D_\lambda^{(a)} E \quad (\text{I.31})$$

La dérivée seconde de l'observation J devient alors :

$$\frac{d^2J}{d\lambda^2} = D_\lambda^{(a)} J - \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^{-1} D_\lambda^{(a)} E \quad (\text{I.32})$$

En utilisant l'adjoint fluide ψ , la **dérivée seconde de l'observation aérodynamique scalaire J vis-à-vis du paramètre aérodynamique λ** :

$$\boxed{\frac{d^2J}{d\lambda^2} = D_\lambda^{(a)} J - \psi^T D_\lambda^{(a)} E} \quad (\text{I.33})$$

L'évaluation des termes $D_\lambda^{(a)} J$ et $D_\lambda^{(a)} E$ demande d'avoir des codes de calcul différenciés à l'ordre 2 vis-à-vis de λ et W .

Contrairement à la dérivée première $\frac{dJ}{d\lambda}$, il n'est pas possible de faire l'économie de l'estimation de la quantité $\frac{dW}{d\lambda}$ qui intervient via l'opérateur $D_\lambda^{(a)}$. Ainsi, pour déterminer la dérivée seconde de l'observation J par rapport à λ , deux systèmes linéaires sont à résoudre (contre un seul pour la dérivée première).

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial E}{\partial W}\right)^T \psi = \left(\frac{\partial J}{\partial W}\right)^T \\ \frac{\partial E}{\partial W} \frac{dW}{d\lambda} = -\frac{\partial E}{\partial \lambda} \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

Les solutions respectives (ψ et $\frac{dW}{d\lambda}$) permettront de former la sensibilité cherchée. Notons que la première stratégie envisagée, repoussée d'emblée pour éviter de faire intervenir des sensibilités d'adjoint, aurait aussi demandé la détermination de ψ et $\frac{dW}{d\lambda}$. Ainsi, l'évaluation des dérivées d'adjoint aurait constitué un coût supplémentaire par rapport à celui que nécessite la formulation proposée. En ce sens, notre méthodologie est la plus avantageuse.

2.5 Expression de la dérivée seconde d'une observation aérodynamique par rapport à un paramètre géométrique

On souhaite donc exprimer la dérivée seconde de l'observation scalaire J vis-à-vis du paramètre géométrique ν , à savoir la quantité $\frac{d^2J}{d\nu^2}$.

I.2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques

Comme pour le cas d'un paramètre aérodynamique, nous repartons de l'expression de la dérivée première de l'observation qui ne fait pas intervenir d'adjoint, à savoir :

$$\frac{dJ}{d\nu} = \left(\frac{\partial J}{\partial X_v} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial X_v} \right) \frac{dX_v}{d\nu} \quad (\text{I.35})$$

Pour simplifier les calculs, l'expression précédente est reformulée comme suit :

$$\frac{dJ}{d\nu} = \frac{\partial J}{\partial X_v} \frac{dX_v}{d\nu} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{dW}{d\nu} \quad (\text{I.36})$$

Cette réécriture omet simplement de tenir compte des coordonnées volumiques X_v dans la formulation de la dérivée du vecteur d'état W par rapport à ν .

La différentiation de l'égalité précédente par rapport au paramètre géométrique ν aboutit à la relation suivante.

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J + \frac{\partial J}{\partial X_v} \frac{d^2 X_v}{d\nu^2} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{d^2 W}{d\nu^2} \quad (\text{I.37})$$

où l'opérateur $D_{W,\nu}^{(g)}$ regroupe les dérivées partielles d'ordre 2.

$$D_{W,\nu}^{(g)} = \left(\frac{dX_v}{d\nu} \right)^T \frac{\partial^2}{\partial X_v^2} \frac{dX_v}{d\nu} + 2 \left(\frac{dX_v}{d\nu} \right)^T \frac{\partial^2}{\partial X_v \partial W} \frac{dW}{d\nu} + \left(\frac{dW}{d\nu} \right)^T \frac{\partial^2}{\partial W^2} \frac{dW}{d\nu} \quad (\text{I.38})$$

Pour éliminer les deux termes $\frac{d^2 W}{d\nu^2}$ et $\frac{d^2 X_v}{d\nu^2}$, on repart des égalités suivantes :

$$\begin{cases} E(X_v(\nu), W(X_v(\nu))) = 0 \\ L(X_p(\nu), X_v(\nu)) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

que l'on différencie deux fois par rapport à ν . Au final, on arrive aux relations cherchées :

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{d\nu^2} = - \left(\frac{\partial E}{\partial W} \right)^{-1} \left(D_{W,\nu}^{(g)} E + \frac{\partial E}{\partial X_v} \frac{d^2 X_v}{d\nu^2} \right) \\ \frac{d^2 X_v}{d\nu^2} = - \left(\frac{\partial L}{\partial X_v} \right)^{-1} \left(D_{X_p,\nu}^{(g)} L + \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2} \right) \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

Notons que l'opérateur $D_{X_p,\nu}^{(g)}$ s'obtient simplement à partir de l'opérateur $D_{W,\nu}^{(g)}$ en remplaçant W par X_p .

On commence par remplacer le terme $\frac{d^2 W}{d\nu^2}$ par son expression équivalente. La dérivée seconde $\frac{d^2 J}{d\nu^2}$ devient alors :

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J + \frac{\partial J}{\partial X_v} \frac{d^2 X_v}{d\nu^2} - \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial E}{\partial W} \right)^{-1} \left(D_{W,\nu}^{(g)} E + \frac{\partial E}{\partial X_v} \frac{d^2 X_v}{d\nu^2} \right) \quad (\text{I.41})$$

On introduit ensuite l'adjoint fluide ψ dans l'expression précédente.

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(g)} E + \left(\frac{\partial J}{\partial X_v} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial X_v} \right) \frac{d^2 X_v}{d\nu^2} \quad (\text{I.42})$$

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Le terme $\frac{d^2 X_v}{d\nu^2}$ est remplacé par sa formulation équivalente.

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(g)} E - \left(\frac{\partial J}{\partial X_v} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial X_v} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial X_v} \right)^{-1} \left(D_{X_p,\nu}^{(g)} L + \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2} \right) \quad (\text{I.43})$$

Enfin, l'adjoint de déformation ϕ est introduit. Sachant que $\phi^T = \left(\frac{\partial J}{\partial X_v} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial X_v} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial X_v} \right)^{-1}$, il vient :

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(g)} E - \phi^T \left(D_{X_p,\nu}^{(g)} L + \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2} \right) \quad (\text{I.44})$$

Une dernière simplification va pouvoir être apportée à cette écriture. Le cadre de l'étude est le calcul des sensibilités d'une observation aérodynamique. En particulier, cela implique que les déformations engendrées par les paramètres géométriques ν sont infinitésimales. Si tel n'est pas le cas, il faudrait relancer la résolution des équations de la mécanique des fluides sur le maillage déformé.

Ainsi, étant dans le cadre de petites déformations, l'opérateur d'élasticité L se résout en une seule itération (ou étape). La stratégie multi-étapes, essentielle lorsque les déformations sont trop importantes, n'a pas lieu d'être. N'étant pas en présence d'une résolution multi-étapes pour la déformation, l'opérateur L est linéaire vis-à-vis des coordonnées du maillage. Ceci implique la nullité des dérivées secondes de L , à savoir :

$$D_{X_p,\nu}^{(g)} L = 0 \quad (\text{I.45})$$

L'expression finale de la **dérivée seconde de l'observation aérodynamique scalaire** J par rapport au **paramètre géométrique** ν peut donc être formulée :

$$\boxed{\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(g)} E - \phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2}} \quad (\text{I.46})$$

Deux adjoints interviennent dans l'expression de la dérivée seconde de l'observation J par rapport au paramètre géométrique ν . Il s'agit des adjoints fluides ψ et de déformation ϕ . En ce sens, on parle de formulation double adjointe (cf [MAR09]). Cette formulation innovante constitue un fait marquant de cette thèse.

Faisons le bilan des termes à calculer et du coût de calcul correspondant.

Pour déterminer $\frac{d^2 J}{d\nu^2}$, il faut bien sûr avoir différencié les codes de calcul CFD à l'ordre 2 (termes $D_{W,\nu}^{(g)} J$ et $D_{W,\nu}^{(g)} E$).

Il faut surtout résoudre trois systèmes linéaires. En plus des deux adjoints ψ et ϕ (communs avec la dérivée première), il est nécessaire de déterminer $\frac{dW}{d\nu}$ via l'équation suivante.

$$\frac{\partial E}{\partial W} \frac{dW}{d\nu} = - \frac{\partial E}{\partial X_v} \frac{dX_v}{d\nu} \quad (\text{I.47})$$

Lors de l'explicitation de la dérivée première $\frac{dJ}{d\nu}$, nous avons souligné que le coût lié à la résolution de l'adjoint de déformation ϕ pouvait être négligé. Par conséquent, on retiendra que le coût de l'estimation de la dérivée seconde $\frac{d^2 J}{d\nu^2}$ est égal à celui de deux systèmes linéaires, contre un seul pour la dérivée première $\frac{dJ}{d\nu}$.

Les dérivées des coordonnées de la peau $\frac{dX_p}{d\nu}$ et $\frac{d^2 X_p}{d\nu^2}$ sont calculées par le modelleur (CAO). Quant au terme $\frac{dX_v}{d\nu}$, il s'obtient simplement en appliquant l'opérateur d'élasticité L à la dérivée $\frac{dX_p}{d\nu}$ (par linéarité de

I.2 Formulation des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres aérodynamiques et géométriques

L vis-à-vis des coordonnées du maillage).

2.6 Récapitulatif des formules mathématiques de dérivée

Les différentes expressions des dérivées de l'observation J vont être récapitulées dans cette section. Lorsque le paramètre de dérivation λ est de type **aérodynamique** (pas d'influence sur les coordonnées du maillage), on a :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial \lambda} \\ \frac{d^2 J}{d\lambda^2} = D_{\lambda}^{(a)} J - \psi^T D_{\lambda}^{(a)} E \end{cases}} \quad (\text{I.48})$$

Dans le cas d'un paramètre de dérivation ν de type **géométrique** (influence sur les coordonnées du maillage), il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dJ}{d\nu} = -\phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{dX_p}{d\nu} \\ \frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(g)} E - \phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2} \end{cases}} \quad (\text{I.49})$$

Les **dérivées secondes croisées** se déduisent naturellement des formules précédentes. Notons (λ_1, λ_2) et (ν_1, ν_2) deux jeux de variables **aérodynamiques** et **géométriques** distinctes respectivement. Il vient alors :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d^2 J}{d\lambda_1 d\lambda_2} = D_{\lambda_1, \lambda_2}^{(a)} J - \psi^T D_{\lambda_1, \lambda_2}^{(a)} E \\ \frac{d^2 J}{d\nu_1 d\nu_2} = D_{W, \nu_1, \nu_2}^{(g)} J - \psi^T D_{W, \nu_1, \nu_2}^{(g)} E - \phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu_1 d\nu_2} \end{cases}} \quad (\text{I.50})$$

où on fait appel aux opérateurs suivants :

$$\boxed{\begin{cases} D_{\lambda_1, \lambda_2}^{(a)} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial W} \frac{dW}{d\lambda_2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2 \partial W} \frac{dW}{d\lambda_1} + \left(\frac{dW}{d\lambda_1}\right)^T \frac{\partial^2}{\partial W^2} \frac{dW}{d\lambda_2} \\ D_{W, \nu_1, \nu_2}^{(g)} = \left(\frac{dX_v}{d\nu_1}\right)^T \frac{\partial^2}{\partial X_v^2} \frac{dX_v}{d\nu_2} + \left(\frac{dX_v}{d\nu_1}\right)^T \frac{\partial^2}{\partial X_v \partial W} \frac{dW}{d\nu_2} + \left(\frac{dX_v}{d\nu_2}\right)^T \frac{\partial^2}{\partial X_v \partial W} \frac{dW}{d\nu_1} + \left(\frac{dW}{d\nu_1}\right)^T \frac{\partial^2}{\partial W^2} \frac{dW}{d\nu_2} \end{cases}} \quad (\text{I.51})$$

Pour les deux types de paramètre (aérodynamique ou géométrique), le coût des dérivées de l'observation J est identique. Pour être le plus général possible, on considérera le cas de N_J observations et N_{var} paramètres de dérivation pour l'évaluation des coûts.

- Les dérivées premières de J demandent la résolution de N_J systèmes linéaires. Cela revient à déterminer les adjoints fluides ψ associés à chacune des N_J observations.
- On suppose que les dérivées premières de J ont été calculées. Les adjoints fluides sont donc disponibles. Le coût supplémentaire induit par le calcul des dérivées secondes de J est celui de N_{var} systèmes linéaires. Les solutions de ces N_{var} systèmes linéaires sont les dérivées premières du vecteur d'état W vis-à-vis des N_{var} paramètres de dérivation.

3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

Les dérivées de l'observation aérodynamique J , établies lors de la section précédente, demandent d'avoir différencié les codes de calcul aux ordres 1 et 2.

Pour fixer les idées, listons les tâches à accomplir en matière de différenciation de code pour calculer les sensibilités d'une observation J . Quatre codes de calcul sont considérés.

- Le **code CFD** sera noté C_E . Il a pour but de calculer le vecteur d'état W , solution des équations de la mécanique des fluides (Euler ou Navier-Stokes).
- L'**observation** J est ici calculée par un logiciel C_J indépendant du code CFD.
- L'**opérateur d'élasticité linéaire** est géré par le code de calcul C_L . Dans la pratique, ce code sera intégré au code C_E résolvant les équations de la mécanique des fluides.
- Enfin, le logiciel C_{X_p} s'occupe de la **déformation de la peau** de l'objet aérodynamique

Dans ce contexte, le tableau I.2 récapitule les différents ordres de différenciation de ces quatre codes de calcul, suivant le type de dérivée d'observation aérodynamique à calculer.

	C_E					C_J					C_L		C_{X_p}
	λ	W	X_v	λW	WX_v	λ	W	X_v	λW	WX_v	X_p	X_v	ν
$\frac{dJ}{d\lambda}$	1	1	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-
$\frac{dJ}{d\nu}$	-	1	1	-	-	-	1	1	-	-	1	1	1
$\frac{d^2 J}{d\lambda^2}$	1,2	1,2	-	1	-	1,2	1,2	-	1	-	-	-	-
$\frac{d^2 J}{d\nu^2}$	-	1,2	1,2	-	1	-	1,2	1,2	-	1	1	1	2

Tableau I.2 – Ordres de différenciation nécessaires pour calculer les dérivées premières et secondes de l'observation J vis-à-vis d'un paramètre aérodynamique λ et géométrique ν .

L'action de base est la différenciation automatique de code. Commençons par en présenter le principe général.

3.1 Principe de la différenciation automatique de code

Nous allons décrire le principe général de la différenciation automatique de code. Pour plus de détails, on renvoie à [GRE00] et [GIL05].

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

La **différentiation automatique de code** consiste, à partir d'un programme informatique calculant une fonction, à créer un programme qui estimera numériquement les sensibilités de cette fonction vis-à-vis de certains paramètres d'entrée. Dans le cas d'un code industriel comportant des milliers de routines, il est essentiel de cibler les parties du code qui lient l'observation à différentier aux variables de dérivation. Seules certaines routines (ou groupes de routines) seront alors différenciées.

La différenciation d'une routine (ou d'un groupe de routines) s'effectue à l'aide d'un différentiateur de code. Il s'agit d'un logiciel prenant en entrée un ensemble de routines informatiques. L'utilisateur devra bien sûr spécifier la fonction à différentier et les paramètres de dérivation. Après exécution, le différentiateur renvoie un ensemble de routines qui a la spécificité de calculer les dérivées de la fonction par rapport aux paramètres indiqués. Dans toute la suite, le différentiateur utilisé est le logiciel *TAPENADE* ([HAS04] et [HAS02]) développé par l'INRIA. D'autres différentiateurs sont possibles, comme *openAD* [UTK04], *TAF* [GIE05] ou *ADOL-C* [GRI96].

Dès lors, la problématique peut se résumer à vouloir différentier une routine calculant une fonction à partir de certains paramètres d'entrée. Pour illustrer les différents modes de fonctionnement du différentiateur de code *TAPENADE*, nous nous focaliserons sur le cas d'un **programme-modèle** formé d'une suite d'instructions d'affectation. Un tel programme a l'avantage d'avoir une représentation mathématique simple avec laquelle on peut travailler. Les règles que l'on déduit de ce modèle permettent alors de comprendre les règles de transformation des codes informatiques à mettre en œuvre sur des programmes plus complexes, tels que les codes industriels. Le langage informatique pourra être le *C* ou le *FORTRAN*.

On note $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$ les N variables (ou cases-mémoire) du code informatique sur lesquelles travaille le programme-modèle. Il n'y a aucun ordre sur ces variables. En particulier, il n'est pas nécessaire qu'elles soient évaluées dans l'ordre de leur indice. C'est simplement une manière commode de les désigner toutes. On supposera que les n variables d'entrée ($n \leq N$), aussi appelées variables indépendantes, sont les variables v_1, \dots, v_n . Les variables de dérivation seront les n_D premières variables d'entrée (v_1, \dots, v_{n_D}). Les m variables de sortie ($m \leq N$) seront les variables v_{N-m+1}, \dots, v_N . Les fonctions à dériver seront les m_D dernières variables de sortie (v_{N-m_D+1}, \dots, v_N). Notons que des variables peuvent être à la fois d'entrée et de sortie. On dira qu'une variable v_i est active lorsqu'on lui affecte une valeur qui dépend de la valeur donnée aux variables indépendantes.

Le programme-modèle que nous considérerons est donc supposé être formé d'une suite de K instructions d'affectation exécutées l'une après l'autre, ce que l'on peut écrire :

$$v_{\mu_k} := \varphi_k(v_{D_k}), \text{ pour } k = 1, \dots, K \quad (\text{I.52})$$

A chaque instruction k , le programme-modèle modifie la variable v_{μ_k} au moyen d'une fonction φ_k , en utilisant les variables v_i , $i \in D_k$, où D_k est une partie de $\{1, \dots, N\}$. Dans ce modèle, on ne se donne aucune restriction sur $\mu_k \in \{1, \dots, N\}$, qui peut en particulier faire partie de D_k . Si on note x les n_D variables de dérivation et f les m_D fonctions à dériver, on cherche donc à différentier une fonction :

$$f : x \in \mathfrak{R}^{n_D} \rightarrow f(x) \in \mathfrak{R}^{m_D} \quad (\text{I.53})$$

qui est représentée par le programme-modèle et dont la valeur en un point peut être obtenue en exécutant ce programme.

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Pour fixer les idées, nous nous focaliserons sur le **programme-exemple** suivant (routine *Ex*), écrit en *FORTRAN*.

```

Ex(v1,v2,v3,v6,v7)

v4 = v3*v1 + v2**3
v5 = v1**2*sin(v4)
v6 = v4 + v1**2
v5 = v5/v4
v7 = exp(v5)

```

La fonction à différentier sera la variable v_7 ($f = v_7$) et les paramètres de dérivation seront les variables v_1 et v_2 ($x = (v_1, v_2)$).

La correspondance entre le programme-modèle et le programme-exemple est détaillée au tableau I.3. A ce propos, un point important doit être noté. Nous nous apercevons que, dans le programme-exemple, certaines variables ne seront pas prises en compte par le différentiateur. Il s'agit des variables v_3 et v_6 qui vont donc être figées. Par souci de simplicité, nous supposerons que ce n'est pas le cas avec le programme-modèle. En particulier, pour le programme-modèle, on a autant de variables d'entrée que de variables de dérivation ($n = n_D$) et autant de variables de sortie que de fonctions à dériver ($m = m_D$).

Indice de l'instruction	Instruction	Indice de la variable modifiée	Fonction	Indices de dépendance
1	$v4 = v3*v1 + v2**3$	$\mu_1 = 4$	$\varphi_1(a, b, c) = ca + b^3$	$D_1 = \{1, 2, 3\}$
2	$v5 = v1**2*sin(v4)$	$\mu_2 = 5$	$\varphi_2(a, b) = a^2 sin(b)$	$D_2 = \{1, 4\}$
3	$v6 = v4 + v1**2$	$\mu_3 = 6$	$\varphi_3(a, b) = b + a^2$	$D_3 = \{1, 4\}$
4	$v5 = v5/v4$	$\mu_4 = 5$	$\varphi_4(a, b) = \frac{b}{a}$	$D_4 = \{4, 5\}$
5	$v7 = exp(v5)$	$\mu_5 = 7$	$\varphi_5(a) = e^a$	$D_5 = \{5\}$

Tableau I.3 – Correspondance entre le programme-modèle et le programme-exemple.

Pour différentier le programme à l'ordre 1, deux modes d'application du différentiateur sont possibles. Il s'agit du mode direct (*tangent* mode) et du mode inverse (*reverse* mode).

Pour différentier le programme à l'ordre 2, la stratégie retenue est d'appliquer deux fois de suite le différentiateur (cf [SHE96], [TAY01], [MAR07], [GHA07] ou [MAR08]). Ainsi, quatre options se présentent à nous. Soit le mode direct est utilisé deux fois (*tangent-on-tangent* mode), soit le mode inverse est appliqué deux fois (*reverse-on-reverse* mode). Les deux autres possibilités sont soit de lancer le mode direct sur le programme issu du mode inverse (*tangent-on-reverse* mode), soit de faire l'inverse (*reverse-on-tangent* mode). Seul le mode *tangent-on-tangent* sera analysé par la suite. L'option *tangent-on-reverse* sera juste évoquée lors de la partie récapitulative. Les autres variantes (*reverse-on-reverse* [CHR92] et *reverse-on-tangent*) ne sont pas recommandées.

Analysons donc la différentiation automatique de code à l'ordre 1 par le mode direct.

3.2 Différentiation automatique de code à l'ordre 1 par le mode direct (*tangent mode*)

Le mode direct de différentiation est plus simple et intuitif que le mode inverse. Il est bien adapté au calcul des dérivées directionnelles de la fonction f représentée par le programme.

Commençons par décrire la **différentiation du programme-modèle en mode direct**.

Soit $d = (d_i)_{1 \leq i \leq n_D} \in \mathfrak{R}^{n_D}$ la direction suivant laquelle on veut différentier f . On rappelle que, pour le programme-modèle, n_D (nombre de variables de dérivation) est égal à n (nombre de variables d'entrée). On cherche donc à calculer $f'(x).d$. Pour cela, il est bon de voir chaque variable du code comme une fonction des variables d'entrée $x = (v_1, \dots, v_n)$. Donc, à chaque v_i ($1 \leq i \leq N$) correspond une dérivée directionnelle $\dot{v}_i = v'_i(x).d$. Alors, en différentiant l'instruction k du programme-modèle, on obtient :

$$\dot{v}_{\mu_k} = \sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \dot{v}_i \quad (\text{I.54})$$

On a donc une formule permettant de calculer $\dot{v}_{\mu_k} = v'_{\mu_k}(x).d$ à partir des \dot{v}_i , $i \in D_k$. Grâce à celle-ci, on peut propager le calcul des dérivées directionnelles des variables intervenant dans le code, parallèlement à leur évaluation. C'est l'idée centrale du mode direct de différentiation.

A l'appel de la routine, remarquons que $\dot{v}_i = d_i$ pour $1 \leq i \leq n_D$. Pour calculer $f'(x).d$, il suffit donc d'initialiser les dérivées directionnelles des variables de dérivation comme suit :

$$\dot{v}_i := d_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq n_D \quad (\text{I.55})$$

et ensuite de propager les dérivées directionnelles dans le code par les instructions suivantes :

$$\text{pour } k = 1, \dots, K : \begin{cases} \dot{v}_{\mu_k} := \sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \dot{v}_i \\ v_{\mu_k} := \varphi_k(v_{D_k}) \end{cases} \quad (\text{I.56})$$

On calcule \dot{v}_{μ_k} avant v_{μ_k} au cas où φ_k dépendrait de v_{μ_k} . Il faut en effet évaluer les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}$ avec la valeur non modifiée de v_{μ_k} .

En fin d'exécution, on récupère dans $(\dot{v}_{N-m_D+1}, \dots, \dot{v}_N)$ la dérivée $f'(x).d$:

$$f'(x).d = (\dot{v}_{N-m_D+1}, \dots, \dot{v}_N) \quad (\text{I.57})$$

On rappelle que, pour notre programme-modèle, nous avons $m_D = m$ (égalité entre le nombre de variables de sortie et la dimension de la fonctionnelle f différentiée).

L'action du mode direct de différentiation sur le programme-modèle peut donc être résumée de la manière

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

suivante :

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, n_D (=n) : \dot{v}_i := d_i \\ & \text{pour } k = 1, \dots, K : \begin{cases} \dot{v}_{\mu_k} := \sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \dot{v}_i \\ v_{\mu_k} := \varphi_k(v_{D_k}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

$$f'(x).d = (\dot{v}_{N-m_D+1}, \dots, \dot{v}_N)$$

On voit que l'on a associé à chaque variable v_i du code une variable \dot{v}_i contenant sa dérivée directionnelle. Si toutes les variables sont actives (hypothèse faite sur le programme-modèle), l'espace-mémoire requis est donc exactement le double de celui utilisé pour le programme original.

Voyons maintenant l'effet du mode direct sur le programme-exemple. Le différentiateur de code génère la routine *Exd* suivante :

```

%%%% INITIALISATION %%%
v1d = d1
v2d = d2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Exd(v1,v1d,v2,v2d,v3,v6,v7,v7d)

v4d = v3*v1d + 3*v2**2*v2d
v4 = v3*v1 + v2**3
v5d = 2*v1*sin(v4)*v1d + v1**2*cos(v4)*v4d
v5 = v1**2*sin(v4)
v6 = v4 + v1**2
v5d = v5d/v4 - v5*v4d/v4**2
v5 = v5/v4
v7d = exp(v5)*v5d
v7 = exp(v5)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SORTIE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
gradient de v7 % (v1;v2) dans la direction (d1;d2) = v7d
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

La dérivée première de la variable v_7 vis-à-vis des variables v_1 et v_2 dans la direction (d_1, d_2) se trouve donc dans la variable de sortie v_{7d} . L'utilisateur devra initialiser les variables v_{1d} et v_{2d} par les composantes de la direction suivant laquelle il souhaite évaluer la dérivée.

Deux faits sont également à souligner.

- La variable d'entrée v_3 n'est pas considérée comme une variable de dérivation. Ainsi, elle est figée par le différentiateur automatique de code.
- La variable de sortie v_6 n'est pas considérée comme une fonction à différentier. De ce fait, l'instruction correspondant à sa mise à jour n'est pas différentiée.

Le mode direct de différentiation est donc utile pour calculer la dérivée première d'une observation vectorielle par rapport à peu de paramètres. En effet, dans le cas de plusieurs variables de dérivation, seule la dérivée première directionnelle est aisément calculable.

Passons au mode inverse de différentiation pour calculer la dérivée première d'une observation.

3.3 Différentiation automatique de code à l'ordre 1 par le mode inverse (*reverse mode*)

Le mode inverse de différentiation est moins intuitif et plus complexe à mettre en œuvre que le mode direct. Il trouve son utilité lorsque nous souhaitons calculer des dérivées par rapport à un grand nombre de paramètres. Nous venons de voir que ce cas n'était pas aisément appréhendable par le mode direct de différentiation.

Il y a plusieurs manières d'introduire le **mode inverse de différentiation automatique de code informatique**. Dans l'état de l'art [GIL91], quatre approches ont été recensées : l'approche du graphe de calcul ([SAW84], [IRI84] et [IRI87]), la méthode des substitutions rétrogrades [KIM84], la méthode de dualité et l'approche de Speelpenning [SPE80]. Chacune de ces approches apporte un éclairage différent sur ce mode de différentiation, toujours surprenant, mais c'est la dernière qui est la plus simple à exposer et à adapter à diverses situations. C'est aussi celle que nous allons présenter.

On commence par traiter le **programme-modèle**.

D'abord, il est intéressant de voir l'instruction k comme une transformation utilisant les variables v_1, \dots, v_N du code et laissant inchangées toutes ces variables sauf v_{μ_k} . On peut donc lui associer une transformation $\Phi_k : \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^N$ définie par :

$$(\Phi_k(v))_i = \begin{cases} v_i & \text{si } i \neq \mu_k \\ \varphi_k(v_{D_k}) & \text{si } i = \mu_k \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{I.59})$$

A présent, on peut voir le programme-modèle comme une composition de K instructions :

$$(\Phi_K \circ \dots \circ \Phi_1)(v) \quad (\text{I.60})$$

Afin de lever certaines ambiguïtés, on note $v^0 = v$ et

$$v^k = (\Phi_k \circ \dots \circ \Phi_1)(v) \quad (\text{I.61})$$

la valeur des variables du code après exécution des k premières instructions.

Soit alors d dans \mathfrak{R}^m , espace d'arrivée de f . On rappelle que, pour le programme-modèle, on a $m = m_D$ (égalité entre le nombre de variables de sortie et la dimension de la fonction à différentier). Avec le mode inverse, on cherche à calculer le gradient de l'application $x \in \mathfrak{R}^n \rightarrow d^T f(x) \in \mathfrak{R}$, c'est-à-dire le vecteur des dérivées partielles :

$$\nabla(d^T f)(x) = \left(\frac{\partial(d^T f)}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n} \quad (\text{I.62})$$

On rappelle que $n = n_D$ pour le programme-modèle (les variables de dérivation sont les variables d'entrée).

Il s'agit donc d'une dérivation cotangente. On a, en notant 0_p le vecteur nul de \mathfrak{R}^p :

$$d^T f(x) = \begin{pmatrix} 0_{N-m} \\ d \end{pmatrix}^T (\Phi_K \circ \dots \circ \Phi_1)(x, 0_{N-n}) \quad (\text{I.63})$$

si bien que :

$$(d^T f)'(x) \cdot y = \begin{pmatrix} 0_{N-m} \\ d \end{pmatrix}^T \Phi'_K(v^{K-1}) \dots \Phi'_2(v^1) \Phi'_1(v^0) \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{(N-n) \times n} \end{pmatrix} y, \quad (\text{I.64})$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n et $0_{p \times q}$ est la matrice nulle de type $p \times q$. Notons par ailleurs que

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

$v^0 = (x, 0_{N-n})$. On en déduit :

$$\nabla(d^T f)(x) = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{(N-n) \times n} \end{pmatrix}^T \Phi'_1(v^0)^T \Phi'_2(v^1)^T \dots \Phi'_K(v^{K-1})^T \begin{pmatrix} 0_{N-m} \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{I.65})$$

Dans le produit de matrices du membre de droite, on a un vecteur à droite et une matrice à gauche. Le nombre d'opérations pour l'évaluer sera donc moindre si on effectue les multiplications matricielles de droite à gauche. Pour effectuer ces produits, on introduit des variables duales $\bar{v} \in \mathfrak{R}^N$ que l'on initialise au vecteur à droite de l'expression ci-dessus. On a donc :

$$\bar{v} := \begin{pmatrix} 0_{N-m} \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{I.66})$$

Ensuite, ces variables duales sont mises à jour en effectuant les produits matriciels sus-mentionnés, c'est-à-dire

$$\bar{v} := \Phi'_k(v^{k-1})^T \bar{v}, \text{ pour } k = K, \dots, 1 \quad (\text{I.67})$$

Le dernier produit matriciel nous apprend que le gradient $\nabla(d^T f)(x)$ se trouve dans les n premières composantes du vecteur \bar{v} ainsi obtenu.

Pour écrire le programme-modèle en mode inverse de différentiation, il reste à observer que la jacobienne de $\Phi_k(v^{k-1})$ est la matrice $N \times N$

$$\Phi'_k(v^{k-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_1}(v^{k-1}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_{\mu_k}}(v^{k-1}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_N}(v^{k-1}) \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.68})$$

où seule la μ_k -ième ligne peut ne pas être formée de vecteurs de base de \mathfrak{R}^N . Alors, la mise à jour $\bar{v} := \Phi'_k(v^{k-1})^T \bar{v}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{v}_i & := \bar{v}_i & \text{si } i \notin D_k \cup \{\mu_k\} \\ \bar{v}_i & := \bar{v}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v^{k-1}) \bar{v}_{\mu_k} & \text{si } i \in D_k \setminus \{\mu_k\} \\ \bar{v}_{\mu_k} & := \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_{\mu_k}}(v^{k-1}) \bar{v}_{\mu_k} \end{cases} \quad (\text{I.69})$$

Il faut d'abord mettre à jour les \bar{v}_i , pour $i \notin \mu_k$, avant \bar{v}_{μ_k} car il est clair que c'est l'ancienne valeur de \bar{v}_{μ_k} qu'il faut utiliser dans le calcul des \bar{v}_i ($i \in D_k \setminus \{\mu_k\}$).

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

Voici ce que donne le programme-modèle en mode inverse :

$$\begin{aligned}
 & \text{pour } i = 1, \dots, N - m : \bar{v}_i := 0 \\
 & \text{pour } i = N - m + 1, \dots, N : \bar{v}_i := d_i \\
 & \text{pour } k = 1, \dots, K : \begin{cases} \text{stockage de } \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v^{k-1}) \text{ pour } i \in D_k \\ v_{\mu_k} := \varphi_k(v^{k-1}) \end{cases} \\
 & \text{pour } k = K, \dots, 1 : \begin{cases} \bar{v}_i := \bar{v}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v^{k-1}) \bar{v}_{\mu_k} \text{ pour } i \in D_k \setminus \{\mu_k\} \\ \bar{v}_{\mu_k} := \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_{\mu_k}}(v^{k-1}) \bar{v}_{\mu_k} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{I.70}$$

$$\nabla(d^T f)(x) := (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$$

On voit que cette procédure s'adapte bien à la situation où on veut dériver une seule variable ($m = 1$ et d est le scalaire 1) par rapport à beaucoup de variables d'entrée (n grand). Dans ce cas, il suffit d'initialiser toutes les variables duales à 0 sauf \bar{v}_N que l'on initialise à 1.

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Voyons maintenant l'effet du mode inverse sur le programme-exemple. Le différentiateur de code génère la routine *Exb* suivante :

```
%%% INITIALISATION %%%
  v1b = 0
  v2b = 0
  v7b = 1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Exb(v1,v1b,v2,v2b,v3,v6,v7,v7b)

ip = 1
p(ip) = v3
ip = ip + 1
p(ip) = 3*v2**2
v4 = v3*v1 + v2**3
ip = ip + 1
p(ip) = 2*v1*sin(v4)
ip = ip + 1
p(ip) = cos(v4)*v1**2
v5 = v1**2*sin(v4)
v6 = v4 + v1**2
ip = ip + 1
p(ip) = 1/v4
ip = ip + 1
p(ip) = -v5/v4**2
v5 = v5/v4
ip = ip + 1
p(ip) = exp(v5)
v7 = exp(v5)

v4b = 0
v5b = 0
v5b = v5b + p(ip)*v7b
v7b = 0
ip = ip - 1
v4b = v4b + p(ip)*v5b
ip = ip - 1
v5b = p(ip)*v5b
ip = ip - 1
v4b = v4b + p(ip)*v5b
ip = ip - 1
v1b = v1b + p(ip)*v5b
v5b = 0
ip = ip - 1
v2b = v2b + p(ip)*v4b
ip = ip - 1
v1b = v1b + p(ip)*v4b
v4b = 0

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% SORTIE %%%
  gradient de v7 % (v1;v2) = (v1b;v2b)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

La routine *Exb* générée par le différentiateur automatique en mode inverse comporte deux parties distinctes. Durant la première partie, le code initial est parcouru. En même temps sont stockées les dérivées partielles dans

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

la pile p (pointeur ip). Seules les variables faisant le lien entre l'observation v_7 et les paramètres v_1 et v_2 de dérivation sont différenciées. Ainsi, les variables v_3 et v_6 ne sont pas traitées.

La seconde partie de la routine *Exb* consiste à reparcourir les instructions différenciées dans l'ordre inverse du code initial. Les dérivées partielles, stockées dans la pile p , sont directement utilisées.

On peut à présent comprendre la difficulté de la mise en œuvre du mode inverse. Il faut d'abord exécuter le code direct afin de mémoriser les quantités permettant de reconstituer les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v^{k-1})$ au moment où celles-ci sont nécessaires (deuxième partie du code inverse). Cette utilisation se fait en ordre inverse (ie de $k = K, \dots, 1$) de l'ordre de mémorisation. Il y a donc un problème de gestion de la mémoire qui ne se posait pas avec le mode direct. Une stratégie extrême consiste à mémoriser, à chaque itération k , toute l'information nécessaire à l'évaluation des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v^{k-1})$, $i \in D_k$. Ceci conduit en général à un besoin en place-mémoire environ proportionnel au nombre d'instructions où les variables actives interviennent de façon non linéaire¹ soit, en première approximation, proportionnel au temps d'exécution du code original (en fait, cela dépend beaucoup de ce que l'on mémorise). Cette stratégie ne peut donc fonctionner que pour les petits problèmes. Pour les grands problèmes, il est préférable de mémoriser une partie des variables du code à certains instants de l'exécution. Dans un problème d'évolution, par exemple, on pourra ne mémoriser que les variables d'état du problème à chaque pas de temps. Ensuite les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v^{k-1})$ sont recalculées à partir des informations mémorisées. On parvient ainsi à obtenir des codes moins gourmands en place-mémoire, au prix d'une augmentation du temps de calcul.

3.4 Différentiation automatique de code à l'ordre 2 par le mode direct exécuté deux fois (*tangent-on-tangent* mode)

Le mode *tangent-on-tangent* est la technique la plus intuitive pour calculer des dérivées secondes d'observation par différenciation automatique des codes informatiques.

Le principe d'un tel procédé est le suivant. On commence par différencier les routines de base à l'ordre 1, via le mode direct qui a été présenté précédemment. Le différenciateur automatique nous fournit alors des routines similaires aux routines originales, mais calculant en plus les dérivées premières désirées. On exécute ensuite le différenciateur automatique sur ces routines différenciées à l'ordre 1, toujours en mode direct. Des routines calculant les dérivées secondes de l'observation sont alors obtenues.

Voyons l'effet du mode *tangent-on-tangent* sur notre **programme-modèle**.

L'objectif est ici de calculer la dérivée seconde de la fonction vectorielle f dans les directions $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$, vivant dans l'espace du paramètre x de dérivation. Ainsi, on souhaite déterminer la quantité suivante :

$$d^{(1)T} . f''(x) . d^{(2)} \tag{I.71}$$

On parlera de dérivée seconde directionnelle de la fonction f pour désigner la grandeur $d^{(1)T} . f''(x) . d^{(2)}$.

Comme le mode direct a déjà été présenté en détails, nous pouvons directement donner le résultat de la

1. On remarque que le premier stockage $p(1) = v_3$ peut être omis, dans la mesure où la variable v_3 est un argument d'entrée de la routine et n'est pas modifiée par le programme original. Seule cette relation de dépendance est linéaire, dépendance de l'observation de sortie v_7 vis-à-vis des variables d'entrée v_1 et v_2 .

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

différentiation automatique du programme-modèle en mode direct deux fois.

$$\begin{aligned}
 & \text{pour } i = 1, \dots, n_D (=n) : \begin{cases} \dot{v}_{1,i} := d_i^{(1)} \\ \dot{v}_{2,i} := d_i^{(2)} \end{cases} \\
 & \text{pour } k = 1, \dots, K : \begin{cases} \ddot{v}_{\mu_k} & := \sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \ddot{v}_i + \sum_{i_1 \in D_k} \sum_{i_2 \in D_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2}}(v_{D_k}) \dot{v}_{1,i_1} \dot{v}_{2,i_2} \\ \dot{v}_{1,\mu_k} & := \sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \dot{v}_{1,i} \\ \dot{v}_{2,\mu_k} & := \sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \dot{v}_{2,i} \\ v_{\mu_k} & := \varphi_k(v_{D_k}) \end{cases} \quad (\text{I.72}) \\
 & d_1^T \cdot f''(x) \cdot d_2 = (\ddot{v}_{N-m_D+1}, \dots, \ddot{v}_N)
 \end{aligned}$$

Le scalaire $d_i^{(1)}$ (resp. $d_i^{(2)}$) désigne la i -ième composante de la direction $d^{(1)}$ (resp. de la direction $d^{(2)}$).

Nous pouvons remarquer que les dérivées secondes de certaines variables du code interviennent dans la formule de la dérivée seconde de la variable v_{μ_k} remise à jour à l'instruction k (terme $\sum_{i \in D_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i}(v_{D_k}) \ddot{v}_i$). Nous pouvons faire l'hypothèse que les paramètres d'entrée de la routine (qui sont aussi les paramètres de dérivation, par définition du programme-modèle) ne sont pas remis à jour dans la routine différenciée. Dans ce cas, il est important de noter que la contribution d'ordre 2 des variables de dérivation est nulle (ie le terme \ddot{v}_i est nul si la variable v_i est une variable de dérivation). Par conséquent, la grandeur \ddot{v}_i a forcément été évaluée au préalable dans le programme-modèle.

Désormais, deux directions sont donc à stocker (variables $\dot{v}_{1,i}$ et $\dot{v}_{2,i}$). Ensuite, à chaque instruction k (avec $1 \leq k \leq K$), on calcule les dérivées secondes, les dérivées premières dans chacune des deux directions $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ puis l'instruction du programme-modèle d'origine. L'ordre est essentiel. En effet, la dérivée seconde \ddot{v}_{μ_k} ne doit pas tenir compte des modifications apportées non seulement à la variable v_{μ_k} , mais aussi aux dérivées premières directionnelles \dot{v}_{1,μ_k} et \dot{v}_{2,μ_k} . De même, les dérivées directionnelles \dot{v}_{1,μ_k} et \dot{v}_{2,μ_k} doivent être évaluées à partir de la variable v_{μ_k} non modifiée.

Là encore, ce mode de fonctionnement est pertinent lorsque nous souhaitons calculer la dérivée seconde d'une observation vectorielle vis-à-vis de quelques paramètres de dérivation. Lorsque plusieurs variables de dérivation sont envisagées, seul le calcul de la dérivée seconde directionnelle est efficace.

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

Voyons maintenant l'effet du mode *tangent-on-tangent* sur le programme-exemple. Le différentiateur de code génère la fonction *Exdd* suivante :

```

%%% INITIALISATION %%%
v1d = d11
v2d = d21
v1d0 = d12
v2d0 = d22
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Exdd(v1,v1d0,v1d,v2,v2d0,v2d,v3,v6,v7,v7d,v7dd)

v4dd = 6*v2*v2d*v2d0
v4d = v3*v1d + 3*v2**2*v2d
v4d0 = v3*v1d0 + 3*v2**2*v2d0
v4 = v3*v1 + v2**3
v5dd = 2*sin(v4)*v1d*v1d0 + 2*v1*cos(v4)*v1d*v4d0 + 2*v1*cos(v4)*v4d*v1d0
      - v1**2*sin(v4)*v4d*v4d0 + v1**2*cos(v4)*v4dd
v5d = 2*v1*sin(v4)*v1d + v1**2*cos(v4)*v4d
v5d0 = 2*v1*sin(v4)*v1d0 + v1**2*cos(v4)*v4d0
v5 = v1**2*sin(v4)
v6 = v4 + v1**2
v5dd = v5dd/v4 - v4d0*v5d/v4**2 - v5d0*v4d/v4**2 + 2*v5*v4d*v4d0/v4**3
      - v5*v4dd/v4**2

v5d = v5d/v4 - v5*v4d/v4**2
v5d0 = v5d0/v4 - v5*v4d0/v4**2
v5 = v5/v4
v7dd = exp(v5)*v5d*v5d0 + exp(v5)*v5dd
v7d = exp(v5)*v5d
v7d0 = exp(v5)*v5d0
v7 = exp(v5)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SORTIE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
hessien de v7 % (v1;v2) dans les directions (d11;d21) et (d12;d22) = v7dd
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

La dérivée seconde directionnelle de la variable v_7 vis-à-vis des variables v_1 et v_2 dans les directions $d^{(1)} = (\mathbf{d11}, \mathbf{d21})$ et $d^{(2)} = (\mathbf{d12}, \mathbf{d22})$ se trouve donc dans la variable de sortie v_{7dd} . L'utilisateur devra initialiser les variables v_{1d} , v_{2d} , v_{1d0} et v_{2d0} par les composantes des directions suivant lesquelles il souhaite évaluer la dérivée seconde.

On note que les variables v_3 et v_6 sont toujours considérées comme des constantes par le différentiateur automatique.

Le mode *tangent-on-tangent* de différentiation est donc utile pour calculer la dérivée seconde d'une observation vectorielle par rapport à peu de paramètres. En effet, dans le cas de plusieurs variables de dérivation, seule la dérivée seconde directionnelle est aisément calculable.

Tous ces modes de différentiation vont être récapitulés dans la section suivante.

3.5 Récapitulatif des différents modes de différentiation retenus

L'action des trois modes de différentiation que l'on vient de passer en revue va être résumée dans cette partie. Pour cela, nous considérerons la routine informatique $f(X, Y)$. Les deux arguments $X \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $Y \in \mathbb{R}^{n_y}$

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

sont respectivement les variables d'entrée et de sortie. L'objectif est de déterminer les sensibilités de la variable Y vis-à-vis du paramètre X .

Quelques notations sont ici introduites.

Tout d'abord, deux directions $d_{X,1}$ et $d_{X,2}$, vivant dans l'espace du paramètre X d'entrée ($d_{X,1}$ et $d_{X,2} \in \mathbb{R}^{n_X}$), seront utilisées. Par ailleurs, la grandeur $d_Y \in \mathbb{R}^{n_Y}$ désignera une direction de l'espace de la variable Y de sortie. Enfin, on note $G_X Y$ et $H_X Y$ les dérivées premières et secondes de la variable de sortie Y vis-à-vis de la variable d'entrée X .

$$\left\{ \begin{array}{l} G_X Y = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n_Y \\ 1 \leq j \leq n_X \end{array} \\ H_X Y = \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n_Y \\ 1 \leq j, k \leq n_X \end{array} \end{array} \right. \quad (\text{I.73})$$

Le différentiateur automatique fonctionne toujours de la même manière, quelque soit le mode utilisé. Voici les notations adoptées pour décrire les étapes constitutives d'un processus de différentiation.

- L'objectif est de calculer les sensibilités d'une fonctionnelle évaluée numériquement via un programme informatique.
- On part d'une routine informatique R_{in} . On spécifie donc au différentiateur automatique le triplet (R_{in}, V_{in}, D_{in}) , où V_{in} et D_{in} sont des arguments de la routine R_{in} . Typiquement, D_{in} représente le paramètre différentié par rapport à la variable V_{in} .
- Le différentiateur renvoie une routine informatique R_{out} . L'utilisateur devra initialiser correctement certains arguments (notés V_{out}) de R_{out} . Moyennant cela, l'exécution de la routine R_{out} calcule les dérivées D_{out} cherchées.

Le tableau I.4 récapitule les deux alternatives pour évaluer les dérivées premières par différentiation automatique (mode direct et mode inverse). On notera que ces deux modes de fonctionnement aboutissent à des dérivées ne vivant pas dans le même espace. Ainsi, suivant le type de sensibilité désirée, on choisira l'un de ces deux modes de différentiation automatique.

Voici deux cas de figure pour lesquels on choisit le mode direct d'une part et le mode inverse d'autre part.

- Le **mode direct** est approprié pour calculer la dérivée première directionnelle d'une observation vectorielle vis-à-vis de multiples paramètres. Nous verrons que ce cas de figure apparaîtra souvent dans notre problématique liée à l'estimation des sensibilités d'une observation aérodynamique.
- Le **mode inverse** est recommandé pour calculer et stocker le gradient complet d'une observation scalaire vis-à-vis de multiples paramètres.

Nous verrons ultérieurement que nous serons amené à rencontrer ces deux configurations pour notre problématique liée au calcul des sensibilités d'une observation aérodynamique.

Pour évaluer les sensibilités secondes par différentiation automatique, deux options sont envisagées (tableau I.5). Il s'agit des modes *tangent-on-tangent* et *tangent-on-reverse*.

Là encore, les sensibilités calculées par les deux techniques (variables D_{out}) n'évoluent pas dans le même espace. Le mode *tangent-on-tangent* permet de déterminer la dérivée seconde directionnelle de l'observation vectorielle ($d_{X,1}^T \cdot (H_X Y) \cdot d_{X,2}$). Par contre, le mode *tangent-on-reverse* propose un résultat hybride. En effet, une direction d_Y vivant dans l'espace de la fonction à dériver et une direction $d_{X,1}$ vivant dans l'espace des paramètres de dérivation sont utilisées.

Pour notre problématique, nous nous limiterons au mode *tangent-on-tangent*.

3.6 Processus de validation des routines différentiées

Le processus de différentiation automatique doit pouvoir être contrôlé et validé.

Ce type de **validation** est essentiel lorsque l'on s'attaque à la différentiation des codes industriels (ce qui est

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

	<i>tangent mode</i>	<i>reverse mode</i>
R_{in}	$f(X, Y)$	$f(X, Y)$
V_{in}	X	X
D_{in}	Y	Y
R_{out}	$fd(X, Xd, Y, Yd)$	$fb(X, Xb, Y, Yb)$
V_{out}	$Xd = d_{X,1}$	$Xb = 0$ et $Yb = d_Y$
D_{out}	$Yd = (G_X Y) \cdot d_{X,1} \in \mathfrak{R}^{n_Y}$	$Xb = G_X(Y \cdot d_Y) \in \mathfrak{R}^{n_X}$

Tableau I.4 – Description des modes direct (*tangent mode*) et inverse (*reverse mode*) de différentiation automatique pour calculer des dérivées premières.

notre cas). En effet, un problème lié à la différentiation d'une routine peut remettre en cause le résultat final. Or, il est souvent complexe et laborieux de trouver la routine en question dans le cas où nous constatons un problème dans l'estimation de la sensibilité de l'observation aérodynamique.

Plusieurs raisons peuvent expliquer un problème lors de l'étape de différentiation automatique. En voici quelques exemples.

- Certaines fonctions de base ne sont **pas différentiables**. C'est le cas des opérateurs *min* et *max* renvoyant respectivement le minimum et le maximum entre deux paramètres x_1 et x_2 .

$$\begin{cases} \max(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1 \geq x_2 \\ x_2 & \text{si } x_1 < x_2 \end{cases} \\ \min(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } x_1 \geq x_2 \\ x_1 & \text{si } x_1 < x_2 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{I.74})$$

Une stratégie possible est de remplacer l'opérateur qui pose problème par des fonctions différentiables donnant un résultat similaire. Dans le cas des opérateurs *min* et *max*, on peut adopter les fonctions f_{min} et f_{max} s'écrivant comme suit :

$$\begin{cases} f_{max}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|}{2} \\ f_{min}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|}{2} \end{cases} \quad (\text{I.75})$$

On vérifie bien que f_{max} (resp. f_{min}) renvoie la valeur maximale (resp. minimale) entre les deux paramètres x_1 et x_2 . Cependant, là encore, un problème de différentiabilité apparaît. En effet, la fonction consistant à prendre la valeur absolue d'un réel n'est pas dérivable en 0. L'idée est alors de remplacer

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

	<i>tangent-on-tangent</i> mode	<i>tangent-on-reverse</i> mode
R_{in}	$fd(X, Xd, Y, Yd)$	$fb(X, Xb, Y, Yb)$
V_{in}	X	X
D_{in}	Yd	Xb
R_{out}	$fdd(X, Xd0, Xd, Y, Yd, Ydd)$	$fbd(X, Xd, Xb, Xbd, Y, Yb)$
V_{out}	$Xd = d_{X,1}$ et $Xd0 = d_{X,2}$	$Xb = Xbd = 0$, $Xd = d_{X,1}$ et $Yb = d_Y$
D_{out}	$Ydd = d_{X,1}^T \cdot (H_X Y) \cdot d_{X,2} \in \mathfrak{R}^{n_Y}$	$Xbd = H_X(Y \cdot d_Y) \cdot d_{X,1} \in \mathfrak{R}^{n_X}$

Tableau I.5 – Description des modes *tangent-on-tangent* et *tangent-on-reverse* de différentiation automatique pour calculer des dérivées secondes.

la valeur absolue par une expression approchante. Typiquement, il est courant de faire appel à la racine carrée du réel en question à la puissance 2 très légèrement perturbée. Sur notre exemple, il vient :

$$\begin{cases} f_{max}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \epsilon}}{2} \\ f_{min}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \epsilon}}{2} \end{cases} \quad (I.76)$$

avec ϵ une valeur non nulle mais négligeable (de l'ordre de 10^{-14}). Au final, les fonctions $f_{min}^{(1)}(x_1, x_2)$ et $f_{max}^{(1)}(x_1, x_2)$ sont de bonnes approximations des opérateurs *min* et *max* respectivement. L'avantage est de pouvoir différentier ces expressions approchantes.

Ce travail doit être fait avant de lancer le différentiateur automatique. Si tel n'est pas le cas, les dérivées calculées vont être incorrectes aux points de non-différentiabilité des opérateurs rencontrés.

- Dans les codes industriels où le nombre de routines peut être très important, il faut veiller à **ne pas oublier de relations de dépendance** entre les variables de dérivation et la fonctionnelle dont on cherche les sensibilités. Pour cela, une bonne connaissance du code est nécessaire. Par exemple, l'évaluation de l'observation à dériver peut se faire en plusieurs étapes réparties à différents endroits du code tandis qu'une routine assemble les diverses contributions via une série de variables globales du programme. Si une des contributions n'est pas différenciée, les dérivées calculées par différentiation automatique ne sont plus valables.

D'autres obstacles peuvent jalonner la différentiation automatique d'un code informatique. Néanmoins, les deux exemples précédents sont les plus fréquents. Sur un cas complexe de différentiation automatique d'un code industriel, il serait extrêmement rare de ne pas rencontrer l'une ou l'autre de ces deux difficultés.

C'est pourquoi, il n'est pas question d'exécuter cette étape de différentiation automatique sans contrôler pas à pas le travail effectué. Il reste donc à décrire la façon de **valider la différentiation d'une routine**.

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

Supposons qu'une routine R_{ex} calcule une fonction scalaire $f(x)$ dépendant du paramètre scalaire x . En explicitant toutes les dépendances, on peut écrire :

$$x \rightarrow R_{ex}(x, f(x)) \quad (\text{I.77})$$

La variable x est un paramètre d'entrée de la routine R_{ex} tandis que l'observation $f(x)$ est une variable de sortie de cette même routine.

Notons $(\frac{df}{dx})_{DA}$ et $(\frac{d^2f}{dx^2})_{DA}$ les dérivées première et seconde de l'observation $f(x)$ vis-à-vis de x calculées par Différentiation Automatique. L'idée de la validation de ces deux grandeurs est de les comparer aux résultats obtenus par la technique des Différences Finies.

Voici les diverses formulations adoptées avec la méthode des différences finies. Pour la dérivée première, on considère deux expressions, à savoir $(\frac{df}{dx})_{DF,1}(\epsilon_{DF})$ (expression symétrique) et $(\frac{df}{dx})_{DF,2}(\epsilon_{DF})$ (expression non symétrique).

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{df}{dx})_{DF,1}(\epsilon_{DF}) = \frac{f(x + \epsilon_{DF}) - f(x - \epsilon_{DF})}{2\epsilon_{DF}} \\ (\frac{df}{dx})_{DF,2}(\epsilon_{DF}) = \frac{f(x + \epsilon_{DF}) - f(x)}{\epsilon_{DF}} \end{array} \right. \quad (\text{I.78})$$

Concernant la dérivée seconde, seule la variante symétrique (notée $(\frac{d^2f}{dx^2})_{DF}(\epsilon_{DF})$) sera considérée.

$$(\frac{d^2f}{dx^2})_{DF}(\epsilon_{DF}) = \frac{f(x + \epsilon_{DF}) - 2f(x) + f(x - \epsilon_{DF})}{\epsilon_{DF}^2} \quad (\text{I.79})$$

La valeur du paramètre ϵ_{DF} n'est pas anodine sur la qualité des dérivées obtenues par différence finie.

Toute la stratégie de validation va d'ailleurs reposer sur ce paramètre ϵ_{DF} . Ainsi, pour différentes valeurs de ce paramètre, deux erreurs relatives ($e_{1,1}$ et $e_{1,2}$) de dérivée première seront évaluées.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{1,1}(\epsilon_{DF}) = \frac{\|(\frac{df}{dx})_{DA} - (\frac{df}{dx})_{DF,1}(\epsilon_{DF})\|_2}{\|(\frac{df}{dx})_{DA}\|_2} \\ e_{1,2}(\epsilon_{DF}) = \frac{\|(\frac{df}{dx})_{DA} - (\frac{df}{dx})_{DF,2}(\epsilon_{DF})\|_2}{\|(\frac{df}{dx})_{DA}\|_2} \end{array} \right. \quad (\text{I.80})$$

La notation $\|v\|_2$ désigne la norme L_2 du vecteur v . L'erreur relative e_2 de dérivée seconde a une expression similaire.

$$e_2(\epsilon_{DF}) = \frac{\|(\frac{d^2f}{dx^2})_{DA} - (\frac{d^2f}{dx^2})_{DF}(\epsilon_{DF})\|_2}{\|(\frac{d^2f}{dx^2})_{DA}\|_2} \quad (\text{I.81})$$

Le point important est que ces trois erreurs relatives ($e_{1,1}$, $e_{1,2}$ et e_2) dépendent du paramètre de précision ϵ_{DF} lié à la méthode des différences finies. L'idée va alors consister à tracer la courbe d'évolution de chacune de ces erreurs en fonction de ϵ_{DF} sur l'intervalle $]0, 1]$.

Si les dérivées issues de la différentiation automatique sont correctes, on devrait obtenir des courbes d'erreur en V. En effet, lorsque ϵ_{DF} décroît en partant de 1, les dérivées issues de la méthode des différences finies deviennent plus précises. Du même coup, les erreurs relatives baissent. Lorsque le paramètre ϵ_{DF} descend en-dessous de la précision-machine, la technique des différences finies se dégrade brutalement et les erreurs relatives

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

remontent. Au final, on obtient bien un comportement en V des erreurs relatives sur la plage de variation $]0, 1]$ du paramètre ϵ_{DF} .

Bien plus, un autre point va compléter la validation. Lorsque ϵ_{DF} décroît à partir de 1, le logarithme des erreurs relatives commence par décroître linéairement en fonction du logarithme du paramètre ϵ_{DF} . Vient ensuite la remontée de l'erreur, qui se caractérise par un comportement chahuté. Le point essentiel est que la théorie permet de prédire la pente des évolutions linéaires. En notant $p_{1,1}$, $p_{1,2}$ et p_2 les pentes associées aux erreurs relatives $e_{1,1}$, $e_{1,2}$ et e_2 , les valeurs théoriques sont les suivantes :

$$\begin{cases} p_{1,1} = 2 \\ p_{1,2} = 1 \\ p_2 = 2 \end{cases} \quad (\text{I.82})$$

Ainsi, le fait de retrouver ces valeurs de pente nous confortera dans la bonne estimation des dérivées calculées par différentiation automatique.

Illustrons cette validation sur un cas-test analytique.

La fonction $f_{ana}(x)$ à différentier par rapport à x est le monôme de degré 4.

$$f_{ana}(x) = x^4 \quad (\text{I.83})$$

Les dérivées de la fonction analytique f_{ana} seront évaluées au point $x = 1$.

L'idée est alors de calculer les erreurs relatives pour une série de valeurs du paramètre ϵ_{DF} . Concrètement, nous procédons de la manière suivante.

- On part de $\epsilon_{DF}^{(1)} = 1$.
- On calcule les erreurs relatives associées aux N_ϵ valeurs $(\epsilon_{DF}^{(k)})_{1 \leq k \leq N_\epsilon}$ du paramètre ϵ_{DF} . Ces valeurs s'obtiennent via la relation suivante :

$$\epsilon_{DF}^{(k)} = \beta \epsilon_{DF}^{(k-1)} \text{ pour } k=2, \dots, N_\epsilon \quad (\text{I.84})$$

où β est une constante de décroissance comprise strictement entre 0 et 1.

Sur notre exemple analytique, nous prendrons (N_ϵ, β) égal à $(500, \frac{21}{22})$ pour la validation de la dérivée première et (N_ϵ, β) égal à $(400, \frac{33}{34})$ pour la validation de la dérivée seconde.

Nous allons dès lors tracer les évolutions des logarithmes d'erreurs relatives en fonction du logarithme de ϵ_{DF} ainsi que les pentes correspondantes à ces évolutions. La figure I.2 (resp. I.3) traite la dérivée première (resp. seconde).

Les résultats permettent de s'assurer de la pertinence des dérivées exactes.

- Chacune des évolutions du logarithme d'erreur relative a bien une forme en V .
- Les pentes obtenues sur la partie linéaire des évolutions d'erreur sont conformes à la théorie.

Pour conclure sur cette partie dédiée à la validation de l'étape de différentiation automatique, un dernier point est à noter. Dans un contexte industriel, le nombre total de routines à différentier est trop important pour envisager de les traiter une à une. Un travail préliminaire va alors consister à cibler les routines-chapeau qui seront soumises au différentiateur automatique. Chaque routine-chapeau appelle un certain nombre de routines (ou sous-routines). Nous devons donc transmettre au différentiateur l'ensemble de ces routines, en lui stipulant la routine-chapeau. En premier lieu, la validation va s'appliquer à la routine-chapeau différenciée. Si un problème est mis en avant, il devient nécessaire de passer à la validation des sous-routines. On peut avoir l'intuition de la sous-routine qui pose problème. Si tel n'est pas le cas, voici une méthodologie pour déboucher le plus efficacement possible le problème de différentiabilité. Remarquons que l'ensemble des routines traitées par le différentiateur peut être vu comme un arbre généalogique. L'ancêtre commun est la routine-chapeau,

I.3 Différentiation automatique de code : mode d'emploi et validation

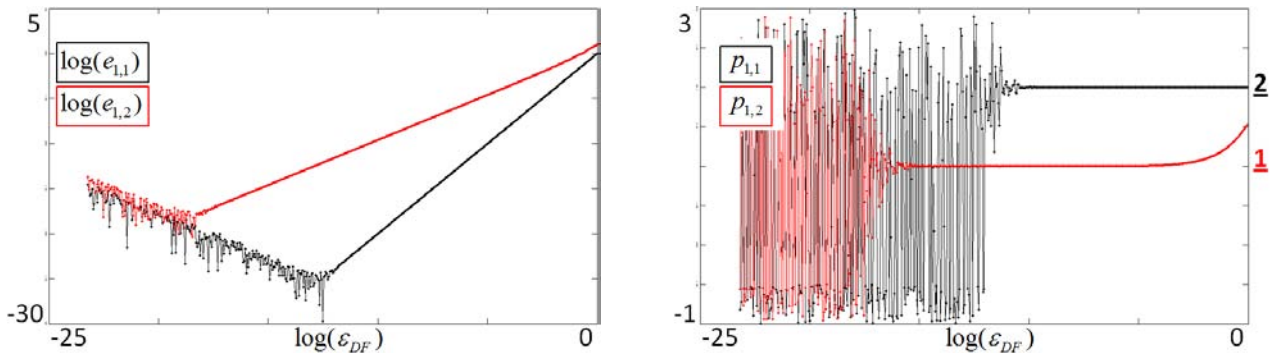


Figure I.2 – Evolutions du logarithme des erreurs relatives $e_{1,1}$ et $e_{1,2}$, ainsi que celles des pentes correspondantes $p_{1,1}$ et $p_{1,2}$, en fonction du logarithme du paramètre ϵ_{DF} , permettant de valider la dérivée première exacte de la fonction analytique f_{ana} .

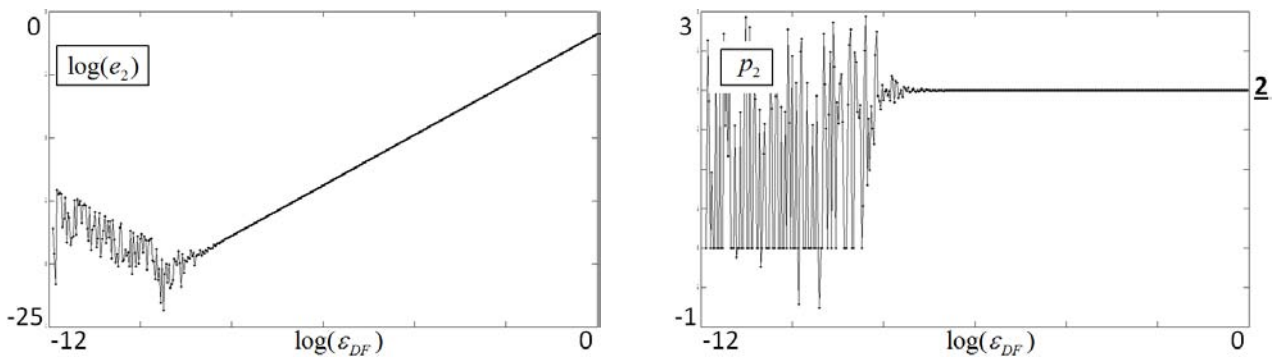


Figure I.3 – Evolution du logarithme de l'erreur relative e_2 , ainsi que celle de la pente correspondante p_2 , en fonction du logarithme du paramètre ϵ_{DF} , permettant de valider la dérivée seconde exacte de la fonction analytique f_{ana} .

qui symbolise donc la première génération. La seconde génération est constituée par les routines directement appelées par la routine-chapeau. L'ensemble des sous-routines appelées par les routines de deuxième génération forme la troisième génération, et ainsi de suite. L'idée est donc de valider les sous-routines en commençant prioritairement par les premières générations.

A ce stade, nous avons tout ce qu'il faut pour aborder la différentiation automatique des codes industriels. En effet, les formules mathématiques ont d'abord été explicitées. La méthodologie liée à la différentiation automatique des codes informatiques a ensuite été décrite en détail.

Pour fixer les idées, nous récapitulons les **étapes de calcul** nécessaires pour passer d'un **paramètre d'entrée** (de type aérodynamique ou géométrique) à une **observation scalaire** d'intérêt.

- Le point de départ revient à se donner un maillage destiné à modéliser l'écoulement autour d'un certain objet aérodynamique.
- La chaîne de calcul va dépendre de la nature aérodynamique ou géométrique du paramètre d'entrée considéré.
- Dans le cas d'un **paramètre aérodynamique**, la première tâche consiste à résoudre les équations de la mécanique des fluides (Euler ou Navier-Stokes). Sur la base de la solution fluide trouvée, les observations aérodynamiques s'obtiennent par des opérations mathématiques relativement simples. Par exemple, la traînée est simplement la composante des efforts exercés sur le corps, dans la direction opposée à la vitesse relative du corps par rapport au fluide.

- Dans le cas d'un **paramètre géométrique**, la chaîne de calcul se complexifie quelque peu. Ayant attribué une certaine valeur à la variable géométrique, on commence par déformer la peau de l'objet (et donc le maillage surfacique). Cette opération utilise la géométrie (CAO) de la surface. Ensuite, la déformation surfacique est propagée à l'ensemble du maillage volumique via un opérateur de relèvement de type elliptique. Au final, nous nous retrouvons avec un nouveau maillage défini autour d'une peau respectant la valeur du paramètre géométrique considérée au départ. A partir de là, on retrouve les deux étapes décrites dans le cas d'un paramètre aérodynamique. Il s'agit de la résolution des équations fluides puis du calcul de l'observation scalaire choisie.

Ces étapes de calcul sont menées en milieu industriel avec les outils disponibles à Dassault Aviation. Voici un descriptif rapide du contexte d'étude valable tout au long de cette thèse.

- Les **équations de la mécanique des fluides** (Euler ou Navier-Stokes) sont résolues sur des maillages non structurés constitués exclusivement de triangles (en 2D) ou de tétraèdres (en 3D). Pour accélérer la convergence, la résolution des équations fluides est parallélisée via une décomposition du domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. Typiquement, on découpe le maillage en 32, 64 ou 128 sous-domaines. Le calcul est ensuite mené sur un ordinateur multi-processeurs à mémoire distribuée. Chaque sous-domaine est associé à un processeur. La communication entre les processeurs est assurée par la bibliothèque MPI (*Message Passing Interface*) et permet d'obtenir la même solution qu'en mode mono-domaine (calcul séquentiel).
- Les **équations de type Euler** (en 3D) sont résolues par le code de calcul *EUGENIE*. La méthode de résolution fait appel à la technique de Galerkin-volume fini. Le flux régulièrement utilisé est celui de Lax-Wendroff. Par défaut, ce sera notre choix pour toute cette thèse. Plus précisément, nous faisons appel à un schéma prédictor-correcteur centré d'ordre 2, auquel on rajoute un terme de dissipation. Le terme de bord est calculé en utilisant le flux de Steger-Warming. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.
- Les **équations de type Navier-Stokes** (en 2D et 3D) sont résolues par le code de calcul *AETHER*. Cette fois-ci, la technique des éléments finis est employée. L'annexe B décrit la manière employée pour résoudre ce système d'équations fluides. Une fois la solution fluide déterminée, le logiciel *COSTADJOINT* calcule l'observation scalaire d'intérêt que nous souhaitons ici différentier.
- Les **déformations de maillage surfacique** sont assurées par le code *GANIMEDE* (présenté en annexe C).

La figure I.4 schématise cette chaîne de calcul. Pour estimer les dérivées de l'observation scalaire, toutes les étapes sont à différentier. Dans ce travail, nous continuerons de faire appel à la technique des différences finies pour l'étape de déformation surfacique (gérée par le logiciel *GANIMEDE*). La différentiation de *GANIMEDE* est actuellement en cours à Dassault Aviation.

Nous allons maintenant décrire plus en détail la méthodologie à suivre pour calculer la dérivée première et surtout seconde d'une observation scalaire.

4 Descriptif du processus nécessaire à l'estimation d'une dérivée seconde d'observation aérodynamique via la technique de différentiation automatique

La détermination des sensibilités premières et secondes d'une observation aérodynamique par la technique de différentiation automatique de code va nécessiter plusieurs étapes de calcul successives. Une étape de calcul représente l'exécution d'un programme informatique.

Voici les informations qui vont permettre de décrire une étape particulière.

- On commencera bien sûr par spécifier le programme utilisé.
- On précisera le niveau des modifications apportées à celui-ci, en particulier le travail de différentiation automatique qui a été effectué.

I.4 Descriptif du processus nécessaire à l'estimation d'une dérivée seconde d'observation aérodynamique via la technique de différentiation automatique

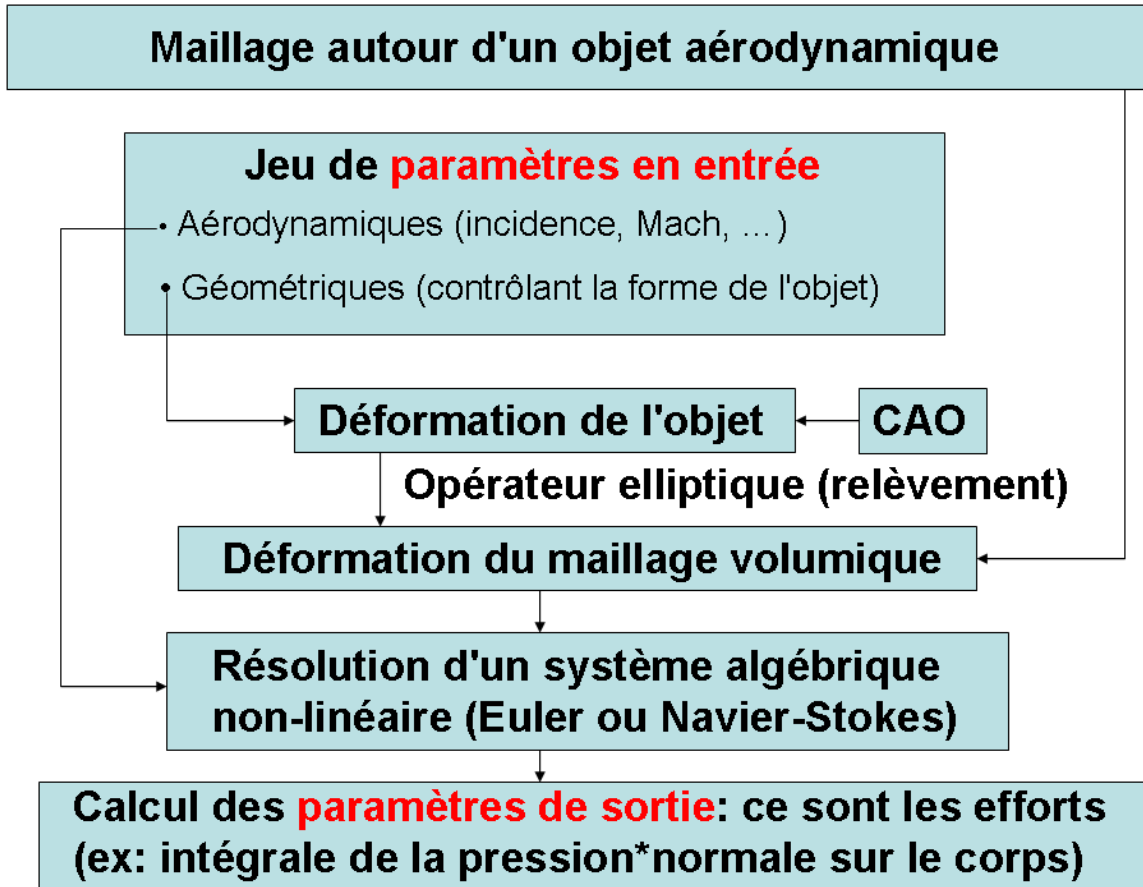


Figure I.4 – Schéma général permettant de passer d'une variable aérodynamique ou géométrique à l'observation scalaire que l'on souhaite étudier.

- Les données d'entrée de ce programme, propres à l'estimation des sensibilités d'observation, seront passées en revue.
- Enfin, les grandeurs calculées seront analysées. On sera notamment attentif au caractère stockable de ces dernières.

Pour cette analyse, on se focalise sur le cas le plus complexe, à savoir les dérivées secondes d'une observation scalaire J issue d'un calcul Navier-Stokes. Les variables de dérivation seront N_{var} paramètres $\nu = (\nu_i)_{1 \leq i \leq N_{var}}$ de type géométrique. Les autres variantes sont plus simples.

- Le cas d'une variable aérodynamique permet d'éviter la déformation de maillage surfacique.
- Le code Euler n'a pas besoin de faire appel au programme *COSTADJOINT* pour calculer l'observation scalaire que l'on cherche à différentier. En effet, il gère lui-même la plupart des fonctions aérodynamiques d'intérêt (dont la traînée et la portance).

Ainsi, il sera aisé de généraliser cette méthodologie pour traiter l'une de ces deux autres options de calcul.

Les diverses notations utilisées dans cette partie ont été introduites lors de la formulation mathématique des dérivées. On les utilisera donc telles quelles, sans les expliciter de nouveau.

Comme information de départ, nous avons un objet aérodynamique autour duquel l'écoulement d'air doit être simulé. Cet objet est défini par sa géométrie surfacique (CAO) et par le maillage volumique utilisé pour les calculs CFD. Nous supposons que la résolution des équations de la mécanique des fluides a déjà été effectuée.

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Le vecteur d'état W est donc disponible.

Un dernier point doit être souligné. Il concerne la question du caractère stockable des informations calculées à chaque étape. Typiquement, le stockage d'une grandeur n'est pas envisageable dès que sa taille est proportionnelle à une puissance strictement supérieure à 1 du nombre de sommets volumiques N_v ou surfaciques N_p . On veillera donc à ne pas être dans ce cas-là tout au long du processus d'évaluation des dérivées.

Première étape : calcul des sensibilités premières et secondes des coordonnées surfaciques vis-à-vis des paramètres géométriques de dérivation

Le logiciel *GANIMEDE* va nous servir à estimer les **dérivées premières et secondes des coordonnées X_p du maillage surfacique** (peau). Les variables de dérivation sont les paramètres géométriques ν , contrôlant la forme de l'objet aérodynamique.

Les deux quantités à stocker sont donc les dérivées $\frac{dX_p}{d\nu}$ et $\frac{d^2X_p}{d\nu^2}$. Les tailles respectives de ces deux grandeurs sont $d_i N_p N_{var}$ et $d_i N_p N_{var}^2$ (en rappelant que d_i désigne la dimension de l'espace). Elles restent linéaires vis-à-vis du nombre de sommets surfaciques N_p . Le stockage est donc tout à fait possible.

La différentiation de *GANIMEDE* n'est pas encore opérationnelle. Ainsi, les deux informations $\frac{dX_p}{d\nu}$ et $\frac{d^2X_p}{d\nu^2}$ sont actuellement évaluées par différences finies (schéma centré pour l'ordre 1 comme pour l'ordre 2).

Enfin, pour pouvoir mener à bien cette étape, il est nécessaire de fournir à *GANIMEDE* à la fois la définition géométrique de la surface (CAO), mais aussi le maillage surfacique. En effet, le logiciel *GANIMEDE* doit être capable de faire le lien entre la déformation de la géométrie induite par les paramètres ν et le déplacement des sommets surfaciques.

Seconde étape : calcul des sensibilités premières de l'observation scalaire vis-à-vis du vecteur d'état et des coordonnées volumiques

On cherche à évaluer les **gradients de l'observation scalaire J vis-à-vis du vecteur d'état W et des coordonnées volumiques X_v** . Ces deux entités seront respectivement notées $\frac{\partial J}{\partial W}$ et $\frac{\partial J}{\partial X_v}$. Pour cela, on fait appel au programme *COSTADJOINT*. Plus exactement, nous devons exécuter ce programme en mode gradient. La différentiation de *COSTADJOINT* à l'ordre 1 était déjà mis en place avant le début de cette thèse. Notons que le mode inverse (*reverse* mode) de différentiation automatique est ici bien utile. En effet, nous avons vu que ce mode de fonctionnement est adapté au calcul du gradient complet d'une observation scalaire vis-à-vis d'un paramètre vectoriel de dérivation. C'est exactement le cas ici.

Cette étape ne fait pas directement intervenir les paramètres ν de dérivation. Par ailleurs, les seules données à lire sont le maillage volumique muni de la solution W des équations fluides. De ce fait, les deux premières étapes peuvent se faire en parallèle. Ceci permettrait de réduire le temps de calcul.

Les termes évalués ($\frac{\partial J}{\partial W}$ et $\frac{\partial J}{\partial X_v}$) sont de taille respective $(2 + d_i)N_v$ et $d_i N_v$. Là encore, le stockage est envisageable, étant donné que les tailles restent linéaires par rapport au nombre N_v de sommets volumiques.

Troisième étape : calcul des sensibilités d'ordre 1 de l'observation, en plus du stockage de diverses grandeurs (dont l'adjoint fluide)

Le code *AETHER*, résolvant les équations de Navier-Stokes, va être utilisé en mode gradient. Cela signifie que le programme *AETHER* est différentié à l'ordre 1. La différentiation de code, effectuée avant le début des travaux de cette thèse, s'est déroulée suivant le mode direct (*tangent* mode) de fonctionnement.

I.4 Descriptif du processus nécessaire à l'estimation d'une dérivée seconde d'observation aérodynamique via la technique de différentiation automatique

Le maillage et la solution non linéaire W sont relus. En plus, on réutilise les grandeurs suivantes : $\frac{dX_p}{d\nu}$ (issue de la première étape) et $(\frac{\partial J}{\partial W}, \frac{\partial J}{\partial X_v})$ (issues de la seconde étape). Il est donc obligatoire d'attendre la fin des deux précédentes étapes de calcul avant de lancer l'exécution du programme *AETHER* en mode gradient.

Deux simulations *AETHER* sont même nécessaires. Il s'agit du calcul du gradient de l'observation scalaire en mode adjoint et en mode direct. En effet, les deux types de calcul vont permettre de stocker différentes informations utiles pour l'évaluation ultérieure de la dérivée seconde.

- En **mode adjoint**, la grandeur stockée est l'**adjoint fluide** ψ , solution d'un système linéaire. La taille de l'adjoint est égale à $(2 + d_i)N_v$. La linéarité de cette dimension vis-à-vis du nombre N_v de sommets volumiques dévoile le caractère stockable de cette grandeur.
- En **mode direct**, les grandeurs stockées sont les **deux gradients** $\frac{dX_v}{d\nu}$ et $\frac{dW}{d\nu}$. Nous n'avons pas explicité la formulation de la dérivée première de l'observation en mode direct. Voici donc la formule :

$$\frac{dJ}{d\nu} = \frac{\partial J}{\partial X_v} \frac{dX_v}{d\nu} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{dW}{d\nu} \quad (\text{I.85})$$

Les deux termes $\frac{dX_v}{d\nu}$ et $\frac{dW}{d\nu}$ à stocker interviennent bel et bien dans l'expression de la dérivée première de l'observation J en version directe, c'est-à-dire sans l'adjoint fluide ψ . Par ailleurs, leurs tailles respectives sont de $d_i N_v N_{var}$ et $(2 + d_i) N_v N_{var}$. Leur caractère stockable vient de la linéarité de chacune de ces deux tailles par rapport au nombre N_v de sommets volumiques.

Remarquons que chacune de ces deux simulations *AETHER* calcule la **dérivée première $\frac{dJ}{d\nu}$ de l'observation scalaire J vis-à-vis des paramètres géométriques ν** . A ce titre, un moyen efficace de vérification du bon déroulement du processus est de s'assurer que les deux modes de fonctionnement d'*AETHER* (modes direct et adjoint) fournissent la même valeur de dérivée première $\frac{dJ}{d\nu}$!

Les deux dernières étapes de calcul sont spécifiques au calcul de la dérivée seconde de l'observation aérodynamique scalaire.

Quatrième étape : calcul de la partie explicite de la dérivée seconde de l'observation vis-à-vis des paramètres géométriques

Le programme *COSTADJOINT* est à nouveau sollicité, mais cette fois-ci en mode hessien.

La version utilisée de *COSTADJOINT* est celle qui a été différenciée à l'ordre 2 au cours de cette thèse. Le mode de différentiation employé est le mode direct deux fois (*tangent-on-tangent* mode). Ce choix s'explique par le type d'information à calculer. Il s'agit de déterminer la **partie explicite de la dérivée seconde de l'observation**. Autrement dit, on doit évaluer (et stocker) le terme $D_{W,\nu}^{(g)} J$ qui s'avère être un scalaire. Or, nous avons vu que le mode *tangent-on-tangent* était efficace pour évaluer la dérivée seconde directionnelle d'une observation scalaire, ce qui est le cas ici.

Pour mener à bien cette tâche, le programme *COSTADJOINT* doit relire les quantités $\frac{dX_v}{d\nu}$ et $\frac{dW}{d\nu}$ évaluées lors de l'étape précédente (*AETHER* en mode gradient).

Cinquième et ultime étape : calcul de la dérivée seconde de l'observation aérodynamique vis-à-vis des paramètres géométriques

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Cette dernière étape fait appel au code *AETHER* en mode hessien.

Cela suppose que le programme *AETHER* a été différentié à l'ordre 2. Ce fut un des principaux travaux de cette thèse. Il calcule la **dérivée seconde** $\frac{d^2 J}{d\nu^2}$ **de l'observation scalaire J vis-à-vis des paramètres géométriques ν .**

Là encore, le mode *tangent-on-tangent* est adopté. En effet, le principal terme d'ordre 2 à calculer par différentiation automatique est $D_{W,\nu}^{(g)} E$. Or, celui-ci est formé d'une somme de trois dérivées secondes directionnelles, aisément appréhendables par le mode *tangent-on-tangent*.

Cette cinquième étape peut être vue comme un travail d'assemblage des différents termes calculés lors des quatre étapes précédentes. Ainsi, voici la liste des informations à relire par *AETHER* en mode hessien :

- $\frac{d^2 X_p}{d\nu^2}$, venant de la première étape.
- $\frac{\partial J}{\partial X_v}$, issu de la seconde étape. Ce terme est utile pour déterminer l'adjoint ϕ de déformation.
- $(\frac{dX_v}{d\nu}, \frac{dW}{d\nu}, \psi)$, venant de la troisième étape.
- $D_{W,\nu}^{(g)} J$, venant de la quatrième étape.

Nanti de toutes ces données, il est possible de déterminer la dérivée seconde double adjointe $\frac{d^2 J}{d\nu^2}$, dont on rappelle la formulation ci-dessous.

$$\frac{d^2 J}{d\nu^2} = D_{W,\nu}^{(g)} J - \psi^T D_{W,\nu}^{(g)} E - \phi^T \frac{\partial L}{\partial X_p} \frac{d^2 X_p}{d\nu^2} \quad (\text{I.86})$$

Ces cinq étapes de calcul nous ont donc permis de déterminer les dérivées premières et secondes de l'observation J vis-à-vis des paramètres géométriques ν en présence d'un problème Navier-Stokes. Toute cette méthodologie est récapitulée par la figure I.5.

Dans la même idée, la figure I.6 précise les étapes de calcul des dérivées d'une observation scalaire en présence d'un problème Euler. On envisage le cas d'un paramètre de dérivation aérodynamique λ ou géométrique ν .

Notons que le cas de la dérivée de l'observation J par rapport à des paramètres de type aérodynamique n'a pas été évoqué pour un problème Navier-Stokes. En effet, nous n'avons pas implémenté cette option de calcul.

L'ultime section de ce chapitre va concerner la validation globale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par la voie de la différentiation automatique de code. Des cas-test Euler et Navier-Stokes seront utilisés pour cela.

5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

Les dérivées premières et secondes des observations aérodynamiques calculées par différentiation automatique des codes industriels de Dassault Aviation vont ici être validées.

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

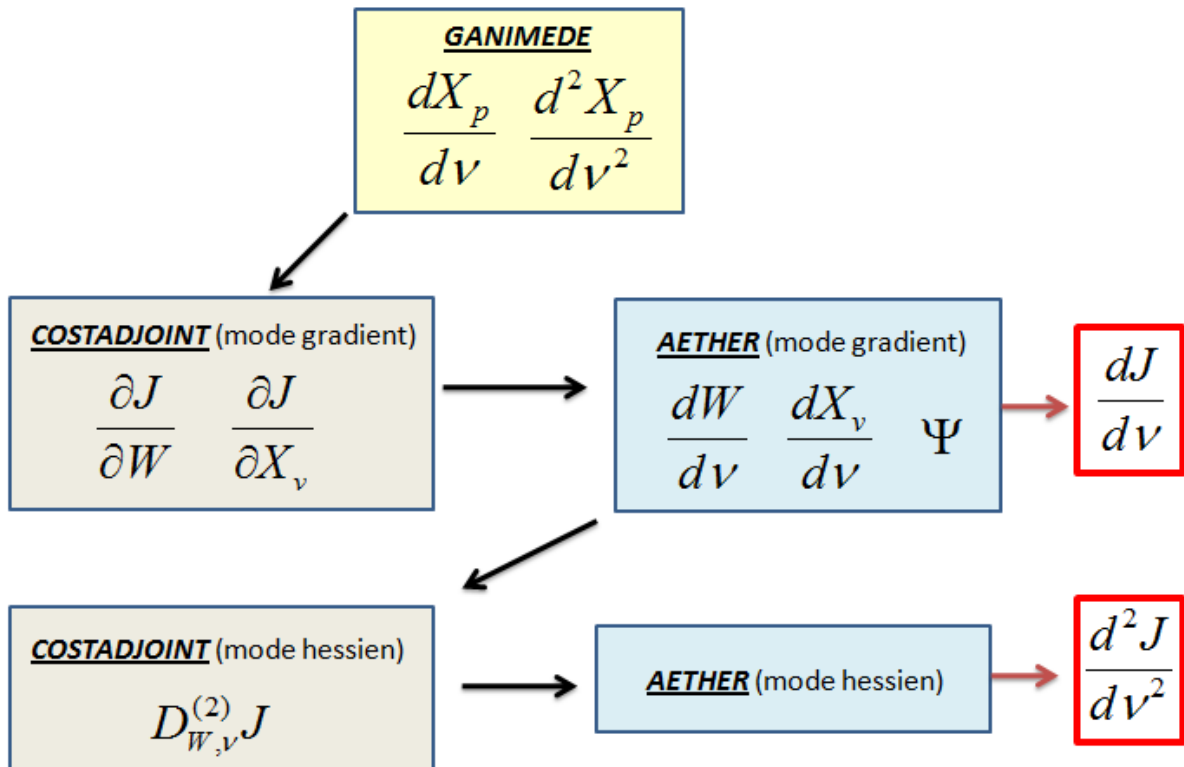


Figure I.5 – Méthodologie pour déterminer les dérivées premières et secondes de l'observation J vis-à-vis de paramètres géométriques ν en présence d'un problème Navier-Stokes (code *AETHER* de Dassault Aviation).

5.1 Contexte de la validation : méthodologie générale et notations

On part du calcul d'une observation aérodynamique f . Cette observation s'obtient à la suite de la résolution des équations de la mécanique des fluides, via un code CFD industriel. Le but est d'estimer les sensibilités premières et secondes de f vis-à-vis de certains paramètres d'entrée du calcul. Ces variables de dérivation seront notées x . Il peut s'agir de variables de type aérodynamique λ ou géométrique ν .

Les problèmes rencontrés en industrie étudient parfois l'influence de dizaines de paramètres sur la valeur de l'observation. Néanmoins, nous allons nous focaliser sur les cas d'une et de deux variables de dérivation. Ce choix n'est absolument pas réducteur mais plutôt cohérent avec l'ordre maximal des dérivées étudiées. Les dérivées secondes couplent en effet les variables deux à deux. Introduisons les notations utilisées dans cette section, en différenciant les cas à une et deux variables de dérivation.

Cas à une variable de dérivation

Le paramètre x (variable de dérivation) est donc réduit à un scalaire. On rappelle que le but est de valider les dérivées première et seconde de l'observation f vis-à-vis de x . Notons $x^{(0)}$ la valeur du paramètre x pour laquelle les dérivées sont calculées par différentiation automatique. Ces dérivées seront notées $(\frac{\partial f}{\partial x})_{DA}$ (dérivée première) et $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{DA}$ (dérivée seconde). Les lettres DA sont l'abréviation de Différentiation Automatique.

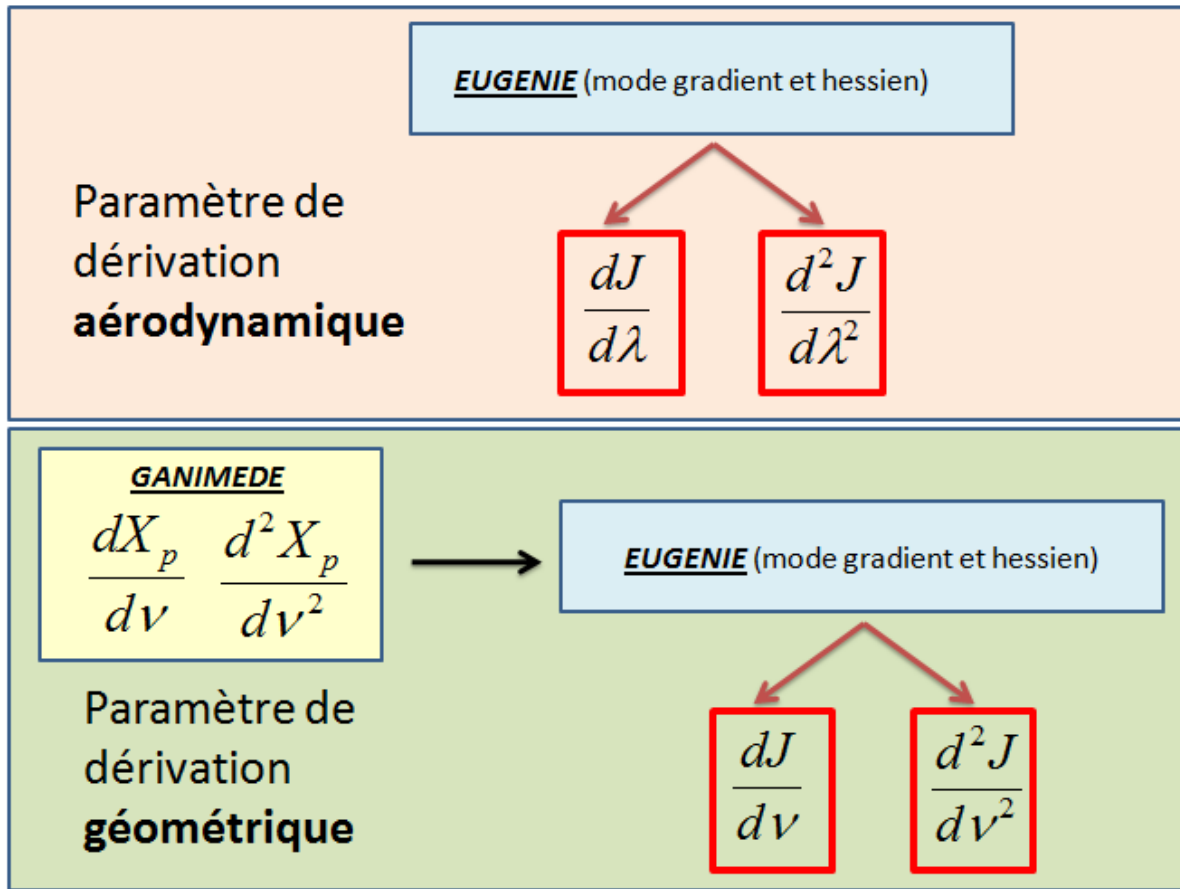


Figure I.6 – Méthodologie pour déterminer les dérivées premières et secondes de l’observation J vis-à-vis de paramètres aérodynamiques λ ou géométriques ν en présence d’un problème Euler (code *EUGENIE* de Dassault Aviation).

Sur la base de ces dérivées première et seconde, les développements de Taylor d’ordres 0, 1 et 2 peuvent être établis. Notés respectivement $f^{(0)}$, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$, ils s’écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(0)}(x) = f(x^{(0)}) \\ f^{(1)}(x) = f^{(0)}(x) + (x - x^{(0)}) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{DA} \\ f^{(2)}(x) = f^{(1)}(x) + \frac{1}{2} (x - x^{(0)})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{DA} \end{array} \right. \quad (I.87)$$

A partir de ces approximations, une série de notations est introduite.

Tout d’abord, l’écart absolu associé au développement de Taylor d’ordre i sera noté e_i .

$$e_i(x) = |f^{(i)}(x) - f(x)| \quad (I.88)$$

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

L'écart relatif $e_i^{(r)}$ correspondant s'obtient par simple adimensionnalisation de l'écart absolu e_i .

$$e_i^{(r)}(x) = 100 \frac{e_i(x)}{|f(x)|} \quad (\text{I.89})$$

Les écarts absolus et relatifs seront évalués pour un ensemble discret de N valeurs du paramètre x , notées $(x[1], \dots, x[N])$. Pour mieux synthétiser les résultats, deux erreurs scalaires seront fournies. Il s'agit des erreurs moyennes et maximales. Toujours associées au développement de Taylor d'ordre i de l'observation f , les erreurs moyennes et maximales sont désignées par les notations $e_{i,1}$ et $e_{i,\infty}$ respectivement. Voici l'expression de ces deux scalaires :

$$\begin{cases} e_{i,1} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_i^{(r)}(x[k]) \\ e_{i,\infty} = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} e_i^{(r)}(x[k]) \end{cases} \quad (\text{I.90})$$

Enfin, six gains serviront à quantifier l'apport lié à l'élévation de l'ordre du développement de Taylor sur la précision de l'approximation de la fonction f . Trois sont liés à l'erreur moyenne. Ils sont notés $G_1^{(0 \rightarrow 1)}$, $G_1^{(1 \rightarrow 2)}$ et $G_1^{(0 \rightarrow 2)}$. Les trois autres (notés $G_\infty^{(0 \rightarrow 1)}$, $G_\infty^{(1 \rightarrow 2)}$ et $G_\infty^{(0 \rightarrow 2)}$) se rattachent à l'erreur maximale. Les expressions des gains (exprimés en pourcentage) sont les suivantes :

$$\begin{cases} G_1^{(k \rightarrow j)} = 100 \left(1 - \frac{e_{j,1}}{e_{k,1}}\right) \\ G_\infty^{(k \rightarrow j)} = 100 \left(1 - \frac{e_{j,\infty}}{e_{k,\infty}}\right) \end{cases} \quad (\text{I.91})$$

Plus les gains $G_1^{(k \rightarrow j)}$ et $G_\infty^{(k \rightarrow j)}$ sont forts, plus l'amélioration de l'approximation de la fonction f obtenue lorsque l'on passe du développement de Taylor d'ordre k à celui d'ordre j est conséquente.

Dès lors, la validation finale du calcul des dérivées de f estimées par différentiation automatique se fera en deux temps.

- Le premier type de validation est de nature **quantitative**. On utilise pour cela les erreurs et gains qui viennent d'être présentés. Connaissant le comportement de l'observation, il faudra s'assurer que ces différents indicateurs sont cohérents. Par exemple, si l'observation évolue de manière quadratique, il faudra que les indicateurs traduisent le fait que le développement de Taylor d'ordre 2 est une bonne approximation de l'observation, contrairement aux développements d'ordres 0 ou 1.
- Le second type de validation sera de nature **qualitative** (ou visuelle). L'idée est de tracer la tangente et la courbure en un point sur la courbe exacte d'évolution de la fonction f vis-à-vis du paramètre x .

Passons au cas de deux variables de dérivation.

Cas à deux variables de dérivation

Les deux variables de dérivation seront notées x_1 et x_2 . Nous allons chercher à valider les dérivées premières et secondes données par la différentiation automatique de la fonction f au point $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Pour cela, les développements de Taylor de l'observation f d'ordres 1 et 2 seront utilisés. Notés respectivement

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

$f^{(1)}$ et $f^{(2)}$, ils valent :

$$\begin{cases} f^{(1)}(x_1, x_2) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \sum_{i=1}^2 (x_i - x_i^{(0)}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{DA} \\ f^{(2)}(x_1, x_2) = f^{(1)}(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (x_i - x_i^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)}) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{DA} \end{cases} \quad (\text{I.92})$$

Ces développements de Taylor vont être estimés sur un ensemble de N couples de paramètres de dérivation. Cet ensemble sera noté $\{(x_1[1], x_2[1]), \dots, (x_1[N], x_2[N])\}$.

Sur la base de l'approximation de Taylor d'ordre i , une erreur scalaire $e_i^{(3D)}$ est calculée.

$$e_i^{(3D)} = 100 \frac{\sum_{i=1}^N |f^{(i)}(x_1[k], x_2[k]) - f(x_1[k], x_2[k])|}{\sum_{i=1}^N |f(x_1[k], x_2[k])|} \quad (\text{I.93})$$

La validation va s'opérer en trois étapes distinctes.

- La surface exacte d'évolution de la fonction va être visualisée. Elle s'appuie sur un ensemble de résolutions complètes du problème de la mécanique des fluides. Pour une valeur particulière des deux variables de dérivation, les tangentes et courbures vont être tracées dans les directions principales. Il s'agira donc de vérifier la cohérence de chacune des tangentes et courbures par rapport au comportement local de l'observation, mais aussi de leur orientation. La pertinence de l'orientation des directions principales nous renseigne sur la qualité de la dérivée seconde croisée.
- Nous comparerons la surface exacte d'évolution de la fonction f avec les surfaces obtenues via les développements de Taylor d'ordres 1 et 2 d'un point particulier. La validation s'effectuera en vérifiant la cohérence des surfaces obtenues.
- Enfin, l'erreur scalaire servira à mesurer la précision des développements de Taylor d'ordres 1 et 2 en un point. Sa valeur devra être conforme aux impressions visuelles.

Un ensemble de validations va donc avoir lieu. Chacune de ces validations s'appuiera sur différents cas-test de référence en aérodynamique. A chaque fois, l'observation scalaire choisie pour être différenciée sera le coefficient de traînée C_x .

Voici un rapide tour d'horizon des tests proposés.

- On commence par le traitement des **équations d'Euler en 3 dimensions** (code industriel *EUGENIE* de Dassault Aviation). La première vérification va consister en une validation croisée des dérivées de l'observation vis-à-vis de paramètres de dérivation de type aérodynamique et géométrique. L'idée est de considérer une variable aérodynamique (angle d'incidence vu comme la direction de l'écoulement à l'infini) et une variable géométrique (angle d'incidence vu comme l'angle de rotation globale de l'objet) produisant le même effet. Le but est alors de trouver la même valeur de sensibilités première et seconde de l'observation pour ces deux paramètres de natures différentes. On rappelle que les paramètres aérodynamiques et géométriques ne se traitent pas de la même manière. Le paramètre géométrique nécessite une déformation du corps et donc du maillage volumique, contrairement au paramètre aérodynamique. Le cas-test qui sera utilisé est un fuselage simple en forme de cône.
- Toujours sur un **problème Euler en 3 dimensions**, nous validerons le calcul des dérivées premières et secondes de l'observation pour trois variables géométriques de dérivation. Celles-ci sont fréquemment utilisées pour optimiser la forme d'un profil d'aile. Il s'agit de l'épaisseur relative, de l'angle de cambrure de bord de fuite et de l'angle de rotation globale. Les cas de figure à une et deux variables, présentés précédemment, seront abordés. Le cas-test associé à cette étude est l'aile ONERA M6.
- Nous passerons ensuite à un **problème Navier-Stokes en 2 dimensions** (code industriel *AETHER* de Dassault Aviation). Le problème envisagé est le cas-test RAE2822. Les variables de dérivation seront de nature géométrique. Il s'agira de l'épaisseur relative et de l'angle de rotation globale. Nous nous limiterons au cas de figure d'une seule variable de dérivation à la fois. Deux études seront menées, l'une à 1° d'incidence et l'autre à 2.79° d'incidence.
- Enfin, nous proposerons un début de validation des dérivées sur un **problème Navier-Stokes en 3 dimensions**. L'épaisseur relative sera notre unique paramètre de dérivation. Le cas-test utilisé s'obtiendra en dupliquant le maillage RAE2822 en plusieurs plans. La validation va dès lors consister à retrouver

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

des valeurs de dérivées premières et secondes semblables à celles trouvées en 2 dimensions lors de l'étude précédente (cas à 1° d'incidence).

5.2 Validation des dérivées premières et secondes sur un problème Navier-Stokes

5.2.1 Etude de sensibilité sur un cas à 1° d'incidence (problème 2D)

Le but est de valider les dérivées premières et secondes d'une observation scalaire issue d'une résolution Navier-Stokes. Ces sensibilités ont été calculées par différentiation automatique du code industriel *ETHER* (cf annexe B) de Dassault Aviation qui traite les équations de Navier-Stokes.

Pour cette étude, nous allons restreindre la validation via les hypothèses suivantes.

- Les paramètres de dérivation envisagés seront tous de type géométrique.
- On ne traitera que le cas d'une seule variable de dérivation à la fois.
- Les dérivées vont toujours être calculées en la valeur nominale du paramètre géométrique considéré.

Le cas-test utilisé pour l'étude est le profil d'aile RAE2822. Il s'agit d'un cas-test Navier-Stokes référencé en 2 dimensions. La figure I.7 montre une vue du maillage proche du profil d'aile.

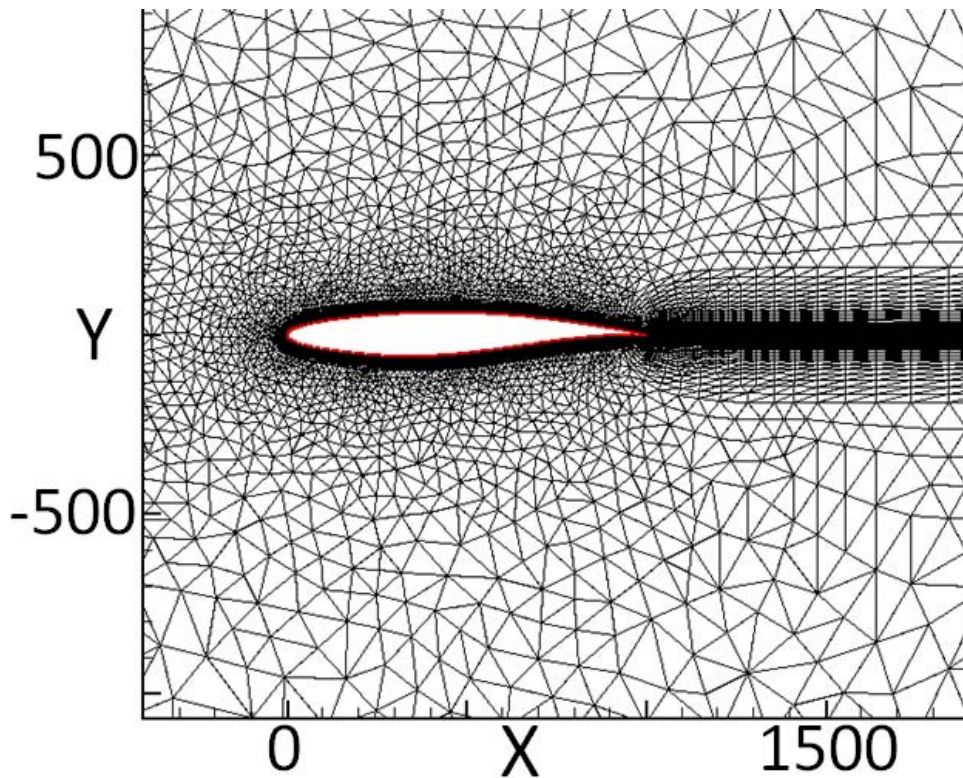


Figure I.7 – Visualisation du cas-test RAE2822, cas-test Navier-Stokes en 2 dimensions.

Les conditions du calcul Navier-Stokes sont les suivantes : le nombre de Mach est égal à 0,734 et l'angle d'incidence vaut 1° . L'observation à différentier est la traînée C_x et les deux paramètres géométriques de dérivation sont l'angle de rotation globale α_R et l'épaisseur relative e_P . L'effet de chacun de ces deux paramètres sur la forme du profil RAE2822 est donné par la figure I.8.

La figure I.9 dévoile les évolutions exactes de la traînée vis-à-vis des deux variables géométriques α_R et e_P .

Sur ces évolutions exactes de traînée, les tangentes et courbures sont rajoutées au point nominal des paramètres géométriques. L'angle de rotation globale est traité en figure I.10, l'épaisseur relative en figure I.11.

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

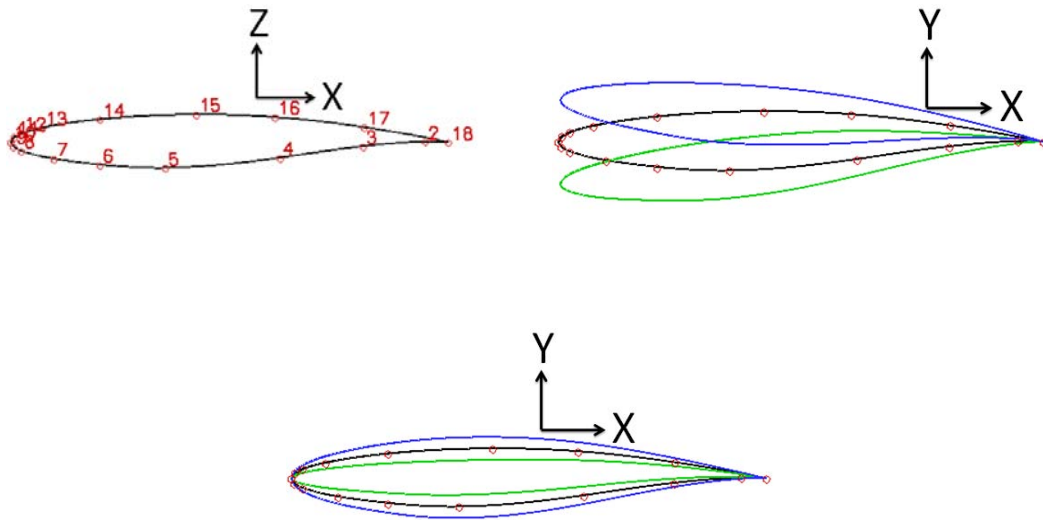


Figure I.8 – Forme nominale de la géométrie de l’aile RAE2822 (en noir) avec la position des points de contrôle (figure en haut à gauche). Les effets d’un changement d’angle de rotation globale ($\alpha_R = -5^\circ$ (vert), $\alpha_R = 0^\circ$ (noir) et $\alpha_R = 5^\circ$ (bleu)) et d’épaisseur relative ($e_P = 0.6$ (vert), $e_P = 1$ (noir) et $e_P = 1.4$ (bleu)) sont donnés de haut en bas et de gauche à droite.

Des plans large (figure de gauche) et serré (figure de droite) sont proposés pour chacune des deux configurations.

Sur ce problème Navier-Stokes, on constate visuellement un comportement correct des tangentes et courbures estimées par différentiation automatique. Les plans serrés montrent notamment une adéquation presque parfaite entre l’évolution exacte de la traînée et l’arc de cercle osculateur s’appuyant sur les sensibilités d’ordres 1 et 2.

Ces figures tendent à démontrer la cohérence des dérivées de Navier-Stokes estimées par différentiation automatique du code industriel *AETHER* de Dassault Aviation. Pour le confirmer, nous nous intéressons aux erreurs moyennes et maximales (tableau I.6) ainsi qu’aux gains obtenus (tableau I.7).

	Erreur moyenne			Erreur maximale		
	$e_{0,1}$	$e_{1,1}$	$e_{2,1}$	$e_{0,\infty}$	$e_{1,\infty}$	$e_{2,\infty}$
α_R	3.8	$7.2e^{-1}$	$2.6e^{-1}$	7.3	2.0	$8.3e^{-1}$
e_P	4.1	$6.1e^{-1}$	$1.1e^{-1}$	10.5	2.3	$6.3e^{-1}$

Tableau I.6 – Erreurs moyennes et maximales associées au développement de Taylor d’ordres 0, 1 et 2 de la traînée vis-à-vis de l’angle de rotation globale α_R et de l’épaisseur relative e_P , sur la base des dérivées obtenues par différentiation automatique des codes industriels (cas-test de l’aile RAE2822 à 1° d’incidence).

Les indicateurs numériques (erreurs et gains) mettent en lumière une amélioration sensible des approximations de Taylor lorsque les dérivées secondes sont prises en compte. Par exemple, les erreurs maximales sont inférieures à l’unité uniquement pour le développement de Taylor d’ordre 2 (tableau I.6). Par ailleurs, le fait de

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

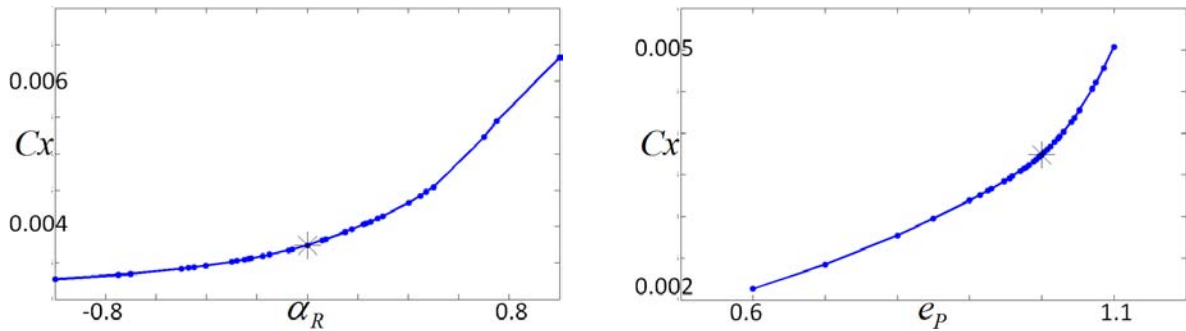


Figure I.9 – Evolution exacte de la traînée lorsque l'un des deux paramètres géométriques α_R (à gauche) et e_p (à droite) varie, la valeur nominale étant marquée d'une étoile (cas-test de l'aile RAE2822 à 1° d'incidence).

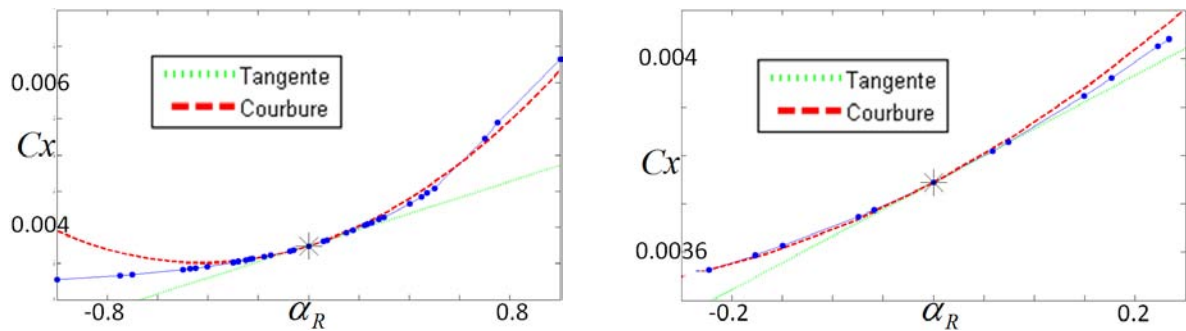


Figure I.10 – Visualisations de la tangente et de la courbure basées sur les dérivées de traînée C_x obtenues par différentiation automatique lorsque l'angle de rotation globale α_R varie, avec un plan d'ensemble à gauche et resserré autour de la valeur nominale à droite (cas-test de l'aile RAE2822 à 1° d'incidence).

passer du développement de Taylor d'ordre 1 à celui d'ordre 2 procure un gain supérieur à 50% dans tous les cas de figure (tableau I.7).

Ainsi, les dérivées premières et secondes d'une observation estimées par différentiation automatique ont été validées sur un problème Navier-Stokes en 2 dimensions à 1° d'incidence (profil RAE2822). Dans la section suivante, nous reprenons le même cas-test, mais en élevant l'angle d'incidence (2.79° au lieu de 1°).

5.2.2 Etude de sensibilité sur un cas à 2.79° d'incidence (problème 2D)

Nous reprenons le cas-test précédent (profil d'aile RAE2822) en modifiant légèrement les conditions du calcul CFD. L'angle d'incidence passe ainsi de 1° à 2.79° , le nombre de Mach restant par ailleurs égal à 0,734.

L'observation à différentier reste la traînée C_x . Quant aux variables géométriques de dérivation, on prendra l'angle de rotation globale α_R et l'épaisseur relative e_p .

A partir d'une série de calculs exacts, la courbe d'évolution de la traînée C_x est tracée lorsque l'un des deux paramètres de dérivation varie (figure I.12).

La première étape de validation consiste à tracer tangentes et courbures sur ces évolutions de traînée. Les

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

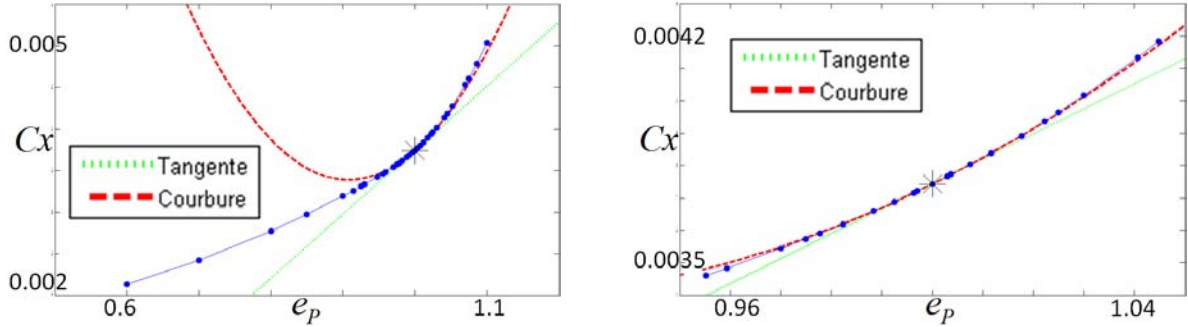


Figure I.11 – Visualisations de la tangente et de la courbure basées sur les dérivées de traînée C_x obtenues par différentiation automatique lorsque l'épaisseur relative e_P varie, avec un plan d'ensemble à gauche et resserré autour de la valeur nominale à droite (cas-test de l'aile RAE2822 à 1° d'incidence).

	Gain sur l'erreur moyenne			Gain sur l'erreur maximale		
	$G_1^{(0 \rightarrow 1)}$	$G_1^{(1 \rightarrow 2)}$	$G_1^{(0 \rightarrow 2)}$	$G_\infty^{(0 \rightarrow 1)}$	$G_\infty^{(1 \rightarrow 2)}$	$G_\infty^{(0 \rightarrow 2)}$
α_R	81.2	63.7	93.2	72.8	58.6	88.7
e_P	84.9	82.4	97.3	78.4	72.4	94.0

Tableau I.7 – Gains (en %) sur les erreurs moyennes et maximales associées au développement de Taylor d'ordres 0, 1 et 2 de la traînée vis-à-vis de l'angle de rotation globale α_R et de l'épaisseur relative e_P , sur la base des dérivées obtenues par différentiation automatique des codes industriels (cas-test de l'aile RAE2822 à 1° d'incidence).

deux paramètres géométriques sont traités successivement (figure I.13 pour l'angle de rotation globale α_R et figure I.14 pour l'épaisseur relative e_P).

D'emblée, on constate qu'un problème apparaît au niveau de la visualisation des tangentes et courbures. Les tangentes ne sont pas correctement orientées. Ce décalage apparaît même sur les vues resserrées. Cette particularité traduit une mauvaise estimation des dérivées premières de la traînée. Il n'y a donc aucune chance pour que les dérivées secondes soient valables.

Pour confirmer cette mauvaise estimation des sensibilités, nous nous focalisons sur les erreurs moyennes et maximales (tableau I.8) et les gains (tableau I.9). Ces indicateurs se basent sur l'ensemble des points apparaissant sur les vues resserrées précédentes.

	Erreur moyenne			Erreur maximale		
	$e_{0,1}$	$e_{1,1}$	$e_{2,1}$	$e_{0,\infty}$	$e_{1,\infty}$	$e_{2,\infty}$
α_R	15.9	6.3	6.9	31.2	11.1	18.0
e_P	3.3	$6.8e^{-1}$	$7.0e^{-1}$	7.5	1.7	3.1

Tableau I.8 – Erreurs moyennes et maximales associées au développement de Taylor d'ordres 0, 1 et 2 de la traînée vis-à-vis de l'angle de rotation globale α_R et de l'épaisseur relative e_P , sur la base des dérivées obtenues par différentiation automatique des codes industriels (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

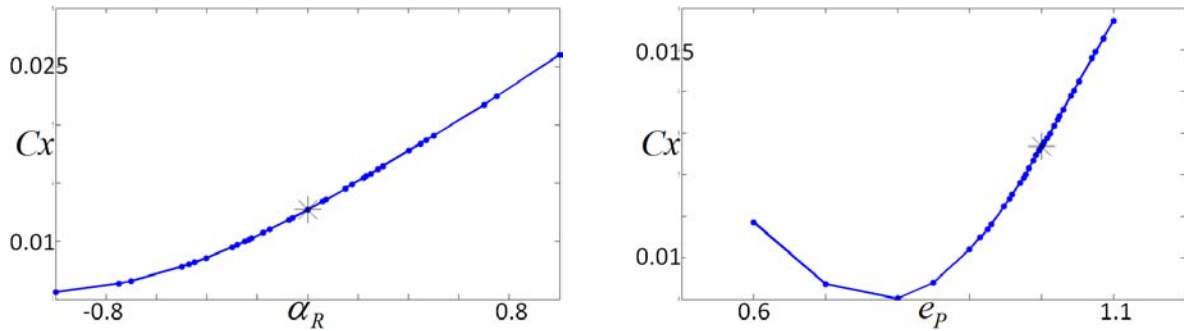


Figure I.12 – Evolution exacte de la traînée lorsque l'un des deux paramètres géométriques α_R (à gauche) et e_p (à droite) varie, la valeur nominale étant marquée d'une étoile (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

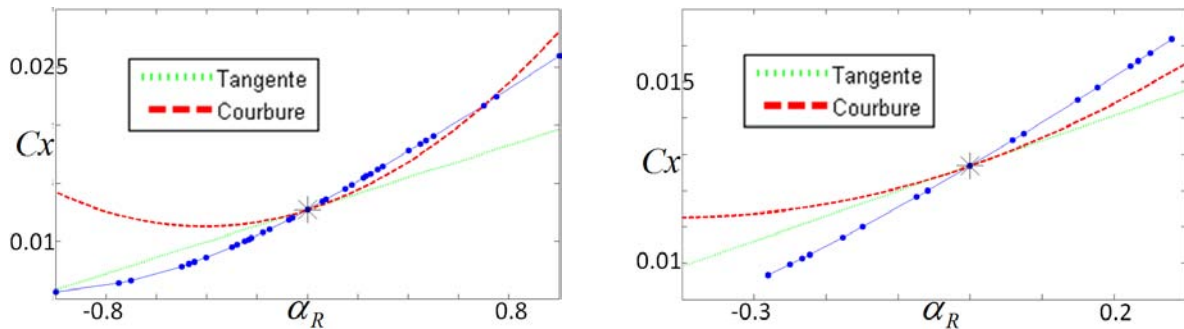


Figure I.13 – Visualisation de la tangente et courbure basées sur les dérivées de traînée C_x obtenues par différentiation automatique lorsque l'angle de rotation globale α_R varie, avec un plan d'ensemble à gauche et resserré autour de la valeur nominale à droite (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

A la vue des tableaux d'erreurs et de gains, la mauvaise estimation des dérivées se ressent surtout vis-à-vis de la dérivée seconde. Ainsi, la prise en compte de la sensibilité seconde n'apporte aucune amélioration, tant au niveau de l'erreur moyenne ou maximale que du gain obtenu. Par contre, il n'est pas possible de déceler le problème en se restreignant aux informations quantitatives d'ordre 1. Ceci montre bien l'importance de faire appel aux deux types de vérification (visuelle et quantitative) pour valider le calcul des dérivées.

L'origine du problème de l'estimation des dérivées réside dans la complexité de l'écoulement modélisé. En particulier, la turbulence joue un rôle prépondérant, contrairement au cas à 1° d'incidence. Or, la turbulence n'est pas différenciée. Cette tâche est actuellement en cours mais le résultat n'est pas encore opérationnel à Dassault Aviation.

Pour le mettre en évidence, l'idée est de tracer l'évolution de la traînée à turbulence figée. L'ensemble des calculs exacts vont être relancés, en repartant de la solution Navier-Stokes correspondant à la valeur nominale des paramètres géométriques. Le terme de turbulence n'est pas remis à jour lors de la résolution. On dit que l'on fige la turbulence.

On reprend les visualisations précédentes, en se restreignant à la tangente (dérivée première). La figure I.15 traite l'angle de rotation globale α_R , tandis que la figure I.16 s'occupe de l'épaisseur relative e_p . En plus de l'évolution exacte de la traînée, nous traçons la courbe de traînée à turbulence figée.

Evidemment, comme la turbulence n'est pas recalculée, les résultats de traînée à turbulence figée ne sont pas fiables, notamment lorsque le paramètre de dérivation devient plus important que sa valeur nominale. On se

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

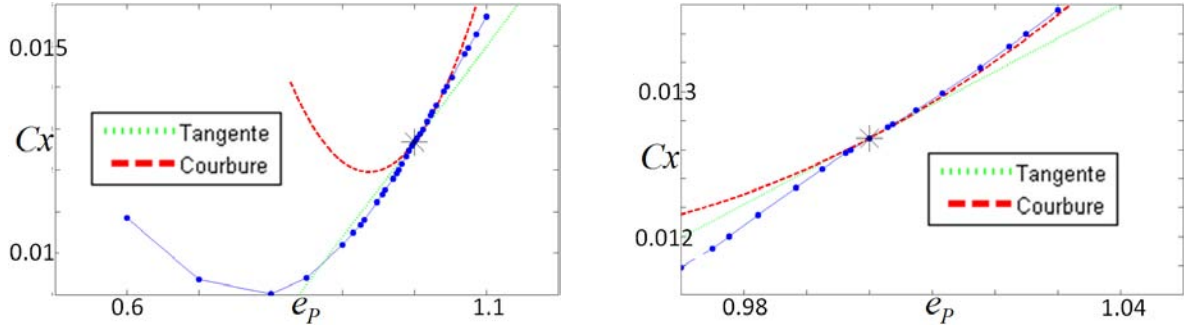


Figure I.14 – Visualisation de la tangente et courbure basées sur les dérivées de traînée C_x obtenues par différentiation automatique lorsque l'épaisseur relative e_P varie, avec un plan d'ensemble à gauche et resserré autour de la valeur nominale à droite (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

	Gain sur l'erreur moyenne			Gain sur l'erreur maximale		
	$G_1^{(0 \rightarrow 1)}$	$G_1^{(1 \rightarrow 2)}$	$G_1^{(0 \rightarrow 2)}$	$G_\infty^{(0 \rightarrow 1)}$	$G_\infty^{(1 \rightarrow 2)}$	$G_\infty^{(0 \rightarrow 2)}$
α_R	60.1	-8.2	56.8	64.3	-61.8	42.3
e_P	79.1	-3.5	78.4	77.3	-80.9	59.0

Tableau I.9 – Gains (en %) sur les erreurs moyennes et maximales associées au développement de Taylor d'ordres 0, 1 et 2 de la traînée vis-à-vis de l'angle de rotation globale α_R et de l'épaisseur relative e_P , sur la base des dérivées obtenues par différentiation automatique des codes industriels (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

focalise donc sur la partie de la courbe correspondant aux valeurs de paramètre inférieures à la valeur nominale. On constate que les tangentes sont quasiment correctes pour les évolutions de la traînée à turbulence figée. Le fait que la constatation précédente soit valable pour les deux paramètres géométriques (e_P et α_R) nous conforte dans notre conclusion. Le problème de l'estimation des dérivées premières (et donc secondes) s'explique par le caractère fortement turbulent de l'écoulement.

De ce fait, nous avons pu valider notre travail de différentiation automatique du code industriel résolvant les équations de Navier-Stokes 2D (profil RAE2822 à 1° d'incidence). Le fait d'avoir poursuivi l'étude autour de 2.79° d'incidence a souligné les limites actuelles quant à la cohérence des dérivées calculées. Lorsque l'écoulement laisse apparaître des phénomènes physiques complexes au sein desquels la turbulence joue un rôle majeur, les dérivées premières (et donc a fortiori secondes) ne sont pas correctes. La raison en incombe au fait de ne pas avoir différentié la partie du code gérant la turbulence.

L'ultime partie s'attache à valider les dérivées d'une observation aérodynamique sur un problème Navier-Stokes 3D.

5.2.3 Validation partielle des sensibilités secondes sur un problème 3D

Le programme *AETHER* de résolution des équations de Navier-Stokes possède une version 2D et une version 3D de la plupart de ses routines. Le travail de différentiation automatique pour le calcul des dérivées secondes a été mené sur l'ensemble du code (versions 2D et 3D). Ainsi, l'estimation des dérivées premières et secondes est a priori envisageable pour n'importe quel problème Navier-Stokes (2D ou 3D).

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

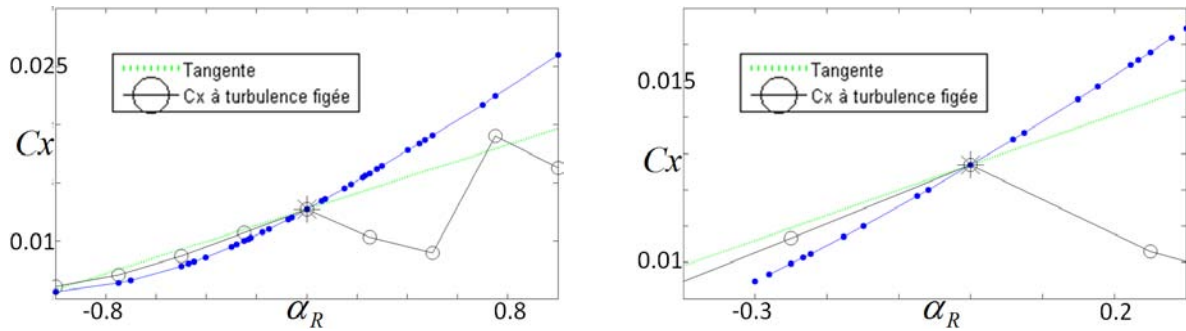


Figure I.15 – Visualisations de la tangente basée sur la dérivée première de la traînée C_x obtenue par différentiation automatique lorsque l'angle de rotation globale α_R varie, avec un plan d'ensemble à gauche et resserré autour de la valeur nominale à droite. La courbe de traînée à turbulence figée est également tracée (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

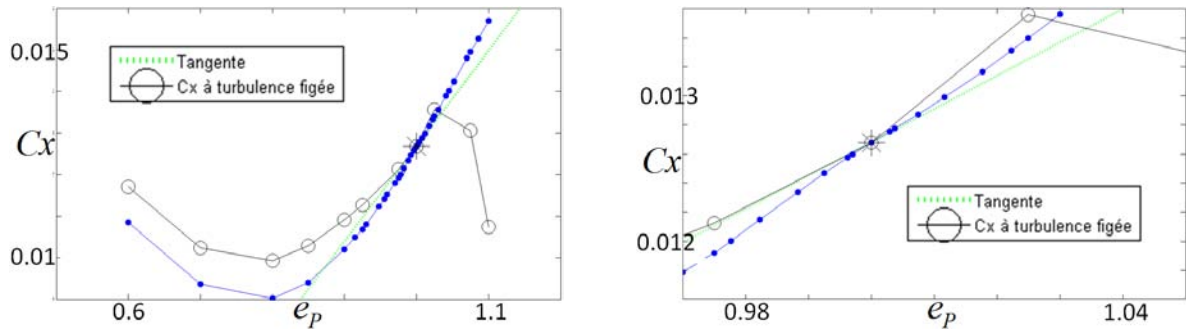


Figure I.16 – Visualisations de la tangente basée sur la dérivée première de traînée C_x obtenue par différentiation automatique lorsque l'épaisseur relative e_P varie, avec un plan d'ensemble à gauche et resserré autour de la valeur nominale à droite. La courbe de traînée à turbulence figée est également tracée (cas-test de l'aile RAE2822 à 2.79° d'incidence).

Nous allons nous focaliser sur la validation de la différentiation automatique du code *AETHER* 3D à l'ordre 2. Il s'agit donc de la dernière étape du processus de calcul d'une dérivée seconde (cf figure I.5). Le maillage 3D utilisé pour le test de validation provient d'une duplication en deux plans parallèles du maillage RAE2822 en 2 dimensions de l'étude précédente. Pour illustrer cette manipulation, la figure I.17 présente la peau du maillage 3D ainsi créé.

Seule la dernière étape du processus va être lancée sur le maillage 3D. On reprend les conditions de calcul de la première étude (nombre de Mach égal à 0,734 et angle d'incidence de 1°). Le programme *AETHER* en mode hessien va donc chercher à estimer les sensibilités secondes de la traînée C_x vis-à-vis de l'épaisseur relative e_P . L'ensemble des données que doit relire le code *AETHER* en mode hessien vont simplement provenir d'une duplication des informations issues du maillage RAE2822 en 2 dimensions.

La validation va consister à comparer les dérivées secondes obtenues via les maillages RAE2822 en version 2D et 3D. On rappelle que l'étude précédente a permis de valider le calcul des sensibilités sur le maillage RAE2822 en 2 dimensions. Si la différentiation automatique du code *AETHER* version 3D fonctionne correctement, alors on devrait trouver des dérivées secondes de traînée similaires entre les cas-test 2D et 3D.

On reprend le plan serré (figure I.11, celle de droite) montrant les tangentes et courbures obtenues sur l'évolution de la traînée en fonction de l'épaisseur relative pour le problème RAE2822 en 2D. Nous rajoutons la

I.5 Validation finale des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique par différentiation automatique (problèmes Euler et Navier-Stokes)

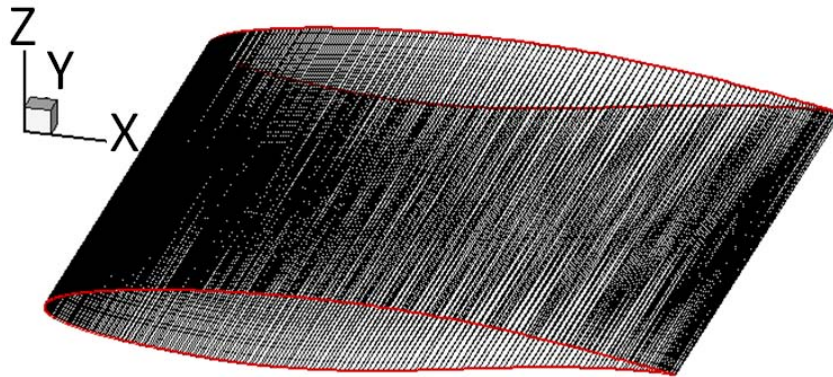


Figure I.17 – Visualisation de la peau du maillage Navier-Stokes 3D, provenant d'une duplication en deux plans parallèles du maillage RAE2822 en 2 dimensions.

courbure s'appuyant sur la dérivée seconde estimée sur le maillage RAE2822 en 3D (figure I.18).

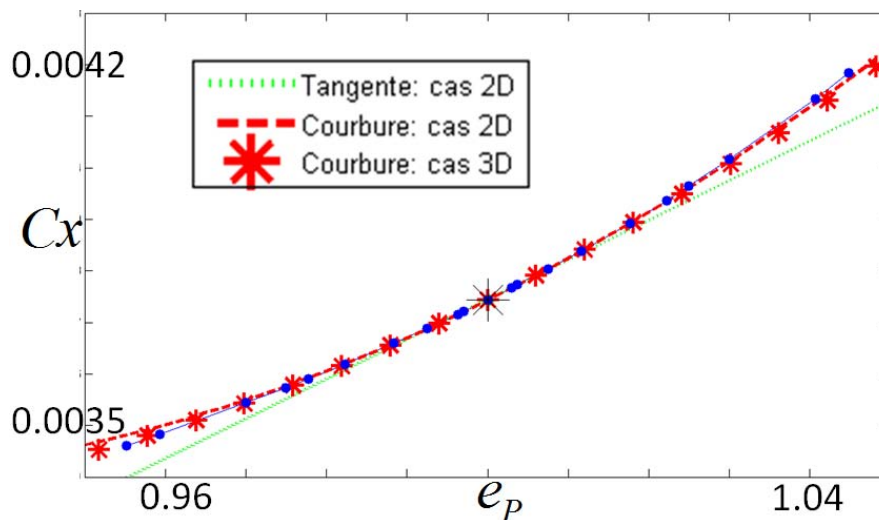


Figure I.18 – Comparaison des courbures basées sur les dérivées secondes du maillage RAE2822 2D et 3D, la traînée C_x variant en fonction de l'épaisseur relative e_P (cas-test de l'aile RAE2822 à 1° d'incidence).

Une très bonne adéquation entre les deux courbures est visible. Sur les deux types de maillage (RAE2822 en 2D et 3D), une dérivée seconde similaire est donc calculée. Cette constatation permet de valider la différentiation à l'ordre 2 du code *AETHER* en version 3D.

Pour mesurer plus précisément la similitude entre les dérivées secondes de traînée (maillages 2D et 3D), nous proposons de comparer les résultats en terme d'erreurs (moyennes et maximales) et de gains (tableau I.10).

Il s'avère que les écarts d'erreurs et de gains entre les versions 2D et 3D sont minimes. Ceci nous conforte donc dans la bonne estimation des sensibilités secondes par le code *AETHER* en mode 3D. Bien sûr, il resterait à valider le processus complet du calcul de la dérivée seconde sur un problème Navier-Stokes 3D. Mis à part la taille des systèmes linéaires à résoudre (plus importante en 3D qu'en 2D), il n'y a aucune difficulté supplémentaire a priori.

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

	Erreur moyenne			Erreur maximale		
	$e_{2,1}$	$G_1^{(1 \rightarrow 2)}$	$G_1^{(0 \rightarrow 2)}$	$e_{2,\infty}$	$G_\infty^{(1 \rightarrow 2)}$	$G_\infty^{(0 \rightarrow 2)}$
2D	$1.1e^{-1}$	82.4	97.3	$6.3e^{-1}$	72.4	94.0
3D	$1.1e^{-1}$	82.7	97.4	$6.1e^{-1}$	73.3	94.2

Tableau I.10 – Comparaison entre les erreurs (moyennes et maximales) et les gains obtenus lorsque la dérivée seconde de la traînée vis-à-vis de l'épaisseur relative est estimée sur un maillage 2D ou 3D (cas-test de l'aile RAE2822 à 1° d'incidence).

Conclusion

La première contribution-clé de ce chapitre réside dans la **formulation double adjointe** de la dérivée seconde d'une observation aérodynamique scalaire vis-à-vis de paramètres géométriques. Notons que cette formulation des dérivées secondes possède deux bonnes propriétés. D'une part, aucun terme ne pose de réel problème de stockage. Le but était d'éviter d'avoir à sauvegarder une grandeur de taille proportionnelle au nombre de sommets du maillage au carré. D'autre part, excepté les deux adjoints (résidu fluide et déformation), aucune résolution coûteuse n'est demandée. Tout se résume à de simples produits matrice-vecteur.

Les dérivées secondes d'une observation aérodynamique ont été implémentées dans les codes industriels (**Euler et Navier-Stokes**) de Dassault Aviation. Le travail de différentiation automatique effectué pour cela a été décrit puis mené avec le différentiateur *TAPENADE* de l'INRIA. La possession de codes industriels CFD calculant les courbures d'une observation aérodynamique scalaire constitue le second moment fort de ce chapitre.

Le cas-test du profil RAE2822 (équations Navier-Stokes 2D et 3D) a permis de vérifier la cohérence des dérivées secondes calculées. Leurs valeurs donnent les courbures des évolutions de traînée vis-à-vis de paramètres aérodynamiques (angle d'incidence par exemple) et géométriques (angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite notamment). L'étude à 1° d'incidence s'est déroulée sans encombre. Les dérivées calculées étaient parfaitement cohérentes avec les évolutions de l'observation considérée (en l'occurrence la traînée). Par contre, en passant à 2.79° d'incidence, les sensibilités d'ordre 1 ne sont pas correctes. On ne retrouve plus la tangente à la courbe d'évolution. Ceci traduit une complexité accrue de l'écoulement modélisé, qui rappelle que la turbulence n'est pas encore différenciée.

Ce travail de **différentiation des codes industriels à l'ordre 2** va être exploité durant cette thèse, que ce soit en propagation d'incertitude (chapitre 3) ou en optimisation sous incertitude (chapitre 4). Par ailleurs, les sensibilités d'ordre 2 d'une fonctionnelle aérodynamique scalaire peuvent aussi être valorisées pour la construction d'une surface de réponse adaptative ou en optimisation sans contrainte et avec contraintes. Tous ces domaines confirment l'apport considérable lié à la connaissance de la courbure de l'évolution d'une grandeur aérodynamique d'intérêt.

Chapitre I. Calcul des dérivées premières et secondes d'une observation aérodynamique

Bibliographie

- [CHR92] B. Christianson, *Automatic Hessians by reverse accumulation*, IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 12, 1992, pp. 135-150.
- [GHA07] D. Ghates and M. B. Giles, *Efficient Hessian calculation using Automatic Differentiation*, no. 2007-4059, AIAA, June 2007, 25th Applied Aerodynamics conference, Miami (Florida).
- [GIE05] R. Giering, T. Kaminski and T. Slawig, *Generating efficient derivative code with TAF : adjoint and tangent linear Euler flow around an airfoil*, Future generation computer systems, Vol. 21, no. 8, 2005, pp. 1345-1355.
- [GIL91] J.-C. Gilbert, G. Le Vey and J. Masse, *La différentiation automatique de fonctions représentées par des programmes*, Rapport de Recherche 1557, INRIA, BP 105, F-78153 Le Chesnay, France, 1991.
- [GIL03] M. B. Giles, M. C. Duta, J. D. Muller and N. Pierce, *Algorithm developments for discrete adjoint methods*, AIAA Journal, vol. 42(2), 2003.
- [GIL05] M. B. Giles, D. Ghate and M. Duta, *Using Automatic Differentiation for adjoint CFD code development*, Indo-French Workshop, Dec. 2005, Also available as NA05/25.
- [GRE00] A. Griewank, *Evaluating derivatives*, SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, 2000.
- [GRI96] A. Griewank, D. Juedes, H. Mitev, J. Utke and O. Vogel, *ADOL-C : a package for the Automatic Differentiation of algorithms written in C/C++*, ACM TOMS, vol. 22, no. 2, 1996, pp. 131-167, the updated article is available online at <http://www.math.tu-dresden.de/adol-c/adolc110.ps>.
- [HAS04] L. Hascoët and V. Pascual, *TAPENADE 2.1 user's guide*, Tech. Rep. 0300, INRIA, Sep. 2004.
- [HAS02] L. Hascoët, A. Dervieux et V. Pascual, *Software TAPENADE INRIA 2002, versions 2.0 and later hereinafter "the software"*, développés par des chercheurs du projet TROPICS à l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique).
- [HIC78] R. M. Hicks and P. A. Henne, *Wing design by numerical optimization*, Journal of Aircraft, vol. 15, 1978, pp. 407-412.
- [IRI84] M. Iri, *Simultaneous computation of functions, partial derivatives and estimates of rounding errors, complexity and practicality*, Japan Journal of Applied Mathematics, 1, 223-252, 1984.
- [IRI87] M. Iri and K. Kubota, *Methods of fast automatic differentiation and applications*, Research Memorandum RMI 87-02, Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan, 1987.

Bibliographie

- [JAM95] A. Jameson, *Optimum aerodynamic design using CFD and control theory* , AIAA paper 95-1729, 1995.
- [KIM84] K. V. Kim, Y. E. Nesterov and B. V. Cherkasskii, *An estimate of the effort in computing the gradient* , Soviet Math. Dokl., 29, 384-387, 1984.
- [LAN10] G. Lantoine, R. P. Russelly and T. Dargent, *Using Multi-complex variables for automatic computation of high-order derivatives* , 20th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 10-218, San Diego, CA, February 14-17, 2010.
- [LAI08] K.-L. Lai and J. L. Crassidis, *Extensions of the first and second complex-step derivative approximations* , Journal of Computational and Applied Mathematics, 219, 276-293, 2008.
- [LYN67] J. N. Lyness, *Numerical algorithms based on the theory of complex variable* , Proceedings of the 1967 22nd National Conference, pp. 125-133, ACM, New York, USA, 1967.
- [MAR00] J. R. R. A. Martins, I. M. Kroo and J. J. Alonso, *An automated method for sensitivity analysis using complex variables* , Proceedings of the 39th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, January 2000, AIAA Paper 2000-0689.
- [MAR03] J. R. R. A. Martins, P. Sturdza and J. J. Alonso, *The complex-step derivative approximation* , ACM Transactions on Mathematical Software, 29(3), 245-262, 2003.
- [MAR07] M. Martinelli, *Sensitivity evaluation in aerodynamic optimal design* , Ph.D. thesis, Scuola Normale Superiore (Pisa) - Université de Sophia Antipolis, 2007.
- [MAR08] M. Martinelli and L. Hascoët, *Tangent-on-Tangent vs Tangent-on-Reverse for second differentiation of constrained functionals* , Proceedings of AD2008, 2008.
- [MAR09] L. Martin et G. Rogé, *Calcul de la sensibilité d'ordre deux d'une observation aérodynamique* , ESAIM : Proc. 27 (2009) 138-155.
- [NAR95] R. Narducci, B. Grossman, M. Valorani, A. Dadone and R. T. Haftka, *Optimization methods for non-smooth or noisy objective functions in fluid design problems* , AIAA paper 95-1648, 1995.
- [SAM10] A. Samardzija and T. Khapko, *New method for calculating exact high-order sensitivities using multi-complex numbers* , Polytech'Nice-Sophia, MathMods, Erasmus Mundus MSc Course, Nice 2010.
- [SAW84] J. W. Sawyer, *First partial differentiation by computer with an application to categorical data analysis* , The American Statistician, 38, 300-308, 1984.
- [SHE96] L. L. Sherman, A. C. Taylor III, L. L. Green and P. A. Newman, *First and second-order aerodynamic sensitivity derivatives via automatic differentiation with incremental iterative methods* , Journal of Computational Physics, vol. 129, 1996, pp. 307-331.
- [SPE80] B. Speelpenning, *Compiling fast partial derivatives of functions given by algorithms* , PhD thesis, Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801, 1980.
- [SQU98] W. Squire and G. Trapp, *Using complex variables to estimate derivatives of real functions* , SIAM Review, 40(1), 110-112, 1998.
- [TAY01] A. C. Taylor III, L. L. Green, P. A. Newman and M. M. Putko, *Some advanced concepts in discrete aerodynamic sensitivity analysis* , Tech. Rep. 2529, AIAA, 2001.
- [UTK04] J. Utke, *OpenAD : Algorithm Implementation User Guide* , Technical Memorandum ANL/MCS-TM-274, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, Argonne, IL., 2004, Available online at ftp://info.mcs.anl.gov/pub/tech_reports/reports/TM-274.pdf.

Chapitre II

Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

Quelques grandeurs scalaires présentent un intérêt majeur dans le contexte de l'aérodynamique. Les coefficients de portance et de traînée, obtenus par intégration des forces de frottement normales et tangentes à la surface de l'objet, nous informent sur la performance globale de l'avion. En particulier, un avion est performant si sa forme engendre, dans une certaine plage de conditions de vol, une traînée faible et une portance importante. Pour cela, il est nécessaire d'avoir une idée sur la façon dont les grandeurs scalaires d'intérêt varient en fonction de paramètres aérodynamiques (nombre de Mach, angle d'incidence, ...) mais aussi géométriques (angle de cambrure, épaisseur relative, ...). Un calcul de fonction demande de résoudre les équations non linéaires de la mécanique des fluides. La difficulté est donc d'évaluer l'évolution de notre observation aérodynamique en limitant le nombre de calculs exacts qui s'avèrent coûteux. Nous donnons ici un moyen simple et rapide d'estimer le comportement éventuellement non linéaire de la grandeur scalaire aérodynamique par la technique des perturbations singulières. Le calcul des sensibilités premières et secondes, mais aussi l'évolution plus globale de l'observation vis-à-vis de paramètres de déformation de maillage sont envisagés. Après l'avoir illustré sur un problème analytique linéaire puis non linéaire, nous passerons à une application sur des calculs Euler 3D en utilisant des profils d'aile de référence (NACA64a010 et aile ONERA M6).

Introduction

Les simulations numériques pour l'aérodynamique s'appuient sur la discrétisation spatiale et temporelle du problème physique. Le choix de cette discrétisation n'est pas neutre sur la résolution des équations de la mécanique des fluides. A fortiori, l'évaluation des observations scalaires d'intérêt (comme les coefficients de traînée et de portance) est directement dépendante de ce choix. Connaître la sensibilité des observations vis-à-vis de la discrétisation choisie s'avère essentiel pour contrôler le calcul numérique.

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

Cette étude concerne l'influence de la discrétisation spatiale sur l'évaluation de l'observation scalaire. On rappelle que nos simulations sont effectuées sur des maillages non structurés formés de triangles en 2D ou de tétraèdres en 3D. L'objectif de ce chapitre sera donc de maîtriser l'impact d'une perturbation de maillage sur la valeur de la fonctionnelle scalaire étudiée.

Deux types de perturbation de maillage peuvent être envisagés.

- La perturbation peut consister à enlever ou ajouter des sommets au maillage existant. La topologie est donc modifiée. Clairement, l'influence de ce type de perturbation sur notre observation n'est pas modélisable par un lien fonctionnel. La perturbation n'est pas différentiable ni même continue. Dans ce cas, on parle de **perturbation singulière**.
- L'autre type de perturbation de maillage revient à déplacer certains sommets existants. Cette transformation iso-topologique peut être plus ou moins prononcée. L'intensité de la perturbation dépend de l'importance des déplacements de sommets effectués. Un lien fonctionnel relie cette modification de maillage à la valeur prise par l'observation scalaire. En ce sens, on parle ici de **perturbation régulière** de maillage.

Pour les deux types de perturbation de maillage (perturbation singulière ou perturbation régulière), on utilise habituellement la correction adjointe pour évaluer l'impact de la perturbation sur la valeur de l'observation calculée. Avec cette approche, le terme correctif est donné par le produit scalaire entre l'adjoint et le résidu fluide. La méthode des perturbations singulières proposée dans ce chapitre aura pour mission d'améliorer ce terme correctif adjoint. En effet, la correction adjointe (classiquement utilisée) est plus ou moins performante suivant la perturbation envisagée.

- Devant une perturbation de maillage **singulière** (modification de la topologie), nous verrons que la technique classique de correction adjointe est fautive. Il manque la **contribution singulière qui est du même ordre que la composante régulière** prise en compte par l'adjoint. La méthode des perturbations singulières s'avère alors fondamentale pour estimer correctement l'impact de la modification du maillage sur la valeur de l'observation scalaire.
- Devant une perturbation de maillage **régulière** (modification iso-topologique), la correction adjointe donne la variation principale de la fonction d'intérêt. La puissance de la méthode des perturbations singulières sera d'être capable d'évaluer les **variations d'ordre supérieur**. Nous montrerons que cette stratégie est une alternative innovante à l'utilisation des dérivées secondes pour la prise en compte de la non-linéarité éventuelle de l'observation.

Soulignons un point important. Par abus de langage, la méthode des perturbations singulières s'applique non seulement à des perturbations de maillage singulières mais aussi régulières. Dans le premier cas, le terme caché (venant de la singularité de la perturbation) est estimé. Sans la prise en compte de cette singularité, la correction n'est pas seulement imprécise mais tout simplement erronée. Dans le second cas (perturbation régulière), il s'agira de calculer les variations d'ordre supérieur de la fonction vis-à-vis du déplacement de certains sommets du maillage. En particulier, la non-linéarité éventuelle de l'observation, inaccessible avec la correction adjointe traditionnelle, devra être retrouvée.

Ce chapitre va commencer par la présentation de la méthode de perturbation singulière. La différence avec la correction adjointe couramment utilisée sera mise en avant. Nous verrons que

II.1 Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe

la stratégie proposée peut être vue comme une extension efficace et peu coûteuse de la correction adjointe. L'intérêt de la méthode des perturbations singulières sera illustré sur quelques exemples de calculs exacts.

Nous passerons enfin à l'application industrielle de la méthode des perturbations singulières. Dans le contexte aérodynamique, la perturbation de maillage consiste le plus souvent à déplacer certains sommets du maillage. Typiquement, la forme de l'objet considéré est modifiée, ce qui entraîne une déformation du maillage surfacique se traduisant par une perturbation isotopologique du maillage volumique. Ainsi, nous nous situons dans le cadre des perturbations régulières de maillage. La méthode des perturbations singulières aura donc pour but d'estimer le comportement éventuellement non linéaire de l'observation scalaire devant la modification plus ou moins prononcée du maillage. Bien plus, nous montrerons que la méthode des perturbations singulières n'est pas seulement capable de corriger l'observation scalaire, elle permet également de prédire efficacement l'erreur commise a priori.

Le cas-test de l'aile ONERA M6 (problème Euler) sera utilisé. Une série de simulations sera effectuée pour mesurer l'apport considérable (et la robustesse) de la méthode des perturbations singulières.

1 Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe

Dans cette section, nous supposons que la perturbation de maillage est paramétrée par une variable scalaire c . Nous nous focalisons sur l'évolution d'une fonctionnelle scalaire j vis-à-vis de ce paramètre c . On débute par la présentation du lagrangien, à la base de la correction adjointe et de la technique des perturbations singulières.

1.1 Présentation du lagrangien

Considérons un vecteur d'état u , solution du système d'équations R . Ce problème dépend bien sûr des coordonnées x du maillage utilisé pour la résolution numérique, mais aussi du paramètre scalaire c . Avec l'explicitation de toutes les dépendances (excepté x , pouvant dépendre du paramètre c , notamment dans le cas d'un paramètre géométrique), il vient :

$$R(u, c) = 0$$

Une fois la solution u déterminée numériquement¹, l'observation scalaire $j(c) = J(c, u)$ peut être évaluée. Il apparaît donc une dépendance de j par rapport à c de type explicite et de type implicite (via la solution u). A partir de là, on définit le **lagrangien** L associé à l'observation j pour le système d'équations R comme suit :

$$\begin{aligned} L = L(c, u, \psi) &= J(c, u) - R(u, c) \cdot \psi \\ &= j(c) - R(u, c) \cdot \psi \end{aligned}$$

L'état ψ va permettre d'annuler la dérivée partielle de L par rapport à u . En effet, il s'avère souvent délicat

1. Notons au passage que la notation u désigne la solution valable pour le paramètre c non modifié. On ajoutera un indice inférieur pour spécifier la solution valable avec un paramètre modifié (typiquement $u_{c+\delta c}$ pour un paramètre valant $c + \delta c$).

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

d'estimer la sensibilité du système d'équations R par rapport à l'état u . La nullité du terme $\frac{\partial L}{\partial u}$ aboutit donc à une équation linéaire dont ψ est la solution :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^T \psi = \left(\frac{\partial J}{\partial u}\right)^T$$

On reconnaît l'équation du problème adjoint. On note donc ψ l'état adjoint associé à l'observation J . Dans toute la suite, on utilisera les qualificatifs direct et adjoint pour désigner les états u et ψ respectivement.

Pour toutes les valeurs de c , le lagrangien et l'observation sont égaux dès que l'état direct u est solution du système d'équations R ($R(u, c) = 0$). Ceci revient à dire que l'application suivante :

$$c \rightarrow R(u_c, c) \cdot \psi$$

est l'application identiquement nulle. Les dérivées de cette application sont donc également nulles.

Par conséquent, la sensibilité du lagrangien par rapport à c correspond à la sensibilité de l'observation par rapport à ce même paramètre c . Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dc} &= \frac{\partial L}{\partial c} + \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial c} \\ &= \frac{\partial L}{\partial c} \end{aligned} \tag{II.1}$$

On se souvient que le terme $\frac{\partial L}{\partial u}$ est nul, par définition de l'adjoint ψ .

Le lagrangien est couramment utilisé pour améliorer l'estimation numérique d'une observation scalaire. La sous-section suivante fait un bref récapitulatif de l'état de l'art sur cette question.

1.2 Etat de l'art sur l'utilisation du lagrangien pour fiabiliser une observation scalaire

Nous proposons un rapide bilan des principaux travaux de recherche au cours desquels le lagrangien a été utilisé pour améliorer le calcul d'une observation scalaire.

Supposons que nous sommes en possession de deux maillages (notés M_H et M_h) autour du même objet aérodynamique. L'indice inférieur (valant H ou h) désigne la taille moyenne des barres du maillage en question. L'hypothèse de base est que h est bien inférieur à H , de sorte que le maillage M_h est plus fin que le maillage M_H .

Le but est d'évaluer le plus précisément possible une observation scalaire j dépendant non seulement de la solution u de la mécanique des fluides mais également de la finesse du maillage utilisé pour l'évaluation de cette fonctionnelle scalaire.

Dans toute cette sous-section, chaque quantité (qu'il s'agisse d'un opérateur, d'une grandeur vectorielle ou d'une grandeur scalaire) sera écrite avec un indice inférieur précisant la finesse du maillage utilisé. En particulier, nous serons amenés à manipuler les entités suivantes :

- u_H (resp. u_h) : solution directe de la mécanique des fluides définie sur le maillage M_H (resp. sur le maillage M_h).
- R_H (resp. R_h) : système d'équations de la mécanique des fluides discrétisées par le maillage M_H (resp. par le maillage M_h).
- ψ_H (resp. ψ_h) : solution adjointe, liée à l'observation scalaire j , de la mécanique des fluides définie sur le maillage M_H (resp. sur le maillage M_h).
- j_H (resp. j_h) : observation scalaire évaluée sur le maillage M_H (resp. sur le maillage M_h).

II.1 Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe

L'idée de base est que l'observation j_H est disponible mais n'est pas jugée suffisamment fiable à cause de la discrétisation trop lâche du maillage M_H . L'idéal serait d'avoir la valeur j_h de l'observation, valeur qui fait appel au maillage plus fin M_h . Le problème est que l'observation dépend directement de l'état u , de sorte que nous pouvons écrire :

$$j_h = J_h(u_h)$$

Par analogie avec la sous-section précédente, le paramètre c de perturbation de maillage est remplacé par la taille moyenne des barres du maillage. Dès lors, la perturbation de maillage revient à jouer sur la finesse du maillage utilisé pour la résolution des équations fluides.

Toute la difficulté réside dans le fait que la résolution du système R_h d'équations de la mécanique des fluides est jugée trop coûteuse. L'état u_h étant indisponible, nous ne pouvons avoir accès à la quantité j_h cherchée.

L'objectif sera donc de corriger l'observation j_H en se servant du maillage fin M_h tout en s'abstenant de faire appel à l'état u_h .

On se sert pour cela des travaux de Pierce et Giles (cf [PIE03]).

Le point de départ est d'introduire un opérateur de reconstruction L_h^H permettant de transférer une grandeur vectorielle du maillage M_H vers le maillage M_h . Pour l'état u , par exemple, nous noterons u_h^H le résultat d'un tel transfert.

$$u_h^H = L_h^H u_H$$

Typiquement, l'opérateur L_h^H désignera l'interpolation du premier ordre du maillage M_H vers le maillage M_h .

On part du développement de Taylor du premier ordre de l'observation scalaire $j_h = J_h(u_h)$.

$$J_h(u_h) \approx J_h(u_h^H) + \frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H](u_h - u_h^H)$$

La quantité $\frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H]$ désigne la sensibilité première de l'observation scalaire J_h vis-à-vis de l'état u_h évaluée en le paramètre u_h^H .

On peut écrire la même chose avec le résidu R_h de la mécanique des fluides.

$$R_h(u_h) \approx R_h(u_h^H) + \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H](u_h - u_h^H)$$

Par définition de u_h , la quantité $R_h(u_h)$ est nulle. On en déduit donc :

$$u_h - u_h^H \approx -\left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H]\right)^{-1} R_h(u_h^H)$$

Par simple remplacement, il vient :

$$J_h(u_h) \approx J_h(u_h^H) - \frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H] \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H]\right)^{-1} R_h(u_h^H)$$

Notons $\psi_h|_{u_h^H}$ l'adjoint solution de l'équation linéaire suivante :

$$(\psi_h|_{u_h^H})^T \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] = \frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H]$$

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

Cette équation peut se réécrire comme suit :

$$(\psi_h|_{u_h^H})^T = \frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H] \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^{-1}$$

Finalement, en introduisant cet adjoint dans l'approximation de la fonctionnelle, on obtient :

$$J_h(u_h) \approx J_h(u_h^H) - (\psi_h|_{u_h^H})^T R_h(u_h^H)$$

Notons que le second membre de l'égalité précédente équivaut au lagrangien associé à l'observation J et évalué en l'état interpolé u_h^H . De ce fait, le lagrangien peut être vu comme une correction du premier ordre d'une fonctionnelle scalaire. Citons [MUL01], [DWI07] et [BOL07] comme applications de cette technique de correction. Certaines études (comme [KIM06]) se servent du terme correctif $(\psi_h|_{u_h^H})^T R_h(u_h^H)$ comme d'un indicateur pour mener l'adaptation de maillage. L'idée est alors de raffiner le maillage dans les zones où ce paramètre est le plus fort. On obtient ainsi une technique d'adaptation isotrope liée à la fonctionnelle scalaire J via l'adjoint ψ .

Cette technique de correction a été retravaillée par Venditti et Darmofal (cf [VEN99]). L'idée est de faire appel à l'adjoint interpolé $\psi_h^H = L_h^H \psi_H$ en écrivant :

$$\begin{aligned} J_h(u_h^H) - J_h(u_h) &\approx (\psi_h|_{u_h^H})^T R_h(u_h^H) \\ &\approx (\psi_h^H)^T R_h(u_h^H) + (\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T R_h(u_h^H) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Notons $E_{c,1}$ la seconde contribution du membre de droite.

$$E_{c,1} = (\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T R_h(u_h^H)$$

L'enjeu va être de réexprimer cette quantité $E_{c,1}$ à l'aide du résidu adjoint R_h^ψ défini comme suit :

$$R_h^\psi(\psi) = \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^T \psi - \left(\frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^T$$

A partir de là, il vient :

$$\begin{aligned} (R_h^\psi(\psi))^T \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^{-1} &= \psi^T - \frac{\partial J_h}{\partial u_h}[u_h^H] \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^{-1} \\ &= \psi^T - (\psi_h|_{u_h^H})^T \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

En prenant $\psi = \psi_h^H$ dans l'égalité précédente, on trouve :

$$(R_h^\psi(\psi_h^H))^T \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^{-1} = (\psi_h^H - \psi_h|_{u_h^H})^T$$

Cette relation nous permet d'introduire le résidu adjoint au sein du terme $E_{c,1}$.

$$E_{c,1} = -(R_h^\psi(\psi_h^H))^T \left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H] \right)^{-1} R_h(u_h^H)$$

II.1 Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe

Or, on a vu précédemment que :

$$\left(\frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H]\right)^{-1} R_h(u_h^H) \approx -(u_h - u_h^H)$$

d'où l'approximation suivante :

$$E_{c,1} \approx (R_h^\psi(\psi_h^H))^T (u_h - u_h^H)$$

En notant $E_{c,2}$ la quantité $(R_h^\psi(\psi_h^H))^T (u_h - u_h^H)$, il vient :

$$E_{c,1} \approx E_{c,2}$$

Ces deux grandeurs $E_{c,1}$ et $E_{c,2}$ permettent de définir l'écart de dualité (*duality gap*) noté D_g .

$$D_g = E_{c,1} - E_{c,2}$$

Nous allons maintenant montrer que cet écart de dualité D_g est proportionnel à la variation du second ordre du résidu fluide R . Il suffit pour cela de pousser le développement de Taylor du résidu R à l'ordre supérieur.

$$R_h(u_h) \approx R_h(u_h^H) + \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H](u_h - u_h^H) + W$$

La grandeur W fait appel à la sensibilité du second ordre du résidu R . Sachant que $R_h(u_h)$ est nul, il vient :

$$-W \approx R_h(u_h^H) + \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H](u_h - u_h^H)$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} D_g &= E_{c,1} - E_{c,2} \\ &= (\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T R_h(u_h^H) - (R_h^\psi(\psi_h^H))^T (u_h - u_h^H) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Or, le résidu adjoint vérifie la relation suivante :

$$(R_h^\psi(\psi_h^H))^T = -(\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H]$$

Par simple remplacement, on arrive à :

$$\begin{aligned} D_g &= (\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T R_h(u_h^H) + (\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H](u_h - u_h^H) \\ &= (\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T (R_h(u_h^H) + \frac{\partial R_h}{\partial u_h}[u_h^H](u_h - u_h^H)) \\ &= -(\psi_h|_{u_h^H} - \psi_h^H)^T W \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

On en déduit que l'écart de dualité D_g est bel et bien proportionnel à la sensibilité seconde du résidu fluide vis-à-vis de l'état direct (via le terme W). Concrètement, on remplace $\psi_h|_{u_h^H}$ par une interpolation quadratique de l'adjoint ψ_H sur le maillage fin M_h .

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

En adaptation de maillage, on peut alors vouloir réduire l'écart de dualité pour tenir compte des effets non linéaires du système de la mécanique des fluides (cf [VEN99], [VEN02] ou [BAR06]).

Revenons sur le lagrangien comme technique de correction d'une observation scalaire. Les méthodes d'approximation que nous allons maintenant décrire (méthodes de correction adjointe et de perturbation singulière) vont utiliser ce lagrangien pour estimer l'évolution de l'observation j qui lui est associée, lorsque le paramètre c de perturbation de maillage varie.

1.3 Méthode de la correction adjointe

Dans toute la suite, les deux lettres ca (pour méthode de la **Correction Adjointe**) serviront d'indice pour désigner cette technique d'approximation.

C'est la méthode classiquement utilisée pour estimer à moindre coût la dépendance de notre fonction j par rapport au paramètre c de perturbation de maillage. L'idée est d'utiliser le lagrangien comme approximation valable. A l'observation j s'ajoute donc un terme de correction P_{ca} , produit entre le résidu des équations non linéaires et l'adjoint lié à la fonctionnelle.

$$P_{ca}(c) = R(u, c) \cdot \psi$$

On a volontairement omis la dépendance de la solution u vis-à-vis du paramètre de perturbation c . Bien sûr, le paramètre P_{ca} de correction est nul dès que la solution directe satisfait le système d'équations de la mécanique des fluides (résidu $R(u, c)$ nul). L'idée est de faire varier le paramètre c sans toucher à la solution directe u .

Ainsi, pour connaître la variation δj de l'observation engendrée par une perturbation δc du paramètre, on joue uniquement sur la partie explicite, sans modifier la solution u . Il vient donc :

$$\delta j = j(c + \delta c) - j(c) \approx L(c + \delta c, u, \psi) - L(c, u, \psi)$$

La solution directe u n'est plus adaptée au nouveau problème (paramètre $c + \delta c$ au lieu de c), d'où le signe d'égalité approchée dans la formule précédente.

De là, connaissant la valeur j_0 de l'observation pour une certaine valeur c_0 du paramètre, la méthode de la correction adjointe donne une approximation j_{ca} qui s'écrit :

$$\boxed{j_{ca}(c_0 + \delta c) = j_0 - P_{ca}(c_0 + \delta c)}$$

avec :

$$j_{ca}(c_0) = j_0$$

Notons que la solution u intervenant dans l'expression du terme $P_{ca}(c_0 + \delta c)$ est celle qui est associée au paramètre c_0 .

Etant donné que la solution directe u n'est pas modifiée, le terme correctif P_{ca} s'apparente à une amélioration du premier ordre de l'observation j étudiée.

- Dans le cas d'une perturbation de maillage **singulière** (ajout ou suppression de sommets), nous verrons que la correction adjointe est erronée. Une partie de l'information n'est pas prise en compte par la correction adjointe.
- Devant une perturbation **régulière** (déplacement de sommets existants), la correction du premier ordre ne permet pas d'approcher la non-linéarité éventuelle de la variation de la fonctionnelle. Les termes d'ordre supérieur ne sont pas accessibles par la méthode de correction adjointe.

Le coût de la méthode de correction adjointe, classiquement utilisée pour la prédiction de l'évolution de grandeurs aérodynamiques, est négligeable. Il revient à la résolution d'un système linéaire pour déterminer l'adjoint ψ . Or, cette résolution n'est pas liée au paramètre c de perturbation. Ainsi, une fois l'adjoint calculé, l'évolution classique par correction adjointe est disponible vis-à-vis de n'importe quel paramètre, sans aucun coût supplémentaire.

II.1 Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe

Cependant, cette correction est, comme nous l'avons souligné, du premier ordre. La technique des perturbations singulières va tâcher d'améliorer cette approximation.

1.4 Méthode des perturbations singulières

Par opposition à l'indice *ca* de la méthode de correction adjointe, on utilisera l'indice *ps* pour évoquer la méthode des **Perturbations Singulières** [LIO73]. Cette méthode est héritée de la notion de gradient topologique. Le gradient topologique donne la sensibilité d'une fonction-coût scalaire lorsque le domaine de calcul connaît une perturbation infinitésimale. De nombreuses applications ont montré l'intérêt majeur du gradient topologique. L'optimisation de forme ([MAS09], [SID01] et [SOK99]) a ainsi connu un progrès conséquent. Partant d'une forme sommaire, le gradient topologique est capable de repérer les régions où il est pertinent de faire un trou pour améliorer la structure d'un édifice [AMS05]. Par ailleurs, les applications portent aussi sur la restauration d'images numériques ([BEL06], [AUR07]). Cette méthode du gradient topologique peut s'appliquer aussi bien aux équations de Helmholtz ([AMS03], [SAM03]), au problème de Maxwell [MAS05], à l'équation d'élasticité [GAR01] qu'au système d'équations de Navier-Stokes [AMS04]. Citons aussi les applications sur le problème de Dirichlet [GUI02] ou sur celui de Stokes [HAS02].

L'idée première de cette technique ([LIC07], [MAS01] ou [MAS06]) est de tenir compte du caractère singulier de la perturbation engendrée par une variation $c + \delta c$ du paramètre c sans avoir à calculer la solution exacte (et donc coûteuse) $u_{c+\delta c}$.

Pour cela, il suffit de remettre à jour localement² (autour de la zone de perturbation δc) en peu d'itérations la solution directe u . La notation $u_{c+\delta c}^{(sp)}$ désignera la solution u remise à jour localement. Cet état $u_{c+\delta c}^{(sp)}$ est donc différent de l'état $u_{c+\delta c}$ solution des équations de la mécanique des fluides sur le maillage perturbé. Avant de poursuivre, précisons clairement le vocabulaire utilisé tout au long de ce chapitre. On parle de remise à jour de la solution directe u le fait d'effectuer quelques itérations de notre solveur non linéaire résolvant les équations de la mécanique des fluides sur le maillage perturbé. On fixe le nombre d'itérations et non le niveau de convergence. L'initialisation de la remise à jour correspond à la solution u valable sur le maillage non perturbé.

Supposons connue l'observation j en une certaine valeur c_0 du paramètre scalaire de perturbation de maillage (valeur j_0 de l'observation). L'approximation j_{ps} de l'observation scalaire j donnée par la technique des perturbations singulières s'écrit :

$$\boxed{j_{ps}(c_0 + \delta c) = j_0 - T_{ps}(c_0 + \delta c)}$$

Le terme correctif T_{ps} de perturbation singulière est :

$$T_{ps}(c_0 + \delta c) = R(u_{c_0+\delta c}^{(sp)}, c_0 + \delta c) \cdot \psi$$

Nous tenons compte non seulement de la partie explicite (comme la technique de correction adjointe) mais également de la partie implicite du résidu R (via la remise à jour locale en peu d'itérations de l'état direct u).

En terme de variation, l'expression de la sensibilité de j tenant compte de la singularité est :

$$\begin{aligned} \delta j &= j(c + \delta c) - j(c) \\ &= L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi) - L(c, u, \psi) \end{aligned} \tag{II.6}$$

La dernière relation est bel et bien une égalité (résidus $R(u_{c+\delta c}, c + \delta c)$ et $R(u, c)$ tous deux nuls). L'idée

2. A ce titre, on pourra également parler de la méthode de la voûte pour évoquer la technique des perturbations singulières.

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

fondatrice de la méthode des perturbations singulières est d'introduire le terme intermédiaire $L(c + \delta c, u, \psi)$ (en l'ajoutant et le retranchant), ce qui donne :

$$\boxed{\delta j = [L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi) - L(c + \delta c, u, \psi)] + [L(c + \delta c, u, \psi) - L(c, u, \psi)]} \quad (\text{II.7})$$

On se retrouve donc en présence de la somme de deux termes entre crochets, s'écrivant chacun comme une différence de lagrangien.

Par rapport à la variation $L(c + \delta c, u, \psi) - L(c, u, \psi)$ donnée par la méthode adjointe classique, on ajoute donc une contribution de la forme $L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi) - L(c + \delta c, u, \psi)$. Dans le cas où la perturbation est régulière, cette contribution est proche de la dérivée partielle de L par rapport à u pour une perturbation δc suffisamment petite. Sachant que la définition de l'adjoint ψ annule cette dérivée partielle, il paraît dès lors possible de négliger la variation de la solution directe u .

La méthode des perturbations singulières consiste donc à estimer la contribution $L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi) - L(c + \delta c, u, \psi)$, contrairement à l'approximation classique de correction adjointe qui la néglige. Pour cela, on remplace l'état direct $u_{c+\delta c}$ par l'approximation $u_{c+\delta c}^{(sp)}$ obtenue grâce à quelques itérations locales sur l'état initial $u = u_c$.

$$L(c + \delta c, u_{c+\delta c}, \psi) - L(c + \delta c, u, \psi) \approx L(c + \delta c, u_{c+\delta c}^{(sp)}, \psi) - L(c + \delta c, u, \psi) \quad (\text{II.8})$$

L'impact de cette contribution dépend du type de perturbation rencontrée.

- Dans le cas où la perturbation modifie la topologie du maillage (ajout ou suppression de sommets), **une singularité apparaît**. La correction adjointe est alors erronée car une partie de l'information manque. Un terme caché, venant de la singularité de la perturbation, est du même ordre que la variation du lagrangien et n'est donc pas pris en compte dans la stratégie classique. **La méthode des perturbations singulières permet de retrouver une estimation correcte de l'observation.**
- Si la perturbation de maillage se résume au déplacement de sommets existants, nous sommes en face d'une **perturbation régulière** de maillage. La variation du lagrangien fournit la variation principale. L'intérêt de **la technique des perturbations singulières est de pouvoir accéder aux termes d'ordre supérieur.**

Tout repose sur le fait que les solveurs itératifs utilisés pour estimer la solution directe de la mécanique des fluides traitent les variations singulières ou d'ordre élevé durant les toutes premières itérations.

Au cours de notre étude, nous serons amenés à effectuer plusieurs approximations de fonction et donc plusieurs résolutions locales avec la technique des perturbations singulières. Le point important est de toujours garder le même nombre d'itérations pour l'ensemble de ces remises à jour, afin de garder une certaine cohérence dans les résultats. Il vaut mieux faire très peu d'itérations de convergence pour toutes les perturbations que beaucoup pour certaines et moins pour d'autres.

Une question se pose alors : faut-il **remettre à jour l'état adjoint ψ , en même temps que l'état direct u** solution du système non linéaire de la mécanique des fluides ? Dans un premier temps, nous nous contenterons de ne remettre à jour que la solution directe u , en figeant donc l'adjoint ψ . L'idée est en effet que le caractère singulier (ou non linéaire) de la perturbation est pris en compte par la remise à jour locale de la solution directe u tandis que l'adjoint ψ restitue la répercussion générale du problème sur la valeur de l'observation. Par analogie avec le traitement d'un signal, on peut dire que la solution directe u capte, en quelques itérations, les hautes fréquences dues à la perturbation de maillage. L'adjoint, quant à lui, traite les basses fréquences. Or, l'hypothèse considérée est que la perturbation de maillage n'affecte pas trop la tendance générale de la solution directe (basses fréquences). En revanche, il influe sur le comportement local (hautes fréquences) de l'écoulement, dans un voisinage de la perturbation.

Finissons cette présentation théorique en soulignant le fait que la méthode des perturbations singulières est une extension de la méthode de correction adjointe. Pour les deux techniques, le lagrangien (obtenu par addition

II.1 Principe général de la méthode des perturbations singulières, extension de la technique de correction adjointe

de l'observation scalaire et du produit résidu-adjoint) est utilisé comme approximation de la fonction étudiée. La seule différence réside au niveau du traitement de la solution directe. De ce fait, la technique adjointe de base peut être vue comme une version de la famille des perturbations singulières où aucune itération locale sur la solution directe n'est effectuée. L'objectif des exemples analytiques va donc être de mesurer le gain de cette remise à jour locale de la solution directe pour la prédiction de l'observation scalaire.

Après avoir cerné l'intérêt de la méthode des perturbations singulières sur des problèmes académiques, la question du niveau de performance de cette technique sur un cas industriel se pose naturellement. Pour répondre à cette interrogation, nous nous sommes tournés vers les **équations d'Euler**. Pour mener l'étude, le **code industriel EUGENIE** de Dassault Aviation (cf l'annexe A de cette thèse), résolvant ces équations d'Euler, a été utilisé.

La principale difficulté a été de mettre en place de manière la moins intrusive possible la remise à jour locale. Plusieurs schémas numériques sont codés au sein du code CFD de Dassault Aviation (flux de Lax-Wendroff, de Peraire, d'Osher, ...). Chacune de ces variantes numériques de résolution fonctionne soit en mode implicite, soit en mode explicite. Traditionnellement, le mode implicite, plus rapide, est privilégié. Cependant, il est alors compliqué de restreindre le calcul à une région bien précise du maillage. La résolution globale qu'induit le mode implicite ne permet pas d'effectuer aisément cette manipulation. Au contraire, à chaque itération du mode explicite, la solution directe d'Euler est remise à jour en bouclant sur les sommets du maillage. Dès lors, dans le cas d'une résolution explicite des équations d'Euler, la stratégie de remise à jour est la suivante.

- On repère les sommets du maillage où la solution directe doit être remise à jour. Le moyen de réaliser cette étape dépend du type de perturbation considérée. S'il s'agit du déplacement d'un sommet du maillage (comme lors du premier cas-test), les sommets voisins du point perturbé sont sélectionnés. Un nombre donné de couches de voisins peut alors représenter la région touchée par la remise à jour. Ceci se fait grâce au tableau de connectivités du maillage. Cependant, la perturbation peut ne pas être aussi locale. Le second cas-test propose de modifier le profil de l'objet autour duquel l'écoulement est simulé. Comme tous les sommets du profil sont alors susceptibles d'être perturbés, on a choisi d'étendre la remise à jour à tous les sommets proches du corps aérodynamique. Si la distance entre un sommet du maillage et le profil d'étude est inférieure à une distance limite à fixer, alors ce sommet appartiendra à la région de remise à jour.
- On passe ensuite à la résolution des équations d'Euler en mode explicite. La boucle de remise à jour de la solution directe sur l'ensemble des sommets du maillage n'est rendue active que pour les points préalablement sélectionnés. Pour les autres points, la solution directe reste donc inchangée. Cette manière de faire ne permet pas une convergence du calcul, le résidu ne pouvant décroître dans la partie du maillage extérieure à la région de remise à jour. Pour remédier à cela, à chaque itération, le résidu correspondant aux sommets non sélectionnés est artificiellement mis à zéro. On autorise ainsi au calcul Euler de converger localement.

Remarquons que, dans cette étude, nous nous limitons au déplacement de sommets existants (**perturbation régulière de maillage**). Ce type de perturbation est souvent rencontré en contexte industriel ([REN07], [JAK05], [HEL03], [LOE96] ou [JON01]). Avec la méthode de correction adjointe, la solution directe du sommet déplacé est figée, ce qui revient à considérer la stratégie d'approximation P_0 (cf le cas-test analytique linéaire). Nous avons mis en lumière sur les problèmes analytiques que, bien que le déplacement d'un sommet existant soit une perturbation régulière (contrairement au rajout d'un nouveau sommet), des améliorations significatives apparaissent, notamment lorsque l'observation étudiée évolue de manière non linéaire vis-à-vis de la perturbation. Sur le cas-test de l'aile ONERA M6 (problème Euler), une perturbation de maillage sera envisagée. L'idée est de faire varier certains paramètres contrôlant la forme du profil. Une prédiction globale (évolution sur une certaine plage de variation du paramètre de perturbation) de l'observation scalaire sera recherchée. Les méthodes de **correction adjointe** et de **perturbation singulière** sont comparées, la référence étant obtenue par une série de calculs complets. Nous chercherons à mettre en évidence l'intérêt de la technique des perturbations singulières pour estimer correctement l'évolution locale ou globale de notre fonction aérodynamique.

2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

2.1 Présentation générale

Le second cas-test envisagé correspond à l'aile ONERA M6 en 3 dimensions. Le nombre de Mach vaut 0.84 (écoulement transsonique avec chocs attachés) et l'angle d'incidence est de 3.06° . Le maillage comprend 27499 sommets (figure II.1).

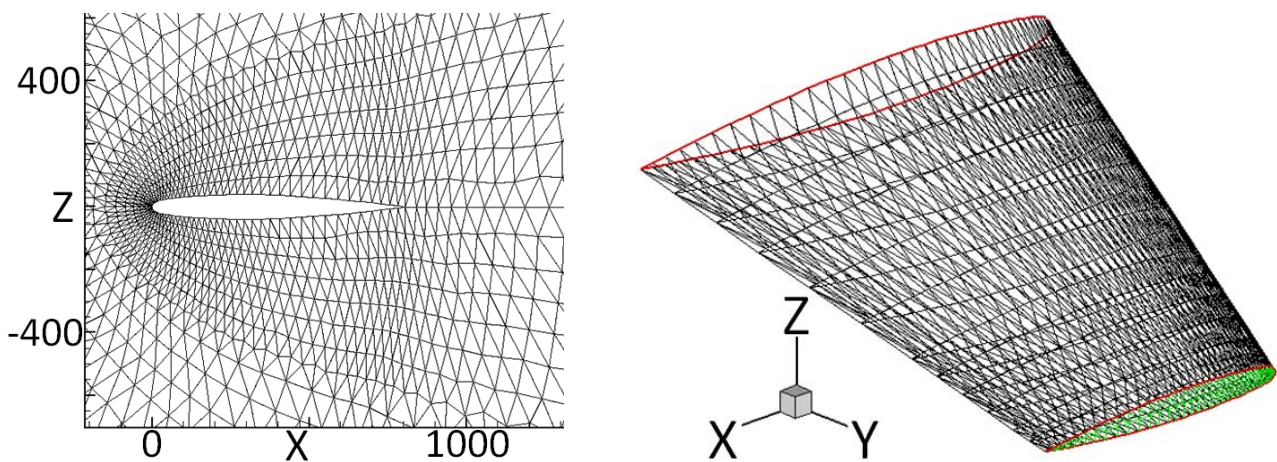


Figure II.1 – Visualisations du maillage de l'aile ONERA M6 : coupe $Y = 0$ (à gauche) et discrétisation du profil (à droite).

L'objectif est d'estimer, à faible coût de calcul, l'évolution de la traînée C_x vis-à-vis de certains paramètres de contrôle de la forme du profil. Il s'agit de l'angle de rotation globale α_R , de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C et de l'épaisseur relative e_P (figure II.2). Cette étude va se faire autour de la forme non déformée du profil. La valeur nominale des paramètres est de 0 degré pour les deux angles et de 1 pour l'épaisseur relative (variable sans dimension).

2.1.1 Intérêt de la remise à jour de l'adjoint pour la prédiction générale de l'observation

Nous allons montrer que la technique des perturbations singulières peut être rendue très précise et efficace en remettant à jour l'adjoint via quelques itérations du système linéaire. Nous nous situons dans le cadre de la reconstruction de la surface d'évolution de la traînée C_x , venant d'une modification de la valeur des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C .

Dans cette optique, plusieurs variantes de la technique des perturbations singulières vont être comparées. Voici le descriptif des quatre versions retenues.

- Nous traitons non plus le lagrangien mais l'observation elle-même. L'adjoint n'intervient donc plus avec cette variante, notée M_J . La remise à jour concerne donc exclusivement la solution directe qui influe sur la valeur de l'observation.

II.2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

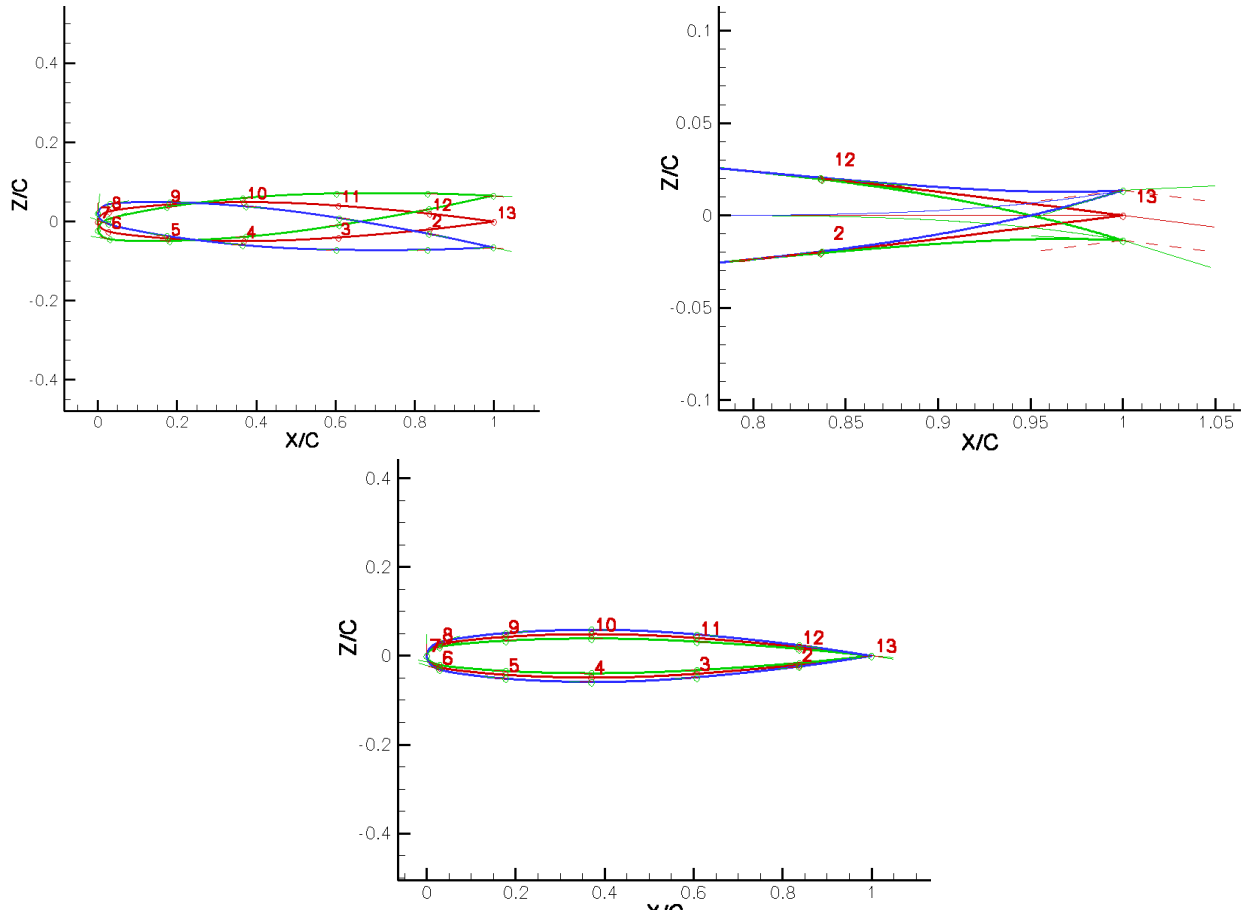


Figure II.2 – Effets de trois paramètres géométriques (rotation globale α_R en haut à gauche, cambrure de bord de fuite α_C en haut à droite et épaisseur relative e_P en bas) sur la forme du profil de l'aile ONERA M6.

- La méthode des perturbations singulières adoptée jusqu'ici sera notée M_{ps} . L'observation est calculée via le lagrangien. L'adjoint n'est pas modifié. Il correspond donc au profil initial, sans perturbation de maillage.
- L'observation est toujours calculée à l'aide de son lagrangien. Cette fois-ci, l'adjoint est remis à jour en même temps que la solution directe des équations d'Euler non linéaires. Plus précisément, nous commençons par remettre à jour l'état direct. Puis, sur la base de cette solution directe remise à jour, l'adjoint est remis à jour. Nous choisissons d'effectuer deux fois plus d'itérations d'adjoint (problème linéaire) que d'itérations non linéaires. Par exemple, lorsque le nombre d'itérations non linéaires (N_{NL}) vaut 10, cela signifie que 20 itérations auront servi à remettre à jour l'adjoint. Cette variante sera notée M_{ps}^{adj} .
- Ce choix arbitraire concernant le nombre d'itérations d'adjoint peut rendre l'analyse partielle et discutable. Pour y remédier, l'ultime technique, notée $M_{ps}^{adj,ref}$, consiste à faire converger l'adjoint sur la base d'une solution directe partiellement convergée. On aura ainsi une idée du gain éventuel si davantage d'itérations sur l'adjoint sont menées.

Les niveaux de précision dans la reconstruction de la surface d'évolution de traînée sont donnés à l'aide des valeurs d'erreur (E_{L_2}) et de gain (G_a), via le tableau II.1.

Le premier fait marquant est la similarité des niveaux de précision obtenus entre les méthodes M_J et M_{ps} . Ceci montre que, sans remise à jour de l'adjoint, le lagrangien n'a pas d'intérêt par rapport à l'observation elle-même. Cela n'entraîne pas de dégradation, mais n'est pas synonyme de l'amélioration attendue. Cette pre-

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

N_{NL}	$\alpha_R - \alpha_C$							
	M_J		M_{ps}		M_{ps}^{adj}		$M_{ps}^{adj,ref}$	
	E_{L_2}	G_a	E_{L_2}	G_a	E_{L_2}	G_a	E_{L_2}	G_a
5	9.1e-2	77.0	9.0e-2	77.3	9.9e-2	75.0	8.0e-2	80.0
20	1.0e-1	73.5	9.8e-2	75.4	5.5e-2	86.0	2.8e-2	93.0
40	7.2e-2	81.9	7.5e-2	81.2	2.5e-2	93.7	2.6e-2	93.4
60	5.3e-2	86.7	5.4e-2	86.3	1.2e-2	97.0	1.7e-2	95.8

Tableau II.1 – Erreurs E_{L_2} (en norme L_2) et gains G_a pour l'estimation de la traînée C_x lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C varient conjointement (cas-test de l'aile ONERA M6).

mière observation nous conforte dans l'importance de remettre à jour l'adjoint pour retrouver l'importance du lagrangien quant à la précision du calcul de l'observation.

Si la précision reste comparable au bout de 5 itérations de remise à jour pour les quatre variantes étudiées (gain d'environ 80%), le fait de remettre à jour l'adjoint, même partiellement (méthode M_{ps}^{adj}), permet de rendre la technique des perturbations singulières beaucoup plus performante. Avec 20 itérations non linéaires de remise à jour, on passe d'un gain de 75% environ avec un adjoint inchangé à un gain supérieur à 85% en remettant à jour l'adjoint. En passant à 40 ou 60 itérations non linéaires, la distinction est tout aussi nette entre les méthodes qui gèlent l'adjoint (gain inférieur à 87%) et celles qui le remettent à jour (gain supérieur à 93%).

Par ailleurs, on remarque la faible différence de précision entre les méthodes M_{ps}^{adj} et $M_{ps}^{adj,ref}$. Les écarts les plus marqués s'obtiennent quand le nombre d'itérations non linéaires (problème direct) est faible (5 et 20). Dans ce cas, le fait de remettre à jour complètement l'adjoint apporte un gain d'amélioration accrue. Ceci traduit le fait que le nombre d'itérations linéaires (problème adjoint) adoptées avec la méthode M_{ps}^{adj} , respectivement égal à 10 et 40, peut être augmenté afin de gagner en précision. Le fait que les qualités d'approximation sont quasi-similaires dans les cas de 40 et 60 itérations non linéaires montre qu'il faut finalement peu d'itérations linéaires pour arriver au gain maximal qu'il est possible d'atteindre en jouant uniquement sur l'adjoint. On rappelle que 40 et 60 itérations non linéaires sont associées respectivement à 80 et 120 itérations pour la remise à jour de l'adjoint (méthode M_{ps}^{adj}).

Ces gains obtenus semblent donc être en faveur de la remise à jour de l'adjoint en même temps que l'état direct (méthode M_{ps}^{adj} plutôt que M_{ps}). Il faut néanmoins comparer les temps de calcul de chacune de ces deux techniques afin de trouver celle qui offre le meilleur compromis entre coût et précision. On rappelle en effet que, en raison de la remise à jour de l'adjoint, la variante M_{ps}^{adj} est plus coûteuse que la méthode M_{ps} à nombre d'itérations non linéaires N_{NL} donné.

On reprend donc les deux techniques M_{ps} et M_{ps}^{adj} . Les angles de cambrure de bord de fuite α_C et de rotation globale α_R restent nos deux paramètres de déformation de maillage. En plus des gains G_a liés à la reconstruction de la surface de traînée, nous indiquons le temps T_e d'une estimation de traînée C_x (tableau II.2).

Tout d'abord, on note le surcoût limité lié à la remise à jour de l'adjoint. La méthode M_{ps}^{adj} effectue $2N_{NL}$ itérations linéaires d'adjoint, en plus des N_{NL} itérations non linéaires de l'état direct. Une itération linéaire est donc beaucoup moins coûteuse qu'une itération non linéaire.

Ainsi, la méthode M_{ps}^{adj} est plus avantageuse que la méthode M_{ps} . Par exemple, le même niveau de précision ($G_a = 86\%$ environ) est atteint en 1.0 minute avec M_{ps}^{adj} , contre 1.9 minute avec M_{ps} . Dans ce cas, il faut donc deux fois plus de temps pour atteindre 86% de gain si l'adjoint n'est pas remis à jour. Par ailleurs, la remise à jour de l'adjoint (méthode M_{ps}^{adj}) permet de dépasser 90% de gain en une minute et demi, alors que la technique M_{ps} , qui laisse l'adjoint inchangé, reste en-dessous de 90% de gain après deux minutes de simulation.

II.2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

N_{NL}	$\alpha_R - \alpha_C$					
	M_{ps}			M_{ps}^{adj}		
	E_{L_2}	G_a	T_e [min]	E_{L_2}	G_a	T_e [min]
5	9.0e-2	77.3	2.8e-1	9.9e-2	75.0	4.3e-1
20	9.8e-2	75.4	7.8e-1	5.5e-2	86.0	1.0
40	7.5e-2	81.2	1.3	2.5e-2	93.7	1.6
60	5.4e-2	86.3	1.9	1.2e-2	97.0	2.4

Tableau II.2 – Erreurs E_{L_2} (en norme L_2), gains G_a et temps moyens T_e pour l'estimation de la traînée C_x lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C varient conjointement (cas-test de l'aile ONERA M6).

De ce fait, la technique M_{ps}^{adj} , qui remet à jour à la fois l'état direct et l'état adjoint, présente un meilleur compromis coût-précision que la méthode M_{ps} , qui se concentre sur la remise à jour de l'état direct.

La comparaison entre les quatre variantes de la méthode des perturbations singulières se poursuit avec les représentations visuelles (lignes de niveau). Les figures II.3 et II.4) montrent les images de la surface de traînée sous forme de lignes de niveau en prenant 20 et 60 itérations non linéaires pour la remise à jour. A chaque fois, nous donnons, en plus de ces quatre variantes, les représentations correspondant d'une part à la méthode de référence (M_{ex}) et d'autre part à la méthode de correction adjointe (M_{ca}).

Les différentes figures montrent bien l'intérêt de remettre à jour l'adjoint pour améliorer considérablement l'approximation. Donnons les points marquants de cette comparaison visuelle.

Grâce à la visualisation des lignes de niveau (figures II.3 et II.4), nous disposons d'une comparaison fine entre les différentes méthodes. Le but est de superposer les lignes de référence (en noir) avec celles données par la méthode d'approximation (en rouge). Là encore, la méthode de correction adjointe (M_{ca}) n'est pas satisfaisante. On retrouve l'amélioration significative des méthodes remettant à jour l'adjoint. En particulier, à partir de 60 itérations non linéaires, les lignes de niveau des méthodes $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ et $M_{ps,N_{NL}}^{adj,ref}$ sont quasiment confondues avec la référence. Or, avec ce même nombre d'itérations (60), les deux autres versions ($M_{J,N_{NL}}$, $M_{ps,N_{NL}}$) ne donnent pas une aussi bonne précision. Avec 60 itérations non linéaires, la différence se situe principalement au niveau de l'aspect de la ligne de niveau centrale (la plus proche du minimum de traînée). L'aspect allongé de celle-ci est bien rendu par les deux variantes qui remettent à jour l'adjoint.

De ce fait, cette étude met en évidence l'intérêt de remettre à jour l'adjoint pour améliorer la prédiction de traînée. Ceci peut se faire en quelques itérations. Ainsi, les tests ont montré que 120 itérations linéaires suffisent à corriger significativement l'estimation de l'observation, sans vraiment nuire au temps de calcul.

Nous allons maintenant nous focaliser plus précisément sur la convergence de l'estimation de l'observation vers la valeur de référence pour ces quatre variantes de la méthode des perturbations singulières.

2.1.2 Convergence de l'estimation de l'observation pour différentes variantes de la méthode des perturbations singulières

L'objectif de cette sous-section est de mettre en évidence les vitesses de convergence des quatre variantes de la méthode des perturbations singulières ($M_{J,N_{NL}}$, $M_{ps,N_{NL}}$, $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ et $M_{ps,N_{NL}}^{adj,ref}$). Le facteur qui varie est

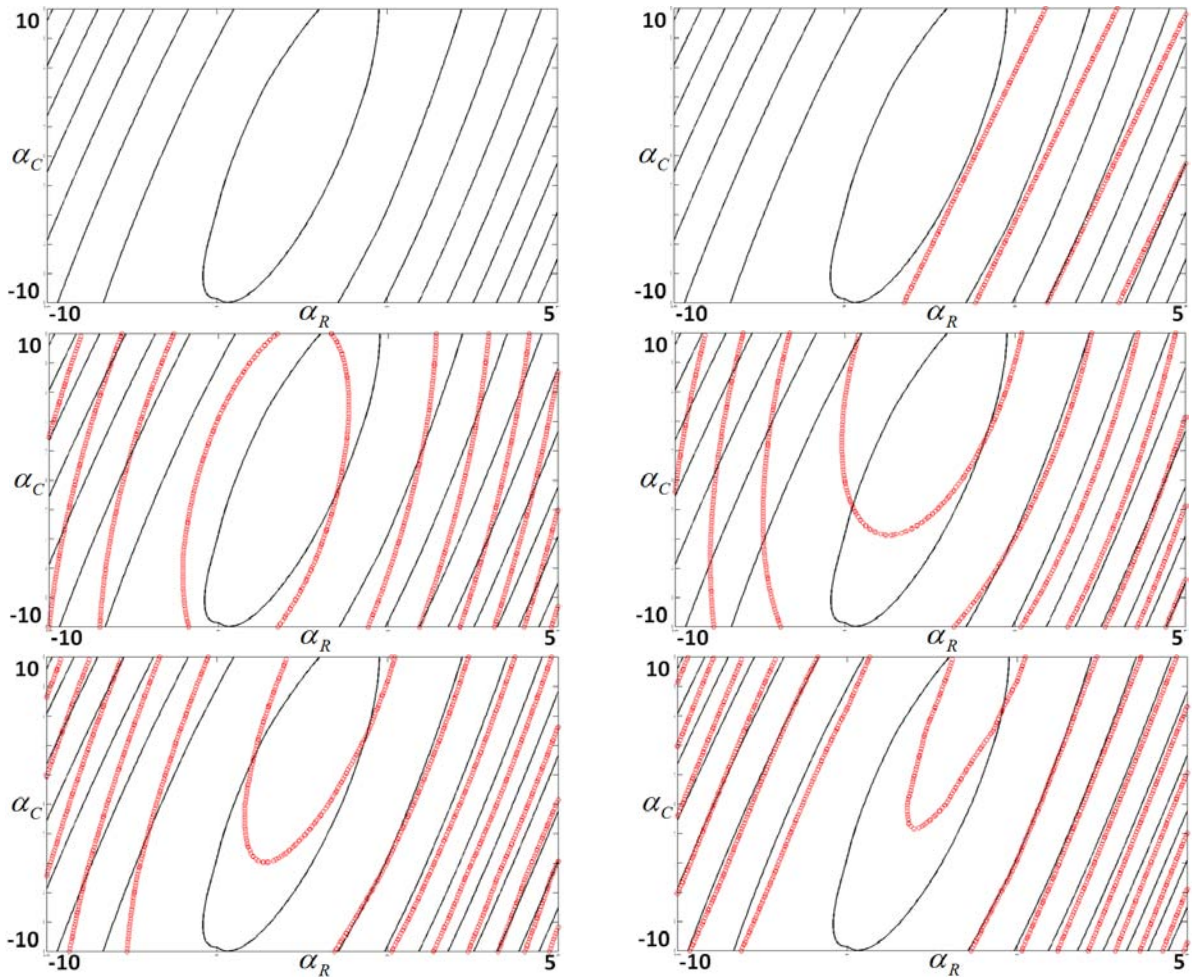


Figure II.3 – Lignes de niveau de la traînée C_x résultant d'une modification conjointe de l'angle de rotation globale α_R et de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C , pour les méthodes M_{ex} (en noir), M_{ca} , $M_{J,20}$, $M_{ps,20}$, $M_{ps,20}^{adj}$ et $M_{ps,20}^{adj,ref}$ (en rouge) de gauche à droite et de haut en bas (cas-test de l'aile ONERA M6).

bien sûr le nombre N_{NL} d'itérations non linéaires effectuées pour remettre à jour la solution directe.

Nous nous focalisons sur l'estimation de l'observation pour une perturbation de maillage donnée. Typiquement, on envisage les perturbations extrêmes des cas-test précédents. Lors de l'étude de la modification d'un paramètre géométrique à la fois, nous avons fait varier l'angle de rotation globale α_R de -10° à 5° et l'angle de cambrure de bord de fuite α_C de -10° à 10° . Par conséquent, les convergences des estimations de la traînée sont données lorsque α_R vaut -10° et 5° (figure II.5).

Ensuite, les effets croisés sont étudiés. Les courbes de convergence sont tracées pour les couples (α_R, α_C) suivants : $(5^\circ, 10^\circ)$ et $(5^\circ, -10^\circ)$, cf la figure II.6.

Les différentes convergences montrent bien la pertinence des variantes de la méthode des perturbations singulières remettant à jour non seulement la solution directe, mais aussi l'adjoint. Pour toutes les configurations, l'estimation de la traînée tend rapidement vers la valeur de référence, contrairement aux deux variantes qui ne font que remettre à jour la solution directe.

Pour les huit simulations effectuées, les estimations données par la méthode des perturbations singulières sont très proches de la référence au bout des 80 itérations non linéaires. Les courbes, dans l'ensemble, se rapprochent rapidement de la valeur de référence en fonction des itérations. Cette tendance confirme que seules quelques

II.2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

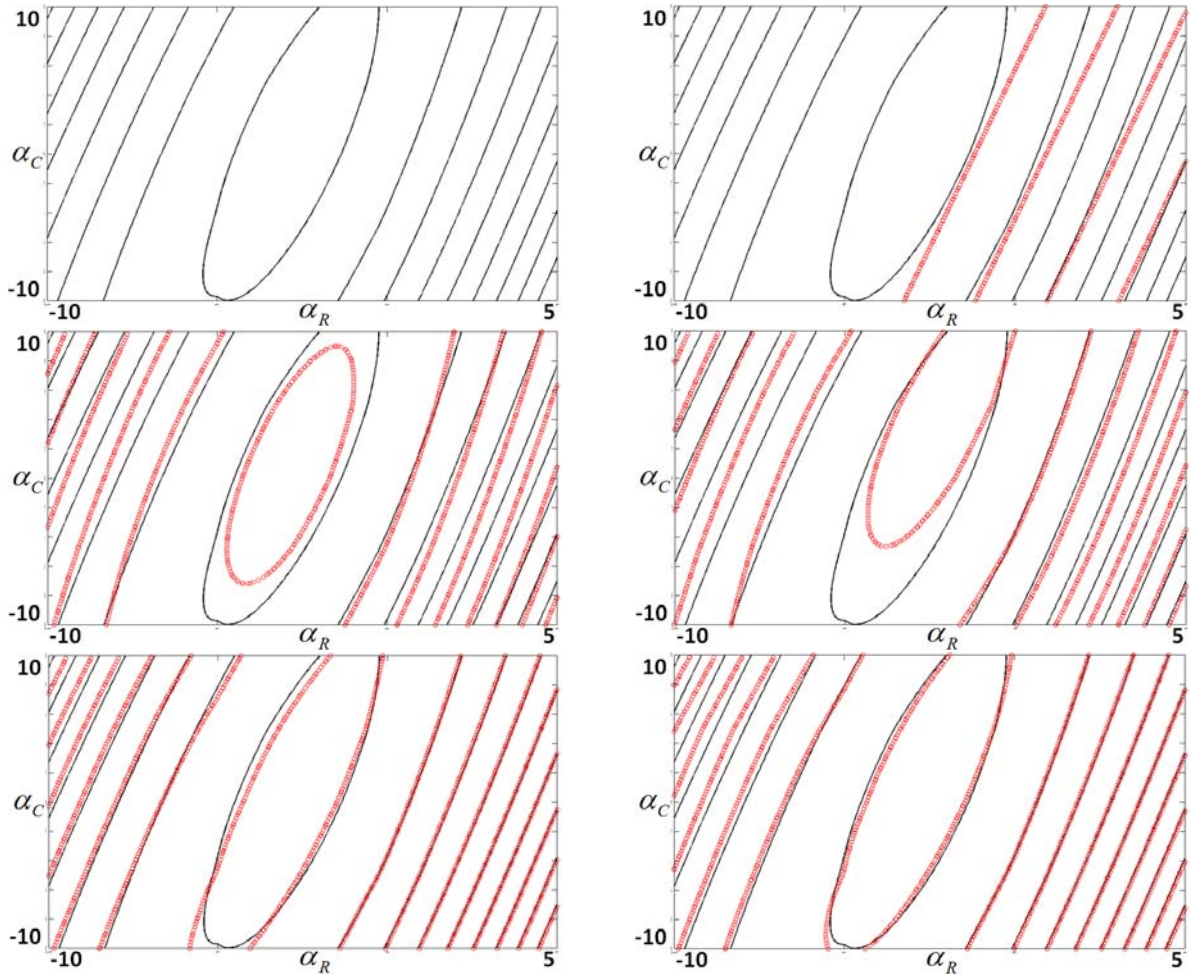


Figure II.4 – Lignes de niveau de la traînée C_x résultant d'une modification conjointe de l'angle de rotation globale α_R et de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C , pour les méthodes M_{ex} (en noir), M_{ca} , $M_{J,60}$, $M_{ps,60}$, $M_{ps,60}^{adj}$ et $M_{ps,60}^{adj,ref}$ (en rouge) de gauche à droite et de haut en bas (cas-test de l'aile ONERA M6).

remises à jour suffisent à apporter une correction sensible à la valeur de traînée.

Par ailleurs, les courbes des techniques $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ et $M_{ps,N_{NL}}^{adj,ref}$ sont souvent très proches l'une de l'autre, surtout au bout de 40 itérations environ. Cette constatation signifie que l'adjoint (comme la solution directe des équations d'Euler) ne demande que peu d'itérations (ici environ 80) pour améliorer l'estimation de manière satisfaisante. Le fait de faire converger complètement l'adjoint devient donc superflu.

Un point important doit être souligné. Il s'agit d'un autre avantage des méthodes $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ et $M_{ps,N_{NL}}^{adj,ref}$ qui remettent à jour l'adjoint, sur les variantes $M_{J,N_{NL}}$ et $M_{ps,N_{NL}}$ qui ne remettent à jour que la solution directe des équations d'Euler. En plus d'accélérer la convergence, la remise à jour de l'adjoint permet de limiter les oscillations apparaissant parfois avec les techniques $M_{J,N_{NL}}$ et $M_{ps,N_{NL}}$. Cet aspect est particulièrement évident pour la perturbation de maillage donnée par le couple d'angles (α_R, α_C) égal à $(5^\circ, 10^\circ)$. Ainsi, mis à part la brusque amélioration survenant lors du passage de 0 à quelques itérations de remise à jour, les courbes de convergence des méthodes $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ et $M_{ps,N_{NL}}^{adj,ref}$ sont relativement régulières, comparées aux deux autres variantes. Cette régularité de convergence est fondamentale pour avoir, dès les premières itérations de remise à jour, une idée de la valeur de traînée à atteindre par extrapolation de la courbe de convergence.

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

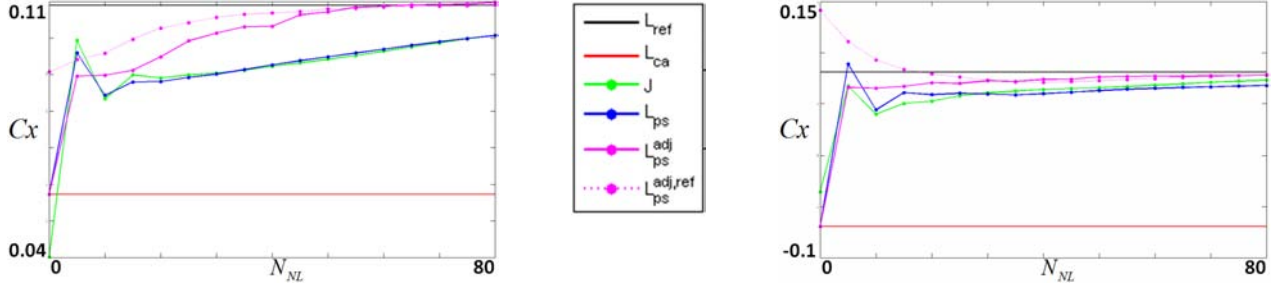


Figure II.5 – Evolutions de la traînée Cx en fonction du nombre N_{NL} d'itérations de remise à jour, en présence d'une modification de l'angle de rotation globale α_R , valant 5° (à gauche) et -10° (à droite) (cas-test de l'aile ONERA M6).

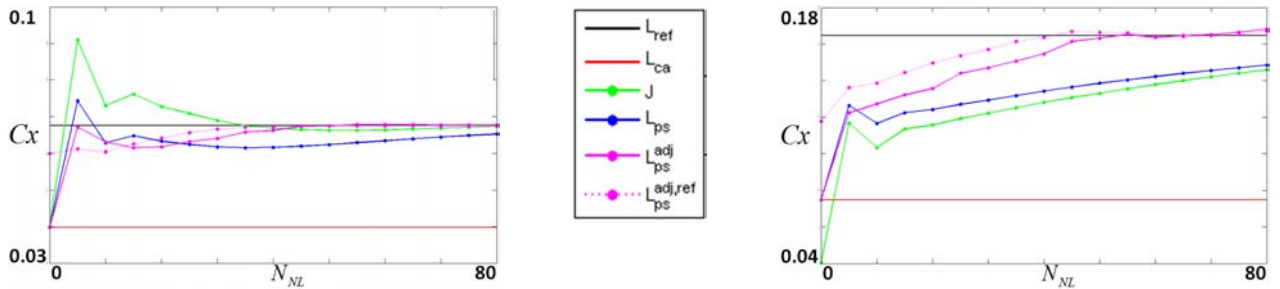


Figure II.6 – Evolutions de la traînée Cx en fonction du nombre N_{NL} d'itérations de remise à jour, en présence d'une modification conjointe des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , le couple $[\alpha_R, \alpha_C]$ valant $[5^\circ, 10^\circ]$ (à gauche) et $[5^\circ, -10^\circ]$ (à droite) (cas-test de l'aile ONERA M6).

Dans toute la suite, nous nous baserons sur la technique $M_{ps, N_{NL}}^{adj}$, qui remet à jour à la fois l'état direct (en N_{NL} itérations non linéaires) et l'état adjoint (en $2N_{NL}$ itérations linéaires). Comme nous venons de le voir, cette méthode est plus efficace et avantageuse que la variante $M_{ps, N_{NL}}$, qui ne remet à jour que l'état direct. La sous-section suivante va prolonger une précédente remarque. Il s'agira de prédire l'erreur commise par l'approximation de la méthode des perturbations singulières sans connaître a priori la valeur de référence de l'observation (traînée Cx).

2.1.3 Estimation a priori de l'erreur commise par la technique des perturbations singulières

Jusqu'à présent, nous avons mis en évidence la performance de la méthode des perturbations singulières qui, à faible coût de calcul, fournit une estimation de l'observation cohérente lorsque le maillage se trouve perturbé. Néanmoins, il est tout aussi important de posséder un **estimateur d'erreur** qui permet de connaître le degré de pertinence de l'approximation. Une telle information permettrait de savoir s'il y a un intérêt de poursuivre les itérations de remise à jour ou si la précision obtenue est satisfaisante.

Au lieu de tracer la convergence, nous nous focalisons donc sur la prédiction de l'erreur commise par la méthode $M_{ps, N_{NL}}^{adj}$. On rappelle que cette technique remet à jour, en N_{NL} itérations, la solution directe et, en $2N_{NL}$ itérations, l'adjoint intervenant dans l'expression du lagrangien. Bien sûr, l'hypothèse de base est que la valeur de référence de la traînée est inconnue. Deux estimateurs différents

II.2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

vont être envisagés.

- Le premier correspond au facteur d'erreur couramment utilisé, notamment en adaptation de maillage [VEN99]. Il s'agit du produit entre l'adjoint et le résidu Euler des équations non linéaires. Cet estimateur, noté $E_{s,2}$, est bien sûr remis à jour en même temps que l'approximation. Cependant, l'adjoint de l'estimateur n'est pas remis à jour. On souhaite en effet se conformer à la prédiction d'erreur évoquée par Giles [VEN02].
- Le second revient à calculer l'écart, en valeur absolue, entre deux approximations successives. On obtient ainsi une courbe d'évolution. L'estimateur s'obtient alors en prenant, en chaque point, la moyenne des écarts des points voisins. Cette opération consiste simplement à lisser quelque peu l'évolution. Cet estimateur sera noté $E_{s,1}$.

Or, la valeur de référence de la traînée, vers laquelle tendent les approximations, est connue. Par conséquent, il est possible de calculer l'erreur exacte commise au cours des itérations par la méthode $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$. L'idée sera de comparer cette erreur exacte avec les erreurs prédites par les deux estimateurs $E_{s,1}$ et $E_{s,2}$. Plus la correspondance sera bonne, plus l'estimateur sera efficace.

Notons que, plus que la valeur brute de l'erreur, l'important est que l'évolution de l'estimateur soit cohérente avec l'évolution de l'erreur exacte. C'est pourquoi, nous nous autorisons à apporter un coefficient multiplicatif aux deux estimateurs pour que les courbes d'évolution de l'erreur soient similaires, ceci afin de faciliter la comparaison. Bien sûr, ce coefficient multiplicatif doit être aussi proche de l'unité que possible. En gros, un coefficient compris entre 0.1 et 10 sera considéré comme acceptable.

Les courbes d'estimateur d'erreur sont tracées lorsque les deux angles (angle de rotation globale α_R et angle de cambrure de bord de fuite α_C) sont modifiés (figure II.7). Bien sûr, la courbe d'erreur exacte est également tracée. Elle sert de référence aux deux estimateurs $E_{s,1}$ et $E_{s,2}$ considérés.

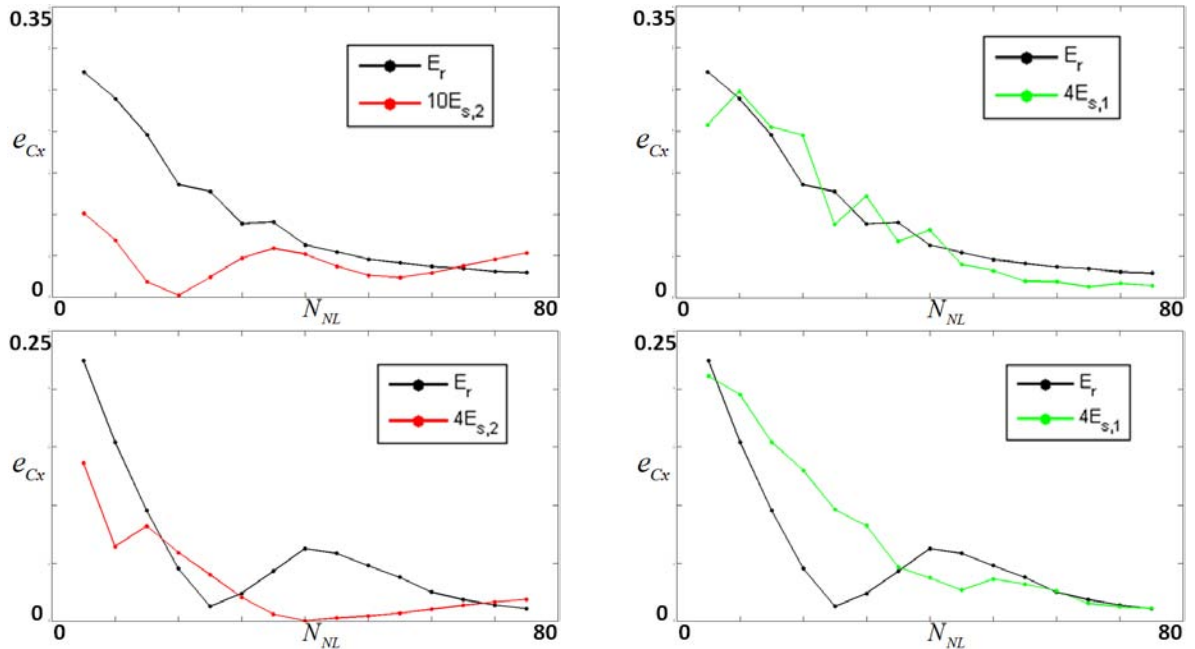


Figure II.7 – Erreurs e_{Cx} sur la prédiction de la traînée en fonction du nombre N_{NL} d'itérations de remise à jour, pour une modification conjointe des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , le couple $[\alpha_R, \alpha_C]$ valant $[-10^\circ, 10^\circ]$ (figures du haut) et $[-10^\circ, -10^\circ]$ (figures du bas) (cas-test de l'aile ONERA M6).

Les légendes de la figure II.7 précisent le coefficient multiplicatif appliqué aux deux estimateurs d'erreur. Tous ces coefficients sont strictement supérieurs à 1. Or, en règle générale, l'estimateur $E_{s,1}$, basé sur l'écart

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

entre les estimations successives de traînée, est associé à un coefficient plus faible que l'estimateur $E_{s,2}$, basé sur le terme correctif adjoint remis à jour. Cet aspect est donc en faveur de l'estimateur $E_{s,1}$.

L'autre point important qu'un bon estimateur doit vérifier est de capter la tendance générale de l'évolution de l'erreur exacte. Clairement, pour cet aspect particulier, l'estimateur $E_{s,1}$ est plus fidèle à la réalité que l'estimateur $E_{s,2}$. Même si, pour les premières itérations, la concordance n'est pas forcément bonne, l'important est de capter la tendance au bout d'un certain nombre d'itérations. Ce temps de latence n'est pas surprenant. Il faut que la convergence s'établisse après le choc représenté par le fait de remettre à jour la solution directe et l'adjoint.

De ce fait, l'estimateur $E_{s,1}$ est recommandé pour connaître a priori l'erreur commise sur la prédiction de l'observation. Celui-ci repose sur l'écart entre au moins deux prédictions établies avec différents nombres d'itérations de remise à jour.

Ainsi, la méthode des perturbations singulières permet non seulement d'estimer à faible coût une observation modifiée de manière non linéaire par une perturbation de maillage, mais aussi d'avoir une idée de l'erreur commise. La variante $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ est recommandée. Elle consiste à remettre à jour en N_{NL} itérations la solution directe et en $2N_{NL}$ itérations l'adjoint, solution d'un problème linéaire.

Plus que la tendance de la courbe d'erreur effective, nous allons chercher à connaître l'écart absolu entre une estimation d'observation courante et la valeur de référence (supposée inconnue). Dans cette optique, le caractère éventuellement géométrique de l'erreur commise est un point crucial.

II.2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

2.1.4 Mise en évidence de la progression géométrique de l'erreur

L'estimateur d'erreur $E_{s,1}$ envisagé se base sur les écarts d'observation (en valeur absolue) entre 2 itérations (ou séries d'itérations) successives de remise à jour. Cette erreur (appelée erreur estimée) doit être capable de contrôler l'erreur effective commise sur l'observation. Rappelons que cette erreur effective demande de calculer la solution directe de la mécanique des fluides de manière exacte, ce que nous souhaitons éviter.

Dans ce contexte, il est particulièrement instructif de visualiser le logarithme de l'évolution de l'erreur estimée (évolution en fonction des itérations N_{NL} non linéaires). Pour les huit perturbations de maillage liées à une modification des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , la figure II.8 trace les courbes de logarithme d'erreur.

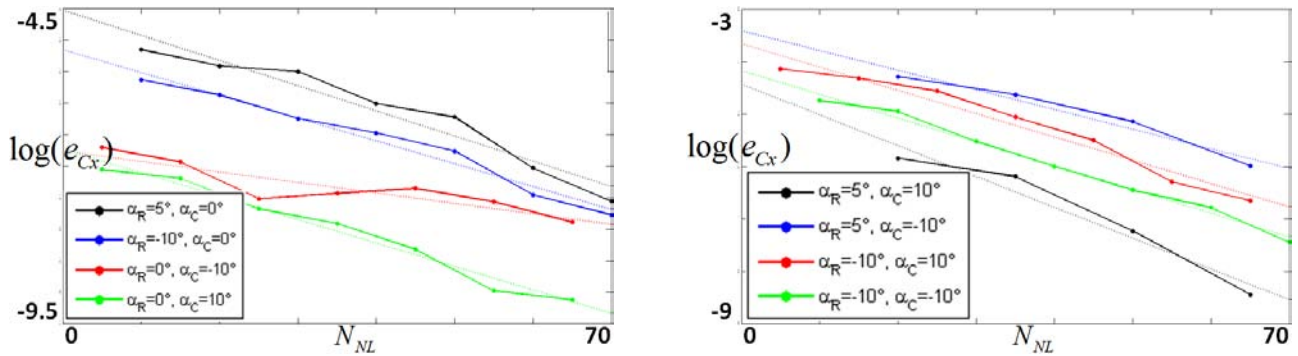


Figure II.8 – Evolutions du logarithme de l'erreur estimée $E_{s,1}$ dans le cas d'une perturbation de maillage simple (figure de gauche) et croisée (figure de droite), avec les droites obtenues par moindres carrés (en pointillé) (cas-test de l'aile ONERA M6).

Le comportement de chacun des logarithmes d'erreur est quasiment linéaire (courbe proche de la droite obtenue par moindres carrés). Ceci traduit une **progression géométrique de l'erreur estimée**, proche de la véritable erreur.

Le caractère géométrique de l'erreur estimée permet d'établir une majoration de l'erreur effective, égale à l'écart entre l'estimation courante et la valeur de référence de la traînée.

Pour illustrer cette majoration, prenons le cas de la détermination d'une observation j . Notons j_n (resp. j^*) la valeur d'observation à l'itération n (resp. la valeur de référence). L'erreur effective (ou exacte), notée E_r , vaut donc $|j_n - j^*|$. Or, la valeur de référence j^* est supposée inconnue. Seule l'estimation j_n est disponible pour quelques itérations n .

Comme l'erreur effective E_r n'est pas calculable (valeur de référence j^* inconnue), nous allons chercher à majorer cette quantité. L'hypothèse de base est que l'erreur estimée (basée sur les écarts $|j_n - j_{n-1}|$) suit une progression géométrique. Le terme $\frac{|j_{n-1} - j_{n-2}|}{|j_n - j_{n-1}|}$ est ainsi quasiment constant au cours des itérations. La valeur commune sera notée Δ .

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 E_r &= |j_n - j^*| \\
 &= |(j_n - j_{n-1}) + (j_{n-1} - j_{n-2}) + \dots + (j_2 - j_1) + (j_1 - j^*)| \\
 &= |j_n - j_{n-1}| \left(1 + \frac{j_{n-1} - j_{n-2}}{j_n - j_{n-1}} + \dots + \frac{j_2 - j_1}{j_n - j_{n-1}} + \frac{j_1 - j^*}{j_n - j_{n-1}} \right) \\
 &< |j_n - j_{n-1}| \left(1 + \frac{|j_{n-1} - j_{n-2}|}{|j_n - j_{n-1}|} + \dots + \frac{|j_2 - j_1|}{|j_n - j_{n-1}|} + \frac{|j_1 - j^*|}{|j_n - j_{n-1}|} \right) \\
 &< |j_n - j_{n-1}| (1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^{n-1}) \\
 &< \frac{|j_n - j_{n-1}|}{1 - \Delta}
 \end{aligned} \tag{II.9}$$

Ainsi, il est possible de majorer l'erreur effective E_r avec comme seules informations l'écart $|j_n - j_{n-1}|$ entre deux estimations successives et le terme Δ (indépendant de n). Notons que cet écart Δ s'obtient en connaissant non pas un mais plusieurs écarts $|j_n - j_{n-1}|$, pour différentes itérations de remise à jour.

En pratique, une bonne manière de calculer le paramètre Δ est de déterminer la pente p_e de la droite obtenue par moindres carrés et associée à l'évolution du logarithme des écarts $|j_n - j_{n-1}|$. Ensuite, le coefficient Δ est simplement égal à l'exponentiel de cette pente p_e .

Ce raisonnement s'applique donc à la méthode des perturbations singulières. Il est ainsi possible de majorer l'erreur effective E_r à partir de la connaissance de l'évolution de l'erreur estimée $E_{s,1}$. Pour fixer les idées, on détermine Δ pour toutes les perturbations de maillage considérées (tableau II.3).

α_R	α_C	Δ
5 °	0 °	0.961
-10 °	0 °	0.964
0 °	-10 °	0.983
0 °	10 °	0.963
5 °	10 °	0.943
5 °	-10 °	0.963
-10 °	10 °	0.956
-10 °	-10 °	0.956

Tableau II.3 – Paramètres Δ (quotients des écarts absolus de l'estimation de traînée) pour les huit perturbations de maillage (cas-test de l'aile ONERA M6).

Ce paramètre Δ est compris entre 0.94 et 0.99 pour les huit perturbations de maillage. Avec cette information, nous sommes capable de majorer l'erreur effective. Cette possibilité est la garantie de pouvoir contrôler la précision de notre estimation de traînée sans devoir mener le calcul complet et coûteux.

Remarquons que, au cours du calcul pour la majoration de l'erreur effective, on a supposé que le terme $\frac{|j_1 - j^*|}{|j_1 - j_2|}$ est majoré par Δ . Etant indépendante de n , cette quantité n'influe pas sur le résultat. En effet, si

II.2 Perturbation globale de maillage sur le profil de l'aile ONERA M6 (cas-test Euler)

l'hypothèse de majoration n'est pas vérifiée, l'inégalité précédente reste vraie à un terme additif indépendant de n près.

Par ailleurs, on rappelle que l'estimateur d'erreur $E_{s,1}$ fait appel à un lissage. Ceci ne remet pas en cause la majoration de l'erreur effective, qui reste vraie à un coefficient multiplicatif près (indépendant de n).

Pour mettre en évidence l'efficacité de la méthode des perturbations singulières, il est particulièrement intéressant de comparer la décroissance de l'erreur commise par cette méthode avec la décroissance du résidu des équations d'Euler lorsque quelques itérations sont menées.

2.1.5 Efficacité de la méthode des perturbations singulières : comparaison avec le résidu Euler

Les huit perturbations de maillage, revenant à modifier les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , sont reprises dans cette partie. Elles ont été présentées trois sous-sections avant celle-ci.

La variante $M_{ps,N_{NL}}^{adj}$ de la méthode des perturbations singulières est utilisée. Elle revient à estimer l'observation (traînée Cx) via le lagrangien en remettant à jour la solution directe en N_{NL} itérations et l'adjoint en $2N_{NL}$ itérations. Le nombre N_{NL} d'itérations effectuées ira de 10 à 80, en allant de 10 en 10. A chaque fois, l'erreur exacte (écart absolu avec la valeur de référence) est calculée. Elle est notée e_{Cx} . En même temps, nous déterminons le résidu Euler (en norme L_2), mesurant la convergence globale du problème Euler (ie sur tout le maillage de l'aile ONERA M6). Ce résidu sera noté e_{NL} .

Ces deux erreurs (e_{Cx} et e_{NL}) subissent un changement d'échelle pour valoir 1 au bout de 10 itérations et 0 lorsque la convergence du problème est menée à son terme. Partant du même niveau, il est pertinent de comparer la vitesse de décroissance. L'objectif est de mesurer la qualité de l'approximation de la méthode des perturbations singulières qui se focalise sur le calcul d'une observation scalaire. Pour cela, on compare la convergence du calcul de l'observation avec la convergence globale du problème Euler.

Comme lors des sous-sections précédentes, on envisage de modifier l'angle de cambrure de bord de fuite α_C seul (figure II.9) puis on passe à une modification conjointe de ces deux angles (figure II.10).

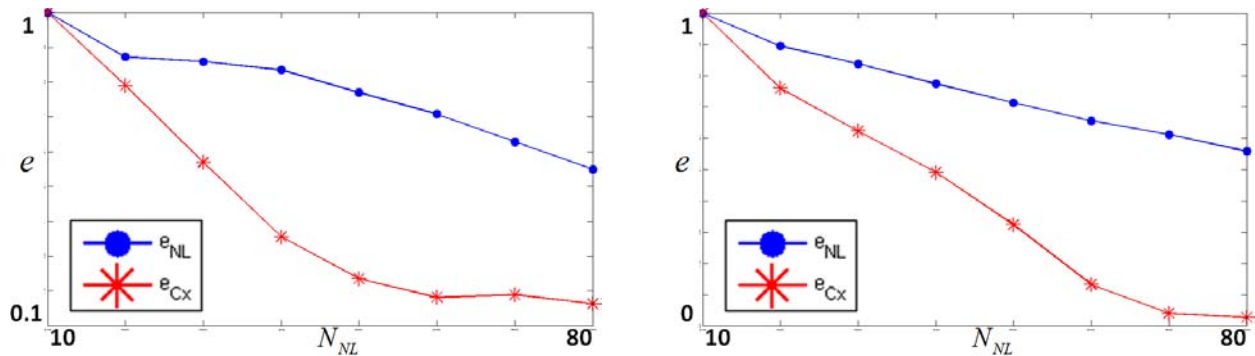


Figure II.9 – Erreurs sur la prédiction de la traînée (e_{Cx}) et sur la solution directe globale (e_{NL}) en fonction du nombre N_{NL} d'itérations de remise à jour, pour une modification de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C , valant 10° (à gauche) et -10° (à droite) (cas-test de l'aile ONERA M6).

A la vue de ces différents graphes d'erreur, la décroissance rapide de l'erreur e_{Cx} associée à la prédiction de l'observation de traînée Cx par rapport à celle de l'erreur e_{NL} associée à la convergence globale du problème frappe. Bien sûr, au cours des premières itérations, la hiérarchie est parfois inversée. L'unique cas de ce genre intervient lorsque les angles α_R et α_C de perturbation valent respectivement 5° et 10° .

Néanmoins, dans tous les cas, la vitesse de décroissance de l'erreur est nettement plus rapide dans le cas de la méthode des perturbations singulières. Cette observation appelle à deux commentaires.

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

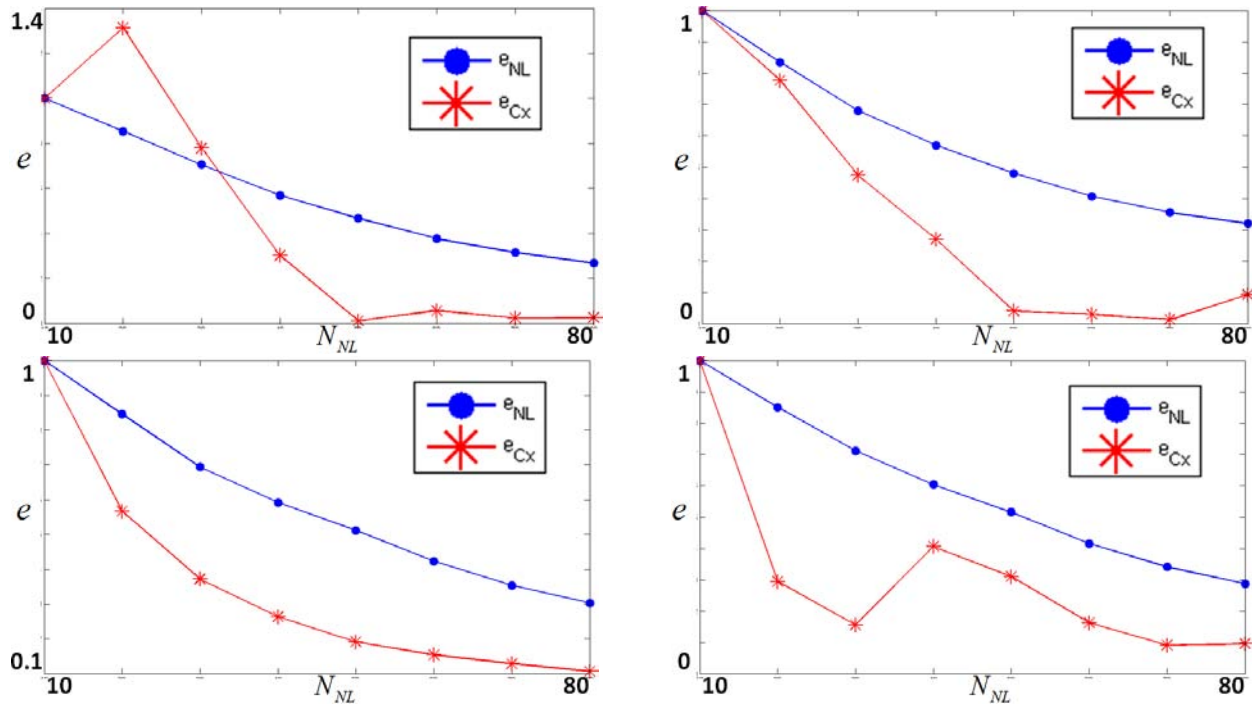


Figure II.10 – Erreurs sur la prédiction de la traînée (e_{Cx}) et sur la solution directe globale (e_{NL}) en fonction du nombre N_{NL} d'itérations de remise à jour, pour une modification conjointe des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , le couple $[\alpha_R, \alpha_C]$ valant $[5^\circ, 10^\circ]$, $[5^\circ, -10^\circ]$, $[-10^\circ, 10^\circ]$ et $[-10^\circ, -10^\circ]$ de gauche à droite et de haut en bas (cas-test de l'aile ONERA M6).

- Le premier commentaire consiste simplement à dire que la variante retenue ($M_{ps, N_{NL}}^{adj}$) permet, grâce à la remise à jour de l'adjoint et à la formulation du lagrangien, d'accélérer la vitesse de convergence de la prédiction de la traînée. On obtient ainsi, en quelques itérations, une bonne idée de la valeur de la traînée bien que la solution directe soit loin d'être convergée.
- Le second commentaire est plus général. Il explique en partie la réussite de cette variante des perturbations singulières. Cette dernière repose en effet sur le fait que les premières itérations destinées à résoudre un problème aux dérivées partielles (comme le système d'équations d'Euler) cherchent à capter les **hautes fréquences** des phénomènes. En l'occurrence, ici, la non-linéarité de la perturbation de maillage sur la valeur de l'observation. Or, l'adjoint est là pour tenir compte de l'effet plus global de la perturbation sur la valeur de l'observation, autrement dit des **basses fréquences**. Ainsi, la variante remettant à jour non seulement la solution directe mais aussi l'adjoint va traiter efficacement la variation principale comme les variations d'ordre supérieur. Ceci explique la vitesse de convergence très rapide, comparée à la diminution du résidu Euler.

Conclusion

La méthode des perturbations singulières a pour objectif de prédire à faible coût de calcul la variation d'une observation scalaire lorsque le maillage est perturbé. Les perturbations de maillage rencontrées peuvent être de deux natures différentes.

- Certaines perturbations sont **singulières**. C'est le cas lors du rajout ou de la suppression de sommets pour le maillage considéré. Le point important est que la topologie est modifiée. Il n'y a donc plus de relation fonctionnelle entre la perturbation de maillage et l'observation. Dans ce cas, la technique de correction adjointe couramment utilisée est fautive. Il manque **la contribution singulière qui peut être du même ordre que la composante régulière prise en compte par l'adjoint**. La présentation théorique et les cas-test analytiques ont mis en évidence que la prise en compte de la singularité permet de corriger presque parfaitement l'observation, contrairement à la correction adjointe qui s'avère inadaptée.
- D'autres perturbations sont **régulières** (déplacement de sommets) mais peuvent provoquer une variation non linéaire de l'observation considérée. L'intérêt de la méthode des perturbations singulières réside dans la **captation efficace des termes d'ordre supérieur**. Les cas-test analytiques ont pu montrer l'apport de la stratégie proposée pour améliorer la correction adjointe. Pour les applications industrielles, nous nous sommes focalisés sur ce type de perturbation régulière de maillage qui regroupe la quasi-totalité des cas rencontrés en aérodynamique. Dans la suite de la conclusion, nous nous concentrons donc sur les perturbations régulières.

La méthode des perturbations singulières permet de satisfaire deux attentes a priori antagonistes. Il s'agit de connaître l'évolution d'une observation aérodynamique (traînée ou portance) le plus précisément possible et en un coût de calcul minimal. L'idée est de partir de la technique de correction adjointe. Elle fait appel au produit entre le résidu non linéaire et l'adjoint lié à l'observation pour corriger l'observation à faible coût. En effet, la solution directe n'est pas modifiée. Cependant, cette correction est alors du premier ordre et le comportement prédit est donc linéaire. Dans le cas où l'évolution à estimer est plus complexe, **la méthode de correction adjointe ne fournit que la tangente** à la véritable courbe.

La méthode de perturbation singulière va s'appuyer à nouveau sur cette correction adjointe, mais en modifiant la solution directe intervenant au niveau du résidu. Au lieu de faire converger celle-ci et donc de perdre l'intérêt d'une réponse peu coûteuse, on se limite à remettre à jour la solution directe localement en peu d'itérations. La région concernée par la remise à jour est un voisinage de la zone de perturbation.

La méthode des perturbations singulières va être testée sur un cas-test industriel (aile ONERA M6). Il s'agit d'un problème Euler en 3 dimensions. L'objectif est de prédire l'évolution de la traînée en fonction de l'intensité de la perturbation de maillage. Plus précisément, on souhaite **estimer d'une part la tendance éventuellement non linéaire de l'évolution globale**.

Les variables contrôlant la forme du profil (son angle de rotation globale, de cambrure de bord de fuite et son épaisseur relative) représentaient les paramètres de perturbation de maillage. Pour améliorer l'efficacité de la méthode des perturbations singulières, l'état adjoint est remis à jour en plus de l'état direct. Par analogie avec le traitement d'un signal temporel, les **hautes fréquences (via l'état direct)** et les **basses fréquences (via l'état adjoint)** de la perturbation de maillage sont donc toutes les deux traitées. Ce traitement supplémentaire ne se fait pas au détriment du temps de calcul. Ainsi, avec un temps de calcul négligeable pour les deux

Chapitre II. Prédiction de l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire par perturbations singulières

approches (méthode de correction adjointe et méthode de perturbation singulière), on améliore significativement l'approximation de l'observation scalaire lors d'une perturbation de maillage avec la technique des perturbations singulières.

Bien plus, nous avons montré que la technique des perturbations singulières est capable de **prédire l'erreur a priori** commise sur l'observation. Cette caractéristique rend possible le contrôle de la précision de l'approximation.

De ce fait, nous avons montré au cours de ce chapitre l'apport essentiel de la méthode des perturbations singulières pour corriger efficacement l'estimation d'une observation aérodynamique face à une perturbation régulière de maillage. Il s'agit de la perturbation de maillage la plus fréquemment rencontrée en aérodynamique. L'impact lié à la modification de la forme de l'objet étudié sur l'observation scalaire d'intérêt peut donc être prédit à faible coût de calcul. Le très bon **compromis coût-précision** ainsi obtenu s'avère décisif en contexte industriel.

Bibliographie

- [AMS03] S. Amstutz, B. Samet and M. Masmoudi, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation*, SIAM J. Control Optim. 42(5), pp. 1523-1544, 2003.
- [AMS04] S. Amstutz, *Topological sensitivity in fluid dynamics*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004.
- [AMS05] S. Amstutz, I. Horchani, and M. Masmoudi, *Crack detection by the topological gradient method*, Control Cybernet., 34(1) :81-101, 2005.
- [AUR07] D. Auroux, L. J. Belaid and M. Masmoudi, *A topological asymptotic analysis for the regularized grey-level image classification problem*, Math. Model. Numer. Anal., 41(3) :607-625, 2007.
- [BAR06] A. Barthet, C. Airiau, M. Braza and L. Turrette, *Adjoint-based error correction applied to far-field drag breakdown on structured grid*, 24th Applied Aerodynamics Conference, June 5-8, 2006, San Francisco, California.
- [BEL06] L. J. Belaid, M. Jaoua, M. Masmoudi and L. Siala, *Image restoration and edge detection by topological asymptotic expansion*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 342(5) :313-318, 2006.
- [BOL07] S. Borel-Sandou and G. Rogé, *Improvement of observations, error estimation and mesh adaptation using an adjoint based approach for aerodynamic calculations*, AVT-147 / RSY-022 RTO Symposium "Computational Uncertainty in Military Vehicle Design", Athens, Greece, December 3-6, 2007.
- [DWI07] R. P. Dwight, *Efficient a posteriori error estimation for finite volume methods*, NATO Research and Technology Organisation, AVT-147 Computational Uncertainty, Athens, December 2007.
- [GAR01] S. Garreau, Ph. Guillaume and M. Masmoudi, *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case*, SIAM J. Control Optim., 39(6), pp. 1756-1778, 2001.
- [GUI02] Ph. Guillaume, K. Sid Idris, *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, SIAM J. Control. Optim. 41(4), pp. 1052-1072, 2002.
- [HAS02] M. Hassine and M. Masmoudi, *The topological asymptotic expansion for the quasi-Stokes problem*, Accepted in COCV, 2002.
- [HEL03] B. Helenbrook, *Mesh deformation using the biharmonic operator*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56 :1007-1021, 2003.
- [JAK05] S. Jakobsson and O. Amoignon, *Mesh deformation using radial basis functions for gradient-based aerodynamic shape optimisation*, FOI report FOI-R-1784-SE, December 2005.

Bibliographie

- [JON01] D. P. Jones, A. L. Gaitonde and S. P. Fiddes, *Moving mesh generation for unsteady flows about deforming complex configurations using multiblock meshes* , CFD Journal, Japanese Society of CFD, p. 430-439, 2001.
- [KIM06] H.-J. Kim and K. Nakahashi, *Output-based error estimation and adaptive mesh refinement using viscous adjoint method* , 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 9-12, 2006, Reno, Nevada.
- [LAX60] P. D. Lax and B. Wendroff, *Systems of conservation laws* , Comm. Pure and Applied Mathematics. 13 (1960) 217-237.
- [LIC07] E. Li Cham Yon, *Méthode multi-échelle pour la simulation de transport de polluants* , Stage de Master 2, IMT, Mars-Juin 2007.
- [LIO73] J. L. Lions, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal* , Lecture note in mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [LOE96] R. Loehner and C. Yang, *Improved ALE mesh velocities for moving bodies* , Communications in Numerical Methods in Engineering, 12 :599-608, 1996.
- [MAS01] M. Masmoudi, *The topological asymptotic* , Computational Methods for Control Applications, 16 :53-72, 2001.
- [MAS05] M. Masmoudi, J. Pommier and B. Samet, *The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications* , Inverse Problems, 21(2) :547-564, 2005.
- [MAS06] M. Masmoudi, *Une nouvelle approche numérique de la technique du lagrangien* , Technical report, IMT, 2006.
- [MAS09] M. Masmoudi, M. Abdelwahed and M. Hassine, *Optimal shape design for fluid flow using topological perturbation technique* , Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, sous presse.
- [MUL01] J.-D. Müller and M. B. Giles, *Solution Adaptive Mesh Refinement Using Adjoint Error Analysis* , AIAA 2001-2550, 15th Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, California, June 11-14, 2001.
- [PER93] J. Peraire, J. Peiro and K. Morgan, *Multigrid Solution of the Threedimensional Compressible Euler Equations on Unstructured, Tetrahedral Grids* , J. Num. Meth. Engr., 36 :1029-1044, 1993.
- [PIE03] N. A. Pierce and M. B. Giles, *Adjoint and defect error bounding and correction for functional estimates* , AIAA 2003-3846, 16th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, 2003.
- [REN07] T. C. S. Rendall and C. B. Allen, *Unified approach to CFS-CSD interpolation and mesh motion using radial basis functions* , AIAA-2007-3804, 25th AIAA Applied Aerodynamics Conference, Miami, June 2007.
- [SAM03] B. Samet, S. Amstutz and M. Masmoudi, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation* , SIAM J. Control Optim. Vol. 42(5), pp. 1523-1544, 2003.
- [SID01] K. Sid Idris, *Sensibilité topologique en optimisation de forme* , Thèse de l'INSA Toulouse, 2001.
- [SOK99] J. Sokolowski and A. Zochowski, *On the topological derivative in shape optimization* , SIAM J. Control Optim., 37, pp. 1241-1272, 1999.
- [TRI05] D. Trif, *LiScNLS Tutorial* , Department of Applied Mathematics, Babes-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania, 2005.
- [VEN99] D. A. Venditti and D. L. Darmofal, *Adjoint error estimation and grid adaptation for functional outputs : application to quasi-one-dimensional flow* , Journal of Computational Physics, 164, 204-227, Massachusetts, Cambridge, December 16, 1999.

- [VEN02] D. A. Venditti and D. L. Darmofal, *Grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional inviscid flows* , Journal of Computational Physics 176, 40-69, 2002.

Bibliographie

Chapitre III

Propagation d'incertitude en milieu industriel

La performance globale d'un avion repose sur quelques critères bien précis. Les principales de ces caractéristiques sont le rayon d'action, la consommation de carburant par kilomètre parcouru ou encore le nombre maximal de passagers. Elles dépendent directement de la valeur d'observations scalaires calculées lors d'une simulation numérique. C'est notamment le cas du coefficient de traînée ou de portance. Certaines observations vont même permettre aux décideurs de classer les appareils suivant leur gamme d'utilisation privilégiée. Une simple valeur déterministe pour ces grandeurs ne suffit pas, étant donné l'incertitude affectant la plupart des paramètres d'entrée. Ce chapitre présente les méthodes destinées à augmenter le niveau de confiance des calculs numériques des observations scalaires et donc des décisions émanant d'une simulation numérique.

Introduction

Dans le cas d'une simulation numérique, deux types d'aléa bien distincts interviennent : il s'agit du niveau d'erreur et du niveau d'incertitude.

L'**erreur** désigne les imperfections numériques de la simulation. Tout d'abord, il est nécessaire de faire appel à une modélisation simplifiée (par exemple avec les équations d'Euler, de Navier-Stokes avec une turbulence moyennée, ...). La discrétisation spatiale ou temporelle est plus ou moins adaptée aux divers phénomènes à capter. Le schéma de résolution utilisé possède un certain niveau de précision dû à son ordre. Le fait de travailler sur une arithmétique à précision finie induit des erreurs de troncature ou d'arrondi. Dans le chapitre 5, on montre comment réduire l'erreur numérique en adaptant le maillage. La résolution de ce type de problème passe généralement par une augmentation du temps de calcul ou du stockage nécessaire.

Au contraire, on parle d'**incertitude** lorsque le manque de maîtrise des phénomènes physiques est en jeu. Par exemple, l'atmosphère réelle n'est pas uniforme. Il faudrait connaître précisément la vitesse du vent, la température ou la densité. Cette incertitude se traduit par une remise en cause des valeurs prises par les paramètres en entrée du code de calcul. Ce chapitre traite précisément de la prise en compte de ce type d'aléa dans les simulations, l'objectif étant de rendre les estimations d'observation plus robustes et donc plus fiables. En particulier,

il faut passer du monde déterministe au monde statistique, ce qui suppose une analyse fine de l'observation scalaire étudiée [DEL00].

Le processus de robustesse de la simulation numérique peut se décomposer en quatre grandes étapes. Parmi la multitude de paramètres d'entrée, il faut commencer par sélectionner les variables considérées comme incertaines. En effet, le fait de considérer le plus possible de variables comme étant incertaines, de peur de passer à côté d'une source d'incertitude, rend l'ensemble du processus non seulement plus coûteux mais aussi moins performant. On comprend donc l'intérêt de bien cibler l'endroit où porte notre méconnaissance. Dans un second temps, il faut quantifier le niveau d'incertitude associé à chacun des paramètres sélectionnés. Le jugement d'expert ou l'utilisation d'une base de données issue d'une série de mesures sont les deux moyens les plus couramment employés pour cette quantification. De même, l'hypothèse d'indépendance des variables est le résultat d'une certaine expertise. Nous laisserons de côté ces deux étapes préliminaires pour nous focaliser sur les deux suivantes. Il s'agit de **la propagation d'incertitude à travers notre code de calcul** puis **la caractérisation du comportement aléatoire des observations** en sortie.

Concernant le comportement de l'aléa de sortie, nous chercherons à reconstruire une loi de probabilité. La connaissance de la loi associée à l'observation permet d'accéder à toutes les informations statistiques utiles. Que ce soit l'écart-type (niveau de dispersion) ou les quantiles (probabilité de défaillance), les critères statistiques usuels se déduisent immédiatement de la loi.

Une étude bibliographique a permis de discerner quatre grandes classes de méthode de propagation d'incertitude. Il s'agit de **la méthode Monte-Carlo**, de **la méthode Monte-Carlo approchée**, du **chaos polynomial** et de **la méthode des moments**. L'objet de cette étude sera de comparer ces différentes approches en terme de compromis coût-précision sur la qualité de la loi construite. Plus spécifiquement, nous nous focaliserons sur l'analyse du chaos et de la méthode des moments. La variante de chaos envisagée correspond à la technique de collocation qui a la particularité d'être non intrusive. L'idée est de calculer la valeur exacte de l'observation en certains points de l'espace des paramètres. Ces points ne sont pas choisis au hasard mais sont représentatifs des lois de probabilité associées. On parle de points de collocation. Un système de pondération lié aux points de collocation permet d'estimer l'aléa affectant l'observation. La méthode des moments consiste à calculer analytiquement les moments statistiques de l'observation sur la base de son développement de Taylor.

Le coût de chacune de ces deux approches est facilement identifiable. Il s'agit du nombre de points de collocation d'une part et de l'ordre du développement de Taylor d'autre part. L'objectif sera de mettre en regard le coût de calcul associé à ces deux approches à précision fixée. La variante Monte-Carlo approchée va nous servir de référence. Cette technique se sert d'un modèle approché de l'observation pour effectuer sa série de tirages aléatoires des paramètres d'entrée. L'aléa de sortie est ensuite construit empiriquement. Evidemment, cette référence n'a de sens que si le modèle approché est précis. Nous nous arrangerons pour être toujours dans cette situation. Le krigeage (technique classique d'interpolation, cf le chapitre 2 de cette thèse) prendra en compte un grand nombre de données exactes d'observation, suffisamment pour rendre l'erreur d'interpolation négligeable devant celle commise par les deux techniques comparées à faible coût de calcul.

Quelque soit la variante de propagation d'incertitude retenue, la méthodologie générale destinée à construire la loi de probabilité de sortie reste la même. La technique de propagation d'incertitude s'attache à calculer les quatre premiers moments statistiques de l'observation. Les deux premiers sont la moyenne et l'écart-type. Les deux autres, moins usités, influencent directement la forme de la distribution. Il s'agit des coefficients d'asymétrie (troisième moment) et d'aplatissement (quatrième moment). Une fois en possession de ces quatre scalaires, le **système de Pearson** propose une loi de probabilité. Bien sûr, d'autres moyens que l'utilisation des moments statistiques peuvent être utilisés pour construire la loi de probabilité de l'observation. En guise d'illustration, citons la détermination de la fonction de répartition à l'aide d'une série de probabilités de défaillance vues comme des solutions à des problèmes d'état-limite [XIA00].

Ce chapitre va commencer par une large présentation du contexte lié à la prise en compte des incertitudes. Après avoir rappelé succinctement des notions élémentaires de statistique, nous détaillerons chacune des quatre grandes classes de méthode dédiées à la propagation d'incertitude (Monte-Carlo, Monte-Carlo approchée, chaos polynomial et méthode des moments). En particulier, nous donnerons l'expression des quatre premiers moments statistiques de l'observation pour chacune de ces quatre approches. Le système de Pearson fait le lien entre moments statistiques et loi de probabilité.

A la suite de cette introduction, le cas-test de l'aile ONERA M6 (problème Euler 3D) va mettre à l'épreuve notre stratégie de prise en compte des incertitudes. A chaque fois, l'observation sera l'une des trois grandeurs aérodynamiques d'intérêt suivantes : traînée, portance ou moment de tangage. Quant aux paramètres incertains, ce seront des variables géométriques, à choisir parmi les angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite et l'épaisseur relative. Ce cas-test fera l'objet de deux études successives. La première est dédiée à la comparaison entre le chaos et la méthode des moments en terme de compromis coût-précision. La seconde partie de l'étude va s'attacher à dévoiler la richesse d'informations qu'offre la détermination de la loi de probabilité de sortie.

1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

1.1 Contexte de l'étude

Nous partons d'une observation scalaire f (ou fonction d'intérêt), vue comme une variable de sortie d'un code de calcul industriel. Un code de calcul est un programme informatique dédié à la résolution d'un système d'équations complexes. A chaque exécution de ce programme, une évaluation de la fonction d'intérêt peut être effectuée. Vouloir connaître la valeur de la fonction f demande donc un certain coût de calcul. Pour pouvoir démarrer la simulation, il est nécessaire d'alimenter le code de calcul par quelques paramètres d'entrée. Nous noterons $x = (x_i)_{1 \leq i \leq N_x}$ le vecteur des N_x variables d'entrée. La relation liant le paramètre vectoriel x à la fonction scalaire f n'est pas explicitement connue. Seul le code de calcul permet de passer de l'un à l'autre. La connaissance du type de dépendance entre x et f se fait donc point par point. Etant donné un point x_0 de l'espace des paramètres d'entrée, la simulation informatique permet de déterminer la valeur $f_0 = f(x_0)$ correspondante de la fonctionnelle d'intérêt. L'hypothèse de base est que la relation $x \rightarrow f(x)$ est injective. A une valeur de paramètre x correspond une et une seule valeur de fonction f .

Etant en **contexte industriel**, l'exécution du code de calcul représente un coût informatique conséquent. Le choix des valeurs de paramètre d'entrée est donc primordial. Dans le but de limiter le nombre d'appels au code, l'utilisateur doit sélectionner les quelques valeurs de paramètre pour lesquelles il souhaite connaître la fonction. L'étude de la fonction d'intérêt est donc bien adaptée au cadre déterministe. Le code de calcul prend des valeurs numériques, donc déterministes, en entrée. Quel comportement adopter si une variable x_a d'entrée est incertaine? Deux cas de figure peuvent être envisagés.

- La variable x_a peut prendre un nombre fini et dénombrable de valeurs possibles. Si ce nombre reste raisonnable (de l'ordre de la centaine pour fixer les idées), il est naturel d'exécuter le code de calcul pour chacune de ces valeurs possibles. On reporte ainsi l'hésitation sur la variable x_a en une hésitation sur la fonction d'intérêt f_a .
- Cette stratégie tombe à l'eau si le nombre de valeurs possibles prises par la variable x_a est jugé trop important pour envisager une résolution complète, comme précédemment. Bien plus, l'incertitude peut faire varier le paramètre x_a sur une certaine plage de variation (nombre infini de valeurs possibles). Dans tous les cas, la problématique est de trouver un moyen de propager l'aléa existant sur la variable d'entrée x_a à travers le code de calcul pour pouvoir caractériser l'incertitude engendrée sur l'observation en sortie. En ce sens, on parle de propagation d'incertitude.

L'objectif est de proposer une méthodologie efficace pour propager l'incertitude. La figure III.1 résume schématiquement la problématique traitée au cours de ce chapitre.

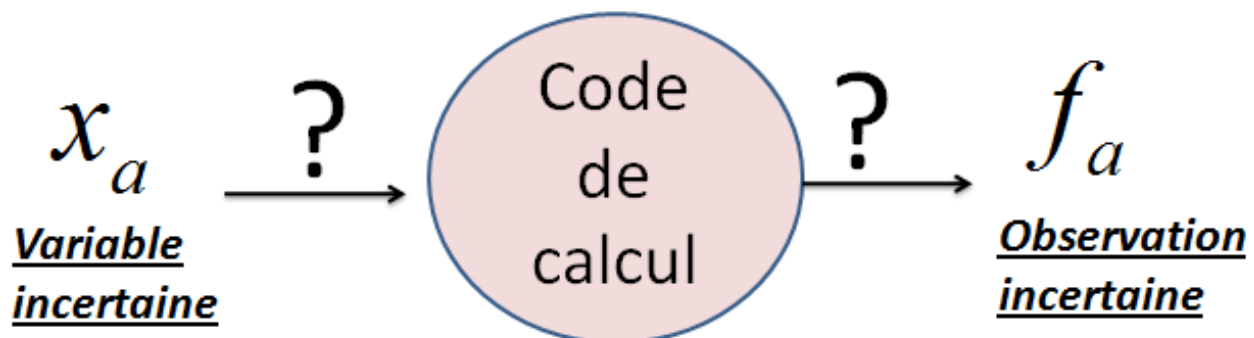


Figure III.1 – Schéma récapitulatif de la problématique de propagation d'incertitude.

Les points d'interrogation rappellent que le passage de la variable x_a à la fonction f_a ne peut plus se faire via une série d'appels au code de calcul. Etant donné l'aléa pesant sur le paramètre x_a , il faut recourir à une stratégie spécifique qui est l'objet de ce chapitre.

Le schéma de la figure III.1 sera complété au fur et à mesure de la présentation générale. Par souci de simplification, nous supposons que la variable incertaine x_a est un scalaire pour notre représentation schématique. Dans la suite, nous envisagerons bien sûr le cas de plusieurs variables incertaines.

La première question qui se pose concerne la manière de caractériser le comportement incertain des variables d'entrée d'une part et de la fonction d'intérêt d'autre part. La section suivante va introduire quelques **outils statistiques** qui serviront à quantifier l'aléa sur un paramètre. En particulier, nous verrons si les variables d'entrée doivent être traitées différemment de l'observation en sortie.

1.2 Outils statistiques pour la quantification de l'incertitude

L'idée de base est de passer du monde déterministe, dans lequel vit habituellement le domaine des simulations numériques, au monde statistique (cf [BIL86], [OUV99] ou [OUV03]). Pour cela, les divers paramètres rencontrés deviennent des variables aléatoires.

Commençons par rappeler la définition théorique d'une variable aléatoire.

On appelle **espace probabilisable** (ou espace mesurable) la donnée d'un couple (Ω, \mathcal{B}) , où Ω est un ensemble et \mathcal{B} une tribu de parties de Ω , c'est à dire un ensemble de parties de Ω contenant Ω et stable pour les opérations de complémentation et de réunion dénombrable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{B} \\ A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B} \\ (A_n)_{1 \leq n \leq +\infty} \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup_{1 \leq n \leq +\infty} A_n \in \mathcal{B} \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on choisit souvent (mais pas nécessairement) comme tribu l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω . Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$ (ce qui sera typiquement notre cas), on choisit généralement la tribu borélienne de \mathbb{R} , notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, qui est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les intervalles de \mathbb{R} de la forme $[a, b]$ (ou de façon équivalente de la forme $[a, b[$, ou encore de la forme $] - \infty, a]$, ...).

La plus petite tribu qui contient un ensemble donné de parties de Ω est appelée la tribu engendrée par cet ensemble. Notons que l'intersection de plusieurs tribus est encore une tribu. Par suite, la tribu engendrée par un ensemble est l'intersection des tribus qui le contiennent.

Un **espace probabilisé** est donné par un triplet (Ω, \mathcal{B}, P) , où (Ω, \mathcal{B}) est un espace probabilisable et P une mesure de probabilité sur \mathcal{B} , i.e. une application définie sur \mathcal{B} et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\emptyset) = 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ \forall (A_n)_{1 \leq n \leq +\infty} \text{ avec } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j, P(\cup_{1 \leq n \leq +\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

où \emptyset désigne l'ensemble vide. On vérifie alors que, pour n'importe quels éléments A et B de la tribu \mathcal{B} , on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

Une **variable aléatoire** X va être associée au triplet de probabilité (Ω, \mathcal{B}, P) . La variable aléatoire X est alors une application de Ω dans \mathbb{R} . Sachant que P est une application de \mathcal{B} dans $[0, 1]$, on définit la **loi de probabilité** de X l'application \mathcal{L}_X définie comme suit :

$$\mathcal{L}_X = P \circ (X^{-1}) \quad (\text{III.4})$$

où X^{-1} n'est pas l'application réciproque (non nécessairement bien définie) mais l'application qui à une partie associe son image réciproque. La loi de probabilité est donc une fonction définie sur l'ensemble des boréliens de \mathbb{R} et à valeurs dans $[0, 1]$. Ainsi, si A est un élément quelconque de la tribu borélienne de \mathbb{R} , le réel $\mathcal{L}_X(A)$ désigne la probabilité pour que X soit dans A .

A partir de là, on peut introduire la fonction habituellement utilisée pour représenter visuellement une loi de probabilité. Il s'agit de la fonction de densité de probabilité f_X , associée à la variable aléatoire X . La densité de probabilité, qui va de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , peut être vue comme la limite de la probabilité que X se trouve dans un intervalle dont la longueur tend vers 0.

$$f_X(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(t - \epsilon \leq X \leq t + \epsilon) \quad (\text{III.5})$$

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

La notion de limite est essentielle, sachant que la probabilité $P(x = t)$ est nulle pour une variable aléatoire continue. Le tracé de f_X donne une idée de la répartition de la probabilité associée à la variable X .

Une autre application revêt une importance toute particulière dans le domaine des statistiques. Il s'agit de la **fonction de répartition** F_X , associée à la variable aléatoire X . La fonction de répartition va de l'ensemble \mathbb{R} des réels vers l'intervalle $[0,1]$. Son expression est donnée ci-dessous.

$$F_X(t) = \mathcal{L}_X(]-\infty, t]) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{III.6}$$

De manière équivalente, on peut écrire F_X en terme de probabilité. La grandeur $F_X(t)$ représente la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure ou égale au réel t .

$$F_X(t) = P(X \leq t) \tag{III.7}$$

Une fonction quelconque F est une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire si et seulement si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées.

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ est croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } [0,1]. \\ F(x) \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty. \\ F(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty. \\ F \text{ est continue à droite en tout point.} \end{array} \right. \tag{III.8}$$

Notons que la donnée de F_X détermine la loi \mathcal{L}_X de façon unique.

Les deux fonctions (f_X, F_X) permettent donc de représenter visuellement la loi de probabilité \mathcal{L}_X suivie par la variable aléatoire X . Ces deux courbes sont tracées pour la loi normale¹ centrée réduite (ie la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type unitaire) et la loi uniforme d'intervalle $[-1,1]$ (figure III.2). Une visualisation avec deux axes des ordonnées est adoptée. L'axe de gauche se rapporte à la fonction de densité alors que celui de droite est associé à la fonction de répartition. Nous respecterons cette convention tout au long de notre étude.

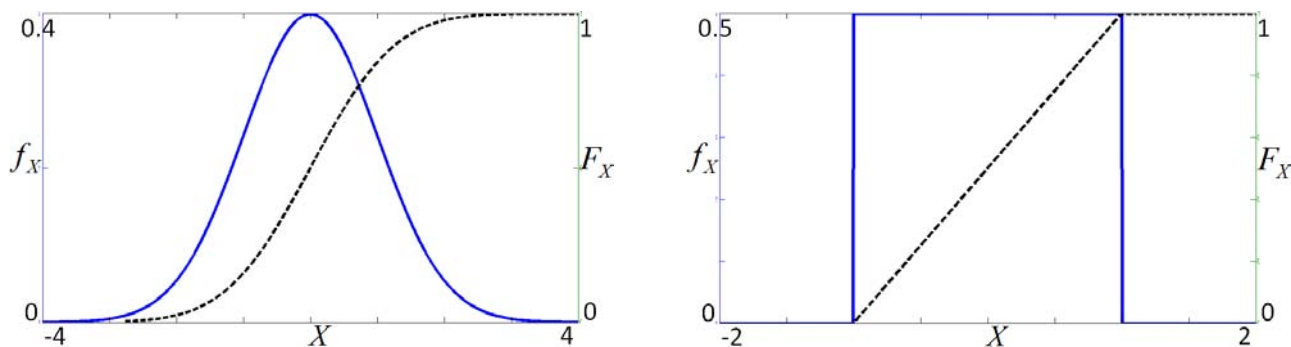


Figure III.2 – Représentations de la fonction de densité (trait continu bleu) et de la fonction de répartition (trait pointillé noir) pour la loi normale centrée réduite (à gauche) et la loi uniforme d'intervalle $[-1,1]$ (à droite).

Pour caractériser numériquement une loi de probabilité, nous ferons appel à deux types d'information, à savoir les **moments statistiques** et les **quantiles**. Présentons-les succinctement.

1. Rappelons que la loi normale peut également prendre le nom de loi Gaussienne.

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

La base de la définition d'un moment statistique est l'**espérance mathématique** E . L'opérateur E s'obtient en prenant l'intégrale sur \mathbb{R} de l'entier x pondéré par la densité de probabilité f_X .

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{III.9})$$

Les moments associés à une variable aléatoire sont des constantes (éventuellement en nombre infini) classées suivant un certain ordre. Cet ordre est proportionnel à l'importance de l'information que le moment fournit sur la loi. Le moment d'ordre n est égal à l'espérance mathématique de notre variable aléatoire prise à la puissance n . On parle de moment non centré si notre variable est de moyenne non nulle et de moment centré dans le cas inverse. Dans toute la suite, nous désignerons par μ_n (resp. μ'_n) la version centrée (resp. décentrée) du moment d'ordre n , s'écrivant de manière générale :

$$\begin{cases} \mu'_n = E[X^n] & \forall n \geq 1 \\ \mu_n = E[(X - \mu'_1)^n] & \forall n \geq 2 \end{cases}$$

où E est l'espérance. Bien sûr, cette dernière formule s'applique pour les moments d'ordre n strictement supérieur à un. Pour le moment d'ordre 1, on se contente de prendre l'espérance de notre quantité :

$$\mu'_1 = \mu_1 = E[X]$$

D'après Pearson ([PEA95], [PEA01] ou [PEA16]), **les quatre premiers moments** permettent de caractériser la plupart des distributions connues. La détermination de ces quatre scalaires autorise une vision très fine de l'aspect de la distribution recherchée. Passons donc en revue ces quatre premiers moments. Pour chacun d'eux, on donne l'expression d'une grandeur adimensionnée dont on fournit l'interprétation concernant la loi de probabilité associée.

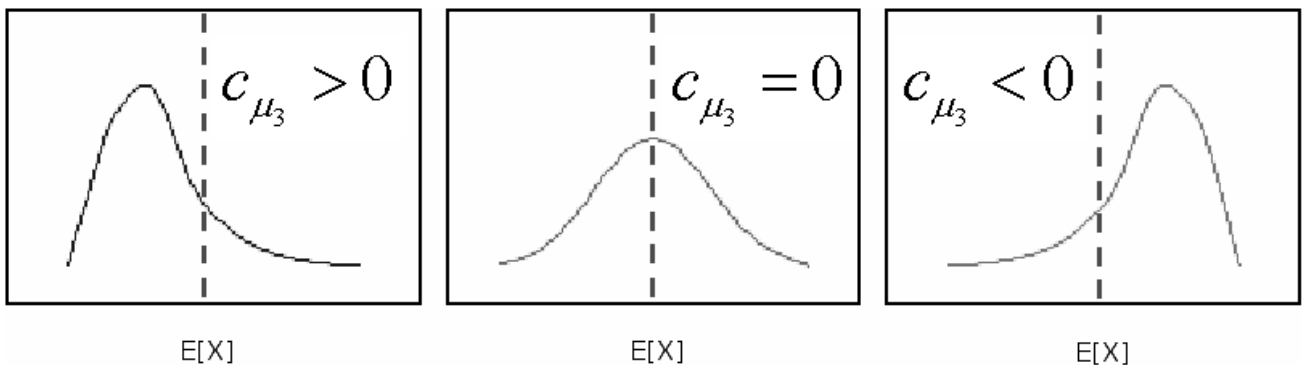


Figure III.3 – Effets du coefficient d'asymétrie sur la forme de la distribution.

- Le **premier moment** μ_1 est simplement la **moyenne** de notre variable aléatoire. Il s'agit donc de la valeur la plus vraisemblable parmi l'ensemble des valeurs possibles. Dans un souci d'adimensionnalisation et dans le cas d'une variabilité par perturbation autour d'une valeur nominale μ_0 , on définit le quotient c_{μ_1} suivant :

$$c_{\mu_1} = \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

L'écart de ce coefficient vis-à-vis de 1 nous indique l'importance du biais de notre incertitude vue comme une perturbation.

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

- Le **second moment** μ_2 , positif, est la **variance**, c'est-à-dire **l'écart-type au carré** de la distribution. On lui associe le **coefficient de variation** c_{μ_2} , sans dimension, égal au quotient de l'écart-type sur la moyenne (en valeur absolue) :

$$c_{\mu_2} = \frac{\sqrt{\mu_2}}{|\mu_1|}$$

La valeur de ce coefficient est une mesure du niveau de dispersion de la variable aléatoire en question. Plus ce coefficient est grand, plus la dispersion est importante.

- Le **troisième moment** μ_3 est une mesure de la symétrie de la distribution. On lui associe le **coefficient d'asymétrie** (ou asymétrie tout court, *skewness* en anglais) c_{μ_3} (figure III.3) qui est une grandeur sans dimension définie comme suit :

$$c_{\mu_3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

Ce coefficient est nul dans le cas d'une distribution symétrique. En revanche, il est positif si la loi est dissymétrique à gauche (ie avec une queue de probabilité s'étalant à droite) et négatif pour une dissymétrie à droite. Bien sûr, la valeur du coefficient est importante non seulement par son signe, mais aussi du point de vue de sa valeur absolue, qui donne une quantification du niveau de symétrie de la loi étudiée.

- Le **quatrième moment** μ_4 , quant à lui, renseigne sur le degré de concentration autour de la moyenne et, du même coup, sur le comportement de la loi aux extrémités. Il permet de se faire une idée sur le type de décroissance des queues de probabilité. Il est positif. Le coefficient adimensionné c_{μ_4} associé (figure III.4), appelé **coefficient d'aplatissement** (ou aplatissement tout court, *kurtosis* en anglais), s'écrit :

$$c_{\mu_4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Ce coefficient est lui aussi toujours positif. La valeur de référence (égale à trois) est celle correspondant à la loi normale. Ainsi, si le coefficient d'aplatissement est strictement supérieur à trois, cela signifie que la distribution est plus pointue que la loi normale tandis que, dans le cas où ce coefficient est strictement inférieur à trois, on sait que la distribution est plus aplatie que la loi normale. Le raisonnement se fait bien sûr à écart-type fixé.

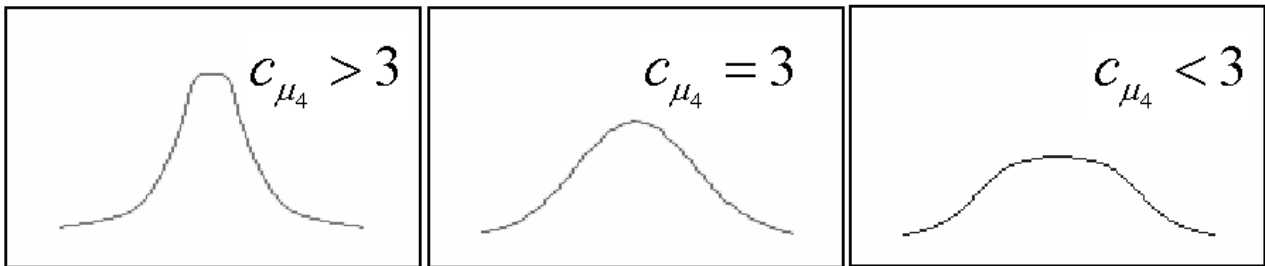


Figure III.4 – Effets du coefficient d'aplatissement sur la forme de la distribution.

En particulier, les deux derniers moments, moins usités, servent à différencier la distribution d'une loi normale. Leur détermination reste essentielle pour la raison suivante. Les études d'incertitude se font généralement sur des formes optimisées pour lesquelles certaines observations (comme le coefficient de traînée dans le cas de l'incidence incertaine) peuvent être proches d'un minimum. La loi normale est alors mal adaptée car le comportement des variations en sortie se révèle non symétrique.

Les moments statistiques permettent de décrire globalement la loi de probabilité. Au contraire, les **quantiles** donnent une information locale.

Soit q un entier strictement compris entre 0 et 1 ($q \in]0, 1[$). On appelle q -quantile $Q_{100q\%}$ (ou quantile à $100q$ pour cent) le réel vérifiant la relation suivante :

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

$$P(X \leq Q_{100q\%}) = q$$

En fait, le quantile s'exprime plus aisément en utilisant la fonction de répartition F_X .

$$Q_{100q\%} = \text{inf}(x, F_X(x) \geq q)$$

La fonction F_X étant une fonction strictement croissante sur une certaine restriction de \mathbb{R} , la fonction inverse F_X^{-1} a un sens. Les quantiles sont alors simplement déterminés par cette fonction inverse.

$$Q_{100q\%} = F_X^{-1}(q)$$

Plus le réel q est proche de 0 ou de 1, plus le quantile $Q_{100q\%}$ se rattache aux probabilités extrêmes (ou queues de probabilité). Au contraire, si q est proche de 0.5, alors le quantile $Q_{100q\%}$ nous renseigne sur le comportement moyen de la variable aléatoire X .

Dans toute la suite de ce chapitre, nous nous focaliserons sur les sept quantiles décrits ci-dessous.

- La médiane $Q_{50\%}$.
- Les quartiles $Q_{25\%}$ et $Q_{75\%}$.
- Deux centiles $Q_{1\%}$ et $Q_{99\%}$.
- Deux autres quantiles extrêmes $Q_{5\%}$ et $Q_{95\%}$.

Ces sept quantiles ($Q_{1\%}, Q_{5\%}, Q_{25\%}, Q_{50\%}, Q_{75\%}, Q_{95\%}, Q_{99\%}$) résument assez bien les différents niveaux d'information fournis par la loi de probabilité \mathcal{L}_X . On a en effet une évaluation non seulement du comportement moyen (quantiles $Q_{25\%}, Q_{50\%}$ et $Q_{75\%}$) mais aussi du comportement extrême (quantiles $Q_{1\%}, Q_{5\%}, Q_{95\%}$ et $Q_{99\%}$) de la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X .

Pour résumer, quatre types d'information permettent de décrire la loi de probabilité \mathcal{L}_X suivie par une certaine variable aléatoire X .

- La **fonction de densité de probabilité** f_X et la **fonction de répartition** F_X caractérisent visuellement la loi suivie par X .
- Les **moments statistiques** μ_i (en particulier les quatre premiers, notés $(c_{\mu_1}, c_{\mu_2}, c_{\mu_3}$ et $c_{\mu_4})$ sous forme adimensionnée) et les **quantiles** $Q_{100q\%}$ (spécialement les sept quantiles $Q_{1\%}, Q_{5\%}, Q_{25\%}, Q_{50\%}, Q_{75\%}, Q_{95\%}$ et $Q_{99\%}$) décrivent numériquement la loi \mathcal{L}_X . Dans toute la suite, nous allons nous restreindre aux quatre premiers moments et aux sept quantiles que l'on vient de présenter.

On reprend le tracé des fonctions de densité et de répartition pour la loi normale centrée réduite et la loi uniforme d'intervalle $[-1,1]$. Les sept quantiles sont rajoutés sur chacune de ces deux représentations visuelles (figure III.5).

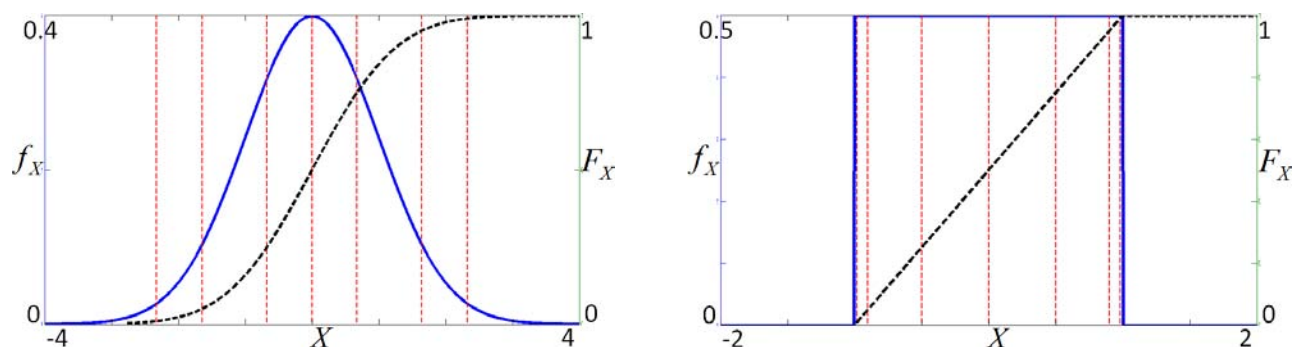


Figure III.5 – Représentations de la fonction de densité (trait continu bleu) et de la fonction de répartition (trait pointillé noir) pour la loi normale centrée réduite (à gauche) et la loi uniforme d'intervalle $[-1,1]$ (à droite) avec la position des sept quantiles (traits pointillés verticaux rouges).

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

Revenons donc à notre cas d'étude, lié à la propagation d'incertitude au travers d'un code de calcul industriel. Les variables d'entrée x_a et de sortie f_a deviennent donc des variables aléatoires (X_a et F_a). Classiquement, les lettres majuscules s'appliquent prioritairement aux variables aléatoires tandis que les lettres minuscules sont plutôt dédiées aux variables déterministes.

Nous supposons que l'incertitude associée à chacune des variables aléatoires X_a d'entrée est connue. L'idéal est bien sûr de disposer d'une expression analytique de la densité de probabilité. S'il s'agit d'une loi connue, les diverses informations statistiques précédemment décrites (quantiles, moments, fonction de répartition, ...) sont alors immédiatement disponibles car tabulées.

Bien sûr, en pratique, le fait d'associer une certaine loi de probabilité à la variable d'entrée X_a n'est pas anodin. Nous ne rentrerons pas dans cette problématique. Il s'agit d'un travail d'expert, demandant une certaine expérience et maîtrise des phénomènes à la base de l'incertitude en question. De plus, l'aléa affectant le paramètre x_a peut être vu comme une perturbation autour d'une valeur fixe $x_{a,0}$, appelée aussi valeur nominale. On peut donc écrire :

$$X_a = x_{a,0} + \Delta X$$

où ΔX est une variable aléatoire de perturbation. Nous supposons donc connue la distribution de probabilité associée à ΔX .

Nous nous focaliserons plutôt sur la description de la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire F_a de sortie. Comme pour la variable d'entrée, l'aléa affectant l'observation est assimilable à une perturbation aléatoire.

$$F_a = f_{a,0} + \Delta F$$

où ΔF désigne la variable aléatoire dont on cherche à déterminer la loi et $f_{a,0}$ est la valeur nominale, avec bien sûr la relation $f_{a,0} = f_a(x_{a,0})$.

Ne connaissant pas de manière explicite la relation de dépendance entre X_a et F_a , il n'est pas possible de déterminer la loi de probabilité exacte associée à l'observation aléatoire F_a . L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthodologie efficace destinée à construire une approximation de l'incertitude en sortie la plus cohérente possible. Nous précisons évidemment les moyens utilisés pour mesurer la cohérence des résultats au cours des sections suivantes.

Deux niveaux de connaissance sur la loi de probabilité suivie par F_a peuvent être souhaités.

- Le **premier niveau** correspond à l'évaluation d'une information ne nécessitant pas la détermination d'une loi de probabilité. L'exemple le plus courant consiste à vouloir mesurer le degré de dispersion de la loi de sortie, afin de construire des bornes d'erreur. Pour cela, on peut juste se contenter d'estimer l'écart-type associé à F_a . La loi de probabilité n'est donc pas nécessaire. Bien souvent, on se contente d'une étude de sensibilité sur la base des gradients de l'objectif [TUR02]. Cette stratégie possède deux défauts majeurs : elle ne renseigne pas sur l'aléa à l'intérieur de l'intervalle et elle se heurte à la difficulté de définir précisément les valeurs extrêmes ([KOY95], [MOO66]).
- Le **second niveau** est plus ambitieux. Il s'agit d'approximer la loi de probabilité et non plus une information partielle [JAM06]. Une telle approximation est nécessaire en contexte multi-disciplinaire. La propagation d'incertitude de X_a jusqu'à F_a n'est alors qu'une étape intermédiaire s'inscrivant dans un processus plus large. Par exemple, la variable de sortie F_a peut ensuite alimenter un second code de calcul afin de déterminer une nouvelle observation de sortie. Dans ce cas, l'idée est d'avoir accès au même niveau de connaissance entre les données d'entrée X_a et de sortie F_a , sachant qu'une variable d'entrée peut devenir une variable de sortie et inversement. Dans toute la suite de l'étude, nous nous placerons à ce niveau de connaissance requis. L'objectif est donc d'estimer la loi de probabilité suivie par F_a .

La figure III.6 vient compléter notre schéma récapitulatif, en précisant les informations associées à la variable d'entrée X_a et à l'observation de sortie F_a .

Nous passons maintenant à la description des diverses méthodes de propagation d'incertitude existant dans la littérature. Une analyse des points forts et faibles sera menée pour chacune d'entre elles, sachant que le contexte d'utilisation est la propagation d'incertitude multi-disciplinaire en milieu industriel.

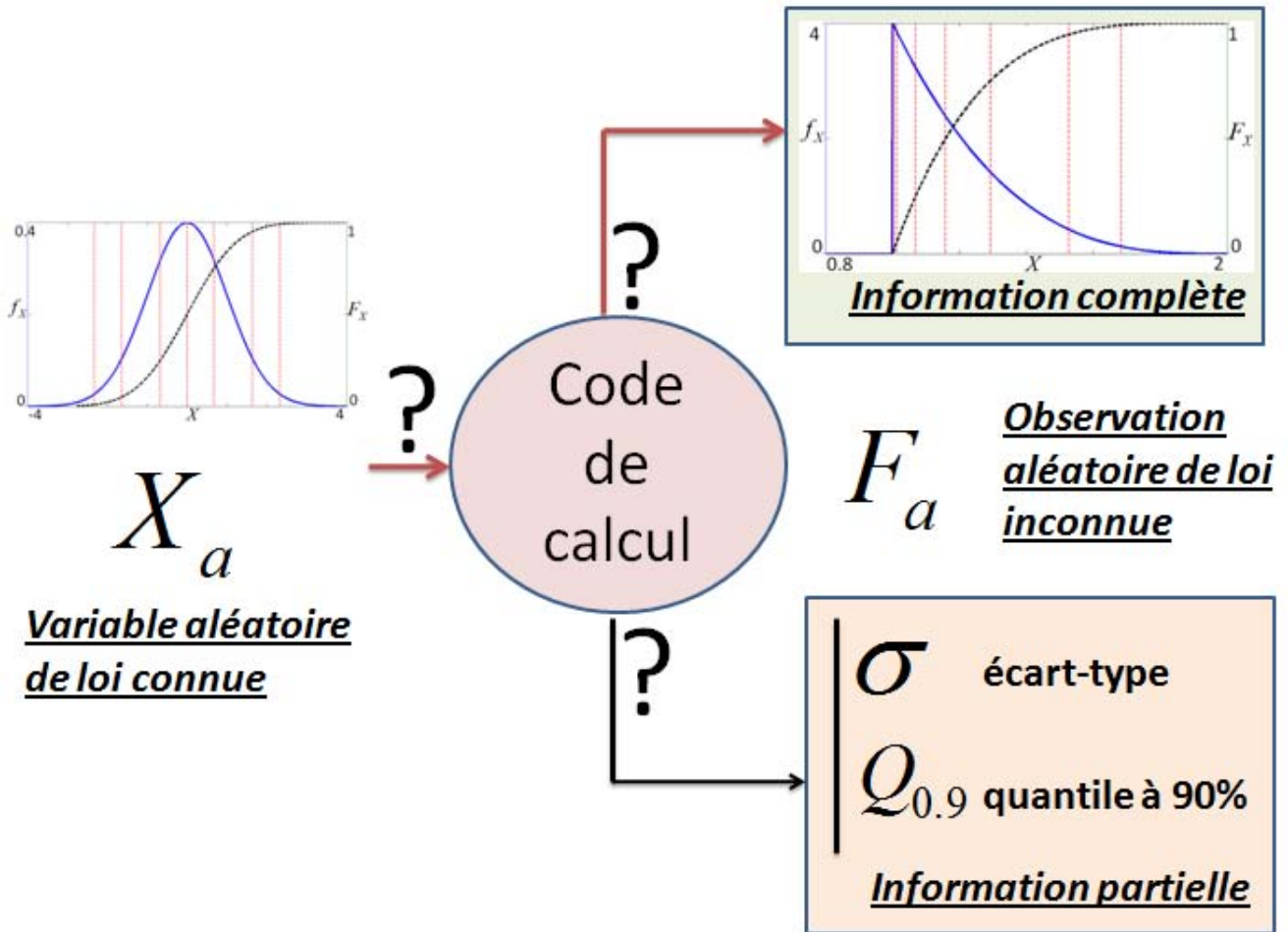


Figure III.6 – Schéma récapitulatif de la problématique de propagation d’incertitude, avec les deux niveaux d’approximation de l’aléa affectant l’observation (le chemin rouge sera retenu pour la suite de l’étude).

1.3 Méthodes de propagation d’incertitude

Nous allons analyser les différentes techniques de propagation d’incertitude existant dans la littérature. Une recherche bibliographique sur le sujet a permis de discerner quatre grandes classes de méthode dont voici la liste.

- La **méthode Monte-Carlo**.
- La **méthode Monte-Carlo approchée**.
- La **méthode du chaos polynomial** (il en existe plusieurs variantes).
- La **méthode des moments** (également appelée technique de perturbation).

Nous rappelons que l’objectif d’une méthode de propagation d’incertitude est de construire une approximation de la loi de probabilité associée à une observation en sortie d’un code de calcul. La loi associée à chacun des paramètres incertains d’entrée est supposée connue. Par contre, le lien de dépendance entre les variables d’entrée et l’observation n’est pas explicitement connu. Il faudra donc proposer **une distribution de probabilité pour l’observation en limitant au maximum le nombre d’appels au code de calcul**.

Lors de l’analyse d’une méthode de propagation d’incertitude, nous précisons les points suivants.

- Les expressions des moments statistiques associés à l’observation seront explicitées, plus précisément les quatre premiers d’entre eux (μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4). Une méthodologie existe pour construire une distribution de probabilité cohérente avec les quatre premiers moments calculés : il s’agit du système de Pearson. Les

données d'entrée du système de Pearson seront plutôt écrites sous la forme suivante : μ_1 , σ , c_{μ_3} et c_{μ_4} . Dans l'ordre, nous reconnaissons la moyenne, l'écart-type et les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. L'annexe D de cette thèse décrit le principe du système de Pearson et procède à certaines reconstructions de lois connues en guise de validation. Dans toute la suite, nous nous servirons de cette technique pour construire une loi de probabilité à partir des moments statistiques.

- On décrira la (ou les) méthodologie retenue pour passer d'une distribution de probabilité en entrée du code de calcul à une distribution associée à l'observation en sortie.
- Les principaux avantages et inconvénients seront évoqués. Pour chacune des méthodes, nous parlerons du caractère plus ou moins intrusif, du coût de calcul (notamment lorsque le nombre de paramètres incertains augmente) ainsi que du niveau de précision attendu.

Commençons par présenter les méthodes de propagation d'incertitude retenues.

1.3.1 Technique Monte-Carlo

Le principe de base de la méthode Monte-Carlo (cf [MET49]) est fort simple. Il s'agit d'effectuer un ensemble de tirages concernant les variables incertaines en entrée du code. Pour chacun de ces tirages, on détermine la valeur de l'observation correspondante en appelant le code de calcul. Ainsi, disposant d'une base de données sur les valeurs d'observation, il est possible d'accéder aux informations de type visuel (densité de probabilité) ou numérique (moments statistiques).

Concernant l'obtention de la densité de probabilité, nous allons faire appel à **un histogramme**. Pour construire un histogramme, il suffit de discrétiser régulièrement l'intervalle de définition de l'observation traitée en sous-intervalles puis de compter le nombre de données de notre base qui se trouvent dans chacun de ces sous-intervalles. On construit ainsi une courbe en escaliers qui approxime la densité de probabilité continue. Pour fixer les idées, nous reprenons le cas de la loi normale centrée réduite et de la loi uniforme d'intervalle $[-1,1]$. Avec dix milles tirages, la figure III.7 montre l'histogramme issu de la méthode Monte-Carlo. On vérifie bien la conformité de ces approximations avec les courbes exactes, également fournies en figure III.7.

Quant à l'obtention des moments, il suffit d'utiliser la version discrète et tronquée de l'espérance E .

Notons $(x_{a,i}^{(MC)})_{1 \leq i \leq N_{MC}}$ le résultat des N_{MC} tirages de la variable aléatoire X_a (MC pour Monte-Carlo, évidemment). Ces tirages sont fournis par un générateur de nombre aléatoire respectant la loi de probabilité suivie par la variable X_a . On rappelle que le postulat de base est que cette loi est connue.

Le code de calcul fournit les valeurs de l'observation aléatoire F_a correspondant à l'ensemble des tirages effectués sur la variable d'entrée X_a . On se retrouve donc avec un ensemble de N_{MC} valeurs d'observation, noté $(f_{a,i}^{(MC)})_{1 \leq i \leq N_{MC}}$.

L'espérance exacte (en version discrète) $E[F_a]$ de l'observation aléatoire F_a serait obtenue en considérant un nombre infini de tirages (N_{MC} tendant vers $+\infty$).

$$E[F_a] = \lim_{N_{MC} \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} f_{a,i}^{(MC)}$$

Ne disposant jamais d'une infinité de données, on tronque l'expression précédente en omettant la notion de limite. L'espérance $E^{(MC)}[F_a]$ ainsi calculée est une approximation de l'espérance exacte.

$$E^{(MC)}[F_a] = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} f_{a,i}^{(MC)}$$

On rappelle l'expression des moments centrés $\mu_r^{(MC)}[F_a]$ associés à l'observation aléatoire F_a .

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

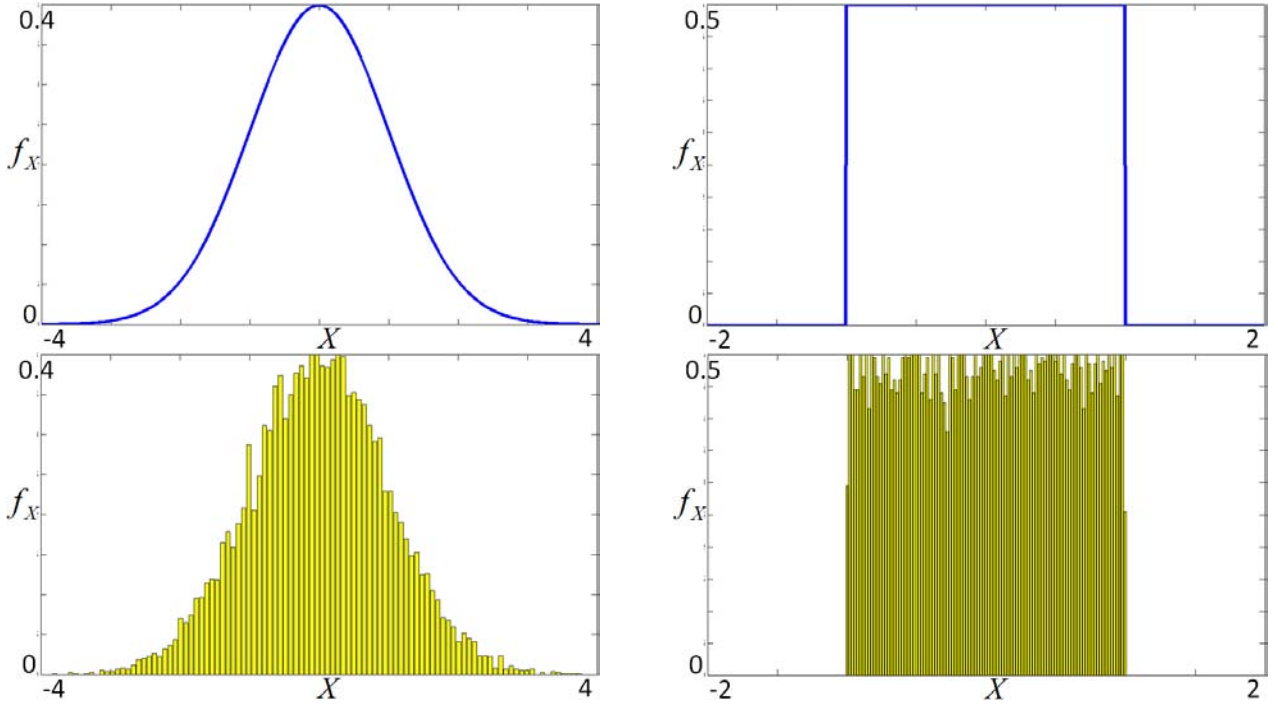


Figure III.7 – Représentations des fonctions de densité exactes (figures du haut) et reconstruites en histogramme via la méthode Monte-Carlo avec dix milles tirages (figures du bas) pour la loi normale centrée réduite (à gauche) et la loi uniforme d'intervalle $[-1,1]$ (à droite).

$$\begin{cases} \mu_1^{(MC)}[F_a] = E^{(MC)}[F_a] \\ \mu_r^{(MC)}[F_a] = E^{(MC)}[(F_a - \mu_1^{(MC)}[F_a])^r] ; \quad \forall r \geq 2 \end{cases}$$

En nous restreignant aux quatre premiers moments, il vient :

$$\begin{cases} \mu_1^{(MC)}[F_a] = E^{(MC)}[F_a] \\ \mu_2^{(MC)}[F_a] = E^{(MC)}[(F_a - \mu_1^{(MC)}[F_a])^2] \\ \mu_3^{(MC)}[F_a] = E^{(MC)}[(F_a - \mu_1^{(MC)}[F_a])^3] \\ \mu_4^{(MC)}[F_a] = E^{(MC)}[(F_a - \mu_1^{(MC)}[F_a])^4] \end{cases}$$

ou, en fonction des moments non centrés $\mu_r^{(MC)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(MC)}[F_a] = \mu_1'^{(MC)}[F_a] \\ \mu_2^{(MC)}[F_a] = \mu_2'^{(MC)}[F_a] - \mu_1'^{(MC)}[F_a]^2 \\ \mu_3^{(MC)}[F_a] = \mu_3'^{(MC)}[F_a] + 2\mu_1'^{(MC)}[F_a]^3 - 3\mu_2'^{(MC)}[F_a]\mu_1'^{(MC)}[F_a] \\ \mu_4^{(MC)}[F_a] = \mu_4'^{(MC)}[F_a] - 3\mu_1'^{(MC)}[F_a]^4 - 4\mu_3'^{(MC)}[F_a]\mu_1'^{(MC)}[F_a] + 6\mu_2'^{(MC)}[F_a]\mu_1'^{(MC)}[F_a]^2 \end{array} \right.$$

Dès lors, l'approximation intervient au niveau du calcul des moments non centrés. On utilise toujours la version discrète et tronquée de l'espérance, sur la base de nos N_{MC} tirages.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1'^{(MC)}[F_a] = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} f_{a,i}^{(MC)} \\ \mu_2'^{(MC)}[F_a] = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} (f_{a,i}^{(MC)})^2 \\ \mu_3'^{(MC)}[F_a] = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} (f_{a,i}^{(MC)})^3 \\ \mu_4'^{(MC)}[F_a] = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} (f_{a,i}^{(MC)})^4 \end{array} \right.$$

Ainsi, la technique Monte-Carlo propose une approximation de la densité de probabilité (via l'histogramme) et des moments statistiques (notés $\mu_r^{(MC)}[F_a]$) associés à la variable aléatoire de sortie F_a . Deux stratégies sont donc possibles pour la propagation d'incertitude avec Monte-Carlo.

- La distribution de probabilité de sortie est directement approchée par l'histogramme.
- Les quatre moments statistiques sont utilisés pour construire une loi de probabilité grâce au système de Pearson.

Ces deux méthodologies seront envisagées dans la suite de l'étude. En particulier, la comparaison entre les deux résultats obtenus permettra de vérifier le bon comportement de la reconstruction d'une loi de probabilité par Pearson.

Toute la question est de savoir le nombre N_{MC} de tirages qu'il faut considérer pour que la loi de probabilité construite soit fiable. Notre critère de confiance sera basé sur la précision des quatre premiers moments statistiques. Pour établir le seuil de tolérance associé à ces quatre moments, nous nous servons du système de Pearson. Ainsi, les écarts acceptables sur chacun des quatre moments statistiques correspondront aux écarts de moment engendrant des distributions de Pearson proches. En annexe D (dédiée à l'étude du système de Pearson), nous précisons ce que signifie la proximité de deux distributions de probabilité.

Pour commencer, il est légitime de se demander à quelle vitesse les quatre moments statistiques $(\mu_r^{(MC)})_{1 \leq r \leq 4}$ convergent lorsque le nombre N_{MC} de tirages augmente. Ces estimateurs sont de nature probabiliste. Il faut donc recourir à des techniques d'évaluation de convergence adaptées à de telles grandeurs statistiques. Pour évaluer la qualité de l'approximation de ces estimateurs probabilistes (à savoir les quatre premiers moments statistiques $(\mu_r^{(MC)})_{1 \leq r \leq 4}$), on peut utiliser deux moyens hérités des statistiques. Tout d'abord, en prenant l'espérance du moment étudié, on détermine l'erreur systématique (ou biais) entâchant la convergence. On trouve que :

$$E[\mu_r^{(MC)}] = \mu_r + o(1) \quad ; \quad \forall r \geq 1$$

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

Ainsi, l'erreur systématique commise est en $o(1)$. Notons qu'il est possible de supprimer ce biais en modifiant légèrement l'expression du moment statistique. Par exemple, à l'ordre 2, $\mu_2^{(MC)}$ présente un biais tandis que $\frac{N_{MC}}{N_{MC}-1}\mu_2^{(MC)}$ n'en admet plus.

Par ailleurs, la vitesse de convergence est évaluée par mesure de la dispersion obtenue en prenant la variance du moment statistique. On peut montrer que [KEN77] :

$$Var[\mu_r^{(MC)}] = \frac{1}{N_{MC}}(\mu_{2r} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2 - 2r\mu_{r+1}\mu_{r-1}) + o\left(\frac{1}{N_{MC}}\right) ; \quad \forall r \geq 1$$

La vitesse de convergence étant évaluée via l'écart-type (égal à la racine carrée de la variance), on peut dire que la convergence s'effectue proportionnellement à $\frac{1}{\sqrt{N_{MC}}}$. Le point fondamental est que cette vitesse de convergence est indépendante de l'ordre du moment statistique étudié. Seule la constante multiplicative (égale à $\mu_{2r} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2 - 2r\mu_{r+1}\mu_{r-1}$) diffère. Ainsi, d'un moment statistique à l'autre, la précision peut ne pas être la même à nombre de tirages équivalent, à cause de cette constante multiplicative. En revanche, la vitesse de décroissance de l'erreur commise sur n'importe quel moment est identique. Pour plus de détails sur l'étude de convergence des quatre premiers moments statistiques, nous renvoyons le lecteur aux annexes F et G de cette thèse.

Il reste à proposer un ordre de grandeur pour le nombre N_{MC} de tirages aléatoires à effectuer pour la méthode Monte-Carlo. Les résultats de l'annexe D fixent à 10^{-2} le seuil de tolérance sur les écarts des deux premiers moments statistiques et à $5 \cdot 10^{-2}$ le seuil de tolérance sur les écarts des troisième et quatrième moments. Nous raisonnerons plus particulièrement sur les grandeurs $(c_{\mu_1}, c_{\mu_2}, c_{\mu_3}, c_{\mu_4})$ (version adimensionnée des moments). Il n'est pas envisageable d'étudier la totalité des distributions de probabilité pour estimer le nombre de tirages minimal. L'idée est donc de se focaliser sur les distributions les plus courantes, à savoir la loi normale et la loi uniforme. Voici les paramètres envisagés pour ces deux lois.

- La moyenne et l'écart-type de la loi normale seront tous deux fixés à 1. Les valeurs théoriques des quatre scalaires $(c_{\mu_1}, c_{\mu_2}, c_{\mu_3}, c_{\mu_4})$ sont égales à $(1, 1, 0, 3)$.
- L'intervalle de définition de la loi uniforme sera l'intervalle $[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$. Il correspond également à une moyenne et un écart-type unitaires. Avec une telle loi, les grandeurs $(c_{\mu_1}, c_{\mu_2}, c_{\mu_3}, c_{\mu_4})$ valent $(1, 1, 0, 1.8)$.

Connaissant les valeurs théoriques des moments statistiques, l'erreur absolue correspond simplement à la différence absolue entre la valeur théorique d'une part et la valeur estimée par Monte-Carlo d'autre part. L'erreur absolue sur les quatre premiers moments $(c_{\mu_1}, c_{\mu_2}, c_{\mu_3}, c_{\mu_4})$ va être tracée pour les lois normale et uniforme en fonction du nombre de tirages effectués. Ces erreurs seront notées respectivement $(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, e_{\mu_3}, e_{\mu_4})$. On prendra successivement $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 tirages aléatoires. Or, une évaluation de moment n'est pas de nature déterministe. Pour garantir la robustesse des évolutions, chaque calcul de moment sera la moyenne des résultats obtenus avec différents jeux de tirages aléatoires (typiquement 10 et 20).

Les décroissances des quatre premiers moments associés aux lois normale et uniforme sont fournies par la figure III.8 (en échelle logarithmique).

Plusieurs remarques peuvent être formulées à la vue de ces courbes d'évolution des moments statistiques.

- Les évolutions de moment obtenues sont assez robustes. Les différences visuelles entre les courbes utilisant 10 et 20 jeux de tirages aléatoires restent peu marquées, en comparaison de l'évolution globale.
- Conformément à la théorie, les courbes sont quasiment linéaires. En particulier, la vitesse de convergence est la même d'un moment à l'autre ou d'une loi à l'autre. Seule la position de la courbe diffère, via une opération de translation.
- Il s'avère que, plus le moment statistique est d'ordre élevé, plus il faut de tirages aléatoires pour aboutir à un niveau de précision donné. Par exemple, pour la loi uniforme, on passe d'un écart de $2 \cdot 10^{-3}$ à 10^{-2} avec 10^5 tirages, en passant du premier au quatrième moment.
- Le nombre minimal de tirages permettant aux erreurs de descendre en-deçà du seuil de tolérance (égal à $5 \cdot 10^{-2}$) est de l'ordre de 10^4 . Dix mille tirages sont donc souhaitables pour avoir confiance dans les résultats issus de Monte-Carlo.

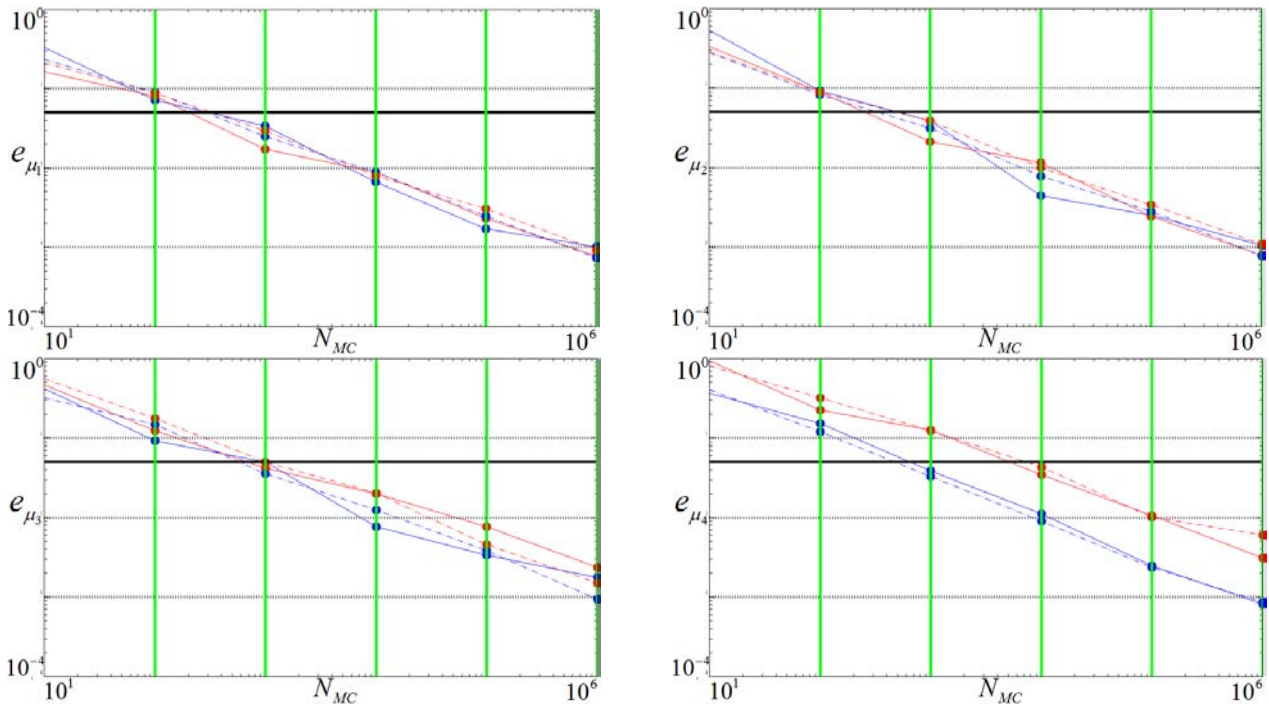


Figure III.8 – Evolutions de l’erreur absolue (en échelle logarithmique) sur les quatre premiers moments ($e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, e_{\mu_3}, e_{\mu_4}$) (de gauche à droite et de haut en bas) estimés par la technique Monte-Carlo en fonction du nombre N_{MC} de tirages aléatoires, pour la loi normale (en bleu) et uniforme (en rouge) sur la base de 10 (traits pleins) et 20 (traits pointillés) jeux de tirages différents. Le trait noir horizontal plein marque le seuil de tolérance.

Ainsi, la méthode Monte-Carlo présente l’avantage d’être intuitive, précise et non intrusive (le code de calcul n’est pas modifié). De plus, aucune connaissance des lois suivies par les paramètres d’entrée n’est nécessaire. Il suffit d’avoir à disposition une base de données sur les valeurs prises par les paramètres d’entrée incertains. Cette base peut être issue, par exemple, d’une série de mesures.

Par contre, cette méthode est inapplicable dans un contexte industriel car trop coûteuse. En effet, pour être pertinente, la méthode demande au moins dix milles simulations, ce qui est complètement prohibitif. Pour finir, voici quelques remarques sur la méthode Monte-Carlo. Des techniques de réduction de coût peuvent être employées (*Latin Hypercube* [MCK00], réduction de variance [KAH53], méthode de tir [BRO97], échantillonnage préférentiel [KAH56], ...). Le coût reste néanmoins trop important dans un contexte industriel. Par ailleurs, il faut disposer d’un bon générateur aléatoire pour effectuer les tirages. De la qualité du générateur dépend l’efficacité de la méthode Monte-Carlo.

La figure III.9 récapitule le principe de la technique Monte-Carlo.

1.3.2 Technique Monte-Carlo approchée

L’objectif de cette technique est de réduire le coût de la méthode Monte-Carlo. Nous avons vu que cette dernière n’est pas viable industriellement en raison du nombre important d’appels au code (dix milles au minimum).

Le code de calcul permet de faire le lien entre les paramètres d’entrée et l’observation étudiée. Si ce lien était connu explicitement, il n’y aurait évidemment aucune raison de faire appel au code. A chaque tirage aléatoire sur les paramètres incertains, la fonction serait directement évaluée sans coût de calcul. Or, le type de dépendance entre paramètres d’entrée et observation de sortie est supposé inconnu. L’idée est donc de construire

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

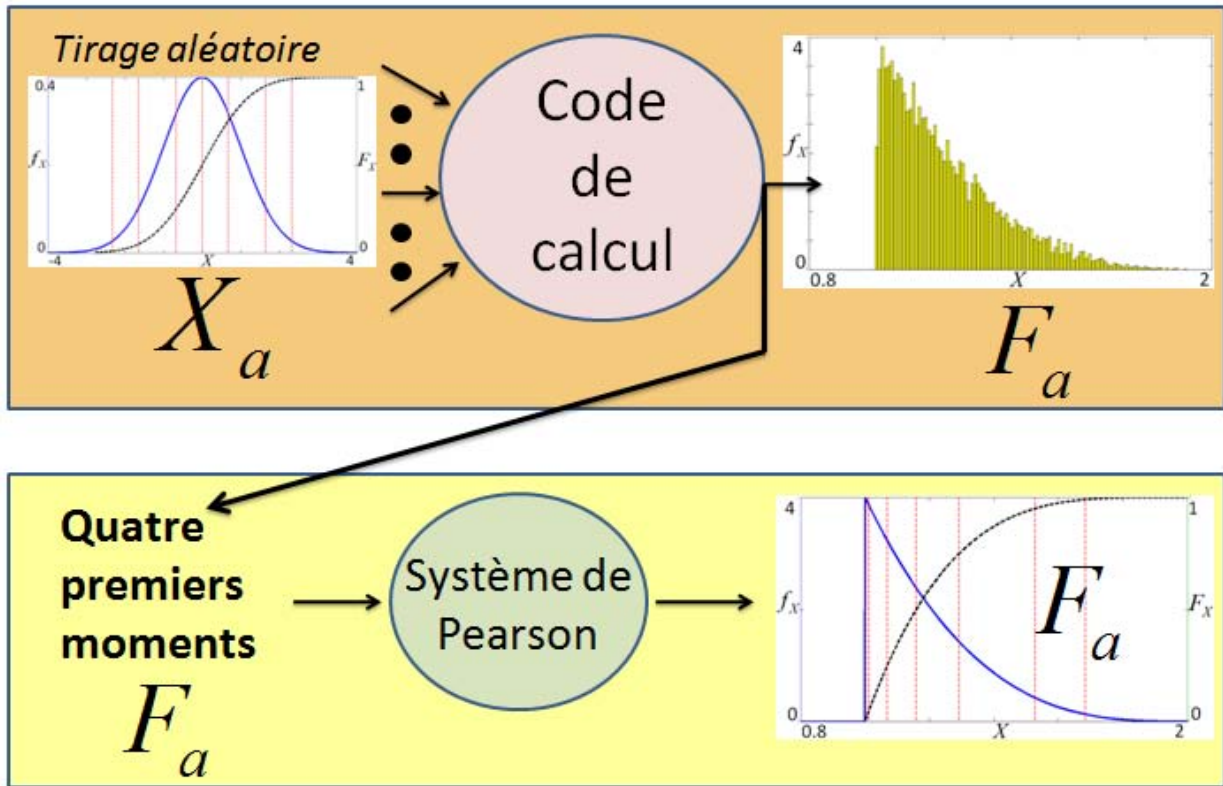


Figure III.9 – Schéma récapitulatif de la stratégie de propagation d'incertitude, en adoptant la technique Monte-Carlo.

un modèle approché, sur la base de quelques valeurs exactes de la fonction. L'utilisation du modèle approché pour l'analyse d'incertitude en aérodynamique n'est pas une nouveauté (cf [LIM89], [DUV07] ou [DUV07-2]). D'ailleurs, le chapitre 2 de cette thèse concerne justement la construction d'un modèle approché associé à une observation aérodynamique scalaire.

Dès lors, la technique Monte-Carlo approchée comporte deux étapes distinctes.

- La première étape est de **nature déterministe**. Il s'agit de construire le modèle approché permettant de passer des paramètres d'entrée incertains à l'observation scalaire. Ce modèle approché (ou surface de réponse) propose une expression analytique de l'observation. Ainsi, contrairement au code de calcul, l'observation peut être évaluée avec un coût négligeable. Par contre, la construction de cette surface de réponse demande un certain nombre de calculs exacts, donc coûteux. Nous y reviendrons.
- La seconde étape est de **nature probabiliste**. La technique Monte-Carlo, présentée lors de la section précédente, est mise en œuvre. Au lieu d'appeler le code de calcul à chaque tirage aléatoire des paramètres d'entrée, la surface de réponse est utilisée. Les dix milles évaluations d'observation sont alors tout à fait envisageables. On rappelle que la méthode Monte-Carlo permet d'approcher la loi de probabilité de l'observation aléatoire de deux manières différentes. La première voie consiste à construire une densité de probabilité en escaliers (ou histogramme) approximant la véritable densité. La seconde voie revient à évaluer les quatre premiers moments statistiques qui seront associés à une distribution de probabilité grâce au système de Pearson.

Détaillons le calcul des quatre premiers moments statistiques de l'observation par la méthode Monte-Carlo approchée (notée MCa).

Une série de N_{MCa} tirages aléatoires sur les paramètres d'entrée X_a permet de déterminer une base de données

$(f_{a,i}^{(MCa)})_{1 \leq i \leq N_{MCa}}$ pour l'observation. On accède ainsi aux moments $\mu_r^{(MCa)}[F_a]$ non centrés de l'observation aléatoire \bar{F}_a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(MCa)}[F_a] = \frac{1}{N_{MCa}} \sum_{i=1}^{N_{MCa}} f_{a,i}^{(MCa)} \\ \mu_2^{(MCa)}[F_a] = \frac{1}{N_{MCa}} \sum_{i=1}^{N_{MCa}} (f_{a,i}^{(MCa)})^2 \\ \mu_3^{(MCa)}[F_a] = \frac{1}{N_{MCa}} \sum_{i=1}^{N_{MCa}} (f_{a,i}^{(MCa)})^3 \\ \mu_4^{(MCa)}[F_a] = \frac{1}{N_{MCa}} \sum_{i=1}^{N_{MCa}} (f_{a,i}^{(MCa)})^4 \end{array} \right.$$

puis aux moments centrés $\mu_r^{(MCa)}[F_a]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(MCa)}[F_a] = \mu_1^{(MCa)}[F_a] \\ \mu_2^{(MCa)}[F_a] = \mu_2^{(MCa)}[F_a] - \mu_1^{(MCa)}[F_a]^2 \\ \mu_3^{(MCa)}[F_a] = \mu_3^{(MCa)}[F_a] + 2\mu_1^{(MCa)}[F_a]^3 - 3\mu_2^{(MCa)}[F_a]\mu_1^{(MCa)}[F_a] \\ \mu_4^{(MCa)}[F_a] = \mu_4^{(MCa)}[F_a] - 3\mu_1^{(MCa)}[F_a]^4 - 4\mu_3^{(MCa)}[F_a]\mu_1^{(MCa)}[F_a] + 6\mu_2^{(MCa)}[F_a]\mu_1^{(MCa)}[F_a]^2 \end{array} \right.$$

Le système de Pearson permet de passer de ces quatre premiers moments $(\mu_r^{(MCa)}[F_a])_{1 \leq r \leq 4}$ à une distribution de probabilité.

Par rapport à la méthode Monte-Carlo, la technique Monte-Carlo approchée transfère donc le coût de calcul de l'étape probabiliste à l'étape déterministe. Le coût va alors dépendre de l'efficacité de la méthode d'interpolation utilisée pour la construction de la surface de réponse. La qualité de l'approximation fournie par le modèle approché va directement influencer sur la précision globale de la densité de probabilité associée à l'observation. Un compromis entre la précision du modèle approché et le nombre de calculs exacts devra donc être trouvé. Le point important est que le coût reste très inférieur à celui de la méthode Monte-Carlo de base.

La figure III.10 permet de visualiser le schéma récapitulatif de la méthode Monte-Carlo approchée pour construire une densité de probabilité pour F_a , connaissant la loi associée au paramètre aléatoire d'entrée X_a .

Pour finir, disons un petit mot sur les méthodes de construction d'une surface de réponse existant dans la littérature. Le chapitre 2 de la thèse a déjà abordé cette thématique.

Les deux principales classes de méthode sont la technique de krigeage et l'utilisation de fonctions à base radiale.

- Le **krigeage** est une méthode d'interpolation qui est issue de la géostatistique. Il emploie les propriétés de la corrélation spatiale des données de l'échantillon. Dès qu'une valeur doit être interpolée en un point de l'espace des paramètres, le krigeage utilise des données de poids forts qui sont voisins plutôt que de faire appel à un poids égal pour toutes les données exactes. L'idée est d'annuler l'erreur résiduelle moyenne et de minimiser la variance des erreurs. L'utilisation couplée du krigeage et de la méthode Monte-Carlo fut notamment envisagée avec [SAC89].

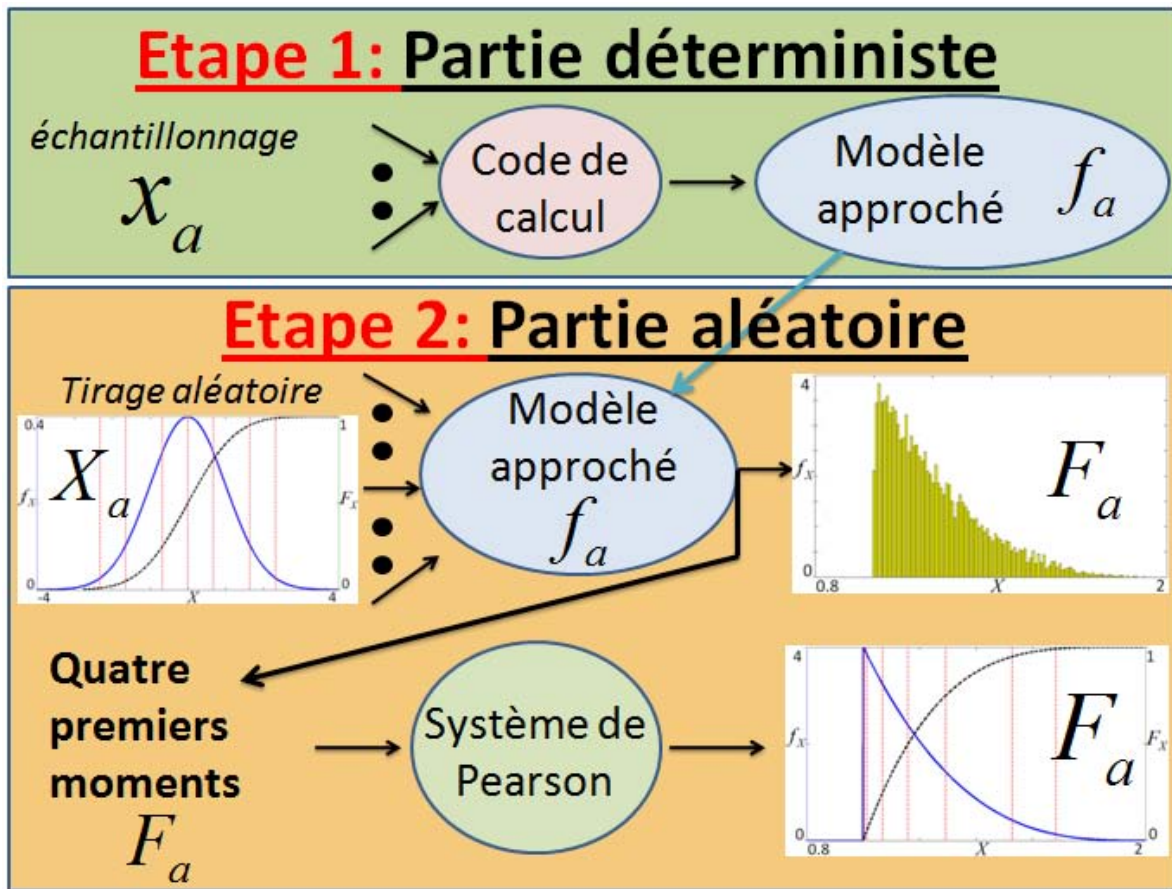


Figure III.10 – Schéma récapitulatif de la stratégie de propagation d’incertitude, en adoptant la technique Monte-Carlo approchée.

- Passons à la seconde classe de technique, liée à l’usage de **fonctions à base radiale**. On parle de méthode RBF (pour *Radial Basis Function*). Le principe est d’utiliser des combinaisons linéaires de fonctions radialement symétriques basées sur la distance euclidienne pour construire une approximation du modèle.

Notons que la technique de grille creuse (*sparse grid*) est également possible. Elle appartient plutôt à la catégorie des méthodes de plan d’expérience. La position des points d’interpolation est imposée, contrairement aux deux méthodes décrites (RBF et krigeage) qui s’adaptent aux données disponibles. A ce titre, rappelons que la méthode de Duchon (présentée au chapitre 2 de la thèse) est capable de construire la surface de réponse en utilisant non seulement la valeur de la fonction en certains points, mais aussi les dérivées premières et secondes disponibles.

1.3.3 Technique du chaos polynomial

L’idée générale du chaos polynomial est de décomposer les variables aléatoires sur une base de polynômes orthogonaux. Dès lors, la propagation d’incertitude revient à la détermination des coefficients associés à la décomposition de l’observation incertaine en sortie du code de calcul.

Le principe fondateur fut énoncé par Wiener en 1938 (cf [WIE38]). Soit X une variable aléatoire du second ordre, c’est-à-dire de variance finie. Cette propriété se vérifie dans la

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

quasi-totalité des applications concrètes. Cette variable X peut alors être décomposée sur une base de polynômes orthogonaux de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes $\zeta = (\zeta_i)_{i=1}^{+\infty}$. Il s'agit plus précisément des polynômes d'Hermite, notés $(H_k)_{1 \leq k \leq +\infty}$.

$$X = \sum_{\alpha \in J} X_\alpha H_\alpha(\zeta)$$

où :

$$J = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots) \in \mathbb{N}^\infty \ ; \ |\alpha| = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i < \infty\}$$

Par ailleurs, $H_\alpha(\zeta) = \prod_{i=1}^{+\infty} h_{\alpha_i}(\zeta_i)$ désigne le **polynôme d'Hermite** multi-dimensionnel s'écrivant comme le produit de polynômes mono-dimensionnels h_k .

Néanmoins, en dehors de la loi normale et de quelques autres distributions de probabilité (comme la loi log-normale), la décomposition en polynômes d'Hermite n'est pas efficace. Il faut beaucoup de termes pour approcher une loi quelconque. Ainsi, le **schéma d'Askey** (cf [ASK85]) peut être vu comme une généralisation de l'approximation proposée par Wiener.

Le schéma d'Askey consiste à décomposer une variable aléatoire sur la base de polynômes à choisir. Ce choix va directement dépendre du type de loi de probabilité suivie par la variable. Le tableau III.1 récapitule la correspondance entre la distribution et le type de polynôme devant être choisi. Avec cette correspondance, on retrouve l'efficacité de la technique de Wiener pour une grande variété de lois de probabilité.

	type de loi	polynôme	support
loi continue	Normale	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	Gamma	Laguerre	$[0, +\infty)$
	Bêta	Jacobi	$[a, b]$
	uniforme	Legendre	$[a, b]$
loi discrète	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomiale	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$
	Binomiale négative	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hyper-géométrique	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Tableau III.1 – Schéma d'Askey donnant la correspondance entre la loi de probabilité et le polynôme de chaos.

Des améliorations sont envisageables pour la méthode du chaos polynomial. Par exemple, citons le chaos anisotrope [ELD09], consistant à privilégier les termes du développement en polynômes de chaos qui influent le plus fortement sur la variance de la variable aléatoire correspondante. Le nombre total de coefficients s'en

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

trouve ainsi diminué. Il est également possible de construire pas à pas la projection anisotrope d'une variable aléatoire via un processus adaptatif.

Les multiples variantes de chaos polynomial peuvent être réparties en deux classes. La distinction vient du caractère intrusif ou non de la variante retenue.

L'idée générale des méthodes intrusives est de décomposer chaque variable du code de calcul sur la base des polynômes de chaos. Le système à résoudre devient ainsi plus complexe. Aux équations classiques s'ajoutent la détermination des coefficients de chaos des variables solutions des équations que cherche à résoudre le code. La méthode de Galerkin est alors couramment employée. Pour mettre en place de telles méthodes, il faut donc modifier le code de calcul, d'où le caractère intrusif.

Dans notre étude, nous nous focaliserons sur les méthodes de chaos non intrusives, ie ne nécessitant pas de modifier le code de calcul.

Là encore, diverses versions de méthode non intrusive existent dans la littérature. Nous avons opté pour la **technique de collocation** [SUD05]. Comme alternative à cette méthode de collocation, toujours dans la classe de méthode non intrusive, nous pouvons évoquer la méthode de régression [BER06]. Les coefficients du développement de chaos de l'observation sont calculés par moindres carrés, sur la base d'une série d'évaluations exactes.

Le principe général d'une méthode de collocation est brièvement exposé.

Connaissant la loi de probabilité des variables d'entrée, on détermine les valeurs de paramètre les plus représentatives de l'aléa. On parle alors de points de collocation. Pour chacun de ces points de collocation, un poids d'intégration est calculé (via une technique de quadrature). Pour accéder aux points de collocation et aux poids d'intégration, nous ferons appel à la procédure discrétisée de Stieltjes (cf [GAU96] ou [MIL03]). Les valeurs de l'observation associées à l'ensemble des points de collocation sont évaluées par une série d'exécutions déterministes du code de calcul. Cette base de données sur l'observation, alliée aux poids d'intégration, nous permet de reconstruire l'aléa en sortie du code de calcul.

Nanti d'un ensemble de N_{PC} couples observation-poids d'intégration $(f_{a,i}^{(PC)}, w_i^{(PC)})_{1 \leq i \leq N_{PC}}$ (PC pour *Polynomial Chaos*), notre choix fut de calculer les quatre premiers moments statistiques de l'observation aléatoire F_a . Pour cela, on commence par calculer les moments non centrés $\mu_r^{(PC)}[F_a]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(PC)}[F_a] = \sum_{i=1}^{N_{PC}} f_{a,i}^{(PC)} w_i^{(PC)} \\ \mu_2^{(PC)}[F_a] = \sum_{i=1}^{N_{PC}} (f_{a,i}^{(PC)})^2 w_i^{(PC)} \\ \mu_3^{(PC)}[F_a] = \sum_{i=1}^{N_{PC}} (f_{a,i}^{(PC)})^3 w_i^{(PC)} \\ \mu_4^{(PC)}[F_a] = \sum_{i=1}^{N_{PC}} (f_{a,i}^{(PC)})^4 w_i^{(PC)} \end{array} \right.$$

On accède aux moments centrés $\mu_r^{(PC)}[F_a]$ par les formules suivantes.

$$\begin{cases} \mu_1^{(PC)}[F_a] = \mu_1^{(PC)}[F_a] \\ \mu_2^{(PC)}[F_a] = \mu_2^{(PC)}[F_a] - \mu_1^{(PC)}[F_a]^2 \\ \mu_3^{(PC)}[F_a] = \mu_3^{(PC)}[F_a] + 2\mu_1^{(PC)}[F_a]^3 - 3\mu_2^{(PC)}[F_a]\mu_1^{(PC)}[F_a] \\ \mu_4^{(PC)}[F_a] = \mu_4^{(PC)}[F_a] - 3\mu_1^{(PC)}[F_a]^4 - 4\mu_3^{(PC)}[F_a]\mu_1^{(PC)}[F_a] + 6\mu_2^{(PC)}[F_a]\mu_1^{(PC)}[F_a]^2 \end{cases}$$

Une fois en possession des quatre moments statistiques $(\mu_r^{(PC)}[F_a])_{1 \leq r \leq 4}$, le système de Pearson permet de construire une loi de probabilité. Cette loi correspond à la densité de probabilité associée à l'observation incertaine et approximée par la technique du chaos polynomial non intrusif.

Le choix du nombre de points de collocation est bien sûr primordial. Cet entier est égal au nombre d'appels au code de calcul. Il contrôle donc le coût de la méthode de collocation. Dans notre étude, nous chercherons à déterminer le coût minimal permettant d'atteindre un certain niveau de précision sur la densité de probabilité de l'observation. La stratégie retenue pour mener cette tâche sera explicitée par la suite.

Le schéma récapitulatif d'une méthode de chaos polynomial (version non intrusive de collocation) est donné en figure III.11.

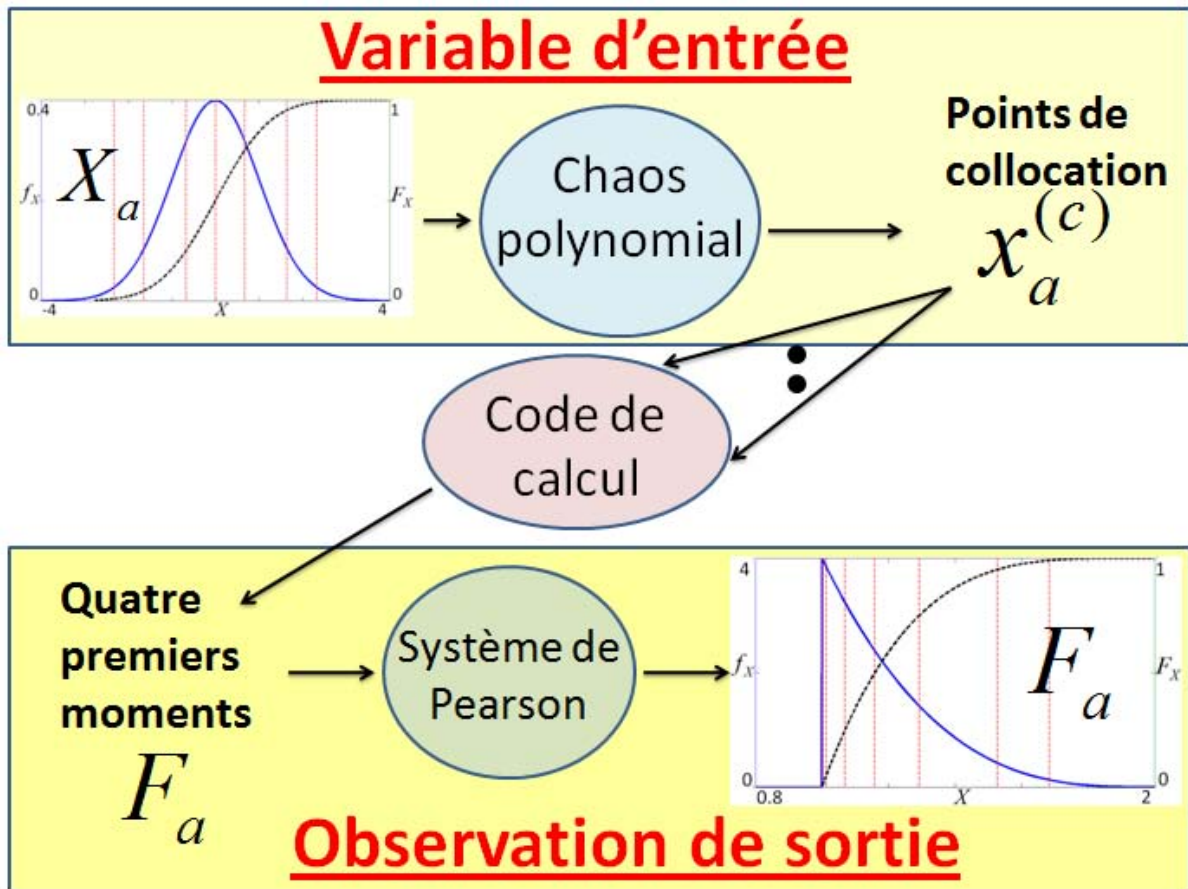


Figure III.11 – Schéma récapitulatif de la stratégie de propagation d'incertitude, en adoptant la technique du chaos polynomial (version non intrusive de collocation).

1.3.4 Méthode des moments (ou technique de perturbation)

La méthode des moments (cf [WAL02] ou [PUT01]) consiste à évaluer analytiquement les moments statistiques de l'observation incertaine F_a . La dépendance entre les paramètres et l'observation n'étant pas connue, on fait appel au **développement de Taylor**. Une fois déterminés les quatre premiers moments de F_a , le système de Pearson propose une distribution de probabilité.

L'expression des quatre premiers moments issus de la technique de perturbation va être présentée. Contrairement aux trois méthodes de propagation d'incertitude que l'on vient d'introduire, il est important de préciser le nombre de variables aléatoires en entrée du code de calcul. Les cas à une et deux variables vont être envisagés. L'extension à un nombre plus important de paramètres incertains sera également traitée analytiquement. En pratique, nous allons nous restreindre à deux variables incertaines au maximum. Par ailleurs, nous traiterons les développements de Taylor de l'observation d'ordres 1 et 2. Au passage, notons que ce choix justifie de se restreindre au cas de deux variables incertaines au maximum. En effet, les dérivées secondes ont pour effet de coupler les paramètres deux à deux par l'intermédiaire des dérivées secondes croisées.

Deux options de calcul sont possibles. La première revient à calculer analytiquement les quatre premiers moments statistiques non centrés $(\mu_r^{(PM)}[F_a])_{1 \leq r \leq 4}$ de l'observation F_a (avec *PM* pour *Perturbation Method*). Les moments centrés $(\mu_r^{(PM)}[F_a])_{1 \leq r \leq 4}$ s'en déduisent immédiatement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(PM)}[F_a] = \mu_1^{(PM)}[F_a] \\ \mu_2^{(PM)}[F_a] = \mu_2^{(PM)}[F_a] - \mu_1^{(PM)}[F_a]^2 \\ \mu_3^{(PM)}[F_a] = \mu_3^{(PM)}[F_a] + 2\mu_1^{(PM)}[F_a]^3 - 3\mu_2^{(PM)}[F_a]\mu_1^{(PM)}[F_a] \\ \mu_4^{(PM)}[F_a] = \mu_4^{(PM)}[F_a] - 3\mu_1^{(PM)}[F_a]^4 - 4\mu_3^{(PM)}[F_a]\mu_1^{(PM)}[F_a] + 6\mu_2^{(PM)}[F_a]\mu_1^{(PM)}[F_a]^2 \end{array} \right.$$

Cette stratégie de calcul a été adoptée pour les trois précédentes méthodes de propagation d'incertitude (Monte-Carlo, Monte-Carlo approchée et chaos polynomial). La seconde option est de calculer directement les moments centrés. Cette variante sera choisie pour la méthode des moments. En effet, nous souhaitons formuler les expressions des moments statistiques de l'observation qui sont réellement traitées par le système de Pearson. Notons que les expressions analytiques des moments non centrés sont légèrement moins complexes que celles des moments centrés. Il peut cependant être instructif de posséder l'expression exacte des quatre premiers moments centrés de l'observation, notamment pour faciliter la comparaison entre les ordres 1 et 2 de Taylor.

Commençons donc par étudier le cas d'une seule variable aléatoire.

Méthode des moments pour le cas d'une variable d'entrée incertaine

Pour simplifier les expressions analytiques, nous allons alléger les notations adoptées. Le paramètre d'entrée incertain X s'écrit :

$$X = x_0 + \Delta X$$

De là, le développement de Taylor d'ordre 1 (f_{T1}) de l'observation scalaire f , autour de la valeur nominale x_0 du paramètre d'entrée, vaut :

$$f_{T1} = f_0 + f_1 \Delta X$$

Pour le développement de Taylor f_{T2} d'ordre 2, il vient :

$$f_{T2} = f_0 + f_1 \Delta X + \frac{1}{2} f_2 \Delta X^2$$

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

Ces deux développements de Taylor font intervenir trois scalaires, à savoir (f_0, f_1, f_2) . Il s'agit respectivement de la valeur nominale, de la dérivée première et seconde de l'observation f au point x_0 (valeur nominale du paramètre x).

$$\begin{cases} f_0 = f(x_0) \\ f_1 = \frac{df}{dx}(x_0) \\ f_2 = \frac{d^2f}{dx^2}(x_0) \end{cases}$$

L'hypothèse de base est que la moyenne de la variable aléatoire de perturbation ΔX est nulle. Ceci n'est absolument pas restrictif, étant donné que la valeur nominale x_0 est là pour contrôler la moyenne de l'observation incertaine X . Le moment statistique (centré et décentré) d'ordre r , associé à ΔX , sera noté μ_r . On fera également appel à l'écart-type de ΔX , noté σ (avec la relation $\sigma = \sqrt{\mu_2}$).

L'objectif est d'évaluer analytiquement les quatre premiers moments de l'observation sur la base du développement de Taylor d'ordre 1 et 2. Ces moments statistiques recherchés seront notés $(\mu_r^{(PM1)}[F])_{1 \leq r \leq 4}$ à l'ordre 1 et $(\mu_r^{(PM2)}[F])_{1 \leq r \leq 4}$ à l'ordre 2. La lettre F fait référence à l'observation f en mode aléatoire.

En toute logique, on commence par le **premier moment statistique** de l'observation. Il s'agit de la moyenne. A l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned} \mu_1^{(PM1)}[F] &= E[f_{T1}] \\ &= E[f_0 + f_1 \Delta X] \\ &= f_0 \end{aligned} \tag{III.10}$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mu_1^{(PM2)}[F] &= E[f_{T2}] \\ &= E[f_0 + f_1 \Delta X + \frac{1}{2} f_2 \Delta X^2] \\ &= f_0 + \frac{1}{2} f_2 \mu_2 \end{aligned} \tag{III.11}$$

Un point essentiel est à noter. Le fait de rester à l'ordre 1 pour le développement de Taylor de l'observation induit que la moyenne $\mu_1^{(PM1)}[F]$ trouvée par la méthode des moments se réduit à la valeur nominale f_0 . Ainsi, aucune information liée à l'aléa sur le paramètre d'entrée n'est exploitable. Le passage à l'ordre 2 permet de prédire l'effet de cet aléa d'entrée sur la moyenne de la sortie, via le terme $\frac{1}{2} f_2 \mu_2$. Ainsi, même au niveau du premier moment statistique, l'ordre 2 apparaît nécessaire pour disposer d'un minimum d'information utile sur le comportement aléatoire de l'observation.

Passons à l'expression analytique du **second moment** de l'observation aléatoire F , en débutant par le

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

développement de Taylor d'ordre 1.

$$\begin{aligned}
 \mu_2^{(PM1)}[F] &= E[(f_{T1} - \mu_1^{(PM1)}[F])^2] \\
 &= E[(f_1 \Delta X)^2] \\
 &= f_1^2 \mu_2
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

Le développement de Taylor d'ordre 2 est ensuite considéré.

$$\begin{aligned}
 \mu_2^{(PM2)}[F] &= E[(f_{T2} - \mu_1^{(PM2)}[F])^2] \\
 &= E[(f_1 \Delta X + \frac{1}{2} f_2 (\Delta X^2 - \mu_2))^2] \\
 &= f_1^2 \mu_2 + f_1 f_2 \mu_3 + \frac{1}{4} f_2^2 (\mu_4 - \mu_2^2)
 \end{aligned} \tag{III.13}$$

Contrairement au cas du premier moment statistique, l'ordre 1 procure une information utilisable. L'unique terme est directement proportionnel à la dérivée première de f au point nominal x_0 . Dans le cas où la dérivée première s'annule, l'écart-type proposé par la méthode des moments d'ordre 1 devient nul lui aussi. Dans ce cas, il devient nécessaire de passer à l'ordre 2. Notons que nous sommes souvent dans cette configuration lorsque l'analyse d'incertitude est couplée avec une optimisation (comme [BEY07]).

Terminons par les troisième et quatrième moments de l'observation aléatoire F . La méthode des moments permet de calculer le **troisième moment** sur la base du développement de Taylor d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \mu_3^{(PM1)}[F] &= E[(f_{T1} - \mu_1^{(PM1)}[F])^3] \\
 &= E[(f_1 \Delta X)^3] \\
 &= f_1^3 \mu_3
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

et d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \mu_3^{(PM2)}[F] &= E[(f_{T2} - \mu_1^{(PM2)}[F])^3] \\
 &= E[(f_1 \Delta X + \frac{1}{2} f_2 (\Delta X^2 - \mu_2))^3] \\
 &= f_1^3 \mu_3 + \frac{3}{2} f_1^2 f_2 (\mu_4 - \mu_2^2) + \frac{3}{2} f_1 f_2^2 (\frac{1}{2} \mu_5 - \mu_2 \mu_3) + \frac{1}{8} f_2^3 (2\mu_2^3 - 3\mu_2 \mu_4 + \mu_6)
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

Quant au **quatrième moment statistique**, il vaut à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \mu_4^{(PM1)}[F] &= E[(f_{T1} - \mu_1^{(PM1)}[F])^4] \\
 &= E[(f_1 \Delta X)^4] \\
 &= f_1^4 \mu_4
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \mu_4^{(PM2)}[F] &= E[(f_{T2} - \mu_1^{(PM2)}[F])^4] \\
 &= E[(f_1 \Delta X + \frac{1}{2} f_2 (\Delta X^2 - \mu_2))^4] \\
 &= f_1^4 \mu_4 + 2 f_1^3 f_2 (\mu_5 - \mu_2 \mu_3) + \frac{3}{2} f_1^2 f_2^2 (\mu_2^3 - 2 \mu_2 \mu_4 + \mu_6) + \frac{1}{2} f_1 f_2^3 (3 \mu_2^2 \mu_3 - 3 \mu_2 \mu_5 + \mu_7) \\
 &\quad + \frac{1}{16} f_2^4 (-3 \mu_2^4 + 6 \mu_2^2 \mu_4 - 4 \mu_2 \mu_6 + \mu_8)
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

Pour résumer, en présence d'une variable d'entrée incertaine, les quatre premiers moments statistiques de l'observation de sortie donnés par la méthode des moments d'ordre 1 valent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(PM1)}[F] = f_0 \\ \mu_2^{(PM1)}[F] = f_1^2 \mu_2 \\ \mu_3^{(PM1)}[F] = f_1^3 \mu_3 \\ \mu_4^{(PM1)}[F] = f_1^4 \mu_4 \end{array} \right. \tag{III.18}$$

En passant à la méthode des moments d'ordre 2, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(PM2)}[F] = f_0 + \frac{1}{2} f_2 \mu_2 \\ \mu_2^{(PM2)}[F] = f_1^2 \mu_2 + f_1 f_2 \mu_3 + \frac{1}{4} f_2^2 (\mu_4 - \mu_2^2) \\ \mu_3^{(PM2)}[F] = f_1^3 \mu_3 + \frac{3}{2} f_1^2 f_2 (\mu_4 - \mu_2^2) + \frac{3}{2} f_1 f_2^2 (\frac{1}{2} \mu_5 - \mu_2 \mu_3) + \frac{1}{8} f_2^3 (2 \mu_2^3 - 3 \mu_2 \mu_4 + \mu_6) \\ \mu_4^{(PM2)}[F] = f_1^4 \mu_4 + 2 f_1^3 f_2 (\mu_5 - \mu_2 \mu_3) + \frac{3}{2} f_1^2 f_2^2 (\mu_2^3 - 2 \mu_2 \mu_4 + \mu_6) + \frac{1}{2} f_1 f_2^3 (3 \mu_2^2 \mu_3 - 3 \mu_2 \mu_5 + \mu_7) \\ \quad + \frac{1}{16} f_2^4 (-3 \mu_2^4 + 6 \mu_2^2 \mu_4 - 4 \mu_2 \mu_6 + \mu_8) \end{array} \right. \tag{III.19}$$

La complexité des expressions obtenues pour les moments analytiques, en passant de l'ordre 1 à l'ordre 2 sur la méthode des moments, est assez frappante. En effet, à l'ordre 1, un seul terme est nécessaire, ce qui tranche avec la multitude de termes lorsque l'ordre 2 est utilisé.

Au-delà de la complexité accrue, il s'avère que la méthode des moments d'ordre 1 n'apporte aucune information utile quant à l'évaluation des troisième et quatrième moments de l'observation. Pour le mettre en évidence, calculons les coefficients d'asymétrie $c_{\mu_3}^{(PM1)}[F]$ et d'aplatissement $c_{\mu_4}^{(PM1)}[F]$ correspondant aux mo-

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

ments analytiques d'ordre 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{\mu_3}^{(PM1)}[F] = \frac{\mu_3^{(PM1)}[F]}{\sqrt{\mu_2^{(PM1)}[F]}^3} \\ \\ = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2}^3} \\ \\ = c_{\mu_3} \\ \\ c_{\mu_4}^{(PM1)}[F] = \frac{\mu_4^{(PM1)}[F]}{\mu_2^{(PM1)}[F]^2} \\ \\ = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \\ \\ = c_{\mu_4} \end{array} \right. \quad (III.20)$$

où c_{μ_3} et c_{μ_4} désignent respectivement les troisième et quatrième moments statistiques (sous forme adimensionnée) associés à la variable d'entrée incertaine X . De ce fait, la méthode des moments d'ordre 1 ne fait que transposer les niveaux d'asymétrie et d'aplatissement de l'aléa d'entrée jusqu'à l'aléa de sortie. En ce sens, on peut dire que l'ordre 1 ne fournit aucune information exploitable sur les troisième et quatrième moments statistiques de l'observation.

Pour avoir une idée de l'**erreur commise sur les moments statistiques** de l'observation, nous proposons de calculer les écarts absolus obtenus en changeant l'ordre du développement de Taylor.

Ainsi, l'erreur $\Delta_r^{(PM1)}[F]$ commise sur le moment d'ordre r de l'observation F avec la méthode des moments d'ordre 1 vaudra :

$$\Delta_r^{(PM1)}[F] = |c_{\mu_r}^{(PM1)}[F] - c_{\mu_r}^{(PM2)}[F]| \quad (III.21)$$

Pour l'erreur $\Delta_r^{(PM2)}[F]$ associée à la méthode des moments d'ordre 2, toujours pour l'évaluation du moment d'ordre r de F , il vient :

$$\Delta_r^{(PM2)}[F] = |c_{\mu_r}^{(PM2)}[F] - c_{\mu_r}^{(PM3)}[F]| \quad (III.22)$$

Bien sûr, comme la dérivée troisième n'est pas disponible par différentiation automatique, nous serons amené à l'évaluer par différences finies. Elle sera notée f_3 .

$$f_3 = \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0) \quad (III.23)$$

Nous donnons les expressions analytiques des erreurs, en passant en revue les quatre premiers moments de l'observation aléatoire F .

Pour le premier moment, nous avons :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta_1^{(PM1)}[F] = \frac{1}{2}|f_2|\mu_2 \\ \Delta_1^{(PM2)}[F] = \frac{1}{6}|f_3\mu_3| \end{cases}} \quad (III.24)$$

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

Pour le second moment, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2^{(PM1)}[F] = |f_2| |f_1\mu_3 + \frac{1}{4}f_2(\mu_4 - \mu_2^2)| \\ \Delta_2^{(PM2)}[F] = \frac{1}{3}|f_3| |f_1\mu_4 + \frac{1}{2}f_2(\mu_5 - \mu_2\mu_3) + \frac{1}{12}f_3(\mu_6 - \mu_3^2)| \end{array} \right. \quad (\text{III.25})$$

Pour le troisième moment, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_3^{(PM1)}[F] = \frac{1}{2}|f_2| |3f_1^2(\mu_4 - \mu_2^2) + 3f_1f_2(\frac{1}{2}\mu_5 - \mu_2\mu_3) + \frac{1}{4}f_2^2(2\mu_2^3 - 3\mu_2\mu_4 + \mu_6)| \\ \Delta_3^{(PM2)}[F] = \frac{1}{2}|f_3| |f_1^2(\mu_5 - \mu_2\mu_3) + f_1f_2(\mu_6 - \mu_2\mu_4 - \mu_3^2) \\ \quad + \frac{1}{2}f_2^2(\mu_2^2\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_7 - \mu_2\mu_5 - \frac{1}{2}\mu_3\mu_4) + \frac{1}{6}f_3(f_1(\mu_7 - 2\mu_3\mu_4) \\ \quad + f_2(\frac{1}{2}\mu_8 - \frac{1}{2}\mu_2\mu_6 - \mu_3\mu_5 + \mu_2\mu_3^2) + \frac{1}{108}f_3^2(\mu_9 - 3\mu_3\mu_6 + 2\mu_3^3))| \end{array} \right. \quad (\text{III.26})$$

Enfin, pour le quatrième moment, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_4^{(PM1)}[F] = |f_2| |2f_1^3(\mu_5 - \mu_2\mu_3) + \frac{3}{2}f_1^2f_2(\mu_2^3 - 2\mu_2\mu_4 + \mu_6) \\ \quad + \frac{1}{2}f_1f_2^2(3\mu_2^2\mu_3 - 3\mu_2\mu_5 + \mu_7) + \frac{1}{16}f_2^3(-3\mu_2^4 + 12\mu_2^2\mu_4 - 4\mu_2\mu_6 + \mu_8)| \\ \Delta_4^{(PM2)}[F] = \frac{1}{3}|f_3| |2e_{f_3} + \frac{1}{2}f_3e_{f_3^2} + \frac{1}{18}f_3^2e_{f_3^3} + \frac{1}{432}f_3^3e_{f_3^4}| \end{array} \right. \quad (\text{III.27})$$

Pour rendre la dernière expression lisible, nous avons introduit quatre variables intermédiaires ($e_{f_3}, e_{f_3^2}, e_{f_3^3}, e_{f_3^4}$).

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{f_3} = f_1^3(\mu_6 - \mu_3^2) + \frac{3}{2}f_1^2f_2(\mu_7 - \mu_2\mu_5 - \mu_3\mu_4 + \mu_2^2\mu_3) \\ \quad + \frac{3}{4}f_1f_2^2(\mu_8 - 2\mu_2\mu_6 + \mu_2^2\mu_4 - \mu_3\mu_5 + 2\mu_2\mu_3^2) \\ \quad + \frac{1}{8}f_2^3(\mu_9 - 3\mu_2\mu_7 + 3\mu_2^2\mu_5 - \mu_3\mu_6 + 3\mu_2\mu_3\mu_4 - 3\mu_2^3\mu_3) \\ e_{f_3^2} = f_1^2(\mu_8 + \mu_2\mu_3^2 - 2\mu_3\mu_5) + f_1f_2(\mu_9 - \mu_2\mu_7 - 2\mu_3\mu_6 + 2\mu_2\mu_3\mu_4 + \mu_3^3) \\ \quad + \frac{1}{4}f_2^2(\mu_{10} - 2\mu_2\mu_8 + \mu_2^2\mu_6 + \mu_3^2\mu_4 - 3\mu_2^2\mu_3^2 - 2\mu_3\mu_7 + 4\mu_2\mu_3\mu_5) \\ e_{f_3^3} = f_1(\mu_{10} - 3\mu_3\mu_7 + 3\mu_3^2\mu_4) + \frac{1}{2}f_2(\mu_{11} - \mu_2\mu_9 - 3\mu_3\mu_8 + 3\mu_2\mu_3\mu_6 + 3\mu_3^2\mu_5 - 3\mu_2\mu_3^3) \\ e_{f_3^4} = \mu_{12} - 4\mu_3\mu_9 + 6\mu_3^2\mu_6 - 3\mu_3^4 \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

Pour finir avec le cas d'une seule variable d'entrée incertaine, présentons les formules des moments correspondant à une **loi normale** en entrée (écart-type σ).

Tous les moments statistiques μ_r de la loi normale peuvent s'exprimer en fonction de l'écart-type σ .

$$\begin{cases} \mu_{2r-1} = 0 & \forall r \geq 2 \\ \mu_{2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!} \sigma^{2r} & \forall r \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Dès lors, voici l'expression des quatre premiers moments statistiques de l'observation, avec la méthode des moments d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \mu_1^{(PM1)}[F]_{LN} = f_0 \\ \mu_2^{(PM1)}[F]_{LN} = f_1^2 \sigma^2 \\ \mu_3^{(PM1)}[F]_{LN} = 0 \\ \mu_4^{(PM1)}[F]_{LN} = 3f_1^4 \sigma^4 \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

L'indice inférieur LN est là pour rappeler que ces expressions sont valables lorsque la Loi Normale est suivie par le paramètre d'entrée X .

En passant à la méthode des moments d'ordre 2, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \mu_1^{(PM2)}[F]_{LN} = f_0 + \frac{1}{2} f_2 \sigma^2 \\ \mu_2^{(PM2)}[F]_{LN} = \sigma^2 (f_1^2 + \frac{1}{2} f_2^2 \sigma^2) \\ \mu_3^{(PM2)}[F]_{LN} = f_2 \sigma^4 (3f_1^2 + f_2^2 \sigma^2) \\ \mu_4^{(PM2)}[F]_{LN} = 3\sigma^4 (f_1^4 + 5f_1^2 f_2^2 \sigma^2 + \frac{5}{4} f_2^4 \sigma^4) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Passons aux erreurs d'ordre 1 avec la loi normale en entrée.

$$\begin{cases} \Delta_1^{(PM1)}[F]_{LN} = \frac{1}{2} |f_2| \sigma^2 \\ \Delta_2^{(PM1)}[F]_{LN} = \frac{1}{2} f_2^2 \sigma^4 \\ \Delta_3^{(PM1)}[F]_{LN} = |f_2| \sigma^4 (3f_1^2 + f_2^2 \sigma^2) \\ \Delta_4^{(PM1)}[F]_{LN} = \frac{3}{2} f_2^2 \sigma^6 (10f_1^2 + \frac{13}{4} f_2^2 \sigma^2) \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

Enfin, nous exprimons les erreurs d'ordre 2 avec la loi normale en entrée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^{(PM2)}[F]_{LN} = 0 \\ \Delta_2^{(PM2)}[F]_{LN} = \frac{1}{3}|f_3|\sigma^4|3f_1 + \frac{5}{4}f_3\sigma^2| \\ \Delta_3^{(PM2)}[F]_{LN} = \frac{3}{2}|f_2f_3|\sigma^6|4f_1 + \frac{5}{2}f_3\sigma^2| \\ \Delta_4^{(PM2)}[F]_{LN} = \frac{1}{3}|f_3||6f_1\sigma^6(5f_1^2 + \frac{39}{2}f_1^2\sigma^2) + \frac{15}{2}f_3\sigma^8(7f_1^2 + \frac{25}{2}f_2^2\sigma^2) + \frac{105}{2}f_3^2f_1\sigma^{10} + \frac{385}{16}f_3^3\sigma^{12}| \end{array} \right. \quad (\text{III.33})$$

Méthode des moments pour le cas de deux variables d'entrée incertaines

Désormais, deux variables incertaines sont considérées. Elles seront notées X et Y . L'aléa se présente comme une perturbation autour des valeurs nominales x_0 et y_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x_0 + \Delta X \\ Y = y_0 + \Delta Y \end{array} \right. \quad (\text{III.34})$$

Nous allons nous focaliser sur la méthode des moments d'ordre 2. A partir des formules de moment à l'ordre 2, les expressions d'ordre 1 s'obtiennent en annulant les dérivées secondes de l'observation. Le développement de Taylor d'ordre 2 de l'observation f vis-à-vis de x et y est rappelé :

$$f_{T2} = f_0 + f_x\Delta X + f_y\Delta Y + \frac{1}{2}(f_{xx}\Delta X^2 + f_{yy}\Delta Y^2 + 2f_{xy}\Delta X\Delta Y)$$

où les notations suivantes ont été adoptées.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = f(x_0, y_0) \\ f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

La spécificité de cette partie est la prise en compte des influences croisées des deux variables aléatoires X et Y . Les moments statistiques sont donc étendus au cas de deux variables. Voici les trois expressions des moments d'entrée que nous serons amenés à rencontrer.

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

$$\begin{cases} \mu_{rx} &= E[\Delta X^r] & \text{avec } r \geq 1 \\ \mu_{ry} &= E[\Delta Y^r] & \text{avec } r \geq 1 \\ \mu_{r,j} &= E[\Delta X^r \Delta Y^j] & \text{avec } r \geq 1 \text{ et } j \geq 1 \end{cases}$$

Les quatre premiers moments statistiques de l'observation F (notés $(\mu_r^{(PM2)}[F]_{CD})_{1 \leq r \leq 4}$) vont donc être passés en revue, en utilisant la méthode des moments d'ordre 2. L'indice inférieur CD est là pour rappeler que nous traitons deux variables (effet Croisé) et que la Dépendance entre ces deux paramètres est quelconque. Dans l'écriture des moments statistiques croisés, nous ferons intervenir les moments d'observation obtenus lorsque seule la variable X (moments $(\mu_r^{(PM2)}[F]_X)_{1 \leq r \leq 4}$) ou Y (moments $(\mu_r^{(PM2)}[F]_Y)_{1 \leq r \leq 4}$) est aléatoire (cas d'une seule variable aléatoire évoqué précédemment). Nous pourrions ainsi mettre en lumière les termes spécifiquement dédiés à l'influence croisée entre les deux variables X et Y .

Le **premier moment** s'écrit :

$$\boxed{\mu_1^{(PM2)}[F]_{CD} = \mu_1^{(PM2)}[F]_X + \mu_1^{(PM2)}[F]_Y + f_{xy}\mu_{1,1} - f_0} \quad (\text{III.35})$$

Le **second moment**, quant à lui, vaut :

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_2^{(PM2)}[F]_{CD} &= \mu_2^{(PM2)}[F]_X + \mu_2^{(PM2)}[F]_Y + 2f_x f_y \mu_{1,1} \\ &+ f_x f_{yy} \mu_{1,2} + f_y f_{xx} \mu_{2,1} + \frac{1}{2} f_{xx} f_{yy} (\mu_{2,2} - \mu_{2x} \mu_{2y}) \\ &+ 2f_{xy} (f_x \mu_{2,1} + f_y \mu_{1,2}) + \frac{1}{2} f_{xx} (\mu_{3,1} - \mu_{2x} \mu_{1,1}) \\ &+ \frac{1}{2} f_{yy} (\mu_{1,3} - \mu_{2y} \mu_{1,1}) + f_{xy}^2 (\mu_{2,2} - \mu_{1,1}^2) \end{aligned}} \quad (\text{III.36})$$

Les troisième et quatrième moments sont plus laborieux à obtenir et à écrire. Nous faisons donc appel à une série de variables intermédiaires (notées $t_{3,i}$ pour le troisième moment et $t_{4,i}$ pour le quatrième) dont nous précisons ensuite les expressions respectives.

Le **troisième moment** est donc traité.

$$\boxed{\mu_3^{(PM2)}[F]_{CD} = \mu_3^{(PM2)}[F]_X + \mu_3^{(PM2)}[F]_Y + 3t_{3,1} + 3f_{xy}t_{3,2} + 3f_{xy}^2 t_{3,3} + f_{xy}^3 t_{3,4}} \quad (\text{III.37})$$

Quatre variables intermédiaires sont utilisées. Il s'agit des termes $(t_{3,1}, t_{3,2}, t_{3,3}, t_{3,4})$. Voici l'expression du

premier d'entre eux.

$$\begin{aligned}
 t_{3,1} = & f_{xx}f_{yy}\left(\frac{1}{8}f_{xx}(\mu_{4,2} - \mu_{4x}\mu_{2y}) + \frac{1}{8}f_{yy}(\mu_{2,4} - \mu_{4y}\mu_{2x})\right) \\
 & + \frac{1}{2}f_y(\mu_{2,3} - \mu_{2x}\mu_{3y}) + \frac{1}{2}f_x(\mu_{3,2} - \mu_{2y}\mu_{3x}) \\
 & + \frac{1}{4}f_{yy}\mu_{2y}(\mu_{2x}\mu_{2y} - \mu_{2,2}) + \frac{1}{4}f_{xx}\mu_{2x}(\mu_{2x}\mu_{2y} - \mu_{2,2}) \\
 & - \frac{1}{2}(f_x\mu_{2x}\mu_{1,2} + f_y\mu_{2y}\mu_{2,1}) \\
 & + \frac{1}{2}(f_x^2f_{yy} + f_y^2f_{xx})(\mu_{2,2} - \mu_{2x}\mu_{2y}) + \frac{1}{4}(f_{xx}^2f_y\mu_{4,1} + f_{yy}^2f_x\mu_{1,4}) \\
 & + f_xf_y(f_{xx}\mu_{3,1} + f_{yy}\mu_{1,3}) + f_y\left(f_x^2 - \frac{1}{2}f_{xx}^2\mu_{2x}\right)\mu_{2,1} \\
 & + f_x\left(f_y^2 - \frac{1}{2}f_{yy}^2\mu_{2y}\right)\mu_{1,2} - f_xf_y(f_{xx}\mu_{2x} + f_{yy}\mu_{2y})\mu_{1,1}
 \end{aligned} \tag{III.38}$$

La seconde variable intermédiaire $t_{3,2}$ (pour le troisième moment statistique) est formulée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 t_{3,2} = & f_x^2(\mu_{3,1} - \mu_{1,1}\mu_{2x}) + f_y^2(\mu_{1,3} - \mu_{1,1}\mu_{2y}) \\
 & + f_xf_{xx}(\mu_{4,1} - \mu_{2x}\mu_{2,1} - \mu_{1,1}\mu_{3x}) + f_yf_{yy}(\mu_{1,4} - \mu_{2y}\mu_{1,2} - \mu_{1,1}\mu_{3y}) \\
 & + \frac{1}{4}f_{xx}^2(\mu_{5,1} - \mu_{1,1}\mu_{4x} - 2\mu_{2x}\mu_{3,1} + 2\mu_{2x}^2\mu_{1,1}) \\
 & + \frac{1}{4}f_{yy}^2(\mu_{1,5} - \mu_{1,1}\mu_{4y} - 2\mu_{2y}\mu_{1,3} + 2\mu_{2y}^2\mu_{1,1}) \\
 & + 2f_xf_y(\mu_{2,2} - \mu_{1,1}^2) + f_xf_{yy}(\mu_{2,3} - \mu_{2y}\mu_{2,1} - \mu_{1,1}\mu_{1,2}) \\
 & + f_yf_{xx}(\mu_{3,2} - \mu_{2x}\mu_{1,2} - \mu_{1,1}\mu_{2,1}) \\
 & + \frac{1}{2}f_{xx}f_{yy}(\mu_{3,3} - \mu_{2y}\mu_{3,1} - \mu_{2x}\mu_{1,3} + 2\mu_{2x}\mu_{2y}\mu_{1,1} - \mu_{1,1}\mu_{2,2})
 \end{aligned} \tag{III.39}$$

Enfin, les deux dernières valeurs intermédiaires $t_{3,3}$ et $t_{3,4}$ ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 t_{3,3} = f_x(\mu_{3,2} - 2\mu_{1,1}\mu_{2,1}) + f_y(\mu_{2,3} - 2\mu_{1,1}\mu_{1,2}) \\
 \quad + \frac{1}{2}f_{xx}(\mu_{4,2} - \mu_{2x}\mu_{2,2} - 2\mu_{1,1}\mu_{3,1} + 2\mu_{2x}\mu_{1,1}^2) \\
 \quad + \frac{1}{2}f_{yy}(\mu_{2,4} - \mu_{2y}\mu_{2,2} - 2\mu_{1,1}\mu_{1,3} + 2\mu_{2y}\mu_{1,1}^2) \\
 t_{3,4} = \mu_{3,3} - 3\mu_{1,1}\mu_{2,2} + 2\mu_{1,1}^3
 \end{array} \right.$$

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

Il reste à exprimer le **quatrième moment** $\mu_4^{(PM2)}[F]_{CD}$ associé à l'observation F .

$$\begin{aligned}
 \mu_4^{(PM2)}[F]_{CD} &= \mu_4^{(PM2)}[F]_X + \mu_4^{(PM2)}[F]_Y + 4t_{4,1} + 6t_{4,2} + 4t_{4,3} \\
 &\quad + 4f_{xy}(t_{4,4} + 3t_{4,5} + 3t_{4,6} + t_{4,7}) + 6f_{xy}^2(t_{4,8} + 2t_{4,9} + t_{4,10}) \\
 &\quad + 4f_{xy}^3(t_{4,11} + t_{4,12}) + f_{xy}^4 t_{4,13}
 \end{aligned} \tag{III.40}$$

Les treize variables intermédiaires $(t_{4,i})_{1 \leq i \leq 13}$ vont être passées en revue. On débute par le premier paramètre intermédiaire $t_{4,1}$.

$$\begin{aligned}
 t_{4,1} &= f_x^3 f_y \mu_{3,1} + \frac{3}{2} f_x^2 f_{xx} f_y (\mu_{4,1} - \mu_{2x} \mu_{2,1}) \\
 &\quad + \frac{3}{4} f_x f_y f_{xx}^2 (\mu_{5,1} - 2\mu_{2x} \mu_{3,1} + \mu_{2x}^2 \mu_{1,1}) \\
 &\quad + \frac{1}{8} f_{xx}^3 f_y (\mu_{6,1} - 3\mu_{2x} \mu_{4,1} + 3\mu_{2x}^2 \mu_{2,1}) + \frac{1}{2} f_x^3 f_{yy} (\mu_{3,2} - \mu_{2y} \mu_{3x}) \\
 &\quad + \frac{3}{4} f_{yy} f_x^2 f_{xx} (\mu_{4,2} - \mu_{2,2} \mu_{2x} - \mu_{4x} \mu_{2y} + \mu_{2x}^2 \mu_{2y}) \\
 &\quad + \frac{3}{8} f_x f_{xx}^2 f_{yy} (\mu_{5,2} - 2\mu_{2x} \mu_{3,2} - \mu_{5x} \mu_{2y} + \mu_{2x}^2 \mu_{1,2} + 2\mu_{2x} \mu_{3x} \mu_{2y}) \\
 &\quad + \frac{1}{16} f_{xx}^3 f_{yy} (\mu_{6,2} - 3\mu_{2x} \mu_{4,2} + 3\mu_{2x}^2 \mu_{2,2} - 3\mu_{2x}^3 \mu_{2y} - \mu_{2y} \mu_{6x} + 3\mu_{2x} \mu_{4x} \mu_{2y})
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

On passe au second paramètre intermédiaire $t_{4,2}$.

$$\begin{aligned}
 t_{4,2} &= f_x^2 f_y^2 \mu_{2,2} + f_x f_y^2 f_{xx} (\mu_{3,2} - \mu_{2x} \mu_{1,2}) + f_x^2 f_y f_{yy} (\mu_{2,3} - \mu_{2y} \mu_{2,1}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} f_{xx}^2 f_y^2 (\mu_{4,2} - 2\mu_{2x} \mu_{2,2} + \mu_{2x}^2 \mu_{2y}) + \frac{1}{4} f_{yy}^2 f_x^2 (\mu_{2,4} - 2\mu_{2y} \mu_{2,2} + \mu_{2y}^2 \mu_{2x}) \\
 &\quad + f_x f_y f_{xx} f_{yy} (\mu_{3,3} - \mu_{2y} \mu_{3,1} - \mu_{2x} \mu_{1,3} + \mu_{2x} \mu_{2y} \mu_{1,1}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} f_y f_{xx}^2 f_{yy} (\mu_{4,3} - 2\mu_{2x} \mu_{2,3} + \mu_{2x}^2 \mu_{3y} - \mu_{2y} \mu_{4,1} + 2\mu_{2x} \mu_{2y} \mu_{2,1}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} f_x f_{yy}^2 f_{xx} (\mu_{3,4} - 2\mu_{2y} \mu_{3,2} + \mu_{2y}^2 \mu_{3x} - \mu_{2x} \mu_{1,4} + 2\mu_{2y} \mu_{2x} \mu_{1,2}) \\
 &\quad + \frac{1}{16} f_{xx}^2 f_{yy}^2 (\mu_{4,4} - 2\mu_{2x} \mu_{2,4} - 2\mu_{2y} \mu_{4,2} + 4\mu_{2x} \mu_{2y} \mu_{2,2} + \mu_{2x}^2 \mu_{4y} + \mu_{2y}^2 \mu_{4x} - 3\mu_{2x}^2 \mu_{2y}^2)
 \end{aligned} \tag{III.42}$$

Le terme $t_{4,3}$ est obtenu à partir de $t_{4,1}$, en inversant les variables X et Y .

Voici l'expression du terme $t_{4,4}$.

$$\begin{aligned}
 t_{4,4} &= f_x^3(\mu_{4,1} - \mu_{3x}\mu_{1,1}) + \frac{3}{2}f_x^2f_{xx}(\mu_{5,1} - \mu_{2x}\mu_{3,1} - \mu_{1,1}\mu_{4x} + \mu_{1,1}\mu_{2x}^2) \\
 &+ \frac{3}{4}f_xf_{xx}^2(\mu_{6,1} - 2\mu_{2x}\mu_{4,1} + \mu_{2x}^2\mu_{2,1} - \mu_{1,1}\mu_{5x} + 2\mu_{2x}\mu_{3x}\mu_{1,1}) \\
 &+ \frac{1}{8}f_{xx}^3(\mu_{7,1} - 3\mu_{2x}\mu_{5,1} + 3\mu_{2x}^2\mu_{3,1} - \mu_{2x}^3\mu_{1,1} - \mu_{1,1}\mu_{6x} + 3\mu_{2x}\mu_{4x}\mu_{1,1} - 2\mu_{2x}^3\mu_{1,1})
 \end{aligned} \tag{III.43}$$

Le terme $t_{4,5}$, quant à lui, vaut :

$$\begin{aligned}
 t_{4,5} &= f_x^2f_y(\mu_{3,2} - \mu_{1,1}\mu_{2,1}) + f_yf_xf_{xx}(\mu_{4,2} - \mu_{2x}\mu_{2,2} - \mu_{1,1}\mu_{3,1} + \mu_{2x}\mu_{1,1}^2) \\
 &+ \frac{1}{4}f_yf_{xx}^2(\mu_{5,2} - 2\mu_{2x}\mu_{3,2} + \mu_{2x}^2\mu_{1,2} - \mu_{1,1}\mu_{4,1} + 2\mu_{2x}\mu_{1,1}\mu_{2,1}) \\
 &+ \frac{1}{2}f_x^2f_{yy}(\mu_{3,3} - \mu_{2y}\mu_{3,1} - \mu_{1,1}\mu_{2,2} + \mu_{1,1}\mu_{2x}\mu_{2y}) \\
 &+ \frac{1}{2}f_xf_{xx}f_{yy}(\mu_{4,3} - \mu_{2y}\mu_{4,1} - \mu_{1,1}\mu_{3,2} + \mu_{1,1}\mu_{3x}\mu_{2y} - \mu_{2x}\mu_{2,3} + \mu_{2,1}\mu_{2x}\mu_{2y} + \mu_{1,1}\mu_{1,2}\mu_{2x}) \\
 &+ \frac{1}{8}f_{xx}^2f_{yy}(\mu_{5,3} - \mu_{2y}\mu_{5,1} - \mu_{1,1}\mu_{4,2} + \mu_{2y}\mu_{4x}\mu_{1,1} - 2\mu_{2x}\mu_{3,3} \\
 &+ 2\mu_{2x}\mu_{2y}\mu_{3,1} + 2\mu_{2x}\mu_{1,1}\mu_{2,2} + \mu_{2x}^2\mu_{1,3} - 3\mu_{2x}^2\mu_{2y}\mu_{1,1})
 \end{aligned} \tag{III.44}$$

Le terme $t_{4,6}$ est obtenu à partir de $t_{4,5}$, en inversant les variables X et Y .
De même, le terme $t_{4,7}$ est obtenu à partir de $t_{4,4}$, en inversant les variables X et Y .
Passons donc au terme $t_{4,8}$.

$$\begin{aligned}
 t_{4,8} &= f_x^2(\mu_{4,2} - 2\mu_{1,1}\mu_{3,1} + \mu_{2x}\mu_{1,1}^2) + f_xf_{xx}(\mu_{5,2} - \mu_{2x}\mu_{3,2} - 2\mu_{4,1}\mu_{1,1} + 2\mu_{2x}\mu_{2,1}\mu_{1,1} + \mu_{1,1}^2\mu_{3x}) \\
 &+ \frac{1}{4}f_{xx}^2(\mu_{6,2} - 2\mu_{2x}\mu_{4,2} + \mu_{2x}^2\mu_{2,2} - 2\mu_{5,1}\mu_{1,1} + 4\mu_{2x}\mu_{3,1}\mu_{1,1} - 3\mu_{2x}^2\mu_{1,1}^2 + \mu_{4x}\mu_{1,1}^2)
 \end{aligned} \tag{III.45}$$

L'expression du terme $t_{4,9}$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
 t_{4,9} &= f_xf_y(\mu_{3,3} - 2\mu_{1,1}\mu_{2,2} + \mu_{1,1}^3) \\
 &+ \frac{1}{2}f_{xx}f_y(\mu_{4,3} - \mu_{2x}\mu_{2,3} - 2\mu_{1,1}\mu_{3,2} + 2\mu_{2x}\mu_{1,1}\mu_{1,2} + \mu_{1,1}^2\mu_{2,1}) \\
 &+ \frac{1}{2}f_{yy}f_x(\mu_{3,4} - \mu_{2y}\mu_{3,2} - 2\mu_{1,1}\mu_{2,3} + 2\mu_{2y}\mu_{1,1}\mu_{2,1} + \mu_{1,1}^2\mu_{1,2}) \\
 &+ \frac{1}{4}f_{xx}f_{yy}(\mu_{4,4} - \mu_{2y}\mu_{4,2} - \mu_{2x}\mu_{2,4} - 2\mu_{1,1}\mu_{3,3} + \mu_{2x}\mu_{2y}\mu_{2,2} \\
 &+ 2\mu_{1,1}(\mu_{2y}\mu_{3,1} + \mu_{2x}\mu_{1,3}) + \mu_{1,1}^2(\mu_{2,2} - 3\mu_{2x}\mu_{2y}))
 \end{aligned} \tag{III.46}$$

Le terme $t_{4,10}$ est obtenu à partir de $t_{4,8}$, en inversant les variables X et Y .

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

Passons donc au terme $t_{4,11}$.

$$\begin{aligned}
 t_{4,11} &= f_x(\mu_{4,3} - 3\mu_{1,1}\mu_{3,2} + 3\mu_{1,1}^2\mu_{2,1}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(\mu_{5,3} - \mu_{2x}\mu_{3,3} - 3\mu_{1,1}\mu_{4,2} + 3\mu_{2x}\mu_{1,1}\mu_{2,2} + 3\mu_{1,1}^2\mu_{3,1} - 3\mu_{1,1}^3\mu_{2x})
 \end{aligned}
 \tag{III.47}$$

Le terme $t_{4,12}$ est obtenu à partir de $t_{4,11}$, en inversant les variables X et Y . Enfin, l'ultime terme intermédiaire $t_{4,13}$ a pour expression :

$$t_{4,13} = \mu_{4,4} - 4\mu_{1,1}\mu_{3,3} + 6\mu_{1,1}^2\mu_{2,2} - 3\mu_{1,1}^4 \tag{III.48}$$

Ces quatre expressions de moment se simplifient considérablement si nous considérons que les deux variables aléatoires ΔX et ΔY sont indépendantes. Dans ce cas, on a en effet :

$$\mu_{r,j} = \mu_{rx}\mu_{jy} \quad \forall r \geq 1 \text{ et } \forall j \geq 1$$

En particulier, les termes du style $\mu_{1,j}$ ou $\mu_{r,1}$ sont automatiquement nuls. On rappelle que la moyenne de ΔX ou de ΔY est nulle par hypothèse.

Lorsque les deux variables d'entrée sont indépendantes, le moment d'ordre r associé à l'observation F et calculé par la méthode des moments d'ordre 2 sera noté $\mu_r^{(PM2)}[F]_{CI}$. L'indice inférieur CI rappelle que nous nous situons dans le cadre de deux variables (effet Croisé) Indépendantes.

Avec **deux variables d'entrée indépendantes**, nous allons réexprimer les quatre premiers moments de l'observation F , en commençant par la moyenne.

$$\boxed{\mu_1^{(PM2)}[F]_{CI} = \mu_1^{(PM2)}[F]_X + \mu_1^{(PM2)}[F]_Y - f_0} \tag{III.49}$$

Le deuxième moment s'écrit comme suit :

$$\boxed{\mu_2^{(PM2)}[F]_{CI} = \mu_2^{(PM2)}[F]_X + \mu_2^{(PM2)}[F]_Y + f_{xy}^2\mu_{2x}\mu_{2y}} \tag{III.50}$$

Le troisième moment vaut :

$$\begin{aligned}
 \mu_3^{(PM2)}[F]_{CI} &= \mu_3^{(PM2)}[F]_X + \mu_3^{(PM2)}[F]_Y \\
 &\quad + 3f_{xy}(2f_x f_y \mu_{2x}\mu_{2y} + f_x f_{yy}\mu_{2x}\mu_{3y} + f_y f_{xx}\mu_{2y}\mu_{3x} + \frac{1}{2}f_{xx} f_{yy}\mu_{3x}\mu_{3y}) \\
 &\quad + 3f_{xy}^2(f_x \mu_{3x}\mu_{2y} + f_y \mu_{3y}\mu_{2x} + \frac{1}{2}f_{xx}\mu_{2y}(\mu_{4x} - \mu_{2x}^2) + \frac{1}{2}f_{yy}\mu_{2x}(\mu_{4y} - \mu_{2y}^2)) \\
 &\quad + f_{xy}^3\mu_{3x}\mu_{3x}
 \end{aligned}
 \tag{III.51}$$

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

Enfin, le quatrième moment va faire intervenir huit termes intermédiaires, notés $(g_{4,i})_{1 \leq i \leq 8}$.

$$\begin{aligned}
 \mu_4^{(PM2)}[F]_{CI} &= \mu_4^{(PM2)}[F]_X + \mu_4^{(PM2)}[F]_Y \\
 &+ 6\mu_2^{(PM2)}[F]_X \mu_2^{(PM2)}[F]_Y \\
 &+ 12f_{xy}(g_{4,1} + g_{4,2}) + 6f_{xy}^2(g_{4,3} + 2g_{4,4} + g_{4,5}) \\
 &+ 4f_{xy}^3(g_{4,6} + g_{4,7}) + f_{xy}^4 g_{4,8}
 \end{aligned} \tag{III.52}$$

Nous allons donc passer en revue ces huit termes intermédiaires $(g_{4,i})_{1 \leq i \leq 8}$.
Le terme $g_{4,1}$ a pour expression :

$$\begin{aligned}
 g_{4,1} &= f_x^2 f_y \mu_{3x} \mu_{2y} + f_x f_y f_{xx} (\mu_{4x} - \mu_{2x}^2) \mu_{2y} \\
 &+ \frac{1}{4} f_{xx}^2 f_y (\mu_{5x} - 2\mu_{2x} \mu_{3x}) \mu_{2y} + \frac{1}{2} f_x^2 f_{yy} \mu_{3x} \mu_{3y} \\
 &+ \frac{1}{2} f_x f_{xx} f_{yy} (\mu_{4x} - \mu_{2x}^2) \mu_{3y} \\
 &+ \frac{1}{8} f_{xx}^2 f_{yy} (\mu_{5x} - 2\mu_{2x} \mu_{3x}) \mu_{3y}
 \end{aligned} \tag{III.53}$$

Le terme $g_{4,2}$ est obtenu à partir de $g_{4,1}$, en inversant les variables X et Y .
Le terme $g_{4,3}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 g_{4,3} &= f_x^2 \mu_{4x} \mu_{2y} + f_x f_{xx} (\mu_{5x} - \mu_{2x} \mu_{3x}) \mu_{2y} \\
 &+ \frac{1}{4} f_{xx}^2 (\mu_{6x} - 2\mu_{2x} \mu_{4x} + \mu_{2x}^3) \mu_{2y}
 \end{aligned} \tag{III.54}$$

Le terme suivant ($g_{4,4}$) a pour expression :

$$\begin{aligned}
 g_{4,4} &= f_x f_y \mu_{3x} \mu_{3y} + \frac{1}{2} f_{xx} f_y (\mu_{4x} - \mu_{2x}^2) \mu_{3y} \\
 &+ \frac{1}{2} f_{yy} f_x (\mu_{4y} - \mu_{2y}^2) \mu_{3x} \\
 &+ \frac{1}{4} f_{xx} f_{yy} (\mu_{4x} \mu_{4y} - \mu_{4x} \mu_{2y}^2 - \mu_{4y} \mu_{2x}^2 + \mu_{2x}^2 \mu_{2y}^2)
 \end{aligned} \tag{III.55}$$

Le terme $g_{4,5}$ est obtenu à partir de $g_{4,3}$, en inversant les variables X et Y .
Le terme $g_{4,6}$ s'écrit :

$$g_{4,6} = f_x \mu_{4x} \mu_{3y} + \frac{1}{2} f_{xx} (\mu_{5x} - \mu_{2x} \mu_{3x}) \mu_{3y} \tag{III.56}$$

Le terme $g_{4,7}$ est obtenu à partir de $g_{4,6}$, en inversant les variables X et Y .

Enfin, le terme $g_{4,8}$ a pour expression :

$$g_{4,8} = \mu_{4x} \mu_{4y} \tag{III.57}$$

Lors des cas-test qui vont suivre, les variables incertaines seront toujours supposées indépendantes deux à deux.

Comme pour le cas d'une seule variable incertaine, nous allons spécifier les expressions de moment de l'observation F en présence de deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent la loi normale (écarts-type σ_x et σ_y respectivement). Cette nouvelle hypothèse a le mérite de simplifier grandement les formules analytiques.

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

Le moment d'ordre r de l'observation F sera noté $\mu_r^{(PM2)}[F]_{CI,LN}$. Les indices inférieurs CI et LN rappellent que nous étudions **l'effet Croisé entre deux variables Indépendantes qui suivent toutes deux la Loi Normale**.

Les quatre premiers moments de l'observation F sont formulés ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{(PM2)}[F]_{CI,LN} = \mu_1^{(PM2)}[F]_X + \mu_1^{(PM2)}[F]_Y - f_0 \\ \mu_2^{(PM2)}[F]_{CI,LN} = \mu_2^{(PM2)}[F]_X + \mu_2^{(PM2)}[F]_Y + f_{xy}^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 \\ \mu_3^{(PM2)}[F]_{CI,LN} = \mu_3^{(PM2)}[F]_X + \mu_3^{(PM2)}[F]_Y + 6f_{xy} f_x f_y \sigma_x^2 \sigma_y^2 \\ \quad + 3f_{xy}^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 (f_{xx} \sigma_x^2 + f_{yy} \sigma_y^2) \\ \mu_4^{(PM2)}[F]_{CI,LN} = \mu_4^{(PM2)}[F]_X + \mu_4^{(PM2)}[F]_Y + 6\mu_2^{(PM2)}[F]_X \mu_2^{(PM2)}[F]_Y \\ \quad + 24f_{xy} f_x f_y \sigma_x^2 \sigma_y^2 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \\ \quad + 6f_{xy}^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 (f_x^2 \sigma_x^2 + f_y^2 \sigma_y^2 + \frac{5}{2}(f_{xx}^2 \sigma_x^4 + f_{yy}^2 \sigma_y^4) + 2f_{xx} f_{yy} \sigma_x^2 \sigma_y^2) \\ \quad + 9f_{xy}^4 \sigma_x^4 \sigma_y^4 \end{array} \right. \quad (III.58)$$

La méthode des moments n'est bien sûr pas limitée au cas de deux variables aléatoires uniquement. Pour le montrer, nous allons spécifier l'expression des quatre premiers moments avec la méthode des moments d'ordre 2 dans le cas de N_v paramètres incertains.

Méthode des moments pour le cas de N_v variables d'entrée incertaines

Dans un souci de généralisation, nous explicitons les expressions des quatre premiers moments statistiques d'une observation scalaire dépendant d'**un nombre quelconque de variables incertaines**. Cette explicitation est fondamentale dans un contexte industriel, sachant que nous pouvons nous trouver en présence d'une dizaine de paramètres d'entrée incertains.

Pour aboutir aux expressions des quatre premiers moments de la fonction scalaire f vis-à-vis de N_v variables incertaines, il suffit de repartir et de généraliser les expressions des moments établies dans le cas d'une seule variable.

Pour cela, nous utiliserons la somme multi-indices de la forme suivante :

$$\sum_{i_1, i_2=1}^2 \mu_{i_1, i_2} = \mu_{1,1} + \mu_{2,1} + \mu_{1,2} + \mu_{2,2} \quad (III.59)$$

Bien sûr, les moments sont naturellement étendus au cas de plusieurs variables. Voici la notation adoptée :

$$\mu_{i_1, i_2, i_3, i_4} = E[\Delta X_{i_1} \Delta X_{i_2} \Delta X_{i_3} \Delta X_{i_4}] \quad (III.60)$$

où les grandeurs ΔX_{i_1} , ΔX_{i_2} , ΔX_{i_3} et ΔX_{i_4} sont les variables incertaines pas forcément distinctes.

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

De même, on adopte la notation suivante pour les dérivées de l'observation f :

$$f_{i_1, i_2, i_3, i_4} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} \quad (\text{III.61})$$

où les variables x_{i_1} , x_{i_2} , x_{i_3} et x_{i_4} ne sont pas forcément distinctes.

Le **premier moment** $\mu_1^{(PM2)}[F]_{CD}$ de l'observation f (variable aléatoire F) vis-à-vis de N_v variables incertaines avec effet Croisé et Dépendance (indice CD) vaut :

$$\mu_1^{(PM2)}[F]_{CD} = f_0 + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^{N_v} f_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} \quad (\text{III.62})$$

Le **second moment** $\mu_2^{(PM2)}[F]_{CD}$ vaut :

$$\begin{aligned} \mu_2^{(PM2)}[F]_{CD} = & \sum_{i_1, i_2=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2} \mu_{i_1, i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2, i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + \\ & \frac{1}{4} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^{N_v} f_{i_1, i_2} f_{i_3, i_4} (\mu_{i_1, i_2, i_3, i_4} - \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4}) \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

Le **troisième moment** $\mu_3^{(PM2)}[F]_{CD}$ vaut :

$$\begin{aligned} \mu_3^{(PM2)}[F]_{CD} = & \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + \frac{3}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3, i_4} (\mu_{i_1, i_2, i_3, i_4} - \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4}) \\ & + \frac{3}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2, i_3} f_{i_4, i_5} \left(\frac{1}{2} \mu_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} - \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4, i_5} \right) \\ & + \frac{1}{8} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6=1}^{N_v} f_{i_1, i_2} f_{i_3, i_4} f_{i_5, i_6} (2\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \mu_{i_5, i_6} - 3\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4, i_5, i_6} + \mu_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}) \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

Enfin, le quatrième moment $\mu_4^{(PM2)}[F]_{CD}$ vaut :

$$\begin{aligned}
 \mu_4^{(PM2)}[F]_{CD} = & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \mu_{i_1, i_2, i_3, i_4} \\
 & + 2 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} f_{i_5} (\mu_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} - \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4, i_5}) \\
 & + \frac{3}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} f_{i_5} f_{i_6} (\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \mu_{i_5, i_6} - 2\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4, i_5, i_6} + \mu_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7=1}^{N_v} f_{i_1} f_{i_2, i_3} f_{i_4, i_5} f_{i_6, i_7} (3\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \mu_{i_5, i_6, i_7} \\
 & - 3\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4, i_5, i_6, i_7} + \mu_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7}) \\
 & + \frac{1}{16} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8=1}^{N_v} f_{i_1, i_2} f_{i_3, i_4} f_{i_5, i_6} f_{i_7, i_8} (-3\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \mu_{i_5, i_6} \mu_{i_7, i_8} \\
 & + 6\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \mu_{i_5, i_6, i_7, i_8} - 4\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8} + \mu_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8})
 \end{aligned}
 \tag{III.65}$$

Comme son nom l'indique, la méthode des moments permet d'estimer numériquement les moments statistiques de la variable aléatoire étudiée. Dans notre cas, il s'agit de l'observation scalaire en sortie du code de calcul. Une étape supplémentaire est donc nécessaire pour passer des moments statistiques calculés à la loi de probabilité cherchée. Nous nous tournerons vers le système de Pearson. L'annexe E propose d'étudier la performance de la stratégie de reconstruction d'une fonction monomiale à l'aide de la méthode des moments couplée avec le système de Pearson. L'intérêt de cette annexe est aussi d'analyser l'importance de passer à l'ordre 2 dans le développement de Taylor (à la base de la méthode des moments) afin de disposer d'une loi de probabilité réaliste.

Pour fixer les idées, la figure III.12 schématise la stratégie de propagation d'incertitude lorsque la méthode des moments est utilisée.

Après avoir introduit successivement les quatre principales techniques de propagation d'incertitude (méthodes Monte-Carlo, Monte-Carlo approchée, chaos polynomial et méthode des moments), nous allons décrire la méthodologie employée pour procéder à leur analyse comparative.

1.3.5 Stratégie générale pour l'étude comparée des méthodes de propagation d'incertitude

Quatre méthodes de propagation d'incertitude viennent d'être présentées. Il s'agit des méthodes Monte-Carlo, Monte-Carlo approchée, du chaos polynomial et de la méthode des moments.

Pour récapituler brièvement la présentation de chacune de ces techniques et surtout pour spécifier leur rôle dans l'étude comparative qui va suivre, nous allons passer en revue ces quatre techniques.

- La **méthode Monte-Carlo** n'est pas envisageable en contexte industriel en raison de son coût de calcul. Il faut en effet environ dix milles appels au code de calcul pour disposer d'une densité de probabilité fiable en sortie. Cette méthode ne sera donc pas envisagée lors des tests.
- Nous nous focaliserons plutôt sur une variante **Monte-Carlo** moins coûteuse, qui utilise une **surface**

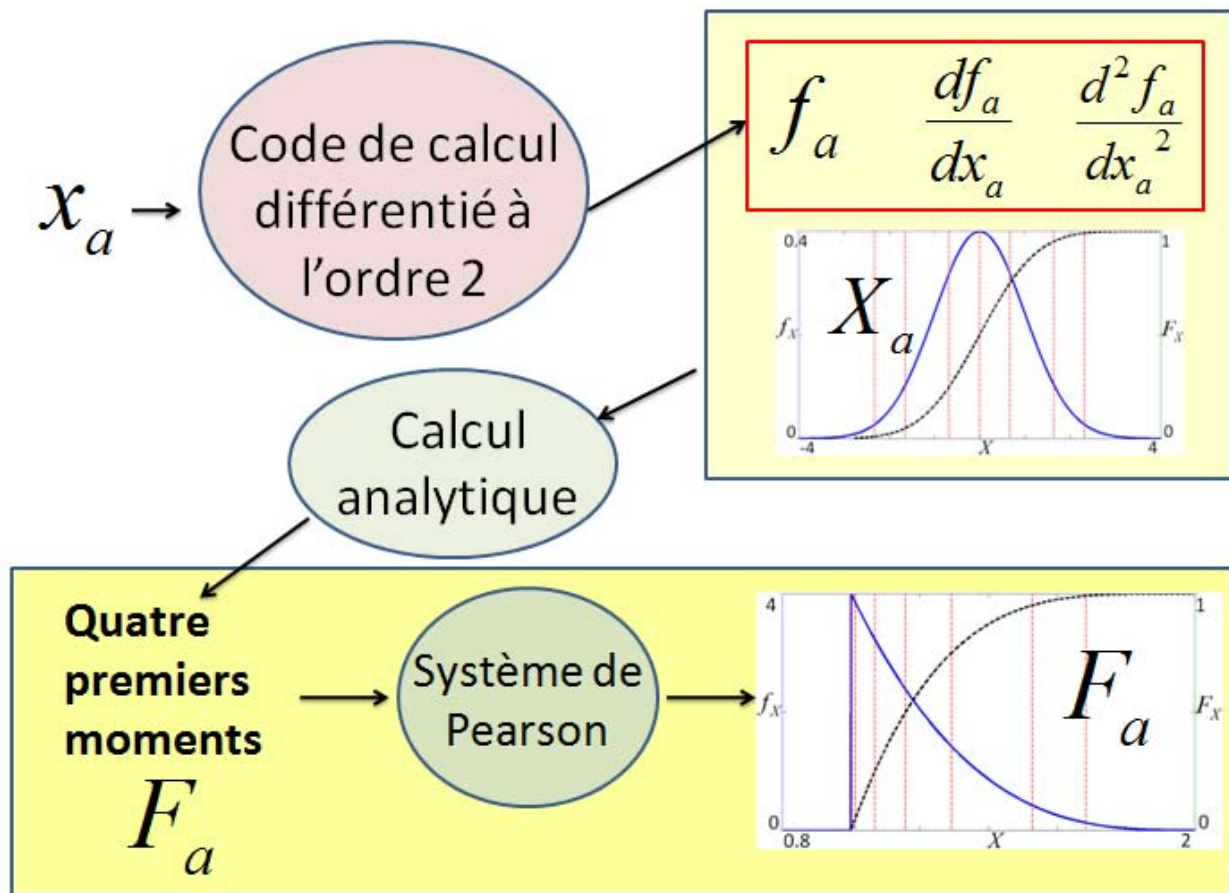


Figure III.12 – Schéma récapitulatif de la stratégie de propagation d'incertitude, en adoptant la méthode des moments (ou technique de perturbation).

de réponse de l'observation pour les tirages aléatoires. La densité de probabilité construite par cette voie sera considérée comme notre référence. C'est pourquoi, nous nous arrangerons pour construire un modèle approché suffisamment fiable afin de ne pas dégrader significativement la méthode Monte-Carlo. Pour cela, une série de calculs exacts sera utilisée. Nous n'analyserons pas le coût minimal nécessaire pour atteindre un certain niveau de précision. Par contre, cette référence va nous servir à valider les deux dernières techniques de propagation d'incertitude.

- La **méthode du chaos polynomial** va être analysée. On rappelle qu'il s'agit ici de la technique de collocation, qui est une variante non intrusive. Nous chercherons en particulier à mesurer le nombre minimal de points de collocation pour disposer d'une densité de probabilité fiable (ie proche de la référence donnée par la technique Monte-Carlo approchée).
- Enfin, la **méthode des moments** sera développée. L'objectif de la validation est double. D'une part, nous mettrons en évidence le gain important lié au passage de l'ordre 1 à l'ordre 2 dans le développement de Taylor de l'observation, qui est à la base de la méthode des moments. La différentiation des codes industriels de Dassault Aviation à l'ordre 2 (cf le premier chapitre de la thèse) trouvera ainsi un intérêt concret. D'autre part, nous comparerons la méthode des moments à la méthode du chaos polynomial. Nous verrons celle qui offre le meilleur compromis entre le coût de calcul et la fiabilité de la densité de probabilité construite en sortie.

Pour toutes les méthodes de propagation d'incertitude considérées, la méthodologie générale reste la même. Dans un premier temps, les quatre premiers moments statistiques de l'observation sont évalués par **propagation d'incertitude**. Pour cela, on fait appel soit à la méthode Monte-Carlo approchée, soit au chaos polynomial,

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

soit à la méthode des moments. Les expressions des moments statistiques issus de ces trois méthodes ont été explicitées lors des sous-parties précédentes. Disposant de ces quatre moments, la distribution de probabilité est construite via le **système de Pearson**. Cette étape constitue le second temps du processus de propagation d'incertitude.

Le système de Pearson consiste à associer une loi de probabilité aux quatre moments statistiques en puisant dans une bibliothèque de distributions connues. Parmi la grande variété de distributions connues, la suite de ce chapitre va faire appel à cinq familles de loi de probabilité. Ces dernières sont ici brièvement décrites. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe D de cette thèse pour une présentation plus détaillée du système de Pearson. Nous passons en revue les cinq principales familles de distribution auxquelles il est possible d'aboutir avec le système de Pearson. Les paramètres associés sont également précisés.

- La **loi Normale** (ou Gaussienne) est une loi symétrique d'extension infinie. Elle possède deux paramètres : la moyenne p_1 et l'écart-type p_2 .
- La **loi Bêta** est une loi d'extension bornée, pouvant être symétrique ou dissymétrique. Elle possède quatre paramètres. Les deux premiers (notés p_1 et p_2) contrôlent la forme de la distribution. Les deux autres (p_3 et p_4) sont les bornes et contrôlent par conséquent l'extension de la loi Bêta.
- La **loi Gamma** est une loi semi-bornée et donc dissymétrique. Trois paramètres sont associés à cette loi Gamma. Les deux premiers (notés p_1 et p_2) contrôlent la forme de la distribution. Le dernier paramètre p_3 est la borne.
- La **loi de Fisher** est une loi semi-bornée dissymétrique possédant quatre paramètres (p_1, p_2, p_3 et p_4).
- La **loi de Student** est une loi symétrique d'extension infinie. Elle possède deux paramètres, notés p_1 et p_2 .

Le tableau III.2 fournit les expressions des fonctions de densité de ces cinq familles de distribution². Notons que le choix des paramètres gouvernant les lois n'est évidemment pas unique mais résulte d'un choix arbitraire. Au passage, on remarque que la loi de Fisher fait apparaître la variable x_0 qui est une transformation de la variable x , transformation faisant intervenir les paramètres p_3 et p_4 (on renvoie le lecteur à l'annexe D de cette thèse pour la définition de ce changement de variable).

Au final, le système de Pearson délivre une distribution de probabilité par méthode de propagation investiguée. Notons que nous ferons varier le nombre de points de collocation pour le chaos polynomial et que les développements de Taylor d'ordres 1 et 2 seront testés avec la méthode des moments.

Nous avons également souligné que la méthode Monte-Carlo approchée permet de construire une approximation de la densité de probabilité de l'observation sans avoir à passer par le système de Pearson. Dans ce cas, un histogramme est construit sur la base des tirages aléatoires effectués sur la surface de réponse. Cette alternative sera exploitée pour contrôler la validité de la reconstruction d'une distribution de probabilité par le système de Pearson. Il suffit pour cela de vérifier la conformité entre le résultat de Pearson et l'histogramme construit par la méthode Monte-Carlo approchée.

A ce titre, rappelons que la méthode Monte-Carlo et le chaos polynomial peuvent se passer du calcul des moments pour trouver une loi connue (ie analytique) qui approxime la loi cherchée. En effet, ces techniques de propagation d'incertitude permettent d'accéder à une fonction de répartition. Différentes techniques, comme le test statistique de Kolmogorov-Smirnov qui suppose que l'utilisateur intuite une loi (type et paramètres fixés a priori) cf [MAS51] et [DEW59], sont ensuite capables de savoir si la loi associée à cette fonction de répartition peut être assimilée à une loi connue.

Toute cette méthodologie est récapitulée en figure III.13. Ce schéma montre les différentes voies pour passer de l'aléa d'entrée à une incertitude en sortie du code de calcul. Bien plus, la figure III.13 met l'accent sur les deux niveaux d'analyse. La précision du système de Pearson est contrôlée par la méthode Monte-Carlo approchée. Une fois ce point vérifié, les densités de probabilité fournies par Pearson avec le chaos polynomial et la méthode des moments seront analysées. La méthode Monte-Carlo approchée servira alors de référence.

2. Les notations Γ et B désignent les fonctions spéciales Gamma et Bêta respectivement. D'autre part, la grandeur $U_{[a,b]}$ est la fonction valant 1 entre a et b et 0 ailleurs.

Loi	Expression de la densité
Normale	$\frac{1}{p_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-p_1)^2}{2p_2^2}\right)$
Bêta	$\frac{1}{B(p_1, p_2)} \frac{(x-p_3)^{p_1-1}(p_4-x)^{p_2-1}}{(p_4-p_3)^{p_1+p_2-1}} U_{[p_3, p_4]}$
Gamma	$\frac{1}{p_2^{p_1}\Gamma(p_1)}(x-p_3)^{p_1-1}\exp\left(-\frac{x-p_3}{p_2}\right)U_{[p_3, +\infty]}$
Fisher	$\frac{\Gamma\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{2}\right)} \frac{\left(\frac{p_1}{2}\right)^{\frac{p_1}{2}}}{\left(1+\frac{p_1}{p_2}x_0\right)^{\frac{p_1+p_2}{2}}} \frac{\frac{p_1-2}{2}x_0}{\frac{p_1+p_2}{2}} U_{[0, +\infty]}$
Student	$\frac{1}{\sqrt{\pi p_1}} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{2}\right)} \left(1+\frac{(x-p_2)^2}{p_1}\right)^{-\frac{p_1+1}{2}}$

Tableau III.2 – Expressions des densités de probabilité de cinq familles de distribution appartenant à la bibliothèque des distributions du système de Pearson.

Une étude similaire a porté cette fois-ci sur la comparaison de la méthode des moments et de la stratégie Monte-Carlo (cf [MAR08]).

Lors de la présentation de la méthode des moments, l'expression des quatre premiers moments statistiques de l'observation peut être grandement simplifiée si les variables incertaines sont indépendantes. Se pose alors la question suivante : comment savoir si deux paramètres peuvent être considérés comme indépendants ? Différents tests statistiques de rejet existent pour cela. Dans le cas de variables aléatoires continues, quatre tests sont possibles (la liste n'étant pas exhaustive). Il s'agit des tests de Fisher (cf [FIS22] ou [FIS34]), de khi-2 [YUL15], de Spearman [SCH95] et de Kendall [ABD07]. Soulignons que les deux derniers tests (Spearman et Kendall) sont recommandés dans le cadre de variables aléatoires continues, les tests de Fisher et de khi-2 étant avant tout dédiés aux problèmes mettant en jeu des variables aléatoires discrètes.

Notre étude repose donc sur la comparaison des densités de probabilité issues des différentes variantes pour propager l'incertitude des paramètres d'entrée jusqu'à l'observation en sortie du code de calcul. En particulier, les densités de probabilité de l'observation construites par les deux techniques d'étude (**chaos polynomial et méthode des moments**) seront comparées à la référence, issue de la technique Monte-Carlo approchée. Notons au passage que la comparaison ne porte pas seulement sur deux méthodes différentes (méthode des moments *vs* chaos polynomial) mais aussi sur deux visions différentes (vision locale pour la méthode des moments *vs* vision globale pour le chaos polynomial).

Il est maintenant temps de préciser les moyens utilisés pour mesurer la proximité entre deux distributions de probabilité. Ils seront de deux natures différentes : visuelle et numérique. Ces deux stratégies sont complémen-

III.1 Méthodologie générale pour la prise en compte des incertitudes

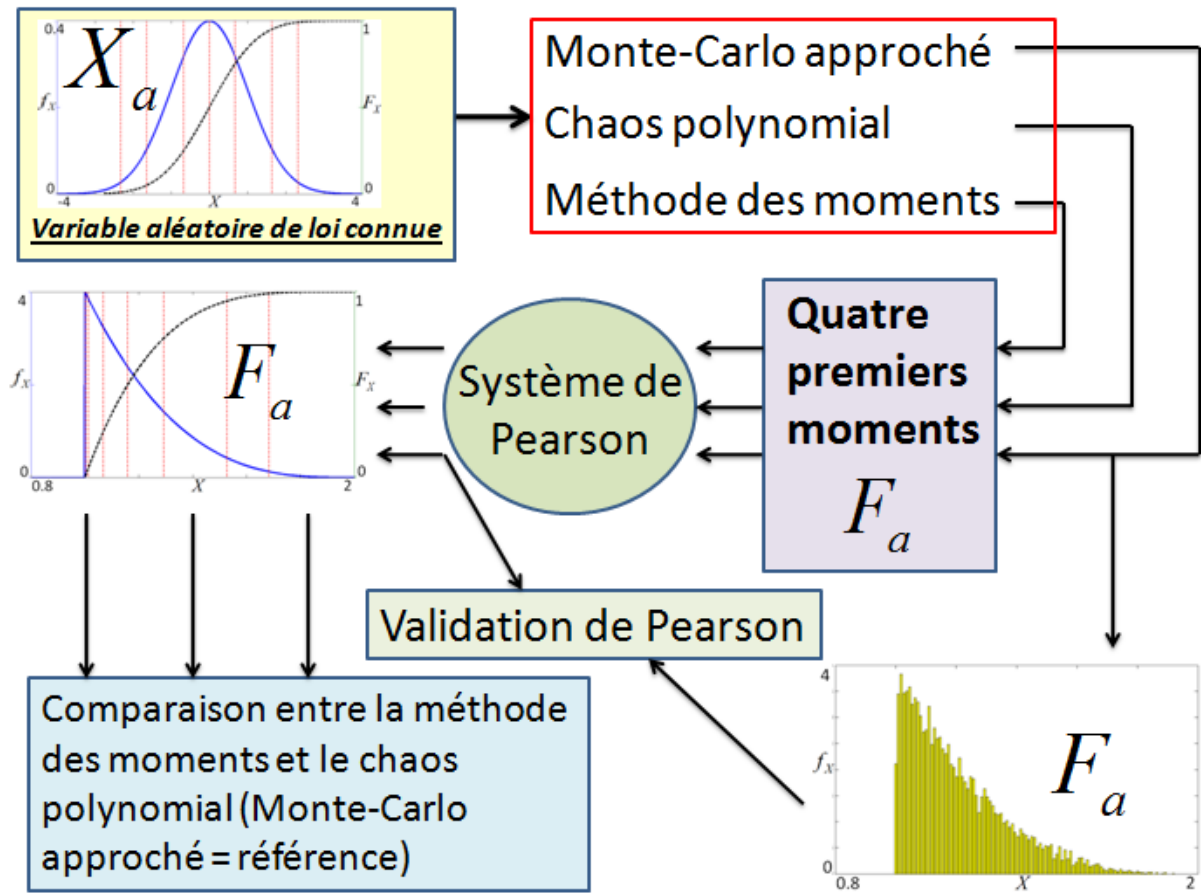


Figure III.13 – Schéma récapitulatif de la stratégie générale liée à la propagation d'incertitude (passer de la distribution de probabilité sur le paramètre X_a à une distribution sur l'observation F_a).

taires, permettant d'avoir une vision qualitative et quantitative des résultats probabilistes.

La validation visuelle va consister à tracer les densités de probabilité et les fonctions de répartition issues des diverses méthodes. Les sept quantiles seront également placés. Finalement, les figures obtenues seront similaires à celles proposées en figure III.5. Nous serons sensible à la position des distributions (moyenne), au niveau de dispersion (écart-type) et à la forme générale des courbes. En particulier, il s'agira de constater si le côté dissymétrique de la densité (facilement identifiable) est bien capté par les méthodes que nous comparons. Un moyen de faciliter la comparaison visuelle de deux densités de probabilité est de tracer l'une en mode histogramme et l'autre sous forme d'une courbe continue. Si les deux lois sont identiques, la courbe continue suit l'évolution en escaliers de l'histogramme. En guise d'illustration, prenons la loi normale centrée réduite. La figure III.14 représente simultanément cette loi sous forme d'une courbe continue (à gauche) et sous forme d'un histogramme obtenu via dix millions de tirages (à droite). Il est souvent d'usage de rajouter le tracé de la fonction de répartition et des sept quantiles pour la distribution en trait continu.

La figure III.15 est un exemple de comparaison visuelle fréquemment utilisée au cours de ce chapitre.

Pour mesurer la différence entre deux distributions de probabilité de manière plus quantitative, nous ferons appel aux sept quantiles présentés précédemment, à savoir $Q_{1\%}$, $Q_{5\%}$, $Q_{25\%}$, $Q_{50\%}$, $Q_{75\%}$, $Q_{95\%}$ et $Q_{99\%}$. Supposons que deux techniques différentes ont permis d'estimer le quantile $Q_{100\%}$. Ces deux valeurs sont notées

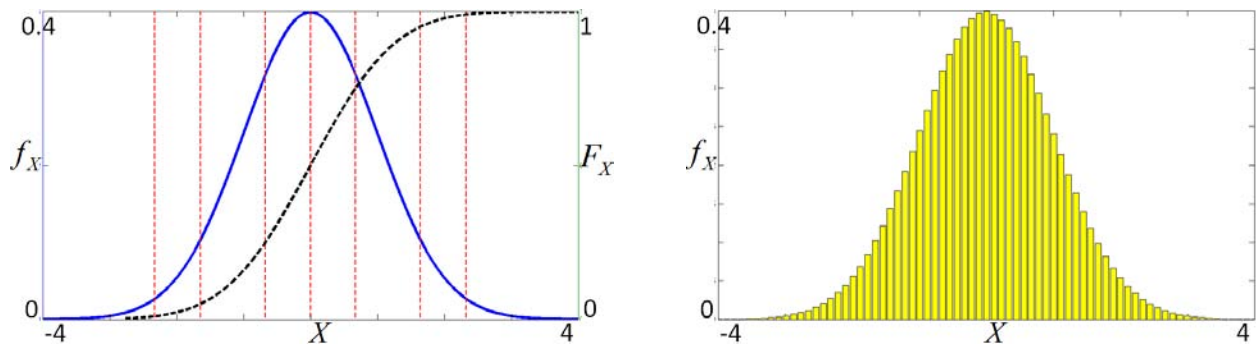


Figure III.14 – Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite, sous forme de loi continue (à gauche) et d’histogramme obtenu avec dix millions de tirages (à droite). La fonction de répartition (en noir) et les sept quantiles (en rouge) sont aussi tracés sur la figure de gauche.

$Q_{100q\%}^{(1)}$ et $Q_{100q\%}^{(2)}$. Associée à ce quantile $Q_{100q\%}$, l’erreur $e_{100q\%}$ sera calculée :

$$e_{100q\%} = 100 \frac{|Q_{100q\%}^{(1)} - Q_{100q\%}^{(2)}|}{\sigma^{(2)}}$$

où $\sigma^{(2)}$ est l’écart-type issu de la méthodologie numéro deux. Dans nos analyses ultérieures, la seconde méthode comparée (indice supérieur (2)) sera notre référence, à savoir la technique Monte-Carlo approchée. Suivant le contexte, il peut être question de l’histogramme ou de la loi de Pearson, tous deux issus de la même méthodologie (à savoir Monte-Carlo approchée).

La comparaison entre le chaos et la méthode des moments se fera aussi en terme de coût de calcul à précision donnée. Pour simplifier les estimations de coût, on fera l’hypothèse qu’un calcul de fonction avec dérivées (premières et/ou secondes) équivaut à deux calculs simples. Cette correspondance est volontairement en défaveur de la méthode des moments dont on souhaite montrer l’intérêt.

Les méthodes de propagation d’incertitude vont donc être testées sur différents cas-test de la mécanique des fluides, en commençant par l’aile ONERA M6 (problème Euler 3D).

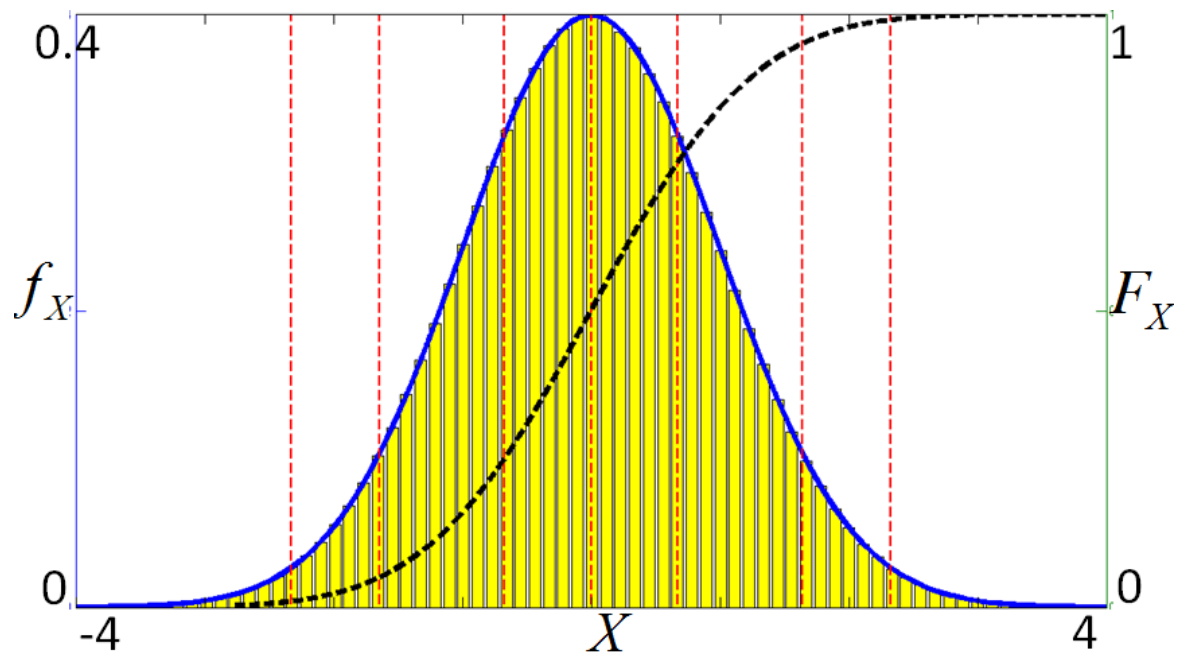


Figure III.15 – Exemple de comparaison visuelle en superposant la courbe continue et l’histogramme de la loi normale centrée réduite, représentés séparément en figure III.14.

2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

2.1 Etude comparative entre la méthode des moments et la méthode du chaos polynomial

L'objectif de cette section est de tester les méthodes de propagation d'incertitude en contexte aérodynamique.

Dans cette optique, nous envisageons le cas-test de l'aile ONERA M6 (problème Euler en 3 dimensions). Le maillage volumique utilisé comprend 27499 sommets. La figure III.16 propose la vue d'une coupe de maillage volumique (agrandissement) ainsi qu'une visualisation de la discrétisation de la peau de la voilure. Le nombre de Mach sera fixé à 0.84 (écoulement transsonique avec chocs attachés) et l'angle d'incidence est égal à 3.06° .

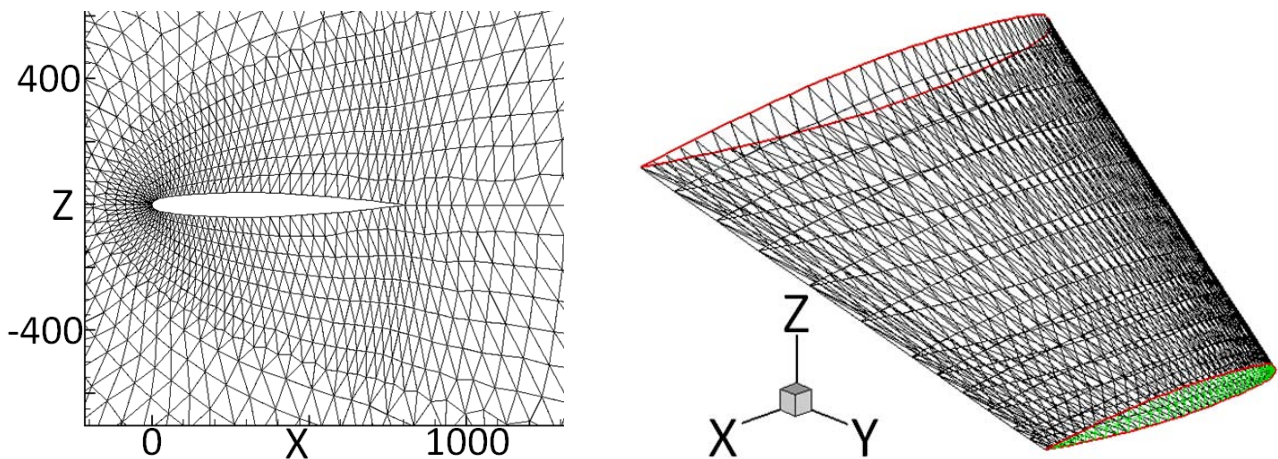


Figure III.16 – Visualisations de l'aile ONERA M6, cas-test Euler 3D.

Le but général de l'étude sera de construire la distribution de probabilité associée à une observation aérodynamique (trainée ou portance) lorsque certains paramètres jouant sur la forme du profil sont incertains. Ces paramètres aléatoires sont l'angle de rotation globale α_R , l'angle de cambrure de bord de fuite α_C et l'épaisseur relative e_P . Les effets d'une modification de chacune de ces trois variables sur la géométrie de l'objet aérodynamique sont donnés en figure III.17.

Les méthodes de propagation d'incertitude testées sont les suivantes.

- La **méthode Monte-Carlo approchée**. Une surface de réponse sera construite via un ensemble de calculs exacts. Dans toute la suite, la technique d'interpolation est le krigeage (corrélation exponentielle avec régression quadratique).
- Le **chaos polynomial** (version non intrusive, aussi appelée méthode de collocation). Lorsque le nombre de points de collocation est strictement inférieur à cinq, les calculs de la fonction seront exacts. Dans le cas contraire, nous nous servirons de la surface de réponse (celle qui est utilisée par la méthode Monte-Carlo approchée) pour évaluer l'observation aérodynamique aux points de collocation.
- La **méthode des moments**. Les dérivées de la fonction aérodynamique seront évaluées sur la base de la différentiation automatique des codes industriels (cf le premier chapitre de cette thèse).

L'idée est de comparer l'efficacité des deux techniques suivantes : le chaos polynomial et la méthode des moments. L'idée est de faire varier le nombre de points de collocation pour l'une et l'ordre du développement

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

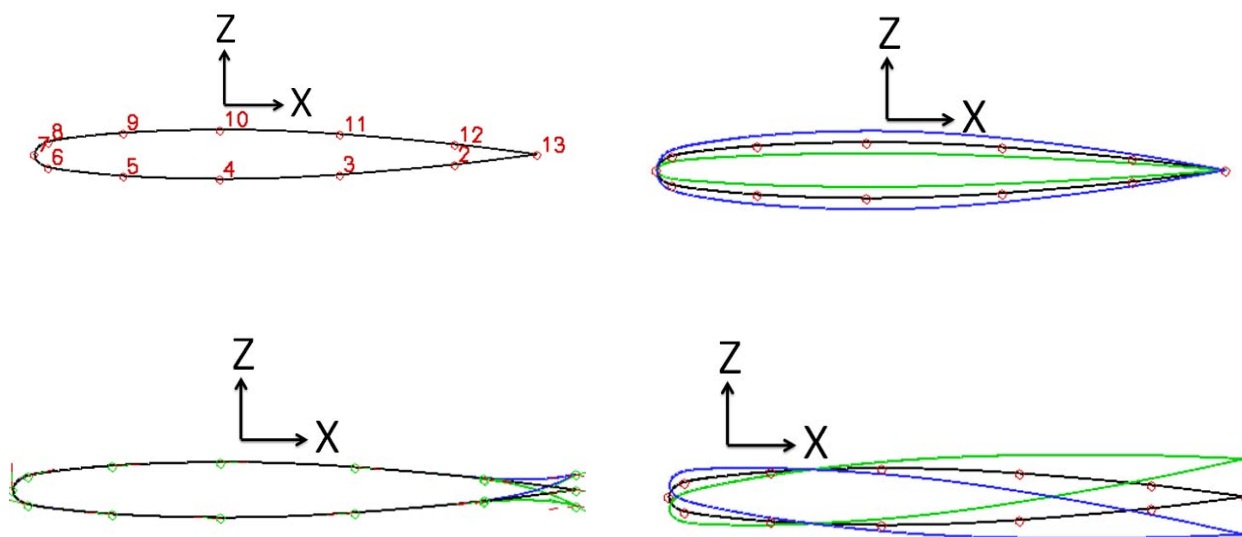


Figure III.17 – Forme nominale de la géométrie de l'aile ONERA M6 (en noir) avec la position des points de contrôle (figure en haut à gauche). Les effets d'un changement d'épaisseur relative ($e_P = 0.6$ (vert), $e_P = 1$ (noir) et $e_P = 1.4$ (bleu)), d'angle de cambrure de bord de fuite ($\alpha_C = -20^\circ$ (vert), $\alpha_C = 0^\circ$ (noir) et $\alpha_C = 20^\circ$ (bleu)) et d'angle de rotation globale ($\alpha_R = -5^\circ$ (vert), $\alpha_R = 0^\circ$ (noir) et $\alpha_R = 5^\circ$ (bleu)) sont donnés de haut en bas et de gauche à droite.

de Taylor pour l'autre. En particulier, nous déterminerons le nombre de points de collocation nécessaire pour atteindre la précision offerte par la méthode des moments d'ordres 1 ou 2.

Nous ferons l'hypothèse que la surface de réponse est suffisamment précise pour permettre à la méthode Monte-Carlo approchée de servir de référence aux deux autres variantes. Ainsi, la distribution de probabilité calculée par la technique de référence (méthode Monte-Carlo approchée) servira de base pour estimer les erreurs de quantile. Visuellement, nous ferons appel à l'histogramme construit par la technique de référence pour apprécier la pertinence des densités de probabilité reconstruites par Pearson.

Dans toute notre analyse comparative, nous raisonnerons à écart-type fixé pour les deux variables d'entrée. Il s'agit de 0.3° pour α_R et 0.6° pour α_C .

L'idée est d'effectuer l'analyse d'incertitude autour du minimum de la fonction étudiée. Pour cela, on commence par considérer le cas de l'angle de rotation globale incertaine, la traînée faisant office d'observation. La figure III.18 montre la nouvelle position de la valeur déterministe de l'angle de rotation globale autour de laquelle l'aléa sur la traînée va être estimé. Cette valeur correspond au minimum de traînée.

A la vue du tableau III.3 récapitulant la reconstruction de la loi de traînée, les niveaux de dissymétrie (troisième moment) et d'aplatissement (quatrième moment) sont beaucoup plus élevés que dans le cas où l'étude se fait autour de la forme nominale du profil (cf tableau ??).

On retrouve le fait que le chaos à trois points n'est pas en mesure d'estimer le quatrième moment statistique. Bien plus, même le troisième moment du chaos à trois points n'est pas correct. Il faut passer à quatre points de collocation pour avoir le troisième moment de traînée proche de la référence (ie aussi proche que celui de la méthode des moments d'ordre 2). Par contre, cinq points de collocation sont nécessaires pour le quatrième moment statistique de traînée. De ce fait, on peut penser que le chaos a besoin de cinq points de collocation (en contexte mono-variable) pour être aussi précis que la méthode des moments d'ordre 2. Voyons si cette prédiction

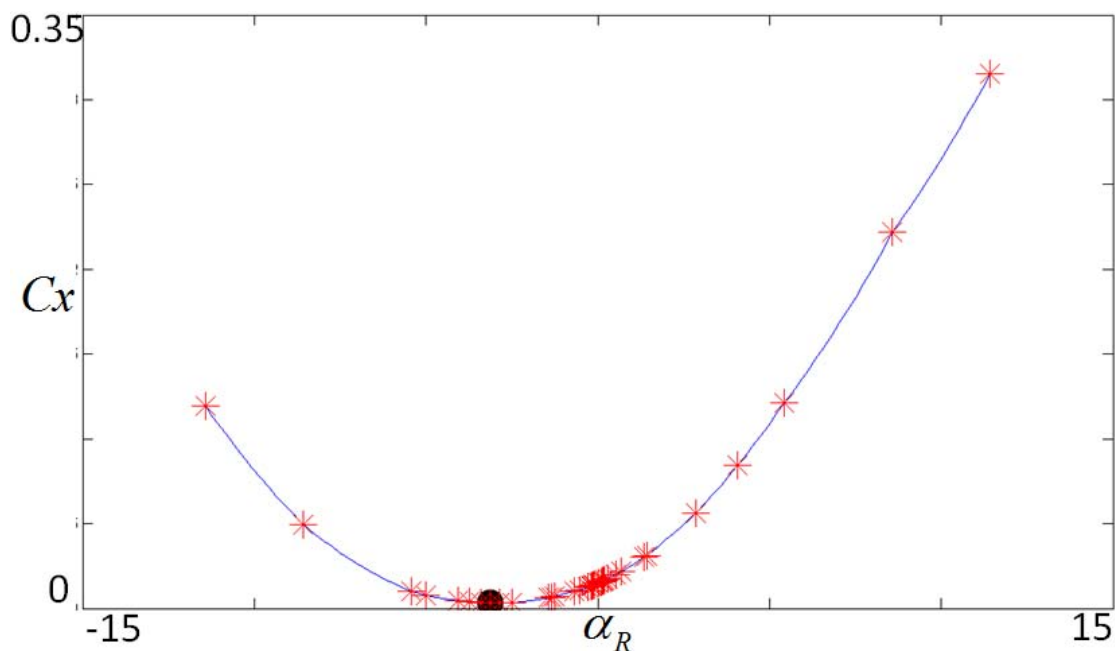


Figure III.18 – Evolution de la traînée C_x en fonction de l'angle de rotation globale α_R pour le profil de l'aile ONERA M6, avec la nouvelle position du point nominal (point noir).

se confirme en analysant les indicateurs visuels et numériques de comparaison.

On commence par considérer le tracé des densités de probabilité de traînée par les différentes méthodes proposées (cf figures III.19 et III.20).

D'emblée, on est frappé par la dissymétrie prononcée de l'aléa affectant la traînée. Ceci rend la méthode des moments d'ordre 1 encore plus aberrante. La remarque essentielle est que l'amélioration liée au passage de quatre à cinq points de collocation est bel et bien visible dans ce cas. Bien plus, la méthode des moments d'ordre 2 est visuellement proche du chaos à cinq points, que la loi d'entrée soit normale (figure III.19) ou uniforme (figure III.20).

Cette impression visuelle est confirmée par les erreurs de quantile (tableau III.4). Le chaos à trois points donne un niveau d'erreur nettement supérieur à celui correspondant à la méthode des moments d'ordre 2. Même quatre points de collocation ne suffisent pas à avoir un niveau d'erreur plus faible. Il faut donc passer à cinq points pour retrouver l'intérêt du chaos (ie avoir une erreur inférieure à celle de la méthode des moments d'ordre 2).

Pour finir cette analyse comparative, plaçons-nous au minimum de la surface d'évolution de la traînée vis-à-vis des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C (cf figure ??). L'étude d'incertitude à deux variables est menée autour de cette nouvelle position nominale. Les erreurs de quantile (tableau III.5) montrent que le chaos polynomial à trois points est moins précis que la méthode des moments d'ordre 2. Il faut donc passer à seize points (grille quatre par quatre) pour disposer d'une approximation au moins aussi pertinente que l'analyse locale basée sur les sensibilités. Notons que même ces seize points aboutissent à une erreur légèrement supérieure à celle de la méthode des moments d'ordre 2 dans le cas des lois normales en entrée.

Le fait de mener l'analyse d'incertitude autour d'un extremum de la fonction vient compliquer la tâche du chaos polynomial. En revanche, la méthode des moments d'ordre 2 reste efficace.

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

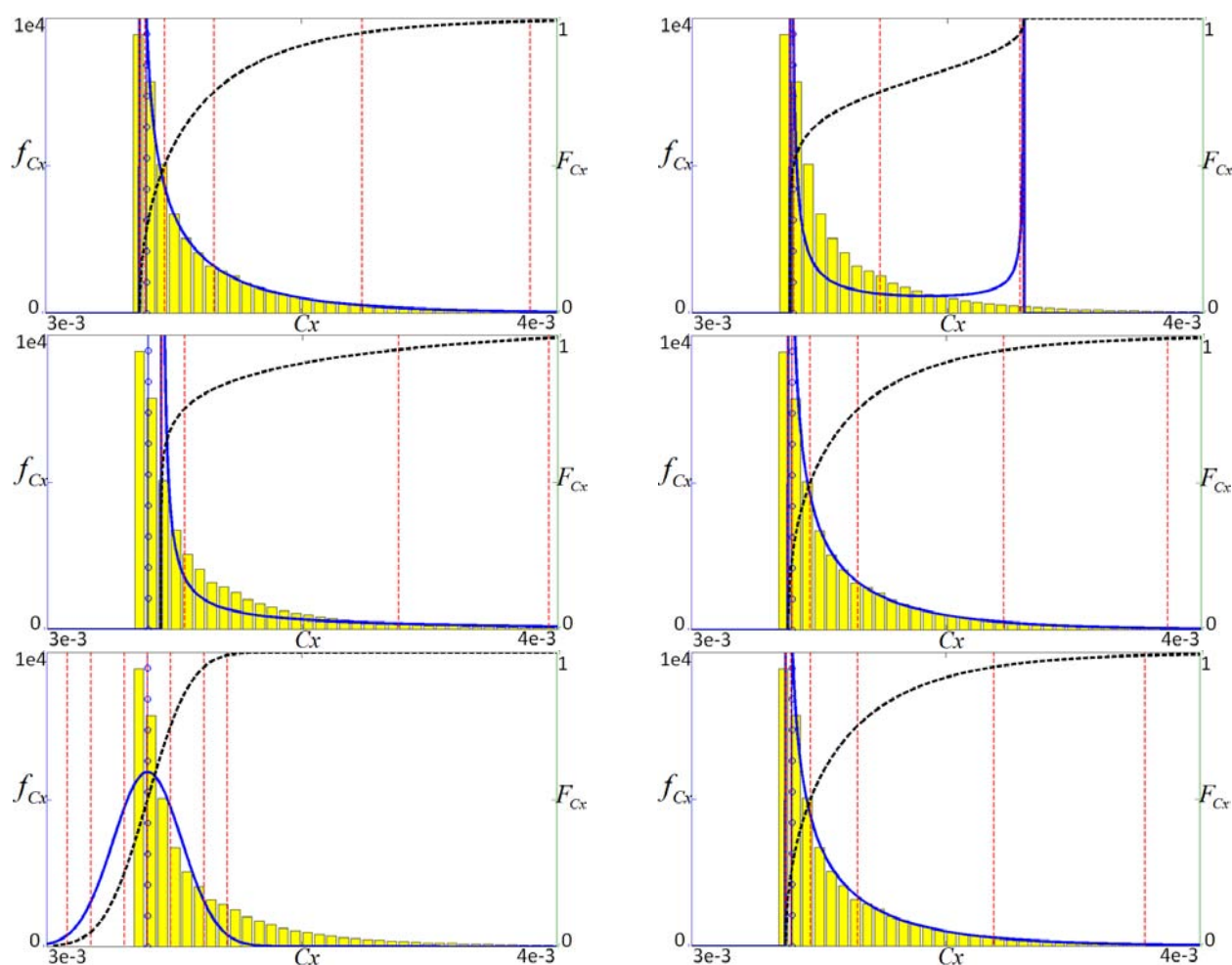


Figure III.19 – Reconstructions de la loi de probabilité de la traînée C_x via les méthodes MCa, PC3, PC4, PC5, PM1 et PM2 (de gauche à droite et de haut en bas) lorsque l'angle de rotation globale α_R suit la loi normale d'écart-type 0.3° autour du profil déformé de l'aile ONERA M6 (angle de rotation globale égal à -3.125°).

Pour fixer les idées, le nombre de points de collocation nécessaire pour avoir une meilleure précision que la méthode des moments d'ordre 2 va être donné ci-dessous pour les deux configurations précédentes (étude autour de la forme nominale ou déformée du profil de l'aile ONERA M6). On oublie le cas d'une grille anisotrope supposant la connaissance de la variable prépondérante.

- Autour de la forme nominale du profil, le nombre de points est de trois (voire quatre avec la loi normale en entrée) en mode mono-variable. Il passe à neuf en présence de deux variables.
- Autour de la forme déformée (minimum de traînée), le nombre de points est de cinq en mode mono-variable. Il passe à seize en présence de deux variables.

Cette étude comparative a donc permis de démontrer l'intérêt de faire appel à la méthode des moments³, beaucoup plus efficace en terme de compromis coût-précision que le chaos polynomial. Cette affirmation se vérifie d'autant plus que le nombre de paramètres incertains augmente ou que le point d'étude est proche d'un

3. On rappelle que le coût de la méthode des moments (ordres 1 ou 2) est fixé à deux calculs d'observation (ce qui équivaut à deux points de collocation).

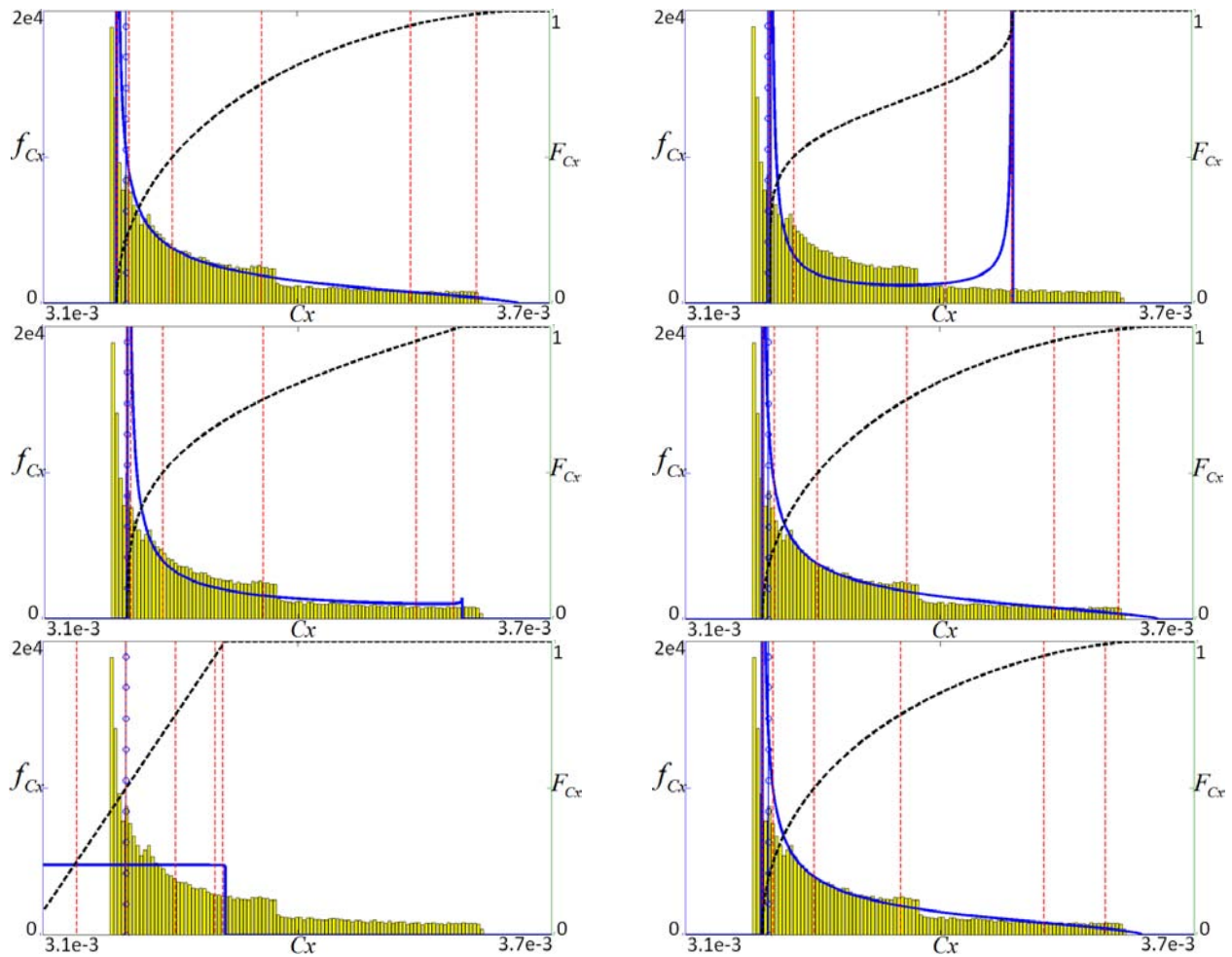


Figure III.20 – Reconstructions de la loi de probabilité de la traînée C_x via les méthodes MCa, PC3, PC4, PC5, PM1 et PM2 (de gauche à droite et de haut en bas) lorsque l'angle de rotation globale α_R suit la loi uniforme d'écart-type 0.3° autour du profil déformé de l'aile ONERA M6 (angle de rotation globale égal à -3.125°).

extremum de la fonction.

Sur la base de cette méthode des moments, effectuons différentes études d'incertitude. Le but est de souligner la pertinence de notre méthodologie (méthode des moments suivie du système de Pearson) ainsi que d'illustrer les applications concrètes liées à la prise en compte des incertitudes en aérodynamique.

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

		Moyenne	Ecart-type	Asymétrie	Aplatissement
[N]	MCa	32.96 cts	1.62 cts	2.96	16.42
		PEARSON → Loi de Fisher(9.60e-1,170.14,-1.63e-2,3.18e-3)			
	PC3	32.97 cts	1.57 cts	1.26	2.98
		PEARSON → Loi Bêta(1.15e-1,3.86e-1) - bornes=[3.19e-3,3.65e-3]			
	PC4	32.96 cts	1.60 cts	2.88	10.86
		PEARSON → Loi Bêta(1.08e-1,1.24) - bornes=[3.22e-3,4.13e-3]			
	PC5	32.96 cts	1.58 cts	2.95	15.93
		PEARSON → Loi Bêta(4.43e-1,123.36) - bornes=[3.19e-3,3.27e-2]			
	PC6	32.95 cts	1.61 cts	2.84	15.14
		PEARSON → Loi Gamma(5.07e-1,2.25e-4) - borne=3.18e-3			
	PM1	31.98 cts	1.61 cts	0.00	3.00
		PEARSON → Loi Normale(3.20e-3,6.73e-5)			
PM2	32.92 cts	1.49 cts	2.78	14.51	
	PEARSON → Loi Gamma(5.02e-1,2.13e-4) - borne=3.18e-3				
		Moyenne	Ecart-type	Asymétrie	Aplatissement
[U]	MCa	32.95 cts	1.13 cts	1.12	3.33
		PEARSON → Loi Bêta(4.76e-1,1.62) - bornes=[3.19e-3,3.66e-3]			
	PC3	32.95 cts	1.11 cts	7.07e-1	1.80
		PEARSON → Loi Bêta(1.55e-1,3.14e-1) - bornes=[3.20e-3,3.49e-3]			
	PC4	32.93 cts	1.13 cts	1.12	3.02
		PEARSON → Loi Bêta(2.98e-1,9.41e-1) - bornes=[3.20e-3,3.59e-3]			
	PC5	32.98 cts	1.12 cts	1.11	3.31
		PEARSON → Loi Bêta(4.72e-1,1.59) - bornes=[3.19e-3,3.66e-3]			
	PC6	32.94 cts	1.14 cts	1.11	3.30
		PEARSON → Loi Bêta(4.75e-1,1.59) - bornes=[3.18e-3,3.66e-3]			
	PM1	31.98 cts	6.73e-1 cts	0.00	1.80
		PEARSON → Loi Bêta(1.00,1.00) - bornes=[3.08e-3,3.31e-3]			
PM2	32.92 cts	1.08 cts	1.12	3.31	
	PEARSON → Loi Bêta(4.60e-1,1.56) - bornes=[3.19e-3,3.64e-3]				

Tableau III.3 – Moments statistiques et lois de Pearson de la traînée C_x , issus de la technique Monte-Carlo approchée (MCa), de la technique du chaos polynomial à i points (PC i) ou de la méthode des moments d'ordre i (PM i) dans le cas de l'angle de rotation globale α_R (écart-type 0.3°) incertain (loi d'entrée de type normal [N] ou uniforme [U]) autour du profil déformé de l'aile ONERA M6 (angle de rotation globale égal à -3.125°).

		$e_{1\%}$	$e_{5\%}$	$e_{25\%}$	$e_{50\%}$	$e_{75\%}$	$e_{95\%}$	$e_{99\%}$	en moyenne
[N]	PC3	3.2	3.0	1.0	13.9	15.9	9.3	122.4	24.1
	PC4	16.0	15.9	11.8	3.4	24.7	28.4	14.4	16.4
	PC5	2.4	2.4	1.6	2.0e-1	1.1	2.5	5.7	2.3
	PC6	1.4	1.3	7.3e-1	1.9e-1	7.3e-1	1.5	7.4	1.9
	PM1	58.7	40.0	17.3	14.3	35.6	127.5	243.4	76.7
	PM2	4.1e-1	4.4e-1	7.0e-1	5.6e-1	1.3	10.0	22.8	5.2
		$e_{1\%}$	$e_{5\%}$	$e_{25\%}$	$e_{50\%}$	$e_{75\%}$	$e_{95\%}$	$e_{99\%}$	en moyenne
[U]	PC3	2.2	2.2	9.0e-2	4.0	8.1	7.9	20.6	6.4
	PC4	1.8	1.7	9.1e-2	2.1	3.4e-2	8.3e-1	4.7	1.6
	PC5	6.7e-1	6.7e-1	6.1e-1	5.3e-1	4.1e-1	7.0e-2	2.7e-1	4.6e-1
	PC6	3.1e-1	3.1e-1	2.9e-1	1.7e-1	2.9e-2	1.2e-1	3.8e-2	1.8e-1
	PM1	16.8	15.4	10.1	9.0	16.7	38.0	49.2	22.2
	PM2	5.9e-2	5.7e-1	3.2e-1	1.9e-1	8.6e-1	2.1	3.0	1.1

Tableau III.4 – Erreurs de quantile de la traînée C_x associées à la technique du chaos polynomial à i points (PCi) ou à la méthode des moments d'ordre i (PMi) dans le cas de l'angle de rotation globale α_R (écart-type 0.3°) incertain (loi d'entrée de type normal [N] ou uniforme [U]) autour du profil déformé de l'aile ONERA M6 (angle de rotation globale égal à -3.125°).

		$e_{1\%}$	$e_{5\%}$	$e_{25\%}$	$e_{50\%}$	$e_{75\%}$	$e_{95\%}$	$e_{99\%}$	en moyenne
[N,N]	PC3x3	5.6	5.5	3.2	1.3	7.5	17.1	16.0	8.0
	PC4x4	5.3	5.2	1.9	4.7	7.8	4.2	8.7	5.4
	PC5x5	4.3	4.3	4.0	3.1	1.1	3.7	7.2	4.0
	PC6x6	2.7	2.7	2.4	1.6	3.0e-1	1.7	1.5	1.8
	PM1	46.1	30.2	11.5	10.8	32.8	120.7	227.9	68.6
	PM2	5.1	5.1	5.2	5.0	3.5	2.2	9.1	5.0
		$e_{1\%}$	$e_{5\%}$	$e_{25\%}$	$e_{50\%}$	$e_{75\%}$	$e_{95\%}$	$e_{99\%}$	en moyenne
[U,U]	PC3x3	6.3	6.0	2.8	7.6e-1	1.6	3.2	13.5	4.9
	PC4x4	2.7e-1	3.6e-1	1.2	1.9	1.4	3.6e-1	5.7e-1	8.7e-1
	PC5x5	3.2	3.2	3.2	2.9	2.1	6.8e-1	1.1e-1	2.2
	PC6x6	1.3	1.3	1.2	8.8e-1	4.6e-1	1.8e-1	4.7e-1	8.2e-1
	PM1	33.4	26.7	14.2	14.6	34.0	94.1	144.1	51.6
	PM2	5.1	5.1	4.6	3.8	2.5	1.2	5.7	4.0

Tableau III.5 – Erreurs de quantile de la traînée C_x associées à la technique du chaos polynomial à i points suivant α_R et j points suivant α_C (PCixj) ou à la méthode des moments d'ordre i (PMi) dans le cas de l'angle de rotation globale α_R (écart-type 0.3°) et de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C (écart-type 0.6°) incertains (lois d'entrée de type normal [N,N] ou uniforme [U,U] pour $[\alpha_R, \alpha_C]$) autour du profil déformé de l'aile ONERA M6 (angle de rotation globale égal à -3.125°).

2.2 Analyse d'incertitude sur la base de la méthode des moments

Dans cette étude d'incertitude, nous raisonnons à nouveau autour de la forme nominale du profil (angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C nuls et épaisseur relative e_P unitaire). Par défaut, les écarts-type d'entrée sont les mêmes que précédemment (à savoir 0.3° , 0.6° et 0.03 pour α_R , α_C et e_P respectivement).

Dans toute cette partie, nous nous baserons sur la méthode des moments d'ordres 1 et 2, en plus d'exécuter la méthode Monte-Carlo approchée prise comme référence. A chaque fois, nous serons attentif à l'apport des dérivées secondes, même si nous ne relèverons pas systématiquement cet aspect.

2.2.1 Influence de la forme de la loi d'entrée sur le comportement aléatoire de la sortie

En pratique, une analyse d'incertitude peut être motivée par l'une des deux informations suivantes.

- L'évaluation de l'écart-type de l'observation de sortie, donnant le degré de dispersion dû à l'aléa d'entrée. Cette évaluation est notamment utile pour construire des bornes de tolérance.
- Le calcul de quantile, dans le but d'estimer une probabilité de défaillance par exemple.

L'objectif de cette étude va être d'évaluer la dépendance de ces deux informations de sortie vis-à-vis de la forme de la loi de probabilité d'entrée (raisonnement à écart-type fixé).

Six lois de probabilité vont être successivement associées à l'angle de rotation globale α_R . Il s'agit de la loi normale, de la loi uniforme et des lois Bêta B_1 , B_2 , B_3 et B_4 . Les paramètres associés aux deux premières lois Bêta ont été présentés lors de la section précédente (cf tableau ??). Quant aux lois Bêta B_3 et B_4 , le tableau III.6 en fournit les caractéristiques. Ces dernières ne sont pas forcément réalistes au regard de leur dissymétrie extrêmement forte (notamment B_4). Elles vont néanmoins enrichir notre analyse.

	Moyenne	Ecart-type	Asymétrie	Aplatissement
B_3	0°	0.3°	5.4	43.7
	Loi Bêta(0.1,10) - bornes=[-1.00e-1,10]			
B_4	0°	0.3°	19.7	579.6
	Loi Bêta(0.01,100) - bornes=[-3.01e-2,301.51]			

Tableau III.6 – Caractéristiques des lois Bêta B_3 et B_4 envisagées pour l'angle de rotation globale α_R afin d'analyser l'impact de la forme de la loi d'entrée sur la sortie, étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

Le degré de dispersion (écart-type ou coefficient de variation) de la traînée, ainsi que les sept quantiles de référence, sont récapitulés par le tableau III.7. Rappelons que le coefficient de variation (couramment noté CoV) est le quotient de l'écart-type sur la valeur absolue de la moyenne.

En se basant sur les quatre lois de probabilité de dissymétrie raisonnable (lois normale, uniforme et Bêta B_1 et B_2), on remarque que la forme de la distribution d'entrée influence davantage les quantiles que la dispersion de la traînée. Que ce soit les quantiles extrêmes ($Q_{1\%}$ ou $Q_{99\%}$) ou la médiane $Q_{50\%}$, les écarts sont au moins égaux à 10 counts. Au contraire, l'écart-type ne varie que de deux counts environ (autour de 26 counts). Il faut passer à des lois d'entrée extrêmement dissymétriques (lois Bêta B_3 et B_4) pour doubler l'écart-type de la traînée (de 26 à 66 counts). Au passage, on remarque que l'ordre 1 n'est pas suffisant pour prédire cette variation. Ainsi, la forme de la distribution d'entrée n'est pas neutre sur le degré de dispersion de la sortie, mais a beaucoup moins d'influence que sur les quantiles. Les quantiles résultent d'une intégration partielle de la loi de la traînée, contrairement à la mesure de la dispersion. Ceci explique la différence d'influence, la forme d'une loi (à écart-type fixé) jouant en priorité sur la répartition de la densité de probabilité et non sur l'intensité globale de l'incertitude.

		σ	CoV	$Q_{1\%}$	$Q_{5\%}$	$Q_{25\%}$	$Q_{50\%}$	$Q_{75\%}$	$Q_{95\%}$	$Q_{99\%}$
N	MCa	25.8	1.7e-1	98.6	111.7	132.7	149.2	167.1	195.8	217.9
	PM1	25.5	1.7e-1	89.8	107.2	131.9	149.0	166.2	190.9	208.2
	PM2	25.6	1.7e-1	99.2	111.7	132.6	149.0	167.1	196.9	218.8
U	MCa	25.6	1.7e-1	111.0	113.4	128.1	149.3	172.6	193.1	197.7
	PM1	25.5	1.7e-1	105.8	109.3	127.0	149.0	171.1	188.7	192.3
	PM2	25.5	1.7e-1	111.6	113.7	128.2	149.1	172.4	193.1	197.9
B_1	MCa	27.9	1.8e-1	126.9	127.0	129.6	139.7	163.2	212.0	241.9
	PM1	25.4	1.7e-1	125.2	125.4	128.6	139.6	162.3	203.6	225.4
	PM2	27.8	1.8e-1	127.4	127.5	129.7	139.4	162.9	212.0	241.4
B_2	MCa	26.6	1.8e-1	117.5	118.9	128.6	144.8	168.2	203.1	220.8
	PM1	25.4	1.7e-1	113.6	115.8	127.5	144.7	167.0	196.9	210.2
	PM2	26.5	1.8e-1	117.9	119.2	128.6	144.7	168.1	203.1	220.7
B_3	MCa	36.8	2.4e-1	141.6	141.6	141.6	141.6	142.7	194.7	321.8
	PM1	25.4	1.7e-1	140.6	140.6	140.6	140.6	143.7	191.0	271.7
	PM2	36.0	2.4e-1	141.5	141.5	141.5	141.5	142.8	194.6	318.3
B_4	MCa	61.1	4.1e-1	147.8	147.8	147.8	147.8	147.8	147.8	162.2
	PM1	25.5	1.7e-1	146.5	146.5	146.5	146.5	146.5	147.2	213.5
	PM2	66.6	4.4e-1	147.6	147.6	147.6	147.6	147.6	147.6	164.8

Tableau III.7 – Ecart-type (σ , en counts), coefficients de variation (CoV , sans dimension) et quantiles ($Q_{100q\%}$ pour le q-quantile, en counts) associés à la traînée Cx lorsque l'angle de rotation globale α_R (écart-type 0.3°) suit une loi Normale (N), Uniforme (U) ou Bêta (variantes B_1 , B_2 , B_3 et B_4), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

2.2.2 Influence de l'écart-type de la loi d'entrée sur le comportement aléatoire de la sortie

Reprenons l'étude précédente, en faisant maintenant varier l'écart-type d'entrée à type de loi fixé. L'angle de rotation globale α_R sera successivement associé à un écart-type de 0.01° , 0.3° et 0.8° (loi normale puis loi uniforme). Le but est de connaître l'impact de la dispersion d'entrée sur la dispersion de sortie d'une part et sur l'évaluation des quantiles de l'observation (traînée Cx) d'autre part.

Les informations de dispersion et de quantile de la traînée Cx obtenues en faisant varier la dispersion de l'angle de rotation globale α_R sont indiquées dans le tableau III.8.

		σ	CoV	$Q_{1\%}$	$Q_{5\%}$	$Q_{25\%}$	$Q_{50\%}$	$Q_{75\%}$	$Q_{95\%}$	$Q_{99\%}$
$N(0.01)$	MCa	8.5e-1	5.7e-3	147.1	147.6	148.5	149.0	149.6	150.4	151.0
	PM1	8.5e-5	5.7e-3	147.1	147.6	148.5	149.0	149.6	150.4	151.0
	PM2	8.5e-5	5.7e-3	147.1	147.6	148.4	149.0	149.6	150.4	151.0
$N(0.3)$	MCa	25.8	1.7e-1	98.6	111.7	132.7	149.2	167.1	195.8	217.9
	PM1	25.5	1.7e-1	89.8	107.7	131.9	149.0	166.2	190.9	208.2
	PM2	25.6	1.7e-1	99.2	111.9	132.6	149.0	167.1	196.2	218.8
$N(0.8)$	MCa	72.5	4.5e-1	47.1	66.2	108.1	149.3	201.8	298.8	383.3
	PM1	67.9	4.5e-1	-8.9e-4	37.4	103.2	149.0	194.8	260.7	306.9
	PM2	70.3	4.3e-1	58.2	72.9	109.7	148.9	200.3	296.2	377.9
$U(0.01)$	MCa	8.5e-1	5.7e-3	147.6	147.7	148.3	149.0	149.9	150.4	150.5
	PM1	8.5e-1	5.7e-3	147.6	147.7	148.3	149.0	149.8	150.3	150.5
	PM2	8.5e-1	5.7e-3	147.6	147.7	148.3	149.0	149.8	150.4	150.5
$U(0.3)$	MCa	25.6	1.7e-1	111.0	113.4	128.1	149.3	172.6	193.1	197.7
	PM1	25.5	1.7e-1	105.8	109.3	127.0	149.0	171.1	188.7	192.3
	PM2	25.5	1.7e-1	111.6	113.9	128.2	149.1	172.4	193.1	197.9
$U(0.8)$	MCa	70.4	4.3e-1	68.3	70.9	97.9	150.0	218.4	287.5	304.6
	PM1	67.9	4.5e-1	33.7	43.2	90.3	149.0	207.8	254.9	264.3
	PM2	68.9	4.2e-1	73.5	75.5	99.3	149.4	217.5	286.3	302.7

Tableau III.8 – Ecart-type (σ , en counts), coefficients de variation (CoV , sans dimension) et quantiles ($Q_{100q\%}$ pour le q-quantile, en counts) associés à la traînée Cx lorsque l'angle de rotation globale α_R suit une loi Normale (N) ou Uniforme (U) dont on change l'écart-type d'entrée indiqué entre parenthèses (à savoir 0.01° , 0.3° et 0.8°), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

Trois commentaires émanent de ce tableau de valeurs.

- La médiane (quantile $Q_{50\%}$) n'est quasiment pas perturbée par le changement d'écart-type d'entrée. On reste toujours aux alentours de 149 counts de traînée pour les trois dispersions de l'angle de rotation globale.
- Plus le quantile s'éloigne de la médiane (vers les pourcentages faibles comme forts), plus l'impact de la variation de la dispersion d'entrée est marqué. Par exemple, dans le cas de la loi uniforme et pour les trois valeurs d'écart-type d'entrée, les plages de variation des quantiles à 75%, 95% et 99% sont respectivement de 70, 140 et 150 counts de traînée environ.
- La dispersion de traînée (écart-type ou coefficient de variation) est grandement dépendante de la dispersion d'entrée. En guise de comparaison, les niveaux de dispersion sont semblables en passant de la loi

Chapitre III. Propagation d'incertitude en milieu industriel

uniforme à la loi normale à écart-type d'entrée fixé. A peu de chose près, l'écart-type de sortie est proportionnel à celui associé aux variables d'entrée. Ainsi, le facteur 80 (passage de 0.01° à 0.8° d'écart-type pour α_R) se retrouve au niveau de l'écart-type de traînée.

De ce fait, les deux études précédentes ont permis de montrer que le type de modification des lois d'entrée se retrouve en sortie. A écart-type fixé, la forme de la distribution joue davantage sur la position des quantiles que sur la dispersion. Au contraire, à forme fixée de densité, le degré de dispersion a un impact fort sur la dispersion et sur les quantiles extrêmes de sortie mais peu sur la médiane.

Sur la base d'une propagation d'incertitude déjà effectuée, il est donc possible de prédire immédiatement l'effet d'une modification de l'aléa d'entrée sur l'observation de sortie. Suivant que l'on touche prioritairement la dispersion ou la forme de la loi d'entrée, l'ingénieur est capable de prédire quel sera l'impact majeur sur l'incertitude de l'observation.

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

2.2.3 Etude de l'effet croisé de deux variables incertaines

Dans le cas d'au moins deux variables d'entrée incertaines, l'effet croisé éventuel se répercute-t-il sur la distribution de la loi de sortie ? L'idée est de calculer les moments statistiques de l'observation sans tenir compte des termes croisés et de comparer les erreurs de quantile avec celles correspondant à la prise en considération de ces effets croisés. Le chaos et la méthode des moments d'ordre 2 (l'ordre 1 étant, par définition, indépendant des influences croisées) seront concernés. Notons que la référence est donnée par l'histogramme issu de la variante Monte-Carlo approchée.

Pour la méthode des moments, supprimer les effets croisés signifie annuler la dérivée seconde croisée dans les expressions des moments statistiques en présence de deux variables aléatoires indépendantes. Soulignons en effet que l'effet croisé existe, même en supposant que les deux variables aléatoires sont indépendantes (cf les expressions des moments statistiques préalablement établies, où la dérivée seconde croisée intervient).

Pour cette étude, nous procédons à trois tests successifs.

Le premier concerne la mesure de l'incertitude de la portance C_z lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont aléatoires (tableau III.9).

	μ	σ	c_{μ_3}	c_{μ_4}	PEARSON			
MCa, av	28.93	3.39	1.15e-2	3.03	Normale			
MCa, ss	28.93	3.39	8.42e-3	3.01	Normale			
PM1	28.91	3.38	0.00	3.00	Normale			
PM2, av	28.95	3.38	3.92e-2	3.00	Normale			
PM2, ss	28.95	3.38	3.84e-2	3.00	Normale			
	$e_{1\%}$	$e_{5\%}$	$e_{25\%}$	$e_{50\%}$	$e_{75\%}$	$e_{95\%}$	$e_{99\%}$	en moyenne
MCa, av	7.6e-1	7.1e-1	5.0e-2	4.8e-1	6.7e-1	2.4	3.1	1.2
MCa, ss	1.7e-3	1.2	2.2e-2	2.8e-1	1.9e-1	1.6	1.9	7.4e-1
PM1	2.4e-1	1.4	1.5e-1	3.6e-1	2.3e-1	1.5	1.9	8.3e-1
PM2, av	1.2	2.4	1.1	1.3	1.2	2.5	2.8	1.8
PM2, ss	1.2	2.4	1.1	1.3	1.2	2.5	2.8	1.8

Tableau III.9 – Moments statistiques, lois de Pearson (partie supérieure) et erreurs de quantile (partie inférieure) de portance C_z issus de la méthode Monte-Carlo approchée (MCa) et de la méthode des moments d'ordre i (PMi) avec (av) et sans (ss) prise en compte des effets croisés lorsque l'angle de rotation globale et l'angle de cambrure de bord de fuite (couple $[\alpha_R, \alpha_C]$ d'écart-type $[0.3^\circ, 0.6^\circ]$) sont incertains suivant la loi normale, étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

La portance évoluant linéairement vis-à-vis des angles α_R et α_C (surface d'évolution plane), aucun effet croisé n'est possible. Les erreurs de quantile sont là pour le confirmer. La prise en compte des termes croisés n'apporte aucune amélioration quant à la prédiction de l'aléa sur la portance.

Le second test se rapporte à la configuration suivante : mesure de l'aléa affectant la traînée C_x en présence d'une incertitude sur l'angle de rotation globale α_R et sur l'épaisseur relative e_P (tableau III.10).

Dans ce cas, l'influence croisée existe mais est très faible. Il est donc difficile de s'en rendre compte avec les erreurs de quantile. Ainsi, la dérivée seconde croisée engendre une erreur moyenne de quantile très légèrement supérieure au cas où elle n'est pas prise en compte (méthode des moments d'ordre 2). Cette constatation montre

	μ	σ	c_{μ_3}	c_{μ_4}	PEARSON			
MCa, av	151.07	26.24	3.93e-1	3.24	Gamma			
MCa, ss	151.09	26.20	3.81e-1	3.24	Gamma			
PM1	149.03	25.86	0.00	3.00	Normale			
PM2, av	151.10	25.99	4.16e-1	3.23	Gamma			
PM2, ss	151.10	25.99	4.09e-1	3.23	Gamma			
	$Q_{1\%}$	$Q_{5\%}$	$Q_{25\%}$	$Q_{50\%}$	$Q_{75\%}$	$Q_{95\%}$	$Q_{99\%}$	en moyenne
MCa, av	1.3	2.5e-1	1.7e-1	2.7e-1	1.8e-1	6.4e-1	3.2e-1	4.5e-1
MCa, ss	1.3	5.9e-1	6.6e-1	6.0e-1	1.2e-1	1.7	1.8	9.6e-1
PM1	32.7	17.4	3.7	1.0	4.4	20.7	38.4	16.9
PM2, av	3.6	1.4	1.4e-1	8.7e-2	6.4e-2	8.8e-2	2.3	1.1
PM2, ss	3.3	1.3	2.5e-1	4.7e-2	3.3e-2	2.6e-1	1.6	9.5e-1

Tableau III.10 – Moments statistiques, lois de Pearson (partie supérieure) et erreurs de quantile (partie inférieure) de traînée C_x issus de la méthode Monte-Carlo approchée (MCA) et de la méthode des moments d'ordre i (PM i) avec (av) et sans (ss) prise en compte des effets croisés lorsque l'angle de rotation globale et l'épaisseur relative (couple $[\alpha_R, e_P]$ d'écart-type $[0.3^\circ, 0.03]$) sont incertains suivant la loi normale, étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

que cette information croisée n'est pas significative dans les calculs des moments statistiques de l'observation.

L'ultime test revient à rendre les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C incertains, l'observation restant la traînée C_x (tableau III.11).

Cette fois-ci, l'effet croisé des angles α_R et α_C a un effet quantifiable sur la précision de la distribution de probabilité de la traînée. Ceci se vérifie à la fois avec la méthode Monte-Carlo approchée et avec la méthode des moments d'ordre 2. L'erreur moyenne de quantile est réduite lorsque les termes croisés sont pris en compte dans l'évaluation des moments statistiques de la traînée.

Cette étude nous a donc permis d'illustrer l'importance de la prise en compte des influences croisées éventuelles entre variables incertaines pour évaluer précisément la loi de probabilité d'une observation aérodynamique.

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

		μ	σ	c_{μ_3}	c_{μ_4}	PEARSON			
[N, N]	MCa, av	151.13	27.90	4.13e-1	3.28	Gamma			
	MCa, ss	151.14	27.88	3.26e-1	3.19	Gamma			
	PM1	149.03	27.53	0.00	3.00	Normale			
	PM2, av	151.15	27.68	4.49e-1	3.27	Gamma			
	PM2, ss	151.15	27.65	3.47e-1	3.18	Gamma			
[U, U]	MCa, av	151.12	27.70	2.09e-1	2.15	Bêta			
	MCa, ss	151.12	27.70	1.28e-1	2.11	Bêta			
	PM1	149.03	27.53	0.00	2.10	Bêta			
	PM2, av	151.15	27.61	2.42e-1	2.15	Bêta			
	PM2, ss	151.15	27.58	1.39e-1	2.11	Bêta			
		$e_{1\%}$	$e_{5\%}$	$e_{25\%}$	$e_{50\%}$	$e_{75\%}$	$e_{95\%}$	$e_{99\%}$	en moy.
[N, N]	MCa, av	1.4	2.9e-1	3.5e-1	1.3e-1	3.2e-1	4.2e-1	1.9	6.9e-1
	MCa, ss	4.6	2.1	1.1	1.6	5.2e-1	2.9	8.6	3.1
	PM1	34.6	18.4	3.5	6.1e-1	4.2	19.9	40.5	17.4
	PM2, av	3.6	8.9e-1	3.1e-1	5.7e-1	4.0e-1	1.9	3.1	1.5
	PM2, ss	2.6	1.2	1.0	1.2	2.7e-1	2.3	6.8	2.2
[U, U]	MCa, av	3.3	1.4	1.4	3.5e-1	1.6	1.4	3.0	1.8
	MCa, ss	3.8	5.5	2.1	2.7	3.7e-1	2.3	10.7	3.9
	PM1	22.3	18.4	3.3	1.2	6.9	16.9	30.5	14.2
	PM2, av	7.4	1.1	1.2	5.2e-1	2.1	2.4	1.1	2.3
	PM2, ss	2.0	4.1	2.5	2.5	8.0e-1	2.4	10.3	3.5

Tableau III.11 – Moments statistiques, lois de Pearson (partie supérieure) et erreurs de quantile (partie inférieure) de traînée C_x issus de la méthode Monte-Carlo approchée (MCa) et de la méthode des moments d'ordre i (PM i) avec (av) et sans (ss) prise en compte des effets croisés lorsque l'angle de rotation globale et l'angle de cambrure de bord de fuite (couple $[\alpha_R, \alpha_C]$ d'écart-type $[0.3^\circ, 0.6^\circ]$) sont incertains (loi Normale (N) ou Uniforme (U)), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

2.2.4 Estimation de l'erreur liée à la méthode des moments

Lors de la présentation de la méthode des moments, les formules permettant d'estimer les erreurs associées à l'ordre 1 et à l'ordre 2 ont été explicitées. Ces erreurs reposent sur les écarts de moments statistiques obtenus entre deux ordres d'approximation successifs. En particulier, il est nécessaire d'avoir une estimation de la dérivée troisième de l'observation pour calculer l'erreur liée à la méthode des moments d'ordre 2. N'étant pas disponible par différentiation automatique (au contraire des dérivées premières et secondes), il est nécessaire de l'évaluer par différences finies. Pour rendre les erreurs d'ordres 1 et 2 comparables, nous envisagerons le cas où la dérivée seconde est aussi évaluée par différences finies.

Pour l'estimation des dérivées d'ordres 2 et 3 par différences finies, nous faisons appel au schéma centré d'ordre 2. Ainsi, la dérivée seconde $d_{DF}^2 f(x_0)$ et la dérivée troisième $d_{DF}^3 f(x_0)$ de la fonction f en x_0 s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} d_{DF}^2 f(x_0) = \frac{f(x_0 + \epsilon) - 2f(x_0) + f(x_0 - \epsilon)}{\epsilon^2} \\ d_{DF}^3 f(x_0) = \frac{f(x_0 + 2\epsilon) - 2f(x_0 + \epsilon) + 2f(x_0 - \epsilon) - f(x_0 - 2\epsilon)}{2\epsilon^3} \end{cases} \quad (\text{III.66})$$

où ϵ est le paramètre contrôlant la précision de la dérivée évaluée par différences finies.

Nous nous basons sur la traînée comme observation, les paramètres incertains étant l'angle de cambrure de bord de fuite α_C (tableau III.12) puis l'angle de rotation globale α_R (tableau III.13).

	μ	σ	c_{μ_3}	c_{μ_4}	PEARSON
PM1	149.0	10.5	0.0	3.0	Normale
PM2	149.3	10.5	1.6e-1	3.0	Gamma
PM2 DF($\epsilon=0.4^\circ$)	149.3	10.5	1.7e-1	3.0	Gamma
PM3 DF($\epsilon=0.4^\circ$)	149.3	10.5	1.7e-1	3.0	Gamma
Err. 1 (PM1 vs PM2)	2.9e-1	8.0e-3	1.6e-1	3.6e-2	-
Err. 1 (PM1 vs PM2 DF($\epsilon=0.4^\circ$))	2.9e-1	8.1e-3	1.7e-1	3.7e-2	-
Err. 2 (PM2 vs PM3 DF($\epsilon=0.4^\circ$))	0.0	1.4e-2	2.2e-4	1.1e-2	-

Tableau III.12 – Moments statistiques de traînée C_x , lois de Pearson et erreurs liés à la méthode des moments d'ordre i (PM i) dans le cas de l'angle de cambrure de bord de fuite α_C incertain (loi normale d'écart-type 0.6°), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

On commence par vérifier que les erreurs d'ordre 1 avec la dérivée seconde exacte ou avec la dérivée seconde estimée par différences finies sont similaires. Cette constatation légitime l'estimation de l'erreur d'ordre 2, basée sur la dérivée troisième obtenue par différences finies.

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

	μ	σ	c_{μ_3}	c_{μ_4}	PEARSON
PM1	149.0	25.5	0.0	3.0	Normale
PM2	150.9	25.6	4.3e-1	3.2	Gamma
PM2 DF($\epsilon=0.2^\circ$)	150.8	25.6	4.1e-1	3.2	Gamma
PM3 DF($\epsilon=0.2^\circ$)	150.9	25.6	4.3e-1	3.3	Gamma
Err. 1 (PM1 <i>vs</i> PM2)	1.8	1.3e-1	4.3e-1	2.4e-1	-
Err. 1 (PM1 <i>vs</i> PM2 DF($\epsilon=0.2^\circ$))	1.7	1.2e-1	4.1e-1	2.2e-1	-
Err. 2 (PM2 <i>vs</i> PM3 DF($\epsilon=0.2^\circ$))	0.0	4.4e-2	7.4e-4	1.4e-2	-

Tableau III.13 – Moments statistiques de traînée C_x , lois de Pearson et erreurs liés à la méthode des moments d'ordre i (PM i) dans le cas de l'angle de rotation globale α_R incertain (loi normale d'écart-type 0.3°), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

Il n'est pas instructif de considérer le premier moment (moyenne μ). Etant en présence d'une incertitude centrée (loi normale), les termes d'ordre impair constituant la moyenne sont tous nuls. Par définition, l'erreur d'ordre 2 est donc rigoureusement nulle. Cela nous apprend quand même que le passage à l'ordre 3 ne sert à rien pour la détermination de la moyenne.

En se basant sur l'écart-type, on constate que le cas de la cambrure de bord de fuite incertaine indique une erreur d'ordre 1 similaire à celle d'ordre 2. La courbure de l'évolution de la traînée vis-à-vis de cet angle α_C n'est pas suffisamment prononcée pour fausser l'estimation de la dispersion à l'ordre 1. En revanche, lorsque l'angle de rotation globale α_R devient aléatoire, l'erreur d'ordre 2 (0.044) est au moins deux fois plus faible que l'erreur d'ordre 1 (0.12). Ceci montre que l'ordre 2 permet de bien capter la dispersion, le fait de passer à l'ordre 3 n'étant pas source d'amélioration importante.

Enfin, on retrouve le fait que la méthode des moments d'ordre 1 n'apporte pas d'information sur la valeur des troisième et quatrième moments statistiques de l'observation. L'erreur d'ordre 2 est toujours inférieure à celle d'ordre 1 pour l'évaluation des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de la traînée. Le point à souligner est le très faible niveau des erreurs d'ordre 2, en particulier pour le troisième moment (erreurs en 10^{-4}).

Cette analyse d'erreur apporte la confirmation que le passage de l'ordre 1 à l'ordre 2 est nécessaire et suffisant pour aboutir à une distribution de probabilité de traînée tout à fait réaliste.

2.2.5 Détermination des variables les plus influentes vis-à-vis de l'observation

L'un des enjeux de l'analyse d'incertitude est de cibler les variables les plus influentes quant à l'aléa sur une observation donnée.

Un indicateur classiquement utilisé pour évaluer le degré d'influence est le coefficient de variation (forme adimensionnée du second moment statistique). Plus ce coefficient est important, plus l'influence du paramètre incertain sur l'observation est forte. Bien sûr, ce raisonnement est directement dépendant des écarts-type d'entrée choisis.

Les coefficients de variation sont fournis par le tableau III.14. Trois observations (traînée Cx , portance Cz et moment de tangage Cm) ainsi que trois paramètres incertains (angle de rotation globale α_R , angle de cambrure de bord de fuite α_C et épaisseur relative e_P) sont traités.

Cx , autour du profil non déformé			
	PM1	PM2	MCA
α_R	1.71e-1	1.70e-1	1.71e-1
α_C	7.03e-2	7.02e-2	7.06e-2
e_P	3.05e-2	3.06e-2	3.02e-2
$\alpha_R - \alpha_C$	1.85e-1	1.83e-1	1.85e-1
$\alpha_R - e_P$	1.73e-1	1.72e-1	1.74e-1
$\alpha_C - e_P$	7.66e-2	7.65e-2	7.66e-2
Cx , autour du profil déformé ($\alpha_R^0 = -3.125^\circ$)			
	PM1	PM2	MCA
α_R	2.11e-2	4.54e-2	4.92e-2
$\alpha_R - \alpha_C$	2.29e-2	5.54e-2	5.92e-2
Méthode MCA, autour du profil non déformé			
	Cz	Cm	
α_R	1.01e-1	-1.06e-1	
α_C	5.87e-2	-1.02e-1	
e_P	5.04e-3	-1.20e-2	

Tableau III.14 – Coefficients de variation obtenus par la méthode Monte-Carlo approchée (MCA) ou par la méthode des moments d'ordre i (PM i), cas-test de l'aile ONERA M6.

Commençons par souligner l'intérêt des dérivées secondes pour évaluer correctement le coefficient de variation de la traînée lorsque l'étude d'incertitude se fait autour de la forme déformée du profil. On rappelle que cette forme correspond au minimum de traînée vis-à-vis des angles α_R et α_C . Par contre, l'apport de l'ordre 2 est moins évident autour de la forme nominale du profil de l'aile ONERA M6.

Sur la base des coefficients de variation calculés, il est possible de classer les trois paramètres d'entrée (α_R , α_C et e_P) suivant leur degré d'influence sur l'une des trois observations aérodynamiques (étude autour de la forme nominale du profil).

- Pour la traînée Cx comme pour la portance Cz , la variable la plus influente est l'angle de rotation globale α_R tandis que la moins influente correspond à l'épaisseur relative e_P .

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

- En se basant sur le moment de tangage Cm , on s'aperçoit que l'influence des deux angles (rotation globale α_R et cambrure de bord de fuite α_C) est similaire. Par contre, l'épaisseur relative e_P reste le paramètre le moins influent.

Le raisonnement inverse peut être tout aussi instructif. Il s'agit de calculer les écarts-type des diverses variables incertaines correspondant à une dispersion souhaitée de l'observation. Cet écart-type résulte d'une simple règle de trois, sur la base d'une analyse d'incertitude disponible.

Dans notre cas, on se base sur un écart-type d'observation aérodynamique unitaire, à savoir 1 count pour la traînée Cx et 1 point pour la portance Cz et le moment de tangage Cm . Le tableau III.15 synthétise les résultats obtenus.

Cx , autour du profil non déformé			
	PM1	PM2	MCA
α_R	1.18e-2 °	1.17e-2 °	1.16e-2 °
α_C	5.73e-2 °	5.72e-2 °	5.69e-2 °
e_P	6.59e-3	6.57e-3	6.65e-3
Cx , autour du profil déformé ($\alpha_R^0 = -3.125^\circ$)			
	PM1	PM2	MCA
α_R	4.45e-1 °	2.01e-1 °	1.85e-1 °
Méthode MCA, autour du profil non déformé			
	Cz		Cm
α_R	1.02e-1		1.99e-1
α_C	3.53e-1		4.10e-1
e_P	2.06e-1		1.75e-1

Tableau III.15 – Prédiction des écarts-type des paramètres d'entrée (α_R , α_C et e_P) correspondant à un écart-type unitaire sur les observations (1 count pour la traînée Cx et 1 point pour la portance Cz et le moment de tangage Cm) sur la base de la méthode Monte-Carlo approchée (MCA) ou de la méthode des moments d'ordre i (PMi), cas-test de l'aile ONERA M6.

Comme précédemment, l'étude autour du profil déformé montre que la méthode des moments d'ordre 1 échoue à obtenir un écart-type correct. Un facteur 2 existe entre le résultat d'ordre 1 et celui d'ordre 2 (conforté par la méthode Monte-Carlo approchée).

Ces valeurs d'écart-type sont un autre moyen de quantifier le degré d'influence. Plus l'écart-type trouvé est faible, plus l'influence est forte entre la variable d'entrée et l'observation. Néanmoins, ces calculs sont surtout utiles pour réadapter judicieusement les dispersions d'entrée. Il peut s'avérer difficile de fixer a priori les valeurs d'écarts-type d'entrée. Une fois effectuée l'analyse d'incertitude, l'utilisateur a donc la possibilité de mieux contrôler la dispersion de sortie en modifiant de manière adéquate la dispersion des paramètres d'entrée.

2.2.6 Evaluation des probabilités de défaillance

L'une des richesses liées à la construction d'une loi de probabilité de l'observation est la possibilité de calculer des probabilités de défaillance.

Dans notre cas, nous allons estimer par les trois méthodes de propagation d'incertitude (Monte-Carlo approchée et méthode des moments d'ordres 1 et 2) la probabilité suivante :

$$P[Cx > Cx^{TOL}]$$

où Cx^{TOL} est une valeur de traînée critique. Il s'agit donc de la probabilité que la traînée Cx soit supérieure à cette valeur-critique Cx^{TOL} , fixée par l'utilisateur.

Commençons par mener l'étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6. Le tableau III.16 (resp. III.17) calcule les probabilités de dépassement de traînée lorsque l'angle de rotation globale est incertain (resp. les angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite sont incertains).

	[N]			[U]		
	PM1	PM2	MCa	PM1	PM2	MCa
$Cx^{TOL} = 155$ cts	40.7	40.9	41.1	43.2	43.5	43.6
$Cx^{TOL} = 160$ cts	33.3	33.8	34.0	37.5	38.0	38.2
$Cx^{TOL} = 165$ cts	26.5	27.4	27.5	31.9	32.7	32.9
$Cx^{TOL} = 170$ cts	20.5	21.8	21.9	26.2	27.5	27.6
$Cx^{TOL} = 175$ cts	15.4	17.1	17.1	20.5	22.3	22.5
$Cx^{TOL} = 180$ cts	11.2	13.1	13.0	14.9	17.4	17.5
$Cx^{TOL} = 185$ cts	7.9	9.9	9.8	9.2	12.5	12.6
$Cx^{TOL} = 190$ cts	5.4	7.4	7.2	3.5	7.8	7.9
$Cx^{TOL} = 195$ cts	3.5	5.4	5.3	0	3.4	3.3

Tableau III.16 – Probabilités (en %) de dépassement de la traînée Cx ($P[Cx > Cx^{TOL}]$) lorsque l'angle de rotation globale α_R est incertain (écart-type 0.3° , loi Normale [N] ou Uniforme [U]) en utilisant la méthode Monte-Carlo approchée (MCa) ou la technique des moments d'ordre i (PMi), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

Lors des tests précédents, on a pu se rendre compte que l'angle de rotation globale a plus d'influence sur la traînée que l'angle de cambrure de bord de fuite. Il est donc logique d'avoir des probabilités de dépassement proches entre les deux tableaux, pour une même valeur-critique Cx^{TOL} . Néanmoins, on note que l'ajout de

III.2 Analyse d'incertitude sur le cas-test Euler de l'aile ONERA M6

	[N,N]			[U,U]		
	PM1	PM2	MCa	PM1	PM2	MCa
$C_x^{TOL} = 155$ cts	41.4	41.6	41.8	42.9	43.2	43.5
$C_x^{TOL} = 160$ cts	34.5	35.0	35.2	37.0	37.5	37.8
$C_x^{TOL} = 165$ cts	28.1	29.0	29.1	31.2	32.1	32.3
$C_x^{TOL} = 170$ cts	22.3	23.6	23.6	25.7	26.9	27.1
$C_x^{TOL} = 175$ cts	17.3	19.0	18.9	20.5	22.1	22.2
$C_x^{TOL} = 180$ cts	13.0	15.0	14.9	15.7	17.7	17.8
$C_x^{TOL} = 185$ cts	9.6	11.7	11.5	11.3	13.7	13.7
$C_x^{TOL} = 190$ cts	6.8	9.0	8.8	7.5	10.2	10.1
$C_x^{TOL} = 195$ cts	4.7	6.8	6.6	4.3	7.1	7.0

Tableau III.17 – Probabilités (en %) de dépassement de la traînée C_x ($P[C_x > C_x^{TOL}]$) lorsque les angles de rotation globale α_R (écart-type 0.3°) et de cambrure de bord de fuite α_C (écart-type 0.6°) sont incertains (loi Normale [N] ou Uniforme [U] envisagée pour le couple $[\alpha_R, \alpha_C]$) en utilisant la méthode Monte-Carlo approchée (MCa) ou la technique des moments d'ordre i (PMi), étude autour du profil non déformé de l'aile ONERA M6.

l'angle de cambrure de bord de fuite comme paramètre aléatoire a un impact non négligeable sur la valeur des probabilités faibles. Ainsi, en fixant la valeur-critique C_x^{TOL} à 195 cts, la prise en compte de l'aléa sur l'angle de cambrure de bord de fuite a pour effet de doubler la probabilité de dépassement (7% contre 3% dans le cas de l'angle de rotation globale incertain suivant la loi uniforme).

On note également que les dérivées secondes permettent de trouver des probabilités très proches de celles indiquées par la méthode Monte-Carlo approchée, même pour les probabilités faibles. En revanche, le fait de rester à l'ordre 1 provoque une dégradation des résultats.

Pour mieux mettre en avant l'importance des sensibilités du second ordre, plaçons-nous autour de la forme déformée du profil. Il s'agit du minimum de la traînée vis-à-vis des angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite.

Les probabilités de dépassement sont fournies par le tableau III.18 (angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite incertains).

Les dérivées premières étant quasiment nulles, la méthode des moments d'ordre 1 s'avère complètement incapable de fournir une estimation exploitable des probabilités de traînée. En particulier, lorsque les paramètres d'entrée suivent la loi uniforme, la probabilité d'ordre 1 est rigoureusement nulle pour la quasi-totalité des cas

	[N,N]			[U,U]		
	PM1	PM2	MCa	PM1	PM2	MCa
$C_x^{TOL} = 33$ cts	8.2	35.5	32.8	9.4	39.8	37.3
$C_x^{TOL} = 34$ cts	2.9e-1	20.3	19.4	0	22.5	21.6
$C_x^{TOL} = 35$ cts	1.9e-3	12.2	12.0	0	12.6	12.3
$C_x^{TOL} = 36$ cts	2.1e-8	7.6	7.6	0	6.6	6.7
$C_x^{TOL} = 37$ cts	3.9e-12	4.8	4.9	0	3.1	3.3
$C_x^{TOL} = 38$ cts	1.1e-16	3.0	3.2	0	1.3	1.5

Tableau III.18 – Probabilités (en %) de dépassement de la traînée C_x ($P[C_x > C_x^{TOL}]$) lorsque les angles de rotation globale α_R (écart-type 0.3°) et de cambrure de bord de fuite α_C (écart-type 0.6°) sont incertains (loi Normale [N] ou Uniforme [U] envisagée pour le couple $[\alpha_R, \alpha_C]$) en utilisant la méthode Monte-Carlo approchée (MCa) ou la technique des moments d'ordre i (PMi), étude autour du profil déformé de l'aile ONERA M6 (angle de rotation globale égal à -3.125°).

traités. Le même genre de comportement est visible avec la loi normale (la nullité des probabilités d'ordre 1 étant remplacée par des valeurs très faibles).

Par contre, les dérivées secondes sont capables de retrouver les probabilités calculées par la technique Monte-Carlo approchée. Les écarts de résultat entre les deux méthodologies ne sont pas significatifs.

De cette étude d'incertitude basée sur l'aile ONERA M6, il est possible de tirer un double enseignement.

- Le fait de construire une **loi de probabilité de l'observation aérodynamique** permet d'accéder à des informations riches. Retenons en particulier le classement des paramètres incertains suivant le degré d'influence, le calcul des probabilités de défaillance ou encore l'analyse de l'effet croisé.
- La **méthode des moments d'ordre 2** est capable de mener à bien l'analyse d'incertitude sur les divers cas traités. Les dérivées secondes sont nécessaires, d'où l'intérêt d'avoir différencié les codes industriels à l'ordre 2 (voir le premier chapitre de cette thèse).

Conclusion

La propagation d'incertitude envisagée dans ce chapitre consiste à construire **une loi de probabilité d'une certaine observation scalaire** de sortie lorsque certains paramètres d'entrée sont aléatoires. Une telle information est à la fois plus complexe à déterminer mais aussi plus riche que la détermination de marges d'erreur. En présence d'une loi de probabilité, on dispose à la fois du niveau de dispersion de l'observation mais aussi des quantiles, à la base du calcul des probabilités de défaillance. Ces dernières sont capitales pour mesurer efficacement le degré de tolérance d'un système donné vis-à-vis d'une valeur critique d'observation. Les probabilités de défaillance seront d'ailleurs utilisées pour proposer une nouvelle technique d'optimisation sous incertitude (cf le chapitre 8 de cette thèse).

Quatre méthodologies de **propagation d'incertitude** existent dans la littérature. D'emblée, nous avons exclu la technique Monte-Carlo, trop coûteuse dans un contexte industriel. Il reste la **méthode Monte-Carlo approchée** (via une surface de réponse), le **chaos polynomial** (ou plutôt la méthode de collocation, qui est une version de chaos non intrusive) et la **méthode des moments**. Nous avons décidé de comparer les deux dernières stratégies en terme de compromis coût-précision en utilisant la technique Monte-Carlo approchée comme référence. Pour le chaos, le nombre de points de collocation permet de contrôler le coût. Concernant la méthode des moments, les ordres 1 et 2 ont été envisagés. Les dérivées premières et secondes sont obtenues par différentiation des codes industriels. L'analyse comparative a été menée sur un cas-test Euler (aile ONERA M6). Elle a mis en évidence l'intérêt de la méthode des moments. A niveau de précision donné, la méthode des moments d'ordre 2 correspond au chaos à trois (voire quatre ou cinq) points en contexte mono-variable et au chaos à neuf (voire seize) points en présence de deux variables. Notons que l'ordre 2 est nécessaire, la méthode des moments d'ordre 1 n'étant efficace qu'en présence d'une relation entre observation et paramètre de type linéaire.

Sur ce cas-test de l'aile ONERA M6, nous avons aussi effectué une série de tests. L'influence de l'aléa d'entrée (forme de la distribution à écart-type fixé et écart-type à forme fixée) sur l'incertitude de l'observation aérodynamique fut analysée. La méthodologie de propagation d'incertitude permet également de déterminer les variables les plus influentes (extension de la simple étude de sensibilité réalisée habituellement) ou de calculer une probabilité de défaillance. Par ailleurs, les erreurs liées à la détermination des moments statistiques de l'observation avec la méthode des moments ont souligné la pertinence de s'arrêter à l'ordre 2 pour avoir une information exploitable.

Bibliographie

- [ABD07] H. Abdi, *Corrélation luxuriante de Kendall*, En New Jersey, Salkind : Encyclopédie de la mesure et des statistiques, Mille chênes, 2007.
- [ASK85] R. Askey and J. Wilson, *Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Memoirs Amer. Math. Soc., AMS, Providence RI, 319 (1985).
- [BER06] M. Berveiller, B. Sudret and M. Lemaire, *Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression*, Eur. J. Comp. Mech., 15(1-3) :81-92, 2006.
- [BEY07] H.-G. Beyer and B. Sendhoff, *Robust optimization - A comprehensive survey*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 196, 2007, pp. 3190-3218.
- [BIL86] P. Billingsley, *Probability and measure*, Willey, 1986.
- [BRO97] S. A. Brown and A. E. Sepulveda, *Approximation of system reliability using a shooting Monte-Carlo approach*, AIAA Journal, vol. 35, No. 6, pp. 1064-1071, 1997.
- [DEL00] D. De Laurentis and D. Marvris, *Uncertainty modeling and management in multidisciplinary analysis and synthesis*, 38th AIAA Aerospace Sciences Meeting, paper no. AIAA 2000-0422, Reno, NV, 10-13 January 2000.
- [DEW59] E. De Wilde, *Application du test de Kolmogorov-Smirnov dans la pratique industrielle*, Congrès International, Organisation Européenne pour le contrôle de qualité, Bruxelles 1959.
- [DUV07] R. Duvigneau, *Aerodynamic shape optimization with uncertain operating conditions using metamodels*, Tech. Rep. 6143, INRIA, March 2007.
- [DUV07-2] R. Duvigneau, *Robust design of a transonic wing with uncertain Mach number*, 2007, EUROGEN 2007 Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control, 11-13 June 2007, Jyvaskyla, Finland.
- [ELD09] M. S. Eldred and J. Burkardt, *Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 2009-0976.
- [FIS22] R. A. Fisher, *On the interpretation of χ^2 from contingency tables, and the calculation of P* , Journal of the Royal Statistical Society, 85(1) : 87-94, 1922.
- [FIS34] R. A. Fisher, *Statistical methods for research workers*, 5th edition, Oliver and Boyd, 1934.

Bibliographie

- [GAU96] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials : applications and computation* , Acta Numerica (1996), 45-119.
- [HIR06] Ch. Hirsch and al., *NODESIM-CFD : Non-deterministic simulation for CFD based design methodologies* , European Sixth Framework Programme, AST5-CT-2006-030959, <http://www.nodesim.eu>, 2006.
- [JAM06] F. James, *Statistical methods in experimental physics* , World Scientific, New Jersey, 2006.
- [KAH53] H. Kahn and A. W. Marshall, *Methods of reducing sample size in Monte-Carlo computations* , J. Oper. Res. Soc. Amer. 1, 263-271, 1953.
- [KAH56] H. Kahn, *Use of different Monte-Carlo sampling techniques* , Proc. Symp. on Monte-Carlo Methods, Editor : Meyer, H. A., John Wiley and Sons, New York, pp. 149-190, 1956.
- [KEN77] Sir M. Kendall et A. Stuart, *The Advanced theory of statistics* , vol. 1, fourth edition, 1977.
- [KOY95] U. Köyliöglu, A. Cakmak and S. Nielsen, *Interval algebra to deal with pattern loading and structural uncertainties* , J. Engrg. Mech. 121 (1995), 1149-1157.
- [LIM89] J. T. Lim, H. J. Gold, G. G. Wilkerson and C. D. Raper, *A Monte-Carlo/response surface strategy for sensitivity analysis : application to a dynamic model of vegetative plant growth* , Appl. Math. Model., 13, 479-84, 1989.
- [MAR08] M. Martinelli and R. Duvinneau, *Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing* , American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [MAS51] F. J. Massey, *The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit* , Journal of the American Statistical Association, 253, mars 1951, p. 68-78.
- [MCK00] M. D. McKay, R. J. Beckman and W. J. Conover, *A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code* , Technometrics, vol. 42, no. 1, 2000, pp. 55-61.
- [MET49] N. Metropolis and S. Ulam, *The Monte Carlo Method* , Journal of the American Statistical Association, vol. 44, no 247, septembre 1949, p. 335-341.
- [MIL03] G. V. Milovanovic and M. Stanic, *Construction of multiple orthogonal polynomials by discretized Stieltjes-Gautschi procedure and corresponding gaussian quadratures* , Ser. Math. Inform. 18 (2003), 9-29.
- [MOO66] R. E. Moore, *Interval analysis* , Prentice-Hall, Englewood Cliff (1966).
- [OUV99] J.-P. Ouvrard, *Probabilités 1* , Cassini, 1999.
- [OUV03] J.-P. Ouvrard, *Probabilités 2* , Cassini, 2003.
- [PEA95] K. Pearson, *Contributions to the mathematical theory of evolution-II. Skew variation in homogeneous material* , Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 186, 1895, p. 343.
- [PEA01] K. Pearson, *Mathematical contributions to the theory of evolution-X. Supplement to a memoir on skew variation* , Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 197, 1901, p. 443.
- [PEA16] K. Pearson, *Mathematical contributions to the theory of evolution-XIX. Second supplement to a memoir on skew variation* , Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 216, 1916, p. 429.
- [PUT01] M. M. Putko, P. A. Newman A. C. Taylor III and L. L. Green, *Approach for uncertainty propagation and robust design in CFD using sensitivity derivatives* , Tech. Rep. 2528, AIAA, 2001.

- [SAC89] J. Sacks, W. Welch, T. Mitchell and H. Wynn, *Design and analysis of computer experiments*, Statistical Science, vol. 4, no.4, 1989, pp. 409-435.
- [SCH95] D. Schwartz, *Méthodes statistiques à l'usage des médecins et des biologistes*, Flammarion, Médecine-Sciences, Collection Statistique en biologie et médecine, 1995.
- [SUD05] B. Sudret, M. Berveiller and M. Lemaire, *Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques : une approche unifiée*, 17ième Congrès Français de Mécanique, Troyes, 2005.
- [TUR02] E. Turgeon, D. Pelletier and J. Borggaard, *A general continuous sensitivity equation formulation for complex flows*, Numer. Heat Tr. B-Fund, 42 (2002) 485-508.
- [WAL02] R. W. Walters and L. Huyse, *Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications*, Tech. Rep. 2002-211449, NASA, Feb. 2002, ICASE Report no. 2002-1.
- [WIE38] N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math., 60 (1938), pp. 897-936.
- [XIA00] X. Du and W. Chen, *A most probable point based method for uncertainty analysis*, Proceedings of DETC'00, ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland, September 10-13, 2000.
- [YUL15] G. U. Yule and M. Greenwood, *The statistics of anti-typhoid and anticholera inoculations, and the interpretation of such statistics in general*, Royal Society of Medicine Proceedings, Section of Epidemiology and State Medicine, 8 :113-194, 1915.

Bibliographie

Chapitre IV

Optimisation sous incertitude

Le progrès technologique se base très souvent sur l'établissement d'un bon compromis entre plusieurs objectifs antagonistes. Pour faire un choix en toute connaissance de cause, il faut connaître l'ensemble des solutions possibles. Dans ce contexte, l'algorithme génétique peut être utilisé. Il permet d'avoir une vision globale d'un problème multi-objectif. Cependant, en pratique, certains paramètres sont aléatoires, intrinséquement ou par manque de maîtrise. Cet aléa peut éventuellement venir perturber le compromis qui a été fait. Le but de cette étude est donc de combiner l'optimisation multi-objectif avec l'optimisation sous incertitude. La solution retenue devra donc ne pas dégrader excessivement les différents objectifs lorsqu'un aléa affecte les paramètres d'optimisation. Bien plus, ce chapitre porte sur la formulation de l'optimisation sous incertitude. Traditionnellement, on cherche à obtenir un compromis entre performance et robustesse en faisant appel à la moyenne et à l'écart-type de chacune des observations traitées. Les deux premiers moments statistiques (moyenne et écart-type) sont donc utilisés. Nous verrons que des moments statistiques d'ordre supérieur permettent d'affiner les résultats. Néanmoins, la principale contribution de cette étude sera de raisonner en terme de probabilité de défaillance. Cette formulation innovante s'avère être la formulation adéquate pour un certain nombre de problèmes industriels, comme l'établissement de marge de tolérance.

Introduction

La notion de bon compromis est essentielle dans n'importe quel processus d'innovation industrielle. Mesurant la performance de l'objet élaboré, les critères de qualité possèdent rarement une solution unique et globale. Même si tel était le cas, utiliser l'innovation à l'échelle industrielle suppose un coût, les méthodes de production devant être modifiées. Un investissement humain (en terme de formation) ou matériel sera alors nécessaire à la mise en pratique de la stratégie innovante. A ce niveau, un compromis est à trouver entre le coût de l'investissement et les apports à court, moyen et long termes de l'innovation. Ainsi, on se rend compte qu'il est impossible d'échapper à la prise de décision devant plusieurs alternatives envisageables.

Pour donner un exemple quant au type de compromis rencontré en industrie, prenons le cas de la conception d'un avion. A toutes les étapes de sa fabrication, on rencontre de nombreux problèmes qui possèdent toute une gamme de solutions acceptables. La solution retenue sera le fruit d'un choix faisant intervenir plusieurs critères de qualité, parfois contradictoires les uns

par rapport aux autres. Par exemple, d'un point du vue aérodynamique, la forme optimale de la voilure devra minimiser la traînée tout en maximisant la portance. Les profils épais de voilure ont une grande portance mais aussi une grande traînée. Il faudra ainsi faire un choix intégrant ces deux indicateurs de performance. Un autre exemple vient du souhait de maximiser le rayon d'action d'un avion tout en limitant sa masse structurale.

Ce chapitre traite de ce problème de compromis dans le cadre d'une **optimisation sous incertitude**. Une fonction-coût doit être optimisée, sachant que sa valeur est soumise à un certain aléa. Un compromis entre la performance et la robustesse est alors à trouver. On se situe donc dans le cadre d'une optimisation robuste multi-objectif. Classiquement, la performance s'exprime comme la moyenne de la fonction-coût tandis que la robustesse est représentée par l'écart-type. La contribution essentielle de ce chapitre vient de l'extension de cette méthodologie. Tout d'abord, nous généraliserons cette optimisation robuste à des **moments statistiques d'ordre strictement supérieur à 2**. Rappelons que la moyenne (resp. l'écart-type) correspond au moment statistique d'ordre 1 (resp. 2). La véritable innovation de ce chapitre consistera à exprimer la notion de robustesse en terme de **probabilité de défaillance** (et non plus en terme d'écart-type). Cette modification peut s'avérer indispensable au traitement efficace de problèmes industriels pour lesquels des valeurs critiques sont associées à certaines observations scalaires.

Pour mener à bien une optimisation multi-objectif (ou multi-critère), plusieurs méthodes sont possibles. Néanmoins, deux grandes classes de technique se dégagent. La première revient à utiliser **l'optimisation par direction de descente**. Les variantes sont nombreuses. Concernant les optimisations sans contrainte (cf le chapitre 6 de cette thèse), nous pouvons citer l'algorithme de gradient simple, de gradient conjugué, l'algorithme BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) ou celui de Newton. Si des contraintes doivent être prises en compte (cf le chapitre 7 de cette thèse), on pourra faire appel à l'algorithme de points intérieurs ou encore à la méthode SQP (*Sequential Quadratic Programming*). Pour pouvoir étendre cette variété de techniques au cas multi-objectif, différentes stratégies existent. Donnons-en trois exemples, bien connus. Il y a bien sûr la possibilité d'optimiser un des objectifs et de considérer les autres critères comme des contraintes. Néanmoins, la formulation en terme de contrainte n'est pas équivalente à l'optimisation de l'objectif correspondant. Par exemple, la maximisation de la portance se formule, en terme de contrainte, comme le fait de s'assurer que la portance reste supérieure à une certaine valeur-seuil. La seconde stratégie revient à se focaliser sur un des objectifs à optimiser et à lui ajouter des termes de pénalité pour tenir compte des autres critères. La solution obtenue à l'aide de cette technique va alors fortement dépendre des poids attribués aux différents critères pénalisants. Enfin, la troisième méthodologie est l'optimisation multi-points. L'idée est de mener plusieurs optimisations sur l'un des objectifs, en faisant varier certains paramètres (comme le point de départ, par exemple). Une autre variante consisterait à mener l'optimisation des objectifs pris individuellement. Il y a alors autant de solutions possibles que d'objectifs différents. Parmi cet ensemble de solutions, le résultat final est choisi a posteriori, en fonction de l'importance relative accordée aux objectifs. D'emblée, on se rend compte que ces approches ne sont pas spécifiquement adaptées à l'optimisation multi-objectif. Par exemple, la dernière méthode évoquée ne tient pas compte des effets croisés qui peuvent s'avérer prépondérants.

L'autre grande classe de méthode multi-objectif est la **voie génétique**. L'idée est de suivre l'exemple d'une population d'êtres vivants. Au cours des générations successives, les modifications génétiques vont permettre aux individus de mieux s'adapter à l'environnement. Le processus de sélection naturelle privilégie les organismes qui répondent le mieux aux contraintes du milieu extérieur. Formulé tel quel, le processus biologique équivaut à une optimisation multi-critères. Ainsi, l'ensemble des êtres vivants symbolise l'espace des paramètres sur lequel l'optimisation va être menée. Les contraintes du milieu extérieur deviennent les multiples objectifs à optimiser. Le processus de sélection naturelle équivaut donc à l'optimisation proprement dite, qui va faire évoluer les individus vers l'ensemble des solutions possibles.

Dans notre étude, nous nous focalisons sur la technique génétique. Deux variantes vont être envisagées. Il s'agit des techniques **SOGA** (*Single Objective Genetic Algorithm*) et **MOGA** (*Multi Objective Genetic Algorithm*). La première stratégie revient à considérer un unique objectif, s'écrivant comme une somme pondérée des multiples critères à optimiser. La seconde technique consiste à traiter l'ensemble des objectifs simultanément, sans donner de préférence à l'un ou à l'autre. Nous comparerons chacune de ces deux approches de manière théorique.

Le problème que nous allons considérer est encore plus complexe. En plus des multiples objectifs à minimiser, une incertitude sur un ou plusieurs paramètres va être prise en compte. Nous présenterons une manière d'**étendre l'algorithme génétique au cas d'un problème d'optimisation sous incertitude**. Chaque objectif considéré sera de nature statistique. Dans ce contexte, deux approches vont être envisagées. La première approche intervient lorsque tous les objectifs s'écrivent sous forme de moments statistiques d'une certaine observation (moyenne, écart-type ou asymétrie, par exemple). La seconde approche consiste à exprimer au moins un des objectifs comme une **probabilité de défaillance**.

L'estimation des objectifs de nature statistique va s'appuyer sur notre étude de propagation d'incertitude (cf le chapitre 3 de cette thèse). Trois méthodes de propagation d'incertitude sont possibles. Il s'agit de la méthode Monte-Carlo et de la méthode des moments d'ordres 1 et 2. Lorsqu'au moins un des objectifs équivaut à une probabilité de défaillance, l'idée est d'intégrer le système de Pearson à l'algorithme génétique. Ce système permet de passer des quatre premiers moments statistiques à une loi de probabilité connue, ce qui rend l'estimation de la probabilité cherchée immédiate (quantile tabulé d'une loi connue).

L'optimisation génétique sous incertitude sera mise à l'épreuve sur un cas-test industriel. Il s'agit de l'aile ONERA M6 (problème Euler 3D). Le but sera de contrôler l'aléa d'une observation aérodynamique (traînée ou portance) lorsque deux paramètres géométriques (angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite) sont supposés incertains. Différentes simulations seront effectuées, dans lesquelles interviendra une probabilité de défaillance. Ces simulations mesureront la pertinence de notre méthodologie d'optimisation génétique sous incertitude en **contexte industriel**.

1 Présentation de l'algorithme génétique pour résoudre un problème d'optimisation sous incertitude

1.1 Pourquoi faire appel à la génétique en face d'un problème d'optimisation sous incertitude ?

Partons du problème d'optimisation le plus simple qui soit. Il s'agit de minimiser une fonction scalaire f vis-à-vis d'un paramètre vectoriel X . Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$X^* = \operatorname{argmin}_{X \in \Omega} f(X)$$

La notation Ω désigne l'espace d'exploration pour la recherche du minimum X^* . Ecrit sous cette forme, le problème peut être résolu via différentes techniques de minimisation avec direction de descente. L'efficacité de la technique utilisée va dépendre du caractère plus ou moins différentiable de la fonctionnelle f .

- A l'**ordre 1**, les dérivées premières de f vont permettre de tracer un chemin vers le minimum. La méthode la plus basique est celle du **gradient simple**. Pour accélérer la convergence, il est possible de faire appel à la technique du **gradient conjugué**.
- A l'**ordre 2**, la notion de courbure de la fonction est utilisée. En plus des dérivées premières, les sensibilités secondes autorisent une vision plus fine du comportement local de la fonction à optimiser. Le cheminement vers le minimum devient ainsi plus direct qu'à l'ordre 1. La **méthode BFGS** ou celle de **Newton** appartiennent à cette catégorie de méthode d'optimisation d'ordre 2.

Des contraintes, en plus de celles restreignant le domaine d'exploration ($x \in \Omega$), peuvent compliquer le problème de minimisation. Dès que l'une des contraintes est non linéaire, les techniques précédentes doivent être adaptées. La méthode de points intérieurs (IPA pour *Interior Point Algorithm*) comporte une partie dédiée à la recherche de la direction de descente et une partie dédiée au respect des contraintes.

Ces diverses techniques sont applicables dans un cadre déterministe. A chaque itération N_i d'optimisation, une unique valeur X_{N_i} du paramètre d'optimisation X est calculée. Par conséquent, les méthodes à base de direction de descente ne renseignent pas sur le niveau de dégradation engendrée par une légère perturbation du paramètre X autour de la valeur optimale X^* trouvée.

Pour faire intervenir une notion d'incertitude dans le problème d'optimisation, l'idée est de considérer non plus un paramètre X déterministe mais une **variable aléatoire** X_a . La loi attribuée à X_a est fixée une fois pour toute. Bien sûr, la quantité $f(X)$ est aussi aléatoire. Dans toute la suite, les variables aléatoires seront désignées par des lettres majuscules (X_a ou $F_a = f(X_a)$). Les valeurs nominales correspondantes seront, quant à elles, en minuscule (x_a ou f_a).

L'incertitude est vue comme une perturbation de la valeur nominale. Il vient :

$$X_a = x_a + \Delta X_a$$

où ΔX_a est une variable aléatoire de moyenne nulle.

Dans un tel contexte d'incertitude, la traduction la plus proche du problème d'optimisation précédent est (cf [BAN06] ou [HUY02]) :

$$x_a^* = \operatorname{argmin}_{x_a \in \Omega} E[f(X_a)]$$

où l'opérateur E désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire. Les méthodes d'optimisation à base de direction de descente ne s'appliquent plus. En effet, l'incertitude peut venir remettre en cause le chemin suivi par l'optimiseur, chemin qui s'appuie essentiellement sur les sensibilités

IV.1 Présentation de l'algorithme génétique pour résoudre un problème d'optimisation sous incertitude

de la fonction-coût.

Écrit tel quel, le problème d'optimisation sous incertitude n'est guère plus riche que son équivalent déterministe. L'espérance permet simplement de traiter une variable aléatoire plutôt qu'une valeur numérique brute. Pour avoir une réelle plus-value liée à l'introduction de l'aléa au sein du problème d'optimisation, une manière de faire classiquement utilisée consiste à réduire la dispersion. Le but est de minimiser non seulement la moyenne $E[F_a]$ mais aussi l'écart-type $\sigma[F_a]$ de la fonction incertaine F_a . Le problème devient alors :

$$x_a^* = \operatorname{argmin}_{x_a \in \Omega} \begin{cases} E[f(X_a)] \\ \sigma[f(X_a)] \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

On peut dès lors qualifier ce problème d'**optimisation robuste**. En effet, il contrôle non seulement l'optimalité de la solution trouvée (minimisation de la moyenne de f) mais aussi le niveau de dégradation lorsque cette valeur optimale est perturbée (minimisation de l'écart-type de f).

Nous proposons une formulation innovante du problème d'optimisation sous incertitude. Dans certains cas, il est possible de discerner certaines valeurs critiques (ou seuils) de la fonction f . Par exemple, si la fonctionnelle devient supérieure à l'un de ces seuils, le système se dégrade irrémédiablement. L'écart-type n'en tient pas compte car il ne renseigne que sur le degré de dispersion locale de la fonction. Au passage, dans le domaine de la finance, on parle de méthode *value-at-risk* pour évoquer l'estimation des probabilités faibles dans le but de mieux contrôler son capital ([HOL03] ou [JOR06]).

Pour adapter le problème d'optimisation, on préférera alors remplacer l'écart-type par une **probabilité de défaillance**. En notant f_s le seuil de défaillance, le problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$x_a^* = \operatorname{argmin}_{x_a \in \Omega} \begin{cases} E[f(X_a)] \\ P[f(X_a) > f_s] \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

En version déterministe, ce problème s'écrit comme la minimisation avec contraintes ci-dessous :

$$\begin{cases} x^* = \operatorname{argmin}_x \in \Omega f(x) \\ f(x) \leq f_s \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Au passage, on peut établir la relation suivante. Réduire la probabilité que l'observation incertaine $f(X_a)$ soit supérieure à la valeur-critique f_s se traduit par respecter la contrainte assurant le non-dépassement de cette même valeur-critique f_s en formulation déterministe.

Notons qu'une autre limite des méthodes d'optimisation avec direction de descente apparaît en présence d'une probabilité de défaillance. En effet, une dérivée de probabilité n'a aucune signification. Cette absence de signification fragilise l'ensemble de l'optimisation avec sensibilité.

On comprend dès lors que la technique employée pour résoudre un problème d'optimisation sous incertitude doit vérifier au moins les deux points suivants.

- Les sensibilités sont inappropriées et ne doivent donc pas rentrer dans le cadre de la résolution. En effet, dériver une fonction vis-à-vis d'une variable aléatoire n'a aucun intérêt.
- Une vision globale est nécessaire pour trouver une solution robuste. La notion de compromis entre **optimalité** et **robustesse** n'a de sens que si la technique utilisée offre tout un éventail de solutions possibles. Cette richesse n'est pas garantie par les techniques qui se basent sur une direction particulière (cf [RAL06] dans le cas de la réduction du bang sonique). En se focalisant ainsi sur un chemin donné, on peut passer à côté d'une solution plus avantageuse.

Il s'avère que l'algorithme génétique répond tout à fait à ces deux caractéristiques. Nous allons donc faire appel à cette technique de résolution, en commençant par en présenter la structure générale.

1.2 Structure générale d'un algorithme génétique pour résoudre un problème de minimisation

Le but est de minimiser simultanément plusieurs objectifs vis-à-vis de multiples paramètres. Avant de décrire les étapes constitutives d'un algorithme génétique, il est important de définir le vocabulaire d'usage pour cette technique d'optimisation.

Les données de base d'un algorithme génétique sont un ensemble de points dans l'espace des paramètres et la définition d'un critère de qualité permettant de hiérarchiser ces points. Le critère de qualité est constitué d'une ou plusieurs fonctions (ou objectifs) à optimiser. Le groupe de points prend le nom de population initiale. On dit que la population est composée de plusieurs individus. Un individu n'est donc rien d'autre qu'une valeur particulière des paramètres.

Le but est de **faire évoluer la population initiale** de telle sorte que l'ensemble des individus la constituant améliore de plus en plus le critère de qualité. On procède par itérations successives. En passant d'une population à l'autre, nous changeons de **génération**. Par convention, la population initiale constitue la génération zéro. La $N_i^{ième}$ génération est construite à l'itération N_i d'optimisation génétique. Le nombre N_{pop} d'individus constituant les différentes populations reste constant au cours des itérations.

Le principe général d'un algorithme génétique est bien sûr hérité de la biologie. Plus précisément, on adapte la sélection naturelle de Darwin pour mener à bien l'optimisation. On rappelle que, d'après Darwin, les êtres vivants évoluent de manière à s'adapter de mieux en mieux aux contraintes de l'environnement. Au fil des générations, les organismes connaissent ainsi diverses modifications en adéquation avec le milieu extérieur. Ainsi, certaines espèces ne parviennent pas à s'adapter et disparaissent, au profit de nouveaux êtres vivants.

L'algorithme génétique respecte parfaitement cette logique de sélection naturelle. Les êtres vivants sont remplacés par les valeurs de paramètre. Le critère de qualité associé aux données symbolise les contraintes de l'environnement, à l'origine des changements de génération. C'est pourquoi, comme en biologie, différentes opérations permettent de passer d'une population à l'autre.

A chaque changement de génération, on dit que nous passons de la population-parent à la population-fils. Chaque fils provient d'une modification de certains parents. Traditionnellement, trois étapes consécutives marquent le changement de génération.

- Nous avons l'**opération de sélection**. Elle revient à l'initialisation de la nouvelle population à partir des parents. Pour constituer la population de départ (génération zéro), cette étape (qui est la seule active) consiste simplement à choisir aléatoirement les individus dans le domaine d'exploration des paramètres.
- Nous avons également l'**opération de croisement** (cf [BEY01] ou [DEB95]). A partir de deux parents, deux fils sont déterminés. En pratique, une sorte d'interpolation est utilisée pour cela.
- Enfin, nous avons l'**opération de mutation** (cf [RAG04]). Cette fois-ci, cette étape consiste à perturber un parent pour déterminer un fils.

Un autre point important doit être vérifié. Au cours des générations, les objectifs doivent être de mieux en mieux respectés par l'ensemble de la population. Il faut donc s'assurer que la $(N_i + 1)^{ième}$ génération soit au moins d'aussi bonne qualité que la $N_i^{ième}$ génération. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de l'exposé.

La figure IV.1 récapitule les principales étapes constitutives d'un algorithme génétique.

Le résultat final se présente donc sous la forme d'une population adaptée aux différents objectifs. Nous pouvons soit nous contenter du meilleur individu, soit exploiter l'ensemble des individus finaux. Ce dernier cas de figure est particulièrement utile lorsqu'au moins deux objectifs sont considérés. Ainsi, la population finale met en lumière le compromis lié au respect de ces différents objectifs. L'ensemble des solutions possibles permet notamment de tracer le **front de Pareto**. Une telle information est capitale pour prendre une décision judicieuse et argumentée.

Après avoir présenté le squelette d'un algorithme génétique, revenons à notre optimisation sous incertitude. Voyons sous quelle forme le problème va se formuler.

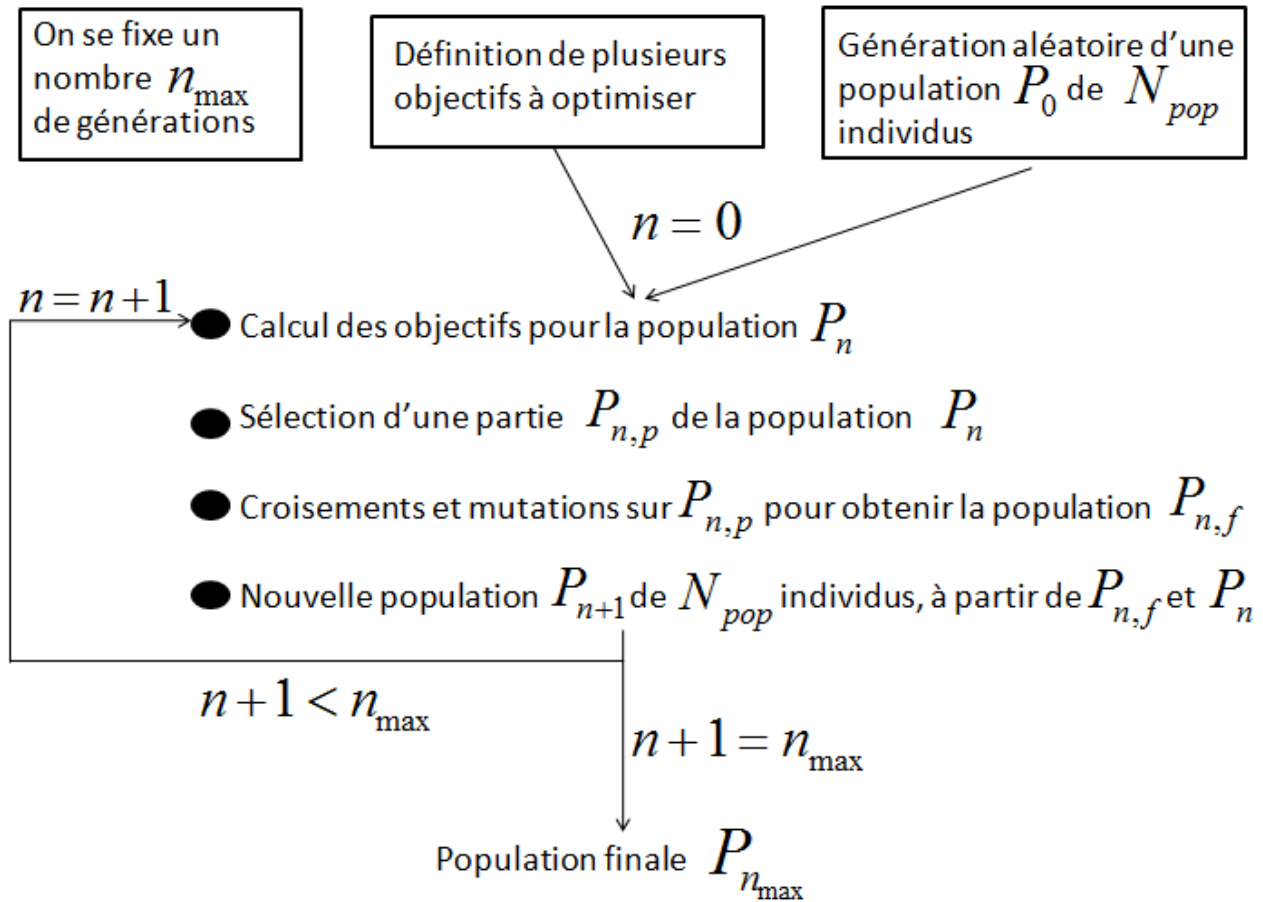


Figure IV.1 – Schéma général d'un algorithme génétique.

1.3 Formulation du problème d'optimisation sous incertitude : introduction aux variantes SOGA et MOGA d'algorithme génétique

Le but est donc de mener la minimisation sous incertitude d'une fonctionnelle f . Pour fixer les idées, focalisons-nous sur le cas standard, à savoir la réduction simultanée de l'espérance et de l'écart-type de la fonction f . Il s'agit donc d'une optimisation à deux objectifs.

Comme nous l'avons vu, l'algorithme génétique demande de définir un critère de qualité sur lequel se baser pour faire évoluer la population. Deux possibilités s'offrent alors à nous.

La première possibilité revient à choisir un **critère de qualité mono-objectif**. L'unique objectif s'écrit comme une somme pondérée des deux quantités à minimiser (espérance et écart-type de la fonction aléatoire F_a). Dès lors, on peut écrire le critère de qualité $C_{r,1}$ lié à cette formulation comme suit :

$$C_{r,1} = \min(w_E E[F_a] + w_\sigma \sigma[F_a])$$

où les deux réels w_E et w_σ forment les poids attribués respectivement à l'espérance et à l'écart-type de F_a . Bien sûr, le choix de la pondération s'effectue avant la simulation. Il n'est pas anodin sur le déroulement de l'algorithme et la répartition de la population finale obtenue. La pondération permet de hiérarchiser les objectifs. Dans notre cas, en augmentant le quotient $\frac{w_E}{w_\sigma}$, on donne plus d'importance au caractère optimal de la solution

par rapport à sa robustesse. L'attribution des poids s'effectue a priori, sans pouvoir prédire l'impact réel sur le comportement de l'algorithme. D'emblée, cette formulation montre donc ses limites. Le coût de la minimisation ne peut pas être connu à l'avance, sachant que la simulation devra éventuellement être relancée avec un autre système de pondération.

La seconde possibilité quant à l'écriture du critère de qualité consiste à adopter une **vision multi-objectif**. Dans notre exemple, le critère de qualité (noté $C_{r,2}$ dans ce nouveau contexte) s'écrit :

$$C_{r,2} = [\min(E[F_a]); \min(\sigma[F_a])]$$

Dans la section suivante, nous précisons la manière de hiérarchiser les individus avec un tel critère multi-objectif.

De multiples algorithmes génétiques existent dans la littérature ([GON03] ou [DET02]). Les deux formulations du critère de qualité donnent naissance à deux variantes d'algorithme génétique.

- Lorsque le critère de qualité est **mono-objectif** (critère $C_{r,1}$), on parle d'algorithme SOGA (pour *Single Objective Genetic Algorithm*, cf [OYA00] ou [KEA03]).
- Au contraire, si le critère de qualité est plutôt **multi-objectif** (critère $C_{r,2}$), l'algorithme génétique appartient à la famille de méthode MOGA (pour *Multi Objective Genetic Algorithm*, cf [SRI94], [DEB02] ou [KOW98]). Une étude [SHI06] a d'ailleurs fait appel à cette technique pour l'optimisation de forme aérodynamique.

Bien sûr, nous nous sommes limités dans notre écriture à deux objectifs (espérance et écart-type à minimiser). L'extension à plus de deux objectifs ne bouleverse absolument pas les deux formulations du critère de qualité, et donc les deux variantes d'algorithme génétique.

Ces deux stratégies de résolution vont être décryptées. Nous allons nous attacher à les comparer sur divers points. En même temps, nous donnerons une description détaillée des méthodes d'algorithme génétique qui seront utilisées lors des cas-test ultérieurs.

1.4 Comparaison des méthodes SOGA et MOGA

Nous allons mener la comparaison des deux classes de méthode d'algorithme génétique (variantes SOGA et MOGA) sur trois points précis.

- La mise en application concrète du **critère de qualité**. Ce critère permet d'établir une relation d'ordre entre les individus, ce qui est à la base de l'évolution de la population. Les individus les mieux classés ont plus de chance de survivre que les autres. Jusque là, nous nous sommes contentés de donner le principe général des critères, alors notés $C_{r,1}$ (SOGA) et $C_{r,2}$ (MOGA). L'idée est ici de décrire la méthodologie destinée à les mettre en application pour hiérarchiser les individus.
- La manière de **passer d'une génération à l'autre**. En clair, il s'agit de décrire les modifications apportées à la population-parent pour constituer la population-fils.
- Le **type de solution obtenue**. L'interprétation des résultats est une étape au moins aussi importante que l'algorithme génétique lui-même. Nous montrerons en particulier que les deux familles de méthode fournissent des niveaux d'information différents, nécessitant des exploitations spécifiques.

Bien sûr, en plus de mener une comparaison générale entre les deux types de méthode (SOGA et MOGA), nous nous attacherons à décrire les caractéristiques spécifiques des algorithmes génétiques utilisés pour les tests. Dans la suite, nous distinguerons ce qui relève de la comparaison générale des versions SOGA et MOGA de ce qui relève de la description de nos algorithmes particuliers.

1.4.1 Mise en application du critère de qualité (SOGA vs MOGA)

Ce point de comparaison est bien sûr spécifique aux deux classes de méthode (SOGA et MOGA). L'objectif est d'établir une relation d'ordre entre les individus existant au sein d'une population donnée. Nous nous si-

IV.1 Présentation de l'algorithme génétique pour résoudre un problème d'optimisation sous incertitude

tuons toujours dans le cadre de la minimisation d'un certain nombre d'objectifs. Ces N_O objectifs seront notés $(O_i)_{1 \leq i \leq N_O}$.

La relation d'ordre des approches SOGA et MOGA est décrite ci-dessous.

- Traitons donc la méthode SOGA. Comme l'indique l'intitulé de la dénomination de cette catégorie de méthode (et plus particulièrement l'adjectif *single*), le critère de qualité se compose d'un **unique objectif** (noté O_1). Dès lors, la relation d'ordre coule de source. Un individu sera meilleur qu'un autre si son objectif est plus faible. Si deux individus possèdent la même valeur d'objectif, on dira qu'ils sont de qualité équivalente. Néanmoins, notre version particulière d'algorithme SOGA raisonne plutôt en terme de maximisation d'objectif. En clair, un individu sera meilleur qu'un autre si son objectif est supérieur. Cette inversion ne pose aucun souci pratique. Pour faire fonctionner la méthode SOGA retenue, il suffit de prendre l'opposé de la contrainte que nous souhaitons minimiser.
- Passons à la catégorie MOGA d'algorithme génétique. Cette fois-ci, le nombre N_O d'objectifs à minimiser est supérieur ou égal à deux. La **relation d'ordre** n'est plus aussi évidente que pour la classe SOGA. La minimisation simultanée de tous les objectifs n'est pas réalisable en pratique, chaque objectif dévoilant une classification différente des individus. Dès lors, la hiérarchisation va s'appuyer sur deux quantités définies en chacun des individus : le rang (RG) et la distance (DI). Commençons donc par définir ces deux paramètres.

Le **rang** (qui est un entier naturel) d'un individu repose sur la notion de domination. On dit que l'individu I_1 domine l'individu I_2 si les N_O objectifs associés à I_1 sont inférieurs ou égaux à ceux de I_2 . Dès lors, l'attribution du rang se fait itérativement. Le rang 1 est transmis à l'ensemble des individus qui ne sont dominés par personne. Parmi les individus restants, le rang 2 est associé aux individus qui ne sont dominés que par des individus de rang 1. Ensuite, on attribue le rang 3 aux individus uniquement dominés par des membres de rang 1 ou 2, et ainsi de suite... Au final, chaque individu possède un certain rang. L'ensemble des individus de rang i constitue le front i . Plus le front est élevé, plus la qualité se dégrade. Dans l'idéal, la population finale ne doit être composée que du front numéro 1.

On introduit un nouvel indicateur de qualité pour hiérarchiser les individus de même rang. Une **distance** (réel positif) est dès lors attribuée à chaque membre de la population. L'attribution s'effectue front par front, indépendamment les uns des autres. Pour les membres d'un même front F_i , la première étape est de leur affecter autant de distances intermédiaires qu'il n'y a d'objectifs à minimiser (donc N_O dans notre cas). Focalisons-nous sur l'objectif O_j . Après avoir classé les individus du front F_i par ordre croissant de l'objectif O_j , la distance intermédiaire $+\infty$ est associée aux deux individus extrêmes. Pour les autres, elle est égale à l'écart d'objectif entre les deux individus qui l'encadrent, divisé par l'écart maximal. Bien sûr, si tous les individus du front F_i possèdent la même valeur d'objectif, l'écart maximal devient nul. La distance intermédiaire associée à ce front F_i vaut alors $+\infty$. Enfin, la distance finale s'obtient par sommation des N_O distances intermédiaires ainsi calculées.

Nanti de ces deux informations (rang et distance), la relation d'ordre peut être établie. L'individu I_1 est de meilleure qualité que l'individu I_2 si son rang est strictement moins élevé ($RG_{I_1} < RG_{I_2}$). En cas d'égalité de rang, l'individu I_1 est de meilleure qualité que l'individu I_2 si sa distance est strictement plus importante ($DI_{I_1} > DI_{I_2}$). Dans le cas où les deux individus I_1 et I_2 possèdent à la fois le même rang et la même distance, on dira qu'ils sont de qualité équivalente.

Les deux indicateurs de qualité de la variante MOGA (rang et distance) garantissent que la population conserve deux caractéristiques au fil des générations. La plus intuitive est garantie par le rang. En privilégiant les individus de rang minimal, on s'assure de conserver ceux qui présentent le meilleur respect des objectifs (au sens de la domination). Ainsi, le rang a un rôle similaire à celui du critère de qualité des méthodes de type SOGA. Par contre, la distance donne la préférence aux données isolées et, du même coup, combat le rapprochement massif d'individus (en terme d'écart absolu d'objectif). L'idée est de préserver la diversité de la population. Sans cet indicateur de distance, on pourrait aboutir à une population sous forme d'un amas d'individus, regroupés dans une zone restreinte. Certaines solutions possibles seraient alors oubliées. En formulation multi-objectif, on rappelle que deux solutions sont acceptables si l'une ne domine pas l'autre. Pour pouvoir faire le tri parmi l'ensemble des solutions possibles, il faut garantir le maintien de la diversité des individus au fil des générations.

1.4.2 Passage d'une génération à l'autre (SOGA vs MOGA)

Dans cette partie, la comparaison consiste exclusivement à décrire nos versions particulières d'algorithme génétique. Certaines manières de faire sont néanmoins propres aux classes SOGA et MOGA.

Les différentes étapes permettant de passer d'une génération à l'autre vont être ici analysées. Dans l'ordre, nous passerons donc en revue les opérations de sélection, de croisement et de mutation. Nous terminerons par la définition de la nouvelle population, qui achève le changement de génération.

Nous noterons N_i le nombre d'individus constituant une population. On rappelle que ce nombre reste constant au fil des itérations. On souhaite passer de la population P_k ($k^{ième}$ génération) à la population P_{k+1} ($(k+1)^{ième}$ génération). Pour cela, deux populations intermédiaires sont créés. Il s'agit de la population-parent $P_{k,p}$ et de la population-fils $P_{k,f}$.

Opération de sélection

Cette étape peut être vue comme une initialisation de la nouvelle population P_{k+1} sur la base de la précédente (P_k). Partant de la population P_k , nous allons donc former la population-parent $P_{k,p}$. Voici les deux manières de faire.

- Pour la **méthode de type SOGA**, N_{pop} individus de la population P_k sont choisis aléatoirement pour former la population $P_{k,p}$. La probabilité de retenir un individu est proportionnelle à l'importance relative de la valeur de son objectif. Par exemple, un individu associé à la valeur maximale de l'objectif a la plus forte probabilité d'être sélectionné. Bien sûr, un même individu peut être choisi plusieurs fois (sinon, on aurait automatiquement $P_{k,p} = P_k$).
- Concernant la **méthode de type MOGA**, une différence importante vient du fait que la population temporaire $P_{k,p}$ est composée de $\left\lfloor \frac{N_{pop}}{2} \right\rfloor$ individus ($\lfloor x \rfloor$ désignant la partie entière de x). La sélection des individus de P_k pour former la population $P_{k,p}$ va se faire itérativement. En vue de choisir un individu, on commence par retenir N_s individus distincts de P_k . Dans notre étude, l'entier N_s sera fixé à 2. Le choix final de l'individu (parmi les N_s possibles) va se faire conformément au critère de qualité. Ainsi, on sélectionne l'individu de rang minimal. Si le rang ne permet pas de dégager un individu, on se base sur le second indicateur de qualité : la distance. Parmi les individus de rang minimal (sur les N_s pré-sélectionnés), nous prenons celui qui est associé à la distance maximale. Dans le cas où au moins deux individus restent en compétition, on en choisit alors un au hasard.

Cette population-parent $P_{k,p}$ va être soumise à des modifications génétiques (croisement et mutation) pour former la population-fils $P_{k,f}$ (de même taille que $P_{k,p}$).

Opération de croisement

Cette opération consiste à créer deux individus-fils à partir de deux parents. A chaque opération de croisement, on remplace donc les deux parents par les deux fils. Pour faire le parallèle avec la biologie, il s'agit de la naissance de deux fils héritant du patrimoine génétique de leurs deux parents.

Concrètement, voici les deux variantes retenues pour effectuer le croisement.

- En présence de la **méthode SOGA**, on choisit de faire exactement deux opérations de croisement par changement de génération. La première étape est de choisir deux parents (notés $P_{c,1}$ et $P_{c,2}$) aléatoirement parmi la population $P_{k,p}$ issue de l'opération de sélection. On autorise la sélection de deux parents identiques. Ensuite, on détermine un nombre a , choisi aléatoirement entre 0 et 1 (loi uniforme). Dès lors, les deux fils $F_{c,1}$ et $F_{c,2}$ cherchés s'obtiennent comme suit :

$$\begin{cases} F_{c,1} = aP_{c,1} + (1-a)P_{c,2} \\ F_{c,2} = (1-a)P_{c,1} + aP_{c,2} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

- Pour la **méthode MOGA** d'algorithme génétique, c'est le nombre total d'opérations de modification génétique (croisement ou mutation) qui reste identique à chaque changement de génération. Il vaut

IV.1 Présentation de l'algorithme génétique pour résoudre un problème d'optimisation sous incertitude

$\left\lfloor \frac{N_{pop}}{2} \right\rfloor$ (taille de la population temporaire $P_{k,p}$). Le choix du type d'opération (croisement ou mutation) est aléatoire, sachant que le croisement est privilégié sur la mutation (90% contre 10%).

On commence par sélectionner deux parents distincts (notés $P_{c,1}$ et $P_{c,2}$). Ce choix se fait aléatoirement, sur la base de la population-parent $P_{k,p}$. Les deux fils $F_{c,1}$ et $F_{c,2}$ valent alors :

$$\begin{cases} F_{c,1} = \frac{(1 + \Delta_u)P_{c,1} + (1 - \Delta_u)P_{c,2}}{2} \\ F_{c,2} = \frac{(1 - \Delta_u)P_{c,1} + (1 + \Delta_u)P_{c,2}}{2} \end{cases} \quad (IV.5)$$

La valeur du paramètre Δ_u dépend de celle de la quantité u , issue du tirage aléatoire d'un réel entre 0 et 1 suivant la loi uniforme. Voici les formules utilisées pour passer de u à Δ_u :

$$\begin{cases} \Delta_u = (2u)^{\frac{1}{\mu+1}} & \text{si } u \leq 0.5 \\ \Delta_u = (2(1-u))^{-\frac{1}{\mu+1}} & \text{si } u > 0.5 \end{cases} \quad (IV.6)$$

Dans notre variante d'algorithme génétique, le paramètre μ est égal à 20.

Opération de mutation

Un fils est ici déterminé à partir d'un unique parent soumis à une légère perturbation. Le fils remplace son parent à chaque mutation effectuée. On peut faire le parallèle avec la croissance d'un être vivant, qui voit son organisme subir différentes modifications au cours de sa vie.

En pratique, cette opération de mutation se réalise de la façon suivante.

- Dans le cas de la **méthode de type SOGA**, le nombre de mutations par changement de génération est fixé à deux. On se base sur la population-parent $P_{k,p}$ qui vient de subir deux opérations de croisement. Un parent P_m est sélectionné au hasard. Celui-ci vit dans un espace à d dimensions (d étant le nombre de paramètres d'optimisation). Parmi les d dimensions de l'espace, on en sélectionne une au hasard. Elle sera notée d_m . La d_m^{ieme} composante $(P_m)_{d_m}$ de P_m est forcément comprise entre les valeurs $V_{d_m,min}$ et $V_{d_m,max}$ (bornes fixées au préalable, destinées à réduire le domaine d'exploration). On commence par tirer une valeur u entre 0 et 1 (suivant la loi uniforme). Ensuite, les d composantes $(F_m)_{1 \leq i \leq d}$ du fils F_m valent :

$$\begin{cases} (F_m)_i = (P_m)_i & \text{si } i \neq d_m \\ (F_m)_{d_m} = (P_m)_{d_m} + k_s(V_{d_m,max} - (P_m)_{d_m}) & \text{si } u \leq 0.5 \\ (F_m)_{d_m} = (P_m)_{d_m} - k_s((P_m)_{d_m} - V_{d_m,min}) & \text{si } u > 0.5 \end{cases} \quad (IV.7)$$

L'expression du paramètre k est :

$$k_s = \left(a \left(1 - \frac{g_c}{g_{max}} \right) \right)^{\mu_2}$$

où les entiers g_c et g_{max} désignent respectivement le numéro de la génération courante et le nombre maximal de générations demandées. On rappelle que l'algorithme génétique s'arrête dès que g_c atteint la valeur g_{max} (fixée avant de lancer la simulation). Le paramètre a est un réel pris aléatoirement entre 0 et 1 (loi uniforme). Enfin, la variable μ_2 est une constante choisie une fois pour toute. Dans notre cas, elle sera fixée à 3.

- Passons à la **méthode de type MOGA**. On choisit de faire une mutation (plutôt qu'un croisement) avec une probabilité de 10%, sachant que le choix est proposé $\left\lfloor \frac{N_{pop}}{2} \right\rfloor$ fois à chaque changement de génération. L'opération de mutation débute par la sélection aléatoire d'un parent $P_m \in P_{k,p}$. Ensuite, les d composantes du fils F_m sont calculées. L'expression de la i^{ieme} composante $(F_m)_i$ du fils F_m est égale à :

$$(F_m)_i = (P_m)_i + \Delta_i$$

où le paramètre Δ_i (dépendant d'une variable u_i tirée aléatoirement entre 0 et 1 suivant la loi uniforme) vaut :

$$\begin{cases} \Delta_i = (2u_i)^{\frac{1}{\mu_2+1}} & \text{si } u_i \leq 0.5 \\ \Delta_i = (2(1-u_i))^{-\frac{1}{\mu_2+1}} & \text{si } u_i > 0.5 \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

La constante μ_2 est fixée à 20 dans toute la suite de l'étude.

A l'issue des deux opérations de modification génétique (croisement et mutation), la population-fils $P_{k,f}$ est donc formée. Elle vient remplacer la population-parent dont elle est issue. Elle est de taille N_{pop} (méthode SOGA) ou $\left\lfloor \frac{N_{pop}}{2} \right\rfloor$ (méthode MOGA).

Définition de la nouvelle population

Cette ultime étape est destinée à créer la nouvelle génération (population P_{k+1}). Le point de départ est la population-fils $P_{k,f}$ issue des trois étapes précédemment décrites (opérations de sélection, de croisement et de mutation). L'idée importante de cette étape est de garantir que les modifications génétiques n'altèrent pas la qualité de la population de départ P_k . Cette population P_{k+1} ouvrira alors la voie à la nouvelle génération. Le descriptif de cette étape est donné ci-dessous.

- Avec la **méthode de type SOGA**, la population $P_{k,f}$ possède la taille adéquate (N_{pop} individus). Elle peut donc directement faire office de nouvelle population. Pour s'assurer que la qualité n'est pas dégradée, nous remplaçons simplement le moins bon membre de la population-fils $P_{k,f}$ par le meilleur individu de la population initiale P_k . On aboutit ainsi à la population P_{k+1} cherchée.
- Par contre, en présence de la **méthode de type MOGA**, la taille de la population $P_{k,f}$ n'est pas conforme. La population $P_{k,f}$ possède en effet environ deux fois moins d'individus que prévu ($\left\lfloor \frac{N_{pop}}{2} \right\rfloor$ contre N_{pop}). C'est pourquoi, nous introduisons une population intermédiaire (notée P_{k+1}^n). Elle provient simplement du regroupement des populations $P_{k,f}$ et P_k . Ainsi, cette population P_{k+1}^n possède $N_{pop} + \left\lfloor \frac{N_{pop}}{2} \right\rfloor$ individus. Pour construire la nouvelle population P_{k+1} , on sélectionne les N_{pop} meilleurs individus de P_{k+1}^n . On rappelle que les meilleurs individus sont ceux de rang minimal et, en cas d'égalité de rang, de distance maximale. Ces notions (rang et distance) ont été explicitées lors du premier point de comparaison des méthodes SOGA et MOGA. Cette sélection, basée sur le critère de qualité, garantit la non-dégradation des populations au fil des générations.

Pour les deux variantes d'algorithme génétique, le critère d'arrêt est donné par le nombre maximal de générations.

1.4.3 Exploitation des résultats obtenus (SOGA vs MOGA)

A l'issue d'un algorithme génétique, qu'il soit de type SOGA ou MOGA, on se trouve en possession d'une population P^* de N_{pop} individus. Ce nombre N_{pop} a été spécifié au début de la simulation. L'information qu'il est possible de tirer de cette population finale P^* va directement dépendre de la variante d'algorithme génétique considérée (SOGA ou MOGA).

- Dans le cas d'une **méthode de type SOGA**, l'objectif à minimiser est unique. Un système de pondération a permis de passer de plusieurs objectifs à une seule fonction-coût. Le contrôle du compromis se fait donc avant même le démarrage de l'algorithme génétique. Ainsi, l'information intéressante se résume à la connaissance du meilleur individu de cette population finale P^* (ie celui associé au coût minimal). Grâce à l'ultime étape intervenant lors du passage d'une génération à l'autre, nous sommes sûr d'être en présence du meilleur individu rencontré au cours de la simulation. On rappelle que le meilleur individu d'une population est transmis systématiquement à

IV.1 Présentation de l’algorithme génétique pour résoudre un problème d’optimisation sous incertitude

la génération suivante. Pour avoir accès à de multiples solutions possibles (indispensables pour prendre une décision en toute connaissance de cause), il faut mener plusieurs simulations avec un système de pondération différent à chaque fois.

- Par contre, un **algorithme MOGA** cherche à concilier plusieurs objectifs. Le compromis est traité au sein même de la simulation génétique. Ainsi, l’ensemble de la population finale P^* doit être pris en considération. La répartition des individus nous renseigne sur l’effet croisé des différents objectifs entre eux. Pour réduire le nombre d’individus acceptables, on peut ajouter des contraintes a posteriori. Sans relancer notre algorithme génétique, on analyse les individus de la population P^* qui respectent ces nouvelles contraintes. En ce sens, le contrôle du compromis se fait pendant et après la simulation mais aucunement avant, contrairement à la technique SOGA.

Un exemple classique d’exploitation de la population finale est l’analyse n_σ -sigma¹ [SHI05]. Elle est valable dans le cas où les deux objectifs à minimiser sont l’espérance et l’écart-type de la fonction scalaire étudiée. Cette méthode n_σ -sigma consiste à définir la zone du plan [espérance ; écart-type] que nous considérons comme acceptable. Seules les solutions situées à l’intérieur de cette zone sont retenues. Nous détaillerons par la suite la mise en œuvre pratique de la technique n_σ -sigma.

Pour récapituler la comparaison des variantes SOGA et MOGA, on reprend le schéma général de l’algorithme génétique de la figure IV.1 en y rajoutant les étapes spécifiques de chacune de ces deux techniques (figure IV.2).

Nous allons maintenant mettre en œuvre l’algorithme génétique pour résoudre un problème d’optimisation sous incertitude (ou optimisation robuste).

Habituellement, l’optimisation robuste consiste à minimiser conjointement la moyenne et l’écart-type de la fonctionnelle étudiée. Avec cette stratégie, l’aléa sur le paramètre est traité via son biais ou son degré de dispersion qu’il génère sur l’observation. Cette vision n’est pas toujours satisfaisante et peut être un peu réductrice. Donnons un exemple pour fixer les idées. La fonction représente la réponse d’un système mécanique pour laquelle il existe une valeur-limite à ne pas dépasser. Le fait de dépasser ce seuil signifie que le système n’est plus contrôlable, ce qui peut provoquer des dégâts importants de la structure. Il faut que l’optimisation génétique prenne explicitement en compte cette valeur-seuil. L’écart-type n’est donc pas approprié. Pour être pertinente, l’optimisation robuste doit alors être formulée en terme de **probabilité de défaillance**.

1. La méthode n_σ -sigma est communément appelée méthode 6-sigma. Nous avons choisi cette dénomination pour insister sur le fait que nous utilisons une extension de la technique 6-sigma, en remplaçant le 6 par un paramètre n_σ que l’utilisateur peut choisir.

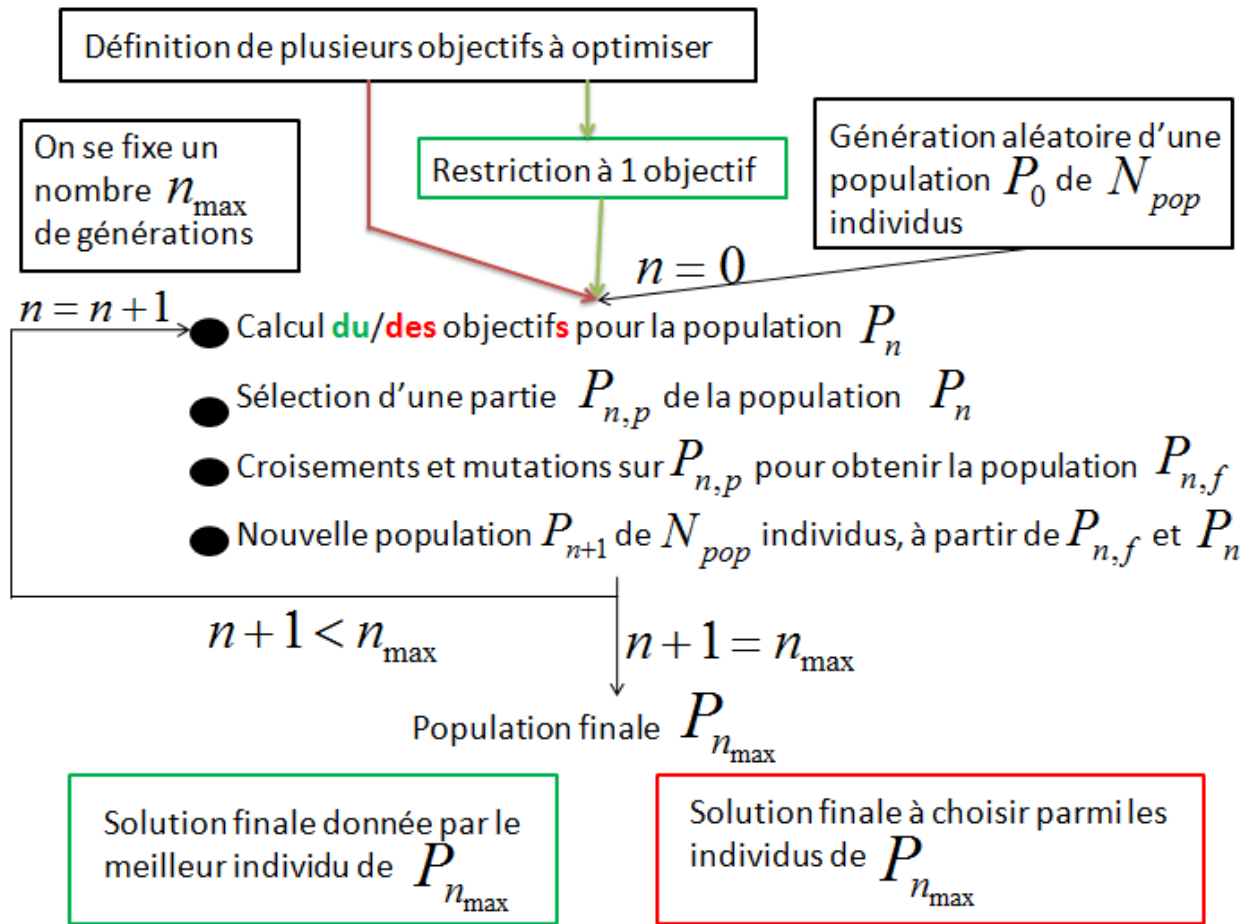


Figure IV.2 – Schéma général d'un algorithme génétique, en distinguant les étapes spécifiques de la variante mono-objectif SOGA (en vert) et de la variante multi-objectif MOGA (en rouge).

2 Application de l'optimisation sous incertitude sur un cas-test Euler

2.1 Présentation du contexte général de l'étude

Nous allons passer à l'application de la méthodologie d'optimisation sous incertitude sur un problème Euler mettant en jeu deux variables géométriques. En particulier, la formulation innovante avec probabilité de défaillance sera testée.

Dans cette optique, nous envisageons le cas-test de l'aile ONERA M6 (problème Euler en 3 dimensions). Le maillage volumique utilisé comprend 27499 sommets. La figure IV.3 propose la vue d'une coupe de maillage volumique (agrandissement), ainsi qu'une visualisation de la discrétisation de la peau de la voilure. Le nombre de Mach sera fixé à 0.84 (écoulement transsonique avec chocs attachés) et l'angle d'incidence est égal à 3.06° .

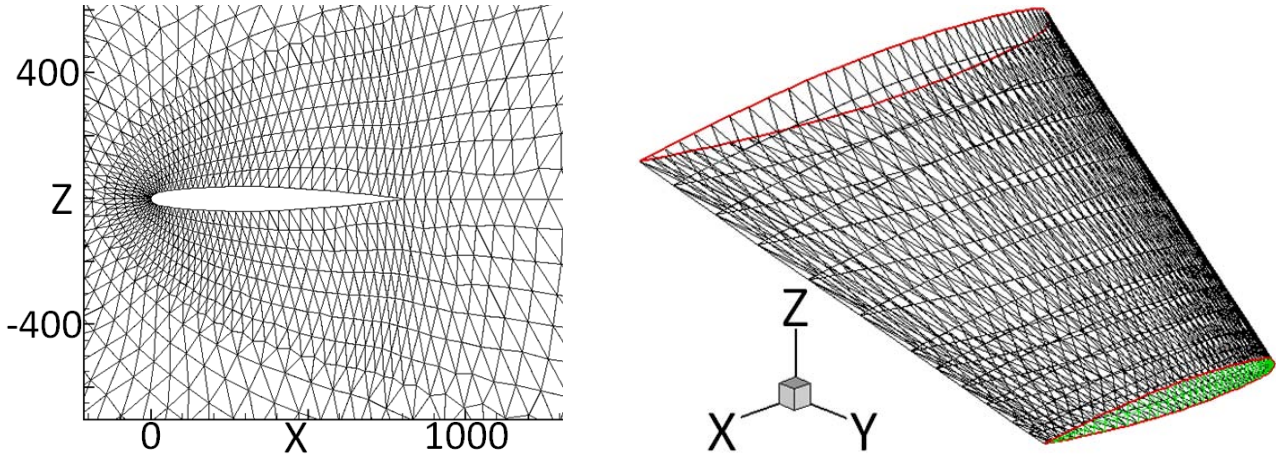


Figure IV.3 – Visualisations de l'aile ONERA M6, cas-test Euler 3D utilisé pour mener l'optimisation génétique sous incertitude.

Le but général de l'optimisation génétique sous incertitude sera de minimiser la traînée C_x (via certains indicateurs statistiques) vis-à-vis de deux paramètres incertains jouant sur la forme du profil. Ces paramètres d'optimisation sont les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C . Les effets d'une modification de chacune de ces deux variables sur la géométrie de l'objet aérodynamique sont donnés en figure IV.4.

Les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C vont varier au sein des intervalles $[-5^\circ, 5^\circ]$ et $[-10^\circ, 10^\circ]$ respectivement. Dans notre étude, nous ne nous focaliserons pas sur le coût de calcul mais plutôt sur la construction du front de Pareto des différents objectifs pris en compte dans l'optimisation. C'est pourquoi, dans le but d'avoir accès rapidement à la valeur de la traînée C_x pour un couple d'angles (α_R, α_C) donné, nous construisons au préalable une surface de réponse de traînée (figure IV.5). Une soixantaine de calculs exacts a servi à la construction de ce modèle approché.

Lors de la description de la méthodologie employée pour effectuer l'optimisation, nous avons distingué deux modes de fonctionnement. La différence vient de la présence ou non d'une contrainte-objectif s'écrivant comme une probabilité à minimiser. Une telle contrainte va faire intervenir la portance C_z . Dans la pratique, la portance doit être la plus forte possible. Ainsi, la probabilité-contraite à minimiser sera de la forme $P(C_z < C_z^{TOL})$, où C_z^{TOL} est une valeur-seuil à préciser. Dans l'étude proposée, nous prendrons $C_z^{TOL} = 0.3$. Par ailleurs,

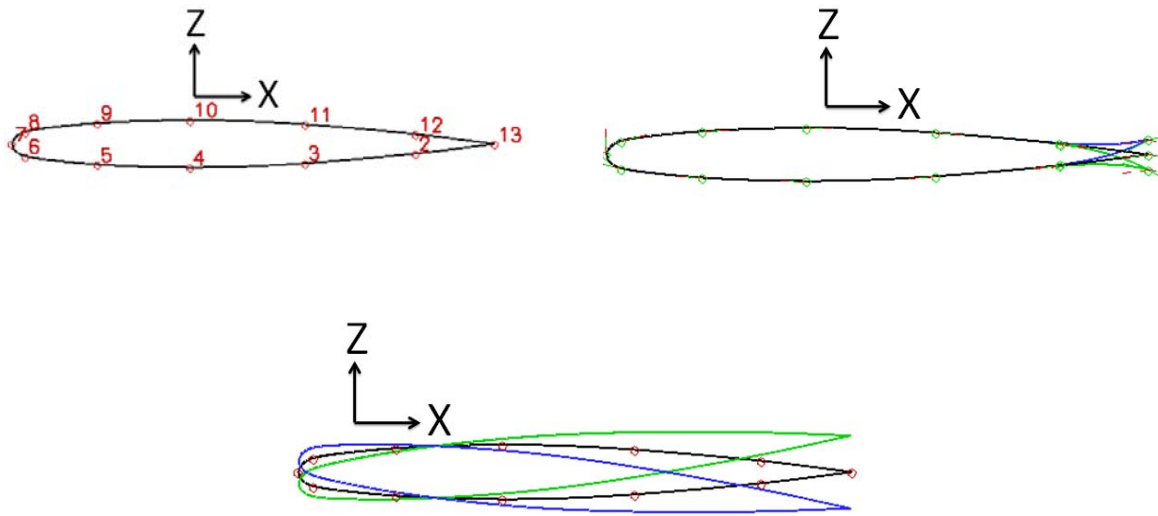


Figure IV.4 – Forme nominale de la géométrie de l’aile ONERA M6 (en noir) avec la position des points de contrôle (figure en haut à gauche). Les effets d’un changement d’angle de cambrure de bord de fuite ($\alpha_C = -20^\circ$ (vert), $\alpha_C = 0^\circ$ (noir) et $\alpha_C = 20^\circ$ (bleu)) et d’angle de rotation globale ($\alpha_R = -5^\circ$ (vert), $\alpha_R = 0^\circ$ (noir) et $\alpha_R = 5^\circ$ (bleu)) sont donnés de haut en bas et de gauche à droite.

comme pour la traînée C_x , la détermination de la portance C_z durant l’optimisation se fera via un modèle approché (figure IV.6), construit sur la même base de calculs exacts (60 environ).

Le traitement des incertitudes va faire appel à la méthode des moments du second ordre (développement de Taylor d’ordre 2). Dans ce contexte, nous avons besoin des dérivées premières et secondes de la traînée C_x et de la portance C_z vis-à-vis des angles α_R et α_C . L’idée est encore d’utiliser des surfaces de réponse. Typiquement, la soixantaine de calculs exacts de traînée et de portance contient non seulement les valeurs de l’observation mais aussi les dérivées premières et secondes (calculées par différentiation automatique). A chaque dérivée partielle (de traînée ou de portance) est associée une surface de réponse. Les sensibilités demandées par l’optimiseur génétique seront donc évaluées sur ces modèles approchés.

Une **probabilité de défaillance** va être intégrée aux objectifs à minimiser. Les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont alors supposés incertains. La loi normale (d’écart-type 0.4° pour α_R et 0.2° pour α_C) est adoptée pour les tests. Trois simulations vont avoir lieu. Pour chacune d’entre elles, les objectifs à minimiser vont changer. On commencera par minimiser la moyenne de la traînée. Ensuite, nous minimiserons la moyenne et l’écart-type de la traînée d’une part, puis la moyenne et l’asymétrie de la traînée d’autre part. A chaque fois, un objectif supplémentaire sera ajouté. Il s’agira de la probabilité de défaillance suivante : $P(C_z < C_z^{TOL})$ (avec $C_z^{TOL} = 0.3$).

2.2 Optimisation sous incertitude avec probabilité de défaillance

Les trois simulations de la section précédente vont être reprises. La seule différence réside dans l’ajout d’un objectif supplémentaire à minimiser. Il s’agit de la probabilité $P(C_z < C_z^{TOL})$ (avec $C_z^{TOL} = 0.3$). Le but est de mesurer l’impact de cette nouvelle contrainte sur les fronts de Pareto qui ont été trouvés.

IV.2 Application de l'optimisation sous incertitude sur un cas-test Euler

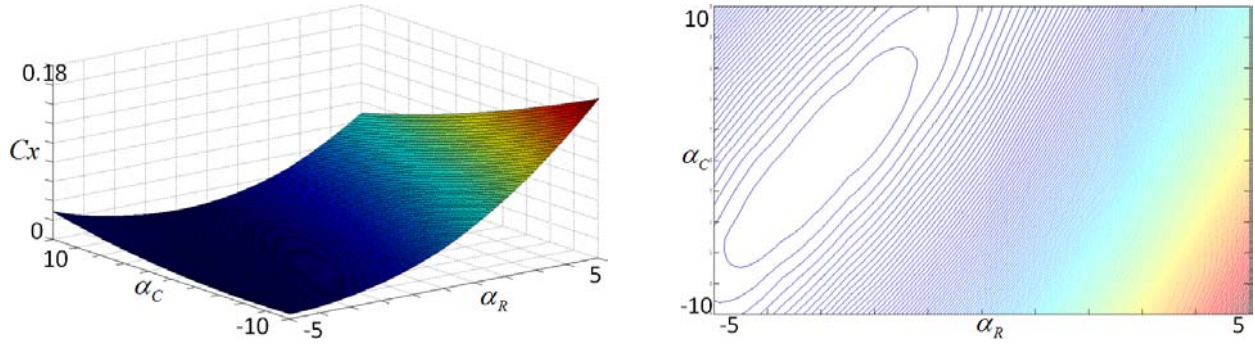


Figure IV.5 – Evolution de la traînée Cx (surface 3D à gauche et lignes de niveau à droite) en fonction des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C (cas-test de l'aile ONERA M6).

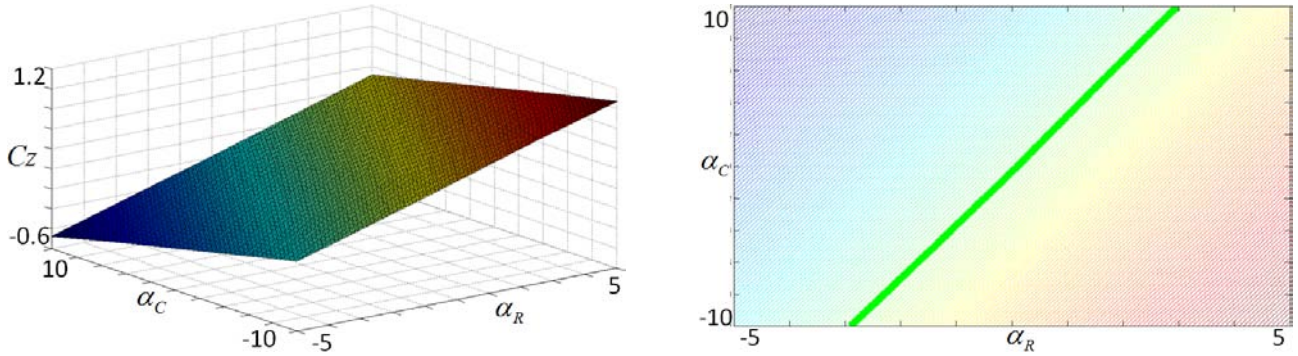


Figure IV.6 – Evolution de la portance Cz (surface 3D à gauche et lignes de niveau à droite) en fonction des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , avec le tracé de la ligne d'iso-portance $Cz^{TOL} = 0.3$ qui interviendra dans la probabilité-contraainte $P(Cz < Cz^{TOL})$ à minimiser (cas-test de l'aile ONERA M6).

2.2.1 Cas à deux objectifs : minimisation de la moyenne de la traînée, en plus d'une probabilité de défaillance sur la portance

L'objectif est donc ici de réduire la moyenne de la traînée Cx et une **probabilité de défaillance** associée à la portance Cz . Le but est donc double : réduire la traînée Cx tout en s'assurant de ne pas aboutir à une valeur de portance Cz inférieure à un certain seuil Cz^{TOL} .

Pour mener l'étude, une population composée de 1000 individus évolue sur 16 générations. La visualisation des populations initiale et finale (figure IV.7) permet de se rendre compte de l'impact de ce nouvel objectif sur le résultat. On se rappelle que la réduction de la seule moyenne de traînée a donné une agglutination des points autour de la solution de performance (proche du minimum global de traînée). Ici, on aboutit à une répartition presque continue des individus après 16 générations. Comme attendu, la répartition des points finaux intersecte la ligne d'iso-portance $Cz = Cz^{TOL}$ à l'endroit où la traînée est minimale.

Une fois positionnés les 1000 individus dans les plans $(\alpha_R, E(Cx))$ et $(\alpha_R, P(Cz < Cz^{TOL}))$, le front de Pareto est clairement visible (figure IV.8). La contrainte probabiliste passe de 1 à 0 lorsque l'angle de rotation globale α_R augmente. Notons que la loi de probabilité considérée en entrée (loi normale) est d'extension infinie. Ceci explique que le front de Pareto s'étend pour des probabilités qui semblent nulles. On se situe alors dans la queue de probabilité de la densité de portance, elle aussi d'extension infinie. Notons que le comportement de la portance Cz est quasiment linéaire vis-à-vis des angles α_R et α_C . Ainsi, la probabilité associée à Cz est elle aussi de type gaussien.

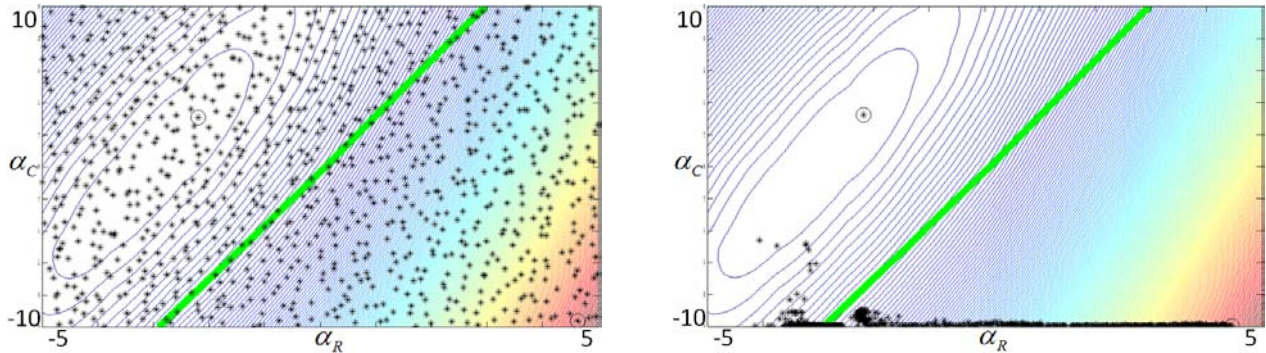


Figure IV.7 – Populations (1000 individus) initiale (à gauche) et finale après 16 générations (à droite) avec comme contraintes la minimisation de la moyenne de la traînée Cx et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ (ligne verte d'iso-portance $Cz = Cz^{TOL} (= 0.3)$) lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont incertains (lois normales d'écart-type 0.4° et 0.2° respectivement), sur le cas-test de l'aile ONERA M6.

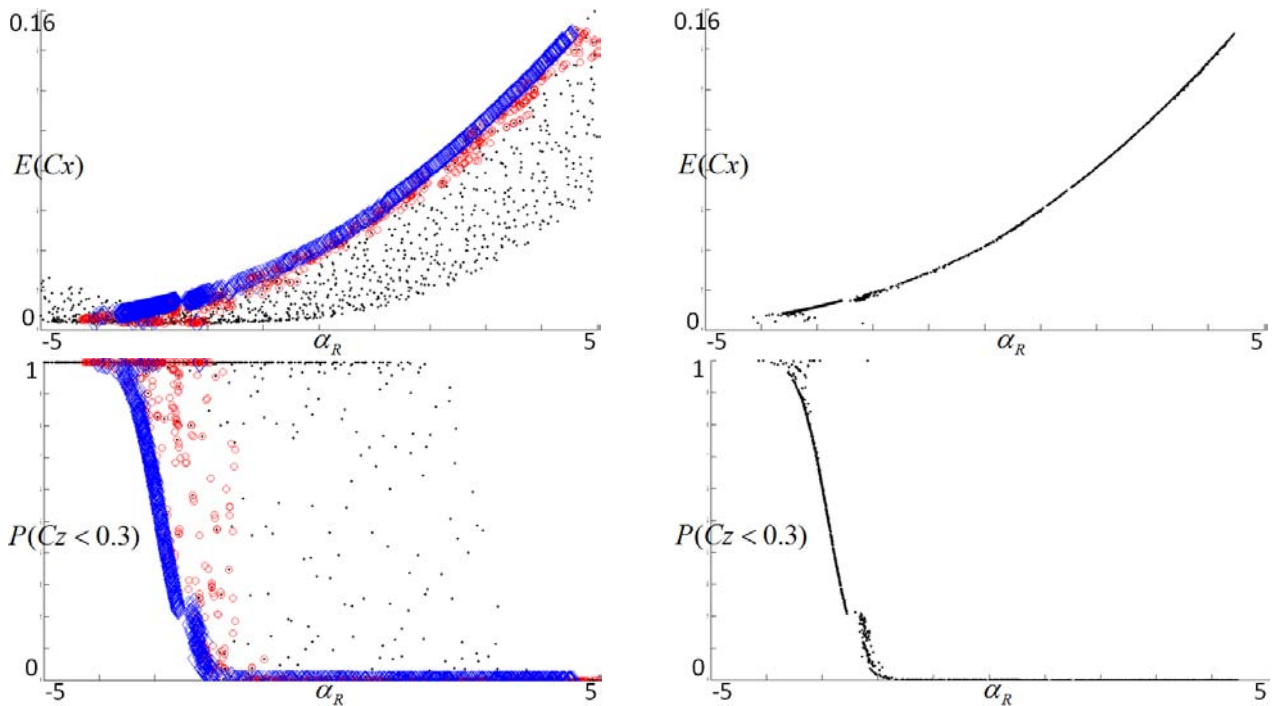


Figure IV.8 – Positions des 1000 individus de la population dans le plan $(\alpha_R, E(Cx))$ en haut et $(\alpha_R, P(Cz < Cz^{TOL}))$ en bas (génération initiale en points noirs, génération 2 en cercles rouges et génération 10 en losanges bleus sur les figures de gauche et génération 16 en points noirs sur les figures de droite) sous les contraintes de minimisation de la moyenne de la traînée Cx et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont incertains (lois normales d'écart-type 0.4° et 0.2° respectivement), sur le cas-test de l'aile ONERA M6.

2.2.2 Cas à trois objectifs : minimisation de la moyenne et de l'écart-type de la traînée, en plus d'une probabilité de défaillance sur la portance

On souhaite désormais tenir compte de trois objectifs. En plus de la moyenne et de l'écart-type de la traînée Cx , une **probabilité de défaillance** sur la portance Cz (à savoir $P(Cz < Cz^{TOL})$, avec $Cz^{TOL} = 0.3$) est à minimiser. L'optimisation sous incertitude de traînée s'accompagne donc d'une contrainte sur la portance qui doit rester supérieure à un certain seuil Cz^{TOL} .

La répartition de la population finale (figure IV.9) est très proche de celle du cas-test précédent (figure IV.7). L'ajout de l'écart-type comme objectif ne change quasiment pas le résultat de l'algorithme génétique. Néanmoins, à bien y regarder, on constate que certains individus sont placés à l'endroit de la solution robuste, minimisant l'écart-type de traînée. La présence de la probabilité-objectif empêche de retrouver la répartition continue des individus entre les solutions de performance et de robustesse, mise en évidence lors de la section précédente.

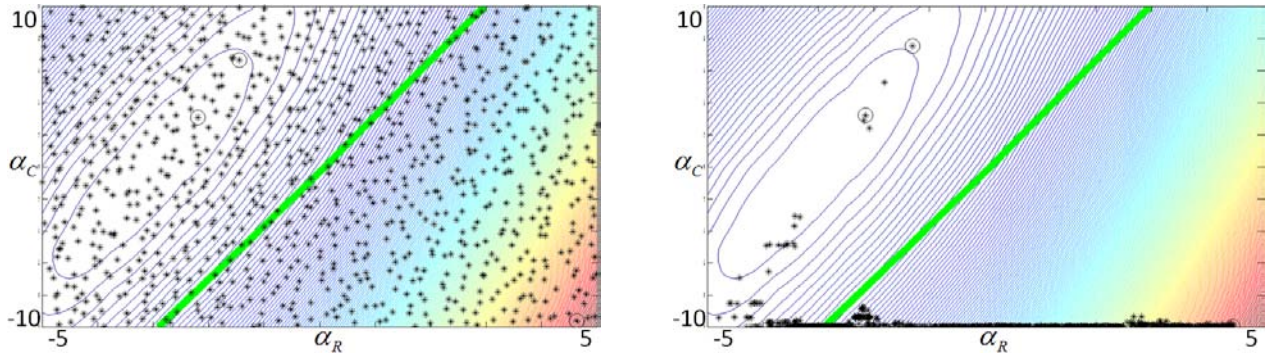


Figure IV.9 – Populations (1000 individus) initiale (à gauche) et finale après 16 générations (à droite) avec comme contraintes la minimisation de la moyenne, de l'écart-type de la traînée Cx et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ (ligne verte d'iso-portance $Cz = Cz^{TOL} (= 0.3)$) lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont incertains (lois normales d'écart-type 0.4° et 0.2° respectivement), sur le cas-test de l'aile ONERA M6.

En se focalisant sur le positionnement des 1000 individus dans les trois plans $(\alpha_R, E(Cx))$, $(\alpha_R, \sigma(Cx))$ et $(\alpha_R, P(Cz < Cz^{TOL}))$ (figure IV.10), on se rend compte que le front de Pareto concerne en priorité deux groupes d'objectif. Le premier s'applique à la traînée (moyenne et écart-type) et le second à la portance (probabilité de défaillance). Plus les objectifs sont antagonistes, plus leurs impacts relatifs sur la population finale sont marqués. Comme les deux objectifs de traînée (moyenne et écart-type) sont proches, ils peuvent être regroupés. Cela justifie les deux groupes d'objectif qui viennent d'être présentés.

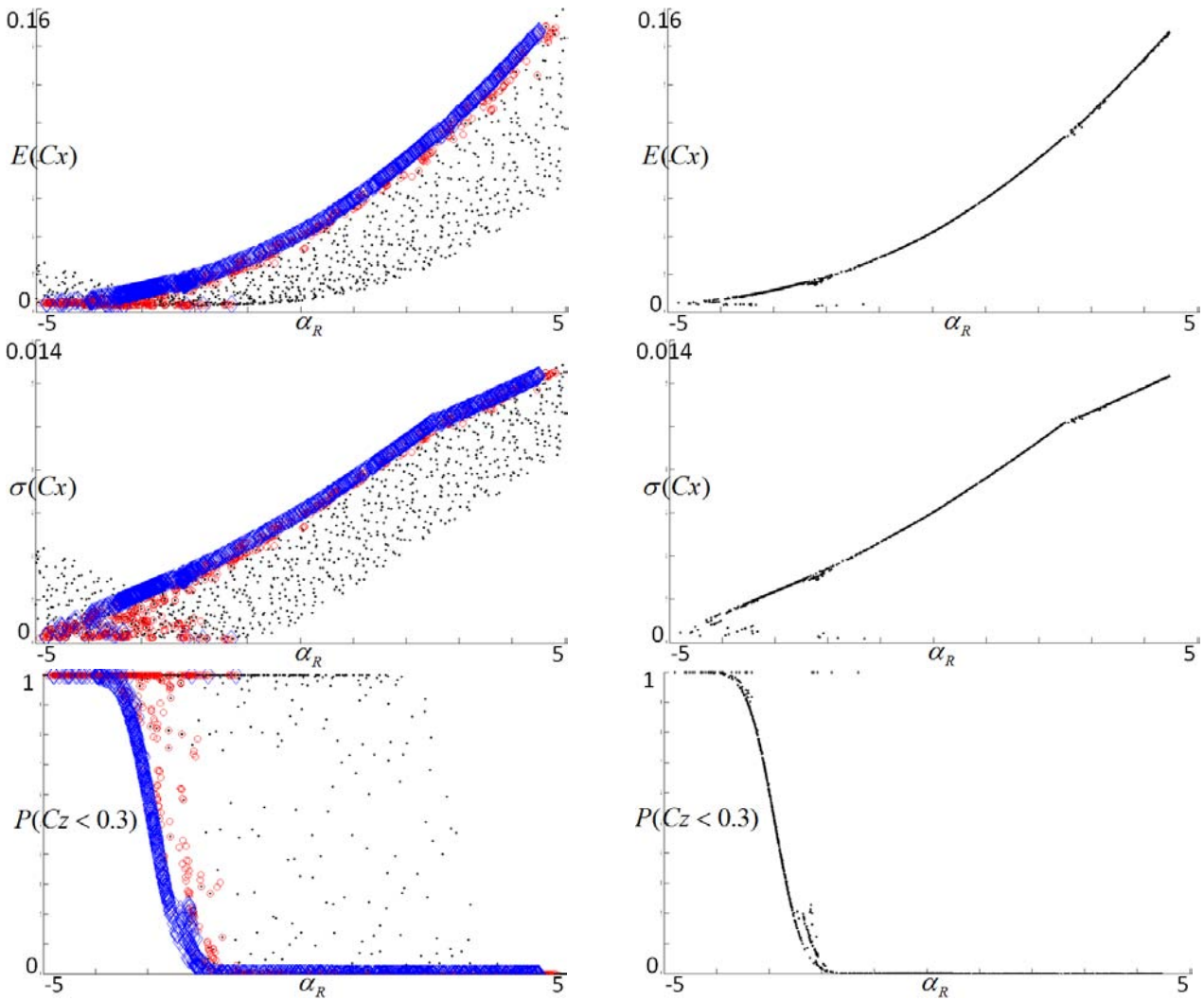


Figure IV.10 – Positions des 1000 individus de la population dans le plan $(\alpha_R, E(Cx))$, $(\alpha_R, \sigma(Cx))$ et $(\alpha_R, P(Cz < Cz^{TOL}))$ de haut en bas (génération initiale en points noirs, génération 2 en cercles rouges et génération 10 en losanges bleus sur les figures de gauche et génération 16 en points noirs sur les figures de droite) sous les contraintes de minimisation de la moyenne, de l'écart-type de la traînée Cx et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont incertains (lois normales d'écart-type 0.4° et 0.2° respectivement), sur le cas-test de l'aile ONERA M6.

2.2.3 Cas à trois objectifs : minimisation de la moyenne et de l'asymétrie de la traînée, en plus d'une probabilité de défaillance sur la portance

Terminons notre étude par le cas de la réduction de la moyenne et de l'asymétrie de la traînée Cx , ainsi que d'une **probabilité de défaillance** sur la portance Cz (à savoir $P(Cz < Cz^{TOL})$, avec $Cz^{TOL} = 0.3$).

En regardant la répartition de la population finale (figure IV.11), on se rend compte de la difficulté d'obtenir une solution aisément exploitable. En effet, les individus semblent se placer de manière assez désordonnée. On retrouve néanmoins une répartition quelque peu semblable à celle trouvée lorsque seules la moyenne et l'asymétrie de la traînée étaient minimisées (figure ??). Ce cas-test nous informe de l'importance de bien cibler les objectifs dont il faut tenir compte. L'efficacité et la bonne tenue des solutions va directement dépendre du type de problème traité. Il n'est donc pas recommandé de vouloir tenir compte d'un trop grand nombre de contraintes, de crainte d'aboutir à une répartition chaotique et donc difficilement exploitable des individus.

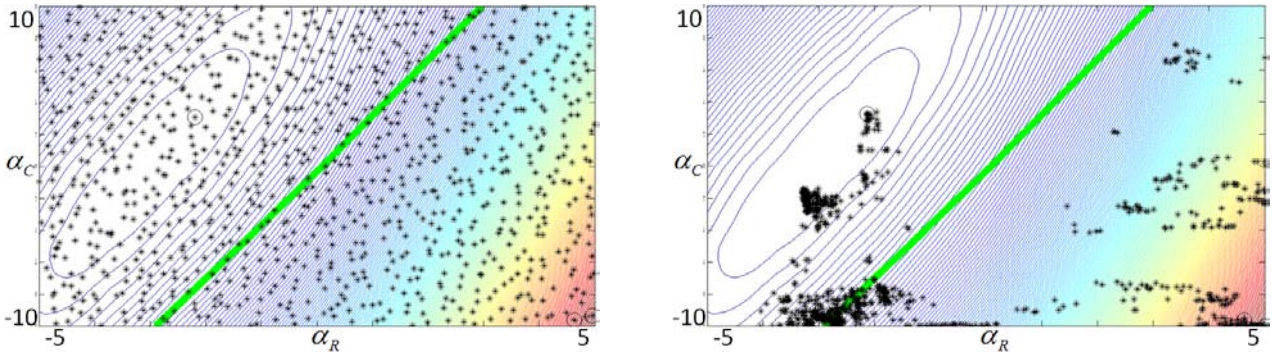


Figure IV.11 – Populations (1000 individus) initiale (à gauche) et finale après 16 générations (à droite) avec comme contraintes la minimisation de la moyenne, de l'asymétrie de la traînée Cx et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ (ligne verte d'iso-portance $Cz = Cz^{TOL} (= 0.3)$) lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont incertains (lois normales d'écart-type 0.4° et 0.2° respectivement), sur le cas-test de l'aile ONERA M6.

Malgré tout, on arrive à discerner un front de Pareto pour notre problématique (figure IV.12). Bien que légèrement bruité, il est bel et bien visible.

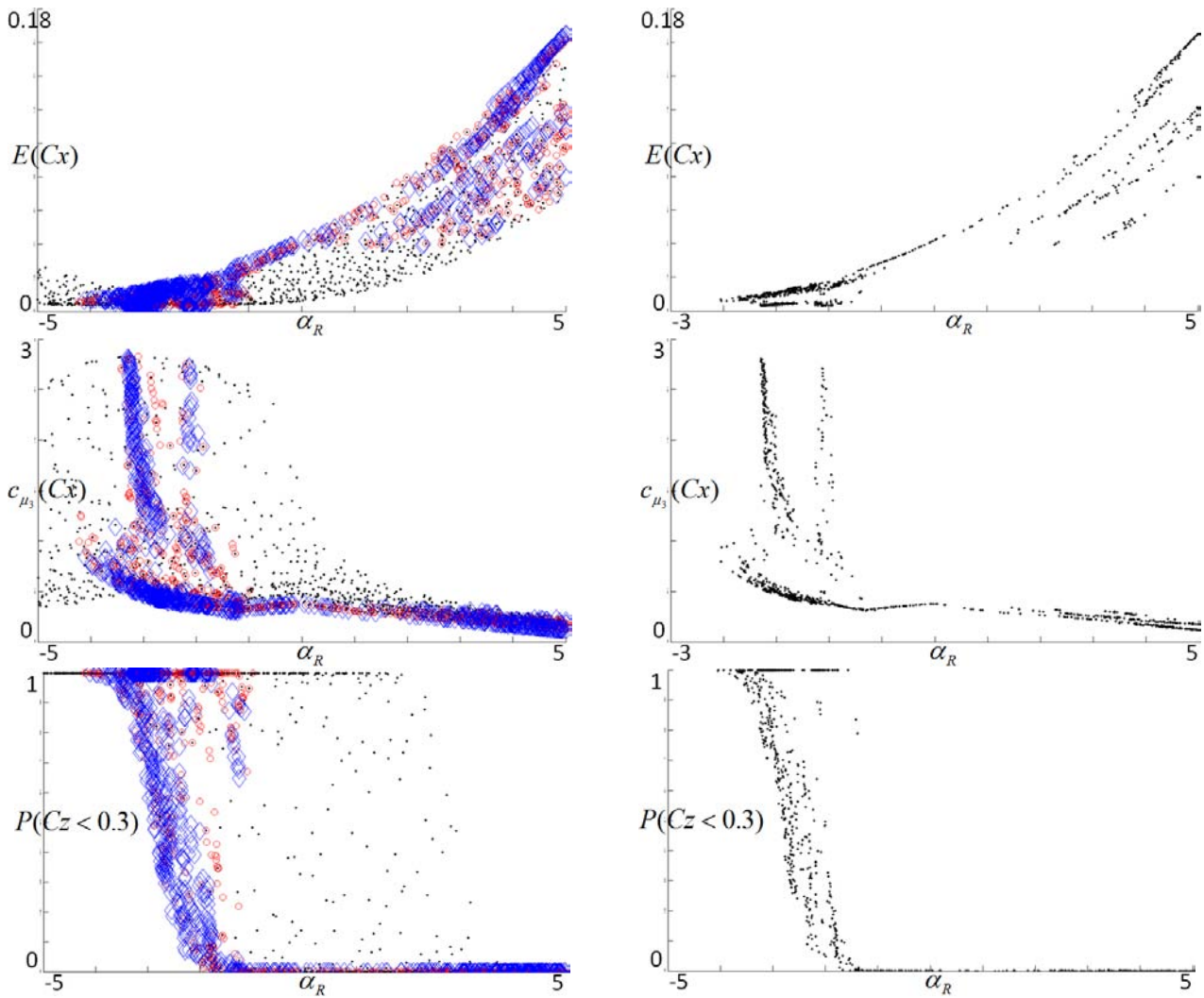


Figure IV.12 – Positions des 1000 individus de la population dans le plan $(\alpha_R, E(Cx))$, $(\alpha_R, c_{\mu_3}(Cx))$ et $(\alpha_R, P(Cz < Cz^{TOL}))$ de haut en bas (génération initiale en points noirs, génération 2 en cercles rouges et génération 10 en losanges bleus sur les figures de gauche et génération 16 en points noirs sur les figures de droite) sous les contraintes de minimisation de la moyenne E , de l'asymétrie c_{μ_3} de la traînée Cx et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ lorsque les angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C sont incertains (lois normales d'écart-type 0.4° et 0.2° respectivement), sur le cas-test de l'aile ONERA M6.

2.3 Récapitulatif des deux types de problème d'optimisation sous incertitude

La prise en compte d'une **probabilité de défaillance** au sein d'un problème d'optimisation sous incertitude ouvre donc de nouvelles perspectives.

Reprenons notre problématique précédente, à savoir le contrôle de l'aléa sur la traînée Cx vis-à-vis des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C . Nous allons ici nous focaliser sur la différence entre les résultats des deux optimisations suivantes.

- Réduction de la moyenne $E(Cx)$ et de l'écart-type $\sigma(Cx)$ de traînée (figure IV.13).
- Réduction de la moyenne $E(Cx)$ de traînée et d'une probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ de portance Cz , où la valeur-critique Cz^{TOL} vaut 0.3 (figure IV.14).

La comparaison concerne d'une part la répartition des individus finaux dans le plan des variables d'optimisation et d'autre part la forme du front de Pareto obtenu (répartition des individus finaux dans le plan des objectifs statistiques). Pour les deux problèmes, 1000 individus évoluent sur 16 générations d'algorithme multi-objectif.

Sur le premier problème (réduction de la moyenne $E(Cx)$ et de l'écart-type $\sigma(Cx)$ de traînée), on aboutit à une répartition linéique des individus dans le plan des variables d'optimisation (angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C). Les deux solutions extrêmes correspondent aux solutions de performance (point magenta) et de robustesse (point vert). Ces deux solutions sont proches l'une de l'autre. Cette caractéristique a pour effet de fournir un front de Pareto très localisé (positionnement des individus finaux dans le plan des objectifs statistiques $E(Cx)$ et $\sigma(Cx)$).

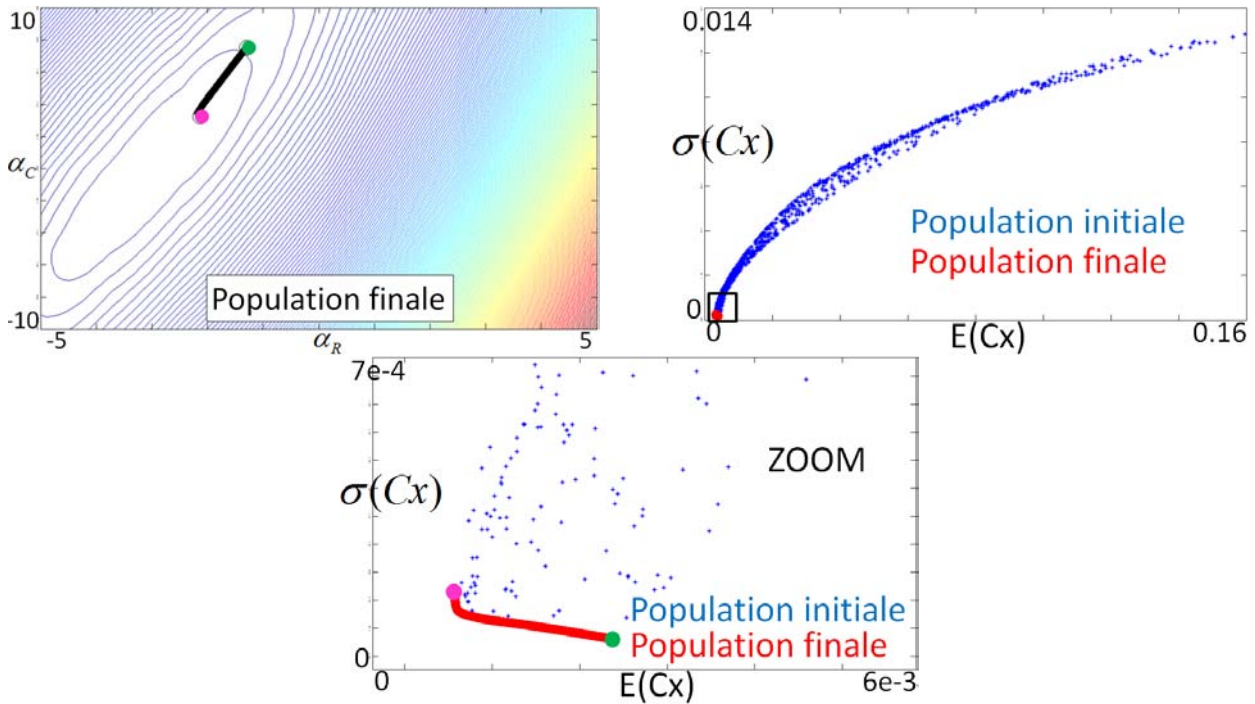


Figure IV.13 – Répartitions des individus finaux pour le contrôle de la moyenne et de l'écart-type de traînée Cx vis-à-vis des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C , avec un agrandissement du front de Pareto sur la figure inférieure (cas-test de l'aile ONERA M6). Les points de performance et de robustesse sont représentés par les points magenta et vert respectivement.

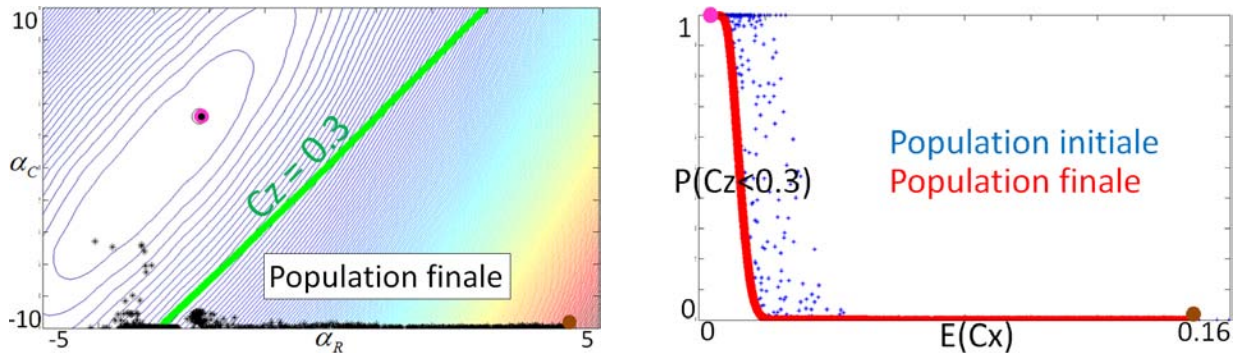


Figure IV.14 – Répartitions des individus finaux pour le contrôle de la moyenne de traînée Cx et d'une probabilité de défaillance de portance Cz vis-à-vis des angles de rotation globale α_R et de cambrure de bord de fuite α_C (cas-test de l'aile ONERA M6). Les points de performance et minimisant la probabilité de portance sont représentés par les points magenta et marron respectivement.

Pour le second problème (réduction de la moyenne $E(Cx)$ de traînée et de la probabilité de défaillance $P(Cz < Cz^{TOL})$ sur la portance), on aboutit à une répartition des individus qui tient directement compte de la ligne critique d'iso-portance. La solution de performance (point magenta) est reliée à la solution minimisant la probabilité de défaillance (point marron) par le front de Pareto. Ce front est d'ailleurs plus riche que celui du problème précédent (solutions de performance et de robustesse). En particulier, aucun agrandissement n'est nécessaire à sa visualisation. Le front de Pareto ressemble d'ailleurs à la fonction de répartition d'une variable aléatoire (fonction monotone entre 0 et 1).

Ainsi, la prise en compte d'une probabilité de défaillance a permis d'obtenir une **formulation innovante** de l'optimisation sous incertitude. Cette nouvelle formulation s'avère également fondamentale dans bon nombre d'**études industrielles**. En effet, l'utilisateur a la possibilité d'introduire une valeur-critique d'observation, ce qui est déterminant pour la définition de marge de sécurité ou de tolérance.

Conclusion

La stratégie d'**optimisation sous incertitude** classique, consistant à réduire la moyenne et l'écart-type de la fonction-coût, a été étendue au cours de ce chapitre. Nous avons pris en compte des moments statistiques d'ordre supérieur. Le coefficient d'**asymétrie** (troisième moment statistique) contrôle le degré de symétrie de l'aléa. Le fait de le réduire permet de faciliter la gestion de l'incertitude en la rendant plus intuitive car centrée autour de la valeur nominale. Néanmoins, la contribution marquante de ce travail vient de la formulation de certains objectifs en terme de **probabilité de défaillance**. Cette innovation ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine de l'optimisation sous incertitude.

Le second temps fort de ce chapitre correspond à la méthodologie employée pour mener l'optimisation sous incertitude. Elle consiste à coupler l'**algorithme génétique** avec un calcul efficace d'objectifs aléatoires. Voici un bref rappel de ces deux stratégies.

D'une part, l'algorithme génétique permet de trouver l'ensemble des solutions acceptables, au regard de plusieurs objectifs à optimiser. Nous avons vu que deux stratégies sont possibles. La première stratégie revient à définir un unique objectif, à partir de toutes les contraintes de base. Pour cela, un système de pondération est utilisé. En d'autres termes, l'objectif unique s'écrit comme une somme pondérée des fonctions-contrainte. On parle d'**algorithme génétique SOGA** (*Single Objective Genetic Algorithm*). La solution finale d'un tel algorithme va fortement dépendre des poids attribués à chacun des objectifs. Le principal inconvénient est la difficulté de choisir la bonne pondération a priori, avant toute simulation. Plusieurs résolutions vont alors être nécessaires pour avoir une idée précise de l'ensemble des solutions acceptables. Cette stratégie n'est pas optimale, certains jeux de pondération pouvant ne pas être pertinents. On privilégiera la seconde stratégie. Il s'agit de faire appel à l'**algorithme génétique MOGA** (*Multi Objective Genetic Algorithm*), qui prend en compte plusieurs objectifs à la fois. Le résultat d'une simulation est l'ensemble des solutions possibles. Il suffit ensuite d'utiliser une méthodologie permettant de restreindre le nombre de solutions acceptables, en fonction de contraintes supplémentaires (méthode n_σ -sigma). La méthode MOGA est certes plus riche que la variante SOGA mais elle s'avère également plus coûteuse. Pour contourner cette difficulté, une stratégie est possible. Elle consiste à construire itérativement une surface de réponse de l'observation en utilisant les dérivées premières et secondes. La technique de Duchon est, à ce titre, utilisable. Idéalement, la construction itérative se fait pendant l'optimisation. L'indicateur d'erreur associé à cette méthode d'interpolation permet de savoir si un point doit être calculé exactement ou pas. Rappelons que, pour les applications de ce chapitre, la surface de réponse a été construite par krigeage (méthode classique d'interpolation) avant de lancer l'optimisation. D'autre part, la prise en compte de l'incertitude va apparaître au niveau de l'expression des objectifs. Ces derniers seront alors des quantités statistiques. Deux catégories d'objectif ont été introduites, nécessitant chacune une méthodologie spécifique. Si l'ensemble des objectifs s'écrivent comme des moments statistiques (moyenne, écart-type, asymétrie, aplatissement, ...) de grandeurs aléatoires, nous ferons appel à la **méthode des moments d'ordre 2**. La méthode des moments d'ordre 2 consiste à calculer analytiquement les moments statistiques sur la base du développement de Taylor d'ordre 2 de l'observation. Les dérivées premières et secondes de l'observation doivent alors être déterminées. La méthode Monte-Carlo (trop coûteuse) et

la méthode des moments d'ordre 1 (pas assez fiable) sont moins avantageuses que la stratégie retenue. Ceci confirme l'apport considérable des sensibilités secondes. La différentiation seconde des codes de calcul, qui a nécessité un certain investissement (cf le chapitre 1 de cette thèse), est une nouvelle fois justifiée ici. L'autre type d'objectif est la probabilité de défaillance. Dans ce cas, on commence par calculer les quatre premiers moments statistiques de l'observation. Le **système de Pearson** permet de déterminer une loi de probabilité à partir de ces quatre moments calculés. La probabilité cherchée est alors simplement un quantile de cette loi connue et tabulée. A partir de là, cette probabilité s'obtient donc immédiatement.

La méthodologie retenue consiste donc à utiliser l'algorithme génétique en mode multi-objectif (MOGA) en calculant les objectifs statistiques par l'intermédiaire de la méthode des moments d'ordre 2. Dans le cas où une probabilité de défaillance est envisagée, le système de Pearson est intégré au processus. Le cas-test de l'aile ONERA M6 fut l'occasion de montrer **l'efficacité de notre approche en contexte industriel**. Les multiples simulations ont consisté à contrôler l'aléa sur la traînée en cherchant à réduire sa moyenne, son écart-type ou son niveau de dissymétrie. Par ailleurs, nous avons considéré une probabilité de défaillance sur la portance. Les résultats obtenus ont mis en valeur la richesse des solutions en terme de compromis vis-à-vis des divers objectifs traités. A l'issue de la technique d'optimisation sous incertitude proposée dans ce chapitre, le décideur aura à disposition une palette d'alternatives possibles qui lui permettra de faire son choix en toute connaissance de cause.

Bibliographie

- [BAN06] H. Bandemer, *Mathematics of uncertainty* , Springer, 2006.
- [BEY01] H.-G. Beyer and K. Deb, *On self-adaptive features in real-parameter evolutionary algorithm* , IEEE Transactions on evolutionary computation 5 (2001), no. 3, 250-270.
- [DEB95] K. Deb and R. B. Agarwal, *Simulated binary crossover for continuous search space* , Complex Systems 9 (1995), 115-148.
- [DEB02] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal and T. Meyarivan, *A fast elitist multi-objective genetic algorithm : NSGA-II* , IEEE Transactions on evolutionary computation 6 (2002), no. 2, 182-197.
- [DEN90] S. De Neufville, *Applied Systems Analysis* , Mc Graw-Hill, Inc. Singapore, 1990.
- [DET02] F. De Toro, J. Ortega and A. Diaz, *PSFGA : a parallel genetic algorithm for multiobjective optimization* , Proceedings of the 10th Euromicro Workshop on Parallel, Distributed and Network-Based Processing, Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, June 2002, p. 384.
- [GON03] I. Gondra and M. H. Samadzadeh, *A coarse-grain parallel genetic algorithm for finding Ramsey numbers* , Symposium on Applied Computing, Association for Computing Machinery, New York, 2003, pp. 2-8.
- [HAZ98] G. A. Hazelrigg, *A framework for decision-based engineering design* , ASME Journal of Mechanical Design, vol. 120, pp. 653-658, 1998.
- [HAZ99] G. A. Hazelrigg, *An axiomatic framework for engineering framework for engineering design* , ASME Journal of Mechanical Design, vol. 121, pp. 342-347, 1999.
- [HOL03] G. Holton, *Value-at-risk : theory and practice* , Academic Press, 2003.
- [HUY02] L. Huyse, S. L. Padula, R. M. Lewis and W. Li, *Probabilistic approach to free-form airfoil shape optimization under uncertainty* , AIAA Journal, vol. 40, no. 9, 2002, pp. 1764-1772.
- [JOR06] P. Jorion, *Value-at-risk : the new benchmark for managing financial risk* , 3rd edition, McGraw-Hill, 2006.
- [KEA03] A. J. Keane, *Wing optimization using design of experiments, response surface and data fusion methods* , Journal of Aircraft, vol. 40, no. 4, 2003, pp. 741-750.

Bibliographie

- [KOW98] M. Kowal and S. Mahadevan, *Uncertainty-based multidisciplinary design optimization*, 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, St Lois, MO, 1998.
- [KUM06] T. Kumano, S. Jeong, S. Obayashi, Y. Ito, K. Hatanaka and H. Morino, *Multi-disciplinary design optimization of wing shape with nacelle and pylon*, European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006.
- [OYA00] A. Oyama, S. Obayashi, K. Nakahashi and N. Hirose, *Aerodynamic wing optimization via evolutionary algorithms based on structured coding*, Computational Fluid Dynamics Journal, vol. 8, no. 1, 2000, pp. 570-577.
- [PIN98] J. C. Pinto, *On the costs of parameter uncertainties. Effects of parameter uncertainties during optimization and design of experiments*, Chemical Engineering Science, vol. 53, No. 11, pp. 2029-2040, 1998.
- [RAG04] M. M. Raghuwanshi and O. G. Kakde, *Survey on multi-objective evolutionary and real coded genetic algorithms*, Proceedings of the 8th Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems, 2004, pp. 150-161.
- [RAL06] S. K. Rallabhandi and D. N. Mavris, *Sonic boom minimization using inverse design and probabilistic acoustic propagation*, Journal of Aircraft, vol. 43, no. 6, nov-dec 2006.
- [SHI05] K. Shimoyama and al., *A new efficient and useful robust optimization approach - Design for multi-Objective 6-sigma*, Proc. 2005 IEEE CEC, 1, 2005, 950-957.
- [SHI06] K. Shimoyama, A. Oyama and K. Fujii, *Multi-Objective optimization for robust airfoil design considering design errors and uncertainties*, 3rd International Conference on Flow Dynamics, November 7-9, 2006, Matsushima, Miyagi, Japan.
- [SRI94] N. Srinivas and K. Deb, *Multi-objective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms*, Evolutionary computation 2 (1994), no. 3, 221-248.

Conclusion générale et perspectives

Il n'est absolument pas naturel à l'homme de se déplacer par la voie des airs. Longtemps, ce moyen de locomotion fut considéré comme utopique. La découverte des premiers engins volants marque un tournant indéniable dans la grande histoire du progrès technologique. Depuis, les avions se sont peu à peu perfectionnés pour répondre toujours mieux aux attentes et aux désirs des clients. La production se fait désormais à l'échelle industrielle. Néanmoins, la complexité des phénomènes physiques proches d'un avion, alliée au manque de connaissance de l'homme sur le sujet, ne permet pas aux industriels de se reposer sur un savoir-faire inamovible. Il est indispensable de combiner la production des avions avec un réel travail de recherche pour rester compétitif.

L'un des principaux enjeux de l'industrie aéronautique est de réduire toujours plus les coûts de production. Divers moyens sont envisageables pour satisfaire cet objectif de rentabilité. Une solution possible concerne la maîtrise des grandeurs aérodynamiques d'intérêt.

Quelques observations scalaires jouent un rôle prépondérant dans le cycle de conception d'un avion. Au sein de la discipline aérodynamique, la traînée et la portance constituent des informations indispensables à la description d'une forme d'avion. La finesse (quotient de la portance sur la traînée) devra être aussi forte que possible. Dans le domaine des structures, la masse de l'appareil est le principal facteur critique. Du point de vue multi-disciplinaire, les performances d'un avion peuvent se résumer en première approximation à son rayon d'action, à sa charge utile et à sa vitesse de croisière. L'ensemble des disciplines travaillant à l'élaboration d'un avion a pour but ultime de construire un appareil capable de transporter un maximum de charge (matérielle ou humaine) sur la plus grande distance et en un minimum de temps.

Cette thèse s'inscrit dans cette optique de maîtrise du calcul d'une observation aérodynamique scalaire. Rappelons que les simulations numériques, lorsqu'elles sont suffisamment fiables, constituent le moyen le plus efficace (ie le moins coûteux) d'accéder à l'observation scalaire désirée. Les tests en soufflerie (et a fortiori les essais en vol) sont des alternatives envisageables mais industriellement plus onéreuses (d'un voire de deux ordres de grandeur en euros). C'est pourquoi, nos différents travaux ont fait appel au monde du numérique pour la modélisation des écoulements fluides, préambule à l'estimation de l'observation.

En vue de mieux maîtriser la grandeur aérodynamique d'intérêt, diverses approches ont été envisagées. Celles-ci furent classées en trois grandes catégories lors de l'introduction générale. Il s'agissait de l'évaluation, de la fiabilité et de l'optimisation. La conclusion de cette thèse va donc se faire en trois temps, sur la base de ces trois thèmes généraux qui ont organisés notre plan de travail.

Thème : évaluation

L'objectif est d'accéder à la valeur de l'observation scalaire avec un coût de calcul le plus faible possible. Plus exactement, nous cherchons à connaître son évolution lorsqu'un paramètre d'entrée varie. Ce dernier est soit de type aérodynamique (nombre de Mach, angle d'incidence, ...), soit de type géométrique. Un paramètre géométrique contrôle la forme de l'objet étudié et influence donc directement la valeur de l'observation.

Le **premier chapitre** s'est focalisé sur le calcul des dérivées premières et secondes de la grandeur d'intérêt vis-à-vis de paramètres aérodynamiques ou géométriques. Une nouvelle formulation des sensibilités d'ordre 2 a été proposée dans cette thèse. Elle s'appuie sur deux adjoints. L'un est lié au résidu fluide tandis que l'autre se rattache à la déformation de la peau de l'objet (cas d'un paramètre géométrique). Le point à retenir est que le coût de calcul des dérivées secondes est, à peu de chose près, celui de ces deux adjoints, solutions de systèmes linéaires. En particulier, aucune dérivée d'adjoint n'est nécessaire. De plus, le problème posé par le stockage mémoire a pu être évité. Toutes les tailles des grandeurs mémorisées sont linéaires (et non quadratiques) vis-à-vis du nombre de sommets du maillage.

Les codes industriels de Dassault Aviation (*EUGENIE* et *AETHER* pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes respectivement) ont été différenciés à l'ordre 2. La technique de différentiation automatique a été utilisée (via le logiciel *TAPENADE* de l'INRIA). Un cas-test Navier-Stokes 2D et 3D (profil RAE2822) a montré que les dérivées secondes de traînée correspondent bien aux courbures d'évolution lorsque les paramètres de dérivation varient.

Le seul problème rencontré concerne le cas d'un écoulement Navier-Stokes complexe, où les phénomènes turbulents jouent un rôle majeur. Même les dérivées premières ne sont pas correctes. Nous avons mis en évidence que la non-différentiation de la turbulence explique le manque de représentativité des dérivées estimées.

Ce travail de différentiation des codes industriels à l'ordre 2 constitue l'un des faits majeurs de cette thèse. Deux chapitres (2 et 4) vont d'ailleurs s'appuyer sur ces sensibilités secondes d'observation aérodynamique scalaire, désormais disponibles à faible coût.

Pour construire à faible coût l'évolution d'une observation aérodynamique scalaire vis-à-vis de certains paramètres d'entrée, une autre alternative que les dérivées secondes s'avère très prometteuse et novatrice.

Plus précisément, on s'intéresse à l'évaluation de l'impact d'une perturbation de maillage sur la valeur de l'observation scalaire. La correction adjointe (produit du résidu fluide et de l'adjoint) n'est pas suffisante pour prédire, pour des perturbations importantes, la valeur modifiée de notre grandeur d'intérêt. La perturbation de maillage par ajout d'un sommet engendre deux niveaux d'influence sur l'observation. L'une est régulière, contrairement à la seconde qui est singulière. La correction adjointe ne tient pas compte de la partie singulière de la perturbation ni même des termes d'ordre supérieur de la partie régulière, d'où son incapacité à fournir une prédiction précise. Le **chapitre 3** propose une extension de la correction adjointe capable de tenir compte de la non-linéarité (voire de la singularité) de la perturbation de maillage.

D'emblée, deux types de perturbation de maillage ont été distingués. La suppression ou l'ajout de nouveaux sommets provoque une perturbation singulière de l'observation scalaire étudiée. Au contraire, en se contentant de déplacer certains sommets existants, la variation engendrée sur l'observation reste régulière. Néanmoins, dans ce dernier cas, l'évolution de l'observation peut s'avérer hautement non linéaire avec le déplacement effectué. La méthode des perturbations singulières consiste à capter la singularité dans le premier cas et à estimer l'évolution non linéaire de l'observation dans le second cas.

Lorsque la perturbation est singulière, la correction adjointe est fautive. La méthode des perturbations singulières est alors indispensable. En présence d'une perturbation régulière, l'intérêt de la méthode des perturbations singulières est d'autant plus fort que la non-linéarité de la variation de l'observation est prononcée. Un cas-test analytique nous a permis de constater qu'un gain important était enregistré lorsque nous passions de la correction adjointe à son extension singulière pour les deux types de perturbation (singulière mais aussi régulière). Pour nos applications industrielles, nous nous sommes focalisés sur les perturbations régulières (déplacement de sommets existants) qui sont les plus fréquentes en aérodynamique.

La méthode des perturbations singulières consiste à remettre à jour la solution fluide du problème direct (Euler ou Navier-Stokes) via quelques itérations du solveur non linéaire. De plus, on peut restreindre cette remise à jour à la zone affectée par la perturbation de maillage. L'une des caractéristiques des solveurs itératifs est de se focaliser sur les phénomènes hautes fréquences en priorité. Or, la non-linéarité est clairement un phénomène haute fréquence. Les quelques itérations effectuées vont permettre de capter rapidement cette non-linéarité de l'observation. Ainsi, notre technique de perturbation singulière consiste à compléter la correction adjointe en remettant partiellement à jour le résidu fluide. Deux niveaux de correction apparaissent alors.

- Le résidu fluide partiellement remis à jour capte la non-linéarité de la perturbation (hautes fréquences).
- L'adjoint corrige la perturbation du premier ordre (basses fréquences).

Un cas-test industriel (aile ONERA M6) a permis de mettre en œuvre la méthode des perturbations singulières. Il s'agit d'un problème 3D mettant en jeu les équations d'Euler.

Pour le second cas-test, nous avons envisagé une perturbation de maillage plus réaliste. Il s'agit de faire varier un paramètre géométrique contrôlant la forme du profil. Les angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite furent successivement traités. La traînée correspond à l'observation devant être estimée.

Un perfectionnement peut encore être apporté à la technique des perturbations singulières. Il consiste à remettre à jour l'état adjoint en plus de la solution directe. Les termes correctifs associés aux basses et hautes fréquences sont donc tous les deux remis à jour en peu d'itérations. On constate une efficacité impressionnante de la prédiction. Bien plus, l'erreur commise suit une progression géométrique, ce qui permet de connaître a priori le niveau d'imprécision. Cette caractéristique est fondamentale pour fixer le nombre d'itérations de remise à jour à effectuer. L'utilisateur est donc capable de contrôler sa prédiction d'observation sans avoir à mener le calcul complet et coûteux.

Thème : fiabilité

L'estimation de l'observation est entachée de deux principaux types d'erreur. Le premier

provient du caractère aléatoire de certains paramètres d'entrée. Le second est dû aux erreurs numériques, liées entre autre aux hypothèses simplificatrices pour la résolution des équations fluides ou à la qualité insuffisante du maillage utilisé. La fiabilité consiste à augmenter le niveau de confiance qu'il est possible d'accorder à la valeur d'observation calculée.

Le **chapitre 4** concerne la prise en compte de l'incertitude affectant certains paramètres d'entrée. Connaissant la loi de probabilité associée à chacune des variables incertaines, le but est de construire une loi de probabilité pour l'observation scalaire en sortie.

Trois méthodes de propagation d'incertitude furent envisagées. Il s'agit de la technique Monte-Carlo approchée, du chaos polynomial et de la méthode des moments. La première approche consiste à utiliser la stratégie Monte-Carlo sur un modèle approché de l'observation. Le chaos considéré correspond à la technique de collocation (qui est non intrusive). Enfin, la méthode des moments fut testée sur des développements de Taylor d'ordres 1 et 2. D'emblée, notons que l'ordre 2 est indispensable à l'obtention d'une loi réaliste.

Le but de l'étude fut de trouver la technique la plus efficace en terme de compromis coût-précision pour estimer l'aléa de sortie. Pour cela, on s'est servi de la méthode Monte-Carlo approchée comme d'une référence. La comparaison a donc concerné le chaos non intrusif et la méthode des moments. Quelque soit la variante, la méthodologie reste la même. Les techniques de propagation d'incertitude sont destinées à l'évaluation des quatre premiers moments statistiques de l'observation (moyenne, écart-type, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement). Ensuite, le système de Pearson nous a permis de déterminer une loi de probabilité associée à ces quatre moments.

Sur le premier cas-test envisagé (aile ONERA M6 : problème Euler 3D), nous avons mené la comparaison entre la méthode des moments et le chaos polynomial. Clairement, la première stratégie citée (méthode des moments) est la plus efficace pour atteindre une bonne précision à faible coût de calcul. L'utilisation des dérivées secondes est obligatoire. Vis-à-vis du chaos, la réduction du coût est d'autant plus appréciable que le nombre de paramètres incertains augmente.

Nous avons ensuite montré la richesse qu'offre la connaissance d'une loi de probabilité de l'observation plutôt qu'un simple niveau de dispersion. Retenons deux faits majeurs. Le caractère non symétrique de l'aléa de sortie peut s'avérer très marqué. La loi de probabilité permet de rendre compte de cet aspect non symétrique. Par ailleurs, nous avons accès aux probabilités de défaillance, qui constituent souvent le critère statistique adapté aux problématiques industrielles.

Thème : optimisation

L'idée de cette partie revient à considérer notre observation scalaire comme une fonction-coût qu'il faut optimiser. Il s'agit du niveau maximal de maîtrise, par rapport aux problèmes d'évaluation et de fiabilité précédemment traités.

Le **huitième et dernier chapitre** de cette thèse (chapitre 8) concerne l'optimisation sous

incertitude. Le but est d'optimiser plusieurs objectifs s'écrivant comme des grandeurs statistiques liées à une observation incertaine. Deux types d'objectif ont été répertoriés. Le premier revient à calculer un moment statistique (moyenne, écart-type ou coefficient d'asymétrie par exemple). Le second s'écrit comme une probabilité de défaillance. La formulation de l'optimisation sous incertitude faisant intervenir une probabilité de défaillance est d'ailleurs un fait marquant de ce chapitre.

La méthodologie utilisée pour mener l'optimisation sous incertitude consiste à faire appel à la voie génétique. Une population d'individus va évoluer de génération en génération dans l'espace des paramètres d'optimisation. A chaque changement de génération, des opérations de sélection, de mutation et de croisement vont permettre à la population de mieux respecter les contraintes à optimiser. Une fois la convergence établie, on obtient une population composée de la (ou des) solution cherchée.

Deux variantes d'algorithme génétique sont possibles. L'algorithme SOGA (*Single Objective Genetic Algorithm*) traite un seul objectif à la fois. Celui-ci s'écrit comme la somme pondérée des objectifs aléatoires à optimiser. La population finale se concentre autour de la solution optimisant l'unique objectif. Cette solution dépend fortement du système de pondération utilisé et donc de la hiérarchie établie a priori sur les objectifs aléatoires.

Au contraire, l'algorithme MOGA (*Multi Objective Genetic Algorithm*) est capable de traiter autant d'objectifs que nécessaires sans devoir passer par un système de pondération. Aucune hiérarchie n'est demandée avant de lancer la simulation MOGA. La population finale sera composée de l'ensemble des solutions possibles (front de Pareto). Cette variante d'algorithme génétique est clairement avantageuse par rapport à son homologue mono-objectif, étant donné qu'une seule optimisation suffit à disposer de la palette complète des alternatives envisageables. La sélection de la solution retenue s'effectue a posteriori, une fois achevée la simulation MOGA. Par exemple, la technique n_σ -*sigma* (extension de la traditionnelle méthode 6-*sigma*) est couramment employée lorsque la moyenne et l'écart-type de l'observation sont minimisés. Le décideur peut donc choisir en toute connaissance de cause.

La manière de calculer les objectifs aléatoires va directement dépendre de la nature des grandeurs statistiques. Dans le cas où tous les objectifs sont des moments statistiques, on fait appel à la technique des moments d'ordre 2. Cette dernière suppose que les dérivées premières et secondes de l'observation sont disponibles (différentiation automatique des codes industriels du chapitre 1). La méthode des moments est plus efficace que la méthode Monte-Carlo approchée. Un problème analytique a servi à la comparaison de ces deux approches. Il a montré le gain de temps lié à l'utilisation de la méthode des moments.

Dans le cas où l'un des objectifs s'écrit comme une probabilité de défaillance, les quatre premiers moments statistiques sont automatiquement estimés via la méthode des moments d'ordre 2. Le système de Pearson est là pour construire une loi de probabilité à partir de ces quatre scalaires. La probabilité cherchée découle directement de la loi trouvée.

Le cas-test de l'aile ONERA M6 (problème Euler 3D) fut utilisé pour tester l'optimisation génétique MOGA sous incertitude. La traînée incertaine devait être optimisée vis-à-vis des angles de rotation globale et de cambrure de bord de fuite. Le but fut de minimiser la moyenne seule, la moyenne associée avec l'écart-type (ie la dispersion) ou la moyenne associée avec l'asymétrie. Pour chacune de ces minimisations, un objectif supplémentaire a été considéré. Il s'agit de la probabilité que la portance reste supérieure à une valeur critique. A chaque fois, la population finale trouve l'ensemble des solutions possibles, ie toutes les solutions qui ne sont dominées par

aucune autre.

Un point sensible lié à la technique génétique doit être rappelé. L'algorithme génétique demande un très grand nombre d'évaluations de la fonction, ce qui s'avère prohibitif en contexte industriel. L'idée est donc de coupler l'algorithme génétique avec une surface de réponse adaptative, capable de savoir à chaque nouveau calcul de fonction si une évaluation exacte est nécessaire ou si une simple interpolation suffit. Dans cette optique, la technique de Duchon munie de son algorithme d'enrichissement automatique est une alternative possible pour réduire le coût de l'optimisation génétique. Grâce à ce couplage, la méthodologie d'optimisation génétique sous incertitude devient envisageable industriellement.

Cette thèse a donc dévoilé la grande variété des **techniques possibles pour renforcer la maîtrise liée au calcul d'une observation aérodynamique scalaire**. L'évaluation, la fiabilité et l'optimisation constituent trois moyens de répondre à cette problématique. Les bons résultats obtenus ont mis en avant les progrès considérables qu'il est possible de faire dans le domaine.

Les **diverses contributions** de cette thèse sont récapitulées ci-dessous.

- La **formulation double adjointe de la dérivée seconde** d'une observation aérodynamique vis-à-vis de paramètres géométriques a été explicitée.
- Les **codes industriels** de Dassault Aviation (et notamment les codes résolvant les équations d'Euler et de Navier-Stokes) ont été **différentiés à l'ordre 2**. Ce travail constitue un fait majeur de cette thèse.
- Ces **dérivées secondes** estimées par différentiation automatique de code ont été **valorisées dans plusieurs domaines**. La propagation d'incertitude ou encore l'optimisation sous incertitude ont pu être améliorées grâce à l'utilisation de ces sensibilités du second ordre.
- Une **méthodologie efficace de propagation d'incertitude** a été proposée. Il s'agit de combiner la méthode des moments d'ordre 2 avec le système de Pearson pour construire la loi de probabilité de l'observation lorsque certains paramètres de calcul sont incertains.
- Une contribution-clé de la thèse correspond à la **méthode des perturbations singulières**. Elle permet d'améliorer la technique classique de correction adjointe pour prédire la variation de l'observation devant une perturbation singulière de maillage. Dans le cas où la perturbation de maillage reste régulière, la méthode des perturbations singulières permet d'estimer efficacement les termes d'ordre supérieur.
- Enfin, une autre contribution importante de ce mémoire fut l'intégration des **probabilités de défaillance** au sein d'un problème d'**optimisation sous incertitude**.

Toutes ces contributions ont été valorisées à de multiples occasions au cours de cette thèse. Nous renvoyons le lecteur à la fin de l'introduction générale pour le détail de ces valorisations.

Pour conclure ce mémoire, donnons différentes perspectives permettant de prolonger le travail qui a été mené.

- Il reste à différentier la turbulence à l'ordre 1, puis à l'ordre 2 dans le code industriel de

Dassault Aviation résolvant les équations de Navier-Stokes (code *AETHER*, cf l'annexe B de cette thèse).

- Pour améliorer la performance de l'optimisation sous incertitude, l'idée pourrait être de coupler l'algorithme génétique avec une technique de surface de réponse adaptative.
- Il s'agit de poursuivre l'industrialisation de la construction d'une loi de probabilité associée à une observation aérodynamique. Dans ce cadre, la tenue de nombreux projets européens (comme le projet NODESIM-CFD) est essentielle.
- Enfin, le vrai prolongement de ce mémoire serait de passer de la maîtrise d'une observation scalaire à la maîtrise d'un champ solution vivant sur l'ensemble du maillage (par exemple le champ de pression locale). Les différentes analyses de cette thèse devront être astucieusement adaptées à cette nouvelle problématique.

Les études aérodynamiques s'appuient en grande partie sur quelques grandeurs d'intérêt comme la traînée ou la portance. Il est donc primordial d'avoir divers outils et stratégies adaptés au calcul efficace de telles observations scalaires.

Cette thèse est dédiée au développement de méthodologies efficaces et innovantes destinées à renforcer la maîtrise d'une grandeur d'intérêt. Trois types de stratégie ont été étudiés.

L'**évaluation** consiste à estimer à faible coût de calcul l'évolution de la fonction lorsqu'un paramètre d'entrée varie. En ce sens, les dérivées premières et surtout secondes, obtenues par différentiation automatique des codes industriels, renseignent sur le comportement local de l'observation (tangentes et courbures). La méthode des perturbations singulières est une alternative innovante pour estimer une évolution non linéaire sans faire appel aux dérivées secondes.

La **fiabilité** est destinée à renforcer le niveau de confiance qu'il est possible d'accorder à la valeur d'observation calculée. La prise en compte des incertitudes affectant certains paramètres d'entrée va rendre le calcul d'observation robuste et donc plus fiable.

Enfin, l'**optimisation** permet de trouver des valeurs particulières de l'observation répondant à un certain nombre de contraintes. L'optimisation sous incertitude permet de déterminer les solutions robustes à l'aléa impactant notre fonctionnelle, en s'appuyant pour cela sur des grandeurs statistiques (moment ou probabilité de défaillance).

Mots clés : aérodynamique, Euler, Navier-Stokes, contexte industriel, simulation numérique, observation scalaire, différentiation automatique, dérivées secondes, perturbation singulière, propagation d'incertitude, loi de probabilité, moments statistiques, probabilité de défaillance.

Aerodynamic studies are often based on some numerical observations like the drag or lift coefficients. Consequently, it is fundamental to define tools and methodologies devoted to the reliable evaluation of these scalar observations.

This master thesis will describe some strategies and methods in order to better control the computation of a scalar aerodynamic observation. Three classes of strategies have been considered.

The **evaluation** strategy consists in determining the kind of evolution of the observation depending on parameters. In this context, the estimation of the first and especially second order sensibilities, obtained by automatic differentiation of industrial codes, allows us to know the local evolution (tangents and curvatures). The singular perturbation method is another and innovant method to determine the non-linear evolution of an aerodynamic observation without using the second order derivatives.

The **fiability** strategy will try to increase the level of confidence in the numerical evaluation of the scalar aerodynamic observation. The uncertainty affecting some parameters that influence the scalar observation is taken into account in order to make the numerical evaluation more robust and reliable.

Finally, the **optimisation** strategy consists in finding particular values of the aerodynamic observation which respects some constraints. The optimisation under uncertainty means that optimisation parameters are uncertain, that is to say constraints are statistical variables, like statistical moments or failure probabilities.

Key words : aerodynamic, Euler, Navier-Stokes, industrial context, numerical simulation, scalar observation, automatic differentiation, second order derivatives, singular perturbation, propagation of uncertainty, probability law, statistical moments, probability of failure.