



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*  
Discipline ou spécialité : *Mathématiques Appliquées*

---

Présentée et soutenue par *Laura PEBERNET*  
Le 30 novembre 2010

**Titre :**

*Etude d'un modèle Particle-In-Cell dans une approximation Galerkin Discontinue  
pour les équations de Maxwell-Vlasov.  
Recherche d'une solution hybride non conforme efficace.*

---

**JURY**

*M. Gary Cohen, Président du jury  
M. Hachmi Ben Dhia, Rapporteur  
M. Eric Sonnendrücker, Rapporteur  
M. Pierre Degond, Directeur de thèse  
M. Xavier Ferrières, Co-directeur de thèse  
M. François Rogier, Co-directeur de thèse  
M. Mohamed Masmoudi, Examineur  
M. Frédéric Nataf, Examineur  
M. Sébastien Pernet, Invité  
Mme Florence Millot, Invitée*

---

**Ecole doctorale :** *Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse (MITT)*

**Unité de recherche :** *ONERA DEMR/AMM - IMT/MIP*

**Directeur(s) de Thèse :** *M. Pierre Degond, M. Xavier Ferrières et M. François Rogier*

**Rapporteurs :** *M. Hachmi Ben Dhia et M. Eric Sonnendrücker*



*A mes parents, Domy et Roland.*



# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Mr Florent Christophe, directeur adjoint du Département ElectroMagnétisme et Radar (DEMR), pour m'avoir accueillie au sein de ce département, mais aussi pour avoir facilité la réalisation de mon monitorat, en parallèle à cette thèse. Un seul regret me restera : des séances de ski trop courtes, lors des séminaires PLASMAX. Je remercie également Mr Jean-Philippe Parmentier, chef de l'unité Compatibilité et Détection Electromagnétisme (CDE) dans laquelle j'ai passé mes six premiers mois de thèse, et Mr Vincent Gobin, chef de l'unité Antennes, Matériaux et Modélisation (AMM) que j'ai rejointe par la suite, pour leur accueil dans leurs unités respectives, leur gentillesse et pour m'avoir permis de travailler dans les meilleures conditions.

Merci à mes deux rapporteurs, Mr Eric Sonnendrücker et Mr Hachmi Ben Dhia, pour avoir accepté de relire ce présent manuscrit. Je leur suis reconnaissante d'avoir fait l'effort de se plonger dans mes travaux malgré leur charge de travail. Merci également aux autres membres de mon jury de thèse, Mr Frédéric Nataf, Mr Gary Cohen et Mr Mohammed Masmoudi qui se sont déplacés pour juger cette thèse, et à Mr Sébastien Pernet et à Mme Florence Millot pour avoir accepté l'invitation.

J'exprime toute ma gratitude à Mr Pierre Degond et Mr François Rogier qui ont assuré l'encadrement de mon travail de recherche et qui ont orienté mes travaux. J'exprime, tout particulièrement, ma reconnaissance à Mr Xavier Ferrières qui a encadré ma thèse durant ces trois années de façon irréprochable. Je le remercie pour sa disponibilité, sa grande gentillesse et son soutien permanent. Merci de m'avoir encouragée à réaliser le monitorat qui m'a été très bénéfique. Malgré nos deux forts caractères, l'un du "Béarn", l'autre du "Lauragais", nous avons su nous entendre et mener ces travaux dans la bonne humeur et dans la complicité. Je ne vous remercierai jamais assez pour ce que vous avez fait pour moi. Grâce à vous, je sais que *"le bug se situe toujours entre le clavier et le fauteuil"*. Un grand merci aussi pour toutes ces conversations enrichissantes qui m'ont montré le grand passionné que vous êtes, un passionné de la nature, du jardinage et pour votre métier caché d'ébéniste. Ah, et encore merci pour les cerises de votre jardin, j'espère que vous m'en ferez également profiter les années à venir.

Je remercie également le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) de Gramat de m'avoir fourni des données que j'ai pu comparer à mes résultats de simulations 3D. Merci aussi à Mr Vincent Mouysset pour les discussions et pour l'aide apportée.

J'associe à mes remerciements, l'ensemble du personnel du DEMR Centre de Toulouse, pour cette expérience humaine et enrichissante. En particulier, merci à Mr Patrick Millot pour sa bonne humeur, ses conseils avisés sur la météo, la gastronomie et l'œnologie mais aussi pour ses contrepéties journalières. Mes remerciements vont également à Mme Danielle Nougapolis, et aux secrétaires Mlle

Pascale Parmentier et Mme Corinne De Pablo, pour leurs aides précieuses durant ces trois années. Je tiens également à remercier Mr Joël Besson pour avoir résolu mes problèmes d'antenne de télévision, Mr Laurent Guibert pour les soirées "tarot" et ses incontournables blagues, Mr Bas Michielsen pour son aide préciseuse en anglais, et enfin Mr François Isaac, Mr Mickael Ridet et Mr Thibault Volpert. Merci aux anciens doctorants, Anthony, Rémi et Ludo, à ceux de ma "promo", Laurent avec qui je partage beaucoup de choses, Simon qui n'aime pas faire la bise, Nico et Stefan, aux nouveaux Charly et les moments HIMYM à Portète sur Garonne, Mehdi, Jibé, ... et à ceux des autres départements Olivier, Romain, Julien, Emma et ma danseuse africaine préférée Hélène. Le meilleur pour la fin, le "fameux" bureau 108 qui restera à jamais gravé dans mon cœur, un partage de rires et de larmes. Je vais commencer par l'ancienne, Nadia, avec qui j'ai partagé "mon" bureau pendant deux ans. Je te remercie d'avoir été ma confidente quand j'en avais besoin, d'avoir partagé de bons moments et des "klik klik". Je suis désolée mais je n'ai pas su m'occuper de ta plante verte, heureusement que Brahim était là pour le faire. Je continuerai avec mon su-per Brahim, avec qui j'ai beaucoup rigolé. Tu es quelqu'un que j'apprécie énormément. Je n'ai qu'une chose à te dire, c'est "waka waka". Merci à Seb pour son écoute, son dévouement, sa gentillesse, son aide précieuse, même à distance, et pour toutes ces conversations autour de "latex" et "beamer", et au ptit nouveau Olivier qui, je sais, prendra la relève avec succès. Merci à Guillaume, alias "le blackos", qui ne fait pas parti du bureau mais c'est tout comme. Merci aussi aux doctorants rencontrés lors de mes stages de monitorat, en particulier Imen, qui m'a accueillie comme une véritable princesse en Tunisie. Parmi eux, j'ai rencontré de véritables amis, ils se reconnaîtront certainement. Beaucoup de bons souvenirs partagés avec vous tous, merci pour cette grande aventure !

Merci à ma voisine, Anaïs, pour les petits moments de divertissements ces dernières semaines. Merci aussi à mes deux "correctrices" de manuscrit, ma titinette et ma maman, qui ont fait l'effort de lire ce manuscrit, écrit en chinois paraît-il !

Je terminerai par une pensée à mes proches, famille et amis. Merci, en particulier à ma poule, ma titinette, Julie, Marion ("ma sœur de cœur") et Emilie, qui ont toujours été là pour moi et que j'adore beaucoup. Merci à toute ma famille et une pensée à ceux qui nous sont chers et qui nous ont quittés. Un très grand merci à mon papa et ma maman qui ont toujours cru en moi et sans qui je n'en serai pas arrivée là aujourd'hui. Je ne vous remercierai jamais assez de m'avoir soutenue et encouragée sans relâche au cours de toutes ces années d'études ainsi que pour l'amour que vous me témoignez tous les jours.

Toulouse, le 16 décembre 2010.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Contexte et rappel de quelques notions sur la physique des plasmas</b>	<b>5</b>
<b>I Le couplage des équations Maxwell-Vlasov</b>	<b>19</b>
1 ÉTAT DE L'ART DES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR RÉSOUDRE LE SYSTÈME MAXWELL-VLASOV	21
2 FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME PHYSIQUE : LE SYSTÈME MAXWELL-VLASOV	25
2.1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU SYSTÈME MAXWELL-VLASOV . . . . .	27
2.1.1 Les équations de Maxwell et de Vlasov . . . . .	27
2.1.2 Existence de solutions pour le système Maxwell-Vlasov . . . . .	29
2.2 RÉOLUTION DU SYSTÈME PAR UNE MÉTHODE PARTICULAIRE : MÉTHODE <i>Particle In Cell</i> (PIC) . . . . .	31
2.2.1 Le principe de la méthode PIC . . . . .	31
2.2.2 Les étapes d'interpolation . . . . .	32
2.3 VÉRIFICATION DE LA LOI DE GAUSS : INTRODUCTION D'UN TERME CORRECTEUR . . . . .	33
2.3.1 Correction de Boris . . . . .	34
2.3.2 Correction de Marder/Langdon . . . . .	35
2.3.3 Correction hyperbolique . . . . .	35
2.3.4 Généralisation . . . . .	35
3 APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES ET MISE EN ŒUVRE D'UNE MÉTHODE PIC	37
3.1 ÉTUDE DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES . . . . .	39
3.1.1 Méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell . . . . .	39
3.1.2 Méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell-Vlasov . . . . .	45
3.2 MODÉLISATION DE SOURCES MICRO-ONDES DE FORTE PUISSANCE . . . . .	75
3.2.1 Modélisation de sources électroniques . . . . .	75
3.2.2 Modélisation de sources électromagnétiques . . . . .	86

4	SIMULATIONS NUMÉRIQUES	91
4.1	LIGNE COAXIALE . . . . .	93
4.2	DIODE . . . . .	102
5	CONCLUSION	109
<b>II</b>	<b>Recherche de performances optimales pour le couplage Maxwell-Vlasov par une méthode PIC</b>	<b>111</b>
1	ÉTAT DE L'ART SUR LES MÉTHODES D'HYBRIDATION	113
2	PRINCIPE DE LA MÉTHODE HYBRIDE DE TYPE PATCH	117
3	ÉTUDE PARAMÉTRIQUE SUR UN PROBLÈME MAXWELL 1D	121
3.1	FORMALISME DANS LE CADRE 1D . . . . .	123
3.2	DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES . . . . .	124
3.2.1	Application d'un schéma FDTD à un sous-domaine . . . . .	125
3.2.2	Application d'un schéma FVTD à un sous-domaine . . . . .	125
3.2.3	Application d'un schéma GD à un sous-domaine . . . . .	126
3.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	135
3.3.1	Etude d'hybridation de différents schémas . . . . .	136
3.3.2	Influence de la taille de la zone de recouvrement . . . . .	137
3.3.3	Influence de la discrétisation spatiale dans la zone de recouvrement	138
3.4	IMPORTANCE DU CHOIX DE LA FONCTION $\chi$ ET APPORT D'UN TERME DE RÉGULARISATION . . . . .	139
3.4.1	Choix de la fonction $\chi$ . . . . .	140
3.4.2	Terme de pénalisation dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD .	144
3.5	PROPOSITION D'UNE ÉTUDE DE STABILITÉ DU SCHÉMA HYBRIDE EN UNE DIMENSION . . . . .	146
3.5.1	Etude du schéma de Yee en 1D . . . . .	146
3.5.2	Etude du schéma hybride en 1D . . . . .	148
3.6	CONCLUSION . . . . .	150
4	INTRODUCTION DU MODÈLE PIC DANS UNE CONFIGURATION HYBRIDE 2D FDTD/FDTD	151
4.1	MODÈLE 2D ÉTUDIÉ . . . . .	153
4.1.1	Définition du problème Maxwell-Vlasov . . . . .	153
4.1.2	Introduction de la méthode PIC . . . . .	153
4.2	HYBRIDATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL 2D EN MODE TE . . . . .	154
4.2.1	Etude d'une configuration avec deux zones à maillages décalés . . .	155
4.2.2	Etude d'une configuration à inclusion de zones . . . . .	159
4.3	HYBRIDATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT . . . . .	166
4.3.1	Introduction de la méthode PIC . . . . .	166
4.3.2	Exemples numériques . . . . .	168
4.4	CONCLUSION SUR L'HYBRIDATION 2D . . . . .	169
5	CONCLUSION	171
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES		173
A	ANNEXE	177

A.1	APPROXIMATION SEMI-DISCRÈTE DE LA MÉTHODE GD . . . . .	179
A.2	MÉTHODE FVTD . . . . .	185
A.3	CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DE TYPE PML . . . . .	187
A.3.1	Couches absorbantes de type PML . . . . .	187
A.3.2	Reformulation des PML par Bérenger . . . . .	189
A.3.3	Formulation de Gedney . . . . .	191
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		193

## LISTE DES FIGURES

1	Ordres de grandeurs de quelques plasmas en fonction de leur température $T_e$ , leur densité $n_e$ , leur fréquence plasma $f_p$ et la longueur de Debye $\lambda_D$ . . . . .	9
1	Classification des plasmas par Hallahan et Bell [Hallahan et Bell (1974)]. . . . .	10
2	Trajectoire hélicoïdale d'un électron dans un champ magnétique uniforme. . . . .	13
3	Projection du mouvement de la particule sur un plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ . . . . .	13
4	Trajectoires d'un électron et d'un ion avec une vitesse initiale nulle. . . . .	14
5	Orbites adiabatiques : mouvement d'une particule dans un champ magnétique non uniforme. . . . .	15
I.2.1	Principe de la méthode PIC. . . . .	32
I.3.1	Transformation $\mathbf{F}_K$ . . . . .	41
I.3.2	Degrés de liberté de Gauss pour $r = 2$ en dimension 3. . . . .	44
I.3.3	Positions des valeurs des champs $U$ ( $U = PV$ ) et courbes caractéristiques définies par $\lambda$ et $-\lambda$ . . . . .	50
I.3.4	Degrés de liberté de Gauss-Lobatto pour $r_{GL} = 1$ en dimension 3. . . . .	68
I.3.5	Maillage du cube. . . . .	74
I.3.6	Température thermique des électrons dans un plasma, obtenues par les méthodes NGP et quasi CIC, au cours du temps. . . . .	75
I.3.7	Distribution initiale de 40000 particules dans l'espace des positions (à gauche) et dans l'espace des vitesses (à droite). . . . .	79
I.3.8	Définition de la vitesse des particules. . . . .	82
I.3.9	Définition de la vitesse des particules. . . . .	83
I.3.10	Configuration de la ligne coaxiale : circuit RLC (en haut) et mode TEM (en bas). . . . .	88
I.3.11	Schéma électrique du modèle de générateur considéré. . . . .	89
I.3.12	Modèle de lignes de transmission. . . . .	89
I.4.1	Configuration étudiée et maillage de la géométrie. . . . .	93
I.4.2	Tensions obtenues à différentes positions sur la ligne. . . . .	94
I.4.3	Champs E et H obtenus dans le volume au temps $t = 1.e - 8s$ . . . . .	94

I.4.4	Schéma d'une configuration périodique avec la bijection entre cellules de faces périodiques. . . . .	95
I.4.5	Géométrie périodique étudiée. . . . .	95
I.4.6	Tensions observées dans la configuration périodique. . . . .	95
I.4.7	Répartition des champs E et H à $t=1.e-8s$ dans la configuration périodique. . . . .	96
I.4.8	Comparaison de tensions obtenues à partir d'un outil FDTD 2D axisymétrique et de l'outil GD 3D, à différentes positions sur la ligne coaxiale. . . . .	96
I.4.9	Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ E, à différents temps de simulation. . . . .	98
I.4.10	Evolution du champ E à différents temps de simulation. . . . .	99
I.4.11	Comparaison de tensions obtenues pour différents angles $\theta$ par rapport à celles d'un outil GD-PIC 3D, à différentes positions sur la ligne coaxiale. . . . .	100
I.4.12	Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ E, pour une géométrie périodique d'angle $\theta$ égal à $5^\circ$ , à différents temps de simulation. . . . .	101
I.4.13	Configuration de la diode. . . . .	102
I.4.14	Maillage de la diode pour une géométrie périodique d'angle $\theta$ égal à $5^\circ$ . . . . .	102
I.4.15	Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ E, pour une géométrie périodique d'angle $\theta$ égal à $5^\circ$ , à différents temps de simulation. . . . .	103
I.4.16	Evolution du champ E pour une géométrie périodique d'angle $\theta$ égal à $5^\circ$ , à différents temps de simulation. . . . .	104
I.4.17	Comparaison des impédances d'entrée (à gauche) et de l'extrémité (à droite) obtenues avec l'outil FDTD 2D axisymétrique (en noir) et avec l'outil GD-PIC 3D (en rouge) dans une configuration périodique d'angle $\theta$ égal à $5^\circ$ . . . . .	105
I.4.18	Maillage de la diode pour une géométrie complète. . . . .	105
I.4.19	Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ E, pour la géométrie complète, en fin de la simulation. . . . .	106
I.4.20	Comparaison des résultats numériques entre notre outil GD-PIC 3D en coupe (en haut) et le code axisymétrique 2D du CEA (en bas) au temps de simulation $t = 1.5e - 8s$ . . . . .	106
I.4.21	Comparaison des impédances d'entrée (à gauche) et de l'extrémité (à droite) obtenues avec l'outil FDTD 2D axisymétrique (en noir) et avec l'outil GD-PIC 3D (en rouge) pour la une configuration complète. . . . .	107
II.3.1	Schéma du domaine de calcul $\Omega$ avec deux zones $\Omega_1$ (en rouge) et $\Omega_2$ (en cyan) à maillages décalés avec la zone de recouvrement, appelée zone tampon (en pointillé noir). . . . .	123
II.3.2	Transformation $F_{K_1}$ . . . . .	129
II.3.3	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différents couplages de méthodes. . . . .	136
II.3.4	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes tailles de recouvrement pour une hybridation FDTD/FDTD (en haut) et un zoom (en bas). . . . .	137

II.3.5	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes discrétisations spatiales dans la zone de recouvrement pour une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	138
II.3.6	Représentation de la fonction polynomiale $\chi$ pour différents degrés $n$ dans un intervalle $[0.8, 1]$ . . . . .	141
II.3.7	Représentation de la fonction $\chi$ pour les trois formes étudiées dans un intervalle $[0.8, 1]$ . . . . .	142
II.3.8	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différents degrés de la fonction polynomiale $\chi$ pour une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	142
II.3.9	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes formes de la fonction $\chi$ pour une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	142
II.3.10	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec et sans terme de relaxation pour une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	145
II.4.1	Schéma du domaine de calcul $\Omega$ avec deux zones $\Omega_1$ (en rouge) et $\Omega_2$ (en cyan) à maillages décalés avec recouvrement (en noir). . . . .	155
II.4.2	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes tailles de la zone de recouvrement pour les champs $E_y$ (à gauche) et $H_z$ (à droite), dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	156
II.4.3	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes discrétisations spatiales en $x$ dans la zone de recouvrement pour les champs $E_y$ (à gauche) et $H_z$ (à droite), dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	157
II.4.4	Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différents degrés de la fonction $\chi$ polynomiale pour les champs $E_y$ (à gauche) et $H_z$ (à droite), dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	158
II.4.5	Premier schéma du domaine de calcul $\Omega$ à inclusion de zones $\Omega_1$ (en rouge) et $\Omega_2$ (en cyan) avec recouvrement (en noir). . . . .	160
II.4.6	Schéma pour le calcul de la fonction bilinéaire $\chi$ dans la zone tampon délimitée par les deux carrés noirs. . . . .	160
II.4.7	Comparaison de la solution analytique, de la solution sans hybridation et des solutions $E_y$ (à gauche) et $H_z$ (à droite) obtenues avec différentes tailles de la zone tampon pour une fonction $\chi$ interpolée dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	161
II.4.8	Comparaison de la solution analytique, de la solution sans terme de relaxation et des solutions $H_z$ obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction $\chi$ interpolée avec une épaisseur de zone tampon de $0.25m$ (à gauche) et un zoom (à droite). . . . .	162
II.4.9	Comparaison de la solution analytique, de la solution sans terme de relaxation et des solutions $E_y$ obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction $\chi$ interpolée avec une épaisseur de zone tampon de $0.25m$ (à gauche) et un zoom (à droite). . . . .	162
II.4.10	Second schéma du domaine de calcul $\Omega$ composé de deux sous-domaines $\Omega_1$ (en rouge) et $\Omega_2$ (en cyan) avec recouvrement (en noir). . . . .	163

II.4.11	Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ $H_z$ obtenues avec différents degrés de la fonction polynomiale $\chi$ pour une épaisseur de zone tampon de $0.025m$ et dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite). . . . .	164
II.4.12	Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ $E_y$ obtenues avec différents degrés de la fonction polynomiale $\chi$ pour une épaisseur de zone tampon de $0.025m$ et dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite). . . . .	164
II.4.13	Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ $H_z$ obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction polynomiale $\chi$ de degré 1 et pour une épaisseur de zone tampon de $0.025m$ , dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite). . . . .	165
II.4.14	Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ $H_z$ obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction polynomiale $\chi$ de degré 1 et pour une épaisseur de zone tampon de $0.025m$ , dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite). . . . .	165
II.4.15	Représentation de $\phi$ dans $\Omega$ sans hybridation (à gauche) et avec hybridation (à droite). . . . .	168
II.4.16	Représentation de l'erreur commise entre les solutions de $\phi$ obtenues avec et sans hybridation. . . . .	168
II.4.17	Trajectoire d'un électron soumis à un champ magnétique uniforme en fonction de différents degrés de la fonction polynomiale $\chi$ et du cas sans hybridation. . . . .	169
A.1	Position des matériaux absorbants (PML). . . . .	187

## LISTE DES TABLEAUX

I.3.1	Points et poids de Gauss, en dimension 1, définissant les fonctions de base de $Q_r(\hat{K})$ , $r$ variant de 0 à 3. . . . .	43
I.3.2	Points et poids de Gauss-Lobatto sur $[0, 1]$ pour $r_{GL}$ variant de 1 à 5. . . . .	67
I.3.3	Temps CPU pour les méthodes NGP et quasi CIC. . . . .	75
I.3.4	Inversion en base 5 des premiers entiers. . . . .	79
I.4.1	Temps CPU des simulations pour différents angles $\theta$ dans le cas périodique et pour la configuration complète. . . . .	100
I.4.2	Temps CPU des simulations pour la diode dans les cas périodique et complet avec l'outil GD-PIC 3D. . . . .	107
II.3.1	Points et poids de Gauss définissant les fonctions de base de $Q_{r_1}(\hat{K})$ sur l'intervalle $[0, 1/2]$ pour $r_1$ variant de 0 à 4. . . . .	131

II.3.2	Erreur relative en norme $L^2$ en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques avec différents couplages de méthodes (notée $Err_1$ ) et l'erreur entre la solution numérique sans hybridation et la solution analytique (notée $Err_2$ ). . . . .	136
II.3.3	Erreur relative en norme $L^2$ en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différentes tailles de la zone de recouvrement et pour l'hybridation de différents schémas. . . . .	137
II.3.4	Erreur relative en norme $L^2$ en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différents pas d'espace et pour l'hybridation de différents schémas. . . . .	138
II.3.5	Erreur relative en norme $L^2$ en temps et en espace entre la solution analytique et la solution numérique sans hybridation de différents schémas. . . . .	139
II.3.6	Erreur relative en norme $L^2$ en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différentes formes de la fonction $\chi$ et pour l'hybridation de différents schémas. . . . .	143
II.3.7	Erreur relative en norme $L^2$ en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques avec et sans terme de relaxation pour une hybridation FDTD/FDTD. . . . .	145



# INTRODUCTION

DANS le domaine des fortes puissances électriques pulsées (FPEP), une des applications majeures est la génération d'ondes électromagnétiques. Cette technique vise à la fois des applications civiles et militaires. Parmi les différents générateurs FPEP existants, nous pouvons citer les radars impulsionnels Ultra Large Bande (ULB) permettant la détection des mines enfouies dans le sol ou la localisation des personnes ensevelies, les simulateurs IEM (Impulsion ElectroMagnétique) capables de brouiller des signaux et d'endommager les matériels électronique et informatique. Ces derniers simulateurs servent d'armes de guerre électronique mais également d'armes stratégiques pour se défendre. Pour ce type de simulateurs, nous distinguons généralement deux catégories. La première regroupe l'Impulsion ElectroMagnétique Nucléaire (IEMN) qui, au cours d'une explosion nucléaire, génère des champs électromagnétiques de forte intensité (plusieurs kilovolts par mètre) se propageant en une fraction de seconde. Le rayon de la propagation de cette impulsion électromagnétique dépend fortement de l'altitude à laquelle l'explosion nucléaire est déclenchée. Par exemple, une charge explosant entre 80 et 130km d'altitude pourrait produire une IEM dans un rayon d'au moins 800 kilomètres. Ainsi, les impulsions EM à haute altitude peuvent faire des dégâts dans un large périmètre autour de l'explosion. Les premiers dégâts d'origine électromagnétique ont été observés dès les premiers essais nucléaires. Cependant, le phénomène d'IEM a seulement été reconnu dans les années 60 avec les essais nucléaires spatiaux Starfish (USA) et Opération K (URSS). La seconde catégorie regroupe les IEM non-nucléaires qui sont réparties en deux classes : les sources *Ultra Wide Band* (UWB) et les sources *High Power Microwave* (HPM), appelées aussi Micro-ondes à Forte Puissance (MFP). Ces dispositifs émettent également un champ électromagnétique de forte intensité mais avec un rayon d'action et une puissance restreintes, par rapport à une IEM nucléaire.

De tels dispositifs ont été développés par de nombreux pays. Par exemple, le Pentagone a lancé un programme CHAMP, en 2008, visant la conception d'un démonstrateur aérien doté d'un générateur MFP capable de générer plusieurs impulsions au cours d'un seul vol. La Russie serait en mesure d'équiper ses missiles antinavires pour des impulsions électromagnétiques tandis que la Chine travaillerait sur le développement d'IEM pour des opérations de guerre navale, contre des porte-avions ennemis. La France et l'Allemagne étudient également les armes MFP, dans un institut franco-allemand de recherches de Saint-Louis. Ces deux pays ont mis en œuvre en 2003 un générateur de charges MFP de taille réduite, susceptibles d'équiper des obus (155mm) ou des bombes guidées.

Ainsi, nous comprenons bien les enjeux de chaque pays à développer des générateurs d'IEM et à étudier les effets dévastateurs que pourrait engendrer une attaque électromagnétique sur leurs propres systèmes électroniques vulnérables aux IEM.

En effet, ces structures électroniques sont présentes dans les systèmes militaires, les systèmes d'armes, les installations informatiques, les appareils de radiotransmissions, les véhicules, les missiles, mais aussi dans les systèmes utiles aux activités civiles tels que le système bancaire et les transports. Par ailleurs, la réalisation des simulateurs d'agressions électromagnétiques permet de créer des armes mais aussi de tester la résistance des systèmes électroniques contre ce type d'agressions afin de les améliorer. Elle demande aussi d'importants moyens qu'ils soient matériels ou financiers. C'est pourquoi il est nécessaire de modéliser ces simulateurs MFP afin d'alléger les coûts dus à la fabrication de tels dispositifs.

La modélisation physique de sources MFP nécessite la prise en compte de la présence de flots de particules chargées (milieu ionisé), interagissant avec les champs électromagnétiques. Etant donnée la faible densité des plasmas mis en jeu, une description statistique du gaz est nécessaire. Pour cela, on utilise une fonction de distribution pour chaque espèce de particules constituant le milieu ionisé. Chacune de ces fonctions obéit à une équation de transport (Vlasov-Maxwell). Cette modélisation numérique des équations de transport est traditionnellement réalisée à l'aide de la méthode *Particle-In-Cell* (PIC).

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse qui a fait l'objet d'une collaboration entre l'Institut Mathématique de Toulouse (IMT) de l'Université Paul Sabatier, l'Office National d'Etudes et de Recherche en Aéronautique (ONERA) et le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) de Gramat.

Dans le cadre de la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel, plusieurs méthodes numériques permettant de traiter efficacement les problèmes électromagnétiques qui sont posés (CEM, antennes, ...) ont été développées au sein du département ElectroMagnétisme et Radar (DEMR) de l'ONERA, et plus particulièrement dans l'équipe d'Antennes, Matériaux et Modélisation (AMM). Ces études ont permis, notamment, d'acquérir une expérience significative dans ce domaine grâce au développement de méthodes de haute précision rapides fondées sur des schémas de type éléments finis discontinus (Galerkin Discontinu). Récemment, cette équipe s'est intéressée à la modélisation de l'interaction entre un plasma et des micro-ondes pour des sources MFP, introduites ci-dessus.

Ainsi, le travail présenté dans ce mémoire consiste à étudier et à développer une méthode numérique pour la modélisation de l'interaction plasma/micro-ondes. La particularité de cette approche est d'utiliser un solveur électromagnétique basé sur une approximation Galerkin Discontinue (GD), qui permet de traiter efficacement les cavités à géométrie courbe. Dans cette nouvelle méthode, nous nous sommes, en particulier, intéressés à la mise en œuvre d'un modèle de correction approprié au schéma GD pour la prise en compte de la loi de conservation de la charge, à l'interpolation Champs/Particules et à l'intégration de modèles physiques propres au plasma tels que les sources micro-ondes de forte puissance, les surfaces d'émission de particules et les faisceaux d'électrons. Le choix d'un schéma d'ordre élevé, étant relativement coûteux dans les zones d'espace libre, nous avons ensuite cherché à augmenter les performances de la méthode. Pour cela, une étude bibliographique sur les schémas numériques de type Différences Finies (FDTD : *Finite-Difference Time-Domain*), Volumes Finis (FVTD : *Finite-Volume Time-Domain*) et GD, montrant les avantages et les inconvénients de ces techniques, nous a aussi amené à orienter

la thèse vers la recherche de solutions hybrides non conformes pour résoudre le système Maxwell-Vlasov.

Cette thèse s'articule donc autour de deux grandes parties après un rappel sur quelques notions de la physique des plasmas.

La première partie, constituée de quatre principaux chapitres, présente l'étude d'une méthode GD pour la résolution du problème Maxwell-Vlasov.

Dans le premier chapitre, nous proposons un état de l'art sur les différents schémas numériques pour résoudre les équations de Maxwell-Vlasov par une méthode PIC. Nous mettrons ainsi en avant les intérêts possibles d'utiliser un schéma d'ordre élevé pour ce type de problème.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la formulation mathématique du problème étudié, à savoir les équations de Maxwell-Vlasov, et nous décrivons la méthode PIC de façon générale avec les différentes étapes d'interpolation entre les champs électromagnétiques et les particules. Nous donnons, ensuite, les différentes possibilités que l'on trouve dans la littérature pour traiter le problème de non conservation de la charge. Parmi ces possibilités, nous nous sommes orientés vers l'introduction d'un terme correcteur sur le champ électrique, et plus précisément vers un modèle de correction hyperbolique. En effet, cette approche nous semble être appropriée à notre schéma GD car elle permet de conserver le caractère hyperbolique du système mais aussi le caractère explicite du solveur.

Le troisième chapitre détaille l'approximation numérique du système Maxwell-Vlasov incluant la méthode PIC. Un premier volet concerne les développements du schéma numérique choisi pour la résolution des équations de Maxwell, d'une part, et du système Maxwell-Vlasov, d'autre part. Nous introduisons également dans ce chapitre, les approches d'interpolation étudiées pour notre schéma GD. Un second volet présente la modélisation des sources micro-ondes de forte puissance mises en jeu dans ce travail de thèse pour traiter les problèmes physiques qui nous sont posés. Ces sources correspondent aux sources électroniques et électromagnétiques, liées respectivement aux plasmas et aux champs.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous montrons un ensemble de résultats numériques pour valider la méthode GD-PIC proposée. En particulier, dans les différentes configurations étudiées, nous mettrons l'accent sur des dispositifs coaxiaux tels que la ligne coaxiale et la diode.

La seconde partie porte sur la recherche et l'étude de méthodes hybrides non conformes pour la résolution du système Maxwell-Vlasov par une méthode PIC. Cette partie est également scindée en quatre chapitres.

Le premier chapitre consiste en une étude bibliographique sur les différentes méthodes de décomposition de domaines. Ces méthodes connaissent, aujourd'hui, un essor important qui est motivé par les développements de calcul parallèle et la résolution de problèmes présentant de multiples échelles. Dans le cadre des problèmes Maxwell et Maxwell-Vlasov, il ressort, de cet état de l'art, un intérêt pour l'étude d'une méthode basée sur une partition de l'unité.

Dans le deuxième chapitre, nous formalisons le principe de la méthode hybride retenue, dans le cas général.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la méthode introduite dans le chapitre précédent, sur un problème Maxwell 1D. Nous décrivons notamment les différentes hybridations entre les schémas FDTD, FVTD et GD que nous avons réalisées. Une

étude numérique est également détaillée pour mettre en évidence l'influence de différents paramètres de l'hybridation sur la précision de la solution. Parmi ces paramètres, nous montrons l'importance du choix de la fonction de transition mais également l'apport d'un terme de régularisation pour diminuer les oscillations constatées sur les solutions hybrides. Nous nous sommes aussi intéressés à la détermination d'un critère de stabilité pour le schéma hybride.

Confortés dans notre choix par les résultats satisfaisants obtenus en 1D, nous considérons, dans le dernier chapitre, une hybridation de type FDTD/FDTD sur deux maillages non coïncidents pour les équations de Maxwell-Vlasov en 2D. Tout d'abord, nous nous intéressons à une hybridation du problème Maxwell 2D en mode TE sur des configurations avec des maillages décalés et avec inclusion de zones. Ensuite, nous introduisons cette méthode hybride pour le système Maxwell-Vlasov et nous donnons un ensemble de résultats permettant de valider l'approche.

# CONTEXTE ET RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS SUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS

DANS notre Univers, les plasmas sont très répandus. Ils constituent environ 99% de l'ensemble de la matière connue. Nous les trouvons à l'état naturel dans les étoiles, la surface de l'eau, les éclairs ou encore dans l'ionosphère. Nous pouvons également les produire artificiellement, rendant ainsi réalisables de nombreuses applications de notre vie quotidienne tels que les écrans plasma ou les néons.

Le mot "plasma" provient du grec ancien et signifie "*forme, chose moulée*" ou encore "*ouvrage façonné*". Le concept "plasma" a été introduit pour la première fois, en 1928, par le physicien américain Irving Langmuir pour désigner un gaz ionisé électriquement neutre dans les tubes à décharge [Langmuir (1928)]. Ensuite, cette notion s'est étendue aux plasmas partiellement ionisés où les particules sont chargées, notamment, en astrophysique pour désigner un état dilué de la matière. Les plasmas non neutres comme la dynamique des faisceaux d'électrons, de protons, d'ions lourds ont été, par la suite, étudiés.

Plusieurs applications technologiques ont suscité l'étude des plasmas, regroupée dans la physique des plasmas et qui étudie les propriétés, la dynamique des plasmas et leurs applications. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, les premières études de propagation d'ondes dans les gaz ionisés ont été réalisées, et ont été généralisées au cas des gaz ionisés soumis à un champ magnétique. Ensuite, le développement de dispositifs à décharge dans les gaz, en particulier les arcs et les lampes, a fait l'objet des travaux de I. Langmuir qui a étudié les propriétés du plasma contenu dans ces dispositifs. Depuis ces cent dernières années, les chercheurs se sont intéressés aux tubes à faisceau à électrons; le premier chercheur étant A. W. Hull avec le magnétron. Bien que les faisceaux d'électrons ne soient pas neutres, ils possèdent des propriétés telles les ondes de charge d'espace, analogues aux plasmas et suscitant le développement de tubes pour hyperfréquences (klystrons,...) entre 1935 et 1960. Ces études sur la décharge dans les gaz restent encore d'actualité. Elles interviennent à la fois dans des applications traditionnelles comme le transport de l'énergie électrique et dans des nouvelles techniques récentes, comme par exemple la production de lumière dans les lasers à gaz. Enfin, la production d'énergie par fusion thermonucléaire contrôlée reste une application des plasmas qui a changé le cours de l'histoire, notamment avec la production des bombes H en 1952 qui correspond à des réactions de fusion des noyaux légers en noyaux d'hélium.

Aujourd'hui, un plasma est donc un gaz partiellement ou totalement ionisé qui se compose d'un ensemble de particules d'espèces chargées : atomes, molécules

neutres, ions positifs ou négatifs et électrons. A l'échelle macroscopique, ils sont généralement quasi-neutres. On parle également de quasi-neutralité. Cela signifie que la somme totale des charges est nulle dans un volume macroscopique.

Le plasma désigne aussi le "quatrième état" de la matière après les états solide, liquide et gazeux. Cette notion provient du fait qu'un corps change d'état quand sa température augmente. Il passe de l'état solide à l'état liquide puis à l'état gazeux en fonction de sa température atteinte. Au delà d'une température de  $10^5 K$  à  $10^6 K$ , la matière est ionisée : on passe à l'état plasma. Cependant, nous trouvons des plasmas à des températures inférieures, notamment les plasmas produits en laboratoire.

Selon leurs propriétés, les plasmas peuvent être de nature très diverse. Pour les caractériser et les répertorier, il est nécessaire de tenir compte d'un certain nombre de paramètres [Quinio (2005), Delcroix et Bers (1994)].

## PARAMÈTRES D'UN PLASMA

### Densité des espèces

Un plasma se caractérise tout d'abord par le nombre d'espèces qu'il contient. Chaque espèce a une densité (nombre de particules de cette espèce par unité de volume), soit  $n$ .

Nous noterons  $n_n$  la densité des neutres,  $n_i$  la densité des ions et  $n_e$  celle des électrons.

Supposons que les ions aient une charge  $+Ze$ ,  $e$  étant la charge élémentaire. La densité ionique s'obtient alors par la condition de neutralité de charge suivante :

$$-n_e e + n_i Z e = 0 \quad (1)$$

Si  $Z$  vaut 1, nous avons  $n_e = n_i$ . Le plasma est à l'équilibre. On dit également que le plasma est électriquement neutre.

### Température des espèces

Un autre paramètre important pour un plasma est la température d'une espèce, soit  $T$  en  $K$  (Kelvin). Comme pour les densités, nous différencions  $T_i$  la température ionique et  $T_e$  la température électronique. Il est évident que ces deux températures sont égales à l'équilibre thermodynamique. En physique des plasmas, l'énergie cinétique d'une espèce est souvent exprimée par sa température en  $eV$  (électron-Volt) ( $1eV \approx 10^{-19} J \approx 11600K$ ). Une température électronique de  $1eV$  signifie que  $k_B T = 1eV$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

Nous pouvons ainsi classer les plasmas selon leur température. Les plasmas sont dits froids quand la température (l'énergie) des électrons (température inférieure à  $10^5 K$ ) est très supérieure à celle des ions (entre la température ambiante à  $1500K$ ) : seuls les électrons effectuent des réactions (essentiellement chimiques). Ces plasmas sont des gaz partiellement ionisés. Au contraire, on parle de plasmas chauds, quand les ions sont réactifs et influencent le comportement du plasma. Dans ce type de plasmas, les différentes espèces ont des températures égales qui sont de l'ordre de  $10^6 K$ . Ce sont, de manière générale, des gaz totalement ionisés.

## Degré d'ionisation

Le degré d'ionisation, noté  $\alpha$ , est un paramètre permettant de caractériser un plasma mais aussi les phénomènes liés à ce degré. Il est défini par :

$$\alpha = \frac{n_e}{n_n + n_e} \quad (2)$$

Ce degré d'ionisation peut prendre des valeurs très faibles de l'ordre de  $10^{-10}$  mais il peut également atteindre 1. Si le degré d'ionisation  $\alpha$  est très inférieur à une valeur critique  $\alpha_0$ , de l'ordre de  $10^{-7}$ , le plasma est faiblement ionisé. Dans ces plasmas, une minorité d'ions et d'électrons se déplace au milieu d'un grand nombre de molécules neutres. Les collisions binaires entre un électron (ou un ion) et une molécule constitue alors la dynamique des particules chargées dans ce type de plasma. En revanche, si  $\alpha$  est supérieur à  $\alpha_0$ , le plasma est fortement ionisé. Pour  $\alpha$  égal à 1, le plasma est dit totalement ionisé ; la densité des molécules neutres est nulle. La nature de ces plasmas fortement ionisés est due à la présence d'interactions entre particules qui sont les interactions coulombiennes, appelées aussi interactions collectives.

Il existe également les plasmas fortement ionisés sans interaction entre particules, comme, par exemple, le vent solaire. On retrouve ces plasmas à l'état dilué, sans collision des particules chargées qui sont soumises à des champs électromagnétiques extérieurs.

## Longueur de Landau

Considérons un électron d'énergie cinétique  $\frac{1}{2}mv^2 = k_B T_e$ . En présence d'un autre électron, son énergie potentielle est donnée par :

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

La longueur de Landau, soit  $\lambda_L$ , correspond à la distance séparant les deux électrons pour laquelle l'énergie cinétique de l'électron (énergie cinétique d'agitation thermique) est de l'ordre de l'énergie potentielle d'interaction binaire entre les deux électrons. Par conséquent, elle est définie par :

$$\lambda_L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T_e} \quad (4)$$

avec  $e$  la charge élémentaire d'un électron,  $T_e$  sa température et  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide. Notons que  $\lambda_L$  est nécessairement utilisée pour des études portant sur les phénomènes collisionnels dans un plasma.

Si la longueur séparant les deux électrons est inférieure à  $\lambda_L$  (i.e. l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie cinétique), les plasmas sont corrélés. Si cette longueur est supérieure à  $\lambda_L$ , (i.e. l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie cinétique), on parle de plasmas cinétiques. Cette longueur critique d'interaction binaire intervient dans l'étude de phénomènes de collisions.

## Longueur de Debye

De manière générale, les interactions collectives entre particules, dans un plasma, jouent un rôle beaucoup plus important que les effets résultant des interactions binaires. Ces interactions collectives tiennent compte des conditions locales mais aussi de l'état du plasma dans un environnement lointain.

Considérons un plasma globalement neutre et une particule de charge  $q$  positive positionnée à  $r = 0$ . La répartition du potentiel  $V$  autour de la charge  $q$  est définie par :

$$V(r) = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (5)$$

où  $\lambda_D$  est donné par :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}. \quad (6)$$

Le paramètre  $\lambda_D$  est connu sous le nom de longueur de Debye. C'est une longueur critique d'interaction collective. Il s'agit d'une estimation de la distance au delà de laquelle l'influence du champ électrique d'une particule chargée n'est plus ressentie par les autres particules chargées. Elle correspond à une longueur d'écrantage. La particule de charge  $q$  va perturber le plasma quasi neutre. En effet, les particules de charge opposée à  $q$  sont attirées par la charge et forment ainsi un écran autour de  $q$  afin de rétablir l'équilibre de charge. Pour une distance inférieure à la longueur de Debye, le potentiel vu est celui de la charge nue. Au delà, ce potentiel n'est plus vu par le plasma (l'écrantage) et le plasma retrouve sa neutralité.

**Remarque 1** *A des distances de l'ordre de  $\lambda_D$ , les interactions entre particules prédominent devant les interactions collectives.*

Par ailleurs, il est nécessaire de définir le nombre d'électrons  $N_D$  présents dans la sphère de Debye (sphère dont le rayon est égal à la longueur de Debye  $\lambda_D$ ). Nous avons :

$$N_D = \frac{4}{3} \pi n_e \lambda_D^3. \quad (7)$$

Si  $N_D \gg 1$ , l'écrantage est fort et les effets individuels sont dominants. Les plasmas sont dits alors cinétiques. Au contraire, pour un nombre  $N_D$  très petit devant 1, l'écrantage est faible et les plasmas sont fortement corrélés.

## Fréquence plasma

Lorsque l'on perturbe un plasma initialement neutre, une perturbation locale sous forme de champ électrique est créée. Les électrons sont soumis à une force, force de rappel, et sont accélérés vers leur position initiale. Ils vont alors osciller autour de leur position d'équilibre, avec une certaine fréquence. Les ions étant plus lourds que les électrons, ils restent immobiles lors de ces oscillations. La pulsation  $\omega_p$  des oscillations de plasma est donnée par :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (8)$$

avec  $m_e$  la masse d'un électron. Cette notion de pulsation est souvent appelée *fréquence plasma*. Cependant, la fréquence plasma ou encore fréquence de Langmuir, notée  $f_p$ , est rigoureusement donnée par :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \quad (9)$$

## CLASSIFICATION DES PLASMAS

Les différents paramètres évoqués ci-dessus permettent donc de classer les plasmas selon leur nature : plasmas ionisés, faiblement ionisés, corrélés ou encore cinétiques. Le tableau 1 répertorie quelques plasmas typiques selon leur densité électronique, leur température, leur fréquence plasma et leur longueur de Debye.

Quelques plasmas	Densité ( $m^{-3}$ )	Température (K)	$\omega_p$	$\lambda_D$
<b>Gaz faiblement ionisés</b>				
Ionosphère (basse altitude)	$10^3$	$10^{2.5}$	$10^{7.5}$	$10^{0.5}$
<b>Gaz fortement ionisés</b>				
Vent solaire	$10^{0.5}$	$10^5$	$10^4$	$10^3$
Ionosphère (haute altitude)	$10^{5.5}$	$10^3$	$10^7$	$10^{-0.5}$
Plasmas d'ionisation de surface	$10^{12}$	$10^3$	$10^{10}$	$10^{-4}$
Plasmas produits par laser	$10^{19}$	$10^5$	$10^{13.5}$	$10^{-6}$
<b>Matière dense</b>				
Electrons dans les métaux	$10^{23}$	$10^{2.5}$	$10^{15.5}$	$10^{-9.5}$
Intérieur des étoiles	$10^{27}$	$10^{7.5}$	$10^{17.5}$	$10^{-9.5}$

table 1 – Ordres de grandeurs de quelques plasmas en fonction de leur température  $T_e$ , leur densité  $n_e$ , leur fréquence plasma  $f_p$  et la longueur de Debye  $\lambda_D$ .

Une autre classification des plasmas en fonction de leur densité électronique, de leur température et de la longueur de Debye a été réalisée par Hollahan et Bell (figure 1).

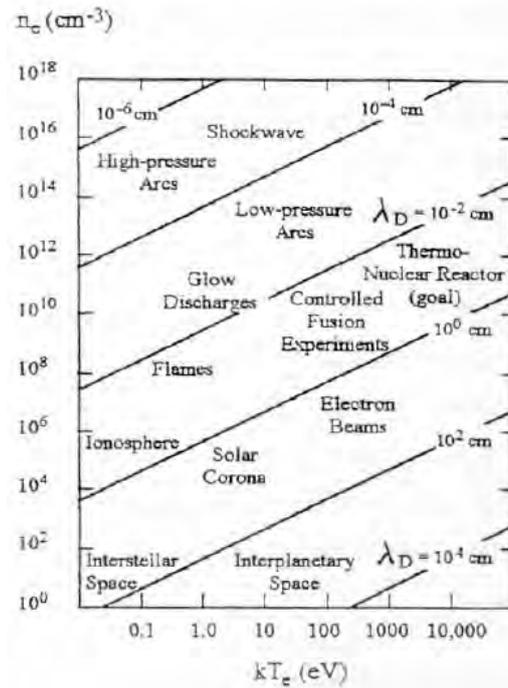


figure 1 – Classification des plasmas par Hallahan et Bell [Hallahan et Bell (1974)].

## PLASMAS ÉTUDIÉS DANS LE CADRE DE LA THÈSE

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à des plasmas froids ( $10^4 K$ ) et peu denses, soit de l'ordre de  $10^{11} \text{Nbpart.m}^{-3}$ . Un plasma de faible densité est souvent considéré comme un gaz non collisionnel de particules chargées ; les interactions entre particules étant, par conséquent, négligées. Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérerons que ce type de plasmas.

### Mouvement des particules dans les champs électriques et magnétiques

Les champs électromagnétiques régnant dans le plasma suffisent à eux seuls pour déterminer les mouvements des particules (ions et électrons). Ces champs sont souvent produits par des sources extérieures au plasma ou engendrés par les courants électriques dus aux mouvements des particules. Considérons un champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) d'origine extérieure. L'étude des propriétés d'un plasma se ramène à celle des trajectoires des particules chargées. L'ensemble des solutions de l'équation fondamentale de la dynamique d'un plasma est :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

où  $m$  est la masse de la particule et  $q$  sa charge. L'infinité de solutions de cette équation permet de représenter l'agitation thermique désordonnée des particules du plasma. De manière générale, cette équation ne peut être résolue que par des méthodes numériques. Cependant, un calcul analytique est possible en prenant en compte des cas simples. Ces derniers sont intéressants car ils nous permettront de valider notre pousseur de particules ; c'est pourquoi nous détaillons ci-dessous leur calcul.

### Champ magnétique uniforme et constant

Dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  uniforme et constant (qui ne varie pas dans le temps) et en l'absence de tout champ électrique, l'équation (10) peut se réécrire :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (11)$$

avec  $\boldsymbol{\Omega}$  le vecteur constant défini par :

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{q}{m}\mathbf{B} \quad (12)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$  est appelé le *vecteur rotation gyromagnétique*. En effet, son axe représente l'axe de rotation, son signe donne le sens de la rotation (positif pour les électrons et négatifs pour les ions). Ainsi, les trajectoires des électrons et des ions sont des hélices régulières enroulées autour du champ magnétique et sont décrites pour chaque espèce de particules avec la *fréquence de rotation* (ou *fréquence cyclotronique*) :

$$\Omega = \left| \frac{q}{m}\mathbf{B} \right| \quad (13)$$

L'hélice est donc obtenue par superposition de la rotation autour de  $\boldsymbol{\Omega}$  et d'une translation à la vitesse  $\mathbf{v}_{\parallel}$  dans la direction de  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Déterminons les positions et les vitesses des particules soumis à un champ magnétique constant et uniforme. D'après l'équation (10), il vient deux équations. La première correspond à celle du mouvement parallèle au champ magnétique :

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (14)$$

Cette équation correspond au mouvement rectiligne uniforme dans la direction  $z$ , soit :

$$v_z = \mathbf{v}_{\parallel} = cste \quad (15a)$$

$$z = z_0 + \mathbf{v}_{\parallel}t \quad (15b)$$

Dans un plan perpendiculaire au champ magnétique, l'équation de mouvement est :

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \bar{\Omega}\mathbf{b} \wedge \mathbf{v}_{\perp} \quad (16)$$

avec  $\bar{\Omega}$  la valeur algébrique de la *fréquence cyclotronique* et  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}$  le vecteur unitaire dans la direction du champ magnétique. Par projection sur les axes, nous obtenons :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\bar{\Omega}v_y \quad (17a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \bar{\Omega}v_x \quad (17b)$$

En dérivant l'équation (16) par rapport au temps, nous obtenons l'équation de mouvement circulaire uniforme :

$$\frac{d^2\mathbf{v}_{\perp}}{dt^2} = -\bar{\Omega}^2\mathbf{v}_{\perp} \quad (18)$$

Nous en déduisons :

$$v_x = \mathbf{v}_\perp \cos(\bar{\Omega}t + \varphi) \quad (19a)$$

$$v_y = \mathbf{v}_\perp \sin(\bar{\Omega}t + \varphi) \quad (19b)$$

avec  $\varphi$  une phase arbitraire définie par les conditions initiales.

La position de la particule qui définit le point courant de l'hélice a donc pour coordonnées :

$$x = x_0 - \mathbf{v}_\perp \sin\varphi + \frac{\mathbf{v}_\perp}{\bar{\Omega}} \sin(\bar{\Omega}t + \varphi) \quad (20a)$$

$$y = y_0 + \mathbf{v}_\perp \cos\varphi - \frac{\mathbf{v}_\perp}{\bar{\Omega}} \cos(\bar{\Omega}t + \varphi) \quad (20b)$$

Les constantes  $x_0 - \mathbf{v}_\perp \sin\varphi$  et  $y_0 + \mathbf{v}_\perp \cos\varphi$  sont les coordonnées, dans le plan  $(x, y)$ , du centre de rotation, appelé aussi *centre guide*, avec  $x_0$  et  $y_0$  définissant la position de l'axe de rotation. Le module de  $\frac{\mathbf{v}_\perp}{\bar{\Omega}}$  est le rayon de l'hélice, appelé aussi le *rayon de giration* de la particule (ou encore *rayon cyclotron* et *rayon de Larmor*) et est noté  $r_L$ . Ces valeurs varient d'une particule à une autre. Ainsi, le nombre de particules, le rayon et le pas de l'hélice sont définis par une distribution statistique déterminée par les fonctions de distribution des vitesses ioniques et électroniques.

Par ailleurs, la vitesse instantanée de la particule en un point quelconque de cette trajectoire hélicoïdale, peut s'écrire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \bar{\Omega} \times \frac{\mathbf{v}_\perp}{\bar{\Omega}} \quad (21)$$

avec un angle d'inclinaison  $\theta$  défini par :

$$\tan\theta = \frac{\mathbf{v}_\parallel}{\mathbf{v}_\perp} \quad (22)$$

Le champ magnétique induit par la rotation des particules tend à diminuer le champ extérieur appliqué. Le plasma est donc un milieu diamagnétique qui a tendance à rejeter les flux magnétiques.

La figure 2 illustre le mouvement circulaire d'un électron autour d'un centre de rotation, qui se déplace à une vitesse constante parallèle à la direction du champ magnétique. La figure 3 nous donne la projection du mouvement de la particule sur un plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ .  $C$  représente le *centre guide*,  $M$  la position de la particule à l'instant  $t$  et  $M_0$  sa position initiale.

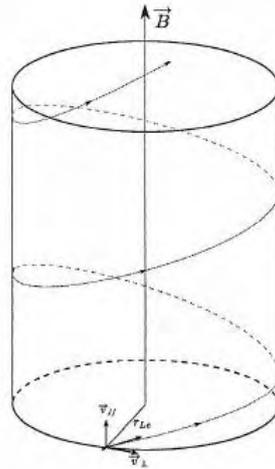


figure 2 – Trajectoire hélicoïdale d'un électron dans un champ magnétique uniforme.

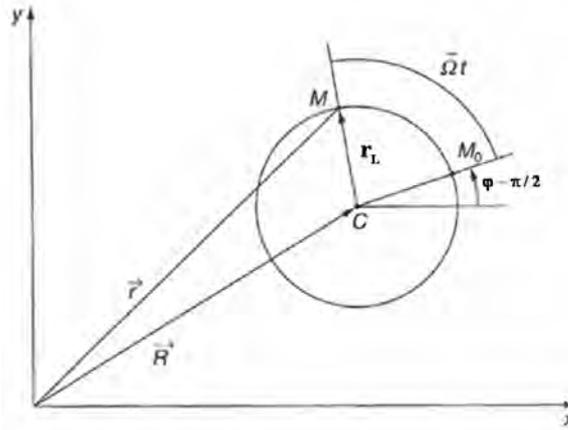


figure 3 – Projection du mouvement de la particule sur un plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ .

### Champs magnétique et électrique uniformes et constants : dérivate électrique

Dans le cas de champs magnétique et électrique uniformes et statiques, la particule est accélérée par l'équation (10) que nous pouvons reformuler :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{E} \quad (23)$$

Nous observons une équation différentielle avec un second membre ( $q\mathbf{E}$ ). Ainsi, l'équation (23) admet la solution :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (24)$$

où  $\mathbf{v}$  est la somme de la solution de l'équation homogène (sans second membre)  $\mathbf{v}_0$  et d'une solution particulière  $\mathbf{v}_1$ .

D'après la partie précédente,  $\mathbf{v}_0$  (obtenue en l'absence de champ électrique) est définie par :

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{||} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{\Omega} \quad (25)$$

Elle nous donne le mouvement hélicoïdal de la particule autour d'un axe parallèle à  $\mathbf{B}$  et varie en fonction de la particule. Déterminons maintenant le terme  $\mathbf{v}_1$ .

Dans l'équation (10), nous distinguons deux composantes du champ électrique  $\mathbf{E}$ , la composante  $\mathbf{E}_{\parallel}$  qui est dirigée le long de  $\mathbf{B}$  et la composante  $\mathbf{E}_{\perp}$  perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ .

Par projection de l'équation (23) sur la direction de  $\mathbf{B}$ , il vient :

$$\mathbf{v}_{1\parallel} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\parallel} t \quad (26)$$

$\mathbf{E}_{\parallel}$  produit ainsi un mouvement rectiligne uniformément accéléré parallèle au champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Les ions se déplacent dans le sens de  $\mathbf{E}_{\parallel}$  et les électrons dans le sens opposé.

La projection de l'équation (23) sur un plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  nous donne la solution suivante :

$$\mathbf{v}_{1\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (27)$$

Cette vitesse est indépendante de la charge et de la masse de la particule considérée. Par conséquent, elle représente le mouvement d'ensemble du plasma et elle est la même pour toutes les particules. Elle se nomme la *vitesse de dérive électrique* et est souvent notée  $\mathbf{v}_E$ .

La trajectoire de la particule, dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ , est le résultat d'une somme du mouvement de translation de vitesse  $\mathbf{v}_E$  et de celui de rotation de vitesse  $\Omega \times \frac{v_{\perp}}{\Omega}$ . Il s'agit d'une cycloïde. Avec une vitesse initialement nulle, les ions partent dans la direction du champ électrique  $\mathbf{E}_{\perp}$ , puis sous l'effet du champ magnétique leurs trajectoires vont décrire des arcs de cycloïde (figure 4). Les électrons partent dans le sens inverse mais leurs courbures des arcs sont aussi inversées ; ce qui explique que le mouvement des électrons s'effectue dans le même sens que celui des ions.

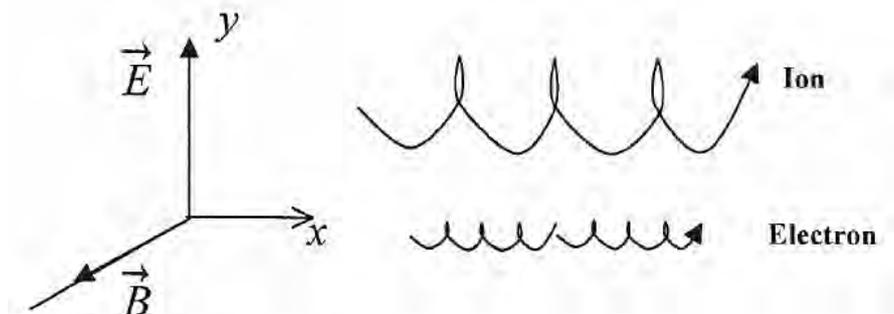


figure 4 – Trajectoires d'un électron et d'un ion avec une vitesse initiale nulle.

### Champ magnétique statique non uniforme

Plaçons nous dans le cas d'un plasma soumis à un champ magnétique statique et non uniforme. Dans ce cas, les particules dérivent légèrement à cause de la non

uniformité du champ magnétique et les lignes d'induction du champ magnétique présentent une certaine courbure (figure 5). La vitesse d'une particule peut ainsi se décomposer en trois composantes :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_d \quad (28)$$

Les deux premières composantes représentent le caractère hélicoïdal de la trajectoire de la particule autour de la ligne de force. La particule se déplace autour du *centre guide*  $C$  d'un plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  avec la vitesse  $\mathbf{v}_{\perp}$ .  $C$  va alors se déplacer le long de la ligne de force à la vitesse  $\mathbf{v}_{\parallel}$ . La dernière composante désigne le mouvement de dérive du *centre guide*, qui est perpendiculaire aux lignes de force. Nous pouvons décomposer également cette dernière vitesse en deux composantes :

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_c \quad (29)$$

où  $\mathbf{v}_g$  désigne la vitesse de *dérive de gradient* et  $\mathbf{v}_c$  celle de *dérive de courbure* du champ magnétique.

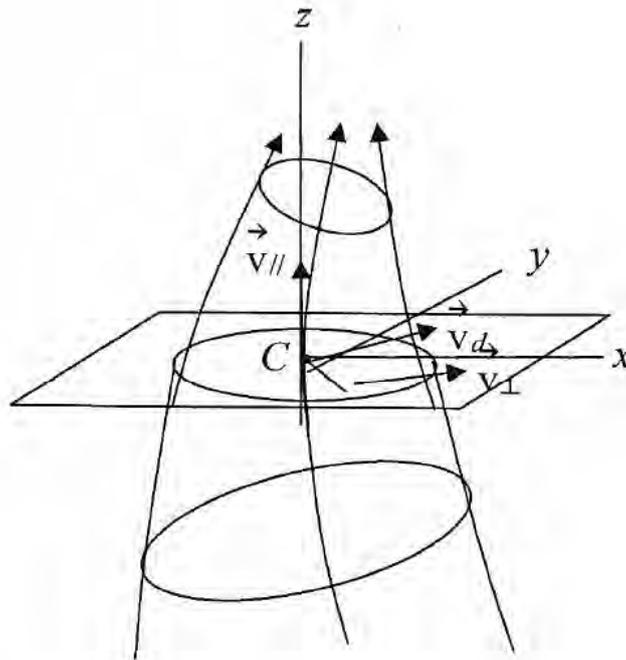


figure 5 – Orbites adiabatiques : mouvement d'une particule dans un champ magnétique non uniforme.

### Champ magnétique variable

Dans le cas d'un champ magnétique variable en temps ou en espace, la forme hélicoïdale de la trajectoire d'une particule se déforme lentement à cause des variations du champ magnétique. On parle de déformation adiabatique. Cette déformation adiabatique des orbites hélicoïdales s'accompagne de dérives perpendiculaires à  $\mathbf{B}$  : dérive électrique comme dans le champ magnétique uniforme mais aussi dérives de "courbure" et de "gradient". Il est très difficile, voir impossible d'évaluer les trajectoires des particules autrement qu'avec des méthodes numériques. Cependant, une théorie sur les trajectoires dans des champs presque uniformes et presque statiques a été proposée dans [Delcroix et Bers (1994)].

## Etude de sources Micro-ondes de Forte Puissance (MFP)

Dans le cadre de cette thèse, nous étudions des sources Micro-ondes de Forte Puissance (MFP) comme nous les avons présentées dans l'introduction. Le principe des sources MFP consiste à "envoyer" une source d'énergie électrique pulsée générée à partir d'un déplacement de particules. Dans nos simulations, nous nous sommes uniquement intéressés à des dispositifs coaxiaux, et en particulier à la ligne coaxiale et la diode. Dans l'ensemble de ces deux dispositifs, nous avons une cathode et une anode entre lesquelles nous imposons une tension élevée pour créer un phénomène de claquage et la propagation de particules dans le milieu inter électrodes. Grâce à cette propagation, nous générons ainsi des champs de type MFP. Nous renvoyons le lecteur aux chapitres 2 et 4 de la première partie de ce mémoire, où nous détaillons ces deux cas de configurations.

## MODÉLISATION DES PLASMAS

Comme nous l'avons décrit précédemment les plasmas sont très diversifiés de part la nature de leurs paramètres (densité, température...). Par conséquent, les théories et les modèles décrivant chaque nature de plasma sont également variés. De part la présence des plasmas dans l'Univers et de leur utilisation dans la vie quotidienne de l'Homme, la recherche en physique des plasmas reste très importante et s'est accélérée au cours du  $XX^{\text{ième}}$  siècle. Cependant, sa production coûte cher, demandant de nombreux moyens notamment en terme de ressources financières et de locaux adaptés. C'est pour cela que la modélisation des plasmas s'est développée considérablement et apporte un grand intérêt à la recherche scientifique dans ce domaine. L'étude des plasmas peut être abordée à différentes échelles. Il existe, à ce jour, trois types d'échelles :

- l'échelle microscopique : il s'agit de l'étude du mouvement individuel de chaque particule, régi par la loi de Newton. Ce modèle est limité en raison du nombre considérable de particules définissant un plasma.
- l'échelle mésoscopique ou cinétique : il s'agit de décrire l'évolution de la fonction de distribution de chaque espèce de particules dans l'espace des phases (i.e. positions et vitesses). Dans ce cas, seule l'interaction entre les particules et les champs électromagnétiques est prise en compte pour évaluer la position et la vitesse de celles-ci. Contrairement à l'échelle microscopique, nous étudions l'évolution d'un ensemble de particules appelés macro-particules.
- l'échelle macroscopique : le plasma est décrit sous la forme d'un fluide. L'étude du plasma se fait par les équations de la magnétohydrodynamique (MHD). Les seuls paramètres du plasma intervenant dans ces équations sont sa densité, sa vitesse moyenne et sa température.

Dans notre cas, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique des plasmas à l'échelle cinétique. A cette échelle, chaque macro-particule possède une masse, une vitesse et une charge et vérifie l'équation de Vlasov qui détermine la position de la particule en fonction du champ régi par la force de Lorentz et des probabilités de collisions dans le plasma. Dans un tel modèle, les champs électromagnétiques sont résolus par les équations de Maxwell et un couplage entre macro-particules et champs se fait par les forces de Lorentz et le courant généré par

le déplacement des particules chargées.

Dans la littérature, il existe différents types d'approximation numérique de l'équation de Vlasov, couplée non linéairement aux équations de Maxwell. Les méthodes utilisées sont les méthodes particulières, les méthodes spectrales basées sur des développements de Fourier [Klimas et Farrell (1987), Klimas et Farrell (1994)] et parfois de Hermite [Holloway (1996)] de la fonction de distribution et les méthodes utilisant un maillage de l'espace des phases. Dans les méthodes particulières, nous avons la méthode *Particle-In-Cell* (PIC), appelée aussi méthode lagrangienne [Birdsall et Langdon (1991), Hockney et Eastwood (1988)] et la méthode de type *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH) [Bateson et Hewett (1998)]. La méthode PIC date des années 1950 [Dawson (1962), Buneman (1959)] et a été formalisée dans les années 1970. Cette méthode, très utilisée, consiste à remplacer l'équation de Vlasov par les équations de mouvement. Une variante de la méthode PIC, appelée méthode  $\delta f$ , est aussi utilisée, en particulier quand la physique étudiée est proche d'un état d'équilibre. Le principe de cette méthode est de développer la fonction de distribution au voisinage d'un équilibre connu ( $f_0$ ) en  $f = f_0 + \delta f$  et d'approximer uniquement la partie  $\delta f$  par une méthode PIC. La méthode SPH consiste, quant à elle, à considérer un nombre limité de particules de forme gaussienne dont les caractéristiques peuvent varier et qui interagissent les unes avec les autres. Une autre méthode particulière, similaire à la méthode SPH, a été introduite par Bateson et Hewett [Bateson et Hewett (1998)], dans laquelle ils font évoluer un nombre relativement faible de macro-particules de forme gaussienne. Dans la méthode spectrale, appelée aussi méthode *splitting* d'opérateurs, l'équation de Vlasov se décompose en deux parties, en raison de la présence de deux champs d'advection indépendants l'un de l'autre. Enfin, les méthodes utilisant un maillage de l'espace des phases, plus connues sous le nom de méthodes semi-lagrangiennes, existent sous différentes formes, les formes en avant [Denavit (1972)], en arrière [Cheng et Knorr (1976), Sonnendrücker et al. (1998)], volumique [Boris et Book (1976), Filbet et al. (2001)] et conservative [Filbet et Sonnendrücker (2003)]. Les méthodes semi-lagrangiennes permettent de résoudre directement le système couplé Maxwell-Vlasov. Elles ont l'avantage de combiner à la fois les méthodes PIC et les méthodes eulériennes ; en effet le traitement de l'équation de Vlasov est basé sur le fait que ses caractéristiques passe toujours sur une grille fixe eulérienne dans l'espace des phases. Cependant, ces méthodes sont coûteuses car elles se font sur un maillage de l'espace des phases, d'où leur utilisation actuelle sur des dimensions réduites 1D et 2D. Elles sont plus précises mais nécessitent une parallélisation des solveurs [Sonnendrücker et al. (1998)].

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de développer la méthode PIC dans le solveur électromagnétique de l'ONERA. Ce choix s'explique, d'une part, par le fait que la méthode PIC est l'une des plus anciennes méthodes mais aussi la plus utilisée de nos jours. D'autre part, les configurations de simulations que nous allons traiter sont des sources MFP portant des structures métalliques dans lesquelles des particules chargées se déplacent en présence de champs électromagnétiques de forte intensité. Ainsi, dans ce type de configurations, les phénomènes de collision et d'émission secondaire peuvent être négligés. Toutes ces raisons nous ont orientées vers l'étude de mouvement de chaque macro-particule dans le plasma et non à la résolution directe de l'équation de Vlasov.



**Première partie**

**Le couplage des équations  
Maxwell-Vlasov**



# ÉTAT DE L'ART DES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR RÉSOUDRE LE SYSTÈME MAXWELL-VLASOV

1

Pour un plasma peu dense, la résolution des équations de Maxwell-Vlasov s'effectue à l'aide d'une méthode PIC. Cette méthode peut être vue comme la résolution de deux problèmes couplés : un problème de Maxwell et un problème de transport de particules. La résolution du problème de Maxwell implique un maillage d'un domaine de calcul et la définition de degrés de liberté sur ce même maillage. En revanche, le problème de transport consiste à suivre des particules le long des caractéristiques de l'équation de Vlasov, et par conséquent, ne demande ni maillages ni degrés de liberté, mais seulement à connaître les positions et les vitesses de particules.

La résolution des équations de Maxwell-Vlasov a fait l'objet de nombreuses recherches, dans la littérature. Dans ces différentes techniques, nous pouvons classer chacune d'entre elles en fonction du solveur Maxwell utilisé. En effet, il existe des méthodes de type Différences Finies, mais aussi les méthodes Eléments Finis et Volumes Finis, voire plus récemment, les méthodes Galerkin Discontinues. Dans ce chapitre, nous allons faire un bref rappel, certainement non exhaustif, des différentes techniques existantes.

## **Méthodes basées sur des approches Différences Finies**

Les méthodes les plus utilisées encore de nos jours sont des méthodes basées sur un schéma Différences Finies, plus précisément sur le schéma de Yee, proposé dans les années 60 [Yee (1966)]. Notamment, de nombreux codes commerciaux, comme MAGIC (ATK), CST (MICROWAVE STUDIO/PARTICLE STUDIO) (Computer Simulation Technology) et QuickSilver (SANDIA National Laboratories), ont été développés à partir de ce schéma. Cette méthode a aussi été largement décrite dans l'ouvrage de Birdsall et Langdon [Birdsall et Langdon (1991)].

La particularité du schéma de Yee est l'utilisation des maillages structurés et orthogonaux ; ce qui facilite énormément la recherche des positions des particules dans le maillage. Celui-ci est basé sur une approximation de type Leap-frog ou saute-mouton en temps et en espace. Ainsi, le schéma est un schéma explicite d'ordre deux en temps et en espace. Sa facilité d'utilisation et de mise en œuvre en font aussi un schéma très populaire. Cependant, cette méthode souffre d'un certain nombre de problèmes. Le maillage autour des surfaces des objets en marches

d'escalier entraîne l'apparition d'ondes parasites qui détériorent la solution [Cangelaris et Wright (1991)]. Ceci peut être un inconvénient majeur pour les géométries que nous devons simuler. En effet, ces configurations sont des objets de structures complexes qui possèdent des frontières courbes. De plus, avec le schéma de Yee, les ondes de l'ordre de la maille se propagent à une vitesse plus lente que celle de la lumière. Ce phénomène dispersif reste un problème en soit pour notre système où les particules peuvent se propager plus rapidement que la vitesse de la lumière. Cet effet numérique et non physique, connu sous le nom d'effet Cerenkov, engendre des instabilités dans les simulations PIC. Dans [Assous et al. (1996)], une analyse linéaire a mis en évidence cette instabilité due aux interactions non linéaires entre les particules et les champs. Pour éviter ces problèmes, il est nécessaire de limiter le phénomène de dispersion lié au calcul des champs. Pour cela, il faut, soit modifier la discrétisation [Greenwood et al. (2004)], soit se baser sur un autre schéma numérique pour résoudre les équations de Maxwell.

### **Méthodes basées sur des approches Volumes Finis**

Un autre schéma, assez courant, pour la résolution des équations de Maxwell est la méthode de Volumes Finis [Remaki (1999), Bonnet (1998)]. L'intérêt de cette méthode est d'utiliser des maillages non structurés permettant de mieux décrire les frontières des objets. De plus, les formulations Volumes Finis décentrées permettent de limiter l'erreur numérique liée au phénomène de dispersion. Avec ce type d'approche, nous pouvons aussi obtenir des schémas d'ordre 2 en temps et en espace. Concernant la résolution du système de Maxwell-Vlasov, nous pouvons citer les travaux de Hermeline et de Cioni. Dans [Hermeline (1993)], les auteurs utilisent un schéma Volumes Finis, que l'on peut voir comme une extension du schéma de Yee pour des maillages non cartésiens. Cette méthode nécessite l'utilisation de maillages de type Delaunay-Voronoi (maillages primal et dual) dans lesquels les normales aux faces du maillage primal sont colinéaires aux arêtes du maillage dual. Les sommets du maillage dual sont les intersections des médiatrices du maillage primal. Cette contrainte sur le maillage rend l'utilisation de cette méthode difficile. Quant à la solution proposée par Cioni, aucune contrainte sur le maillage n'est nécessaire [Issautier et al. (1995)]. En effet, les inconnues des champs électrique et magnétique sont calculées au centre des cellules en tenant compte des flux qui traversent les frontières de celles-ci. Cette méthode s'apparente plus à une méthode de mécanique des fluides.

### **Méthodes basées sur des approches Eléments Finis**

Il existe aussi une littérature sur la méthode des Eléments Finis pour résoudre les équations de Maxwell-Vlasov. En particulier, différentes méthodes des Eléments Finis ont été développées pour les équations de Maxwell puis appliquées pour le système de Maxwell-Vlasov. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer les travaux d'Assous [Assous et al. (1993)] et de Raviart [Nedelec (1980), Raviart et Thomas (1977)]. Nous retrouvons une grande partie de ces travaux dans le développement des méthodes PIC pour le CEA. En particulier, ces études ont permis le développement du code PALAS.

## Méthodes basées sur des approches Galerkin discontinues

Plus récemment, de nouvelles méthodes basées sur des schémas de type Galerkin Discontinus sont apparues pour résoudre les équations de Maxwell [Cohen et al. (2006), Canouet et al. (2005), Hesthaven et Warburton (2000)]. Ces méthodes ont l'avantage de réduire les erreurs numériques de dissipation et de dispersion, grâce à l'utilisation d'approximations spatiales d'ordre élevé dans chaque cellule. Ainsi, nous pouvons obtenir des solutions très précises avec une discrétisation spatiale importante (mailles supérieures à  $\lambda/10$ ). De plus, ces méthodes permettent l'utilisation de maillages quelconques (cartésiens ou non structurés) qui évitent d'introduire un nombre important de mailles pour prendre en compte les géométries courbes. La mise en œuvre de ces schémas GD dans la méthode PIC font l'objet de travaux très actuels. Nous pouvons citer, essentiellement, les travaux menés aux Etats-Unis par Hesthaven et Jacobs [Jacobs et Hesthaven (2006)] ainsi qu'en France, avec le projet HOUPIC, regroupant principalement l'IRMA, l'INRIA Sophia-Antipolis et le CEA et le projet NADEGE dans lequel ces travaux de thèse ont été menés.



# FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME PHYSIQUE : LE SYSTÈME MAXWELL-VLASOV

## SOMMAIRE

2.1	PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU SYSTÈME MAXWELL-VLASOV . . . . .	27
2.1.1	Les équations de Maxwell et de Vlasov . . . . .	27
2.1.2	Existence de solutions pour le système Maxwell-Vlasov . . . . .	29
2.2	RÉSOLUTION DU SYSTÈME PAR UNE MÉTHODE PARTICULAIRE : MÉTHODE <i>Particle In Cell</i> (PIC) . . . . .	31
2.2.1	Le principe de la méthode PIC . . . . .	31
2.2.2	Les étapes d'interpolation . . . . .	32
2.3	VÉRIFICATION DE LA LOI DE GAUSS : INTRODUCTION D'UN TERME COR- RECTEUR . . . . .	33
2.3.1	Correction de Boris . . . . .	34
2.3.2	Correction de Marder/Langdon . . . . .	35
2.3.3	Correction hyperbolique . . . . .	35
2.3.4	Généralisation . . . . .	35

**D**ANS ce chapitre, nous présentons de façon succincte les différentes équations qui permettent la modélisation des interactions entre les micro-ondes et le plasma. Les phénomènes électromagnétiques sont donnés par les équations de Maxwell tandis que le plasma est régi par l'équation de Vlasov qui décrit l'évolution des flots de particules chargées présents dans le plasma. Nous faisons également un rappel de quelques propriétés et de l'existence de solutions pour le système Maxwell-Vlasov. Ensuite, nous étudions la résolution numérique du système par une méthode *Particle-In-Cell*, actuellement un des outils le plus répandu pour simuler l'interaction plasma/micro-ondes. Néanmoins, cette méthode engendre un problème de conservation de la charge qui peut être résolu de diverses façons. Nous nous employons donc à faire un état de l'art des différentes méthodes existantes pour remédier à ce problème numérique et, à partir de cette riche littérature, nous choisissons de corriger le champ électrique par l'introduction d'un terme correcteur.



## 2.1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU SYSTÈME MAXWELL-VLASOV

### 2.1.1 Les équations de Maxwell et de Vlasov

Le modèle cinétique fait intervenir la fonction de distribution de chaque espèce de particules. En présence de champs électromagnétiques et de collisions coulombiennes (interactions binaires entre particules proches dominantes), l'évolution de cette fonction est régie par l'équation de Boltzmann qui s'écrit pour chaque espèce  $s$  de particules :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_s + q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{f}_s = \frac{d\mathbf{f}_s}{dt} |_{\text{collisions}} \quad (\text{I.2.1})$$

où  $\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_s(p_x, p_y, p_z, x, y, z, t)$  est la fonction de distribution des particules d'une espèce donnée  $s$ , de charge  $q$  et  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  est le champ électromagnétique. La fonction  $\mathbf{f}_s$  dépend de la position  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , de l'impulsion  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  et du temps  $t \in \mathbb{R}$ . L'impulsion  $\mathbf{p}$  dépend de la vitesse  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \quad (\text{I.2.2})$$

avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}}{c})^2}} = \sqrt{1 + (\frac{\mathbf{p}}{mc})^2}$  dans le cas relativiste,  $c$  étant la vitesse de la lumière,  $m$  la masse et  $\gamma = 1$  dans le cas non relativiste.

En négligeant le terme de collision, nous obtenons l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_s + q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{f}_s = 0 \quad (\text{I.2.3})$$

qui se réécrit dans le cas non relativiste :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{I.2.4})$$

Cette équation caractérise l'évolution de la distribution des particules d'un plasma non collisionnel dans l'espace des phases (i.e. des positions et des vitesses). Par ailleurs, la quantité  $\int_V \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$  est le nombre moyen de particules de l'espèce donnée dans le volume  $V$  de l'espace des phases au temps  $t$ . C'est cette équation (I.2.4) que nous allons étudier par la suite pour modéliser le plasma qui nous intéresse.

Les phénomènes électromagnétiques sont, quant à eux, décrits par les quatre champs vectoriels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) : \text{champ électrique en volt par mètre (V} \cdot \text{m}^{-1}\text{)} \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) : \text{induction électrique en coulomb par mètre carré (C} \cdot \text{m}^{-2}\text{)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) : \text{champ magnétique en ampère par mètre (A} \cdot \text{m}^{-1}\text{)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) : \text{induction magnétique en tesla (T)} \end{array} \right. \quad (\text{I.2.5})$$

Ces différentes grandeurs sont engendrées par les particules chargées et elles véri-

fient les équations de Maxwell données par :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (\text{I.2.6a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} = 0 \quad (\text{loi d'Ampère}) \quad (\text{I.2.6b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{loi de Gauss électrique}) \quad (\text{I.2.6c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}) \quad (\text{I.2.6d})$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  et  $\rho(\mathbf{x}, t)$  représentent les densités de courant électrique (en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ) et de charges (en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

De ces équations, en dérivant (I.2.6c) par rapport au temps et en prenant la divergence de (I.2.6b), nous montrons que les deux dernières quantités,  $\mathbf{J}$  et  $\rho$ , satisfont l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{I.2.7})$$

Cette équation est généralement connue sous le nom d'équation de conservation de la charge.

Par ailleurs, en prenant en compte le comportement des matériaux qui constituent notre milieu étudié, nous pouvons relier les champs aux inductions. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à des milieux diélectriques parfaits et des milieux conducteurs. D'une part, les milieux diélectriques parfaits qui sont des milieux linéaires, homogènes et isotropes sont caractérisés par deux tenseurs symétriques définis positifs  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  et  $\underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x})$ , tels que :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2.8a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2.8b})$$

avec  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  le tenseur de permittivité électrique (en  $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et  $\underline{\underline{\mu}}$  le tenseur de perméabilité magnétique (en  $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ ) du milieu.

Dans le vide, nous avons les relations suivantes :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \quad (\text{I.2.9a})$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 \quad (\text{I.2.9b})$$

Ces paramètres vérifient également :

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (\text{I.2.10a})$$

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{F} \cdot \text{m}^{-1} \quad (\text{I.2.10b})$$

avec  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  la vitesse de la lumière dans le vide.

D'autre part, pour les milieux conducteurs, la densité de courant électrique  $\mathbf{J}$  se décompose en deux densités, la densité de courant dans la matière, notée  $\mathbf{J}'$ , et la densité de courant source, notée  $\mathbf{J}_s$  :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}_s \quad (\text{I.2.11})$$

**Remarque 2**  $\mathbf{J}_s$  sera la densité de courant engendrée par les particules du plasma et  $\mathbf{J}'$  peut être considérée comme une densité de courant créée dans la matière par le champ électromagnétique.

Dans un milieu conducteur, la densité de courant dans la matière  $\mathbf{J}'$  correspond au courant de conduction dû au mouvement des électrons libres dans le matériau. Cette quantité vérifie la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}'(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2.12})$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un tenseur symétrique défini positif, appelé tenseur de conductivité dont l'unité est le Siesmens par mètre ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

D'autre part, nous pouvons définir les densités de courant  $\mathbf{J}_s$  et de charge  $\rho$  engendrées par les particules chargées telles que :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \int_{\mathbb{R}^3} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (\text{I.2.13a})$$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (\text{I.2.13b})$$

$f_s$  étant la fonction de distribution des particules de l'espèce  $s$ . Par la suite, nous simplifierons par le cas d'une seule espèce.

Le système complet Maxwell-Vlasov s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.2.14a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_s = 0 \quad (\text{I.2.14b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{I.2.14c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.2.14d})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{I.2.14e})$$

### 2.1.2 Existence de solutions pour le système Maxwell-Vlasov

Au cours du  $XX^{\text{ième}}$  siècle, de nombreuses personnes se sont intéressées à l'existence des solutions pour le système Maxwell-Vlasov.

En 1988, DiPerna et Lions ont montré la conservation d'une quantité (énergie) pour tout  $(\mathbf{f}_s, \mathbf{E}, \mathbf{H})$ , solution du système Maxwell-Vlasov [DiPerna et Lions (1988)]. Dans le cas non relativiste, cette énergie, notée  $\mathcal{E}$ , est donnée par :

$$\mathcal{E}(t) = m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)|^2) d\mathbf{x} \quad (\text{I.2.15})$$

où  $\Omega$  définit le domaine de calcul.

Dans le cas non relativiste, en 1989, DiPerna et Lions ont montré l'existence globale de solutions faibles du système Maxwell-Vlasov 3D [DiPerna et Lions (1989)] :

**Théorème 1** Soit  $\mathbf{f}_0$  positive et dans  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  et supposons que  $\mathbf{f}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  vérifient :

$$\int \int |\mathbf{v}|^2 \mathbf{f}_0 d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}_0|^2 + |\mathbf{B}_0|^2) d\mathbf{x} < +\infty$$

alors le système Vlasov-Maxwell admet une solution faible  $\mathbf{f} \in C^0(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - \omega^*)$  et  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3) - \omega)$ .

Notons que les fonctions sont limites de fonctions convergeant faiblement (pour  $-\omega$ ), respectivement faiblement  $*$  (pour  $-\omega^*$ ) dans les espaces introduits ci-dessus.

Dans les cas relativiste et non relativiste, Guo démontra aussi, en 1993, l'existence globale de solutions faibles au système Maxwell-Vlasov avec des conditions aux limites [Guo (1993)].

Par ailleurs, l'existence et l'unicité locales de solutions régulières du système Maxwell-Vlasov ont été démontrées dans le cas 1D par Cooper et Klimas en 1960 [Cooper et Klimas (1980)], puis dans le cas 1D<sub>1/2</sub> par Neunzert et Petry [Neunzert et Petry (1980)] et enfin en 3D par Wollman en 1984 [Wollman (1984)].

Dans le cas relativiste, DiPerna et Lions ont donné une démonstration d'existence globale de solutions faibles similaire à celle dans le cas non relativiste. Et en 2004, Rein proposa une simplification de cette démonstration [Rein (2004)]. Cependant, le problème d'unicité de ces solutions faibles reste encore d'actualité.

Glassey et Strauss ont démontré en 1986 l'existence et l'unicité locales de solutions pour des données régulières et à support compact et celles de solutions globales avec un support contrôlé à un moment [Glassey et Strauss (1986)] :

**Théorème 2** Soient les données initiales  $\mathbf{f}_0 \geq 0, \mathbf{f}_0 \in C^1_0$  et  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \in C^2$ .

On fait l'estimation à priori suivante sur l'approximation ou la solution : il existe une fonction continue  $\beta(t)$  telle que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{v}| > \beta(t)$$

alors le système Vlasov-Maxwell admet une unique solution  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$  et  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ .

Cette condition s'étendra plus tard pour des données générales et en dimension inférieure [Schaeffer et Glassey (1990)].

En 2002, Klainerman et Staffilani ont repris la démonstration de Glassey et Strauss en utilisant la transformée de Fourier [Klainerman et Staffilani (2002)] :

**Théorème 3** Soient les données initiales  $\mathbf{f}_0 \geq 0, \mathbf{f}_0 \in C^1_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \in C^1$  et que pour tout  $T > 0$ , on ait :

$$\|(\mathbf{E}, \mathbf{B})\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)} \leq C$$

alors le système Vlasov-Maxwell admet une solution unique  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$  et  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

## 2.2 RÉOLUTION DU SYSTÈME PAR UNE MÉTHODE PARTICULAIRE : MÉTHODE *Particle In Cell* (PIC)

### 2.2.1 Le principe de la méthode PIC

Rappelons l'équation de Vlasov dans le cas non relativiste et non collisionnel :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{I.2.16})$$

Posons les relations suivantes :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{v} \quad (\text{I.2.17a})$$

$$d\mathbf{V} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{I.2.17b})$$

$$dt = 1 \quad (\text{I.2.17c})$$

avec  $\mathbf{X} = \mathbf{x} = (x, y, z)$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . En appliquant ces relations, l'équation (I.2.16) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{V} = 0 \quad (\text{I.2.18})$$

Nous en déduisons que  $d\mathbf{f} = 0$ . Par conséquent, la fonction de distribution  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est constante sur l'ensemble des points  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  vérifiant les relations (I.2.17). Nous définissons alors les courbes caractéristiques de l'équation de Vlasov par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v} \quad (\text{I.2.19a})$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{I.2.19b})$$

où  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est constante.

La fonction de distribution  $\mathbf{f}$  est constante le long de ces caractéristiques que l'on appelle encore équations de mouvement.

Pour résoudre le système Maxwell-Vlasov, nous allons utiliser une méthode particulière, dite méthode *Particle-In-Cell* (PIC). Cette méthode nous permet ainsi d'étudier et de simuler les plasmas à l'échelle cinétique ; l'évolution et l'interaction des particules avec les champs électromagnétiques sont prises en compte de manière détaillée. Dans cette méthode, l'équation de Vlasov est alors remplacée par les équations de mouvement d'un ensemble de particules, appelé macro-particules :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad (\text{I.2.20a})$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{I.2.20b})$$

Dans ces équations, il apparaît que le champ électromagnétique agit sur les particules. Ce champ est solution des équations de Maxwell (I.2.6) qui peuvent être résolues par une des méthodes numériques telle que la méthode de différences finies (FDTD), de volumes finis (FVTD) ou encore la méthode de Galerkin Discontinu (GD). Le principal schéma numérique que nous avons étudié est la méthode GD et il sera détaillé dans le chapitre suivant.

Par ailleurs, les champs sont définis sur un maillage de l'espace physique tandis que les particules ont une position dans ce même maillage. Il est donc nécessaire de faire des interpolations entre les positions des particules et les champs (maillage) afin de mettre en relation les équations entre elles.

Il nous faut donc interpoler le champ électromagnétique aux positions des particules afin de faire avancer les particules par la résolution des équations de mouvement (I.2.20). Une fois les nouvelles positions et vitesses des particules connues, nous pouvons calculer les densités de courant et de charge créées par le déplacement des particules. Nous remettons, alors, à jour le champ électromagnétique à l'aide de ces densités. Une seconde étape d'interpolation est donc nécessaire mais cette fois-ci des positions des particules sur la grille.

Les densités de courant interpolées sur la grille et définissant les termes sources des équations de Maxwell, nous pouvons à nouveau calculer les champs à l'étape suivante.

Ces différentes étapes constituent le principe de la méthode *Particle In Cell* (PIC), que l'on peut schématiser comme cela est illustré dans la figure I.2.1.

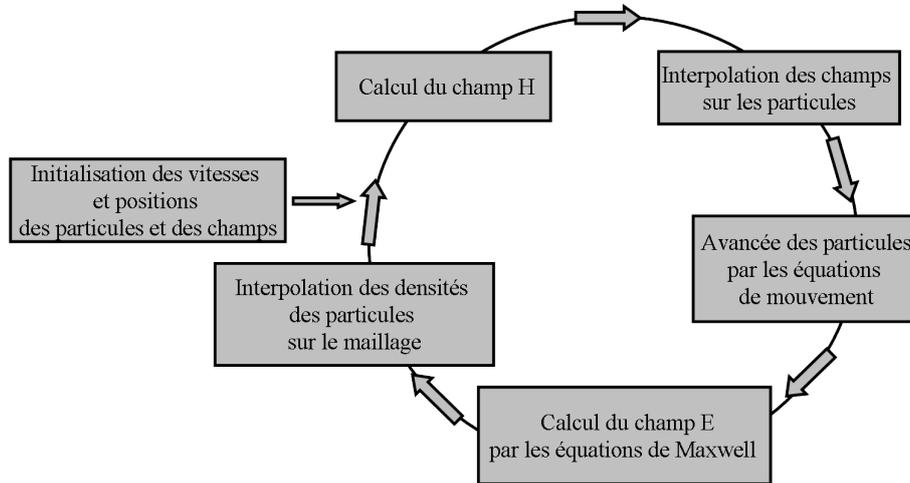


figure I.2.1 – Principe de la méthode PIC.

### 2.2.2 Les étapes d'interpolation

Dans le principe de la méthode PIC, deux étapes d'interpolation *Champ / Particules* apparaissent.

- Interpolation des particules vers le maillage : elle permet de répartir les densités de courant et de charge dues aux déplacements des particules sur les nœuds du maillage. Pour cela, nous définissons pour chaque particule  $k$ , une fonction de forme  $S_k$  déterminant l'influence de la particule dans le maillage. Cette fonction est comprise entre 0 et 1. Pour chaque nœud  $X_i$ , nous pouvons alors évaluer les densités de charge et courant données par :

$$\rho_i = \sum_{k=1}^N \omega_k q_k S_k(X_i - x_k) \quad (\text{I.2.21a})$$

$$\mathbf{J}_i = \sum_{k=1}^N \omega_k q_k v_k S_k(X_i - x_k) \quad (\text{I.2.21b})$$

$N$ ,  $\omega_k$  et  $q_k$  représentent, respectivement, le nombre de particules, le poids et la charge associés à la particule  $k$ .  $x_k$  est la position de la particule  $k$ .

- Interpolation du maillage vers les particules : l'objectif est de déterminer les champs électromagnétiques qui agissent sur chaque particule  $k$ , en fonction des champs qui se trouvent sur la grille.

$$\mathbf{E}_k = \sum_{i(\text{nœud})} \mathbf{E}_i S_k(X_i - x_k) \quad (\text{I.2.22a})$$

$$\mathbf{H}_k = \sum_{i(\text{nœud})} \mathbf{H}_i S_k(X_i - x_k) \quad (\text{I.2.22b})$$

Pour des maillages cartésiens uniformes et dans le cadre d'une approche FDTD, les fonctions de forme utilisées sont généralement obtenues par produit tensoriel de fonctions de forme unidimensionnelles. Ces fonctions de forme unidimensionnelles sont des fonctions splines d'ordre  $m$  définies à partir de la fonction spline d'ordre 0 par  $m + 1$  convolutions [Barthelmé (2005)].

**Remarque 3** *Hockney et Eastwood montrent qu'il est important et nécessaire d'utiliser la même fonction de forme pour ces deux interpolations afin d'éviter la présence de "self forces" non physiques [Hockney et Eastwood (1988)].*

La fonction spline d'ordre 0 consiste à affecter la charge de la particule à un seul nœud du maillage, soit le nœud le plus proche de la position de la particule. Cette approche est aussi appelée méthode *Nearest Grid Point* (NGP).

Quant à la fonction spline d'ordre 1, elle permet d'affecter la charge aux huit nœuds en 3 dimensions (aux quatre nœuds en 2 dimensions) les plus proches, soit la maille où se trouve la particule. Il s'agit de la méthode *Cloud In Cell* (CIC).

Les approches NGP et CIC ont été introduites dans le formalisme GD en utilisant d'autres fonctions de forme. Elles seront détaillées dans le prochain chapitre.

## 2.3 VÉRIFICATION DE LA LOI DE GAUSS : INTRODUCTION D'UN TERME CORRECTEUR

Lors du calcul des densités de courant et de charge par la méthode PIC, l'équation de conservation de la charge (I.2.7) discrétisée n'est pas satisfaite. Ceci entraîne une solution numérique déduite des équations d'Ampère (I.2.6b) et de Faraday (I.2.6a) qui ne vérifie pas la contrainte de la divergence du champ électrique.

Pour remédier à ce problème numérique, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Une première solution envisagée est d'effectuer une correction sur le champ électrique à chaque itération de calcul ou régulièrement après un certain nombre d'itérations. Une seconde solution consiste à appliquer des méthodes de calcul du courant conservant la charge. Ces dernières méthodes permettent de calculer précisément les densités de courant et de charge et donc, d'assurer l'équation discrète de conservation de la charge. Par conséquent, elles évitent l'utilisation d'un terme correcteur pour le calcul du champ électrique. Ici, le calcul de la densité de charge  $\rho$  se fait par l'utilisation de produits tensoriels de splines comme fonctions de forme. Il existe plusieurs méthodes, basées sur des approches FDTD, auxquelles nous ne nous sommes pas intéressés dans le cadre de cette thèse mais que nous rappelons brièvement.

- **Méthode de Villasenor-Buneman**  
Buneman a proposé en 1968 une méthode de répartition de charge de type NGP (ordre 0). Mais cette première solution souffre d'un grand bruit numérique. En 1971, Morse et Nielson ont décidé alors de considérer une répartition de charge par une méthode CIC (ordre 1) et ont introduit une décomposition de la trajectoire des particules en deux mouvements orthogonaux. La méthode de Villasenor-Buneman n'est valable que pour des facteurs de forme splines d'ordre 1 sur des maillages cartésiens uniformes [Villasenor et Buneman (1992)]. Dans la thèse de R. Barthelmé, cette méthode est étendue à des facteurs de forme d'ordre supérieur sur des maillages non uniformes [Barthelmé (2005)].
- **Méthode d'Esirkepov**  
Cette méthode, appelée aussi la méthode de décomposition de la densité, a été présentée en 2001 par Esirkepov qui l'étend à des facteurs forme arbitraires [Esirkepov (2001)]. Celui-ci introduit une décomposition de la trajectoire de chaque particule en sous trajectoires (six en 3 dimensions et quatre en 2 dimensions) suivant les axes des coordonnées et en répartissant la charge de chaque particule sur les nœuds du maillage.
- **Méthode zigzag**  
Umeda a proposé en 2003 une méthode récente de calcul du courant conservant la charge qui découle de la méthode de Villasenor-Buneman, la méthode zigzag [T. Umeda et Matsumoto (2003)]. En revanche, cette méthode récente est basée sur une décomposition de la trajectoire de chaque particule en ligne brisée ou zigzag. L'avantage est d'accélérer la vitesse de calcul et de faciliter l'implémentation du code. De plus, elle est utilisée pour divers facteurs de forme mais seulement sur des maillages cartésiens.

Ces différentes méthodes sont très intéressantes mais nous paraissent difficiles à mettre en œuvre pour une approche GD avec un maillage non structuré. Nous avons ainsi opté pour le premier choix qui consiste à introduire un terme correcteur sur le champ électrique. Nous rappelons, par la suite, les différentes méthodes qui s'offrent à nous.

### 2.3.1 Correction de Boris

La correction de Boris est basée sur une correction du champ électrique calculé avec l'équation d'Ampère (I.2.6b), à chaque pas de temps, par un potentiel de façon à ce que la loi de Gauss (I.2.6c) soit satisfaite [Boris (1970)]. Ainsi, nous remplaçons la partie irrotationnelle de  $\mathbf{E}$  par :

$$\mathbf{E}_{\text{corrigé}} = \mathbf{E} - \nabla\phi \quad (\text{I.2.23})$$

où le potentiel  $\phi$  est donné par :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{corrigé}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \Delta\phi = \text{div}\mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{I.2.24})$$

et

$$\phi|_{\Gamma} = 0, \quad (\text{I.2.25})$$

avec  $\Gamma$  la frontière du domaine de calcul  $\Omega$ .

Cette correction est très efficace et très répandue. Mais, l'inconvénient est la résolution d'un laplacien à chaque itération ; ce qui peut être très coûteux en terme de temps de calcul.

### 2.3.2 Correction de Marder/Langdon

En 1987, Marder a introduit un autre type de correction qui consiste à introduire un pseudo-courant dans l'équation d'Ampère (I.2.6b) [Marder (1987)]. Le champ électrique corrigé et calculé par l'équation d'Ampère à l'itération suivante, noté  $\mathbf{E}_{\text{corrigé}}^{n+1}$ , se calcule de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_{\text{corrigé}}^{n+1} = \mathbf{E}^{n+1} + \Delta t \nabla \left[ d \left( \text{div} \mathbf{E}^n - \frac{\rho^n}{\varepsilon_0} \right) \right], \quad (\text{I.2.26})$$

$d$  étant le paramètre de diffusion. Afin d'assurer la stabilité de la méthode, ce paramètre doit satisfaire :

$$d \leq \frac{1}{2 \Delta t} \left( \frac{\Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \right). \quad (\text{I.2.27})$$

Cette relation s'applique dans le cas d'un maillage cartésien uniforme 3D et d'une discrétisation par différences finies.

En 1992, Langdon a amélioré ce schéma en tenant compte de l'erreur commise sur la loi de Gauss au temps  $n + 1$  [Langdon (1992)]. Ce qui revient à calculer :

$$\mathbf{E}_{\text{corrigé}}^{n+1} = \mathbf{E}^{n+1} + \Delta t \nabla \left[ d \left( \text{div} \mathbf{E}^{n+1} - \frac{\rho^{n+1}}{\varepsilon_0} \right) \right]. \quad (\text{I.2.28})$$

D'après Langdon, cette méthode est équivalente à faire une itération de l'algorithme de Jacobi pour inverser le laplacien de la méthode de Boris. De plus, son schéma converge asymptotiquement vers celui de Boris avec un grand nombre d'itérations de la correction de Langdon par pas de temps.

### 2.3.3 Correction hyperbolique

La correction hyperbolique consiste également à corriger le champ électrique à chaque itération par :

$$\mathbf{E}_{\text{corrigé}}^{n+1} = \mathbf{E}^{n+1} + \Delta t c^2 (\nabla \phi)^{n+1/2} \quad (\text{I.2.29})$$

avec  $\phi$  satisfaisant l'équation :

$$\frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{I.2.30})$$

### 2.3.4 Généralisation

Assous et al. ont reformulé, en 1993, les équations de Maxwell en introduisant un multiplicateur de Lagrange qui relie la contrainte de Gauss et l'équation d'Ampère ; ce qui équivaut à la correction de Boris [Assous et al. (1993)]. Munz et al. ont

proposé en 1999 de généraliser cette même formulation qui permet de regrouper les différentes corrections vues précédemment [Munz et al. (1999)]. Les équations de Maxwell reformulées s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.2.31a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} + c^2 \nabla \phi = 0 \quad (\text{I.2.31b})$$

$$g(\phi) + \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{I.2.31c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.2.31d})$$

avec  $g$  un opérateur différentiel linéaire. Le terme correcteur  $\phi$  doit alors satisfaire :

$$\frac{\partial g(\phi)}{\partial t} - c^2 \Delta \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} \right) \quad (\text{I.2.32})$$

**Remarque 4** *Quand l'équation de conservation de la charge est vérifiée,  $\phi$  est nul. Et, par conséquent, nous retrouvons les équations de Maxwell classiques.*

Le système reformulé (I.2.31) permet de regrouper les différentes corrections avec le multiplicateur de Lagrange généralisé selon la définition de l'opérateur  $g$  :

- $g(\phi) = 0$  : correction de Boris qui correspond à une formulation hyperbolique-elliptique des équations de Maxwell.
- $g(\phi) = \frac{\phi}{d}$  : correction de Marder/Langdon qui est une formulation hyperbolique-parabolique des équations de Maxwell.
- $g(\phi) = \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$  : correction purement hyperbolique.

Dans les deux premiers cas, les conditions aux limites choisies pour  $\phi$  sont nulles. En revanche, pour une correction purement hyperbolique,  $\phi$  doit vérifier l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (c\chi)^2 \Delta \phi = \frac{\chi^2}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} \right) \quad (\text{I.2.33})$$

De plus, nous rajoutons, au système, des conditions d'onde sortante à  $\phi$  pour permettre une sortie de l'erreur absorbée par  $\phi$  du domaine de calcul  $\Omega$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - c \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{I.2.34})$$

# APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES ET MISE EN ŒUVRE D'UNE MÉTHODE PIC

# 3

## SOMMAIRE

3.1	ÉTUDE DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES . . . . .	39
3.1.1	Méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell . . . . .	39
3.1.2	Méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell-Vlasov . . . . .	45
3.2	MODÉLISATION DE SOURCES MICRO-ONDES DE FORTE PUISSANCE . . . . .	75
3.2.1	Modélisation de sources électroniques . . . . .	75
3.2.2	Modélisation de sources électromagnétiques . . . . .	86

C E chapitre fait l'objet d'une étude numérique du couplage Maxwell-Vlasov présenté dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, nous établissons un formalisme Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell puis celui pour le système Maxwell-Vlasov en développant deux méthodes d'interpolation entre les champs électromagnétiques et les particules, due à la méthode PIC. Ce chapitre présente aussi l'approximation Galerkin Discontinue des équations de Maxwell corrigée sans particules, que nous appellerons abusivement le système Maxwell-Vlasov. Dans un second temps, nous décrivons les sources Micro-ondes de Forte Puissance qui sont répertoriées dans deux classes : les sources dites électroniques dues à la présence d'un plasma, et donc de particules chargées, et les sources électromagnétiques qui sont propres aux phénomènes électromagnétiques.



### 3.1 ETUDE DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Afin de résoudre le système de Maxwell-Vlasov, nous utilisons une approche Galerkin Discontinue qui a fait l'objet des travaux de thèse de S. Pernet [Pernet (2004)] pour la résolution des équations de Maxwell. Cette méthode basée sur des éléments de forme hexaédrique et sur une approximation spatiale d'ordre élevé permet d'obtenir pour les équations de Maxwell des gains importants en termes de mémoire et de temps CPU. D'une part, nous rappelons le formalisme de cette méthode GD pour la résolution des équations de Maxwell et, d'autre part, nous adaptons cette approche GD pour notre problème Maxwell-Vlasov.

#### 3.1.1 Méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell

##### Formulation de la méthode GD

Considérons  $\Omega$  un domaine de calcul de frontière  $\partial\Omega$  et notons  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . Rappelons les équations de Maxwell :

$$\underline{\underline{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (\text{I.3.1a})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (\text{I.3.1b})$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \quad (\text{I.3.1c})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \text{ et } \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.3.1d})$$

**Remarque 5** Dans la formulation mathématique, nous posons  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Ceci n'est pas une contrainte pour les objets à traiter, puisque, dans le cas de l'espace vide, il est possible d'introduire des couches limites de type PML (annexe A.3) avec ce type de conditions aux limites.

Dans l'approche GD, le domaine de calcul  $\Omega$  est subdivisé en un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de cellules hexaédriques  $K_i$  telles que :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i \quad (\text{I.3.2})$$

$$K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \forall i, j \text{ tels que } 1 \leq i \neq j \leq N_e$$

Notons  $\mathcal{F}_h$  l'ensemble des faces de  $\mathcal{T}_h$ . Cet ensemble est composé de :

- l'ensemble  $\mathcal{F}_h^i$  des faces internes défini par :

$$\Gamma \in \mathcal{F}_h^i \text{ ssi } \exists (K_i, K_j) \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h, K_i \neq K_j \text{ tels que } \Gamma = K_i \cap K_j \quad (\text{I.3.3})$$

- l'ensemble  $\mathcal{F}_h^b$  des faces externes défini par :

$$\Gamma \in \mathcal{F}_h^b \text{ ssi } \exists K_i \in \mathcal{T}_h \text{ tels que } \Gamma = K_i \cap \partial\Omega \quad (\text{I.3.4})$$

Pour chaque face  $\gamma$  d'un élément  $K$ , nous définissons des termes de saut sur les valeurs des champs  $v$  par :

- si  $\Gamma \in \mathcal{F}_h^i$  telle que  $\Gamma = K \cap K'$ , alors  $[[v]]_\Gamma^K = (v|_{K'})|_\Gamma - (v|_K)|_\Gamma$  et  $[[v]]_\Gamma^{K'} = -[[v]]_\Gamma^K$ .

- si  $\Gamma \in \mathcal{F}_h^b$  alors  $[[v]]_\Gamma^K = -(v|_K)|_\Gamma$ .

Nous introduisons, ensuite, pour  $s \geq 0$ , l'espace  $H^s$ , par morceaux sur  $\mathcal{T}_h$  par :

$$H^s(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in H^s(K)\} \quad (\text{I.3.5})$$

et nous notons  $\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$  l'espace vectoriel  $[H^s(\mathcal{T}_h)]^3$  de norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{s,h} = \left( \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{s,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3.6})$$

avec

$$\|v\|_{s,h} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{s,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3.7})$$

où  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$  et  $\|\cdot\|_{s,K}$  la norme usuelle de l'espace de Sobolev  $H^s(K)$ .

Nous pouvons, à présent, introduire la formulation Galerkin Discontinue associée au problème (I.3.1) :

Trouver  $(\mathbf{E}(\cdot, t), \mathbf{H}(\cdot, t)) \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h) \times \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$  tels que :  $\forall K \in \mathcal{T}_h$  et  $\forall \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2 \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_K \underline{\varepsilon} \mathbf{E}_K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} dx - \int_K \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} dx + \int_K \underline{\sigma} \mathbf{E}_K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} dx + \int_K \mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} dx \\ & = \int_{\partial K} \alpha_{\partial K}^K [[\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)]]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} d\sigma + \int_{\partial K} \beta_{\partial K}^K [[\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K]]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{I.3.8a})$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_K \underline{\mu} \mathbf{H}_K \cdot \boldsymbol{\phi}_{2K} dx + \int_K \nabla \times \mathbf{E}_K \cdot \boldsymbol{\phi}_{2K} dx \\ & = \int_{\partial K} \gamma_{\partial K}^K [[\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K]]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{2K} d\sigma + \int_{\partial K} \delta_{\partial K}^K [[\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)]]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{2K} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{I.3.8b})$$

où  $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}|_K$ ,  $\mathbf{H}_K = \mathbf{H}|_K$ ,  $\boldsymbol{\phi}_{jK} = \boldsymbol{\phi}|_{jK}$ , et  $\alpha_{\partial K}^K, \beta_{\partial K}^K, \gamma_{\partial K}^K, \delta_{\partial K}^K$  sont des constantes réelles associées à chaque face.

Les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont choisis de telle façon que les problèmes (I.3.8) et (I.3.1) soient équivalents.

**Proposition 1** Si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall \Gamma = K \cap K' \in \mathcal{F}_h^i, \alpha_\Gamma^K = \alpha_\Gamma^{K'}, \delta_\Gamma^K = \delta_\Gamma^{K'}$  et  $\beta_\Gamma^K + \beta_\Gamma^{K'}, \gamma_\Gamma^K + \gamma_\Gamma^{K'} \neq 0$ ,
- $\beta_\Gamma^K, \delta_\Gamma^K = 0$  et  $\gamma_\Gamma^K$  ou  $\alpha_\Gamma^K \neq 0 \forall \Gamma \subset \partial K \in \mathcal{F}_h^b$ ,

alors nous avons équivalence entre les problèmes (I.3.8) et (I.3.1).

De plus, dans une approximation du formalisme Galerkin Discontinu, les termes de saut ne sont pas forcément nuls et il est alors nécessaire de définir une énergie bornée pour le système.

**Proposition 2** Si les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  vérifient :

- $\alpha_T^K \geq 0$  et  $\delta_T^K \geq 0$
- $1 + \beta_T^K - \gamma_T^K = 0$

alors l'énergie  $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \varepsilon_0 \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mu_0 \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K d\mathbf{x} \right)$  reste bornée.

### Approximation en espace

Soient  $K \in \mathcal{T}_h$  et  $\hat{K} = [0, 1]^3$  l'élément de référence, nous définissons alors l'application  $\mathbf{F}_K$  qui transforme  $\hat{K}$  en  $K$  (figure I.3.1). Cette fonction est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}) &= A_1 (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)(1 - \hat{x}_3) + A_2 \hat{x}_1 (1 - \hat{x}_2)(1 - \hat{x}_3) \\ &+ A_3 \hat{x}_1 \hat{x}_2 (1 - \hat{x}_3) + A_4 (1 - \hat{x}_1) \hat{x}_2 (1 - \hat{x}_3) \\ &+ A_5 (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2) \hat{x}_3 + A_6 \hat{x}_1 (1 - \hat{x}_2) \hat{x}_3 \\ &+ A_7 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 + A_8 (1 - \hat{x}_1) \hat{x}_2 \hat{x}_3 \end{aligned} \quad (\text{I.3.9})$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  sont les coordonnées d'un point associées respectivement aux éléments  $K$  et  $\hat{K}$ .  $A_i$  correspond aux coordonnées du  $i$ -ème sommet de  $K$ , comme indiqué dans la figure I.3.1.

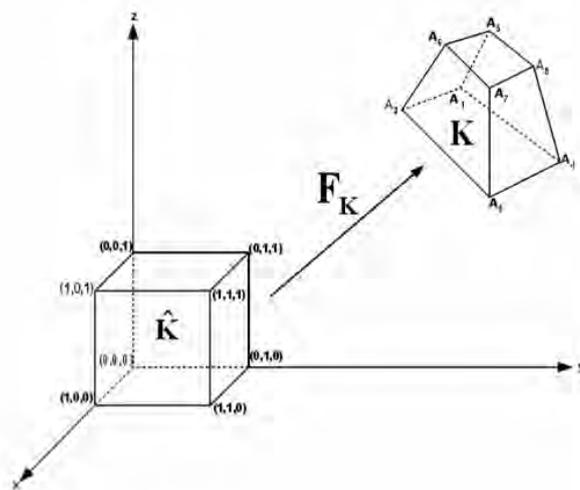


figure I.3.1 – Transformation  $\mathbf{F}_K$ .

Nous notons  $DF_K$  la matrice jacobienne associée à la transformation  $\mathbf{F}_K$  :

$$DF_K = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{K,1}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_{K,1}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_{K,1}}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial F_{K,2}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_{K,2}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_{K,2}}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial F_{K,3}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_{K,3}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_{K,3}}{\partial \hat{x}_3} \end{pmatrix}$$

et  $J_K$  le Jacobien de cette transformation.

L'espace d'approximation considéré, noté  $U_h$ , est alors défini par :

$$U_h = \{ \mathbf{v}_h \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^3 : \forall K \in \mathcal{T}_h, DF_K^* \mathbf{v}_h|_K \circ F_K \in [Q_r(\hat{K})]^3 \} \quad (\text{I.3.10})$$

où  $\forall r \in \mathbb{N}$ , l'espace  $Q_r(\hat{K})$  est l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  sur  $\hat{K}$  dont chaque variable est de degré inférieur ou égal à  $r$  et tel que :

$$Q_r(\hat{K}) = \left\{ \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{r+1} a_{l_1, l_2, l_3} \hat{x}_1^{l_1} \hat{x}_2^{l_2} \hat{x}_3^{l_3} : a_{l_1, l_2, l_3} \in \mathbb{R} \forall 1 \leq l_1, l_2, l_3 \leq r+1 \right\} \quad (\text{I.3.11})$$

**Remarque 6** *Cet espace d'approximation permet de décrire la solution sur chaque cellule  $K$  comme un polynôme de degré  $r$ . En fait, les méthodes GD sont d'une grande souplesse car elles permettent l'utilisation d'ordre d'approximation différent par cellule. Il est donc facile de pouvoir adapter le degré d'approximation spatiale à la taille de la cellule et par conséquent de pouvoir améliorer la condition CFL lorsque nous utilisons un schéma explicite.*

**Remarque 7** *Afin d'alléger les notations, nous noterons dorénavant  $\mathbf{l}$  (en gras), tout triplet  $(l_1, l_2, l_3)$ .*

Intéressons nous maintenant à un choix de fonctions de base sur  $U_h$ . Notons que la solution est approximée de manière indépendante dans chaque cellule  $K$ . Nous déterminons donc des fonctions de base propres à chaque élément où la solution appartient à  $DF_K^{*-1}(Q_r(\hat{K}))$ .

$Q_r(\hat{K})$  étant de dimension  $(r+1)^3$ , nous définissons une base à l'aide de polynômes de Lagrange  $(\hat{\phi}_j^G)_{j \in \{1, \dots, r+1\}^3}$  calculés à partir des  $(r+1)^3$  points de Gauss sur  $\hat{K} : (\hat{\xi}_1^G)_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3}$ , de poids associés  $(\hat{\omega}_1^G)_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3}$ . Les points de Gauss  $\hat{\xi}_1^G$  et leurs poids associés  $\hat{\omega}_1^G$  sont les produits cartésiens, respectivement, des points de Gauss 1D et de leurs poids associés en 1D (tableau I.3.1).

Pour décrire les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  en chaque point  $\hat{\xi}_1^G = (\hat{\xi}_{11}^G, \hat{\xi}_{12}^G, \hat{\xi}_{13}^G)$  pour  $\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3$ , nous associons, en fait, trois fonctions de base vectorielles :

$$\left( \hat{\phi}^G \right)_1^i(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\phi}_{l_1}^G(\hat{x}_1) \hat{\phi}_{l_2}^G(\hat{x}_2) \hat{\phi}_{l_3}^G(\hat{x}_3) \vec{e}_i \text{ pour } i = 1, \dots, 3 \quad (\text{I.3.12})$$

où les fonctions  $\hat{\phi}_{l_1}^G$ ,  $\hat{\phi}_{l_2}^G$ , et  $\hat{\phi}_{l_3}^G$  sont les fonctions d'interpolation de Lagrange 1D vérifiant :

$$\forall j = 1, \dots, 3 : \hat{\phi}_{l_j}^G(\hat{x}_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l_j}}^{r+1} \frac{\hat{x}_j - \hat{\xi}_k^G}{\hat{\xi}_{l_j}^G - \hat{\xi}_k^G} \quad (\text{I.3.13})$$

Les fonctions de Lagrange  $\hat{\phi}_j^G$  vérifient également la relation :

$$\hat{\phi}_j^G(\hat{\xi}_1^G) = \delta_{j, \mathbf{l}}. \quad (\text{I.3.14})$$

	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$\hat{\xi}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	$\frac{5 - \sqrt{15}}{10}$	$\frac{35 - \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{72}$
$\hat{\xi}_2$		$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{35 - \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_2$		$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{72}$
$\hat{\xi}_3$			$\frac{5 + \sqrt{15}}{10}$	$\frac{35 + \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_3$			$\frac{5}{18}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{72}$
$\hat{\xi}_4$				$\frac{35 + \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_4$				$\frac{18 - \sqrt{30}}{72}$

table I.3.1 – Points et poids de Gauss, en dimension 1, définissant les fonctions de base de  $Q_r(\hat{K})$ ,  $r$  variant de 0 à 3.

L'ensemble  $\mathcal{B}_h^G$  des fonctions de base de  $U_h$  est alors décrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \psi_h &\in \mathcal{B}_h^G \\ &\iff \end{aligned} \tag{I.3.15}$$

$$\begin{aligned} \text{supp}(\psi_h) &= K \in \mathcal{T}_h, \\ \exists l \in \{1, \dots, r_K + 1\}^3 \text{ et } \exists i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket : \psi_h \circ F_K &= DF_K^{*-1}(\hat{\phi}^G)_1^i \end{aligned}$$

Finalement, nous décomposons un élément  $\mathbf{v}_h \in U_h$  sur la base  $\mathcal{B}_h^G$  comme suit :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \circ F_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{l \in \{1, \dots, r_K + 1\}^3} v_{K,l}^i DF_K^{*-1}(\hat{\phi}^G)_1^i \tag{I.3.16}$$

où  $(v_{K,l}^i)$  sont les degrés de liberté de  $\mathbf{v}_h$  sur la base  $\mathcal{B}_h^G$ .

**Remarque 8** Les fonctions  $\psi_{j,l}^i$  dépendent donc de trois paramètres :  $i$  désigne l'indice de l'hexaèdre support de la fonction,  $j$  désigne l'indice du degré de liberté scalaire associé et  $l$  désigne le vecteur de la base canonique associé.

La figure I.3.2 montre un exemple de configuration pour les degrés de liberté associés aux points de Gauss en dimension 3.

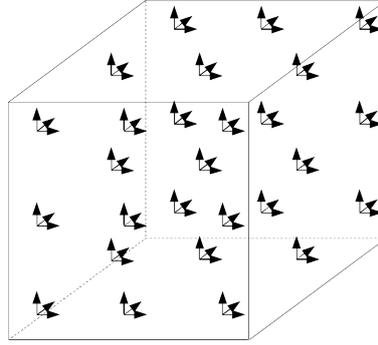


figure I.3.2 – Degrés de liberté de Gauss pour  $r = 2$  en dimension 3.

Maintenant, nous pouvons établir l'approximation semi-discrète du formalisme GD mis en place ci-dessus. Pour cela,  $\mathbf{H}_h$  et  $\mathbf{E}_h$  étant calculés dans  $\Omega$ , nous les décomposons sous la forme suivante :

$$\mathbf{H}_h = \sum_{q=1}^{N_e} \sum_{\mathbf{k} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \sum_{m=1}^3 H_{\mathbf{k},m}^q \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{k},m}^q \quad (\text{I.3.17a})$$

$$\mathbf{E}_h = \sum_{q=1}^{N_e} \sum_{\mathbf{k} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \sum_{m=1}^3 E_{\mathbf{k},m}^q \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{k},m}^q \quad (\text{I.3.17b})$$

Par ailleurs, en utilisant (I.3.15) et (I.3.16), nous décomposons les champs électrique et magnétique discrets sur la base  $\mathcal{B}_h^G$  de la façon suivante :  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\mathbf{E}_{hK} \circ F_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r_K+1\}^3} E_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^i D F_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_1^i \quad (\text{I.3.18a})$$

$$\mathbf{H}_{hK} \circ F_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r_K+1\}^3} H_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^i D F_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_1^i \quad (\text{I.3.18b})$$

En introduisant ces termes dans les équations (I.3.8) et en utilisant un schéma explicite de type Leap-frog en temps, nous obtenons alors un système matriciel dont les particularités, quelque soit l'ordre d'approximation, sont :

- des matrices de masse diagonales par blocs de taille  $3 \times 3$ .
- des matrices de rigidité nécessitant un faible stockage mémoire et évaluées sur l'élément de référence. Seule la connaissance du signe du Jacobien par volume est nécessaire.
- des matrices de sauts ayant les mêmes propriétés que les matrices de rigidité.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.1 où nous développons les calculs des différentes matrices présentes dans le schéma GD.

### 3.1.2 Méthode Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell-Vlasov

Intéressons nous, dans cette partie, à la formulation Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell-Vlasov. Dans le chapitre précédent, nous avons énuméré plusieurs corrections pour vérifier l'équation de Gauss qui n'est pas satisfaite avec la méthode PIC. Nous avons choisi de corriger la contrainte sur la divergence du champ électrique par une correction hyperbolique; en effet, ce type de correction semble mieux adapté à notre système. Nous obtenons ainsi un problème hyperbolique à sept inconnues pour lesquelles nous pouvons appliquer les mêmes études numériques que pour le problème Maxwell afin de montrer la stabilité et la convergence de celui-ci [Arós et al. (soumis)].

Nous rappelons que les équations de Maxwell avec la correction hyperbolique s'écrivent :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} + c_0^2 \nabla \phi = 0 \quad (\text{I.3.19a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.3.19b})$$

$$\frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho + \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.3.19c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.3.19d})$$

Nous procédons au changement de variables suivant :  $\tilde{\phi} = \frac{c_0^2}{\chi} \phi$ .  
Nous obtenons :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} + \chi \nabla \tilde{\phi} = 0 \quad (\text{I.3.20a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.3.20b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - \chi \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \chi \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.3.20c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.3.20d})$$

Par la suite, nous noterons  $\tilde{\phi}$  par  $\phi$ .

Nous rappelons aussi que dans la formulation Galerkin Discontinue, il apparaît des termes de saut qui correspondent à des flux entre les cellules du maillage. Le rajout du terme correcteur  $\phi$  dû à la correction hyperbolique dans les équations de Maxwell va entraîner l'apparition de termes de saut sur  $\phi$  qu'il nous faut maintenant déterminer. Pour évaluer ces nouveaux flux, nous raisonnons, tout d'abord, à partir d'une formulation Volumes Finis [Bonnet (1998)] en négligeant la densité de courant  $\mathbf{J}$ . Ainsi, nous mettrons en évidence les quantités invariantes sur les caractéristiques qui donnent les termes de saut.

Les équations de Maxwell avec la correction hyperbolique (I.3.20) peuvent s'écrire sous la forme conservative suivante :

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{div } F(\mathbf{U}) = 0 \quad (\text{I.3.21})$$

avec  $\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \phi)^t$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 Id & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 Id & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}$ ,  $Id$  la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$  et  $F(\mathbf{U}) = (F_1(\mathbf{U}); F_2(\mathbf{U}); F_3(\mathbf{U}))$  (annexe A.2).  $F_1(\mathbf{U})$ ,  $F_2(\mathbf{U})$  et  $F_3(\mathbf{U})$  sont définis par :  $F_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \chi \phi \\ H_z \\ -H_y \\ 0 \\ -E_z \\ E_y \\ \chi E_x \end{pmatrix}$ ,  $F_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -H_z \\ \chi \phi \\ H_x \\ E_z \\ 0 \\ -E_x \\ \chi E_y \end{pmatrix}$ ,  $F_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} H_y \\ -H_x \\ \chi \phi \\ -E_y \\ E_x \\ 0 \\ \chi E_z \end{pmatrix}$ .

**Remarque 9** On remarque que  $F$  est défini par la combinaison de trois fonctions linéaires de  $\mathbb{R}^7$ .

$F(\mathbf{U})$  est par conséquent une fonction vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  dont chacune des trois composantes prend des valeurs dans  $\mathbb{R}^7$ .

**Proposition 3** Si  $\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \phi)^t$  est solution du système Maxwell-Vlasov s'écrivant sous la forme condensée :

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{div } F(\mathbf{U}) = 0 \quad (\text{I.3.22})$$

et  $\mathbf{n}$  une direction donnée alors  $\mathbf{U}$  est aussi solution de :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \quad (\text{I.3.23})$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n_z}{\varepsilon_0} & \frac{n_y}{\varepsilon_0} & -\chi \frac{n_x}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_z}{\varepsilon_0} & 0 & -\frac{n_x}{\varepsilon_0} & -\chi \frac{n_y}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n_y}{\varepsilon_0} & \frac{n_x}{\varepsilon_0} & 0 & -\chi \frac{n_z}{\varepsilon_0} \\ 0 & \frac{n_z}{\mu_0} & -\frac{n_y}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n_z}{\mu_0} & 0 & \frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_y}{\mu_0} & -\frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\chi \frac{n_x}{\mu_0} & -\chi \frac{n_y}{\mu_0} & -\chi \frac{n_z}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ PREUVE :

A partir d'un système de coordonnées cartésiennes, le système d'équations aux dérivées partielles précédent (I.3.22) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\alpha^{-1} \left( \frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial F_3(\mathbf{U})}{\partial z} \right) \quad (\text{I.3.24})$$

**Remarque 10** L'équation sous forme condensée (I.3.22) doit être écrite pour chaque composante  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  de  $\mathbf{U}$  (annexe A.2).

En utilisant une notation matricielle, l'équation (I.3.24) peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\alpha^{-1} \left( \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) \quad (\text{I.3.25})$$

avec  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$  des matrices de dimension  $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7$  (annexe A.2).

En considérant les variations de  $\mathbf{U}$  uniquement dans la direction  $\mathbf{n}$ , cette équation se met aussi sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\alpha^{-1} \left( \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right) \quad (\text{I.3.26})$$

Sachant que  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = n_x$ ,  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} = n_y$  et  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = n_z$ , l'équation devient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \quad (\text{I.3.27})$$

avec  $\mathcal{A} = -\alpha^{-1} (\mathcal{A}_1 n_x + \mathcal{A}_2 n_y + \mathcal{A}_3 n_z)$ . Pour une direction  $\mathbf{n}$  fixée, la matrice  $\mathcal{A}$  est donnée de façon explicite par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n_z}{\varepsilon_0} & \frac{n_y}{\varepsilon_0} & -\chi \frac{n_x}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_z}{\varepsilon_0} & 0 & -\frac{n_x}{\varepsilon_0} & -\chi \frac{n_y}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n_y}{\varepsilon_0} & \frac{n_x}{\varepsilon_0} & 0 & -\chi \frac{n_z}{\varepsilon_0} \\ 0 & \frac{n_z}{\mu_0} & -\frac{n_y}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n_z}{\mu_0} & 0 & \frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_y}{\mu_0} & -\frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\chi \frac{n_x}{\mu_0} & -\chi \frac{n_y}{\mu_0} & -\chi \frac{n_z}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◁

La matrice  $\mathcal{A}$  du système d'équations (I.3.23) possède sept valeurs propres réelles  $\lambda_j$  données par :

$$(c, c, -c, -c, \chi c, -\chi c, 0).$$

A ces sept valeurs propres sont associés sept vecteurs propres indépendants. Ainsi, la matrice  $\mathcal{A}$  peut se mettre sous la forme  $\mathcal{A} = P\Lambda P^{-1}$ , où  $\Lambda = (\text{diag}(\lambda_j))_{j=1,\dots,7}$  est la matrice diagonale des valeurs propres et  $P$  la matrice de passage composée des vecteurs propres :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & -\frac{n_z \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & -\frac{n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & \frac{n_z \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & -\frac{n_x \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & \frac{n_x \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & 0 \\ -\frac{(n_x^2 + n_z^2) \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & -\frac{n_z n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & \frac{(n_x^2 + n_z^2) \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & \frac{n_z n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & -\frac{n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & \frac{n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & 0 \\ \frac{n_z n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & \frac{(n_x^2 + n_z^2) \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & -\frac{n_z n_y \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & -\frac{(n_x^2 + n_z^2) \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_x} & -\frac{n_z \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & \frac{n_z \mu_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & 0 \\ -\frac{n_z}{n_x} & -\frac{n_y}{n_x} & -\frac{n_z}{n_x} & -\frac{n_y}{n_x} & 0 & 0 & \frac{n_x}{n_z} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{n_y}{n_z} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P^{-1}$  la matrice inverse de  $P$  s'écrit alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} & -\frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} & 0 & -\frac{1}{2} n_x n_z & -\frac{1}{2} n_y n_z & \frac{1}{2} (n_y^2 + n_x^2) & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} & -\frac{1}{2} n_y n_x & \frac{1}{2} (n_x^2 + n_z^2) & -\frac{1}{2} n_y n_z & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} & \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} & 0 & -\frac{1}{2} n_x n_z & -\frac{1}{2} n_y n_z & \frac{1}{2} (n_y^2 + n_x^2) & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} & -\frac{1}{2} n_x n_y & \frac{1}{2} (n_x^2 + n_z^2) & -\frac{1}{2} n_y n_z & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} & -\frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} & -\frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} & \frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} & \frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$  l'inductance du milieu (vide). En remplaçant  $\mathcal{A}$  par la décomposition précédente et en introduisant le vecteur  $\mathbf{V} = P^{-1}\mathbf{U}$ , l'équation (I.3.23) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} \quad (\text{I.3.28})$$

qui correspond à un système de sept équations scalaires :

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} - \lambda_j \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad j = 1, \dots, 7 \quad (\text{I.3.29})$$

La résolution de ces équations fait intervenir la notion de courbes caractéristiques. Les  $\lambda_j$  peuvent être alors considérés comme les vitesses de propagation du signal le long de ces courbes caractéristiques. En effet, nous pouvons dire :  $\forall j \in \{1, \dots, 7\}$ ,  $dV_j = \frac{\partial V_j}{\partial t} dt + \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n}$ .

Si nous posons  $dt = 1$  et  $d\mathbf{n} = -\lambda_j$  alors  $d\mathbf{n} = -\lambda_j dt$  et la relation (I.3.29) implique que  $dV_j = 0$ . Nous avons donc  $V_j = \text{cste}$  sur la droite caractéristique  $d\mathbf{n} = -\lambda_j dt$ . Ainsi, si  $\mathbf{n}$  est choisie comme étant la normale extérieure à une frontière de la cellule considérée, la valeur de  $V_j$  au temps  $t$  à cette frontière (notée  $V_j^*$ ) est égale à la valeur de  $V_j$  au centre de la cellule et à un temps très proche de  $t$ . Dans un formalisme VF, on suppose également que ce temps de propagation entre les parois de la cellule et son centre est négligeable. Ceci permet donc de relier les valeurs frontières d'une cellule ( $\mathbf{U}^*$ ) aux valeurs en son centre ( $\mathbf{U}$ ),  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  étant liés par la relation  $\mathbf{V} = P^{-1}\mathbf{U}$ . Ainsi, nous pouvons déterminer les composantes reliant les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\phi$  qui restent invariantes le long des courbes caractéristiques. Ce sont ces composantes que nous retrouverons, par la suite, dans les termes de saut. Celles-ci sont données par :

$$\frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} E_x - \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} E_y - \frac{1}{2} n_x n_z H_x - \frac{1}{2} n_y n_z H_y + \frac{1}{2} (n_y^2 + n_x^2) H_z = V_1^+ \quad (\text{I.3.30a})$$

$$-\frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} E_x + \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} E_z - \frac{1}{2} n_y n_x H_x + \frac{1}{2} (n_x^2 + n_z^2) H_y - \frac{1}{2} n_y n_z H_z = V_2^+ \quad (\text{I.3.30b})$$

$$-\frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} E_x + \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} E_y - \frac{1}{2} n_x n_z H_x - \frac{1}{2} n_y n_z H_y + \frac{1}{2} (n_y^2 + n_x^2) H_z = V_3^- \quad (\text{I.3.30c})$$

$$\frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} E_x - \frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} E_z - \frac{1}{2} n_x n_y H_x + \frac{1}{2} (n_x^2 + n_z^2) H_y - \frac{1}{2} n_y n_z H_z = V_4^- \quad (\text{I.3.30d})$$

$$-\frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} E_x - \frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} E_y - \frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} E_z + \frac{1}{2} \phi = V_5^+ \quad (\text{I.3.30e})$$

$$\frac{1}{2} \frac{n_x}{Z} E_x + \frac{1}{2} \frac{n_y}{Z} E_y + \frac{1}{2} \frac{n_z}{Z} E_z + \frac{1}{2} \phi = V_6^- \quad (\text{I.3.30f})$$

$$n_x n_z H_x + n_y n_z H_y + n_z^2 H_z = V_7 \quad (\text{I.3.30g})$$

où les symboles respectifs + et - correspondent aux valeurs propres  $\lambda$  positifs et négatifs. Par la suite, nous négligeons la dernière équation (I.3.30g) du système (I.3.30) qui correspond à une vitesse de propagation nulle. Le système (I.3.30) peut également s'écrire :

$$-\frac{1}{2Z}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})_z - \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}))_z = V_1^+ \quad (\text{I.3.31a})$$

$$-\frac{1}{2Z}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})_y - \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}))_y = V_2^+ \quad (\text{I.3.31b})$$

$$\frac{1}{2Z}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})_z - \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}))_z = V_3^- \quad (\text{I.3.31c})$$

$$\frac{1}{2Z}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})_y - \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}))_y = V_4^- \quad (\text{I.3.31d})$$

$$-\frac{1}{2Z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\phi = V_5^+ \quad (\text{I.3.31e})$$

$$\frac{1}{2Z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\phi = V_6^- \quad (\text{I.3.31f})$$

**Proposition 4** Si  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  vérifie les relations (I.3.31a-I.3.31d) alors on montre que les termes

$-\frac{1}{2Z}\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$  et  $\frac{1}{2Z}\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$  restent invariants le long des courbes caractéristiques, respectivement de vitesse de propagation  $+c$  et  $-c$ .

▷ PREUVE : Il suffit de constater que

$$-\frac{1}{2Z}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})_x - \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}))_x = \alpha_1 V_1^+ + \alpha_2 V_2^+ \quad (\text{I.3.32})$$

et

$$\frac{1}{2Z}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})_x - \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}))_x = \alpha_1 V_3^- + \alpha_2 V_4^- \quad (\text{I.3.33})$$

avec  $\alpha_1 = -\frac{n_z}{n_x}$  et  $\alpha_2 = -\frac{n_y}{n_x}$ . ◁

Finalement, les termes invariants le long des courbes caractéristiques sont :

- $\frac{1}{Z}\mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$
- $\frac{1}{Z}\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$
- $-\frac{1}{Z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \phi$
- $\frac{1}{Z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \phi$

**Proposition 5** Si  $\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \phi)^t$  est solution du système de Maxwell-Vlasov et que les termes

- $\frac{1}{Z}\mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$
- $\frac{1}{Z}\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$
- $-\frac{1}{Z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \phi$

$$\bullet \frac{1}{Z} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \phi$$

sont invariants le long des courbes caractéristiques alors nous avons des relations reliant les valeurs des inconnues aux centres des éléments  $K$  et  $K'$  et celles à la frontière  $\partial K = K \cap K'$ , qui sont données par :

$$\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} + \mathbf{H}_K) - \frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_{K'} - \mathbf{E}_K)) \quad (\text{I.3.34a})$$

$$\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_{K'} + \mathbf{E}_K) + \frac{Z}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} - \mathbf{H}_K)) \quad (\text{I.3.34b})$$

$$\phi^* = \frac{1}{2} (\phi_{K'} + \phi_K) - \frac{1}{2Z} (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} - \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \quad (\text{I.3.34c})$$

$$\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^* = \frac{Z}{2} (\phi_K - \phi_{K'}) + \frac{1}{2} (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} + \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \quad (\text{I.3.34d})$$

où les valeurs  $U_K$  et  $U_{K'}$  sont les valeurs respectivement de la cellule  $K$  et  $K'$  tandis que  $U^*$  désigne la valeur à la frontière  $\partial K$  commune aux deux cellules.  $\mathbf{n}_K$  désigne, quant à elle, la normale extérieure à la cellule  $K$ .

▷ PREUVE : Pour déterminer les relations reliant les valeurs des inconnues aux centres des éléments  $K$  et  $K'$  et celles à la frontière  $\partial K = K \cap K'$ , considérons la figure I.3.3.

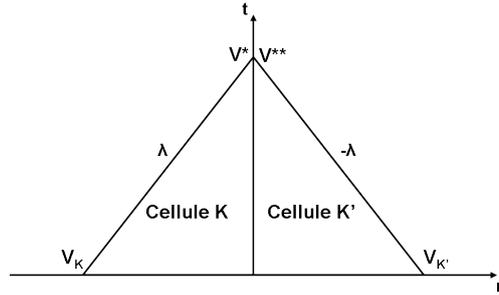


figure I.3.3 – Positions des valeurs des champs  $U$  ( $U = PV$ ) et courbes caractéristiques définies par  $\lambda$  et  $-\lambda$ .

D'après la figure I.3.3 et les relations (I.3.29) et (I.3.31), nous pouvons écrire les valeurs des champs appartenant à la cellule  $K$  en fonction des valeurs des inconnues se trouvant au bord de cette même cellule :

$$\frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times \mathbf{E}_K - \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}_K) = \frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^*) \quad (\text{I.3.35})$$

avec  $U_K$  les valeurs des champs appartenant à la cellule  $K$  et  $U^*$  celles au bord de cette même cellule. De même, nous en déduisons la relation suivante pour la cellule  $K'$  :

$$-\frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times \mathbf{E}_{K'} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}_{K'}) = -\frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times \mathbf{E}^{**} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^{**}) \quad (\text{I.3.36})$$

où  $U_{K'}$  sont les valeurs des champs appartenant à la cellule  $K'$  et  $U^{**}$  celles se trouvant au bord de cette même cellule. Ces relations ne suffisent pas à elles-seules pour établir les relations entre les valeurs des champs aux inconnues et celles au bord des cellules. Il faut également imposer que les cellules sont reliées entre elles et, par conséquent, que les valeurs des champs adjacents à un même bord de cellule sont égales, c'est-à-dire :

$$\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}^{**} = \mathbf{n}_K \times \mathbf{E}^* = \mathbf{n}_K \times \mathbf{E}_K \quad (\text{I.3.37a})$$

$$\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^{**} = \mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^* = \mathbf{n}_K \times \mathbf{H}_K \quad (\text{I.3.37b})$$

En utilisant les relations (I.3.37) et en additionnant (I.3.35) et (I.3.36), nous obtenons :

$$\mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} + \mathbf{H}_K)) + \frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_{K'} - \mathbf{E}_K) \quad (\text{I.3.38})$$

En multipliant par  $\mathbf{n}_K \times$ , la relation (I.3.38) peut se réécrire :

$$\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} + \mathbf{H}_K) - \frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_{K'} - \mathbf{E}_K)) \quad (\text{I.3.39})$$

De même, en soustrayant (I.3.35) par (I.3.36), nous obtenons finalement :

$$\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_{K'} + \mathbf{E}_K) + \frac{Z}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} - \mathbf{H}_K)) \quad (\text{I.3.40})$$

Passons aux deux dernières équations du système (I.3.31). En procédant de la même manière que précédemment, nous avons les relations suivantes :

$$-\frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} + \frac{1}{2} \phi_{K'} = -\frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^{**} + \frac{1}{2} \phi^{**} \quad (\text{I.3.41a})$$

$$\frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K + \frac{1}{2} \phi_K = \frac{1}{2Z} \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{2} \phi^* \quad (\text{I.3.41b})$$

Nous rajoutons aussi la relation suivante pour introduire la continuité aux interfaces des cellules :

$$\phi^{**} = \phi^* = \phi_K \quad (\text{I.3.42a})$$

$$\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^{**} = \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \quad (\text{I.3.42b})$$

En additionnant les relations (I.3.41a) et (I.3.41b), il vient alors :

$$\phi^* = \frac{1}{2} (\phi_{K'} + \phi_K) - \frac{1}{2Z} (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} - \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \quad (\text{I.3.43})$$

et en les soustrayant, nous obtenons :

$$\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^* = \frac{Z}{2} (\phi_K - \phi_{K'}) + \frac{1}{2} (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} + \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \quad (\text{I.3.44})$$

Ce qui conclut la preuve de cette proposition. ◁

**Remarque 11** *Les relations, reliant les valeurs des inconnues aux frontières et celles dans les cellules, données par cette proposition sont obtenues sur une interface en espace libre. Pour d'autres types d'interfaces, nous avons le même type de relations en considérant d'autres conditions limites que celles données par (I.3.37).*

Pour déterminer les sauts, reconsidérons maintenant les équations de Maxwell-Vlasov que nous intégrons contre des fonctions test  $\varphi_1^G \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$ ,  $\varphi_2^G \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$  et  $\psi^G \in H^s(\mathcal{T}_h)$  sur une cellule  $K$  du domaine de calcul  $\Omega$ . Pour cela, nous supposons que nous travaillons dans un espace d'approximation ayant toutes les régularités nécessaires. Le système Maxwell-Vlasov avec la correction hyperbolique (sans le terme  $\mathbf{J}$ ) s'écrit sur chaque cellule  $K$  de  $\Omega$  :

$$\int_K^G \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} \cdot \varphi_1^G d\mathbf{x} - \int_K^G \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \varphi_1^G d\mathbf{x} + \int_K^G \chi \nabla \phi_K \cdot \varphi_1^G d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{I.3.45a})$$

$$\int_K^G \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_K}{\partial t} \cdot \varphi_2^G d\mathbf{x} + \int_K^G \nabla \times \mathbf{E}_K \cdot \varphi_2^G d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{I.3.45b})$$

$$\int_K^G \mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \cdot \psi^G d\mathbf{x} - \int_K^G \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} \cdot \psi^G d\mathbf{x} + \int_K^G \chi (\nabla \cdot \mathbf{E}_K) \cdot \psi^G d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{I.3.45c})$$

**Proposition 6** Si  $\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \phi)^t$  est solution du système Maxwell-Vlasov (sans  $\mathbf{J}$ ) alors il vérifie la formulation Galerkin Discontinue suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H}_K - \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}) \rrbracket_{\partial K} + \frac{1}{2} \chi \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \\ - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \chi \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K + \chi \nabla \phi_K = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.46a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_K}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}_K + \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}) \rrbracket_{\partial K} = 0 \quad (\text{I.3.46b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} - \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} - \chi \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} + \chi \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} + \chi (\nabla \cdot \mathbf{E}_K) = 0 \quad (\text{I.3.46c})$$

▷ PREUVE : Intéressons nous, tout d'abord, à la première équation du système (I.3.45). Rappelons les formules de Green :

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dx - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H(\text{rot}; \Omega) \quad (\text{I.3.47a})$$

$$\int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial \Omega} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \phi \in H^1(\Omega) \quad (\text{I.3.47b})$$

En appliquant les formules de Green (I.3.47), l'équation (I.3.45a) devient :

$$\begin{aligned} \int_K^G \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx - \int_K^G \mathbf{H}_K \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx - \int_{\partial K}^G \mathbf{H}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G \times \mathbf{n}_K) \, d\sigma \\ - \chi \int_K^G \phi_K \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx + \int_{\partial K}^G \phi_K \boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \mathbf{n}_K \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.48})$$

Nous avons aussi la relation :

$$\mathbf{H}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G \times \mathbf{n}_K) = (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}_K) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \quad (\text{I.3.49})$$

Pour évaluer les termes  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\partial K}$  et  $\phi|_{\partial K}$ , notés aussi  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}^*$  et  $\phi^*$ , utilisons les relations (I.3.34). L'équation (I.3.45a) devient alors :

$$\begin{aligned} \int_K^G \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx - \int_K^G \mathbf{H}_K \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx - \int_{\partial K}^G \frac{1}{2} \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} + \mathbf{H}_K) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma \\ + \frac{1}{2Z} \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_{K'} - \mathbf{E}_K)) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma - \chi \int_K^G \phi_K \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx \\ + \chi \int_{\partial K}^G \frac{1}{2} (\phi_{K'} + \phi_K) \boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \mathbf{n}_K \, d\sigma - \chi \int_{\partial K}^G \frac{1}{2Z} (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} - \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \mathbf{n}_K \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.50})$$

Pour faire apparaître des termes de sauts entre les cellules  $K$  et  $K'$ , nous réécrivons certains termes de l'équation (I.3.50) par :

$$\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} + \mathbf{H}_K) = \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_{K'} - \mathbf{H}_K + 2\mathbf{H}_K) \quad (\text{I.3.51})$$

et

$$\phi_{K'} + \phi_K = \phi_{K'} - \phi_K + 2\phi_K \quad (\text{I.3.52})$$

En utilisant les relations (I.3.51) et (I.3.52) dans l'équation (I.3.45a), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_K^G \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx - \int_K^G \mathbf{H}_K \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma - \int_{\partial K}^G (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}_K) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma \\ + \frac{1}{2Z} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}) \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma - \chi \int_K^G \phi_K \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, dx + \frac{1}{2} \chi \int_{\partial K}^G \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma \\ + \chi \int_{\partial K}^G \phi_K \boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \mathbf{n}_K \, d\sigma - \frac{1}{2Z} \chi \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.53})$$

D'après les formules de Green (I.3.47), nous avons aussi :

$$-\int_K^G \mathbf{H}_K \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} - \int_{\partial K}^G (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}_K) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\sigma = -\int_K^G \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.54})$$

et

$$-\chi \int_K^G \phi_K \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial K}^G \phi_K \boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \mathbf{n}_K d\sigma = \chi \int_K^G \nabla \phi_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.55})$$

L'équation (I.3.45a) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} - \int_K^G \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\sigma \\ & + \frac{1}{2Z} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}) \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\sigma + \frac{1}{2} \chi \int_{\partial K}^G \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\sigma \\ & - \frac{1}{2Z} \chi \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\sigma + \chi \int_K^G \nabla \phi_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^G d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.56})$$

En procédant de la même manière pour la deuxième équation (I.3.45b), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2^G d\mathbf{x} + \int_K^G \nabla \times \mathbf{E}_K \cdot \boldsymbol{\varphi}_2^G d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2^G d\sigma \\ & + \frac{Z}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}) \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2^G d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.57})$$

Considérons la dernière équation (I.3.45c). En utilisant la formule de Green (I.3.47b), l'équation devient :

$$\int_K^G \mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \int_K^G \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \chi \int_K^G \nabla \boldsymbol{\psi}^G \cdot \mathbf{E}_K d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial K}^G \boldsymbol{\psi}^G \cdot \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{n}_K d\sigma = 0 \quad (\text{I.3.58})$$

Appliquons la relation (I.3.34d) reliant les valeurs des inconnues  $\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}|_{\partial K}$ , noté aussi  $\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}^*$  de part et d'autre de la frontière  $\partial K$ . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \int_K^G \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \chi \int_K^G \nabla \boldsymbol{\psi}^G \cdot \mathbf{E}_K d\mathbf{x} \\ & + \chi \frac{Z}{2} \int_{\partial K}^G (\phi_K - \phi_{K'}) \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma + \chi \frac{1}{2} \int_{\partial K}^G (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} + \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.59})$$

Nous faisons alors apparaître des termes de saut par :

$$\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} + \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K = \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} - \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K + 2\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \quad (\text{I.3.60})$$

L'équation (I.3.45c) devient alors :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \int_K^G \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \chi \int_K^G \nabla \boldsymbol{\psi}^G \cdot \mathbf{E}_K d\mathbf{x} \\ & - \chi \frac{Z}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma + \chi \frac{1}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma + \chi \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.61})$$

En réappliquant la formule de Green (I.3.47b), nous avons finalement pour l'équation (I.3.45c), l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \int_K^G \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} - \chi \frac{Z}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma \\ & + \chi \frac{1}{2} \int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\sigma + \int_K^G \chi (\nabla \cdot \mathbf{E}_K) \cdot \boldsymbol{\psi}^G d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.62})$$

Finalement, au sens des distributions presque partout sur  $K$ ,  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \phi)$  vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H}_K - \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{H} \rrbracket_{\partial K} + \frac{1}{2Z} \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}) \rrbracket_{\partial K} + \frac{1}{2} \chi \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \\ - \frac{1}{2Z} \chi \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K + \chi \nabla \phi_K = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.63a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_K}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}_K + \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \times \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} + \frac{Z}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}) \rrbracket_{\partial K} = 0 \quad (\text{I.3.63b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} - \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} - \chi \frac{Z}{2} \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} + \chi \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} + \chi (\nabla \cdot \mathbf{E}_K) = 0 \quad (\text{I.3.63c})$$

avec  $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ . ◁

En intégrant le système de Maxwell-Vlasov contre des fonctions test et en évaluant les valeurs frontières par le schéma FVTD précédent, nous avons obtenu naturellement un formalisme avec des termes de saut. Notons la présence de termes dissipatifs  $(\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{v})$  et dispersifs  $(\mathbf{n} \times \mathbf{v})$  dans ces termes de saut. Si nous avons choisi un schéma centré pour les volumes finis [Remaki (1999)], les valeurs prises à la frontière auraient été évaluées par une demi somme des valeurs dans les cellules  $K$  et  $K'$ . Dans ces conditions, les termes de saut dissipatifs seraient absents dans le système (I.3.63). Par conséquent, suivant le choix du schéma FVTD considéré, nous pouvons avoir différents formalismes GD pour le système Maxwell-Vlasov.

Nous pouvons donc généraliser l'écriture de la formulation GD du système Maxwell-Vlasov complet (I.3.20), de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_K}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H}_K + \chi \nabla \phi_K + \mathbf{J}_K + \beta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K} + \alpha_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{E}) \rrbracket_{\partial K} \\ + \zeta_{\partial K}^K \chi \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K + \tau_{\partial K}^K \chi \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.64a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_K}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}_K + \gamma_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K} + \delta_{\partial K}^K \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{n}_K \times \mathbf{H}) \rrbracket_{\partial K} = 0 \quad (\text{I.3.64b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \phi_K}{\partial t} - \chi \frac{\rho_K}{\varepsilon_0} + \chi \nabla \cdot \mathbf{E}_K + \eta_{\partial K}^K \chi \llbracket \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K} + \theta_{\partial K}^K \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} = 0 \quad (\text{I.3.64c})$$

où les paramètres  $\beta_{\partial K}^K, \alpha_{\partial K}^K, \tau_{\partial K}^K, \delta_{\partial K}^K, \gamma_{\partial K}^K, \eta_{\partial K}^K, \zeta_{\partial K}^K$  et  $\theta_{\partial K}^K$  sont déterminés pour assurer une équivalence entre le système (I.3.64) et celui de Maxwell-Vlasov ainsi que la conservation ou la décroissance d'une énergie. Cette énergie est définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K \varepsilon_0 \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K d\mathbf{x} + \int_K \mu_0 \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K d\mathbf{x} + \int_K \mu_0 \phi_K \cdot \phi_K d\mathbf{x} \right) \quad (\text{I.3.65})$$

En considérant ces paramètres identiques pour toutes les cellules  $K$ , nous obtenons alors les conditions suivantes :

- $\alpha \geq 0$  et  $\delta \geq 0$
- $1 + \beta - \gamma = 0$
- $1 - \tau - \eta = 0$
- $\zeta \leq 0$  et  $\theta \leq 0$

Nous renvoyons le lecteur à [Arós et al. (soumis)] pour plus de détails.

### Approximation spatiale

L'approximation spatiale de la formulation Galerkin Discontinue du système Maxwell-Vlasov (I.3.64) reste, en partie, la même que celle de la section précédente. Nous renvoyons donc le lecteur à cette partie (3.1.1) pour la discrétisation des termes en champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . Néanmoins, il reste à prendre en compte, dans la formulation Maxwell-Vlasov, le terme correcteur  $\phi$ , les sauts liés à  $\phi$  et  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  ainsi que les termes de source  $\mathbf{J}$  et  $\rho$ .

En ce qui concerne le scalaire  $\phi$ , l'approximation choisie est la suivante :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \phi_{hK} \circ F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \phi_{K,\mathbf{l}} \hat{\psi}_1^G \quad (\text{I.3.66})$$

avec  $\phi \in V_h$  tel que  $V_h$  est l'espace d'approximation défini par :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \circ F_K \in Q_r(\hat{K})\} \quad (\text{I.3.67})$$

### Calcul des termes de l'équation sur le champ électrique

**Proposition 7** Soient  $(\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \in U_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$  tel que  $\mathbf{n}_K$  soit la normale à  $\partial K$  extérieure à  $K$ , alors

$$\int_K^G \nabla \phi_K \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\mathbf{x} = - \int_K^G \phi_K \nabla \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\mathbf{x} + \int_{\partial K}^G \phi_K \mathbf{n}_K \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.68})$$

avec

$$\begin{aligned} & \int_K^G \phi_K \nabla \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{l}' \in \{1, \dots, r+1\}^3} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^G \phi_{K,\mathbf{l}'}(t) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \hat{\nabla} \cdot (\hat{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.69})$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_K \mathbf{n}_K \cdot (\hat{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \phi_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\psi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.70})$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}$  la projection orthogonale de  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}$  sur  $\partial \hat{K}$  et  $\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)}$  le poids de Gauss associé à l'intégration sur  $\partial \hat{K}$ .

▷ PREUVE : Intéressons nous au premier terme. Par passage à l'élément de référence et par décomposition, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \phi_K \nabla \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \\ &= \int_{\hat{K}}^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \phi_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\psi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}) DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\nabla} \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.71})$$

Appliquons la formule de quadrature de Gauss. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \phi_K \nabla \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \\ &= \sum_{\mathbf{l}' \in \{1, \dots, r+1\}^3} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \phi_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\psi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \hat{\nabla} \cdot (\hat{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.72})$$

Or  $\hat{\psi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{I'}) = \delta_{1,I'}$ , nous avons finalement :

$$\int_K^G \phi_K \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{I_0}^{i_0} = \sum_{I' \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \hat{\omega}_{I'}^G \phi_{K,I'}(t) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{I'}) \hat{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{I'}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{I'})| \quad (\text{I.3.73})$$

Passons maintenant au second terme. Nous avons les relations suivantes [Pernet (2004)] :

$$\mathbf{n} = \frac{DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}\|} \quad (\text{I.3.74})$$

et

$$d\sigma = \|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}\| |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\sigma} \quad (\text{I.3.75})$$

En utilisant les relations (I.3.74) et (I.3.75), et après simplification, il vient par passage à l'élément de référence :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_K \mathbf{n}_K \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0} d\sigma \\ &= \int_{\partial \hat{K}}^G \sum_{I \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,I}(t) \hat{\psi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}) DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{I.3.76})$$

En appliquant la formule de quadrature de Gauss sur l'intégrale de surface, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_K \mathbf{n}_K \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0} d\sigma \\ &= \sum_{I' \in \{1, \dots, (r+1)^2\}} \hat{\omega}_{I'}^{G(2D)} \sum_{I \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,I}(t) \hat{\psi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{I'}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{I'}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \\ & \quad \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{I'}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{I'}^{2D})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.77})$$

Ce qui conclut la preuve de cette proposition.  $\triangleleft$

**Proposition 8** Soient  $(\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{I_0}^{i_0} \in U_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$  tel que  $\mathbf{n}_K$  soit la normale à  $\partial K$  extérieure à  $K$ , alors

$$\int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{I_0}^{i_0} d\sigma = \int_{\partial K}^G (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} - \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{I_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.78})$$

avec

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{I_0}^{i_0} d\sigma \\ &= -\hat{\omega}_{I_0}^{G(2D)} \frac{DF_{K'}^{-1} DF_{K'}^{*-1}(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_{K'}^{*-1}(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{I \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K',I}^i(t) \\ & \quad (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.79})$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{I_0}^{i_0} d\sigma \\ &= \hat{\omega}_{I_0}^{G(2D)} \frac{DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{I \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K,I}^i(t) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \\ & \quad DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{I_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.80})$$

où  $F_{K'}$  et  $F_K$  sont les applications, respectivement, de  $\hat{K}$  dans  $K'$  et de  $\hat{K}$  dans  $K$ .  $\hat{\mathbf{x}}_{I_0}^{2D}$  désigne la projection orthogonale de  $\hat{\mathbf{x}}_{I_0}$  sur  $\partial \hat{K}$  et  $\hat{\omega}_{I_0}^{G(2D)}$  le poids de Gauss associé à l'intégration sur  $\partial \hat{K}$ .

▷ PREUVE :

Le premier terme de l'intégrale peut s'écrire :

$$\int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma = - \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_{K'} \cdot \mathbf{E}_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.81})$$

où  $\mathbf{n}_{K'}$  est la normale à  $\partial K$  extérieure à  $K'$ .

En utilisant les relations (I.3.74) et (I.3.75) et par passage à l'élément de référence, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.82}) \\ &= - \int_{\partial \hat{K}}^G \frac{DF_{K'}^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_{K'}^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K', \mathbf{l}}^i(t) DF_{K'}^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{x}}) \\ & \quad DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\sigma} \end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{x}}'$  désigne la coordonnée dans  $\hat{K}$  tel que  $\mathbf{x}' = F_{K'}(\hat{\mathbf{x}}')$ ,  $\mathbf{x}'$  étant la coordonnée dans  $K'$ . Or sur la face  $\partial K = K \cap K'$ , nous avons  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\hat{\mathbf{x}}' = F_{K'}^{-1} \circ F_K(\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{I.3.83})$$

$F_{K'}$  et  $F_K$  étant les applications, respectivement, de  $\hat{K}$  dans  $K'$  et de  $\hat{K}$  dans  $K$ .

En utilisant la relation (I.3.83) et la formule de quadrature de Gauss, finalement, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.84}) \\ &= - \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \frac{DF_{K'}^{-1} DF_{K'}^{*-1}(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_{K'}^{*-1}(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K', \mathbf{l}}^i(t) \\ & \quad (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}}^i(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas facilement simplifier cette expression car l'intégration se fait sur la face et que les fonctions de base ne sont pas nulles sur celle-ci. Toutefois en considérant la perpendicularité de la face  $\partial \hat{K}$  dans l'élément de référence  $\hat{K}$ , la sommation sur  $(r+1)^3$  fonctions de base peut se réduire à une sommation sur  $(r+1)$  fonctions de base. Ceci vient du fait que les fonctions de base sont des produits cartésiens de polynômes de Lagrange 1D. Intéressons nous maintenant au second terme. En utilisant les relations (I.3.74) et (I.3.75), il vient par passage à l'élément de référence :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.85}) \\ &= \int_{\partial \hat{K}}^G \frac{DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K, \mathbf{l}}^i(t) DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{x}}) \\ & \quad DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\sigma} \end{aligned}$$

Nous appliquons alors la formule de quadrature de Gauss et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (\text{I.3.86}) \\ &= \sum_{\mathbf{l}' \in \{1, \dots, (r+1)^2\}} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^{G(2D)} \frac{DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K, \mathbf{l}}^i(t) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}^{2D}) \\ & \quad DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}^{2D})| \end{aligned}$$

Après simplification, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (I.3.87) \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \frac{DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}}{\|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K,1}^i(t) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_1^i(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \\ & \quad DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned}$$

◁

**Proposition 9** Soient  $(\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \in U_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$  tel que  $\mathbf{n}_K$  soit la normale à  $\partial K$  extérieure à  $K$ , alors

$$\int_{\partial K}^G \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma = \int_{\partial K}^G (\phi_{K'} - \phi_K) \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (I.3.88)$$

avec

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (I.3.89) \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K',1}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \\ & \quad \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (I.3.90) \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,1}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned}$$

où  $F_{K'}$  et  $F_K$  sont les applications, respectivement, de  $\hat{K}$  dans  $K'$  et de  $\hat{K}$  dans  $K$ .  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}$  désigne la projection orthogonale de  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}$  sur  $\partial \hat{K}$  et  $\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)}$  le poids de Gauss associé à l'intégration sur  $\partial \hat{K}$ .

▷ PREUVE : Procédons au calcul du premier terme. Nous obtenons après simplification et passage à l'élément de référence :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (I.3.91) \\ &= \int_{\partial \hat{K}}^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K',1}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(\hat{\mathbf{x}}') DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\sigma} \end{aligned}$$

En utilisant la relation (I.3.83) et la formule de quadrature de Gauss, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_{K'} \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \quad (I.3.92) \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K',1}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \\ & \quad \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, il est facile de montrer que le second terme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_K \mathbf{n}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\sigma \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.93})$$

◁

### Calcul des termes de l'équation sur le terme correcteur

**Proposition 10** Soient  $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G \in V_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\int_K^G \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})| \phi_{K,\mathbf{l}_0}(t) \quad (\text{I.3.94})$$

▷ PREUVE : Passons à l'élément de référence, nous avons :

$$\int_K^G \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{K}}^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{l}_0}^G(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{I.3.95})$$

Appliquons maintenant la formule de quadrature de Gauss. Il vient :

$$\int_K^G \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{l}' \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{l}_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'})| \quad (\text{I.3.96})$$

Nous avons  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}$  et  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{l}_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{l}_0,\mathbf{l}'}$ . Finalement, nous obtenons :

$$\int_K^G \frac{\partial \phi_K}{\partial t} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})| \phi_{K,\mathbf{l}_0}(t) \quad (\text{I.3.97})$$

◁

Il est facile de montrer la discrétisation de l'intégrale sur la divergence du champ électrique  $\mathbf{E}$ .

**Proposition 11** Soient  $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G \in V_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\int_K^G \nabla \cdot \mathbf{E}_K \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})| DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \hat{\nabla} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \mathbf{E}_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^i(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \quad (\text{I.3.98})$$

Quant à la discrétisation des intégrales de saut dans l'équation sur le terme correcteur, nous ne la détaillerons pas ici car le calcul est identique à celui des intégrales de saut de l'équation sur le champ électrique.

**Proposition 12** Soient  $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G \in V_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$  tel que  $\mathbf{n}_K$  soit la normale à  $\partial K$  extérieure à  $K$ , alors

$$\int_{\partial K}^G \llbracket \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E} \rrbracket_{\partial K} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\sigma = \int_{\partial K}^G (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} - \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K) \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\sigma \quad (\text{I.3.99})$$

avec

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_{K'} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}_0}^G d\sigma \\ &= -\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^{G(2D)} \frac{|Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D})| \|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|}{\|DF_{K'}^{*-1}(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\|} \left( DF_{K'}^{-1} DF_{K'}^{*-1} \right) F_{K'}^{-1} \circ F_K(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \\ & \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K',\mathbf{l}}^i(t) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)_i \left( F_{K'}^{-1} \circ F_K \right) (\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{l}_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}^{2D}) \end{aligned} \quad (\text{I.3.100})$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{E}_K \psi_{1_0}^G d\sigma \\ &= \hat{\omega}_{1_0}^{G(2D)} |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D})| DF_K^{-1} DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} E_{K,1}^i(t) (\hat{\phi}^G)_1^i(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \hat{\psi}_{1_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \end{aligned} \quad (\text{I.3.101})$$

où  $F_{K'}$  et  $F_K$  sont les applications, respectivement, de  $\hat{K}$  dans  $K'$  et de  $\hat{K}$  dans  $K$ .  $\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}$  désigne la projection orthogonale de  $\hat{\mathbf{x}}_{1_0}$  sur  $\partial\hat{K}$  et  $\hat{\omega}_{1_0}^{G(2D)}$  le poids de Gauss associé à l'intégration sur  $\partial\hat{K}$ .

**Proposition 13** Soient  $\psi_{1_0}^G \in V_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$  tel que  $\mathbf{n}_K$  soit la normale à  $\partial K$  extérieure à  $K$ , alors

$$\int_{\partial K}^G \llbracket \phi \rrbracket_{\partial K} \psi_{1_0}^G d\sigma = \int_{\partial K}^G (\phi_{K'} - \phi_K) \psi_{1_0}^G d\sigma \quad (\text{I.3.102})$$

avec

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_{K'} \psi_{1_0}^G d\sigma \\ &= \hat{\omega}_{1_0}^{G(2D)} |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D})| \|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\| \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K',1}(t) \hat{\phi}_1^G(F_{K'}^{-1} \circ F_K)(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \hat{\psi}_{1_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \end{aligned} \quad (\text{I.3.103})$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K}^G \phi_K \psi_{1_0}^G d\sigma \\ &= \hat{\omega}_{1_0}^{G(2D)} |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D})| \|DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \hat{\mathbf{n}}\| \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, (r+1)^3\}} \phi_{K,1}(t) \hat{\phi}_1^G(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \hat{\psi}_{1_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}) \end{aligned} \quad (\text{I.3.104})$$

où  $F_{K'}$  et  $F_K$  sont les applications, respectivement, de  $\hat{K}$  dans  $K'$  et de  $\hat{K}$  dans  $K$ .  $\hat{\mathbf{x}}_{1_0}^{2D}$  désigne la projection orthogonale de  $\hat{\mathbf{x}}_{1_0}$  sur  $\partial\hat{K}$  et  $\hat{\omega}_{1_0}^{G(2D)}$  le poids de Gauss associé à l'intégration sur  $\partial\hat{K}$ .

Pour obtenir la discrétisation complète du problème Maxwell-Vlasov, il reste à approximer les termes de source dans l'équation sur le champ électrique et celle sur le terme correcteur. Ces termes de sources sont donnés, respectivement, par  $\int_K^G \mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{1_0}^{i_0} d\mathbf{x}$  et  $\int_K^G \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{1_0}^G d\mathbf{x}$  où  $\mathbf{J}$  et  $\rho$  sont les densités de courant et de charge provenant du mouvement des particules. Nous verrons dans le prochain paragraphe la discrétisation liée à ces sources qui s'avère être différente selon l'interpolation Champs/Particules choisie.

### Interpolation (Champs/Particules)

Comme cela a été mentionné au chapitre précédent, pour la méthode PIC, l'interaction des champs électromagnétiques et des particules se fait par l'intermédiaire d'une première interpolation des champs définis aux degrés de liberté du maillage sur les positions des particules et une seconde interpolation des densités de charge et de courant engendrées par les particules sur les degrés de liberté du maillage.

Cette première interpolation se fait lors de l'évaluation des équations de mouvement (I.2.19) dans lesquelles nous avons besoin de connaître les champs électrique et magnétique agissant sur les particules. Une interpolation des champs sur les positions des particules est alors nécessaire. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé une méthode de type NGP pour réaliser cette interpolation. Cela consiste à associer la valeur du champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) du degré de liberté le plus près de la particule à celle-ci.

Considérons une particule  $p$  de position  $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$  et de vitesse  $\mathbf{v}_p = (v_{xp}, v_{yp}, v_{zp})$ . Nous allons maintenant évaluer les champs ( $\mathbf{E}_p, \mathbf{B}_p$ ) agissant sur la particule pour la faire avancer par les équations de mouvement.

Les équations de mouvement associées à la particule  $p$  sont :

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v} \quad (\text{I.3.105a})$$

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p) \quad (\text{I.3.105b})$$

où  $\mathbf{E}_p = \mathbf{E}(\mathbf{x}_p)$  et  $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}(\mathbf{x}_p)$ . Rappelons que les champs électrique et magnétique discrets se décomposent sur la base  $\mathcal{B}_h^G$  de la façon suivante :  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\mathbf{E}_{hK} \circ F_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} E_{K,\mathbf{l}}^i DF_K^{*-1}(\hat{\phi}^G)_1^i \quad (\text{I.3.106a})$$

$$\mathbf{H}_{hK} \circ F_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} H_{K,\mathbf{l}}^i DF_K^{*-1}(\hat{\phi}^G)_1^i \quad (\text{I.3.106b})$$

Connaissant la position de la particule, il est facile de savoir à quelle cellule  $K \in \mathcal{T}_h$  elle appartient ainsi que de trouver la position  $\mathbf{x}_{l_0}$  associé au degré de liberté  $l_0$  le plus près dans la cellule  $K$ . Ainsi, les champs électrique et magnétique ( $\mathbf{E}_p, \mathbf{H}_p$ ) agissant sur la particule  $p$  sont donnés par :

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 F_K(\hat{\mathbf{x}}_p) = DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_p) (E_{K,l_0}^i)_{i=1, \dots, 3} \quad (\text{I.3.107a})$$

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_0 F_K(\hat{\mathbf{x}}_p) = DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_p) (H_{K,l_0}^i)_{i=1, \dots, 3} \quad (\text{I.3.107b})$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_p$  pris à  $\hat{\mathbf{x}}_{l_0}$ .

La seconde interpolation a lieu lors de la résolution des équations de Maxwell (I.3.20). En effet, pour évaluer les équations sur le champ électrique et le terme correcteur  $\phi$ , nous avons besoin de connaître les densités de courant  $\mathbf{J}_p$  et de charge  $\rho_p$  générées par le mouvement de la particule  $p$ , aux degrés de liberté des champs. Pour cela, dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux types de méthode : la méthode NGP et une méthode de type CIC.

### Méthode Nearest Grid Point

Dans un premier temps, nous avons mis en place une interpolation de type NGP pour déterminer les densités de courant et de charge des particules sur le maillage. Cela signifie que les densités de courant  $\mathbf{J}_p$  et de charge  $\rho_p$  générées par la particule  $p$  vont affecter le champ électromagnétique le plus proche, c'est-à-dire celui qui se

trouve au degré de liberté le plus près. Pour éviter la surcharge d'indices, nous simplifions les quantités  $\mathbf{J}_p$  et  $\rho_p$  par  $\mathbf{J}$  et  $\rho$ . Nous choisissons alors d'approximer la densité de courant dans l'espace  $U_h$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \circ F_K &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K,\mathbf{l}}^i DF_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G)^i \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K,\mathbf{l}}^i DF_K^{*-1} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G e^i \end{aligned} \quad (\text{I.3.108})$$

$(\boldsymbol{\varphi}^G)_1^i$  et  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G$  étant, respectivement, des fonctions de base vectorielles et scalaires, et la densité de charge  $\rho$  dans l'espace  $V_h$  par :

$$\rho \circ F_K = \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G \quad (\text{I.3.109})$$

où  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^G$  sont des fonctions de base scalaires.

Considérons la particule  $p$  de coordonnées  $(x_p, y_p, z_p)$  qui se trouve dans l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$ . Soit  $\mathbf{x} \in K$ , la densité de courant générée par le déplacement de la particule  $p$  est donnée par :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = q_p \mathbf{v}_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (\text{I.3.110})$$

où  $q_p$  et  $\mathbf{v}_p$  désignent, respectivement, la charge et la vitesse de la particule  $p$ .

La densité de charge est, quant à elle, définie par :

$$\rho(\mathbf{x}) = q_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (\text{I.3.111})$$

Nous cherchons alors à déterminer les termes  $\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}$  et  $\rho_{K,\mathbf{l}_0}$  pour écrire  $\mathbf{J}$  et  $\rho$  sous les formes (I.3.108) et (I.3.109).

**Proposition 14** *Supposons que la particule  $p$  soit uniquement associée au degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  le plus près, dans l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$  alors seul le champ électrique en  $\mathbf{l}_0$  sera affecté par la particule. La densité de courant  $\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}$  générée par le mouvement de cette dernière sera donnée par :*

$$\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}(t) = \frac{DF_K^*(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \mathbf{J}_{p,\mathbf{l}_0}(t)}{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{l}_0}^G |\text{Jac}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})|} \quad (\text{I.3.112})$$

avec  $\mathbf{J}_{p,\mathbf{l}_0}(t) = q_p \mathbf{v}_p$ .

▷ PREUVE : En utilisant les équations (I.3.108) et (I.3.110), nous en déduisons la relation suivante :

$\forall \mathbf{k} \in \{1, \dots, r+1\}^3$  et  $\forall m \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\int_K^G \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_\mathbf{k}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^G \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K,\mathbf{l}}^i(t) (\boldsymbol{\varphi}^G)_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_\mathbf{k}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.113})$$

Le premier terme de l'intégrale (I.3.113) s'évalue par :

$$\int_K^G \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_\mathbf{k}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^G \langle \mathbf{J}_p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p), (\boldsymbol{\varphi}^G)_\mathbf{k}^m(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.114})$$

$J_p$  étant la densité de courant due au déplacement de la particule  $p$  positionnée à  $\mathbf{x}_p$ . Dans le cas d'une méthode NGP, nous "affectons" la particule au degré de liberté le plus proche. Dans ce contexte, posons  $J_p \equiv J_{p, \mathbf{l}_0}$  et supposons  $\mathbf{x}_p \equiv \mathbf{x}_{\mathbf{l}_0}$  avec  $\mathbf{l}_0$  le degré de liberté le plus près de la particule  $p$ . Nous obtenons alors :

$$\int_K^G \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^G \langle J_{p, \mathbf{l}_0}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{l}_0}), (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.115})$$

où  $\mathbf{x}_{\mathbf{l}_0} \in \mathbb{R}^3$  est la coordonnée du point le plus près de la particule  $p$ .  $J_{p, \mathbf{l}_0}$  correspond à la densité de courant  $J_p$  générée par le déplacement de la particule  $p$ .

D'après la définition de la distribution de Dirac, la formule (I.3.115) devient :

$$\int_K^G \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = J_{p, \mathbf{l}_0}(t) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}_{\mathbf{l}_0}) \quad (\text{I.3.116})$$

En passant par les fonctions de base dans l'élément de référence  $\hat{K}$ , le premier terme de l'intégrale s'écrit alors :

$$\int_K^G \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = J_{p, \mathbf{l}_0}(t) DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_0) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_0) e^m \quad (\text{I.3.117})$$

Or  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l}_0}$ .  
 $\forall m \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_K^G \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= J_{p, \mathbf{l}_0}(t) DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) e^m \text{ si } \mathbf{k} = \mathbf{l}_0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (\text{I.3.118})$$

Intéressons nous maintenant au second terme de l'intégrale (I.3.113). Par passage à l'élément de référence  $\hat{K}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_K^G \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K, \mathbf{l}}^i(t) (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{l}}^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\hat{K}} \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K, \mathbf{l}}^i(t) DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{l}}^G(\hat{\mathbf{x}}) e^i \cdot DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}) e^m |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.119})$$

Utilisons la formule d'intégration numérique de quadrature de Gauss :

$$\begin{aligned} &\int_K^G \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K, \mathbf{l}}^i(t) (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{l}}^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{l}' \in \{1, \dots, r+1\}^3} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^G \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K, \mathbf{l}}^i(t) DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{l}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) e^i \cdot DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) e^m |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.120})$$

Or  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{l}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'}$  et  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l}'}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} &\int_K^G \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} J_{K, \mathbf{l}}^i(t) (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{l}}^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}^G)_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{k}}^G \sum_{i=1}^3 J_{K, \mathbf{k}}^i(t) DF^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}) DF^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}) e^i \cdot e^m |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.121})$$

De part la relation (I.3.118), nous en déduisons :

$$\forall \mathbf{k} \neq \mathbf{l}_0 \text{ et } \forall i \in \{1, 2, 3\}, J_{K, \mathbf{k}}^i(t) = 0 \quad (\text{I.3.122})$$

et pour  $\mathbf{k} = \mathbf{l}_0$ , il en résulte que :

$$\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}(t) = \frac{DF^*(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})\mathbf{J}_{p,\mathbf{l}_0}(t)}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})|} \quad (\text{I.3.123})$$

<

Considérons  $N_{\text{part}}$  particules proches du degré de liberté  $\mathbf{l}_0$ . La densité de courant  $\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}$  calculée en ce degré devient une sommation sur toutes les particules, de toutes les densités de courant  $\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}$  données par la formule (I.3.123). Ainsi, nous obtenons :

$$\mathbf{J}_{K,\mathbf{l}_0}(t) = \sum_{p=1}^{N_{\text{part}}} \frac{DF^*(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})\mathbf{J}_{p,\mathbf{l}_0}(t)}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})|} \quad (\text{I.3.124})$$

Intéressons nous maintenant à la densité de charge  $\rho$ .

**Proposition 15** *Supposons que la particule  $p$  soit uniquement associée au degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  le plus près, dans l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$  alors seul le terme correcteur en  $\mathbf{l}_0$  sera affecté par la particule. La densité de charge  $\rho_{K,\mathbf{l}_0}$  générée par le mouvement de cette dernière sera donnée par :*

$$\rho_{K,\mathbf{l}_0}(t) = \frac{q_{p,\mathbf{l}_0}}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})|} \quad (\text{I.3.125})$$

avec  $q_{p,\mathbf{l}_0}$  la charge de la particule  $p$ .

▷ PREUVE : En considérant les équations (I.3.109) et (I.3.111), la densité de charge  $\rho$  est définie par :  $\forall \mathbf{k} \in \{1, \dots, r+1\}^3$ ,

$$\int_K^G \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{\mathbf{l}}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{l}}^G(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.126})$$

Le premier terme de l'intégrale (I.3.126) se calcule de la manière suivante :

$$\int_K^G q(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^G \langle q_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{l}_0}), \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.127})$$

avec  $q_p$  la charge élémentaire de la particule  $p$ .

D'après la définition de la distribution de Dirac, la formule (I.3.127) devient :

$$\int_K^G \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = q_p \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}_{\mathbf{l}_0}) \quad (\text{I.3.128})$$

Par passage dans l'élément de référence  $\hat{K}$ , nous obtenons :

$$\int_K^G \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = q_{p,\mathbf{l}_0} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \quad (\text{I.3.129})$$

en posant  $q_{p,\mathbf{l}_0} \equiv q_p$ . Or  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}_0}$ , le premier terme s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \int_K^G \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= q_{p,\mathbf{l}_0} \text{ si } \mathbf{k} = \mathbf{l}_0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (\text{I.3.130})$$

Avec le passage de l'intégrale sur l'élément de référence, le second terme de (I.3.126) devient :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_K^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{k}}(t) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.131})$$

Appliquons la formule d'intégration numérique de quadrature de Gauss :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{l}}^G(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{l}' \in \{1, \dots, r+1\}^3} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{l}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.132})$$

Comme  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{l}'}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}$  et  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{k}}^G(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}'}$ , nous pouvons simplifier par :

$$\int_K^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{l}}^G(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{\mathbf{k}}^G \rho_{K,\mathbf{k}}(t) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})| \quad (\text{I.3.133})$$

Cela revient à :

$$\int_K^G \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{l}}^G(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}^G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{\mathbf{k}}^G \rho_{K,\mathbf{k}}(t) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})| \quad (\text{I.3.134})$$

En prenant en compte les deux termes (I.3.130) et (I.3.134), nous obtenons, pour le calcul de la densité de charge  $\rho$ , la relation suivante :

$$\forall \mathbf{k} \neq \mathbf{l}_0, \rho_{K,\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (\text{I.3.135})$$

et

$$\rho_{K,\mathbf{k}}(t) = \frac{q_{p,\mathbf{l}_0}}{\hat{\omega}_{\mathbf{k}}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})|} \quad (\text{I.3.136})$$

<

Considérons  $Nbpart$  particules positionnées près du degré de liberté  $\mathbf{l}_0$ . La densité de charge  $\rho_p$  générée par l'ensemble des particules est :

$$\rho_{K,\mathbf{l}_0}(t) = \sum_{p=1}^{Nbpart} \frac{q_{p,\mathbf{l}_0}}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})|} \quad (\text{I.3.137})$$

Intéressons nous maintenant à la discrétisation des intégrales sur les densités de courant et de charge interpolées par une méthode de type NGP, dans système Maxwell-Vlasov (I.3.64). Notons que la densité du courant se trouve dans l'équation sur le champ électrique. Quant à la densité de charge, elle apparaît dans l'équation sur le terme correcteur.

**Proposition 16** Soient  $(\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \in U_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0}^G D F_K^{-1} D F_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \mathbf{J}_{K,\mathbf{l}}^i(t) \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^{i_0} |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})| \quad (\text{I.3.138})$$

**Proposition 17** Soient  $\boldsymbol{\psi}_{1_0}^G \in V_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\int_K^G \rho_K \cdot \boldsymbol{\psi}_{1_0}^G d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{1_0}^G \sum_{1 \in \{1, \dots, r+1\}^3} \rho_{K,1}(t) DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{1_0})| \quad (\text{I.3.139})$$

**Remarque 12** Nous ne détaillerons pas la démonstration de ces deux propositions car elles ne présentent aucune difficulté.

### Méthode Cloud In Cell

Dans un second temps, nous avons implémenté, dans le modèle GD, une interpolation de type CIC pour déterminer les densités de courant et de charge des particules sur le maillage. Nous avons fait le choix de "distribuer" la valeur des densités de courant et de charge de chaque particule aux huit nœuds définissant la cellule  $K \in \mathcal{T}_h$  contenant la particule considérée. Pour cela, nous avons besoin de définir de nouvelles fonctions de base et de nouveaux espaces d'approximation pour les densités de courant et de charge.

#### 1. Approximation en espace

Dans cette section, nous rajoutons des définitions et des notations à celles décrites précédemment pour la méthode GD. Nous considérons  $N_{noe}$  le nombre de nœuds constituant le maillage du domaine de calcul  $\Omega$ .

Définissons, à présent, les espaces d'approximation, les fonctions de base et les degrés de liberté utilisés pour la méthode CIC. Soient :

- les espaces d'approximation  $W_h$  et  $Z_h$  définis par :

$$W_h = \{ \mathbf{u}_h \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^3 : \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}_{h|K} \circ F_K \in [Q_{r_{GL}}(\hat{K})]^3 \} \quad (\text{I.3.140})$$

et

$$Z_h = \{ \mathbf{u}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}_{h|K} \circ F_K \in Q_{r_{GL}}(\hat{K}) \} \quad (\text{I.3.141})$$

- pour  $r_{GL} \in \mathbb{N}$ , l'espace  $Q_{r_{GL}}(\hat{K})$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  sur  $\hat{K}$  dont chaque variable est de degré inférieur ou égal à  $r_{GL}$  tel que :

$$Q_{r_{GL}}(\hat{K}) = \left\{ \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{r_{GL}+1} a_{l_1, l_2, l_3} \hat{x}_1^{l_1} \hat{x}_2^{l_2} \hat{x}_3^{l_3} : a_{l_1, l_2, l_3} \in \mathbb{R} \forall 1 \leq l_1, l_2, l_3 \leq r_{GL} + 1 \right\} \quad (\text{I.3.142})$$

Nous utilisons une approximation basée sur les points de Gauss-Lobatto. Nous noterons  $(\hat{\xi}_l^{GL})_{l=1, \dots, r_{GL}+1}$  et  $(\hat{\omega}_l^{GL})_{l=1, \dots, r_{GL}+1}$  les points et poids de la formule de quadrature  $GL$  où  $GL$  désigne la formule d'approximation numérique de Gauss-Lobatto sur  $[0, 1]$ .

Nous rappelons les propriétés de la formule de Gauss-Lobatto sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

- les points  $0 = \hat{\xi}_1^{GL} < \hat{\xi}_2^{GL} < \dots < \hat{\xi}_{r_{GL}}^{GL} < \hat{\xi}_{r_{GL}+1}^{GL} = 1$  sont les  $r_{GL} + 1$  points de quadrature de Gauss-Lobatto, de poids de quadrature associés  $\hat{\omega}_1^{GL}, \hat{\omega}_2^{GL}, \dots, \hat{\omega}_{r_{GL}+1}^{GL}$ . Pour  $j = 2, \dots, r_{GL}$ ,  $\hat{\xi}_j^{GL}$  sont les zéros de la dérivée du polynôme de Legendre  $L_{r_{GL}}$ . Le tableau I.3.2 contient les points et les poids de Gauss-Lobatto pour  $r_{GL} = 1, \dots, 5$ .

- nous avons la propriété de Gauss-Lobatto suivante :

$$\int_0^1 p(x)dx = \sum_{l=1}^{r_{GL}+1} \hat{\omega}_l^{GL} p(\hat{\xi}_l^{GL}), \forall p \in Q_{2r_{GL}-1}([0,1]) = P_{2r_{GL}-1}([0,1]) \quad (\text{I.3.143})$$

La méthode est d'ordre  $2r_{GL} - 1$ .

	$r_{GL} = 1$	$r_{GL} = 2$	$r_{GL} = 3$	$r_{GL} = 4$	$r_{GL} = 5$
$\hat{\xi}_1^{GL}$	0	0	0	0	0
$\hat{\omega}_1^{GL}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
$\hat{\xi}_2^{GL}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$	$\frac{7 - \sqrt{21}}{14}$	$\frac{21 - \sqrt{147 + 42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_2^{GL}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{14 - \sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_3^{GL}$		1	$\frac{5 + \sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21 - \sqrt{147 - 42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_3^{GL}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{14 + \sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_4^{GL}$			1	$\frac{7 + \sqrt{21}}{14}$	$\frac{21 + \sqrt{147 - 42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_4^{GL}$			$\frac{1}{12}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{14 + \sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_5^{GL}$				1	$\frac{21 + \sqrt{147 + 42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_5^{GL}$				$\frac{1}{20}$	$\frac{14 - \sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_6^{GL}$					1
$\hat{\omega}_6^{GL}$					$\frac{1}{30}$

table I.3.2 – Points et poids de Gauss-Lobatto sur  $[0,1]$  pour  $r_{GL}$  variant de 1 à 5.

Dans le cadre de cette thèse, nous fixons l'approximation d'ordre spatiale  $r_{GL}$  à 1.

A partir de ce choix, nous construisons la formule de quadrature de Gauss-Lobatto sur  $\hat{K}$  en dimension 3. Nous considérons :

- l'ensemble des points de Gauss-Lobatto comme le produit cartésien des

points de Gauss-Lobatto en une dimension définis dans le tableau I.3.2, soit :

$$\hat{\xi}_1^{GL} = \left( \hat{\xi}_{l_1}^{GL}, \hat{\xi}_{l_2}^{GL}, \hat{\xi}_{l_3}^{GL} \right), \forall 1 \leq l_1, l_2, l_3 \leq 2 \quad (\text{I.3.144})$$

- l'ensemble des poids de quadrature associés aux points de Gauss-Lobatto comme le produit des poids de Gauss-Lobatto en une dimension, soit :

$$\hat{\omega}_{l_1, l_2, l_3}^{GL} = \hat{\omega}_1^{GL} = \left( \hat{\omega}_{l_1}^{GL}, \hat{\omega}_{l_2}^{GL}, \hat{\omega}_{l_3}^{GL} \right), \forall 1 \leq l_1, l_2, l_3 \leq 2 \quad (\text{I.3.145})$$

Nous définissons ainsi  $2^3$ , soit 8 points de quadrature de Gauss-Lobatto sur  $\hat{K}$ , notés  $\hat{\xi}_1^{GL}$  de poids associés  $\hat{\omega}_1^{GL}$ , pour  $\mathbf{l} \in \{1, 2\}^3$ . Nous en déduisons la propriété :

$$\int_{\hat{K}}^{GL} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{l} \in \{1, 2\}^3} \hat{\omega}_1^{GL} p(\hat{\xi}_1^{GL}), \forall p \in Q_1([0, 1]) \quad (\text{I.3.146})$$

Ensuite, nous considérons la base composée des fonctions d'interpolation de Lagrange  $(\hat{\psi}_1^{GL})_{\mathbf{l} \in \{1, 2\}^3}$  associés aux points de Gauss-Lobatto et qui vérifient :

$$\hat{\psi}_1^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}'}^{GL}) = \delta_{\mathbf{l}\mathbf{l}'} \quad (\text{I.3.147})$$

Et à chaque point de Gauss-Lobatto  $\hat{\xi}_1^{GL}$ , nous associons les trois fonctions vectorielles suivantes :

$$(\hat{\psi}^{GL})_1^i(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\psi}_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) \hat{\psi}_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) \hat{\psi}_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3) e^i, \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (\text{I.3.148})$$

avec  $(e^i)_{i=1,2,3}$  la base cartésienne de  $\mathbb{R}^3$ .

Par construction, les fonctions de base  $(\hat{\psi}^{GL})_1^i$  pour  $\mathbf{l} \in \{1, 2\}^3$  et  $1 \leq i \leq 3$  donnent une base de  $[Q_1(\hat{K})]^3$  et sont représentées comme le montre la figure I.3.4.

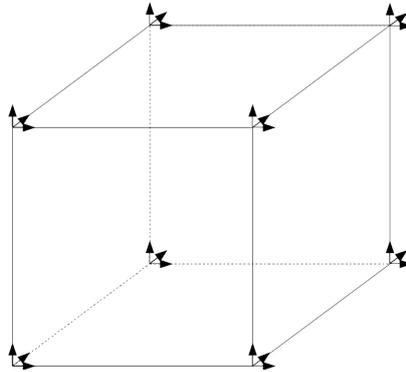


figure I.3.4 – Degrés de liberté de Gauss-Lobatto pour  $r_{GL} = 1$  en dimension 3.

Nous définissons, ensuite, les ensembles  $\mathcal{D}_h^{GL}$  et  $\mathcal{F}_h^{GL}$ , respectivement des fonctions de base de  $W_h$  et  $Z_h$ , qui sont décrits de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \psi_h &\in \mathcal{D}_h^{GL} \\ &\iff \end{aligned} \quad (\text{I.3.149})$$

$$\text{supp}(\psi_h) = K \in \mathcal{T}_h, \exists \mathbf{l} \in \{1, 2\}^3 \text{ et } \exists i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket : \psi_h \circ F_K = (\psi^{GL})_1^i$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_h &\in \mathcal{F}_h^{GL} \\ &\iff \end{aligned} \quad (I.3.150)$$

$$\text{supp}(\boldsymbol{\psi}_h) = K \in \mathcal{T}_h, \exists \mathbf{l} \in \{1,2\}^3 : \boldsymbol{\psi}_h \circ F_K = \boldsymbol{\psi}_1^{GL}$$

Finalement, d'après (I.3.149), nous pouvons écrire l'espace d'approximation  $W_h$  comme suit :

$$W_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^3, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \circ F_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1,2\}^3} v_{K,\mathbf{l}}^i (\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL})^i\} \quad (I.3.151)$$

où  $(v_{K,\mathbf{l}}^i)$  sont les degrés de liberté de  $\mathbf{v}_h$  sur la base  $\mathcal{D}_h^{GL}$ .

Et d'après (I.3.150), l'espace d'approximation  $Z_h$  est défini par :

$$Z_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \circ F_K = \sum_{\mathbf{l} \in \{1,2\}^3} v_{K,\mathbf{l}} \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}\} \quad (I.3.152)$$

avec  $v_{K,\mathbf{l}}$  les degrés de liberté de  $\mathbf{v}_h$  sur la base  $\mathcal{F}_h^{GL}$ .

Décomposons maintenant la densité de courant  $\mathbf{J}$  sur la base  $\mathcal{D}_h^{GL}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \circ F_K &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{noe}\}} J_{K,\mathbf{l}}^i (\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL})^i \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{noe}\}} J_{K,\mathbf{l}}^i \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL} \mathbf{e}^i \end{aligned} \quad (I.3.153)$$

où  $(\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL})^i$  et  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}$  désignent respectivement des fonctions de base vectorielles et scalaires.

La densité de charge  $\rho$  est, quant à elle, décomposée sur la base  $\mathcal{F}_h^{GL}$  par :

$$\rho \circ F_K = \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{noe}\}} \rho_{K,\mathbf{l}} \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL} \quad (I.3.154)$$

$\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}$  étant des fonctions de base scalaires.

## 2. Calcul des densités de courant et de charge

Comme pour la méthode NGP, considérons une seule particule  $p$  de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  dans l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$ . Notons  $\mathbf{l}_0$  le degré de liberté le plus près de la particule auquel nous associons le point  $\mathbf{x}_{\mathbf{l}_0}$ .

**Proposition 18** *Supposons que la particule  $p$  soit associée au degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  le plus près, dans l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$  alors la densité de courant générée par la particule et distribuée aux 8 nœuds de l'élément  $K$  sera donnée par :*

$\forall \mathbf{k} \in \{1,2\}^3$  et  $\forall m \in \{1,2,3\}$ ,

$$J_{K,\mathbf{k}}^m(t) = \frac{J_{p,\mathbf{l}_0}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{k}}^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \mathbf{e}^m}{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{l}_0}^{GL} |Jac^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})|} \quad (I.3.155)$$

où  $\mathbf{J}_{p,l_0}(t) = q_p \mathbf{v}_p$ .

▷ PREUVE : D'après les relations (I.3.110) et (I.3.153), nous avons la relation suivante :  
 $\forall \mathbf{k} \in \{1, \dots, N_{noe}\}$  et  $\forall m \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\int_K^{\text{GL}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1, \dots, N_{noe}\}} J_{K,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.156})$$

Le premier terme de l'intégrale (I.3.156) s'écrit alors :

$$\int_K^{\text{GL}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^{\text{GL}} \langle \mathbf{J}_p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p), (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.157})$$

où  $\mathbf{J}_p$  est la densité de courant générée par le mouvement de la particule  $p$ . Par simplicité, nous choisissons d'affecter la particule au degré de liberté le plus près d'elle, que nous noterons  $l_0$ , comme pour la méthode NGP, d'où l'appellation de la méthode quasi CIC.

Le premier terme devient alors :

$$\int_K^{\text{GL}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^{\text{GL}} \langle \mathbf{J}_{p,l_0}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{l_0}), (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.158})$$

D'après la définition de la distribution de Dirac, nous avons :

$$\int_K^{\text{GL}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{J}_{p,l_0}(t) (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}_{l_0}) \quad (\text{I.3.159})$$

En passant dans l'élément de référence  $\hat{K}$ , le premier terme de l'intégrale (I.3.156) s'écrit :

$$\int_K^{\text{GL}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{J}_{p,l_0}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{l_0}) e^m \quad (\text{I.3.160})$$

Par définition  $\text{supp}(\boldsymbol{\psi}_h) = K$ , nous pouvons restreindre le second terme de l'intégrale (I.3.156) à :

$$\int_K^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1,2\}^3} J_{K,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.161})$$

Nous nous ramenons à une intégrale sur l'élément de référence  $\hat{K}$  :

$$\begin{aligned} & \int_K^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1,2\}^3} J_{K,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\hat{K}}^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1,2\}^3} J_{K,1}^i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}) e^i \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}) e^m |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.162})$$

En utilisant la formule d'intégration numérique de quadrature de Gauss-Lobatto, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{K}}^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1,2\}^3} J_{K,1}^i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}) e^i \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}) e^m |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{1' \in \{1,2\}^3} \hat{\omega}_{1'}^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1,2\}^3} J_{K,1}^i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1'}) e^i \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1'}) e^m |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.163})$$

Or  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1'}) = \delta_{1,1'}$  et  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1'}) = \delta_{\mathbf{k},1'}$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \int_K^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1, \dots, N_{noe}\}} J_{K,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 J_{K,\mathbf{k}}^i(t) e^i \cdot e^m |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.164})$$

De plus,  $e^i \cdot e^m = \delta_{i,m}$ . Finalement, le second terme de l'intégrale s'écrit :

$$\int_K^{\text{GL}} \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}} J_{K,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\psi}^{\text{GL}})_\mathbf{k}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{\omega}_\mathbf{k}^{\text{GL}} J_{K,\mathbf{k}}^m(t) |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k})| \quad (\text{I.3.165})$$

En reliant les formules (I.3.160) et (I.3.165), nous obtenons, pour la densité de courant  $\mathbf{J}$  due à la particule  $p$ , la relation suivante :

$\forall \mathbf{k} \in \{1, 2\}^3$  et  $\forall m \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$J_{K,\mathbf{k}}^m(t) = \frac{J_{p,1_0}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}) e^m}{\hat{\omega}_{1_0}^{\text{GL}} |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0})|} \quad (\text{I.3.166})$$

Nous remettons à jour les 8 nœuds définissant l'élément  $K$  contenant la particule  $p$ .  $\triangleleft$

Pour  $N_{\text{part}}$  particules positionnées près du degré de liberté  $1_0$  et dans la cellule  $K$ , nous aurions :

$\forall \mathbf{k} \in \{1, 2\}^3$  et  $\forall m \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$J_{K,\mathbf{k}}^m(t) = \sum_{p=1}^{N_{\text{part}}} \frac{J_{p,1_0}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}) e^m}{\hat{\omega}_{1_0}^{\text{GL}} |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0})|} \quad (\text{I.3.167})$$

Passons au calcul de la densité de charge  $\rho$ .

**Proposition 19** *Supposons que la particule  $p$  soit associée au degré de liberté  $1_0$  le plus près, dans l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$  alors la densité de charge générée par la particule et distribuée aux 8 nœuds de l'élément  $K$  sera donnée par :*

$\forall \mathbf{k} \in \{1, 2\}^3$ ,

$$\rho_{K,\mathbf{k}}(t) = \frac{q_{p,1_0} \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0})}{\hat{\omega}_\mathbf{k}^{\text{GL}} |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k})|} \quad (\text{I.3.168})$$

avec  $q_{p,1_0}$  la charge de la particule  $p$ .

$\triangleright$  PREUVE :

En utilisant les relations (I.3.111) et (I.3.154), nous avons la relation :

$\forall \mathbf{k} \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}$ ,

$$\int_K^{\text{GL}} \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^{\text{GL}} \sum_{1 \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}} \rho_{K,1}(t) \boldsymbol{\psi}_1^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.169})$$

Le premier terme de l'intégrale (I.3.169) devient :

$$\int_K^{\text{GL}} \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K^{\text{GL}} \langle q_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{1_0}), \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.170})$$

avec  $q_p$  la charge de la particule  $p$ .

En utilisant la définition de la distribution de Dirac, le premier terme de l'intégrale s'écrit alors :

$$\int_K^{\text{GL}} \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = q_{p,1_0} \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}_{1_0}) \quad (\text{I.3.171})$$

en posant  $q_{p,1_0} \equiv q_p$ . Or  $\boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}_{1_0}) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0})$ . Finalement, le premier terme de l'intégrale (I.3.169) s'écrit :

$$\int_K^{\text{GL}} \rho(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = q_{p,1_0} \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mathbf{k}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}) \quad (\text{I.3.172})$$

Intéressons nous maintenant au second terme de l'intégrale (I.3.169).

Par définition  $\text{supp}(\psi_h) = K$ , il en résulte :

$$\begin{aligned} & \int_K^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \psi_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_K^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1,2\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \psi_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{I.3.173})$$

En ramenant cette intégrale sur l'élément de référence  $\hat{K}$ , il vient :

$$\begin{aligned} & \int_K^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \psi_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\hat{K}}^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1,2\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}) |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.174})$$

Utilisons à présent la formule d'intégration numérique de quadrature de Gauss-Lobatto :

$$\begin{aligned} & \int_K^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \psi_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{l}' \in \{1,2\}^3} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1,2\}^3} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) \cdot \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.175})$$

Or  $\hat{\psi}_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}$  et  $\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}'}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}'}$ . Nous pouvons donc simplifier par :

$$\int_K^{\text{GL}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, N_{\text{noe}}\}} \rho_{K,\mathbf{l}}(t) \psi_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}} \rho_{K,\mathbf{k}}(t) |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})| \quad (\text{I.3.176})$$

En prenant en compte les deux termes (I.3.172) et (I.3.176) obtenus pour l'intégrale (I.3.169), nous obtenons :

$\forall \mathbf{k} \in \{1,2\}^3$ ,

$$\rho_{K,\mathbf{k}}(t) = \frac{q_{p,\mathbf{l}_0} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})}{\hat{\omega}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}} |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})|} \quad (\text{I.3.177})$$

◁

Pour un ensemble de  $N_{\text{part}}$  particules dans la cellule  $K$  près du degré de liberté  $\mathbf{l}_0$ , nous aurions :

$\forall \mathbf{k} \in \{1,2\}^3$ ,

$$\rho_{K,\mathbf{k}}(t) = \sum_{p=1}^{N_{\text{part}}} \frac{q_{p,\mathbf{l}_0} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})}{\hat{\omega}_{\mathbf{k}}^{\text{GL}} |Jac^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})|} \quad (\text{I.3.178})$$

### 3. Calcul des densités de courant et de charge dans le système Maxwell-Vlasov (I.3.64)

Intéressons nous maintenant à la discrétisation des intégrales sur les densités de courant et de charge, dans le système de Maxwell-Vlasov (I.3.64).

**Proposition 20** Soient  $(\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \in U_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\varphi_1^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\mathbf{x} = |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0})| \omega_{\mathbf{l}_0}^G DF_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1,2\}^3} \mathbf{J}_{K,\mathbf{l}}^i(t) \hat{\psi}_{\mathbf{l}}^{\text{GL}}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{l}_0}) e^i \cdot e^{i_0} \quad (\text{I.3.179})$$

▷ PREUVE : Rappelons que la densité de courant  $\mathbf{J}$  se décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^{Nnoe} J_{l,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{GL})_1^i(\mathbf{x}) \quad (\text{I.3.180})$$

En utilisant la relation (I.3.180), le calcul de la densité de courant dans (I.3.64a) se fait de la manière suivante :

$$\int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0} d\mathbf{x} = \int_K^G \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^{Nnoe} J_{l,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{GL})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.181})$$

Par définition  $supp(\boldsymbol{\psi}_h^{GL}) = K$ , il vient alors :

$$\int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0} d\mathbf{x} = \int_K^G \sum_{i=1}^3 \sum_{l \in \{1,2\}^3} J_{l,1}^i(t) (\boldsymbol{\psi}^{GL})_1^i(\mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.182})$$

Par passage à l'élément de référence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\hat{K}}^G \sum_{i=1}^3 \sum_{l \in \{1,2\}^3} J_{l,1}^i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}) e^i \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{1,l_0}^G(\hat{\mathbf{x}}) e^{i_0} |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.183})$$

En utilisant la formule d'intégration numérique de quadrature de Gauss, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{l' \in \{1, \dots, r+1\}^3} \omega_{l'}^G \sum_{i=1}^3 \sum_{l \in \{1,2\}^3} J_{l,1}^i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{l'}) e^i \cdot DF_K^{*-1}(\hat{\mathbf{x}}_{l'}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{1,l_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{l'}) e^{i_0} |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{l'})| \end{aligned} \quad (\text{I.3.184})$$

Or  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{l_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{l'}) = \delta_{l_0, l'}$ , l'intégrale devient :

$$\int_K^G \mathbf{J}_K \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^G)_{l_0}^{i_0} d\mathbf{x} = |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{l_0})| \omega_{l_0}^G DF_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{l_0}) \sum_{i=1}^3 \sum_{l \in \{1,2\}^3} J_{l,1}^i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{l_0}) e^i \cdot e^{i_0} \quad (\text{I.3.185})$$

◁

**Proposition 21** Soient  $\boldsymbol{\psi}_{l_0}^G \in V_h$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\int_K^G \rho_K \boldsymbol{\psi}_{l_0}^G d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{l_0}^G \sum_{l \in \{1,2\}^3} \rho_{K,l}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{l_0}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{l_0})| \quad (\text{I.3.186})$$

▷ PREUVE : En décomposant la densité de charge, le terme du calcul de  $\rho$  devient :

$$\int_K^G \rho_K \boldsymbol{\psi}_{l_0}^G d\mathbf{x} = \int_K^G \sum_{l=1}^{Nnoe} \rho_{K,l}(t) \boldsymbol{\psi}_1^{GL}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_{l_0}^G d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.187})$$

avec  $\boldsymbol{\psi}^{GL} \in V_h$ . Nous avons aussi  $supp(\boldsymbol{\psi}_h^{GL}) = K$ . Ramenons à présent l'intégrale (I.3.187) sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . Nous obtenons :

$$\int_K^G \rho_K \boldsymbol{\psi}_{l_0}^G d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}}^G \sum_{l \in \{1,2\}^3} \rho_{K,l}(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}_{l_0}^G(\hat{\mathbf{x}}) |Jac(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{I.3.188})$$

En intégrant la formule d'intégration numérique de Gauss de quadrature, il vient :

$$\int_K \rho_K \psi_{1_0}^G d\mathbf{x} = \sum_{I'=\{1,\dots,r+1\}^3} \hat{\omega}_{I'}^G \sum_{I \in \{1,2\}^3} \rho_{K,I}(t) \hat{\psi}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{I'}) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{I'}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{I'})| \quad (\text{I.3.189})$$

Or  $\hat{\psi}_{1_0}^G(\hat{\mathbf{x}}_{I'}) = \delta_{1_0,I'}$ . Nous pouvons simplifier en :

$$\int_K \rho_K \psi_{1_0}^G d\mathbf{x} = \hat{\omega}_{1_0}^G \sum_{I \in \{1,2\}^3} \rho_{K,I}(t) \hat{\psi}_1^{GL}(\hat{\mathbf{x}}_{1_0}) |Jac(\hat{\mathbf{x}}_{1_0})| \quad (\text{I.3.190})$$

◁

### Comparaison des deux méthodes d'interpolation

Nous avons comparé les deux méthodes d'interpolation présentées ci-dessus sur l'échauffement thermique d'un plasma. Nous considérons un cube dont le maillage est illustré dans la figure I.3.5. Nous initialisons un plasma composé de deux espèces : 5000 ions et 5000 électrons. Nous fixons à  $10^{11}.m^{-3}$  la densité des électrons et celle des ions. Initialement, les électrons ont une température de  $10^4 K$  alors que celle des ions est de  $300 K$ . Le plasma est soumis à un champ électromagnétique externe et nous évaluons la température électronique, c'est-à-dire la température des électrons, au cours du temps pour la méthode NGP avec une approximation  $Q_2$  puis avec une méthode quasi CIC pour une approximation  $Q_1$ . La température électronique d'un plasma est donnée par :

$$Te = \frac{m v_{th}^2}{3k_B} \quad (\text{I.3.191})$$

avec  $v_{th}$  la vitesse thermique et  $k_B$  la constante de Boltzmann.

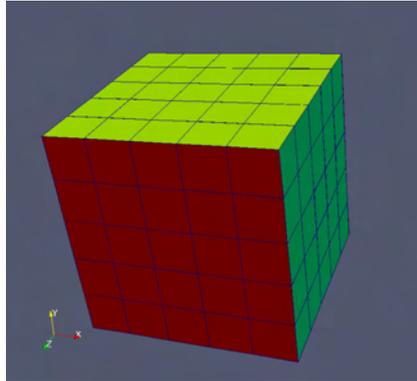


figure I.3.5 – Maillage du cube.

La figure I.3.6 représente la température électronique du plasma au cours du temps pour une méthode NGP (en noir) et pour la méthode quasi CIC (en rouge). Cette température est censée rester constante au cours du temps. Nous remarquons que la méthode quasi CIC donne de meilleurs résultats que la méthode NGP. En effet, la température varie très peu pour la méthode CIC, le plus grand écart observé est d'environ  $3 K$ . En revanche, pour la méthode NGP, les variations de température sont nettement plus importantes ; soit environ  $18 K$  d'écart entre la plus petite et la plus grande températures évaluées. Notons que nous avons comparé différentes approximations polynomiales pour les méthodes d'interpolation :  $Q_2$  pour la méthode

NGP et  $Q_1$  pour la méthode CIC. Nous aurions pu penser qu'une approximation polynomiale plus élevée aurait pu améliorer la solution obtenue avec la méthode d'interpolation NGP (méthode moins précise) comparée à l'approximation  $Q_1$  de la méthode CIC plus précise; ce qui n'est pas le cas et ce qui nous conforte dans le choix d'une méthode CIC. En effet, cela nous permet de garder de faibles ordres d'approximation spatiale de la méthode GD avec une méthode d'interpolation plus précise. Le tableau I.3.3 contient les temps CPU obtenus pour les deux méthodes d'interpolation. Ces résultats nous montrent également que la méthode CIC avec une approximation de type  $Q_1$  est plus rapide et aussi plus performante que la méthode NGP avec une approximation de type  $Q_2$ .

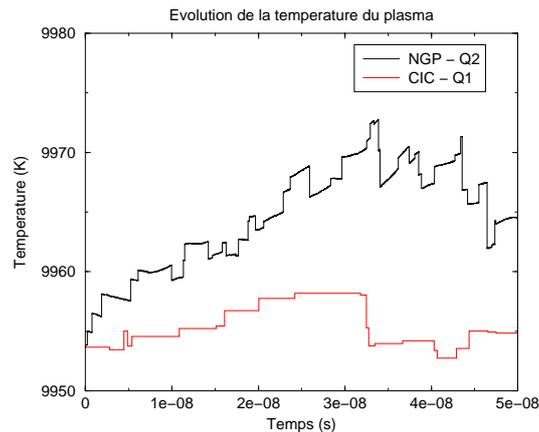


figure I.3.6 – Température thermique des électrons dans un plasma, obtenues par les méthodes NGP et quasi CIC, au cours du temps.

	CPU time
NGP Q2	33m41s
CIC Q1	13m29s

table I.3.3 – Temps CPU pour les méthodes NGP et quasi CIC.

## 3.2 MODÉLISATION DE SOURCES MICRO-ONDES DE FORTE PUISSANCE

Dans ce paragraphe, nous présentons les différents modèles proposés pour tenir compte des diverses sources présentes dans les problèmes physiques qui nous intéressent. L'ensemble de ces sources peut se scinder en deux groupes :

- les sources dites électroniques qui correspondent à des effets liés au plasma, comme par exemple l'émission de particules,
- les sources dites électromagnétiques qui correspondent à la génération directe de champs, comme par exemple un générateur de tension.

### 3.2.1 Modélisation de sources électroniques

Dans cette partie dédiée aux sources plasma, nous nous intéressons, dans le cadre de nos applications, uniquement à :

- un plasma initial,
- l'émission de particules à partir de surfaces,

– les faisceaux électroniques.

### Distribution initiale des particules

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'initialiser les particules par une inversion de la fonction des densités cumulées, ou encore appelée fonction de répartition. Pour cela, nous nous basons sur des travaux présentés en 2 dimensions dans [Barthelmé (2005)] que nous élargissons en 3 dimensions. La fonction de répartition, notée  $F$ , est définie par :

$$F(v) = \frac{\int_{v_x^2+v_y^2+v_z^2 \leq v} f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}{\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}, \quad \forall v \geq 0 \quad (\text{I.3.192})$$

où  $f_0$  est la fonction de distribution initiale des particules :

$$f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2} v_{th}^3} e^{-\frac{1}{2} \frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{v_{th}^2}} \quad (\text{I.3.193})$$

avec  $v_{th}$  et  $n_0$  représentant, respectivement, la vitesse thermique des électrons (en  $m.s^{-1}$ ) et la densité d'électrons (en  $m^{-2}$ ).  $f_0$  est uniforme en positions et tri-Maxwellienne en vitesses.

$v_{th}$  est définie par :

$$v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}} \quad (\text{I.3.194})$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann ( $k_B \approx 1,38.10^{-23} J.K^{-1}$ ),  $T_e$  la température du plasma et  $m_e$  la masse d'un électron.

**Proposition 22** La fonction de répartition  $F(v)$  donnée par :

$$F(v) = \frac{\int_{v_x^2+v_y^2+v_z^2 \leq v} f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}{\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}, \quad \text{tel que } v \in [0, c] \quad (\text{I.3.195})$$

peut aussi se mettre sous la forme :

$$\tilde{F}(X) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \left( -\sqrt{2} X e^{-X^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(X) \right), \quad \text{tel que } X \in [0, \frac{c}{\sqrt{2}v_{th}}] \quad (\text{I.3.196})$$

▷ PREUVE : Remplaçons  $f_0$  par (I.3.193) dans la fonction de répartition (I.3.192) et calculons la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{\int_{v_x^2+v_y^2+v_z^2 \leq v} f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}{\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z} \\ &= \frac{\int_{v_x^2+v_y^2+v_z^2 \leq v} \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2} v_{th}^3} e^{-\frac{1}{2} \frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{v_{th}^2}} dv_x dv_y dv_z}{n_0} \end{aligned} \quad (\text{I.3.197})$$

Par simplification et par un changement de variables (passage en coordonnées sphériques),

soit  $r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_z}\right)$  et  $\varphi = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(v) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^v \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{th}^3} e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{v_{th}^2}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2} v_{th}^3} \int_0^\pi \int_0^v e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{v_{th}^2}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2} v_{th}} \int_0^v \frac{1}{v_{th}^2} r^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{v_{th}^2}} \, dr \end{aligned} \quad (\text{I.3.198})$$

Par une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2} v_{th}} \left( \left[ -r e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{v_{th}^2}} \right]_0^v + \int_0^v e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{v_{th}^2}} \, dr \right) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2} v_{th}} \left( -v e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{th}^2}} + \int_0^v e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{v_{th}^2}} \, dr \right) \end{aligned} \quad (\text{I.3.199})$$

Par définition, une fonction de répartition est croissante et  $F([0, +\infty]) = [0, 1]$ .

Par le changement de variable  $X = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}$  et par identification de la fonction d'erreur, connue aussi sous le nom de fonction d'erreur de Gauss et notée  $erf$ , nous nous ramenons à :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(X) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2} v_{th}} \left( -\sqrt{2}v_{th} X e^{-X^2} + \sqrt{2}v_{th} \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(X) \right) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \left( -\sqrt{2} X e^{-X^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} erf(X) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.3.200})$$

Or  $v \in [0, c]$  (explication ci-dessous),  $X = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}} \in [0, \frac{c}{\sqrt{2}v_{th}}]$  et par conséquent,  $\tilde{F}([0, \frac{c}{\sqrt{2}v_{th}}]) = [0, 1]$ . ◁

Nous souhaitons initialiser des particules dans l'espace  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z] \times [v_{min}, v_{max}]^3$  avec  $v_{min} = -c/\sqrt{3}$  et  $v_{max} = c/\sqrt{3}$  pour assurer que les particules ont une vitesse inférieure à celle de la lumière  $c$ , i.e.  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \leq c$ .

Pour cela, nous définissons  $N_p$  le nombre de particules ainsi que des suites de nombres répartis "uniformément" dans  $[0, 1]$ , aléatoirement ou non et notées  $(R_p^x)_{1 \leq p \leq N_p}$ ,  $(R_p^y)_{1 \leq p \leq N_p}$ ,  $(R_p^z)_{1 \leq p \leq N_p}$ ,  $(R_p^\theta)_{1 \leq p \leq N_p}$ ,  $(R_p^\varphi)_{1 \leq p \leq N_p}$  et  $(R_p^\nu)_{1 \leq p \leq N_p}$ .

Chaque particule  $p$  ( $1 \leq p \leq N_p$ ) est alors définie par :

$$\begin{aligned} x_p &= R_p^x L_x \\ y_p &= R_p^y L_y \\ z_p &= R_p^z L_z \\ v_{x_p} &= v_p \sin(2\pi R_p^\theta) \cos(\pi R_p^\varphi) \\ v_{y_p} &= v_p \sin(2\pi R_p^\theta) \sin(\pi R_p^\varphi) \\ v_{z_p} &= v_p \cos(2\pi R_p^\theta) \end{aligned}$$

où  $v_p = \sqrt{2}v_{th}X_p^v$  et  $X_p^v = \tilde{F}^{-1}(R_p^v)$ .

Pour le calcul de  $X_p^v$ , il s'avère difficile de déterminer la fonction inverse  $\tilde{F}^{-1}$  en raison de la présence de la fonction  $erf$  qu'il est impossible d'inverser. Ainsi, pour déterminer  $X_p^v$ , nous procédons de la manière suivante :

- Nous discrétisons l'intervalle  $[0, b = \frac{c}{\sqrt{2}v_{th}}]$  en  $Nb$  intervalles. Pour cela, nous introduisons une grille de points  $x_i$  tel que  $x_i = i\Delta x$ ,  $i \in [0, Nb]$ , où  $\Delta x = \frac{b}{Nb}$  désigne le pas de discrétisation.
- A chaque point  $x_i$ ,  $\forall i \in [0, Nb]$ , nous associons  $y_i$  tel que  $y_i = \tilde{F}(x_i) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \left( -\sqrt{2} x_i e^{-x_i^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} erf(x_i) \right)$ .
- Pour un  $R_p^v$  donné, nous calculons  $X_p^v$  en effectuant une recherche par une approximation polynomiale par morceaux de  $\tilde{F}$ . Soit un  $R_p^v$  donné. Nous déterminons les points  $(x_i, y_i = \tilde{F}(x_i))$  et  $(x_{i+1}, y_{i+1} = \tilde{F}(x_{i+1}))$  tels que  $y_i \leq R_p^v \leq y_{i+1}$ . Nous définissons alors la droite passant par ces points  $(x_i, y_i)$  et  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  :

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \quad (\text{I.3.201})$$

Nous supposons que le point  $(X_p^v, R_p^v)$  passe par la droite (I.3.201). Nous pouvons alors calculer  $X_p^v$  par l'expression suivante :

$$X_p^v = \left( R_p^v - \frac{x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i} \quad (\text{I.3.202})$$

Il reste à calculer les nombres  $R_p^x$ ,  $R_p^y$ ,  $R_p^z$ ,  $R_p^\theta$ ,  $R_p^\phi$  et  $R_p^v$  répartis dans  $[0, 1]$ . Il est possible de choisir ces nombres par :

- une répartition régulière dans  $[0, 1]$ .  
Cela entraîne une répartition des particules sur la diagonale dans l'espace physique et une création de symétries dans l'espace des phases qui donnerait une mauvaise représentation de  $f_0$ .
- un tirage aléatoire suivant une loi uniforme.  
Ceci engendre un bruit numérique important. Nous renvoyons le lecteur à la thèse de R. Barthelmé [Barthelmé (2005)].
- une utilisation d'autres suites de nombres non aléatoires, à faible discrétion.

Ce choix a été proposé par des spécialistes des méthodes de Monte-Carlo. Il permet de diminuer le bruit numérique de  $1/\sqrt{N}$  à  $1/N$  pour le tirage aléatoire. Denavit et al. ont étudié en 1981 les nombres de Fibonacci [Denavit (1972)]. En 1964, Hammersley propose la suite de Hammersley qui permet de remplir uniformément le cube unité  $[0, 1]^d$  [Hammersley et Handscomb (1964)]. L'efficacité de cette suite a été prouvée en 1960 par Halton pour approcher des intégrales multi-dimensionnelles [Halton (1960)].

Dans le cadre de cette thèse, pour définir les nombres, nous nous sommes intéressés à la suite de Hammersley que nous allons maintenant présenter. Soit  $p$  un

nombre premier. Tout entier  $m$  se décompose en base  $p$  :

$$m = m_N m_{N-1} \cdots m_2 m_1 m_0 = m_0 + m_1 p + m_2 p^2 + \cdots + m_N p^N \quad (\text{I.3.203})$$

Nous définissons, pour tout entier  $m$ , la fonction de  $p$ -inversion  $\varphi_p$  par :

$$\varphi_p(m) = 0, a \quad (\text{I.3.204})$$

avec  $a = m_0 m_1 m_2 \cdots m_N = m_0 p^{-1} + m_1 p^{-2} + m_2 p^{-3} + \cdots + m_N p^{-N-1}$ .  
Nous avons alors  $\varphi_p(m) \in [0, 1]$ .

La suite de Hammersley en dimension  $d$  est donnée par :

$$(m/M, \varphi_{p_1}(m), \varphi_{p_2}(m), \cdots, \varphi_{p_{d-1}}(m)), \text{ pour } 0 \leq m \leq M-1, \quad (\text{I.3.205})$$

avec  $p_1, p_2, \cdots, p_{d-1}$  sont les  $d-1$  premiers nombres premiers.

Ainsi, nous construisons les nombres  $R_p^\theta$  par 2-inversion,  $R_p^\varphi$  par 3-inversion,  $R_p^x$  par 5-inversion (tableau I.3.4),  $R_p^y$  par 7-inversion,  $R_p^z$  par 9-inversion et  $R_p^v = \frac{p+1/2}{N_p}$  pour  $0 \leq p \leq N_p$ .

m		$\varphi_5(m)$	
décimal	base 5	base 5	décimal
1	1	0.1	$1/5 = 0.2$
2	2	0.2	$2/5 = 0.4$
3	3	0.3	$3/5 = 0.6$
4	4	0.4	$4/5 = 0.8$
5	10	0.01	$1/25 = 0.04$
6	11	0.11	$6/25 = 0.24$

table I.3.4 – Inversion en base 5 des premiers entiers.

Cette méthode permettant d'initialiser la fonction de distribution  $f_0$  est généralement connue sous le nom de méthode "quiet start".

Un exemple de distribution initiale de 40000 particules dans l'espace des positions et des vitesses, dans un cube de  $1m$  de chaque côté, est illustré dans la figure I.3.7.

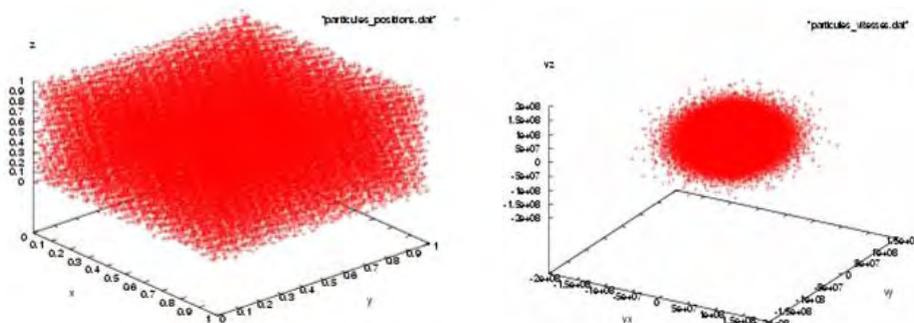


figure I.3.7 – Distribution initiale de 40000 particules dans l'espace des positions (à gauche) et dans l'espace des vitesses (à droite).

### Surface d'émission

Dans cette partie, nous rappelons le principe de la surface d'émission. Il s'agit de la génération de particules à partir d'une surface considérée. Ce processus d'émission de particules à partir d'une surface a lieu lorsque l'intensité du champ électrique normale dépasse un certain seuil de champ. Ce seuil est appelé "breakdown field" et il est noté  $E_{th}$ . Cette condition d'émission doit être vérifiée pour chaque facette de la surface d'émission. Supposons une facette  $S_i$  de la surface d'émission, de normale  $\mathbf{n}_i$  dirigée vers le volume  $V_i$  dans lequel les particules seront émises. Cette condition d'émission à vérifier est alors donnée par :

$$\left\| \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \mathbf{E} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i \right\| \geq E_{th} \quad (\text{I.3.206})$$

Le processus d'émission de particules est le suivant :

1. calcul de la charge à émettre
2. calcul du nombre de macro-particules à émettre et leurs poids
3. calcul des vitesses des particules
4. calcul des positions des particules
5. positionnement des particules dans le volume considéré
6. remise à jour du champ modifié par la présence des macro-particules

Détaillons ce processus d'émission de particules à partir d'une surface.

**Etape 1.** Nous souhaitons calculer la charge totale à émettre,  $\Delta q$ . Cette charge est donnée par :

$$\Delta q = \int_{S_i} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.207})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire sortante au volume  $V_i$  sur chaque face de  $\partial V_i$ . En introduisant la relation de conservation de la charge pour le volume  $V_i$ , nous obtenons :

$$\Delta q = \int_{\partial V_i / S_i} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \int_{V_i} \rho d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.208})$$

Dans le cas du schéma Galerkin Discontinu, étant donné la forme hexaédrique du volume  $V_i$ ,  $\partial V_i / S_i$  correspond à 5 faces de  $V_i$  autres que la face émettrice  $S_i$ .

**Etape 2.** Nous évaluons le nombre de macro-particules et leurs poids. Notons  $nbpart$  le nombre de macro-particules de charge  $q$  et  $p_{j, j \in \{1, \dots, Nbpart\}}$  le poids associé à chaque macro-particule  $j$ . Pour réaliser cette étape, il est nécessaire que la charge  $\Delta q$  soit de même signe que la charge  $q$  des particules à émettre (charges compatibles). Nous avons alors la relation suivante :

$$\frac{\Delta q}{q} = \sum_{j=1}^{Nbpart} p_j \quad (\text{I.3.209})$$

Les poids  $p_j$  sont déterminés dans un intervalle  $[p_{min}, p_{max}]$  et la relation (I.3.209) peut se réécrire :

$$\frac{\Delta q}{q} \approx p \cdot Nbpart \quad (\text{I.3.210})$$

où les poids  $p$  et le nombre de particules  $Nbpart$  sont donnés par :

$$(p, Nbpart) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } \frac{\Delta q}{q} < p_{min} \\ \left( \frac{\Delta q}{q}, 1 \right) & \text{si } p_{min} < \frac{\Delta q}{q} < p_{max} \\ \left( p_2, \left[ \frac{\Delta q}{q} \right] \right) & \text{si } \frac{\Delta q}{q} > p_{max} \end{cases} \quad (\text{I.3.211})$$

avec  $p_2$  un nombre tiré aléatoirement dans l'intervalle  $[p_{min}, p_{max}]$  et  $[x]$  la partie entière de  $x$ .

**Remarque 13** *Toutes les particules émises à partir de la surface  $S_i$  dans le volume  $V_i$  auront le même poids à un temps d'émission donné. En revanche, leurs poids seront différents entre deux instants d'émission.*

**Etape 3.** Nous effectuons un tirage des vitesses des particules. Ce tirage est effectué au voisinage d'une surface de référence. Nous appelons par surface de référence, une surface définie par une normale.

Les vitesses sont décomposées en plusieurs composantes : une composante normale et deux composantes tangentielles. Il nous faut donc définir une composante normale et deux composantes tangentielles pour la vitesse de chaque particule.

#### composante normale

Définissons  $v_n(k)$ ,  $k \in \{1, \dots, Nbpart\}$  la valeur de la composante normale de la vitesse de la particule  $k$ . Nous avons choisi d'étudier deux types de distribution de répartition des vitesses : la distribution uniforme et la distribution gaussienne.

Pour une distribution uniforme, chaque  $v_n(k)$  est choisie dans un intervalle  $[v_{min}, v_{max}]$  par tirage aléatoire. Par conséquent, la répartition des vitesses normales se fait de façon uniforme.

Pour une distribution dite gaussienne, chaque  $v_n(k)$  est choisie dans un intervalle  $[v_{min}, v_{max}]$  par tirage selon la loi  $v \mapsto \exp\left(-\frac{v^2}{v_{thn}^2}\right)$ , avec  $v_{thn}$  une donnée de la gaussienne.

#### composantes tangentielles

Nous avons également besoin de faire un tirage de deux composantes définissant la vitesse tangentielle de chaque particule. La vitesse tangentielle de la particule  $k$  est notée  $v_{th}(k)$ . Notons  $v_{1,th}(k)$  et  $v_{2,th}(k)$  les valeurs des deux composantes tangentielles de la vitesse de la particule  $k$ ,  $k \in \{1, \dots, Nbpart\}$ . Nous supposons, par ailleurs, que le caractère tangent de la vitesse des particules est décrit par un angle d'émission  $\theta \geq 0$ , comme cela est représenté sur la figure I.3.8.

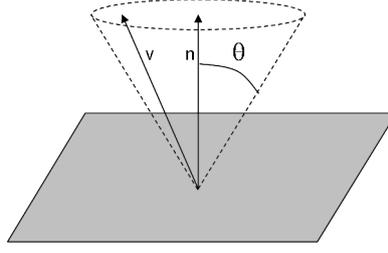


figure I.3.8 – Définition de la vitesse des particules.

Pour ce tirage, nous avons également fait le choix de définir ces deux composantes tangentielles, soit par une distribution uniforme, soit par une distribution gaussienne.

Dans le cas d'une distribution uniforme, la vitesse tangentielle  $v_{th}(k) = (v_{1,th}(k), v_{2,th}(k))$  de la particule  $k$  doit vérifier :

$$\|v_{th}(k)\| = \sqrt{v_{1,th}^2(k) + v_{2,th}^2(k)} \leq w_{max}(k) \quad (\text{I.3.212})$$

où  $w_{max}(k)$  est la vitesse tangentielle maximale que peut atteindre la particule  $k$ . La vitesse maximale  $w_{max}(k)$  vérifie une contrainte angulaire d'émission et elle est donnée par :

$$w_{max}(k) = \min \left( \sqrt{v_{max}^2 - v_n^2(k)}, v_n(k) \cdot \sin(\theta) \right) \geq 0 \quad (\text{I.3.213})$$

Par ce procédé, nous déterminons la vitesse tangentielle  $v_{th}(k) = (v_{1,th}(k), v_{2,th}(k))$  de la particule  $k$  par un tirage aléatoire (uniforme) dans  $[-w_{max}(k), w_{max}(k)] \times [-w_{max}(k), w_{max}(k)]$ .

En revanche, pour une distribution gaussienne, la vitesse tangentielle  $v_{th}(k) = (v_{1,th}(k), v_{2,th}(k))$  de la particule  $k$  est définie par :

$$(v_{1,th}(k), v_{2,th}(k)) = (x \cdot \cos(y), x \cdot \sin(y)) \quad (\text{I.3.214})$$

où le couple de variables  $(x, y, z)$  est choisi par tirage aléatoire (uniforme) dans  $[0, w_{max}] \times [0, \theta] \times [0, 1]$  et vérifie :

$$z < \exp \left( -\frac{x^2}{(v_{thn} \cdot \sin(\theta))^2} \right) \quad (\text{I.3.215})$$

**Etape 4.** Nous définissons les positions des particules. Par hypothèse liée au choix du schéma numérique étudié, soit la méthode GD, la surface  $S_i$  représente un quadrilatère. De plus, nous supposons la répartition des particules uniforme sur  $S_i$ .

Notons  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_4$  les quatre sommets de la surface émettrice. Nous définissons alors les vecteurs  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{n}$  par :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

Introduisons alors le repère orthogonal  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$  où le vecteur  $\mathbf{v}_3$  est donné par  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_2$ . Dans le repère affine précédent, nous souhaitons calculer les

coordonnées  $(\alpha, \beta)$  d'un point de la surface  $S_i$  dans un ensemble d'intervalles  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}]$ . Les paramètres sont donnés par :

$$\begin{aligned}\alpha_{min} &= \min(0, \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1)) \\ \alpha_{max} &= \max(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|, \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1)) \\ \beta_{min} &= \min(\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1)) \\ \beta_{max} &= \max(\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1))\end{aligned}$$

La figure I.3.9 illustre ce repère ainsi que la définition de ces coordonnées  $(\alpha, \beta)$ .

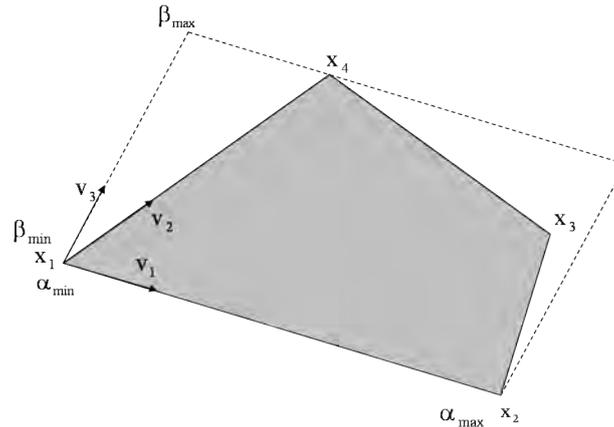


figure I.3.9 – Définition de la vitesse des particules.

Le choix de  $(\alpha, \beta)$  se fait donc par un tirage aléatoire (uniforme). La position d'une particule, qui appartient à la surface  $S_i$  donnée par ses quatre sommets  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_4$ , et que nous noterons  $\tilde{\mathbf{X}}$ , est alors définie par :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_3 \quad (\text{I.3.216})$$

Pour vérifier que la coordonnée  $\tilde{\mathbf{X}}$  d'une particule se situe bien dans la surface définie par les quatre sommets  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_4$ , nous décomposons la surface, de forme quadrilatère, en deux triangles  $T_1$  et  $T_2$ . Le triangle  $T_1$  est défini par les sommets  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{x}_4$  et  $T_2$  par les sommets  $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_4$ . Ensuite, nous résolvons sur chaque triangle  $T_k$  défini par les sommets  $s_1^k, s_2^k$  et  $s_3^k, k \in 1, 2$  un système en  $(\alpha_k, \beta_k)$  :

$$s_1^k + \alpha_k (s_2^k - s_1^k) + \beta_k (s_3^k - s_1^k) = \tilde{\mathbf{X}} \quad (\text{I.3.217})$$

Les couples  $(\alpha_k, \beta_k)$  doivent également vérifier :

$$\begin{aligned}\alpha_k &\geq 0 \\ \beta_k &\geq 0 \\ \alpha_k + \beta_k &\leq 1\end{aligned}$$

Si  $(\alpha_k, \beta_k)$  vérifie les conditions ci-dessus alors  $\tilde{\mathbf{X}}$  appartient au triangle  $T_k$ .

**Etape 5.** Cette étape consiste à définir les vitesses et les positions des particules dans le volume de calcul à partir des vitesses et positions dans la surface de référence qui ont été établies dans les étapes 3 et 4. Ces particules vont être émises à partir de la surface  $S_i$  de normale unitaire  $\mathbf{n}_i$  dirigée vers l'intérieur du volume  $V_i$ . Pour

cela, pour chaque particule  $k$ , nous définissons deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  à partir de deux sommets consécutifs  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  de  $S_i$  tels que :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{n}_i \times \mathbf{u}\end{aligned}$$

La vitesse  $\mathbf{v}(k)$  de la particule  $k$  est alors donnée par :

$$\mathbf{v}(k) = v_n \mathbf{n}_i + v_{1,th}(k) \mathbf{u} + v_{2,th}(k) \mathbf{v} \quad (\text{I.3.218})$$

Cette approche permet de garantir une loi de répartition fixée sur les vitesses normale et tangentes par rapport à  $S_i$ .

Il reste maintenant à déterminer la position de la particule  $k$ , notée  $\mathbf{x}(k)$ . Nous souhaitons déplacer la particule émise de  $\gamma \Delta t$ ,  $\Delta t$  étant le pas de temps utilisé pour émettre et  $\gamma \geq 0$ , à partir de sa position initiale  $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ , appartenant à  $S_i$ . La particule  $k$  sera positionnée au point  $\mathbf{X}(k)$  défini par :

$$\mathbf{X}(k) = \tilde{\mathbf{X}}(k) + \gamma \Delta t \mathbf{v}(k) \quad (\text{I.3.219})$$

Ce déplacement minimal a pour but de décoller les particules de la surface lors de l'émission.

**Etape 6.** Nous modifions le champ électrique, en raison de la génération des particules  $k$ ,  $k \in \{1, \dots, N_{bpart}\}$  par la surface  $S_i$  dans le volume de calcul  $V_i$ . En effet, les particules émettent une quantité de charge  $\Delta q$  qui représente une fraction  $\alpha \in [0, 1]$  de la trace normale du champ  $\mathbf{E}$  (à un coefficient  $\varepsilon_0$  près). Cette quantité de charge vaut :

$$\Delta q = \alpha \int_{S_i} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i d\mathbf{x} \quad (\text{I.3.220})$$

où  $\mathbf{n}_i$  désigne la normale unitaire à la surface  $S_i$  orientée vers l'intérieur de  $V_i$ . Nous obtenons alors le champ corrigé dans le volume  $V_i$  :

$$\tilde{\mathbf{E}}|_{S_i} = \mathbf{E}|_{S_i} - \alpha (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i) |_{S_i} \mathbf{n}_i \quad (\text{I.3.221})$$

Nous en déduisons :

$$\tilde{\mathbf{E}}|_{S_i} = (1 - \alpha) \mathbf{E}|_{S_i} - \alpha \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}|_{S_i} \quad (\text{I.3.222})$$

Les valeurs du champ corrigé  $\tilde{\mathbf{E}}|_{S_i}$  en tout point  $\mathbf{x}$  de la surface  $S_i$  sont obtenues par combinaison linéaire des valeurs aux degrés de liberté  $\mathbf{x}_k$  dans le volume  $V_i$ .

### Faisceau d'électrons

Le principe du faisceau d'électrons est d'émettre des particules à partir d'une surface  $S$ . Le faisceau d'électrons est supposé généré par une distribution de courant, notée  $\mathbf{I}_0(r, t)$ ,  $r$  étant la coordonnée radiale qui définit la distance  $r = |X - X_0|$ , d'un point  $X \in S$  à un point de référence  $X_0$ . Typiquement,  $X_0$  est le centre de gravité de la surface  $S$ .

La quantité de charge à émettre entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$  est définie par :

$$\Delta q = \int_{S \times [t_0, t_1]} \mathbf{I}_0(r, t) dr dt \quad (\text{I.3.223})$$

où la distribution de courant  $I_0$  est donnée par :

$$\mathbf{I}_0(r, t) = I_0 i_0(r) f(t) \quad (\text{I.3.224})$$

$I_0$  désigne la valeur de l'intensité de courant,  $f$  est une fonction temporelle décrivant le comportement de la distribution de courant et  $i_0$  est, quant à elle, une distribution sur  $S$  vérifiant l'équation suivante :

$$\int_S i_0(r) dr = 1 \quad (\text{I.3.225})$$

Ainsi, l'émission des particules s'effectue pour chaque facette  $S_i$  de la surface d'émission de faisceaux  $S$ , frontière du volume  $V_i$ . Le principe du modèle des faisceaux est le suivant :

1. calcul de la charge à émettre
2. calcul du nombre de macro-particules à émettre et leurs poids
3. répartition des particules à émettre sur la surface du faisceau
4. calcul des vitesses des particules
5. calcul des positions des particules
6. positionnement des particules dans le volume considéré

Cet algorithme ressemble fortement à celui de l'émission de surface. La plupart de ces étapes sont par conséquent détaillées dans la section précédente. En revanche, certaines étapes sont un peu différentes.

**Etape 1.** D'après les équations (I.3.223) et (I.3.224), le calcul de la charge à émettre par la surface  $S$  est donné par :

$$\Delta q = \int_{S \times [t_0, t_1]} I_0 i_0(r, t) f(t) dr dt \quad (\text{I.3.226})$$

**Etape 2.** Nous calculons le nombre des macro-particules  $Nbpart$  et leurs poids associés  $p_j$ ,  $j \in 1, \dots, Nbpart$ . Ces quantités sont définies par :

$$(p, Nbpart) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } \frac{\Delta q}{q} < p_{min} \\ \left( \frac{\Delta q}{q}, 1 \right) & \text{si } p_{min} < \frac{\Delta q}{q} < p_{max} \\ \left( p_2, \left[ \frac{\Delta q}{q p_2} \right] \right) & \text{si } \frac{\Delta q}{q} > p_{max} \end{cases} \quad (\text{I.3.227})$$

Nous renvoyons le lecteur à la section précédente où cette étape est expliquée de manière plus approfondie.

**Etape 3.** Une fois le nombre et le poids des macro-particules définis, il est nécessaire d'effectuer une répartition des particules à émettre sur la surface du faisceau. Contrairement à l'émission de surface où l'émission est locale sur chacune des sous-faces de la surface émettrice, ici, le processus d'émission est global sur  $S$ . Par

conséquent, le nombre de particules est évalué sur l'ensemble de la surface du faisceau. La répartition sur les sous-faces  $S_i$  (i.e. facettes du maillage) de  $S$  se fait donc en suivant une distribution donnée par la distribution de courant spatiale sur  $S$ , que nous notons  $i_0(r)$ .

Sur chaque facette  $S_i$ , une quantité  $\alpha_i$  est évaluée. Cette quantité vaut :

$$\alpha_i = \int_{S_i} i_0(r) dr \quad (\text{I.3.228})$$

Ensuite, nous affectons chaque particule  $k$  à une sous-face  $S_i$ . La sous-face  $S_i$  comprenant la particule  $k$ , doit satisfaire les relations suivantes :

$$\beta \in ]0, A], \quad \text{avec } A = \sum_{i=1}^{Nbsurf} \alpha_i \quad \text{et suivant une loi uniforme}$$

$$\beta \in \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j, \sum_{j=1}^i \alpha_j \right]$$

avec  $Nbsurf$  le nombre de sous-faces de la surface  $S$ . La répartition des  $Nbpart$  particules à émettre suivra donc une distribution spatiale décrite par  $i_0(r)$ .

**Etape 4.** Nous procédons au tirage des vitesses des particules. Comme pour l'émission de surface, ces vitesses sont décomposées en une vitesse normale  $v_n$  et une vitesse tangentielle à deux composantes  $v_{th} = (v_{1,th}, v_{2,th})$ . La composante normale à la vitesse est affectée à la vitesse  $v_n$  de l'ensemble du faisceau. Les deux composantes de la vitesse tangentielle sont évaluées en suivant une distribution uniforme ou une distribution gaussienne.

La vitesse tangente maximale  $w_{max}(k)$  que peut atteindre la particule  $k$  vérifie la contrainte angulaire d'émission donnée par :

$$w_{max}(k) = v_n(k) \cdot \sin(\theta) \geq 0 \quad (\text{I.3.229})$$

et la vitesse tangentielle  $v_{th}(k) = (v_{1,th}, v_{2,th})$  vérifie :

$$\|v_{th}(k)\| = \sqrt{v_{1,th}^2(k) + v_{2,th}^2(k)} \leq w_{max}(k) \quad (\text{I.3.230})$$

Ces valeurs sont choisies par tirage aléatoire dans  $[-w_{max}(k), w_{max}(k)] \times [-w_{max}(k), w_{max}(k)]$ .

Pour une distribution gaussienne, les composantes tangentielles de la vitesse de chaque particule sont évaluées de la même manière que pour l'émission de surface.

**Etapas 5 et 6.** Nous renvoyons le lecteur aux étapes 5 et 6 du processus d'émission de surface.

### 3.2.2 Modélisation de sources électromagnétiques

Dans cette partie, nous décrivons les deux principales sources électromagnétiques présentes dans nos applications :

- les modes guidés et plus particulièrement le mode TEM dans un guide coaxial,
- les lignes de transmission positionnées en entrée et en sortie de nos géométries permettant l'injection d'une tension d'entrée et pour lesquelles il est inutile de mailler tout le système.

### Sources guidées : mode TEM

Le mode *Transverse ElectroMagnetic* (TEM) est un mode de propagation de ligne coaxiale, appelée aussi guide coaxial. Cette ligne coaxiale est constituée d'un conducteur central cylindrique de rayon  $r_0$  placé à l'intérieur d'un second cylindre conducteur de rayon  $r_1$  et de longueur  $L$ , de telle sorte que les axes de ces derniers soient coaxiaux, dirigés selon  $Oz$ . Les conducteurs sont supposés parfaits, et l'espace entre ceux-ci est rempli d'un matériau linéaire, homogène et isotrope, de permittivité diélectrique  $\varepsilon$  et perméabilité magnétique  $\mu$  réelles (ligne sans pertes). Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons uniquement au milieu vide, c'est-à-dire  $\mu = \mu_0$  et  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Cette géométrie est représentée dans la figure I.3.10.

Nous imposons alors une source guidée par le biais d'une surface et le mode se propage dans le sens normal à cette surface. Ce mode TEM est caractérisé par des composantes longitudinales de champs nulles. Dans le cas d'une propagation selon l'axe  $Oz$ , nous obtenons :

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{E}(x, y) \cdot e_z = 0 \quad (\text{I.3.231a})$$

$$\mathbf{H}_z = \mathbf{H}(x, y) \cdot e_z = 0 \quad (\text{I.3.231b})$$

Cela signifie que les champs  $\mathbf{E}(x, y)$  et  $\mathbf{H}(x, y)$  sont tous deux dans le plan transverse  $Oxy$ .

Il faut savoir qu'une onde TEM a localement une structure d'onde plane. La fonction source est, quant à elle, donnée analytiquement par une composante de champ  $\mathbf{E}$  radiale telle que :

$$E(t) = \frac{V(t)}{r \ln \left( \frac{r_1}{r_0} \right)} \quad (\text{I.3.232})$$

où  $V(t)$  est un générateur de tension donné analytiquement,  $r_0$  le rayon de l'âme du coax,  $r_1$  le rayon extérieur du coax et  $r$  la distance du point où nous évaluons les champs par rapport au centre du coax. Ces champs sont généralement calculés dans la zone délimitée par les deux cylindres. Par ailleurs, les champs vérifient la relation suivante :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{377} \quad (\text{I.3.233})$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale dans le sens de propagation à la face.

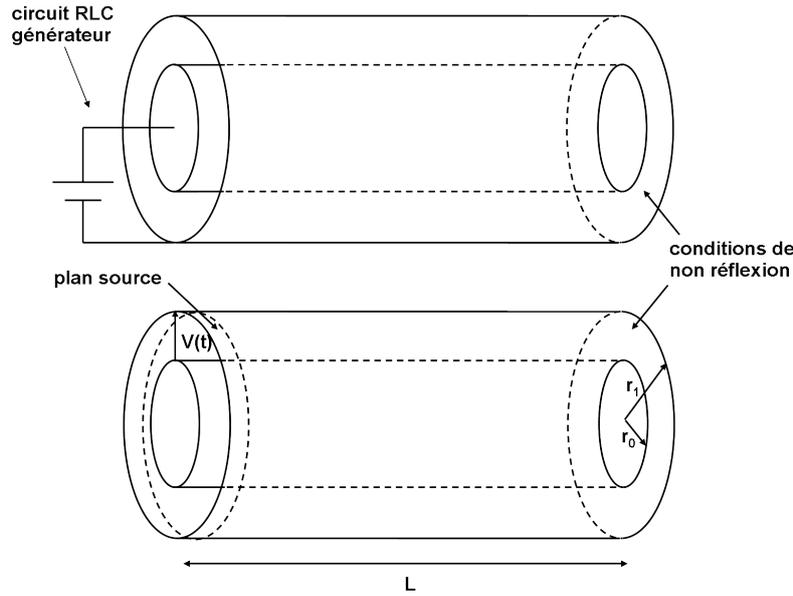


figure I.3.10 – Configuration de la ligne coaxiale : circuit RLC (en haut) et mode TEM (en bas).

### Lignes de transmission

Ce modèle consiste à pouvoir connecter aux extrémités d'une géométrie 3D, des circuits modélisés sous forme de lignes de transmission. Nous réduisons ainsi le domaine de calcul 3D tout en garantissant une bonne approche du modèle réel où l'injection se fait par le biais d'une ligne coaxiale connectée à une source. La source est représentée par un ensemble d'éléments (figure I.3.11) définis par :

- un générateur de tension  $V_0(t)$ ,
- une résistance interne  $R_0$  au générateur,
- une inductance interne  $L_0$  au générateur,
- une capacité interne  $C_0$  au générateur.

La tension  $V(t)$  aux bornes du générateur est alors donnée par :

$$V(t) = V_0(t) + R_0 I(t) + L_0 \frac{\partial I(t)}{\partial t} + C_0 \int_0^t I(s) ds \quad (\text{I.3.234})$$

où  $I(t)$  est le courant aux bornes du générateur.

Pour approcher la propagation sur la ligne coaxiale, nous utilisons le modèle des lignes de propagation, plus communément appelé aussi "équations des télégraphistes" :

$$L \frac{\partial I}{\partial t} + R I = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{I.3.235a})$$

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + G I = \frac{\partial I}{\partial x} \quad (\text{I.3.235b})$$

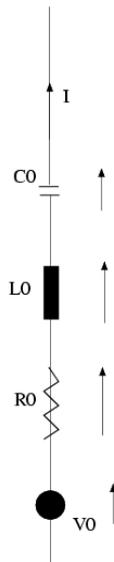


figure I.3.11 – Schéma électrique du modèle de générateur considéré.

Dans ce modèle, qui est 1D, la ligne coaxiale est découpée en tronçons sur lesquels nous définissons une résistance  $R$ , une inductance  $L$ , une capacité  $C$  et une conductance  $G$  par unité de longueur, comme cela est illustré sur la figure I.3.12.

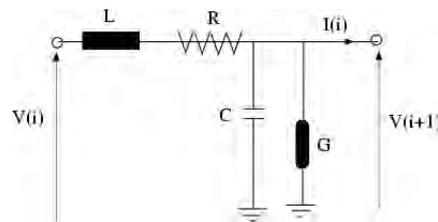


figure I.3.12 – Modèle de lignes de transmission.

Le couplage entre la géométrie 3D et la ligne de transmission s'effectue au travers des conditions de continuité de courant et de tension entre les deux éléments. Pour cela, nous imposons en bout de ligne de transmission, une tension évaluée à l'aide des champs électriques en frontière du domaine de calcul 3D et en condition limite du domaine 3D, un champ magnétique donné par le courant en bout de la ligne de transmission. Plus précisément, la tension est évaluée par l'intégration du champ  $E$ , le long d'un segment de droite reliant l'âme au blindage de la géométrie coaxiale et le champ magnétique par la loi d'Ampère. En effet, nous avons  $E(r, t) = -\nabla_r V(r, t)$  et  $H(r, t) = \frac{I(r, t)}{2\pi r}$ , où  $H(r, t)$  définit l'amplitude du champ magnétique constant en  $\theta$  et tangent en  $e_\theta$ .

Pour résoudre les équations de ligne, nous utilisons un schéma de type Différences Finies de type "Leap-Frog" en temps et en espace, comme dans le cas du schéma de Holland [Holland et Simpson (1981)]. Pour cela, nous découpons chaque tronçon de lignes en mailles pour satisfaire à un critère de précision spatiale. En effet, comme pour le maillage 3D, le maillage 1D de la ligne doit être inférieur à  $\frac{\lambda}{n}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde minimale du spectre de la source injectée et  $n$  un entier (10 par exemple). Pour réaliser ce maillage 1D, nous déterminons à partir du

maillage 3D, une longueur ramenée à une distance  $d$  entre 2 degrés de liberté correspondant à la distance minimale pour l'ordre 1. Par conséquent, nous choisissons  $d = \min_i \left( \frac{h_i}{r_i} \right)$  où  $h_i$  et  $r_i$  correspondent à la longueur et à l'ordre de l'élément  $i$ . La valeur  $h_i$  est donnée par une moyenne sur les distances entre le centre de gravité et les sommets de l'élément.

Nous définissons, ensuite, sur la ligne ainsi discrétisée, des inconnues à chaque extrémité de segment pour la tension et au centre de chaque élément pour le courant. La discrétisation spatio-temporelle des équations sur une maille s'écrit :

$$L \frac{I_{i+1/2}^{n+1/2} - I_{i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + R \frac{I_{i+1/2}^{n+1/2} + I_{i+1/2}^{n-1/2}}{2} = \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} \quad (\text{I.3.236a})$$

$$C \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + G \frac{V_i^{n+1} + V_i^n}{2} = \frac{I_{i+1/2}^{n+1/2} - I_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (\text{I.3.236b})$$

Sur les mailles en extrémité, la tension est fournie, soit par le générateur interne, soit par l'intégrale du champ électrique du domaine 3D sur une droite comme cela a été indiqué précédemment.

Dans ce système d'équations, il est aussi important de prendre un pas de temps qui assure la stabilité du schéma. Nous pouvons montrer en particulier que, sur le système sans résistance et sans conductance, le critère de stabilité est donné par  $\Delta t \leq \Delta x \sqrt{LC}$ . Dans le cas où ce pas temporel est inférieur au pas minimal pris pour le calcul des champs, il faut utiliser un pas local à la ligne, en considérant que durant les itérations intermédiaires, les valeurs de champs n'évoluent pas.

# SIMULATIONS NUMÉRIQUES

# 4

## SOMMAIRE

4.1 LIGNE COAXIALE . . . . .	93
4.2 DIODE . . . . .	102

DANS ce chapitre, nous présentons les résultats numériques obtenus avec notre approche GD-PIC présentée dans le chapitre précédent. Les résultats sont comparés à des résultats analytiques et à ceux obtenus par d'autres méthodes, sur différentes configurations. Nous verrons que les solutions nous confortent dans la validation de l'approche GD-PIC proposée. Dans les différentes configurations étudiées, nous nous sommes intéressés à des dispositifs coaxiaux et plus particulièrement à :

- la ligne coaxiale,
- la diode.

Pour chaque configuration, nous ne simulons qu'une partie de la structure en tronquant celle-ci à l'aide de conditions limites non réfléchissantes de type Silver-Muller. En ce qui concerne la source, celle-ci est définie par une tension de haute intensité portée entre l'anode et la cathode de la géométrie. Dans l'ensemble de nos configurations, l'anode est représentée par le conducteur extérieur du coax ou blindage et la cathode par le conducteur interne noté aussi âme de la ligne. La forme de la tension utilisée est définie par la fonction rampe  $f(t)$  suivante :

$$f(t) = \frac{V_0 t}{1.e - 9} \quad \text{si } t < 1.e - 9s$$

$$f(t) = V_0 \quad \text{si } t > 1.e - 9s$$

avec  $V_0 = 4.e6V$ .



## 4.1 LIGNE COAXIALE

Dans ce premier exemple, la géométrie est constituée d'une ligne coaxiale dont le rayon interne  $r_0$ , le rayon externe  $r_1$  et la longueur  $L$  sont respectivement égaux à  $0.1m$ ,  $0.2m$  et  $0.6m$ . Tout d'abord, nous allons traiter cet exemple canonique sans tenir compte des particules afin de vérifier notre modèle de source et le choix de nos conditions limites. En effet, dans une ligne coaxiale, supposée infinie nous savons que seul le mode TEM se propage. Nous rappelons que ce mode est défini par un champ électrique  $E$  radial et une propagation  $k$  suivant l'axe de la ligne. Le champ magnétique est alors donné par :

$$H = \frac{1}{Z_0} k \times E$$

où  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377$  définit l'impédance du vide. Pour prendre en compte la tension excitatrice, nous pouvons donc la représenter sous forme d'un mode guidé de type TEM que nous introduisons par l'intermédiaire d'un plan. Dans le sens de propagation du mode, nous ajoutons un champ incident induit par la source et dans l'autre sens, nous retranchons celui-ci aux champs calculés. Les valeurs électriques et magnétiques de ce champ induit sont connues et données analytiquement par :

$$E(r, \theta) = \frac{V_0}{r \text{Log}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \quad (\text{I.4.1a})$$

$$H(r, \theta) = \frac{k \times E(r, \theta)}{Z_0} \quad (\text{I.4.1b})$$

où  $r$  et  $\theta$  définissent les coordonnées polaires.

Pour pouvoir valider notre modèle numérique, nous relèverons dans les simulations, le champ dans le volume de calcul à différents temps, ainsi que la tension à différentes positions sur l'axe de la ligne coaxiale. La figure I.4.1 présente la configuration et le maillage de la géométrie utilisée dans nos simulations. Nous notons qu'il est nécessaire d'utiliser deux conditions aux limites absorbantes pour borner le domaine de calcul afin d'éviter des réflexions parasites aux bords du domaine.

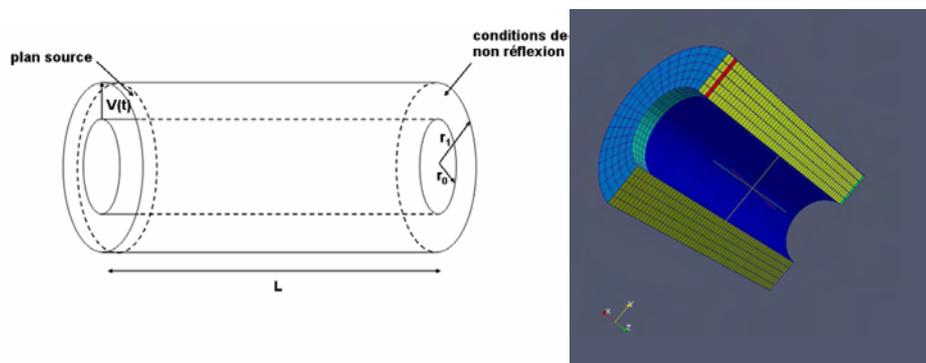


figure I.4.1 – Configuration étudiée et maillage de la géométrie.

En terme de résultats obtenus, la figure I.4.2 représente les valeurs de tensions entre l'anode et la cathode relevées à différentes positions sur la longueur de la ligne coaxiale. Quant à la figure I.4.3, elle donne une répartition des champs électriques et magnétiques sur une coupe axiale au temps  $t = 1.e - 8s$ .

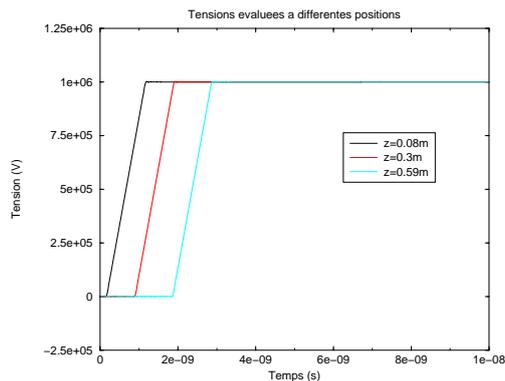


figure I.4.2 – Tensions obtenues à différentes positions sur la ligne.

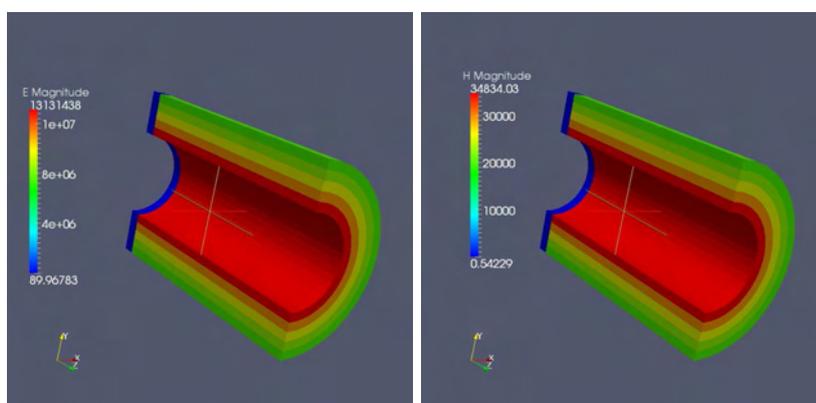


figure I.4.3 – Champs  $E$  et  $H$  obtenus dans le volume au temps  $t = 1.e - 8s$ .

Nous retrouvons, sur ces résultats, un champ représentatif d'un mode TEM dans la cavité et nous remarquons que les valeurs de tensions obtenues sont correctes. En effet, la tension entre l'anode et la cathode doit rester identique à celle injectée dans toute la ligne coaxiale. Suivant la position où celle-ci est observée, nous devons uniquement avoir un décalage dans le temps dû au délai de propagation. C'est ce qui est observé sur la figure I.4.2.

Il est clair que la configuration étudiée est axisymétrique et que celle-ci aurait pu être traitée directement par un modèle 2D axisymétrique, beaucoup plus rapide et performant. Dans ce travail de thèse, nous ne nous sommes pas intéressés à ce type d'approche puisque le but de l'outil n'était pas de traiter des géométries axisymétriques. Toutefois, pour réduire les coûts de calcul, nous nous sommes intéressés à la possibilité de prendre en compte des géométries périodiques. Dans le cadre Maxwell, cela ne présente pas de difficultés majeures, si ce n'est qu'une modification des termes de saut au niveau de chaque frontière périodique. En particulier, il faut alors définir une bijection entre chaque cellule des faces périodiques (figure I.4.4). Les termes de saut des frontières sont ensuite évalués comme ceux entre deux cellules du domaine de calcul. Nous avons appliqué cette possibilité à la configuration étudiée en ne prenant qu'un quart de la géométrie de l'objet de  $0$  à  $45^\circ$  et en imposant une condition de périodicité angulaire sur les faces frontières de l'objet, comme cela nous est donné sur la figure I.4.5.

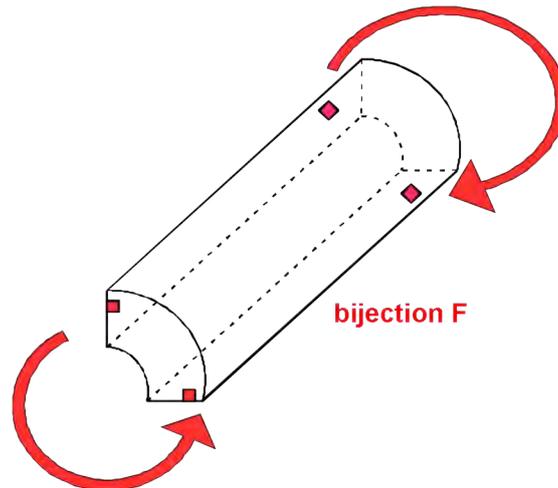


figure I.4.4 – Schéma d'une configuration périodique avec la bijection entre cellules de faces périodiques.

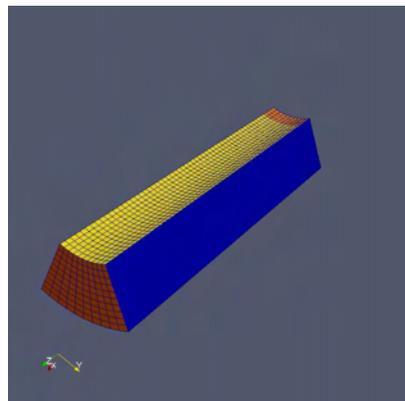


figure I.4.5 – Géométrie périodique étudiée.

Les figures I.4.6 et I.4.7 représentent respectivement les tensions calculées et les champs obtenus dans les mêmes conditions que la configuration complète.

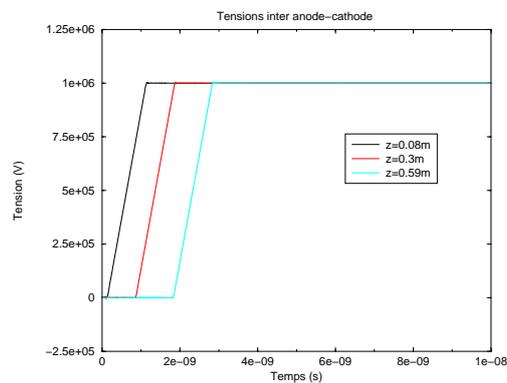


figure I.4.6 – Tensions observées dans la configuration périodique.

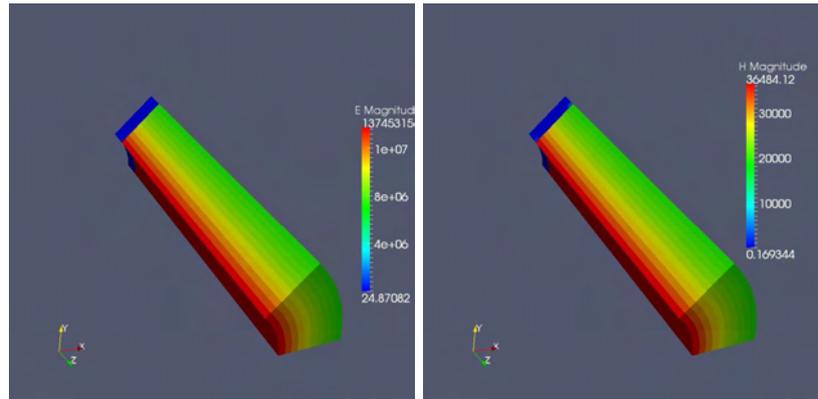


figure I.4.7 – Répartition des champs  $E$  et  $H$  à  $t=1.e-8s$  dans la configuration périodique.

Nous notons sur ces derniers résultats une parfaite similitude avec ceux obtenus dans la configuration complète, si ce n'est le gain important en termes de stockage mémoire et de temps CPU que l'on a en plus. En effet, en utilisant une taille de maille à peu près identique dans les deux cas, nous obtenons dans ce cas une solution en 8 fois moins de place mémoire et 8 fois moins de temps calcul. Ceci n'est pas négligeable lorsque nous aurons à traiter des cas plus complexes présentant cette particularité de périodicité.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux simulations PIC avec cette configuration. Pour cela, nous avons porté le niveau de la source  $V_0$  à  $4MV$  et nous avons autorisé à la cathode d'émettre des particules lorsque le champ électrique normal à la surface de celle-ci atteignait  $2.5e7V.m^{-1}$ . Ce seuil est aussi appelé "breakdown field".

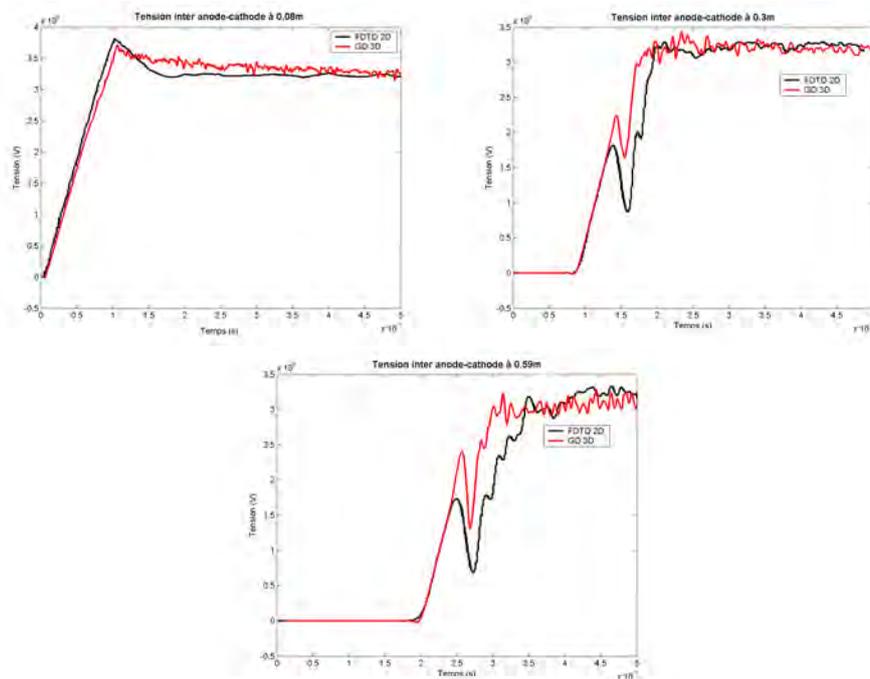


figure I.4.8 – Comparaison de tensions obtenues à partir d'un outil FDTD 2D axisymétrique et de l'outil GD 3D, à différentes positions sur la ligne coaxiale.

Les figures I.4.8 représentent les valeurs des tensions obtenues à partir de notre

outil GD-PIC 3D (en rouge) par rapport à celles d'un outil FDTD 2D axisymétrique disponible au CEA (en noir). Les différentes tensions sont relevées entre l'anode et la cathode aux mêmes positions sur la ligne coaxiale que dans les cas précédents. Nous observons une bonne cohérence de nos résultats, malgré quelques écarts entre nos résultats et ceux provenant de l'outil FDTD 2D. Il est en effet difficile de reproduire exactement la même configuration dans les deux cas car les modèles d'émission ne sont pas identiques. Sur la première figure, la tension calculée à  $0.08m$  sur la ligne, augmente fortement, au début de la simulation, pour atteindre  $4e5V$ , soit le niveau de la source. De part la présence des particules, ce seuil ne sera jamais atteint. La tension tend à se stabiliser à environ  $3.25e5V$ , en fin de simulation. Dans la seconde figure, la tension est évaluée au milieu de la ligne. Jusqu'à  $1.5e - 9s$ , la tension est nulle ; il s'agit du temps mis pour que les particules soient émises et se déplacent pour atteindre le milieu de la ligne coaxiale. Ensuite, la tension augmente jusqu'à  $2.2e6V$ , diminue, puis augmente de nouveau pour enfin se stabiliser à environ  $3.25e + 5V$  en fin de simulation. Dans la dernière figure, nous montrons des comportements similaires à la deuxième figure avec un décalage dans le temps ; ceci étant dû à l'évaluation de la tension en fin de ligne.

Dans les figures I.4.9, nous donnons une représentation d'émission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ électrique à différents temps de simulation. Les particules sont émises par la cathode quand le champ électrique dépasse le "breakdown field". Nous observons que ces particules se déplacent le long de la ligne, attirées par l'anode. Lorsqu'elles atteignent l'anode, les particules sont absorbées.

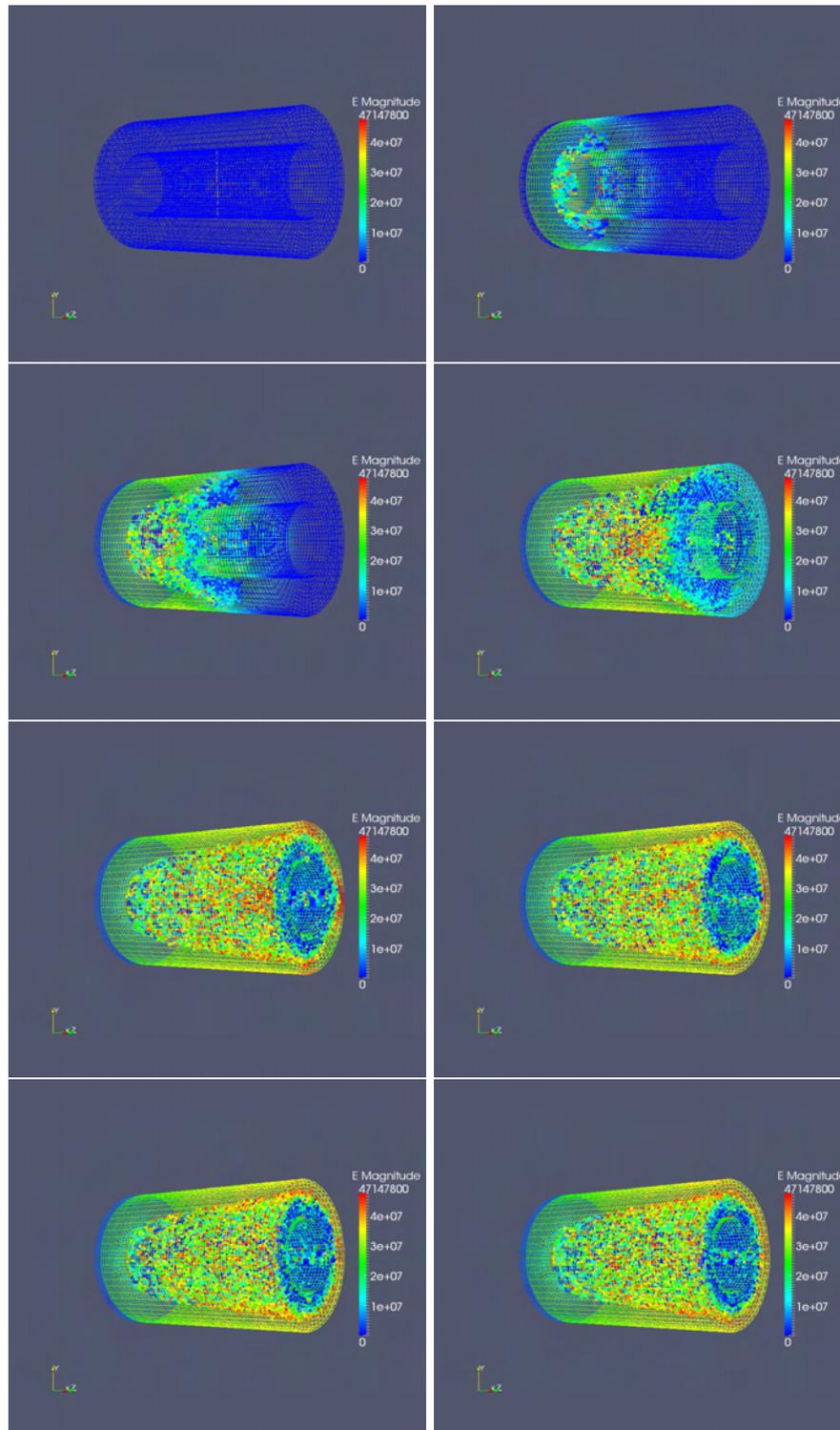


figure I.4.9 – Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ E, à différents temps de simulation.

Les figures I.4.10 nous donnent un aperçu de l'évolution du champ E à différents temps de simulation. Ce champ dépasse bien le seuil de  $2.5e7V.m^{-1}$ .

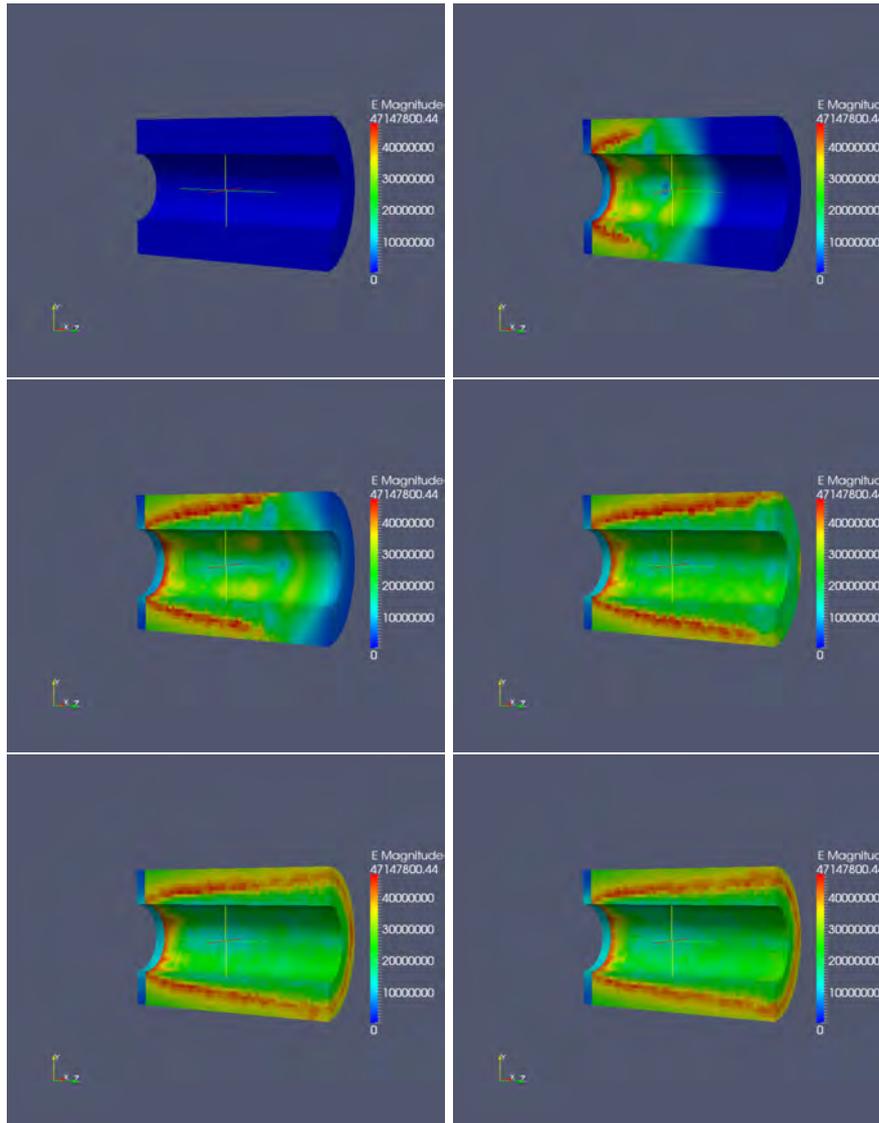


figure I.4.10 – Evolution du champ  $E$  à différents temps de simulation.

Comme il a été mentionné précédemment, nous avons développé dans l'outil la possibilité de simuler nos problèmes physiques avec des géométries périodiques. Testons l'efficacité de ce développement sur la configuration précédente. Pour cela, nous considérons une géométrie périodique avec différentes valeurs d'angle  $\theta$ . Nous comparons les résultats obtenus dans la configuration complète avec ceux dans le cas de géométries périodiques. Dans les figures I.4.11, nous avons quelques écarts entre les tensions provenant de la configuration complète et celles pour différents angles  $\theta$  de la géométrie périodique. Cependant, les résultats ont un bon comportement et ils sont similaires entre eux pour les différents angles. Les tensions données pour l'angle le plus élevé, soit  $45^\circ$ , s'approchent le plus de celles provenant de la configuration complète. Nous pouvons expliquer cela par le fait que le problème numérique, en particulier l'émission de particules, n'est pas parfaitement axisymétrique. En effet, nous remarquons que toutes les surfaces d'une couronne n'émettent pas parfaitement en même temps le même nombre de particules ayant les mêmes vitesses ; ce qui explique la différence entre les configurations périodique et complète. De plus, avec une configuration complète, il y a un effet de moyenne sur l'émission

des particules qui est plus réaliste. Ce problème n'existe pas lorsque nous faisons des calculs uniquement sur les champs.

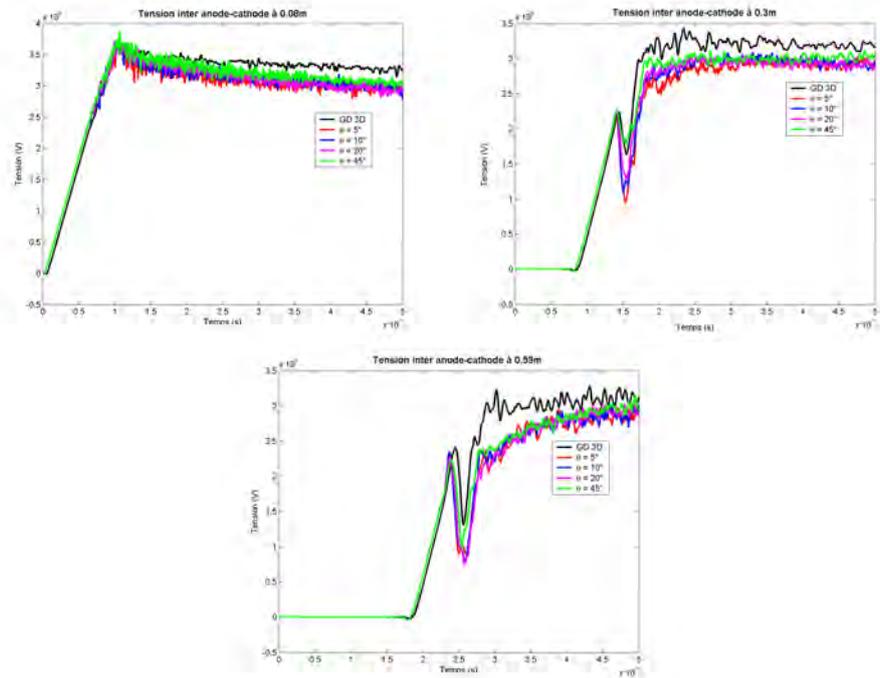


figure I.4.11 – Comparaison de tensions obtenues pour différents angles  $\theta$  par rapport à celles d'un outil GD-PIC 3D, à différentes positions sur la ligne coaxiale.

Par ailleurs, en utilisant à peu près la même taille de mailles dans les différentes configurations, nous obtenons des temps de simulation plus petits pour des géométries périodiques, comme cela est indiqué dans le tableau I.4.1.

		CPU time
Configuration	$\theta = 5^\circ$	25m40s
	$\theta = 10^\circ$	54m52s
	$\theta = 20^\circ$	108m47s
	$\theta = 45^\circ$	237m39s
	3D entier	$\approx 1,5$ jours

table I.4.1 – Temps CPU des simulations pour différents angles  $\theta$  dans le cas périodique et pour la configuration complète.

Les figures I.4.12 montrent l'émission de particules à partir de la cathode quand le "breakdown field" est atteint, pour une géométrie périodique d'angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$ , à différents temps de simulation.

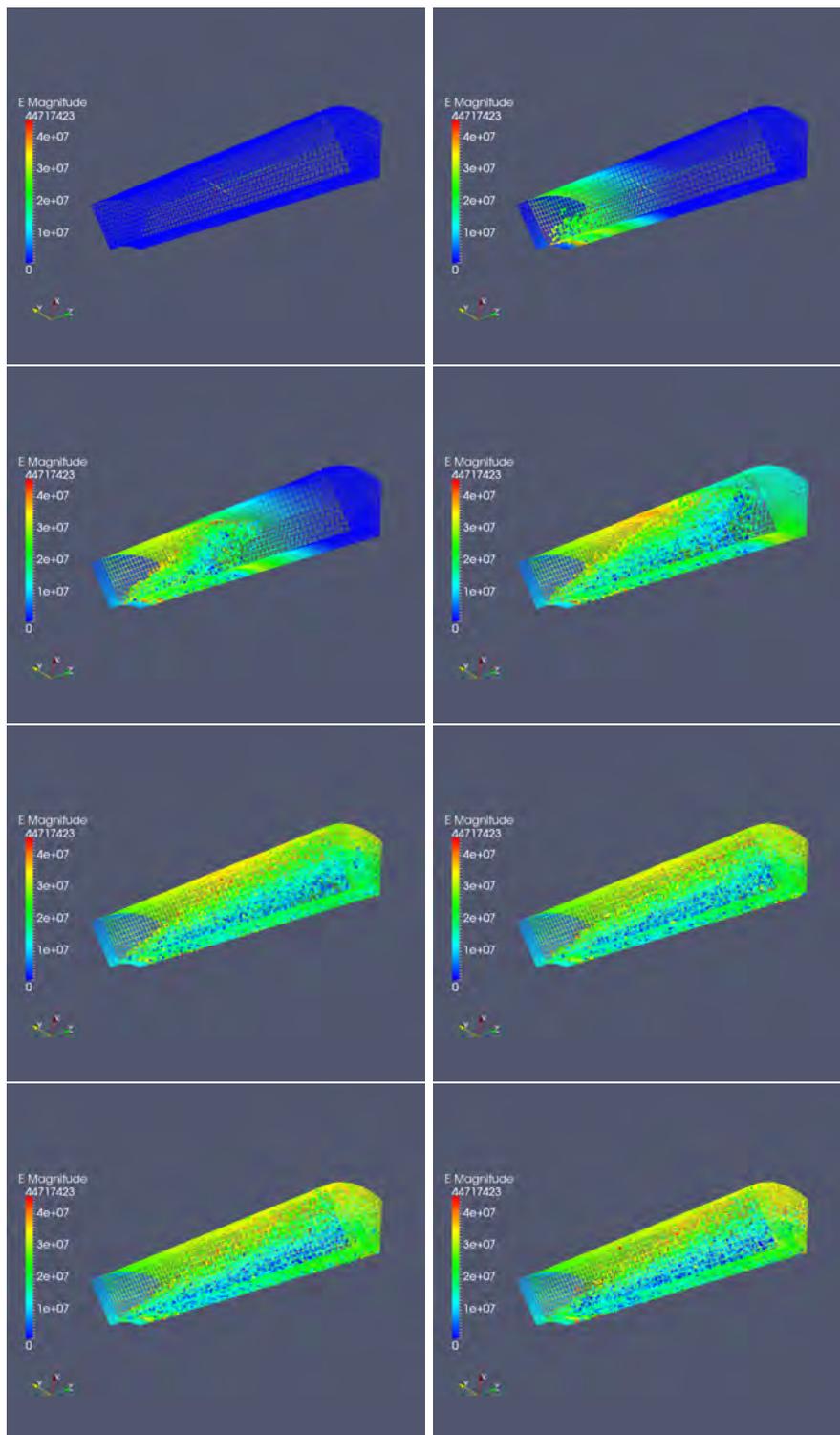


figure I.4.12 – Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ  $E$ , pour une géométrie périodique d'angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$ , à différents temps de simulation.

De manière générale, la configuration périodique permet de réduire les temps de calcul et le stockage mémoire par rapport à la configuration complète. Cependant, nous avons des résultats de tensions un peu plus précis pour la configuration complète, dus certainement à une perte d'émission de particules dans la configuration périodique.

## 4.2 DIODE

Dans cette section, nous traitons la simulation d'une diode pour une configuration complète et une configuration périodique d'angle  $5^\circ$ . La configuration est la même que celle de la ligne coaxiale, à l'exception des longueurs des deux cylindres, comme cela est illustré sur la figure I.4.13. Nous conservons les mêmes paramètres qui ont été fixés dans le cas précédent, à savoir la discrétisation, les rayons interne et externe des deux cylindres et la source excitatrice en mode TEM. Le "breakdown field" est également de  $2.5e7V.m^{-1}$ .

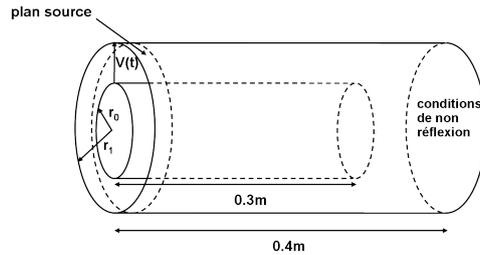


figure I.4.13 – Configuration de la diode.

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à la configuration périodique d'angle  $5^\circ$ , représentée dans la figure I.4.14, pour étudier le comportement de la diode à moindre coût.

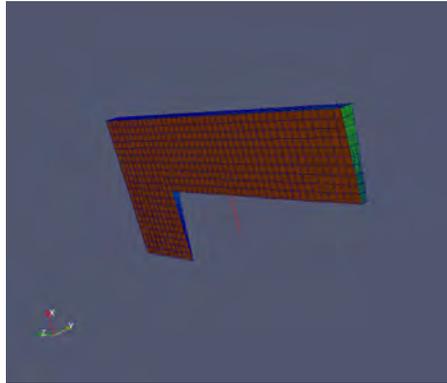


figure I.4.14 – Maillage de la diode pour une géométrie périodique d'angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$ .

Dans les figures I.4.15, nous donnons une représentation de l'émission des particules à partir de la cathode, avec l'évolution du champ E, à différents temps de simulation. En ce qui concerne les figures I.4.16, elles donnent une évolution du champ E aux mêmes temps de simulation.

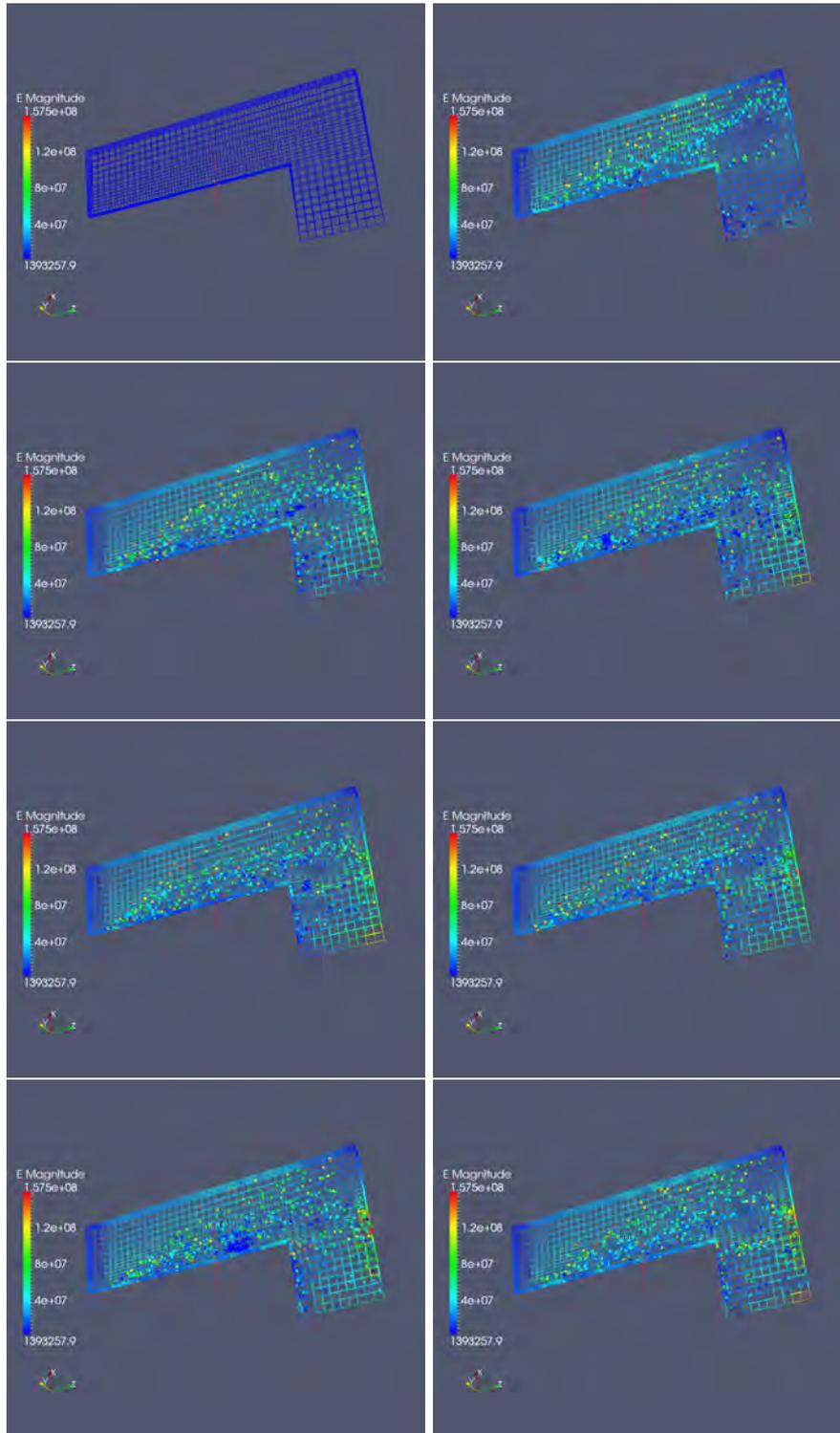


figure I.4.15 – Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ  $E$ , pour une géométrie périodique d'angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$ , à différents temps de simulation.

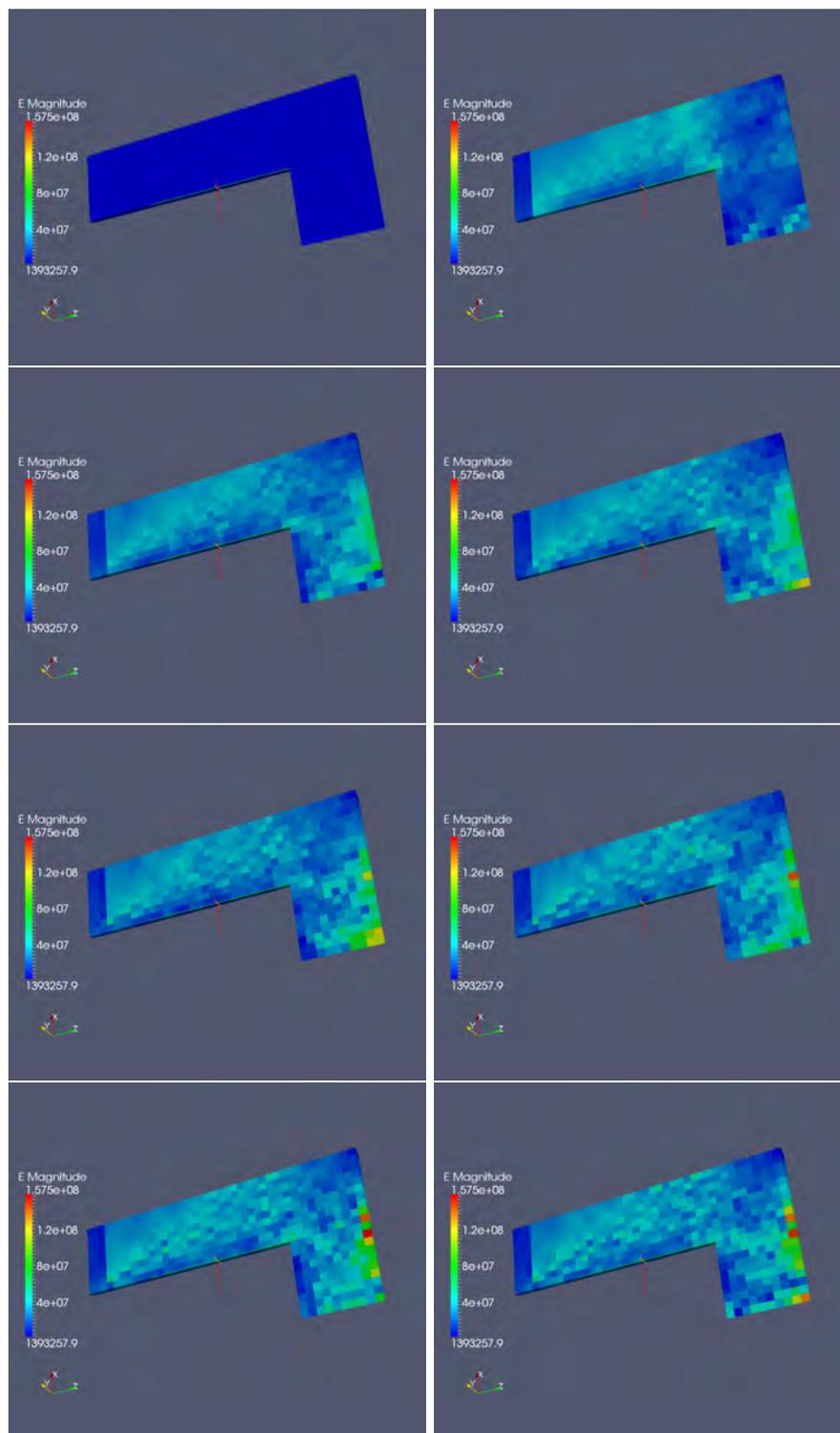


figure I.4.16 – Evolution du champ  $E$  pour une géométrie périodique d'angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$ , à différents temps de simulation.

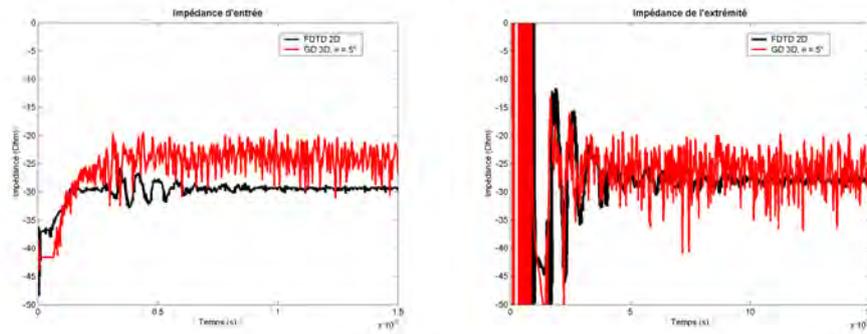


figure I.4.17 – Comparaison des impédances d'entrée (à gauche) et de l'extrémité (à droite) obtenues avec l'outil FDTD 2D axisymétrique (en noir) et avec l'outil GD-PIC 3D (en rouge) dans une configuration périodique d'angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$ .

Nous avons comparé les valeurs d'impédance en entrée (à  $0.03m$ ) et à l'extrémité de la cathode (à  $0.3m$ ) évaluées avec les outils GD-PIC 3D (en rouge) et FDTD 2D axisymétrique du CEA (en noir), dans les figures I.4.17. Les solutions sont relativement correctes, notamment les impédances d'extrémité (à droite) qui sont très similaires. En revanche, nous observons des écarts entre les impédances en entrée (à gauche) même si les comportements sont identiques. Notons que l'impédance en entrée a été évaluée par une division de la tension par le courant autour de l'anode en entrée. L'impédance à l'extrémité de la cathode provient de la division de la tension évaluée à  $0.3m$  par le courant autour de l'anode à l'extrémité de la cathode. D'après les figures I.4.17, nous obtenons une impédance d'entrée d'environ  $25\text{ Ohm}$  et une impédance en extrémité de la cathode d'environ  $27\text{ Ohm}$ . Nous avons une très bonne approximation comparée à l'impédance d'extrémité évaluée à  $28\text{ Ohm}$  par le code du CEA. En revanche, il existe un écart d'environ  $5\text{ Ohm}$  pour les impédances d'entrée ; ce qui est moins précis.

Ensuite, nous avons simulé le cas complet de la diode dont le maillage est illustré dans la figure I.4.18, dans le but de confirmer les résultats précédents sur la géométrie périodique.

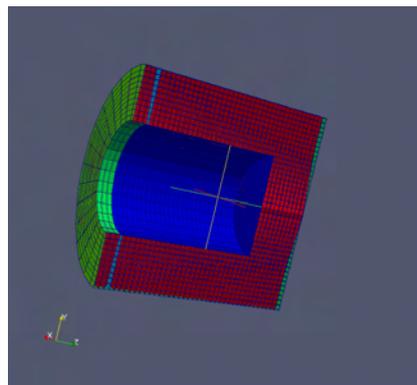


figure I.4.18 – Maillage de la diode pour une géométrie complète.

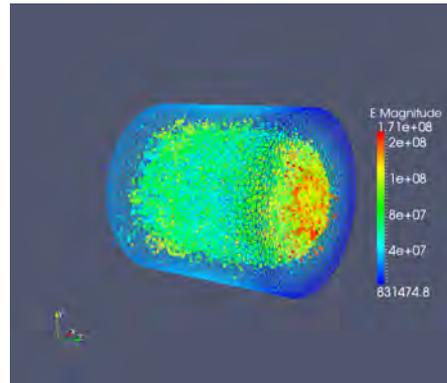


figure I.4.19 – Emission de particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ  $E$ , pour la géométrie complète, en fin de la simulation.

La figure I.4.19 représente l'émission des particules à partir des surfaces de l'âme avec l'évolution du champ  $E$ , pour la géométrie complète de la diode, en fin de la simulation.

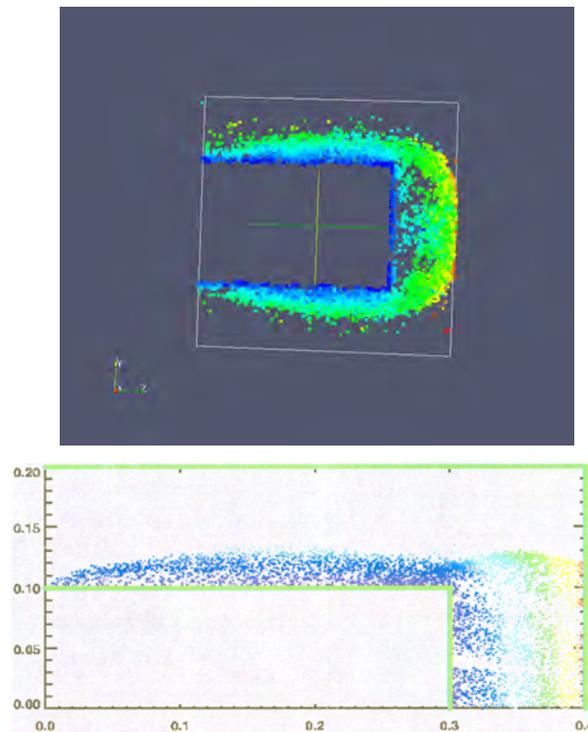


figure I.4.20 – Comparaison des résultats numériques entre notre outil GD-PIC 3D en coupe (en haut) et le code axisymétrique 2D du CEA (en bas) au temps de simulation  $t = 1.5e - 8s$ .

Dans les figures I.4.20, nous comparons l'émission des particules à partir de la cathode, à  $t = 1.5e - 8s$ , pour l'outil GD-PIC 3D par une coupe (en haut) et celui du CEA (en bas). Nous obtenons des résultats similaires entre les deux codes; en effet, les particules se concentrent autour de l'âme en fin de simulation et avec une concentration plus importante de particules vers l'anode.

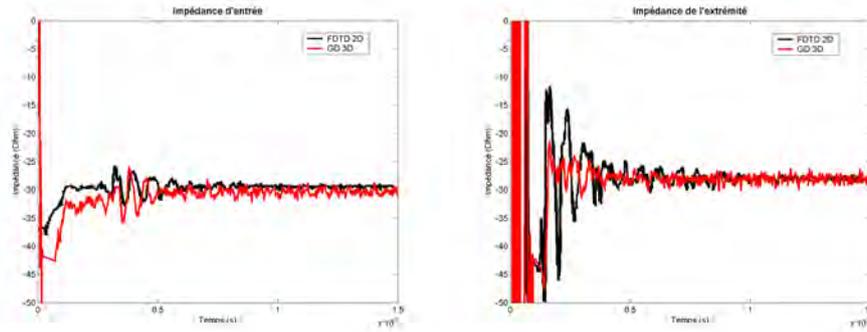


figure I.4.21 – Comparaison des impédances d'entrée (à gauche) et de l'extrémité (à droite) obtenues avec l'outil FDTD 2D axisymétrique (en noir) et avec l'outil GD-PIC 3D (en rouge) pour la une configuration complète.

Comme dans le cas périodique, nous évaluons les valeurs d'impédance en entrée (à  $0.03m$ ) et à l'extrémité de la cathode (à  $0.3m$ ) avec notre outil GD-PIC 3D (en rouge) que nous comparons avec celles obtenues avec l'outil FDTD 2D axisymétrique du CEA (en noir), dans les figures I.4.21. Nous avons une meilleure correspondance des résultats que pour le cas périodique, ce que nous avons déjà observé sur le cylindre. Ceci peut provenir du fait d'une meilleure représentation de l'émission des particules dans la simulation 3D.

	CPU time
3D périodique, $\theta = 5^\circ$	25m40s
3D complet	$\approx 3,8$ jours

table I.4.2 – Temps CPU des simulations pour la diode dans les cas périodique et complet avec l'outil GD-PIC 3D.

Dans le tableau I.4.2, nous comparons les temps CPU de simulation du code GD-PIC 3D pour la diode dans les configurations périodique et complète. Il est évident que le cas périodique avec un angle  $\theta$  égal à  $5^\circ$  est largement plus rapide que le cas complet et entraîne aussi un faible stockage mémoire. Cette configuration périodique nous donne dans l'ensemble de bons résultats sur le comportement de la diode alors que la configuration complète est beaucoup plus réaliste et donne des résultats plus précis. Afin d'éviter des coûts de calcul importants, il apparaît intéressant d'utiliser, en calculs préliminaires, une configuration périodique des modèles à tester; ceci permettra de vérifier le comportement attendu de ces modèles. Le calcul 3D pour le cas complet sera ensuite réalisé pour affiner les simulations.



# CONCLUSION

# 5

La première partie de ce mémoire de thèse a fait l'objet d'une étude sur un outil de modélisation de l'interaction plasma/micro-ondes, basé sur un schéma Galerkin Discontinu en vue d'une application à des sources Micro-ondes de Forte Puissance. Cette interaction entre les particules chargées d'un plasma et les champs électromagnétiques est décrite par le système de Maxwell-Vlasov.

Dans le premier chapitre, nous avons fait un bref rappel sur les différentes méthodes ou techniques utilisées pour résoudre ce type de problème, et en particulier sur les choix de la méthode numérique effectués pour la résolution des équations de Maxwell ; le but étant de mieux cerner les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles.

Le deuxième chapitre traite du système Maxwell-Vlasov. Nous nous sommes en particulier focalisés sur le couplage d'une approche Galerkin Discontinue pour la résolution des équations de Maxwell à une méthode particulière, aussi appelée méthode *Particle-In-Cell*.

Dans le troisième chapitre, nous avons établi le formalisme GD pour la résolution des problèmes de Maxwell et de Maxwell-Vlasov, avec le choix d'une correction hyperbolique pour vérifier la loi de conservation de charge. Ensuite, nous avons proposé des approches d'interpolation pour le couplage Champs/Particules de la méthode PIC. Afin d'étudier les avantages et les inconvénients de ces deux méthodes, une étude numérique a été réalisée sur un échauffement thermique d'un plasma dans une cavité. Enfin, nous nous sommes intéressés aux différentes sources Micro-ondes de Forte Puissance nécessaires à nos simulations. Ces sources sont divisées en deux classes ; les sources électroniques et les sources électromagnétiques.

Le dernier chapitre décrit un ensemble de simulations que nous avons pu réaliser dans le cadre de cette thèse. Dans ces simulations, nous avons pris en compte des configurations essentiellement coaxiales, simples qui nous ont permis de valider l'approche GD-PIC 3D proposée.



## **Deuxième partie**

# **Recherche de performances optimales pour le couplage Maxwell-Vlasov par une méthode PIC**



# ÉTAT DE L'ART SUR LES MÉTHODES D'HYBRIDATION



L'évolution actuelle des problèmes électromagnétiques a incité les chercheurs à proposer des solutions efficaces pour résoudre leurs problèmes. Tout d'abord, ceux-ci se sont focalisés sur l'étude de schémas mieux adaptés au système de Maxwell. C'est ainsi que sont apparues des méthodes basées sur des schémas autres que le schéma Différences Finies proposé par Yee, en 1966, pour la résolution des équations de Maxwell. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer les travaux effectués sur les formalismes des méthodes intégrales temporelles [Rao et Wilton (1991), Pujols (1991), Terrasse (1993), Lange (1995)], ceux sur des schémas de type Volumes Finis [Bonnet (1998), Remaki (1999)] et, plus récemment, Galerkin Discontinu [Pernet (2004), Hesthaven et Warburton (2002), Canouet et al. (2005)]. Toutefois, devant la complexité des structures, il s'est avéré que traiter la totalité de la scène avec une seule méthode n'était pas forcément la solution la plus judicieuse. D'autres recherches ont été alors développées sur la possibilité d'hybrider différentes méthodes.

Dans les méthodes d'hybridation proposées, généralement, la géométrie définit le type d'hybridation que l'on fait. Par exemple, pour une géométrie comportant des structures courbes avec des cavités, nous cherchons à utiliser différentes méthodes ayant chacune leurs propres avantages. A l'intérieur des cavités, nous souhaitons éviter les erreurs à la fois dissipatives et dispersives. Pour cela, nous nous intéressons à des méthodes dont l'approximation spatiale est très précise (par exemple la méthode GD). Pour tenir compte des frontières courbes des objets, nous utilisons des méthodes utilisant des maillages non structurés, plutôt à base de tétraèdres (schéma Volumes Finis). Dans le reste du domaine de calcul, nous cherchons, avant tout, des méthodes rapides sans contrainte particulière sur le maillage (schéma Différences Finies).

L'hybridation à laquelle nous pensons se rapproche donc d'une méthode par décomposition de domaines. Ce type de méthode a été très largement étudié pour d'autres problèmes physiques. Les premiers travaux concernent la résolution de l'équation de Poisson et ils ont été proposés à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle par Schwarz [Schwarz (1869)]. Depuis, il existe un grand nombre de variantes des méthodes de Schwarz avec et sans recouvrement de domaines qui ont été proposées dans la communauté scientifique [Bounaim (1999)]. En particulier, dans le domaine de la mécanique des fluides, il existe les méthodes dites de Chimère qui s'apparentent à ces techniques [Desquesnes et al. (2006)]. Ces diverses approches se placent dans la classe des méthodes dites non conformes, c'est-à-dire des méthodes qui ne garantissent pas la coïncidence nodale entre les maillages des différents sous-

domaines. Toutefois, dans le domaine électromagnétique, les chercheurs se sont tout d'abord intéressés à des approches conformes ou semi-conformes garantissant une coïncidence nodale complète ou partielle entre les différents maillages. Plus précisément, nous entendons, dans la notion de "semi nodal", le raffinement de maillages.

Dans le domaine des méthodes dites conformes, de manière non exhaustive, nous pouvons citer les travaux menés dans le domaine temporel sur l'hybridation FDTD/FVTD pour approcher correctement les géométries des objets. En particulier, dans [Ferrières et al. (2005)], une hybridation est proposée entre un schéma VF décentré et le schéma de Yee dont la particularité est de "coller" deux tétraèdres à un cube pour garantir la coïncidence nodale. Une hybridation entre un schéma VF centré et le schéma de Yee est aussi introduite dans le cas des maillages cubiques pour les deux méthodes [Remaki (1999)]. Un critère de stabilité pour la méthode hybride a pu alors être démontré. Ensuite, Edelvik s'est intéressé à une hybridation entre un schéma VF décentré et un schéma FDTD [Edelvik et Ledfelt (2000)]. La particularité du schéma VF est d'avoir les inconnues  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  positionnées sur les sommets, respectivement des maillages primal et dual. Cependant, la difficulté de ces hybridations reste à assurer la stabilité du schéma hybride. Ceci peut être montré sous certaines conditions, comme le choix des éléments et des inconnues aux interfaces. Avec ce type de conditions, nous évitons ainsi une interpolation des valeurs frontières dont on peut difficilement assurer la stabilité à long terme. Ceci a été mis en évidence dans le cas de raffinement de maillages pour la méthode FDTD [Fouquet (2000)]. Des solutions ont également été proposées pour éviter l'instabilité par la résolution d'un système linéaire au niveau des interfaces [Collino et al. (2006)]. Cependant, cette technique est coûteuse dans le cas de schémas temporels 3D et donc peu utilisée.

Devant cette difficulté, d'autres personnes ont étudié la possibilité de maillages non conformes en adaptant les méthodes de Schwarz dans le domaine de l'électromagnétisme. Ceci a été fait avec succès pour l'aspect fréquentiel. En particulier, dans [Lacour (1999)], Lacour effectue une hybridation par continuité des champs aux interfaces des différents sous-domaines. Pour cela, il détermine des matrices d'admittance dans chaque sous-domaine reliant le champ électrique au champ magnétique. En revanche, dans le domaine temporel, l'utilisation de la technique de Schwarz s'avère beaucoup plus délicate pour assurer la stabilité du schéma à long terme [Dolean et al. (2008)]. Pour assurer cette stabilité, une méthode de filtrage de la solution à chaque pas de temps a été proposée [Donderici et Teixeira (2005)]. Cette méthode élimine les modes liés aux interpolations qui ne sont pas présents dans la source. Cela reste toutefois très délicat à manier puisqu'il faut pouvoir séparer ces modes parasites des modes physiques.

Une méthode plus intéressante ne posant pas ce problème d'instabilité repose sur une partition de l'unité [Babuska et Melenk (1996)]. Le principe de cette méthode consiste à multiplier le système par une fonction de transition définie sur le domaine global de calcul. Ceci permet d'obtenir deux systèmes à résoudre sur deux sous-domaines avec recouvrement dont les termes de couplages sont des termes sources existant uniquement dans la zone de recouvrement. En particulier, dans le domaine de la mécanique, cette méthode a été appliquée avec succès dans le cas des problèmes multi-échelles [BenDhia (1998), Rateau (2003)]. Elle a également fait l'objet d'étude pour l'hybridation de modèles physiques avec le couplage des équations

cinétique et hydrodynamiques [Degond et al. (2005)] et celui des équations cinétique et de diffusion [Degond et Jin (2005)].

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes davantage focalisés sur l'application de ce dernier type d'approches, pour les équations de Maxwell et le système Maxwell-Vlasov.



# PRINCIPE DE LA MÉTHODE HYBRIDE DE TYPE PATCH

# 2

LA recherche bibliographique que nous avons menée sur les méthodes de décomposition de domaines nous a conduit à porter un intérêt particulier pour une approche basée sur la partition de l'unité [Babuska et Melenk (1996)]. Cette technique a été notamment utilisée en mécanique dans des stratégies de calcul multi-échelles pour prendre en compte des fissures dans des structures [BenDhia (1998), Rateau (2003)]. D'autre part, cette méthode a été adaptée pour le couplage de différents modèles [Degond et al. (2007), Degond et al. (2005), Degond et Jin (2005)], dans le contexte des équations cinétique et hydrodynamiques et dans celui des équations cinétique et de diffusion. Dans ce type de couplage, les conditions aux bords de la zone de recouvrement ne sont plus nécessaires. Ceci s'explique, par l'utilisation d'une zone de recouvrement et d'une fonction artificielle de transition, notée  $\chi$ , dont la particularité est de varier avec une décroissance "lisse" entre 1 et 0 d'un sous-domaine à l'autre. Nous nous sommes basés sur cette méthode pour résoudre le système Maxwell-Vlasov. Afin de mieux appréhender la méthode hybride, ce chapitre est consacré à l'écriture de celle-ci sur un problème quelconque.



La méthode hybride que nous avons développée au cours de ces trois années de thèse est une méthode basée sur la partition de l'unité. Elle permet d'hybrider deux méthodes entre elles sans utiliser de conditions de bords pour assurer le couplage. Le couplage est alors réalisé par l'ajout de termes sources dans une zone de recouvrement entre les deux méthodes. Cette méthode est aussi appelée méthode de type Patch.

Le principe de cette méthode est le suivant. Soit un domaine de calcul  $\Omega$  sur lequel  $U$  est solution du problème :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{A}U, \quad (\text{II.2.1})$$

$\mathcal{A}$  étant une matrice réelle quelconque. Nous découpons le domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec une zone de recouvrement, appelée aussi zone tampon,  $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .

Nous définissons sur  $\Omega$  une fonction de transition  $\chi$ , qui ne dépend pas du temps, telle que :

$$\begin{aligned} \chi &= 1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_{12} \\ \chi &= 0 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_{12} \\ \chi &\in [0, 1] \text{ sur } \Omega_{12} \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

Nous posons  $(U_1) = \chi U$  et  $U_2 = (1 - \chi)U$ . Nous obtenons  $U_1 + U_2 = U$  et nous pouvons remarquer que  $U_1$  et  $U_2$  sont solutions du problème initial (II.2.1) avec un second membre. Elles peuvent également être restreintes sur les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . En multipliant le problème (II.2.1) par  $\chi$  et  $1 - \chi$ , nous obtenons le système couplé suivant :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \chi \mathcal{A}U_1 + \chi \mathcal{A}U_2 \text{ sur } \Omega_1 \quad (\text{II.2.3a})$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = (1 - \chi) \mathcal{A}U_2 + (1 - \chi) \mathcal{A}U_1 \text{ sur } \Omega_2 \quad (\text{II.2.3b})$$

Nous avons deux équations, l'une à résoudre sur  $\Omega_1$  et l'autre sur  $\Omega_2$ . Elles sont couplées par des termes "sources". De plus, nous notons que la condition aux limites de la solution sur chaque sous-domaine au niveau de la zone tampon peut être prise à  $n \times U = 0$  (puisque  $\chi$  ou  $1 - \chi$  est égale à 0, suivant le sous-domaine considéré).

Sur ces deux zones hybridées, nous définissons des maillages indépendants l'un de l'autre et nous appliquons un schéma numérique pour résoudre les équations (II.2.3). La principale difficulté de ce système couplé est l'interpolation des solutions d'un maillage à un autre.



# ÉTUDE PARAMÉTRIQUE SUR UN PROBLÈME MAXWELL 1D

## SOMMAIRE

3.1	FORMALISME DANS LE CADRE 1D . . . . .	123
3.2	DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES . . . . .	124
3.2.1	Application d'un schéma FDTD à un sous-domaine . . . . .	125
3.2.2	Application d'un schéma FVTD à un sous-domaine . . . . .	125
3.2.3	Application d'un schéma GD à un sous-domaine . . . . .	126
3.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	135
3.3.1	Etude d'hybridation de différents schémas . . . . .	136
3.3.2	Influence de la taille de la zone de recouvrement . . . . .	137
3.3.3	Influence de la discrétisation spatiale dans la zone de recouvrement . . . . .	138
3.4	IMPORTANCE DU CHOIX DE LA FONCTION $\chi$ ET APPORT D'UN TERME DE RÉGULARISATION . . . . .	139
3.4.1	Choix de la fonction $\chi$ . . . . .	140
3.4.2	Terme de pénalisation dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD . . . . .	144
3.5	PROPOSITION D'UNE ÉTUDE DE STABILITÉ DU SCHÉMA HYBRIDE EN UNE DIMENSION . . . . .	146
3.5.1	Etude du schéma de Yee en 1D . . . . .	146
3.5.2	Etude du schéma hybride en 1D . . . . .	148
3.6	CONCLUSION . . . . .	150

DANS ce chapitre, nous nous intéressons à l'application de la méthode hybride, décrite dans le chapitre précédent, sur un problème Maxwell 1D afin d'étudier numériquement celle-ci. Dans un premier temps, nous décrivons le formalisme 1D pour le couplage de différents schémas numériques, soient les méthodes FDTD et FVTD et GD. Nous présentons, ensuite, de nombreux résultats numériques qui, comparés à une solution analytique, montrent le comportement de la solution hybride par rapport à un certain nombre de paramètres, comme la discrétisation spatiale et la taille de la zone de recouvrement. Enfin, nous proposons des améliorations de notre modèle hybride afin d'obtenir une solution plus précise. Ces améliorations portent sur le choix de la fonction de transition  $\chi$  qui, nous le verrons, influe sur le comportement de la solution, et sur l'apport d'un terme de régularisation pour diminuer voire faire disparaître les oscillations parasites dans la solution hybride.



### 3.1 FORMALISME DANS LE CADRE 1D

Dans le cadre de cette thèse, nous avons tout d'abord étudié la méthode décrite dans le chapitre précédent, pour une configuration 1D, afin de quantifier ses avantages et ses inconvénients et de vérifier son intérêt par rapport à d'autres méthodes d'hybridation existantes telles que les méthodes de type Schwarz par exemple.

Nous considérons un domaine  $\Omega = [a, b]$  où le système de Maxwell 1D, dans le vide, se met sous la forme :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3.1a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3.1b})$$

$$\mathbf{E}_y(t = 0, x) = \mathbf{H}_z(t = 0, x) = 0 \quad (\text{II.3.1c})$$

où  $\mathbf{E}_y$  est le champ électrique et  $\mathbf{H}_z$  le champ magnétique. Pour avoir un problème bien posé, nous considérons une condition de non réflexion sur les bords du domaine de calcul et pour simplifier les équations, nous poserons  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_y$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_z$ .

Le système d'équations (II.3.1) est alors équivalent à :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (\text{II.3.2})$$

avec  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon_0} \\ -\frac{1}{\mu_0} & 0 \end{pmatrix}$ .

Nous décomposons le domaine spatial  $\Omega = [a, b]$  en deux sous-domaines  $\Omega_1 = [a, d]$  et  $\Omega_2 = [c, b]$  avec un recouvrement partiel de ces sous-domaines tel que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = [c, d] \neq \emptyset$ , comme le montre la figure II.3.1 où la zone de recouvrement est en pointillée.

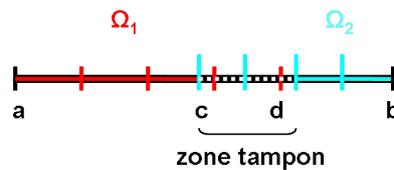


figure II.3.1 – Schéma du domaine de calcul  $\Omega$  avec deux zones  $\Omega_1$  (en rouge) et  $\Omega_2$  (en cyan) à maillages décalés avec la zone de recouvrement, appelée zone tampon (en pointillé noir).

Nous introduisons sur  $\Omega$  la fonction  $\chi$  définie par :

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega_1 \cap \Omega_2 = [a, c] \\ \chi(x) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 \cap \Omega_2 = [d, b] \\ \chi(x) = \frac{x - d}{c - d} & \text{sur } \Omega_1 \cap \Omega_2 = [c, d] \end{cases} \quad (\text{II.3.3})$$

$\chi$  est une fonction linéaire par morceaux.

En posant  $\mathbf{U}_1 = \chi\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_2 = (1 - \chi)\mathbf{U}$  et en multipliant les équations de Maxwell (II.3.2) par  $\chi$ , il est facile de montrer que les valeurs  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  satisfont le système couplé suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} = \chi \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x_1} + \chi \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x_1} \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{II.3.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} = (1 - \chi) \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x_2} + (1 - \chi) \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x_2} \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{II.3.5})$$

De part le choix de  $\chi$ , nous pouvons restreindre la première équation (II.3.4) sur  $\Omega_1$  avec une condition de bord  $\mathbf{E}_1(d) = 0$  et la seconde équation (II.3.5) sur  $\Omega_2$  avec  $\mathbf{E}_2(c) = 0$ . Sur les autres frontières des deux sous-domaines, nous conservons des conditions de non réflexion. Le système (II.3.4-II.3.5) peut ainsi se réécrire en découplant les champs électriques et magnétiques.

Sur le sous-domaine  $\Omega_1$ , nous avons alors :

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = -\chi \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \quad (\text{II.3.6a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = -\chi \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial x_1} \quad (\text{II.3.6b})$$

Et sur le sous-domaine  $\Omega_2$ , nous avons :

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} = -(1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_2} - (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} \quad (\text{II.3.7a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} = -(1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial x_2} - (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_2} \quad (\text{II.3.7b})$$

Dans chaque sous-domaine, nous pouvons alors définir un maillage et un schéma numérique indépendant l'un de l'autre. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux schémas numériques FDTD, FVTD et GD décrits ci-dessous.

## 3.2 DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES

### Discrétisation spatiale

Nous considérons deux grilles cartésiennes  $(x_{1,i})_{i=0,\dots,N_1+1}$  et  $(x_{2,i})_{i=0,\dots,N_2+1}$  telles que  $x_{1,i} = i\Delta x_1$ ,  $i \in [0, N_1 + 1]$  sur le sous-domaine  $\Omega_1$  et  $x_{2,i} = i\Delta x_2$ ,  $i \in [0, N_2 + 1]$  sur  $\Omega_2$ .  $N_1$  et  $N_2$  définissent respectivement le nombre de points de discrétisation internes à  $\Omega_1$  et à  $\Omega_2$ . Les pas de discrétisation spatiale  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$  sont supposés constants respectivement sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

### Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps, nous avons choisi d'utiliser un schéma de type "Leap-frog". Les équations de Maxwell 1D (II.3.1) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{n+1/2} = \mathbf{H}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{E}^n}{\partial x} \\ \mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{H}^{n+1/2}}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II.3.8})$$

où le champ électrique est évalué au temps  $t = (n + 1)\Delta t$  et le champ magnétique au temps  $t = (n + 1/2)\Delta t$ , avec  $\Delta t$  le pas de temps et  $n \in \mathbb{N}$  l'itération temporelle.

### 3.2.1 Application d'un schéma FDTD à un sous-domaine

Plaçons nous dans le cas d'une approximation FDTD dans l'approche hybride, pour le sous-domaine  $\Omega_1$ .

Le schéma de Yee consiste à décaler les grilles de discrétisation spatiale et temporelle pour les champs. Les composantes du champ électrique  $\mathbf{E}_1$  se situent sur les points du maillage alors que celles du champ magnétique  $\mathbf{H}_1$  sont au centre des cellules. En utilisant les développements de Taylor, nous obtenons l'approximation de la solution exacte  $\mathbf{E}_1(x_1, t)$  et celle de  $\mathbf{H}_1(x_1, t)$  au point  $(x_{1,i}, t^n)$  et au point  $(x_{1,i+1/2}, t^{n+1/2})$  :

$$\varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}_{1,i}^{n+1} - \mathbf{E}_{1,i}^n}{\Delta t} = -\chi_i \frac{\mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{1,i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x_1} - \chi_i \frac{\mathbf{H}_{2,i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{2,i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x_1} \quad (\text{II.3.9a})$$

$$\mu_0 \frac{\mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\chi_{i+1/2} \frac{\mathbf{E}_{1,i+1}^n - \mathbf{E}_{1,i}^n}{\Delta x_1} - \chi_{i+1/2} \frac{\mathbf{E}_{2,i+1}^n - \mathbf{E}_{2,i}^n}{\Delta x_1} \quad (\text{II.3.9b})$$

$\chi_l$  est la valeur de la fonction  $\chi(x)$  calculée au point  $x_1(l)$ . Les valeurs des deux derniers termes de chaque équation du système (II.3.9),  $\mathbf{H}_{2,l}$  pour la première équation et  $\mathbf{E}_{2,l}$  pour la seconde, correspondent à des termes liés à la solution calculée dans le sous-domaine  $\Omega_2$  et projetés sur le sous-domaine  $\Omega_1$ . Ces valeurs sont égales à zéro si les inconnues  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{H}_1$  n'appartiennent pas à la zone tampon.

**Remarque 14** Dans le cas où nous utilisons une méthode FDTD pour calculer les champs dans le sous-domaine  $\Omega_2$ , nous obtenons un schéma discret dans  $\Omega_2$  équivalent au système précédent en permutant les indices 1 et 2 dans les équations.

### 3.2.2 Application d'un schéma FVTD à un sous-domaine

Dans cette partie, nous considérons une approximation FVTD dans l'approche hybride, dans le sous-domaine  $\Omega_1$ .

Pour cela, nous définissons une partition  $K = \{V_{1,i}\}_{i=1, N_1}$  de  $\Omega_1$  telle que  $\Omega_1 = \cup_{i=1}^{N_1} V_{1,i}$  où  $V_{1,i} = [x_{1,i+1} - x_{1,i}]$  sont les cellules. Nous intégrons alors les équations de Maxwell modifiées par la méthode hybride (II.3.6) sur chaque volume  $V_{1,i}$  de  $\Omega_1$  :

$$\int_{V_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} dx_1 = \int_{V_{1,i}} -\chi \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_1} dx_1 - \int_{V_{1,i}} \chi \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} dx_1 \quad (\text{II.3.10a})$$

$$\int_{V_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} dx_1 = \int_{V_{1,i}} -\chi \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_1} dx_1 - \int_{V_{1,i}} \chi \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial x_1} dx_1 \quad (\text{II.3.10b})$$

En intégrant par parties les différents termes, nous avons pour la première équation (II.3.10a) :

$$\int_{V_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} dx_1 = -[\chi \mathbf{H}_1]_{\partial V_{1,i}} + \int_{V_{1,i}} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \mathbf{H}_1 dx_1 - [\chi \mathbf{H}_2]_{\partial V_{1,i}} + \int_{V_{1,i}} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \mathbf{H}_2 dx_1 \quad (\text{II.3.11})$$

où  $[\chi \mathbf{H}_1]_{\partial V_{1,i}}$  et  $[\chi \mathbf{H}_2]_{\partial V_{1,i}}$  correspondent à des flux entre les volumes  $V_{1,i}$  et  $V_{1,i+1}$  et sont définis par la différence entre les valeurs des champs électromagnétiques pris au bord de ce volume.

En considérant les champs magnétiques  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\frac{\partial \chi}{\partial x_1} = -\frac{d}{c-d}$  constants sur chaque volume, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}_{1,i+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_{1,i+1/2}^n}{\Delta t} V_{1,i} &= -\chi_{i+1} \mathbf{H}_{1,i+1}^{n+1/2} + \chi_i \mathbf{H}_{1,i}^{n+1/2} - \frac{d}{c-d} \mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} V_{1,i} \\ &\quad -\chi_{i+1} \mathbf{H}_{2,i+1}^{n+1/2} + \chi_i \mathbf{H}_{2,i}^{n+1/2} - \frac{d}{c-d} \mathbf{H}_{2,i+1/2}^{n+1/2} V_{1,i} \quad (\text{II.3.12}) \end{aligned}$$

Dans cette équation, les termes  $\mathbf{H}_2$  sont obtenus par interpolation entre les deux maillages comme pour le cas du schéma de Yee.

**Remarque 15** *Par opposition au schéma Différences Finies, les inconnues associées aux composantes des champs électromagnétiques sont localisées au centre des cellules, dans le schéma Volumes Finis.*

En procédant de la même manière, nous obtenons pour la seconde équation (II.3.10b) :

$$\begin{aligned} \int_{V_{1,i}} \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} dx_1 &= -\chi_{i+1} \mathbf{E}_{1,i+1} + \chi_i \mathbf{E}_{1,i} - \frac{d}{c-d} \mathbf{E}_{1,i+1/2} V_{1,i} \\ &\quad -\chi_{i+1} \mathbf{E}_{2,i+1} + \chi_i \mathbf{E}_{2,i} - \frac{d}{c-d} \mathbf{E}_{2,i+1/2} V_{1,i} \quad (\text{II.3.13}) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} V_{1,i} &= -\chi_{i+1} \mathbf{E}_{1,i+1} + \chi_i \mathbf{E}_{1,i} - \frac{d}{c-d} \mathbf{E}_{1,i+1/2} V_{1,i} \\ &\quad -\chi_{i+1} \mathbf{E}_{2,i+1} + \chi_i \mathbf{E}_{2,i} - \frac{d}{c-d} \mathbf{E}_{2,i+1/2} V_{1,i} \quad (\text{II.3.14}) \end{aligned}$$

De même, les termes  $\mathbf{E}_2$  sont obtenus par une interpolation entre les deux maillages.

**Remarque 16** *Le schéma discret est équivalent au schéma précédent (II.3.12-II.3.14) dans le cas où nous appliquons une méthode Volumes Finis sur le sous-domaine  $\Omega_2$ , en permutant les indices 1 et 2 dans les équations.*

### 3.2.3 Application d'un schéma GD à un sous-domaine

Plaçons nous dans le cas d'une approximation GD dans l'approche hybride, pour le sous-domaine  $\Omega_1$ .

Le sous-domaine  $\Omega_1$  est décomposé en une partition  $\mathcal{T} = (K_{1,i})_{i=1,\dots,Ne}$  de segments  $K_{1,i}$  tels que  $\Omega_1 = \cup_{i=1}^{Ne} K_{1,i}$ . Sur chaque cellule  $K_{1,i}$ , la formulation Galerkin discontinue associée aux équations (II.3.6) s'écrit :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = -\chi \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_1} + \chi \beta_{K_1} \llbracket \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} + \chi \alpha_{K_1} \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} - \chi \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \quad (\text{II.3.15a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = -\chi \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_1} + \chi \gamma_{K_1} \llbracket \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} + \chi \delta_{K_1} \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} - \chi \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial x_1} \quad (\text{II.3.15b})$$

où  $[[\mathbf{u}]]_{\partial K_1}^{K_1}$  représente le saut de  $u$  à travers la frontière  $\partial K_1 = K_1 \cap K_1'$  de la cellule  $K_1$ . Ce saut est défini par  $[[\mathbf{u}]]_{\partial K_1}^{K_1} = \mathbf{u}_{K_1'|_{\partial K_1}} - \mathbf{u}_{K_1|_{\partial K_1}}$  avec  $\mathbf{u}_{K_1|_{\partial K_1}}$  la trace de la valeur  $\mathbf{u}_{K_1}$  dans le volume  $K_1$  sur la frontière  $\partial K_1$  et  $\mathbf{u}_{K_1'|_{\partial K_1}}$  la trace de la valeur  $\mathbf{u}_{K_1'}$  dans le volume  $K_1'$  sur la même frontière  $\partial K_1$ . Dans ce formalisme, les termes de saut ne sont présents qu'aux frontières des cellules.

Dans les équations (II.3.15), les paramètres  $\alpha_{K_1}$ ,  $\beta_{K_1}$ ,  $\gamma_{K_1}$  et  $\delta_{K_1}$  doivent être choisis de manière à avoir le problème (II.3.15) bien posé et une équivalence entre les problèmes (II.3.15) et (II.3.6).

**Théorème 4** *Si les paramètres  $\alpha_{K_1}$ ,  $\beta_{K_1}$ ,  $\gamma_{K_1}$  et  $\delta_{K_1}$  vérifient :*

- $1 + \beta_{K_1} - \gamma_{K_1} = 0$
- $\alpha_{K_1} = 0$  et  $\delta_{K_1} = 0$
- $\gamma_{K_1} = -\beta_{K_1'}$
- $\beta_{K_1} = -\gamma_{K_1'}$

*alors le problème continu (II.3.15) vérifie une propriété de conservation de l'énergie et est équivalent au problème de Maxwell.*

▷ PREUVE : Conservation de l'énergie

Par simplification, plaçons nous dans le cas d'un schéma Galerkin Discontinu sans hybridation sur le sous-domaine  $\Omega_1$ . Le schéma GD associé aux équations de Maxwell 1D (II.3.1) s'écrit alors :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_1} + \beta [[\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1]]_{\partial K_1}^{K_1} \delta_{\partial K_1} + \alpha [[\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1)]]_{\partial K_1}^{K_1} \delta_{\partial K_1} \quad (\text{II.3.16a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_1} + \gamma [[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1]]_{\partial K_1}^{K_1} \delta_{\partial K_1} + \delta [[\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1)]]_{\partial K_1}^{K_1} \delta_{\partial K_1} \quad (\text{II.3.16b})$$

Nous simplifions également les paramètres  $\alpha_{K_1}$ ,  $\beta_{K_1}$ ,  $\gamma_{K_1}$  et  $\delta_{K_1}$  par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .

Afin de trouver les conditions sur les quatre paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ , nous cherchons à conserver l'énergie donnée par :

$$\mathcal{E} = \varepsilon_0 \int_{\Omega_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 d\mathbf{x}_1 + \mu_0 \int_{\Omega_1} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 d\mathbf{x}_1 \quad (\text{II.3.17})$$

Cette énergie s'écrit également sous la forme suivante :

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{Ne} \left( \int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 d\mathbf{x}_1 + \int_{K_{1,i}} \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 d\mathbf{x}_1 \right) \quad (\text{II.3.18})$$

Pour assurer la stabilité du schéma, cette énergie doit être constante ou décroissante au cours du temps, par conséquent sa dérivée doit être nulle ou négative. Il sera plus facile de trouver des conditions sur les paramètres pour une dérivée négative. En utilisant le système d'équations (II.3.16), la dérivée de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \sum_{i=1}^{Ne} \left( \int_{K_{1,i}} 2\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{E}_1 d\mathbf{x}_1 + \int_{K_{1,i}} 2\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{H}_1 d\mathbf{x}_1 \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{Ne} \int_{K_{1,i}} \left( -\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_1} \cdot \mathbf{E}_1 + \beta [[\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1]]_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{E}_1 + \alpha [[\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1)]]_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{E}_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_1} \cdot \mathbf{H}_1 + \gamma [[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1]]_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{H}_1 + \delta [[\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1)]]_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{H}_1 \right) d\mathbf{x}_1 \quad (\text{II.3.19}) \end{aligned}$$

Nous traitons alors les termes un à un sur l'élément  $K_{1,i} = [x_{1,i}, x_{1,i+1}]$ .

- les termes  $\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{E}_1$  et  $\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{H}_1$

$$\begin{aligned} - \int_{K_{1,i}} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{E}_1 + \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{H}_1 \right) d\mathbf{x}_1 &= - \int_{K_{1,i}} \frac{\partial \mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1}{\partial \mathbf{x}_1} d\mathbf{x}_1 \\ &= E_{1,i}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i}) - E_{1,i}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1}) \quad (\text{II.3.20}) \end{aligned}$$

- le terme  $\beta \llbracket \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{E}_1$

$$\begin{aligned} \int_{K_{1,i}} \beta \llbracket \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{E}_1 d\mathbf{x}_1 &= -\beta H_{1,i-1}(x_{1,i})E_{1,i}(x_{1,i}) + \beta H_{1,i}(x_{1,i})E_{1,i}(x_{1,i}) \\ &\quad + \beta H_{1,i+1}(x_{1,i+1})E_{1,i}(x_{1,i+1}) - \beta H_{1,i}(x_{1,i+1})E_{1,i}(x_{1,i+1}) \quad (\text{II.3.21}) \end{aligned}$$

- le terme  $\alpha \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{E}_1$

$$\begin{aligned} \int_{K_{1,i}} \alpha \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{E}_1 d\mathbf{x}_1 &= \alpha E_{1,i-1}(x_{1,i})E_{1,i}(x_{1,i}) - \alpha E_{1,i}(x_{1,i})E_{1,i}(x_{1,i}) \\ &\quad + \alpha E_{1,i+1}(x_{1,i+1})E_{1,i}(x_{1,i+1}) - \alpha E_{1,i}(x_{1,i+1})E_{1,i}(x_{1,i+1}) \quad (\text{II.3.22}) \end{aligned}$$

- le terme  $\gamma \llbracket \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{H}_1$

$$\begin{aligned} \int_{K_{1,i}} \gamma \llbracket \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{H}_1 d\mathbf{x}_1 &= \gamma E_{1,i-1}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i}) - \gamma E_{1,i}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i}) \\ &\quad - \gamma E_{1,i+1}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1}) + \gamma E_{1,i}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1}) \quad (\text{II.3.23}) \end{aligned}$$

- le terme  $\delta \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{H}_1$

$$\begin{aligned} \int_{K_{1,i}} \delta \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_1}^{K_1} \cdot \mathbf{H}_1 &= \delta H_{1,i-1}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i}) - \delta H_{1,i}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i}) \\ &\quad + \delta H_{1,i+1}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1}) - \delta H_{1,i}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1}) \quad (\text{II.3.24}) \end{aligned}$$

Les produits  $E_{1,i}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i})$  et  $E_{1,i}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1})$  que l'on retrouve dans les différentes expressions peuvent être regroupés en :  $(1 + \beta - \gamma)E_{1,i}(x_{1,i})H_{1,i}(x_{1,i})$  et  $(-1 - \beta + \gamma)E_{1,i}(x_{1,i+1})H_{1,i}(x_{1,i+1})$ . Par conséquent,  $1 + \beta - \gamma = 0$  est la première condition pour assurer une dérivée négative ou nulle.

En sommant les termes restants exprimant un produit en  $E_1$  et  $H_1$  sur l'élément  $K_{1,i}$  avec ceux provenant des mêmes expressions sur les éléments voisins  $K_{1,i-1}$  et  $K_{1,i+1}$ , nous obtenons la condition  $\beta = -\gamma$ .

De même, en s'intéressant seulement aux termes donnant un produit de  $E_1 \cdot E_1$  et  $H_1 \cdot H_1$  et en sommant avec les mêmes produits carrés sur les éléments voisins à  $K_{1,i}$ , nous assurons une dérivée négative à condition d'avoir  $\alpha \geq 0$  et  $\delta \geq 0$ .

Par conséquent, pour que le problème (II.3.16) vérifie une propriété de conservation de l'énergie, il faut que :

- $\alpha = 0$
- $\delta = 0$
- $1 + \beta - \gamma = 0$
- $\beta = -\gamma$

D'après les conditions  $1 + \beta - \gamma = 0$  et  $\beta = -\gamma$ , nous en déduisons deux autres conditions pour garantir la stabilité du schéma :

- $\beta = -\frac{1}{2}$
- $\gamma = \frac{1}{2}$

La dérivée étant négative ou nulle, l'énergie est décroissante au cours du temps (donc bornée) et assure donc la stabilité de notre schéma.  $\triangleleft$

**Remarque 17** *Nous ne résolvons pas exactement le problème à énergie purement conservatoire. Nous autorisons un peu de dissipation pour éviter les modes parasites [Montseny et al. (2008)]. Pour cela, nous pouvons jouer sur les termes  $\alpha_{K_1}$  et  $\delta_{K_1}$  du schéma. En ce qui concerne les termes  $\gamma_{K_1}$  et  $\beta_{K_1}$ , ils sont fixés par la relation  $1 + \beta_{K_1} - \gamma_{K_1} = 0$  et correspondent à la partie dispersivie du schéma. Dans le cas d'une interface dans le vide, ils seront fixés à  $\gamma_{K_1} = 1/2$  et  $\beta_{K_1} = -1/2$ . Dans le cas où nous voulons imposer  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = 0$ , nous prendrons  $\gamma_{K_1} = 1$  et  $\beta_{K_1} = 0$ .*

Le problème (II.3.15) étant bien posé et équivalent au problème initial 1D (II.3.6), nous allons maintenant étudier la discrétisation en espace de la méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé proposée. Nous considérons par la suite les notations et les définitions suivantes :

- Ne segments  $K_{1,i}$  formant le maillage uniforme au domaine de calcul  $\Omega_1$ .
- le segment unité  $\hat{K} = [0, 1]$  sera l'élément de référence et  $\hat{x}$  la coordonnée d'un point associée à cet élément.
- pour  $r_1 \in \mathbb{N}$ ,  $Q_{r_1}(\hat{K})$  est l'espace des polynômes à coefficients réels et à variables dans  $\hat{K}$  de degré inférieur ou égal à  $r_1$  :

$$Q_{r_1}(\hat{K}) = \left\{ \sum_{l=1}^{r_1+1} a_l \hat{x} : a_l \in \mathbb{R} \forall l \in \{1, \dots, r_1 + 1\} \right\} \quad (\text{II.3.25})$$

- pour chaque élément  $K_{1,i}$ ,  $F_{K_1}$  est l'application transformant  $\hat{K}$  en  $K_{1,i}$  (figure II.3.2) telle que  $F_{K_1}(\hat{K}) = K_{1,i}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, Ne\}$ . Cette application est supposée être un difféomorphisme. D'après la figure II.3.2, la fonction  $F_{K_1}$  associée à l'élément  $K_{1,i}$  s'écrit alors :

$$F_{K_1}(\hat{x}) = (1 - \hat{x})x_{1,i} + \hat{x} x_{1,i+1} \quad (\text{II.3.26})$$

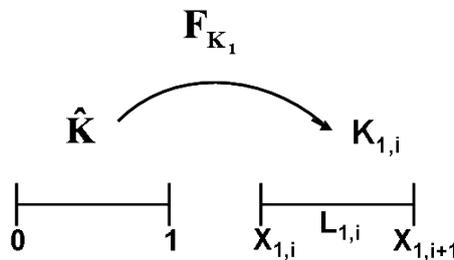


figure II.3.2 – Transformation  $F_{K_1}$ .

- pour chaque élément  $K_{1,i}$ ,  $DF_{K_1}$  et  $J_{K_1} = \det(DF_{K_1})$  sont respectivement la matrice Jacobienne et le Jacobien associés à la transformation  $F_{K_1}$ . Pour l'élément  $K_{1,i}$ ,  $DF_{K_1} = \frac{\partial F_{K_1}}{\partial \hat{x}} = x_{1,i+1} - x_{1,i}$ . Ainsi, pour chaque élément  $K_{1,i}$ ,

$DF_{K_1}$  correspond à la longueur de l'élément, noté  $L_{1,i}$ , au signe près. Par la suite, nous choisissons  $F_{K_1}$  de telle façon que  $x_{1,i+1}$  soit toujours supérieure à  $x_{1,i}$ ; ce qui entraîne  $DF_{K_1} = L_{1,i}$ . Ceci ne modifiera en rien la difficulté des développements ultérieurs.

Définissons, à présent, les espaces d'approximation, les fonctions de base et les degrés de liberté utilisés. Soient :

- l'espace d'approximation pour les champs  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{H}_1$  est défini par :

$$V_{r_1} = \left\{ v \in L^2(\Omega); \forall K_1 \in \mathcal{T}, DF_{K_1}^* v|_{K_1} \circ F_{K_1} \in Q_{r_1}(\hat{K}) \right\}.$$

- $Q_{r_1}(\hat{K})$  étant de dimension  $(r_1 + 1)$ , comme il a été défini précédemment, il suffit de définir  $(r_1 + 1)$  points de Gauss sur  $\hat{K} : 0 < \hat{\xi}_1 < \dots < \hat{\xi}_{r_1+1} < 1$  de poids de quadrature associés  $(\hat{\omega}_m)_{m=1, \dots, r_1+1}$ . Les points de Gauss sont les zéros du polynôme de Legendre d'ordre  $r_1 + 1$ . Nous définissons alors une base de l'espace à l'aide des fonctions d'interpolation de Lagrange  $(\hat{\phi}_j)_{j \in \{1, \dots, r_1+1\}}$  qui vérifient :  $\hat{\phi}_j(\hat{\xi}_l) = \delta_{j,l}$ . Le tableau II.3.1 contient les points et les poids de Gauss pour  $r_1 = 0, \dots, 5$ .
- on a la propriété suivante :

$$\int_0^1 p(x) dx = \sum_{l=1}^{r_1+1} \hat{\omega}_l p(\hat{\xi}_l), \forall p \in Q_{2r_1+1}([0, 1]) = P_{2r_1+1}([0, 1]) \quad (\text{II.3.27})$$

On dit que la formule de Gauss est d'ordre  $2r_1 + 1$ .

- les fonctions de base  $\varphi$  sur l'élément  $K_1$  sont définies par :  $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}, \varphi(x) = \varphi \circ F_{K_1}(\hat{\mathbf{x}}) = DF_{K_1}^{*-1} \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{L_1} \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})$ , avec  $x = F_{K_1}(\hat{\mathbf{x}})$ .

	$r_1 = 0$	$r_1 = 1$	$r_1 = 2$	$r_1 = 3$	$r_1 = 4$
$\hat{\xi}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	$\frac{5 - \sqrt{15}}{10}$	$\frac{35 - \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{21 - \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{72}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}$
$\hat{\xi}_2$		$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{35 - \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{21 - \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_2$		$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{72}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800}$
$\hat{\xi}_3$			$\frac{5 + \sqrt{15}}{10}$	$\frac{35 + \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{1}{2}$
$\hat{\omega}_3$			$\frac{5}{18}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{72}$	$\frac{64}{225}$
$\hat{\xi}_4$				$\frac{35 + \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}$	$\frac{21 + \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_4$				$\frac{18 - \sqrt{30}}{72}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800}$
$\hat{\xi}_5$					$\frac{21 + \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}}{42}$
$\hat{\omega}_5$					$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}$

table II.3.1 – Points et poids de Gauss définissant les fonctions de base de  $Q_{r_1}(\hat{K})$  sur l'intervalle  $[0, 1/2]$  pour  $r_1$  variant de 0 à 4.

Nous allons maintenant écrire le schéma GD du problème (II.3.15) en utilisant la formulation variationnelle du problème. Le système d'équations s'écrit sur chaque cellule  $K_{1,i}$  :

$$\int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_{1,m} dx_1 = - \int_{K_{1,i}} \chi_i \frac{\partial \mathbf{H}_{1,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_{1,m} dx_1 + \int_{K_{1,i}} \left( \chi_i \beta_{K_1} \llbracket \mathbf{H}_1 \times n_1 \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_{1,m} \right. \\ \left. + \chi_i \alpha_{K_1} \llbracket n_1 \times (\mathbf{E}_1 \times n_1) \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_{1,m} \right) dx_1 - \int_{K_{1,i}} \chi_i \frac{\partial \mathbf{H}_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_{1,m} dx_1 \quad (\text{II.3.28a})$$

$$\int_{K_{1,i}} \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_{1,m} dx_1 = - \int_{K_{1,i}} \chi_i \frac{\partial \mathbf{E}_{1,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_{1,m} dx_1 + \int_{K_{1,i}} \left( \chi_i \gamma_{K_1} \llbracket \mathbf{E}_1 \times n_1 \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_{1,m} \right. \\ \left. + \chi_i \delta_{K_1} \llbracket n_1 \times (\mathbf{H}_1 \times n_1) \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_{1,m} \right) dx_1 - \int_{K_{1,i}} \chi_i \frac{\partial \mathbf{E}_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_{1,m} dx_1 \quad (\text{II.3.28b})$$

Contrairement aux schémas FDTD et FVTD, les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{H}_1$  sont approchés localement sur chaque volume  $K_{1,i}$  par les développements suivants :

$$\mathbf{E}_{1,i}(t, x) = \sum_{l=1}^{r_1+1} \mathbf{E}_{1,l}^i(t) \varphi_l^i(x) \quad (\text{II.3.29a})$$

$$\mathbf{H}_{1,i}(t, x) = \sum_{l=1}^{r_1+1} \mathbf{H}_{1,l}^i(t) \varphi_l^i(x) \quad (\text{II.3.29b})$$

Nous allons maintenant traiter les équations du système (II.3.28) une par une. Introduisons (II.3.29) dans les équations de ce système. Pour la première équation (II.3.28a), il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_m dx_1 \\ &= - \int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{1,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 + \int_{K_{1,i}} \left[ \chi \beta_{K_1} \llbracket \mathbf{H}_1 \times n_1 \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_m \right. \\ & \quad \left. + \chi \alpha_{K_1} \llbracket n_1 \times (\mathbf{E}_1 \times n_1) \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_m \right] dx_1 - \int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 \\ &= - \int_{K_{1,i}} \chi(x_1) \frac{\partial \mathbf{H}_{1,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 + \beta_{K_1} \left[ -\mathbf{H}_{1,i-1}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{H}_{1,i}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) + \mathbf{H}_{1,i+1}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{H}_{1,i}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right] + \alpha_{K_1} \left[ \mathbf{E}_{1,i-1}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{E}_{1,i}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) - \mathbf{E}_{1,i+1}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{E}_{1,i}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right] - \int_{K_{1,i}} \chi(x_1) \frac{\partial \mathbf{H}_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 \end{aligned} \quad (\text{II.3.30})$$

Intéressons nous au premier terme de l'équation, il vaut :

$$\int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial E_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_m^i dx_1 = \int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{l=1}^{r_1+1} E_{1,l}^i(t) \varphi_l^i(x) \right) \cdot \varphi_m^i dx_1 \quad (\text{II.3.31})$$

Nous ramenons cette intégrale à l'élément de référence  $\hat{K}$  par la fonction  $F_{K,1}$  et obtenons :

$$\int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} \cdot \varphi_m^i dx_1 = \int_{\hat{K}} \varepsilon_0 \left( \sum_{l=1}^{r_1+1} \frac{\partial E_{1,l}^i(t)}{\partial t} \frac{\hat{\varphi}_l(\hat{x})}{L_{1,i}} \right) \cdot \frac{\hat{\varphi}_m(\hat{x})}{L_{1,i}} L_{1,i} d\hat{x} \quad (\text{II.3.32})$$

Utilisons, à présent, la formule d'intégration numérique de quadrature de Gauss :

$$\int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial E_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_m^i dx_1 = \varepsilon_0 \frac{1}{L_{1,i}} \sum_{l=1}^{r_1+1} \omega_k \left( \sum_{l=1}^{r_1+1} \frac{\partial E_{1,l}^i(t)}{\partial t} \hat{\varphi}_l(\hat{x}_k) \right) \cdot \hat{\varphi}_m(\hat{x}_k) \quad (\text{II.3.33})$$

Or  $\hat{\varphi}_l(\hat{x}_k) = \delta_{l,k}$  et  $\hat{\varphi}_m(\hat{x}_k) = \delta_{m,k}$ . Nous pouvons donc simplifier cette somme et obtenons :

$$\int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial E_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_m^i dx_1 = \varepsilon_0 \omega_m \frac{1}{L_{1,i}} \frac{d E_{1,m}^i(t)}{dt} \quad (\text{II.3.34})$$

où  $\omega_m$  est le poids de quadrature au point  $\hat{x}_m$ .

De la même manière, nous développons le second terme de l'équation :

$$\int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial H_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_m^i dx_1 = \frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \sum_{l=1}^{r_1+1} H_{1,l}^i(t) \frac{\partial \hat{\varphi}_l(\hat{x}_m)}{\partial \hat{x}} \quad (\text{II.3.35})$$

En développant chacun des termes de la même manière, la forme discrète de l'équation (II.3.28a) est donnée par :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \omega_m \frac{1}{L_{1,i}} \frac{E_{1,m}^{i,n+1} - E_{1,m}^{i,n}}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \sum_{l=1}^{r_1+1} H_{1,l}^i(t) \frac{\partial \hat{\varphi}_l(\hat{x}_m)}{\partial \hat{x}} \\ & \quad + \beta_{K_1} \sum_{l=1}^{r_1+1} \left[ -\frac{1}{L_{1,i-1} L_{1,i}} H_{1,l}^{i-1}(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) \right. \\ & \quad + \frac{1}{L_{1,i}^2} H_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) + \frac{1}{L_{1,i+1} L_{1,i}} H_{1,l}^{i+1}(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i+1}) \\ & \quad \left. - \frac{1}{L_{1,i}^2} H_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \right] \\ & \quad + \alpha_{K_1} \sum_{l=1}^{r_1+1} \left[ \frac{1}{L_{1,i-1} L_{1,i}} E_{1,l}^{i-1}(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) \right. \\ & \quad - \frac{1}{L_{1,i}^2} E_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) + \frac{1}{L_{1,i+1} L_{1,i}} E_{1,l}^{i+1}(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \\ & \quad \left. - \frac{1}{L_{1,i}^2} E_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \right] - \frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \circ F_{K_1}(\hat{x}_m) \right) \quad (\text{II.3.36}) \end{aligned}$$

Nous procédons de la même façon pour la seconde équation (II.3.28b) qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{K_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{1,i}}{\partial t} \cdot \varphi_m dx_1 \\
&= - \int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial \mathbf{E}_{1,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 + \int_{K_{1,i}} \left[ \chi \gamma_{K_1} \llbracket \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_m \right. \\
&\quad \left. + \chi \delta_{K_1} \llbracket \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1) \rrbracket_{\partial K_{1,i}}^{K_{1,i}} \cdot \varphi_m \right] dx_1 - \int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial \mathbf{E}_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 \\
&= - \int_{K_{1,i}} \chi(x_1) \frac{\partial \mathbf{E}_{1,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 + \gamma_{K_1} \left[ \mathbf{E}_{1,i-1}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{E}_{1,i}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) - \mathbf{E}_{1,i+1}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{E}_{1,i}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right] + \delta_{K_1} \left[ \mathbf{H}_{1,i-1}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{H}_{1,i}(x_{1,i}) \varphi_l^i(x_{1,i}) \chi(x_{1,i}) + \mathbf{H}_{1,i+1}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{H}_{1,i}(x_{1,i+1}) \varphi_l^i(x_{1,i+1}) \chi(x_{1,i+1}) \right] - \int_{K_{1,i}} \chi(x_1) \frac{\partial \mathbf{E}_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_m dx_1 \quad (\text{II.3.37})
\end{aligned}$$

En développant chacun des termes et en utilisant la formule d'intégration de quadrature de Gauss, nous obtenons la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned}
& \mu_0 \omega_m \frac{1}{L_{1,i}} \frac{H_{1,m}^{i,n+1/2} - H_{1,m}^{i,n-1/2}}{\Delta t} \\
&= - \frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \sum_{l=1}^{r_1+1} E_{1,l}^i(t) \frac{\partial \hat{\varphi}_l(\hat{x}_m)}{\partial \hat{x}} \\
&\quad + \gamma_{K_1} \sum_{l=1}^{r_1+1} \left[ \frac{1}{L_{1,i-1} L_{1,i}} E_{1,l}^{i-1}(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{L_{1,i}^2} E_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) - \frac{1}{L_{1,i+1} L_{1,i}} E_{1,l}^{i+1}(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{L_{1,i}^2} E_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \right] \\
&\quad + \delta_{K_1} \sum_{l=1}^{r_1+1} \left[ \frac{1}{L_{1,i-1} L_{1,i}} H_{1,l}^{i-1}(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{L_{1,i}^2} H_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(0) \chi(x_{1,i+1}) + \frac{1}{L_{1,i+1} L_{1,i}} H_{1,l}^{i+1}(t) \hat{\varphi}_l(0) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{L_{1,i}^2} H_{1,l}^i(t) \hat{\varphi}_l(1) \hat{\varphi}_m(1) \chi(x_{1,i+1}) \right] - \frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \left( \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial x_1} \circ F_{K_1}(\hat{x}_m) \right) \quad (\text{II.3.38})
\end{aligned}$$

Dans ces deux équations (II.3.36-II.3.38),  $(E_{1,m}^i, H_{1,m}^i)$  sont les valeurs des champs  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{H}_1$  au degré de liberté  $m$  de l'élément  $i$  et  $\hat{\varphi}_l(\hat{x}_m)$  représente la fonction de base

dans l'élément de référence, définie au degré de liberté  $l$  et prise au degré de liberté  $m$ .  $L_{1,i-1}$ ,  $L_{1,i}$  et  $L_{1,i+1}$  sont respectivement les longueurs des cellules  $K_{1,i-1}$ ,  $K_{1,i}$  et  $K_{1,i+1}$ .

**Remarque 18** Comme pour les autres méthodes, nous obtenons un schéma analogue sur le sous-domaine  $\Omega_2$  pour une méthode GD, en remplaçant les indices 1 et 2 dans les équations précédentes (II.3.36-II.3.38).

Notons que si nous utilisons le même schéma numérique GD sur le sous-domaine  $\Omega_2$ , le dernier terme de l'équation (II.3.15a),  $\chi \frac{\partial H_2}{\partial x_1}$ , qui correspond à l'intégrale du champ magnétique du sous-domaine  $\Omega_2$  doit être projeté sur le sous-domaine  $\Omega_1$ . Ainsi, en utilisant les formulations précédentes, nous obtenons :

$$\int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial H_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_{1,m}^i dx_1 = \frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \sum_{l=1}^{r_2+1} H_{2,l}^j(t) \frac{\partial \hat{\varphi}_l^j(\hat{x}_m)}{\partial \hat{x}} \quad (\text{II.3.39})$$

Quant au dernier terme de l'équation (II.3.15b),  $\chi \frac{\partial E_2}{\partial x_1}$ , nous avons :

$$\int_{K_{1,i}} \chi \frac{\partial E_{2,i}}{\partial x_1} \cdot \varphi_{1,m}^i dx_1 = \frac{1}{L_{1,i}^2} \omega_m \chi(x_{1,m}) \sum_{l=1}^{r_2+1} E_{2,l}^j(t) \frac{\partial \hat{\varphi}_l^j(\hat{x}_m)}{\partial \hat{x}} \quad (\text{II.3.40})$$

$L_1$  et  $\omega_m$  définissent respectivement, le volume de la cellule  $K_1$  et le poids de la formule de quadrature associé au degré de liberté  $\hat{x}_m$ .  $r_2$  est l'ordre d'approximation spatial du sous-domaine  $\Omega_2$  et  $\hat{\varphi}_l(\hat{x}_m)$  représente la fonction de base dans l'élément de référence, définie au degré de liberté  $l$  du sous-domaine  $\Omega_2$  et prise au degré de liberté  $m$  du sous-domaine  $\Omega_1$ .

### 3.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Afin de valider la méthode hybride de type Patch, nous l'avons étudiée numériquement sur différentes configurations d'hybridation. Nous nous sommes aussi intéressés au comportement de la solution hybride par rapport à certains paramètres de la méthode et nous présentons les principaux résultats obtenus dans ce paragraphe.

Dans les exemples 1D que nous avons étudiés, nous considérons deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  d'une longueur de 1m. Nous évaluons le champ diffracté par un plan parfaitement métallique, illuminé par une onde plane. Cette onde plane est donnée par un pulse Gaussien :

$$E_{inc} = \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2\right) \quad (\text{II.3.41})$$

avec  $t_0 = 1.e - 8s$  et  $\sigma = 3.e - 10s$ .  $E_{inc}$  représente, quant à lui, le champ incident. Le plan est localisé en  $x = 0m$  sur le sous-domaine  $\Omega_1$  (à la frontière de  $\Omega_1$ ) et nous relevons le champ électrique diffracté, noté  $\mathbf{E}$ , en  $x = 1.3m$  dans le sous-domaine  $\Omega_2$  durant un temps de simulation de  $1.e - 7s$ .

### 3.3.1 Etude d'hybridation de différents schémas

La première simulation effectuée consiste à comparer le comportement de la méthode hybride pour le couplage de différentes méthodes sur des maillages décalés. Pour cela, nous considérons les deux sous-domaines suivants :  $\Omega_1 = [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.805, 1.805]$ , avec une zone de recouvrement de l'ordre de 10% du maillage global, soit  $\frac{\lambda}{5}$ .  $\lambda$  définit la longueur d'onde minimale de la source et elle vaut  $0.1m$ . Le pas de discrétisation spatiale est identique sur les deux sous-domaines et est de taille  $0.01m$ , soit  $\frac{\lambda}{10}$ .

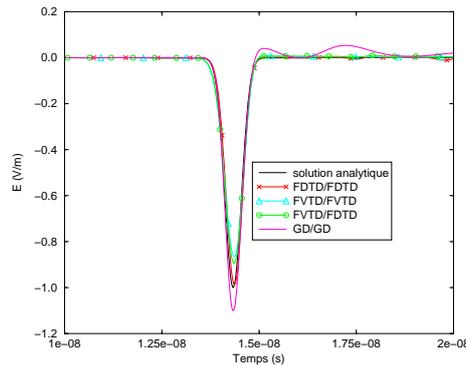


figure II.3.3 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différents couplages de méthodes.

La figure II.3.3 montre les résultats obtenus pour des couplages FDTD/FDTD, FVTD/FVTD, FVTD/FDTD et GD/GD par rapport à la solution analytique. Pour l'ensemble des simulations effectuées, l'ordre d'approximation spatiale de la méthode GD est  $r = 1$ . Sur l'ensemble de ces simulations, nous observons une bonne concordance entre les différentes solutions avec une solution plus précise dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD. Ces solutions présentent globalement un comportement stable sur un temps relativement long. Cependant, nous observons des oscillations sur les solutions hybrides pour les différents cas ; l'amplitude de ces oscillations étant plus importante dans le cas d'une hybridation GD/GD.

		Schéma			
		FDTD/FDTD	FVTD/FVTD	FVTD/FDTD	GD/GD
Erreur	$Err_1$	0.2003404	0.1686248	0.1492497	0.2916231
	$Err_2$	9.6331105E-02	0.1246248	-	5.7260014E-02

table II.3.2 – Erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques avec différents couplages de méthodes (notée  $Err_1$ ) et l'erreur entre la solution numérique sans hybridation et la solution analytique (notée  $Err_2$ ).

Le tableau II.3.2 donne l'erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques avec différents couplages de méthodes (notée  $Err_1$ ) et l'erreur entre la solution numérique sans hybridation et la solution analytique (notée  $Err_2$ ). Ce tableau confirme bien les interprétations déduites des résultats de la figure précédente II.3.3.

### 3.3.2 Influence de la taille de la zone de recouvrement

Nous nous sommes ensuite intéressés à la taille de la zone de recouvrement entre les deux sous-domaines. Ainsi, nous considérons  $\Omega_1 = [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [c, 1.805]$ , avec le point de la grille  $c$  variable, permettant ainsi d'avoir des tailles de la zone de recouvrement allant de 5% à 25% de la taille du domaine global. Pour les exemples étudiés, la taille de la zone tampon est prise à  $\frac{\lambda}{2}$ ,  $\frac{\lambda}{2.5}$ ,  $\frac{\lambda}{3.4}$ ,  $\frac{\lambda}{5}$  et  $\frac{\lambda}{10.5}$ . Par ailleurs, nous gardons un pas spatial de  $\frac{\lambda}{10}$  dans les deux sous-domaines. Dans ce cas, nous nous sommes limités à une hybridation de type FDTD/FDTD.

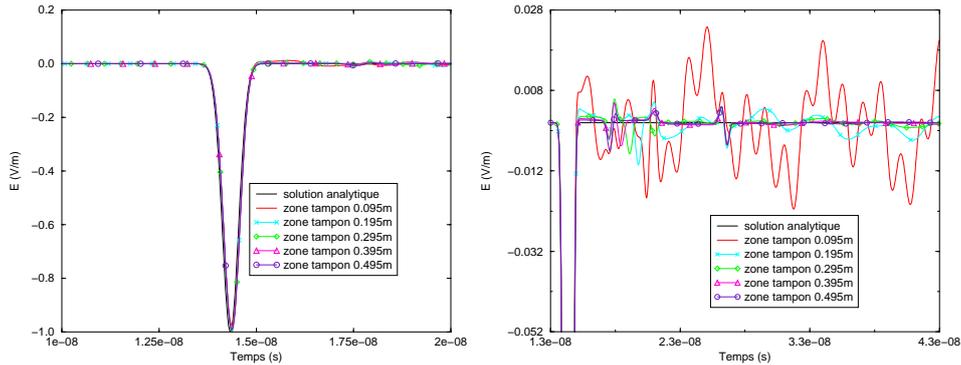


figure II.3.4 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes tailles de recouvrement pour une hybridation FDTD/FDTD (en haut) et un zoom (en bas).

La figure II.3.4 donne les solutions hybrides obtenues pour différentes tailles de recouvrement par rapport à la solution analytique. Nous remarquons que plus la taille de la zone tampon est grande, plus la solution obtenue est précise. Par ailleurs, dans le paragraphe précédent, nous avons constaté la présence d'oscillations sur les solutions hybrides. Il semblerait que ces oscillations soient atténuées avec une taille importante de la zone de recouvrement.

		Schéma			
		FDTD/FDTD	FVTD/FVTD	FVTD/FDTD	GD/GD
Taille de la zone tampon (m)	0.095	0.3283119	0.1892203	0.2290033	0.5305331
	0.195	0.2003404	0.1686248	0.1492497	0.2916231
	0.295	0.1939559	0.1529691	0.1220877	0.2356252
	0.395	0.1958651	0.1604194	0.1210098	0.2139320
	0.495	0.1973189	0.1575127	0.1137663	0.2074454

table II.3.3 – Erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différentes tailles de la zone de recouvrement et pour l'hybridation de différents schémas.

Le tableau II.3.3 donne l'erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différentes tailles de la zone de recouvrement et pour l'hybridation de différents schémas. Ce tableau nous montre que, quelque soit le couplage de méthodes, l'erreur décroît quand la zone tampon devient de plus en plus grande. Par conséquent, avec une zone tampon importante, la solution hybride est plus précise.

### 3.3.3 Influence de la discrétisation spatiale dans la zone de recouvrement

Nous avons ensuite étudié l'influence de la discrétisation spatiale dans la zone de recouvrement, en donnant le même nombre d'intervalles  $N$  sur les sous-domaines  $\Omega_1 = [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.805, 1.805]$ . Ainsi, le pas de discrétisation spatiale est égal à  $\frac{\lambda}{5}$ ,  $\frac{\lambda}{10}$ ,  $\frac{\lambda}{15}$  et  $\frac{\lambda}{20}$ . Dans cette étude, nous nous sommes également limités à une hybridation FDTD/FDTD.

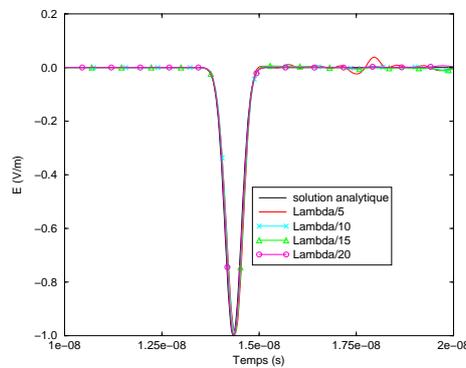


figure II.3.5 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes discrétisations spatiales dans la zone de recouvrement pour une hybridation FDTD/FDTD.

En effet, il est intéressant de voir comment les interpolations spatiales influencent la solution. Dans la figure II.3.5, nous pouvons montrer que plus nous raffinons le maillage à l'intérieur de la zone tampon, plus la solution est meilleure. Ceci s'explique par le fait que les interpolations des champs entre les deux maillages sont plus précises.

		Schéma			
		FDTD/FDTD	FVTD/FVTD	FVTD/FDTD	GD/GD
Pas spatial (m)	$0.005 = \lambda/20$	9.4599470E-02	8.2831956E-02	7.1141563E-02	0.1934357
	$0.0066 = \lambda/15$	0.1252526	0.138972	—	0.2786861
	$0.01 = \lambda/10$	0.2003404	0.1686248	0.1492497	0.2916231
	$0.02 = \lambda/5$	0.4042831	0.2575362	—	0.5321774

table II.3.4 – Erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différents pas d'espace et pour l'hybridation de différents schémas.

		Schéma		
		FDTD	FVTD	GD
Pas spatial (m)	$0.005 = \lambda/20$	4.6318803E-02	6.2276669E-02	4.0579274E-02
	$0.0066 = \lambda/15$	6.2686108E-02	8.2943007E-02	5.3982761E-02
	$0.01 = \lambda/10$	9.6331105E-02	0.1237022	5.7260014E-02
	$0.02 = \lambda/5$	0.2060578	0.2628026	0.1431983

table II.3.5 – Erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et la solution numérique sans hybridation de différents schémas.

Les deux tableaux ci-dessus représentent l'erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différents pas d'espace et pour l'hybridation de différents schémas (tableau II.3.4) et celle entre la solution analytique et la solution numérique sans hybridation de différents schémas (tableau II.3.5). Les erreurs numériques obtenues nous confortent dans les interprétations faites sur la figure II.3.5 pour une hybridation FDTD/FDTD. En effet, plus la discrétisation spatiale est petite, plus les erreurs sont petites et, par conséquent, plus les solutions sont précises.

### 3.4 IMPORTANCE DU CHOIX DE LA FONCTION $\chi$ ET APPORT D'UN TERME DE RÉGULARISATION

Précédemment, nous avons étudié l'influence de certains paramètres sur l'approche hybride, notamment l'hybridation de différentes méthodes, la taille de la zone de recouvrement et la discrétisation spatiale des deux sous-domaines.

Le seul paramètre qui n'a pas encore été étudié est la fonction de transition  $\chi$  qui reste le seul "paramètre" proprement dit de cette approche hybride. En effet, c'est lui qui nous permet de définir cette méthode mais aussi qui évite la présence de conditions de bord sur la zone tampon. Il joue à priori un rôle important sur la solution hybride attendue. Par conséquent, nous avons décidé d'étudier plusieurs types de fonction  $\chi$  pouvant nous aider à améliorer la précision de la solution.

De plus, nous pouvons observer, sur les exemples précédents, la présence d'oscillations sur les solutions obtenues avec une hybridation FDTD/FDTD. Certes les différents paramètres étudiés améliorent la précision de la solution et diminuent l'amplitude de ces oscillations, en particulier la finesse de la discrétisation spatiale et une taille importante de la zone de recouvrement, mais nous cherchons une solution pour diminuer l'amplitude des oscillations tout en gardant des choix judicieux et avantageux de cette méthode hybride (petite taille de la zone tampon et discrétisation "grossière").

Dans cette partie, d'une part, nous chercherons à améliorer notre méthode hybride en choisissant une fonction  $\chi$  autre que la fonction linéaire par morceaux uti-

lisée jusqu'à présent. D'autre part, l'apport d'un terme de relaxation sera présenté pour tenter de diminuer les oscillations parasites.

### 3.4.1 Choix de la fonction $\chi$

Nous avons fait le choix de régulariser ou pas la fonction  $\chi$  pour connaître son effet sur la solution hybride. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'étudier trois types de fonction.

Tout d'abord, nous avons considéré  $\chi$  comme une fonction polynomiale de degré impair  $n$  pour assurer les raccords aux frontières de la zone tampon et pour avoir une fonction monotone décroissante. Cette fonction est alors donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \chi(x) = 1, \quad \forall x \in [a, c] \\ \chi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} x + \dots + a_n, \quad \forall x \in [c, d] \\ \chi(x) = 0, \quad \forall x \in [d, b] \end{cases} \quad (\text{II.3.42})$$

où  $n$  est un entier positif et  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des coefficients constants. Pour évaluer les coefficients du polynôme, nous imposons :

$$\begin{aligned} \chi(c) &= 1 \\ \chi(d) &= 0 \\ \chi'(c) &= 0, \chi^{(2)}(c) = 0, \dots, \chi^{(n/2)}(c) = 0 \\ \chi'(d) &= 0, \chi^{(2)}(d) = 0, \dots, \chi^{(n/2)}(d) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3.43})$$

Par conséquent, nous obtenons le système linéaire suivant de la forme  $Ax = b$  :

$$\begin{pmatrix} c^n & c^{n-1} & \dots & c & 1 \\ d^n & d^{n-1} & \dots & d & 1 \\ n c^{n-1} & (n-1) c^{n-2} & \dots & 1 & 0 \\ n d^{n-1} & (n-1) d^{n-2} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n(n-1)\dots(n/2+2)c^{n/2+1} & (n-1)\dots(n/2+1)c^{n/2} & \dots & 0 & 0 \\ n(n-1)\dots(n/2+2)d^{n/2+1} & (n-1)\dots(n/2+1)d^{n/2} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a^{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait le choix de résoudre le système linéaire par une méthode directe pour obtenir les coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  de la fonction polynomiale  $\chi$ .

Nous illustrons cette fonction polynomiale  $\chi$  de degré impair dans la figure II.3.6.

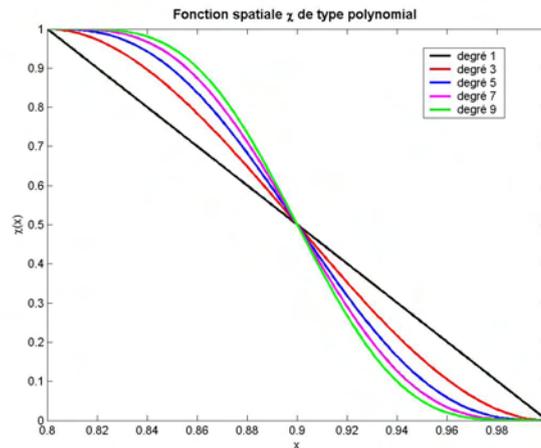


figure II.3.6 – Représentation de la fonction polynomiale  $\chi$  pour différents degrés  $n$  dans un intervalle  $[0.8, 1]$ .

Ensuite, nous avons utilisé une fonction  $\chi$  de type exponentiel, de classe  $C^{+\infty}$  :

$$\begin{cases} \chi(x) = 1, \quad \forall x \in [a, c] \\ \chi(x) = \frac{\int_c^x e^{-\frac{1}{(y-c)^2}} e^{-\frac{1}{(y-d)^2}} dy}{\int_c^d e^{-\frac{1}{(y-c)^2}} e^{-\frac{1}{(y-d)^2}} dy}, \quad \forall x \in [c, d] \\ \chi(x) = 0, \quad \forall x \in [d, b] \end{cases} \quad (\text{II.3.44})$$

Pour résoudre l'équation (II.3.44), nous avons utilisé la méthode des trapèzes avec  $Nt$  le nombre de sous-intervalles.

Enfin, pour finir, nous avons étudié une fonction  $\chi$  de forme tangente hyperbolique de classe  $C^{+\infty}$  également. Cette fonction est donnée par la formule suivante :

$$\begin{cases} \chi(x) = 1, \quad \forall x \in [a, c] \\ \chi(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + th \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \right), \quad \forall x \in [c, d] \\ \chi(x) = 0, \quad \forall x \in [d, b] \end{cases} \quad (\text{II.3.45})$$

La figure II.3.7 donne une représentation de la fonction  $\chi$  pour les trois formes étudiées, à savoir les fonctions polynomiale de degré impair, exponentielle et tangente hyperbolique, décrites ci-dessus.

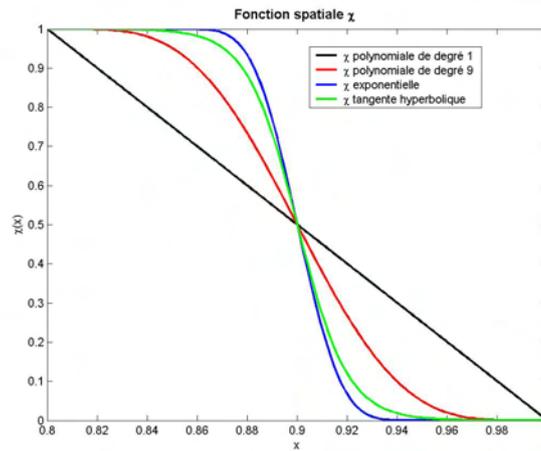


figure II.3.7 – Représentation de la fonction  $\chi$  pour les trois formes étudiées dans un intervalle  $[0.8, 1]$ .

Replaçons nous dans l'exemple de configuration précédent et étudions l'influence du paramètre  $\chi$ .

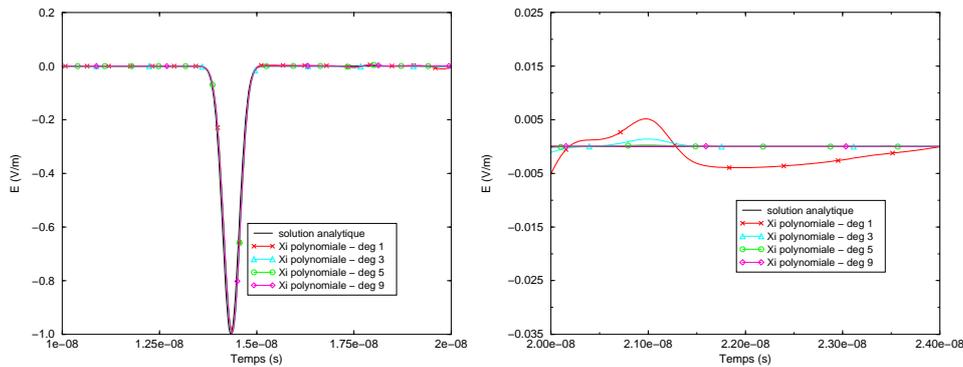


figure II.3.8 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différents degrés de la fonction polynomiale  $\chi$  pour une hybridation FDTD/FDTD.

La figure II.3.8 montre un ensemble de résultats numériques obtenus pour différents degrés de la fonction  $\chi$  de type polynomiale. Nous remarquons une nette amélioration de la solution lorsque le degré polynomiale est élevé. De même, les oscillations disparaissent avec un degré élevé de la fonction polynomiale.

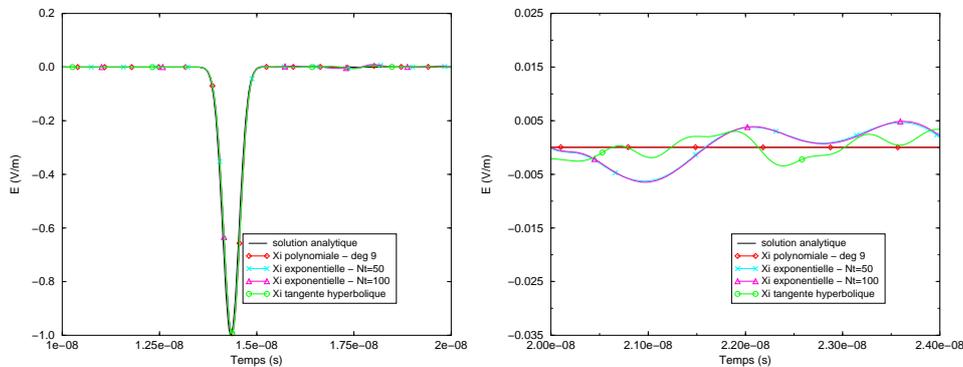


figure II.3.9 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes formes de la fonction  $\chi$  pour une hybridation FDTD/FDTD.

Nous avons ensuite comparé ces résultats, en particulier la solution obtenue avec la fonction polynomiale de degré 9, à des solutions obtenues avec une fonction  $\chi$  de type exponentielle et tangente hyperbolique. Dans la figure II.3.9, nous voyons clairement que l'approche polynomiale pour la fonction  $\chi$  est plus intéressante. L'intégrale de la fonction exponentielle est calculée par la méthode des trapèzes pour  $Nt = 50$  et  $Nt = 100$  intervalles.

		Schéma			
		FDTD/FDTD	FVTD/FVTD	FVTD/FDTD	GD/GD
Fonction $\chi$	Polynôme de degré 1	0.2003404	0.1686248	0.1492497	0.2916231
	Polynôme de degré 3	0.1864599	0.1664937	0.1348669	0.2990739
	Polynôme de degré 5	0.1845188	0.1666161	0.1291519	0.3245499
	Polynôme de degré 7	0.1832636	0.1667811	0.1290042	0.3521443
	Polynôme de degré 9	0.1822447	0.1669628	0.1290298	0.3783682
	Polynôme de degré 11	0.1813485	0.1671208	0.1290692	0.4061925
	Exponentielle - Nt=50	0.1946380	0.1676943	0.1289988	0.9668600
	Exponentielle - Nt=100	0.1949468	0.1676948	0.1289987	0.9745294
	Tangente hyperbolique	0.1825500	0.1675571	0.1290320	0.6083261

table II.3.6 – Erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour différentes formes de la fonction  $\chi$  et pour l'hybridation de différents schémas.

Dans le tableau II.3.6, nous évaluons les erreurs relatives en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques pour les différentes formes de la fonction  $\chi$  et pour l'hybridation de différents schémas. Plus le degré  $n$  de la fonction  $\chi$  de type polynomial est élevé, plus les erreurs diminuent, excepté dans le cas d'une hybridation GD/GD. Ceci permet de confirmer nos interprétations faites dans la figure II.3.8, pour une hybridation FDTD/FDTD où la solution devient plus précise avec un degré polynomial élevé. Pour les fonctions  $\chi$  de type exponentiel et tangente hyperbolique, les erreurs évaluées sont du même ordre que celles pour la fonction polynomiale. De même, nous constatons que les erreurs les plus faibles sont données pour une fonction  $\chi$  polynomiale, et en particulier pour le degré 9. Dans le cas d'une hybridation GD/GD, nous ne pouvons pas en tirer les mêmes conclusions. En effet, pour cette configuration, les erreurs croissent quand le degré polynomial devient grand et les erreurs obtenues pour les autres types de fonction  $\chi$  sont également plus importantes. Nous n'avons pas d'explication à donner à ce phénomène mais cela est peut être dû à l'utilisation d'un faible ordre d'approximation spatial ( $r = 1$ ) pour la méthode.

Notons que le choix de ces fonctions  $\chi$  change la formulation FVTD du schéma. Plaçons nous dans le cas d'une approximation FVTD dans l'approche Patch, dans le sous-domaine  $\Omega_1$ . Après l'utilisation de l'intégration par parties, la première équation (II.3.10a) s'écrit toujours :

$$\int_{V_{1,i}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} dx_1 = -[\chi \mathbf{H}_1]_{\partial V_{1,i}} + \int_{V_{1,i}} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \mathbf{H}_1 dx_1 - [\chi \mathbf{H}_2]_{\partial V_{1,i}} + \int_{V_{1,i}} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \mathbf{H}_2 dx_1 \quad (\text{II.3.46})$$

Dans ce cas,  $\frac{\partial \chi}{\partial x_1}$  n'est pas constant. Nous supposons  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  constants sur chaque volume et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}_{1,i+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_{1,i+1/2}^n}{\Delta t} V_{1,i} \\
&= -\chi_{i+1} \mathbf{H}_{1,i+1}^{n+1/2} + \chi_i \mathbf{H}_{1,i}^{n+1/2} + \mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} [\chi]_{\partial V_{1,i}} \\
&\quad -\chi_{i+1} \mathbf{H}_{2,i+1}^{n+1/2} + \chi_i \mathbf{H}_{2,i}^{n+1/2} + \mathbf{H}_{2,i+1/2}^{n+1/2} [\chi]_{\partial V_{1,i}} \\
&\quad -\chi_{i+1} \mathbf{H}_{1,i+1}^{n+1/2} + \chi_i \mathbf{H}_{1,i}^{n+1/2} + \mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} (\chi(x_{1,i+1}) - \chi(x_{1,i})) \\
&\quad -\chi_{i+1} \mathbf{H}_{2,i+1}^{n+1/2} + \chi_i \mathbf{H}_{2,i}^{n+1/2} + \mathbf{H}_{2,i+1/2}^{n+1/2} (\chi(x_{1,i+1}) - \chi(x_{1,i})) \quad (\text{II.3.47})
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière, nous obtenons pour la seconde équation (II.3.10b) :

$$\begin{aligned}
& \mu_0 \frac{\mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{1,i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} V_{1,i} \\
&= -\chi_{i+1} \mathbf{E}_{1,i+1} + \chi_i \mathbf{E}_{1,i} + \mathbf{E}_{1,i+1/2}^{n+1/2} (\chi(x_{1,i+1}) - \chi(x_{1,i})) \\
&\quad -\chi_{i+1} \mathbf{E}_{2,i+1} + \chi_i \mathbf{E}_{2,i} + \mathbf{E}_{2,i+1/2}^{n+1/2} (\chi(x_{1,i+1}) - \chi(x_{1,i})) \quad (\text{II.3.48})
\end{aligned}$$

### 3.4.2 Terme de pénalisation dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD

Dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD, nous notons la présence d'oscillations sur la solution obtenue. Nous décidons alors d'utiliser un terme de relaxation, uniquement dans les équations sur le champ électrique, qui va alors "temporiser" l'amplitude de ces oscillations. Sur le sous-domaine  $\Omega_1$ , nous rajoutons le terme  $\nu(E_1 - \chi E)$  dans l'équation sur le champ électrique du système (II.3.6). L'équation (II.3.6a) devient alors :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} = -\chi \frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \nu(E_1 - \chi E) \quad (\text{II.3.49})$$

$E$  étant  $E_1 + E_2$ , nous pouvons la réécrire :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} = -\chi \frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \nu((1 - \chi)E_1 - \chi E_2) \quad (\text{II.3.50})$$

**Remarque 19**  $E_2$  correspond au champ électrique calculé dans  $\Omega_2$  et interpolé dans  $\Omega_1$ .

De la même façon, nous rajoutons le terme  $\nu(E_2 - (1 - \chi)E)$  dans l'équation sur le champ électrique du système (II.3.7) sur le sous-domaine  $\Omega_2$ . Nous obtenons l'équation (II.3.7a) modifiée suivante :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} = -(1 - \chi) \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - (1 - \chi) \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \nu(E_2 - (1 - \chi)E) \quad (\text{II.3.51})$$

qui se réécrit :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} = -(1 - \chi) \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - (1 - \chi) \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \nu(\chi E_2 - (1 - \chi)E_1) \quad (\text{II.3.52})$$

**Remarque 20**  $E_1$  correspond au champ électrique calculé dans  $\Omega_1$  et interpolé dans  $\Omega_2$ .

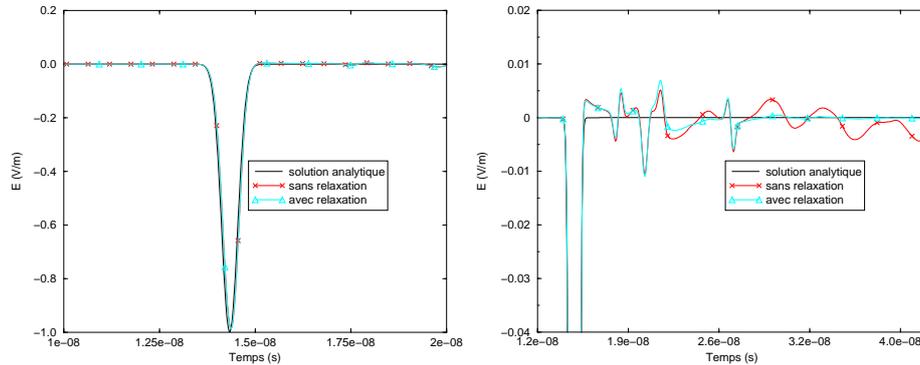


figure II.3.10 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec et sans terme de relaxation pour une hybridation FDTD/FDTD.

Pour une hybridation FDTD/FDTD, les exemples précédents ont montré d'importantes oscillations sur les solutions pour une petite zone de recouvrement, un pas de discrétisation de l'ordre de  $\lambda/10$  et une fonction  $\chi$  polynomiale de degré 1. En considérant ces mêmes paramètres, nous nous sommes intéressés au rajout d'un terme de relaxation sur le champ électrique. La figure II.3.10 montre que ce terme de relaxation améliore la précision de la solution et diminue ces oscillations à long terme.

	FDTD/FDTD
Sans relaxation	0.2003404
Avec relaxation	0.1931188

table II.3.7 – Erreur relative en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques avec et sans terme de relaxation pour une hybridation FDTD/FDTD.

Dans le tableau II.3.7, nous évaluons les erreurs relatives en norme  $L^2$  en temps et en espace entre la solution analytique et les solutions numériques avec et sans terme de relaxation. Cette erreur diminue très faiblement quand on considère le terme de relaxation; ce qui confirme les résultats de la figure II.3.10 qui montre une amélioration de la solution avec le terme de relaxation à long terme. Toutefois, le coefficient  $\nu$  du terme de relaxation a été choisi à  $\nu = 0.01$ , empiriquement par essais successifs. Ce choix montre la difficulté à trouver un terme  $\nu$  efficace. En effet, si ce terme est fixé à une valeur trop petite, il n'influence pas le comportement de la solution et s'il est trop grand, la solution du problème est faussée. Cette méthode reste, par conséquent, délicate à mettre en œuvre.

### 3.5 PROPOSITION D'UNE ÉTUDE DE STABILITÉ DU SCHEMA HYBRIDE EN UNE DIMENSION

#### 3.5.1 Etude du schéma de Yee en 1D

Reprenons les équations de Maxwell 1D (II.3.1). Posons  $\mathbf{E}' = \sqrt{\varepsilon_0}\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}' = \sqrt{\mu_0}\mathbf{H}$  et  $t' = ct$ . Le système de Maxwell normalisé s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{E}'_y}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{H}'_z}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3.53a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}'_z}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{E}'_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3.53b})$$

Prenons, pour la suite,  $t' \equiv t$ ,  $\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}' \equiv \mathbf{H}$ . En utilisant le schéma de Yee, les équations de Maxwell 1D (II.3.53) s'écrivent :

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} = - \frac{H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (\text{II.3.54a})$$

$$\frac{H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = - \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{\Delta x} \quad (\text{II.3.54b})$$

Nous supposons ici le problème dans le vide sans conditions aux limites. Nous introduisons alors la variable  $(U^n)_i = (E_i^n, H_{i+1/2}^{n-1/2})^t$  et les opérateurs  $A^H$  et  $A^E$  tels que  $A^H(U^{n+1})_i = \begin{pmatrix} H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i-1/2}^{n+1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $A^E(U^n)_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{i+1}^n - E_i^n \end{pmatrix}$ . Le système (II.3.54) peut alors se réécrire sous la forme :

$$U^{n+1} - U^n = - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^H(U^{n+1}) + A^E(U^n)) \quad (\text{II.3.55})$$

Il est facile de montrer la propriété suivante :

**Proposition 23** Soient  $U = (U_1, U_2)^t$  et  $V = (V_1, V_2)^t$  deux vecteurs quelconques alors

$$(A^H(U), V) + (A^E(V), U) = 0 \quad (\text{II.3.56})$$

▷ PREUVE : D'après les définitions des opérateurs  $A^H$  et  $A^E$ , nous avons  $(A^H(U))_i = \begin{pmatrix} U_{2,i+1/2} - U_{2,i-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $(A^E(V))_i = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{1,i+1} - V_{1,i} \end{pmatrix}$ .

Finalement, en discrétisant, nous obtenons  $(A^H(U), V) = \sum_{i=1}^{N_s} (U_{2,i+1/2}V_{1,i} - U_{2,i-1/2}V_{1,i})$  et

$(A^E(V), U) = \sum_{i=1}^{N_s} (V_{1,i+1}U_{2,i+1/2} - V_{1,i}U_{2,i+1/2})$ , où  $N_s$  est le nombre de points de discrétisation.

En sommant, il reste :

$$(A^H(U)_i, V_i) + (A^E(V)_i, U_i) = -U_{2,i-1/2}V_{1,i} + V_{1,i+1}U_{2,i+1/2} \quad (\text{II.3.57})$$

Il est facile de montrer que ces deux termes s'annulent avec ceux provenant des indices  $i - 1$  et  $i + 1$ .

Ce qui conclut la preuve de cette proposition. ◁

Multiplions maintenant l'équation (II.3.64) par le vecteur  $\frac{U^{n+1} + U^n}{2}$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2}{2} \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( A^H(U^{n+1}), \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) + \left( A^E(U^n), \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.3.58})$$

où  $\|\cdot\|$  définit la norme  $L^2$ .

En utilisant la relation (II.3.56), nous obtenons :

$$\|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2 = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( A^H(U^{n+1}), U^{n+1} \right) + \left( A^E(U^n), U^n \right) \right] \quad (\text{II.3.59})$$

Nous avons aussi :

$$\|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2 = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( -A^E(U^{n+1}), U^{n+1} \right) + \left( A^E(U^n), U^n \right) \right] \quad (\text{II.3.60})$$

Nous obtenons ainsi la conservation au cours du temps du terme suivant :

$$\|U^{n+1}\|^2 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( A^E(U^{n+1}), U^{n+1} \right) \quad (\text{II.3.61})$$

Ce terme étant constant au cours du temps, il est borné. Nous pouvons voir que :

$$\left( A^E(U), U \right) = \sum_i (E_{i+1} - E_i) H_{i+1/2} \leq \|U\|^2 \quad (\text{II.3.62})$$

Finalement, nous avons :

$$\|U^{n+1}\|^2 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( A^E(U^{n+1}), U^{n+1} \right) \geq \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \|U^{n+1}\|^2 \quad (\text{II.3.63})$$

Pour que  $\|U^{n+1}\|^2$  soit borné, et par conséquent que le schéma soit stable, il suffit que  $\left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) > 0$ .

Nous pouvons généraliser cette propriété de stabilité à des schémas plus complexes. Considérons un système général (discret) de la forme :

$$B(U^{n+1} - U^n) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( A^H(U^{n+1}) + A^E(U^n) \right) \quad (\text{II.3.64})$$

avec  $A^H$  et  $A^E$  quelconques et vérifiant les propriétés II.3.56 et II.3.62 et  $B$  un opérateur défini positif tel que :

$$(BU, U) \geq b\|U\|^2, \quad b > 0 \quad (\text{II.3.65})$$

En utilisant la même démonstration que précédemment, nous pouvons montrer que le schéma est stable sous la condition :

$$\left( b - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) > 0$$

### 3.5.2 Etude du schéma hybride en 1D

Intéressons nous au schéma hybride des équations de Maxwell avec un couplage de deux schémas FDTD (II.3.4-II.3.5). Pour cela, nous considérons deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , respectivement de maillages  $M_1$  et  $M_2$ . Ces deux maillages sont réguliers et ils ont un pas de discrétisation spatial respectivement  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$ . Nous définissons deux opérateurs d'interpolation, notés  $P$  et  $Q$ , pour passer d'un maillage à un autre. Ces opérateurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} P & : M_1 \longrightarrow M_2 \\ U & \longmapsto P(U) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q & : M_2 \longrightarrow M_1 \\ V & \longmapsto Q(V) \end{aligned}$$

Nous disposons également de la fonction de transition  $\chi$  entre les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Le schéma hybride consiste alors à résoudre deux systèmes couplés sur chacun des maillages  $M_1$  et  $M_2$ . Notons  $U$  la solution sur le maillage  $M_1$  et  $V$  la solution sur le maillage  $M_2$ . Nous pouvons réécrire le système couplé normalisé de la manière suivante :

$$U^{n+1} - U^n = -\chi \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \left[ A^H(U^{n+1} + Q(V^{n+1})) + A^E(U^n + Q(V^n)) \right] \quad (\text{II.3.66})$$

$$V^{n+1} - V^n = -(1-\chi) \frac{\Delta t}{\Delta x_2} \left[ A^H(V^{n+1} + P(U^{n+1})) + A^E(V^n + P(U^n)) \right] \quad (\text{II.3.67})$$

Introduisons le vecteur  $W^n = (U^n, V^n)^t$  et les opérateurs suivants :

$$B(W) = \left( \Delta x_1 \frac{U}{\chi}, \Delta x_2 \frac{V}{1-\chi} \right)$$

$$\tilde{A}^H = \begin{pmatrix} A^H & A^H Q \\ A^H P & A^H \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{A}^E = \begin{pmatrix} A^E & A^E Q \\ A^E P & A^E \end{pmatrix}$$

Le schéma hybride (II.3.66) peut se réécrire sous la forme :

$$B(W^{n+1} - W^n) = -\Delta t \left( \tilde{A}^H(W^{n+1}) + \tilde{A}^E(W^n) \right) \quad (\text{II.3.68})$$

D'après les résultats du paragraphe précédent, il suffit de vérifier les propriétés (II.3.56), (II.3.62) et (II.3.65) pour assurer la stabilité du schéma hybride. Pour cela, considérons deux vecteurs  $W = (U, V)^t$  et  $W' = (U', V')^t$ . Nous avons alors :

$$\left( \tilde{A}^H W, W' \right) = (A^H U, U') + (A^H Q V, U') + (A^H P U, V') + (A^H V, V') \quad (\text{II.3.69})$$

et

$$\left(\tilde{A}^E W', W\right) = (A^E U', U) + (A^E Q V', U) + (A^E P U', V) + (A^E V', V) \quad (\text{II.3.70})$$

En sommant les relations (II.3.69) et (II.3.70) et en utilisant la propriété (II.3.56) sur  $M_1$  et sur  $M_2$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}^H W, W'\right) + \left(\tilde{A}^E W', W\right) \\ &= \left(A^H Q V, U'\right) + \left(A^E Q V', U\right) + \left(A^H P U, V'\right) + \left(A^E P U', V\right) \end{aligned} \quad (\text{II.3.71})$$

En utilisant la relation (II.3.56), il vient aussi :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}^H W, W'\right) + \left(\tilde{A}^E W', W\right) \\ &= -\left(Q^t A^E U', V\right) + \left(A^E Q V', U\right) - \left(P^t A^E V', U\right) + \left(A^E P U', V\right) \end{aligned} \quad (\text{II.3.72})$$

Regroupons finalement les termes :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}^H W, W'\right) + \left(\tilde{A}^E W', W\right) \\ &= \left(\left(A^E Q - P^t A^E\right) V', U\right) + \left(\left(A^E P - Q^t A^E\right) U', V\right) \end{aligned} \quad (\text{II.3.73})$$

Pour vérifier la propriété (II.3.56), la relation (II.3.73) doit s'annuler. Pour cela, il suffit que :

$$\begin{aligned} A^E Q - P^t A^E &= 0 \\ A^E P - Q^t A^E &= 0 \end{aligned}$$

Si  $Q = P^t$  et si  $P$  commute avec l'opérateur  $A^E$  alors la propriété (II.3.56) est vérifiée. Cette propriété est évidemment très contraignante sur les opérateurs d'interpolation. Admettons un instant que ces deux propriétés soient vérifiées et estimons la condition de stabilité. Evaluons maintenant la constante de continuité pour la propriété (II.3.62).

Nous avons facilement l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\tilde{A}^E W, W\right) &= (A^E U, U) + (A^E Q V, U) + (A^E P U, V) + (A^E V, V) \\ &\leq (1 + \|P\|) \|W\|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.3.74})$$

De même, nous avons :

$$(B W, W) = \sum_i \Delta x_1 \frac{U_i^2}{\chi_i} + \Delta x_2 \frac{V_i^2}{(1 - \chi_i)} \geq \min(\Delta x_1, \Delta x_2) \|W\|^2 \quad (\text{II.3.75})$$

Finalement, nous trouvons le critère de stabilité suivant pour le système hybride :

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x_1, \Delta x_2)}{1 + \|P\|^2}$$

**Remarque 21** Comme cela a été mentionné précédemment, ce critère de stabilité n'est pas général et ne peut pas être appliqué sur n'importe quel type de maillage. En effet, il est nécessaire d'avoir  $Q = P^t$  et la commutation de  $P$  avec l'opérateur  $A^E$ . Néanmoins, dans le cas de deux maillages avec le même pas de discrétisation spatiale (maillages décalés), nous avons ces propriétés et, par conséquent, un critère de stabilité. Dans les autres cas, la question reste encore ouverte.

**Remarque 22** *Cette étude de stabilité a été élaborée sur le schéma de Yee (méthode FDTD). Il est tout à fait possible d'établir un même type de critère pour les schémas FVTD ou GD, proposés dans ce mémoire, utilisant une approximation de type Leap-Frog en temps. En effet, la propriété (II.3.56), fondamentale pour la démonstration de la stabilité, reste vraie sur ces deux schémas numériques.*

### 3.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode d'hybridation pour coupler différents schémas numériques entre eux. Cette méthode a été appliquée sur un problème 1D pour lequel nous avons réalisé plusieurs études numériques pour quantifier l'importance de chaque paramètre de la méthode sur la précision de la solution. Dans les conclusions que nous avons pu tirer de cette étude, la plus importante est que la méthode semble stable. Nous avons également constaté que nous pouvons améliorer la précision de la solution en augmentant la taille de la zone de recouvrement, ou en augmentant la discrétisation dans cette zone, ou en utilisant une forme particulière de la fonction  $\chi$ , ou en introduisant un terme de relaxation. Parmi l'ensemble de ces possibilités, augmenter la taille de la zone de recouvrement et discrétiser plus finement cette zone limitent l'intérêt de la méthode hybride et entraînent des coûts de calculs et de mémoire supplémentaires. Quant à la dernière possibilité qui consiste à introduire un terme de relaxation, celle-ci reste délicate à mettre en œuvre de part le choix du coefficient de relaxation. Enfin, la fonction  $\chi$  semble être le paramètre le plus intéressant à utiliser pour obtenir des solutions hybrides correctes sans pour autant diminuer les performances de la méthode proposée. Pour la fonction  $\chi$ , le choix que nous préconisons est une fonction polynomiale impaire d'ordre élevé. Pour finir sur cette étude 1D, nous avons mené une ébauche de démonstration préliminaire d'un critère de stabilité pour le schéma hybride.

# INTRODUCTION DU MODÈLE PIC DANS UNE CONFIGURATION HYBRIDE 2D FDTD/FDTD

## SOMMAIRE

4.1	MODÈLE 2D ÉTUDIÉ . . . . .	153
4.1.1	Définition du problème Maxwell-Vlasov . . . . .	153
4.1.2	Introduction de la méthode PIC . . . . .	153
4.2	HYBRIDATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL 2D EN MODE TE . . . . .	154
4.2.1	Etude d'une configuration avec deux zones à maillages décalés . . . . .	155
4.2.2	Etude d'une configuration à inclusion de zones . . . . .	159
4.3	HYBRIDATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT . . . . .	166
4.3.1	Introduction de la méthode PIC . . . . .	166
4.3.2	Exemples numériques . . . . .	168
4.4	CONCLUSION SUR L'HYBRIDATION 2D . . . . .	169

DANS ce chapitre, l'objectif est d'introduire la méthode hybride étudiée en 1D (chapitre précédent) pour le système Maxwell-Vlasov 2D. Tout d'abord, nous rappelons brièvement les équations Maxwell-Vlasov et la méthode PIC en 2D. Ensuite, nous étudions l'hybridation du problème Maxwell 2D en mode TE pour deux types de configuration :

- une configuration avec deux zones à maillages décalés,
- une configuration à inclusion de zones.

Dans ce travail, nous faisons le choix d'étudier un couplage entre deux sous-domaines traités uniquement par la méthode FDTD. Dans chacune des configurations pour la résolution du système de Maxwell, nous montrons l'influence des paramètres liés à l'hybridation par un certain nombre de résultats numériques. Nous verrons que les conclusions obtenues sont similaires à celles obtenues pour le cas 1D dans le chapitre précédent. Enfin, nous introduisons la partie Vlasov dans l'hybridation FDTD/FDTD étudiée précédemment. Pour cela, nous nous plaçons exclusivement dans la configuration avec deux zones à maillages décalés et nous étudions essentiellement le comportement de la trajectoire d'un électron soumis à un champ magnétique uniforme.



## 4.1 MODÈLE 2D ÉTUDIÉ

### 4.1.1 Définition du problème Maxwell-Vlasov

Nous nous sommes intéressés à l'application de la méthode hybride dans le cas d'un problème Maxwell-Vlasov 2D avec un couplage de deux sous-domaines traités par la méthode FDTD.

Le modèle cinétique d'un plasma sans collision et de faible densité (comme il a été étudié dans la première partie de cette thèse) est décrit par l'évolution de la fonction de distribution pour chaque espèce  $s$  de particules. Dans le cas non relativiste, cette fonction satisfait l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{X}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{V}} = 0 \quad (\text{II.4.1})$$

où  $\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{V}, \mathbf{X}, t) = \mathbf{f}_s(v_x, v_y, x, y, t)$  est la fonction de distribution de chaque espèce  $s$  de charge  $q$  et de masse  $m$ .  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  représentent l'induction magnétique et le champ électrique agissant sur les particules. Cette fonction est couplée, sur un domaine de calcul  $\Omega$ , aux équations de Maxwell en mode TE (*Transverse Electric*), évaluant les grandeurs  $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$  et  $\mathbf{H}_z$ . Ces grandeurs satisfont alors les équations suivantes :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y} - \mathbf{J}_x \quad (\text{II.4.2a})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x} - \mathbf{J}_y \quad (\text{II.4.2b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} \right) \quad (\text{II.4.2c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.4.2d})$$

$\mathbf{J} = (J_x, J_y)$  et  $\rho$  sont respectivement les densités de courant et de charge générées par le mouvement des particules. Sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine de calcul, nous imposons des conditions de bord de type Silver-Muller pour les champs électromagnétiques.

Ces densités de courant et de charge vérifient la loi de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{II.4.3})$$

et elles sont définies par :

$$\rho(\mathbf{X}, t) = \sum_s q_s \int_{\mathbb{R}^2} f_s(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} \quad (\text{II.4.4a})$$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{X}, t) = \sum_s q_s \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{V} f_s(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} \quad (\text{II.4.4b})$$

### 4.1.2 Introduction de la méthode PIC

La fonction de distribution  $\mathbf{f}_s$  est conservée le long des trajectoires des particules qui sont déterminées par leur mouvement (positions et vitesses). Les positions  $(x, y)$  et les vitesses  $(v_x, v_y)$  des particules sont solutions des équations caractéristiques (équations de mouvement) définies par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V} \quad (\text{II.4.5a})$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (\text{II.4.5b})$$

Dans ces équations (II.4.5), nous observons l'interaction entre le champ électromagnétique et les particules. Les champs sont solutions des équations de Maxwell (II.4.2) et sont évalués en utilisant un schéma numérique FDTD. Les champs sont alors localisés sur un maillage de l'espace physique tandis que les particules ont une position et une vitesse non localisées aux degrés de liberté de ce même maillage. Il est donc nécessaire d'interpoler les positions des particules et les champs pour évaluer les termes couplés. C'est le principe de la méthode PIC (*Particle-In-Cell*) que nous avons détaillé dans la première partie de ce mémoire.

Nous décomposons alors  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et nous appliquons la méthode hybride sur le problème Maxwell-Vlasov 2D.

### Discrétisation en temps

Nous avons choisi d'utiliser le schéma numérique de type Leap-Frog pour la discrétisation temporelle pour les équations de Maxwell (II.4.2). Par conséquent, les champs électriques  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{E}_y$  sont évalués au temps  $t = n\Delta t$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}_z$  au temps  $t = (n + 1/2)\Delta t$  avec  $n \in \mathbb{N}$  l'itération temporelle et  $\Delta t$  le pas de temps. Nous appliquons également le même schéma pour résoudre les équations de mouvement (II.4.5). Les positions des particules sont alors évaluées au temps  $n\Delta t$  et leurs vitesses au temps  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ .

### Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de Yee. Nous supposons que les nœuds du maillage sont définis par les indices  $i, j$ . Pour la maille composée des nœuds  $(i, j)$ ,  $(i, j + 1)$ ,  $(i + 1, j + 1)$  et  $(i + 1, j)$ , les champs sont évalués en  $E_x(i + \frac{1}{2}, j)$ ,  $E_x(i + \frac{1}{2}, j + 1)$ ,  $E_y(i, j + \frac{1}{2})$ ,  $E_y(i + 1, j + \frac{1}{2})$  et  $H_z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ . En ce qui concerne les positions et les vitesses des particules, celles-ci sont indépendantes des degrés de liberté localisés sur les mailles.

## 4.2 HYBRIDATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL 2D EN MODE TE

Dans cette section, nous allons étudier l'hybridation du problème Maxwell 2D en mode TE (II.4.2) sans prendre en compte la partie "Vlasov". Ainsi, la densité de courant  $\mathbf{J}$  due au mouvement des particules est négligée.

En appliquant la méthode hybride de type Patch, notamment l'introduction de

la fonction  $\chi$ , nous obtenons, sur  $\Omega_1$ , les équations de Maxwell suivantes :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{x_1}}{\partial t} = \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial y_1} + \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial y_1} \quad (\text{II.4.6a})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{y_1}}{\partial t} = -\chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial x_1} \quad (\text{II.4.6b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_1}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_1}}{\partial x_1} \right) + \chi \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_2}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_2}}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II.4.6c})$$

Sur  $\Omega_2$ , nous obtenons :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{x_2}}{\partial t} = (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial y_2} + (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial y_2} \quad (\text{II.4.7a})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{y_2}}{\partial t} = -(1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial x_2} - (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial x_2} \quad (\text{II.4.7b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial t} = (1 - \chi) \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_2}}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_2}}{\partial x_2} \right) + (1 - \chi) \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_1}}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_1}}{\partial x_2} \right) \quad (\text{II.4.7c})$$

#### 4.2.1 Etude d'une configuration avec deux zones à maillages décalés

##### Discrétisation spatiale

Nous considérons deux grilles cartésiennes  $(x_{1,i}, y_{1,i})_{i=0, \dots, N_1+1}$  et  $(x_{2,i}, y_{2,i})_{i=0, \dots, N_2+1}$  telles que  $x_{1,i} = i\Delta x_1$  et  $y_{1,i} = i\Delta y_1, i \in [0, N_1 + 1]$  sur le sous-domaine  $\Omega_1$  et  $x_{2,i} = i\Delta x_2$  et  $y_{2,i} = i\Delta y_2, i \in [0, N_2 + 1]$  sur  $\Omega_2$ .  $N_1$  et  $N_2$  définissent respectivement le nombre de points de discrétisation internes à  $\Omega_1$  et à  $\Omega_2$ . Les pas de discrétisation spatiale  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$  sont supposés constants sur  $\Omega_1$  et sur  $\Omega_2$ . Par hypothèse, nous choisissons la même discrétisation sur l'axe des  $y$ , i.e  $(y_{1,i})_{i=1, \dots, N_1+1} = (y_{2,j})_{j=1, \dots, N_2+1}$  avec un pas de discrétisation  $\Delta y$  constant sur les deux sous-domaines.

La configuration avec deux zones à maillages décalés est illustrée dans la figure II.4.1. D'après la figure, la discrétisation des sous-domaines  $\Omega_1$  (en rouge) et  $\Omega_2$  (en cyan) coïncident bien sur l'axe des  $y$ .

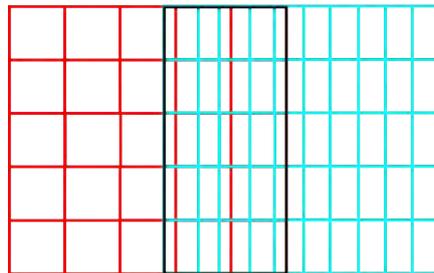


figure II.4.1 – Schéma du domaine de calcul  $\Omega$  avec deux zones  $\Omega_1$  (en rouge) et  $\Omega_2$  (en cyan) à maillages décalés avec recouvrement (en noir).

##### Etude paramétrique et résultats numériques

La configuration étudiée dans cette section, c'est-à-dire un domaine global avec deux zones à maillages décalés, est un cas 2D particulier. En effet, pour chaque valeur  $y$  de l'axe des ordonnées, nous nous ramenons au cas 1D traité dans le chapitre

précédent.

Par conséquent, l'introduction des "termes sources", c'est-à-dire  $\frac{\partial H_{z_2}}{\partial y_1}, \frac{\partial H_{z_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial E_{x_2}}{\partial y_1}$  et  $\frac{\partial E_{y_2}}{\partial x_1}$  sur  $\Omega_1$  et de ceux sur  $\Omega_2$   $\frac{\partial H_{z_1}}{\partial y_2}, \frac{\partial H_{z_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial E_{x_1}}{\partial y_2}$  et  $\frac{\partial E_{y_1}}{\partial x_2}$ , dans le modèle numérique, est effectuée comme dans le cas 1D par une interpolation des champs en utilisant une approximation linéaire. De même, pour la fonction  $\chi$  utilisée, nous étudions seulement la fonction polynomiale de degré impair qui est la fonction la plus intéressante dans le cas 1D (chapitre précédent).

Ainsi, comme pour les exemples numériques à une dimension, nous nous sommes intéressés à l'influence de certains paramètres et nous donnons les principaux résultats obtenus dans ce paragraphe.

Nous décomposons  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.72, 1.8] \times [0, 1]$  dans lesquels nous faisons propager une onde plane en considérant les milieux sans objet. Dans nos simulations, l'onde plane incidente est donnée par le pulse Gaussien suivant :

$$E_{inc} = \exp\left(-\left(\frac{t - x/3e8 - t_0}{\sigma}\right)^2\right) \tag{II.4.8}$$

avec  $t_0 = 1.e - 08s$  et  $\sigma = 1.e - 09s$ .  $E_{inc}$  représente le champ incident. Pour nos études numériques, nous évaluons les champs électrique et magnétique en un point-test localisé à  $x = 1.5m$  et  $y = 0.5m$  (point-test appartenant à  $\Omega_2$ ) qui se situe dans la zone de champ total.

### Influence de la taille de la zone de recouvrement

Nous nous sommes tout d'abord intéressés à la taille de la zone tampon entre les deux sous-domaines. Ainsi, nous considérons  $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [c, 1.8] \times [0, 1]$ , avec le point de la grille  $c$  variable, permettant ainsi d'avoir des tailles de la zone de recouvrement allant de 8% à 20% de la taille du domaine global. Dans cette étude, nous considérons un pas de discrétisation spatiale constant de  $0.045m$  en  $x$  et  $y$ , soit de l'ordre de  $\frac{\lambda}{10}$  et une fonction  $\chi$  polynomiale de degré 1.

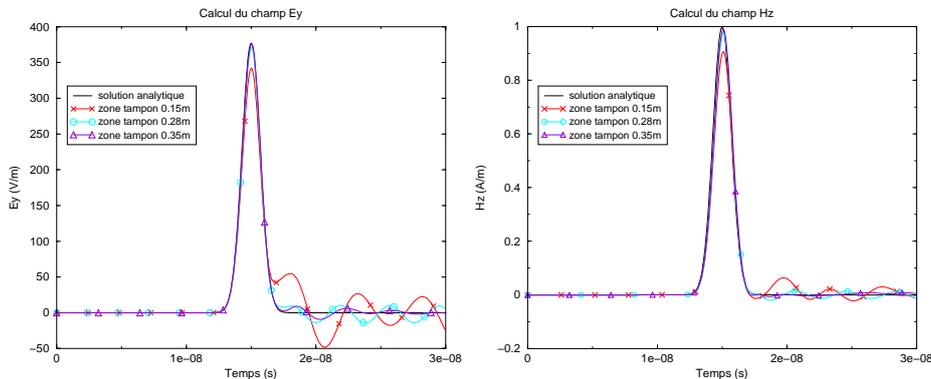


figure II.4.2 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes tailles de la zone de recouvrement pour les champs  $E_y$  (à gauche) et  $H_z$  (à droite), dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD.

La figure II.4.2 montre les résultats obtenus pour les champs  $E_y$  (à gauche) et  $H_z$  (à droite) par rapport à la solution analytique avec différentes tailles de la zone

de recouvrement. Nous remarquons, comme dans le cas 1D, que plus la zone de recouvrement est importante, plus la solution est précise. La meilleure précision de la solution est obtenue pour une taille de zone de recouvrement de  $0.35m$ , soit 20% de la taille du maillage global. L'erreur commise dans l'hybridation se traduit par la présence d'oscillations sur la solution. Notons que ces oscillations diminuent en fonction de la taille de la zone de recouvrement. Toutefois, malgré la présence d'oscillations parasites sur les solutions hybrides, celles-ci semblent avoir un comportement stable à long terme.

### Influence de la discrétisation spatiale dans la zone de recouvrement sur l'axe des $x$

Ensuite, nous avons évalué l'influence de la discrétisation spatiale dans la zone de recouvrement. Pour cela, nous avons fait varier le pas de discrétisation spatiale en  $x$  dans la zone de recouvrement de  $0.045m$  ( $\frac{\lambda}{10}$ ) à  $0.01m$  ( $\frac{\lambda}{40}$ ). Le pas de discrétisation spatiale en  $y$  reste, quant à lui, constant pour l'ensemble de ces simulations et est égal à  $0.045m$ , soit  $\frac{\lambda}{10}$ . Nous considérons aussi une fonction  $\chi$  polynomiale de degré 1.

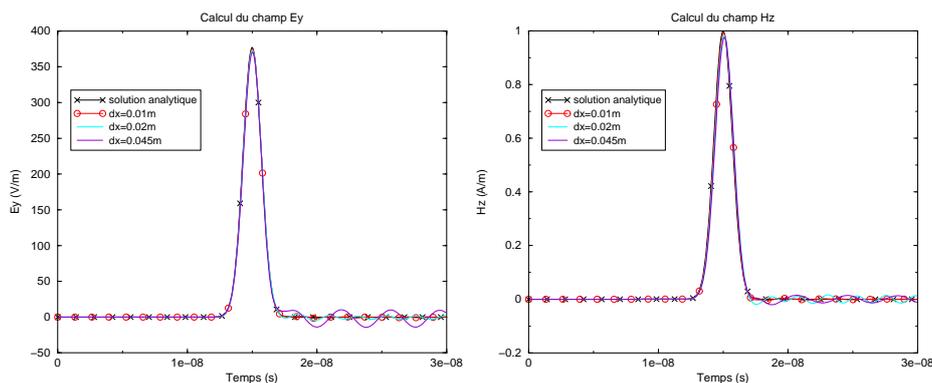


figure II.4.3 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différentes discrétisations spatiales en  $x$  dans la zone de recouvrement pour les champs  $E_y$  (à gauche) et  $H_z$  (à droite), dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD.

Comme dans le cas 1D, il est intéressant de voir que la discrétisation spatiale influence sur la précision de la solution (figure II.4.3). En effet, plus le maillage est fin, plus la solution est précise et plus l'amplitude des oscillations diminue. Comme le pas en  $y$  reste identique dans les simulations et que les interpolations sont faites dans la direction  $x$ , ceci confirme bien que l'amélioration de la solution hybride provient d'interpolations plus précises.

### Influence de la fonction $\chi$

Nous avons étudié numériquement l'influence du degré polynomial de la fonction  $\chi$  sur la précision de la solution hybride.

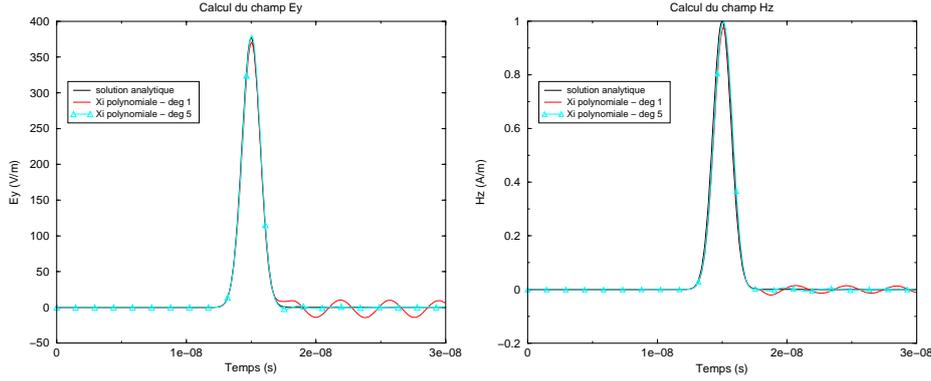


figure II.4.4 – Comparaison de la solution analytique et des solutions obtenues avec différents degrés de la fonction  $\chi$  polynomiale pour les champs  $E_y$  (à gauche) et  $H_z$  (à droite), dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD.

Dans la figure II.4.4, nous comparons la solution analytique et les solutions obtenues avec différents degrés de la fonction  $\chi$  polynomiale pour les champs  $E_y$  (à gauche) et  $H_z$  (à droite). Contrairement au degré 1, le degré 5 de la fonction polynomiale  $\chi$  permet d'avoir une solution hybride plus précise et présentant des oscillations moindres. En fait, nous pouvons montrer numériquement, comme en 1D, que si nous augmentons ce degré (supérieur à 5), la solution est encore meilleure.

### Terme de relaxation

Comme dans le cas 1D, pour une hybridation FDTD/FDTD, nous avons également introduit un terme de relaxation. Contrairement au cas 1D, nous choisissons d'étudier ce paramètre à la fois sur les équations en  $E$  et l'équation en  $H$ . Le principe reste identique au cas 1D. Sur le sous-domaine  $\Omega_1$ , nous rajoutons les termes  $\nu(E_{x_1} - \chi E_x)$  et  $\nu(E_{y_1} - \chi E_y)$  dans les équations sur le champ électrique et  $\nu(H_{z_1} - \chi H_z)$  dans l'équation sur le champ magnétique du système (II.4.6). Sachant que  $E_x = E_{x_1} + E_{x_2}$ ,  $E_y = E_{y_1} + E_{y_2}$  et  $H_z = H_{z_1} + H_{z_2}$ , les équations deviennent alors :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{x_1}}{\partial t} = \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial y_1} + \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial y_1} - \nu ((1 - \chi) \mathbf{E}_{x_1} - \chi \mathbf{E}_{x_2}) \quad (\text{II.4.9a})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{y_1}}{\partial t} = -\chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial x_1} - \nu ((1 - \chi) \mathbf{E}_{y_1} - \chi \mathbf{E}_{y_2}) \quad (\text{II.4.9b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_1}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_1}}{\partial x_1} \right) + \chi \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_2}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_2}}{\partial x_1} \right) - \nu ((1 - \chi) \mathbf{H}_{z_1} - \chi \mathbf{H}_{z_2}) \quad (\text{II.4.9c})$$

De la même façon, nous rajoutons les termes  $\nu(\mathbf{E}_{x_2} - \chi \mathbf{E}_x)$  et  $\nu(\mathbf{E}_{y_2} - \chi \mathbf{E}_y)$  dans les équations sur le champ électrique et  $\nu(\mathbf{H}_{z_2} - \chi \mathbf{H}_z)$  dans l'équation sur le champ magnétique du système (II.4.7) sur le sous-domaine  $\Omega_2$ . Les équations modifiées se

réécrivent alors de la manière suivante :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{x_2}}{\partial t} = (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial y_2} + (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial y_2} - \nu (\chi \mathbf{E}_{x_2} - (1 - \chi) \mathbf{E}_{x_1}) \quad (\text{II.4.10a})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{y_2}}{\partial t} = -(1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial x_2} - (1 - \chi) \frac{\partial \mathbf{H}_{z_1}}{\partial x_2} - \nu (\chi \mathbf{E}_{y_2} - (1 - \chi) \mathbf{E}_{y_1}) \quad (\text{II.4.10b})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{z_2}}{\partial t} = (1 - \chi) \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_2}}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_2}}{\partial x_2} \right) + (1 - \chi) \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{x_1}}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathbf{E}_{y_1}}{\partial x_2} \right) - \nu (\chi \mathbf{H}_{z_2} - (1 - \chi) \mathbf{H}_{z_1}) \quad (\text{II.4.10c})$$

Notons que  $we = \frac{\nu \Delta t}{\varepsilon_0}$  et  $wh = \frac{\nu \Delta t}{\mu_0}$  sont obtenus après discrétisation des équations des systèmes (II.4.9) et (II.4.10).

Comme dans le cas 1D, il est difficile de trouver un coefficient de relaxation efficace.

## Conclusion

L'étude numérique menée dans cette partie sur une configuration 2D avec deux zones à maillages décalés montre, comme dans le cas 1D, que la taille de la zone tampon, la discrétisation et le choix de la fonction  $\chi$  influencent sur la précision de la solution hybride. Nous obtenons de meilleurs résultats avec une discrétisation du maillage plus fine en  $x$  dans la zone de recouvrement, avec une zone de recouvrement plus importante ou avec un degré plus élevé de la fonction polynomiale  $\chi$ .

### 4.2.2 Etude d'une configuration à inclusion de zones

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à des configurations à inclusion de zones. Nous avons étudié le comportement de la solution hybride pour deux types de fonction  $\chi$  :

- une fonction bilinéaire de type  $Q_1$ ,
- une fonction radiale polynomiale.

#### Fonction $\chi$ bilinéaire

##### Discrétisation spatiale

Pour l'étude d'une configuration à inclusion de zone, nous considérons, dans un premier temps, deux grilles cartésiennes  $(x_{1,i}, y_{1,i})_{i=0, \dots, N_1+1}$  et  $(x_{2,i}, y_{2,i})_{i=0, \dots, N_2+1}$  telles que  $x_{1,i} = i\Delta x_1$  et  $y_{1,i} = i\Delta y_1, i \in [0, N_1 + 1]$  sur le sous-domaine  $\Omega_1$  et  $x_{2,i} = i\Delta x_2$  et  $y_{2,i} = i\Delta y_2, i \in [0, N_2 + 1]$  sur  $\Omega_2$ .  $N_1$  et  $N_2$  définissent respectivement le nombre de points de discrétisation internes à  $\Omega_1$  et à  $\Omega_2$ . Nous supposons les pas de discrétisation spatiale  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1$  et  $\Delta y_2$  constants sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Nous avons choisi un domaine  $\Omega$  décomposé en deux sous-domaines  $\Omega_1$  (en rouge) et  $\Omega_2$  (en cyan) tels qu'ils sont schématisés dans la figure II.4.5. Dans cette configuration 2D, la zone tampon (en noir) est délimitée par deux carrés.

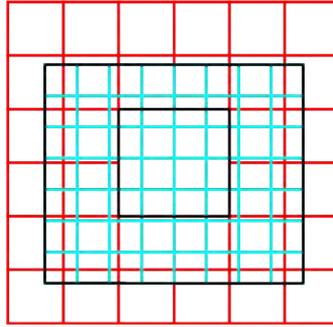


figure II.4.5 – Premier schéma du domaine de calcul  $\Omega$  à inclusion de zones  $\Omega_1$  (en rouge) et  $\Omega_2$  (en cyan) avec recouvrement (en noir).

Pour évaluer la fonction  $\chi$  en tout point  $(x, y)$  du maillage, le processus est le suivant :

1. si  $(x, y)$  appartient à  $\Omega_1$  hors de la zone tampon alors  $\chi(x, y) = 1$
2. si  $(x, y)$  appartient à  $\Omega_2$  hors de la zone tampon alors  $\chi(x, y) = 0$
3. sinon  $(x, y)$  appartient à la zone tampon et  $\chi(x, y) \in [0, 1]$ .

Il reste maintenant à évaluer la fonction  $\chi$  en tout point  $(x, y)$  appartenant à la zone tampon (étape 3). Pour cela, schématisons la zone tampon comme suit :

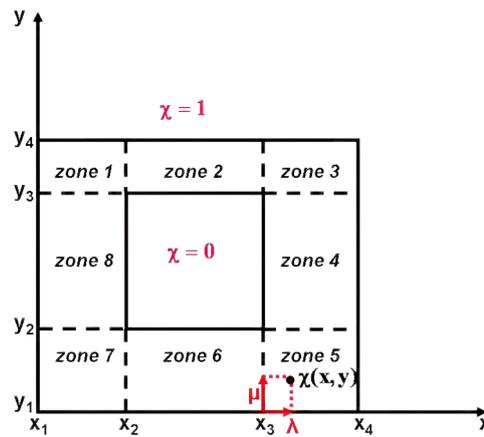


figure II.4.6 – Schéma pour le calcul de la fonction bilinéaire  $\chi$  dans la zone tampon délimitée par les deux carrés noirs.

Dans la figure II.4.6, la zone tampon est délimitée par les deux carrés noirs. Le grand carré est donné par les points  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_4, y_1)$ ,  $(x_4, y_4)$  et  $(x_1, y_4)$  tandis que le petit carré est défini par  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  et  $(x_2, y_3)$ . D’après la figure II.4.6,  $\chi(x, y) = 1$  si le point se trouve sur le grand carré et  $\chi(x, y) = 0$  si le point est sur le petit carré. En revanche, si le point  $(x, y)$  appartient à la zone tampon et se trouve à l’intérieur des deux carrés, nous décomposons la zone tampon en 8 zones (figure II.4.6) et nous procédons à une interpolation bilinéaire de la fonction  $\chi$  avec les valeurs que nous connaissons. Par exemple, soit  $(x, y)$  appartenant à la zone 5. La valeur de la fonction  $\chi$  en ce point est :

$$\begin{aligned} \chi(x, y) = & (1 - \lambda)(1 - \mu)\chi(x_3, y_1) + (1 - \lambda)\mu\chi(x_3, y_2) \\ & + \lambda(1 - \mu)\chi(x_4, y_1) + \lambda\mu\chi(x_4, y_2) \end{aligned} \tag{II.4.11}$$

avec  $\lambda = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$  et  $\mu = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ .

Or  $\chi(x_3, y_1) = 1$ ,  $\chi(x_3, y_2) = 0$ ,  $\chi(x_4, y_1) = 1$  et  $\chi(x_4, y_2) = 1$ , ce qui revient à :

$$\chi(x, y) = (1 - \lambda)(1 - \mu) + \lambda(1 - \mu) + \lambda\mu \quad (\text{II.4.12})$$

Nous procédons de la même manière pour les autres zones.

### Etude numérique

L'introduction des "termes sources" dans le modèle numérique est effectuée par une interpolation des champs en utilisant une approximation bilinéaire. Le champ d'un sous-domaine est localisé sur une maille de l'autre sous-domaine où les inconnues sont fixées aux nœuds de celle-ci.

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés au comportement de la solution hybride par rapport à l'épaisseur de la zone tampon. Pour cela, nous considérons deux sous-domaines  $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.11, 0.79] \times [0.11, 0.79]$ . Les pas de discrétisation spatiale en  $x$  et  $y$  sont constants et de l'ordre de  $\frac{\lambda}{10}$  dans  $\Omega_1$  et dans  $\Omega_2$ , avec  $\lambda = 0.3m$ .

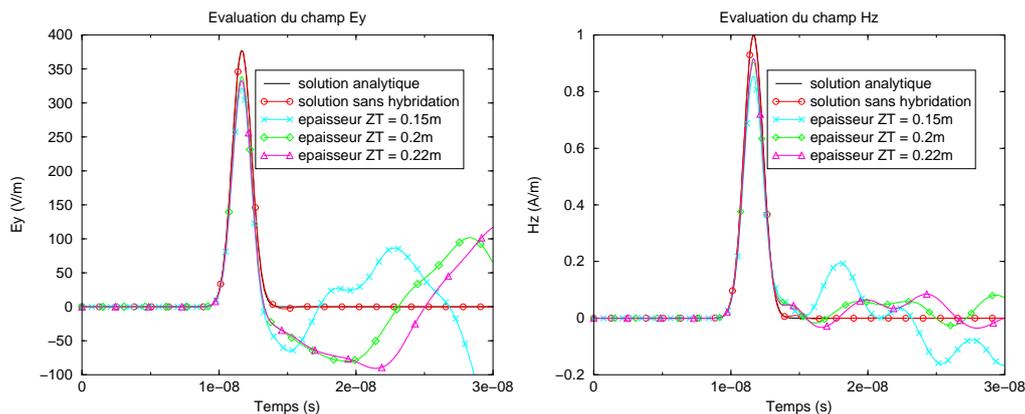


figure II.4.7 – Comparaison de la solution analytique, de la solution sans hybridation et des solutions  $E_y$  (à gauche) et  $H_z$  (à droite) obtenues avec différentes tailles de la zone tampon pour une fonction  $\chi$  interpolée dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD.

Dans la figure II.4.7, nous pouvons remarquer que la fonction  $\chi$  bilinéaire entraîne d'importantes oscillations sur les solutions hybrides obtenues, quelque soit la taille de la zone de recouvrement. Nous voyons dans ce cas que la taille de la zone de recouvrement n'influence pas la qualité de la solution hybride qui est mauvaise dans tous les cas.

Nous avons aussi constaté qu'une discrétisation spatiale plus fine dans la zone de recouvrement ne donne pas de solutions hybrides précises.

Afin de diminuer ces oscillations, nous choisissons alors d'imposer un terme de relaxation, comme nous l'avons décrit au paragraphe précédent.

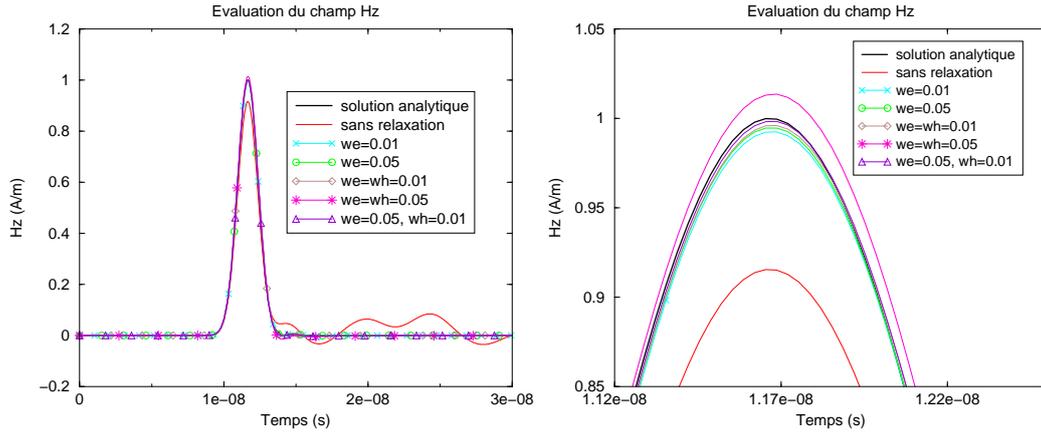


figure II.4.8 – Comparaison de la solution analytique, de la solution sans terme de relaxation et des solutions  $H_z$  obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction  $\chi$  interpolée avec une épaisseur de zone tampon de 0.25m (à gauche) et un zoom (à droite).

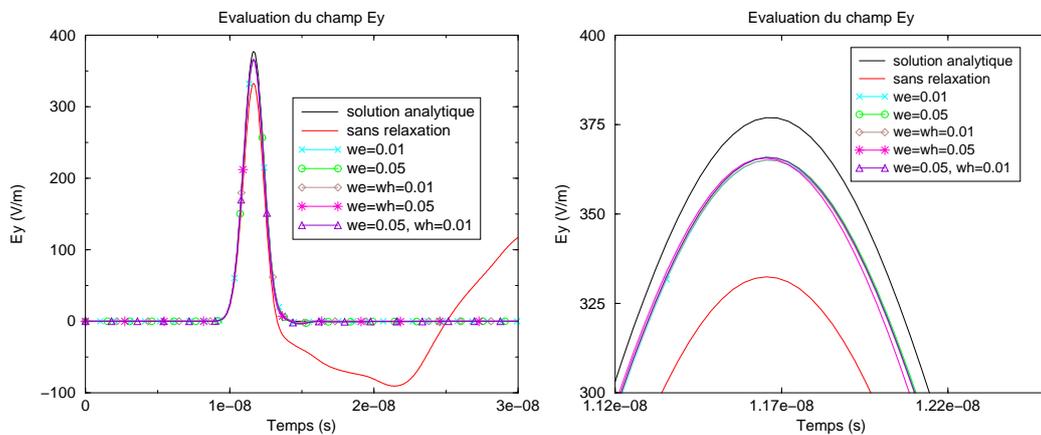


figure II.4.9 – Comparaison de la solution analytique, de la solution sans terme de relaxation et des solutions  $E_y$  obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction  $\chi$  interpolée avec une épaisseur de zone tampon de 0.25m (à gauche) et un zoom (à droite).

Dans les figures II.4.8 et II.4.9, nous comparons la solution analytique, la solution sans terme de relaxation et les solutions obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation. Dans cet exemple, l'épaisseur de la zone tampon est de 0.25m. Nous observons que ces termes de relaxation améliorent considérablement la solution hybride sans pour autant modifier celle-ci. La difficulté reste la détermination de ces termes, comme dans le cas 1D.

### Fonction $\chi$ radiale

Dans ce paragraphe, nous décidons d'imposer une fonction radiale pour la fonction  $\chi$  qui nous permettra d'utiliser des fonctions polynomiales 1D comme cela a été défini dans le chapitre précédent. Pour cela, nous avons considéré une configuration particulière, comme l'illustre la figure II.4.10.

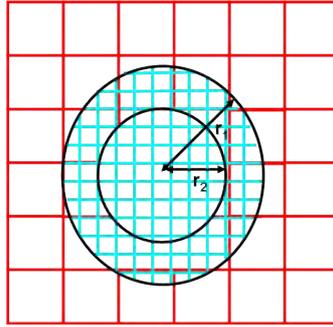


figure II.4.10 – Second schéma du domaine de calcul  $\Omega$  composé de deux sous-domaines  $\Omega_1$  (en rouge) et  $\Omega_2$  (en cyan) avec recouvrement (en noir).

Le sous-domaine  $\Omega_2$  (en cyan) est un disque de rayon  $r_1$  et qui est inscrit dans le sous-domaine  $\Omega_1$  de forme rectangulaire ou carrée (en rouge). La zone tampon (en noir) est donc délimitée par deux cercles de rayon  $r_1$  et  $r_2$ . Par conséquent, ces deux rayons sont choisis de manière à ce que le cercle de rayon  $r_1$  soit inscrit dans  $\Omega_2$  et le cercle de rayon  $r_2$  soit circonscrit à  $\Omega_1$ .

La fonction  $\chi$  est alors donnée par :

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & \text{si } x \geq r_1 \\ \chi(x) = 0 & \text{si } x \leq r_2 \\ \chi(x) = \frac{x - r_2}{r_1 - r_2} & \text{si } x \in ]r_1, r_2[ \end{cases} \quad (\text{II.4.13})$$

Ce type de fonction permet de se ramener au cas de fonction polynomiale de degré impair qui reste l'approche la plus intéressante dans les résultats numériques en 1D. Nous évitons ainsi une discrétisation spatiale trop fine et une zone de recouvrement trop grande qui réduisent l'intérêt de la méthode hybride.

### Etude numérique

Afin de valider la méthode dans cette configuration 2D et d'en étudier les avantages et les inconvénients, nous avons repris les paramètres de l'étude numérique de la configuration précédente, notamment les deux sous-domaines  $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.11, 0.79] \times [0.11, 0.79]$ , la discrétisation spatiale et la source étudiée. Par ailleurs, nous considérons  $r_1 \approx 0.3399m$  et  $r_2 \approx 8.99 \cdot 10^{-2}m$ , le centre des deux disques étant par conséquent localisé au point  $(0.4499, 0.4499)$ .

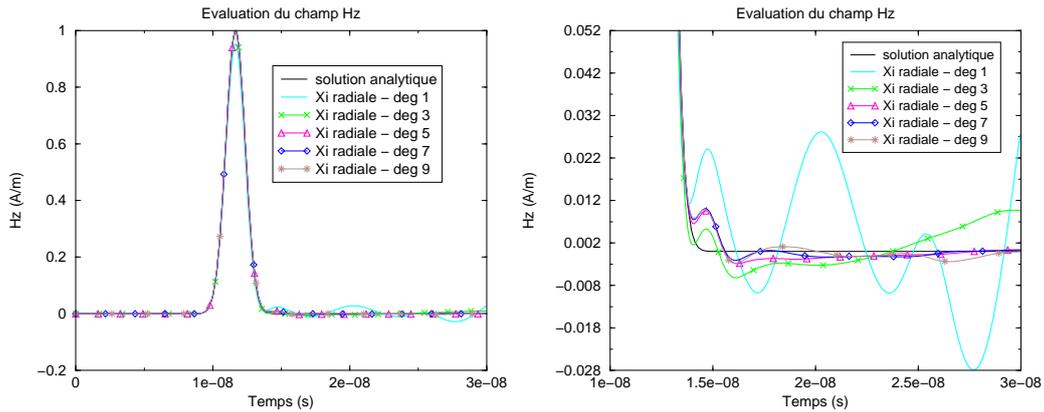


figure II.4.11 – Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ  $H_z$  obtenues avec différents degrés de la fonction polynomiale  $\chi$  pour une épaisseur de zone tampon de 0.025m et dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite).

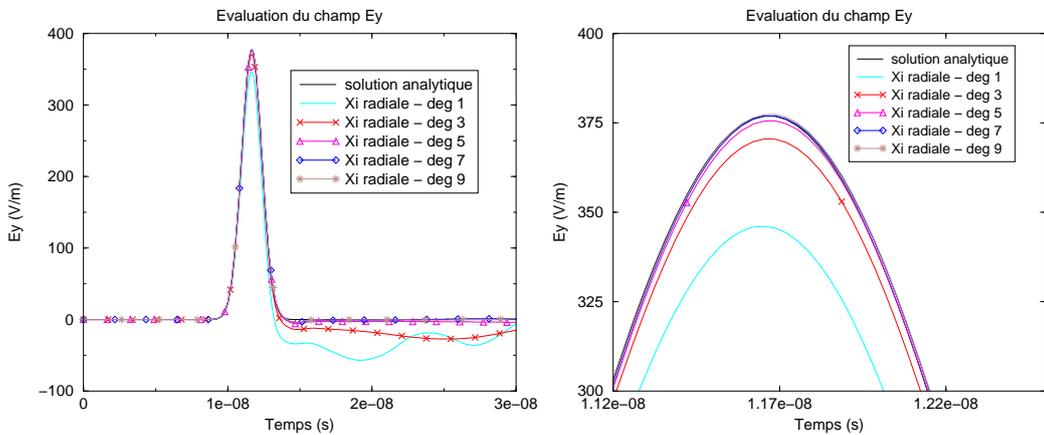


figure II.4.12 – Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ  $E_y$  obtenues avec différents degrés de la fonction polynomiale  $\chi$  pour une épaisseur de zone tampon de 0.025m et dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite).

En utilisant la fonction  $\chi$  radiale, nous obtenons des résultats analogues au cas 1D pour une fonction  $\chi$  polynomiale. En effet, d'après les figures II.4.11 et II.4.12, nous nous apercevons qu'en augmentant le degré de la fonction  $\chi$ , nous améliorons la solution et diminuons, de ce fait, les oscillations. Encore une fois, la fonction  $\chi$  semble être le paramètre le plus judicieux pour avoir une solution hybride correcte.

Maintenant, cherchons à améliorer la solution avec le terme de relaxation vu auparavant, sans intervenir sur la fonction  $\chi$ . Pour cela, plaçons nous dans le cas où la solution est obtenue pour une fonction  $\chi$  polynomiale de degré 1. Notons que la solution hybride dans ce cas est peu précise.

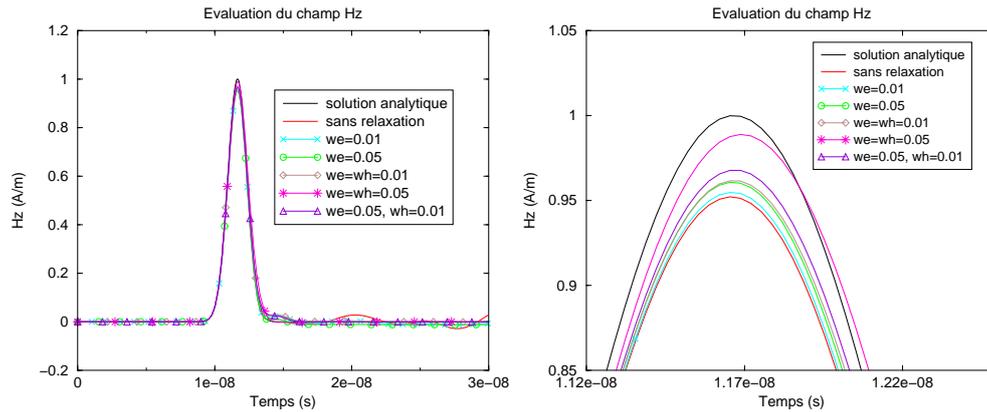


figure II.4.13 – Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ  $H_z$  obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction polynomiale  $\chi$  de degré 1 et pour une épaisseur de zone tampon de 0.025m, dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite).

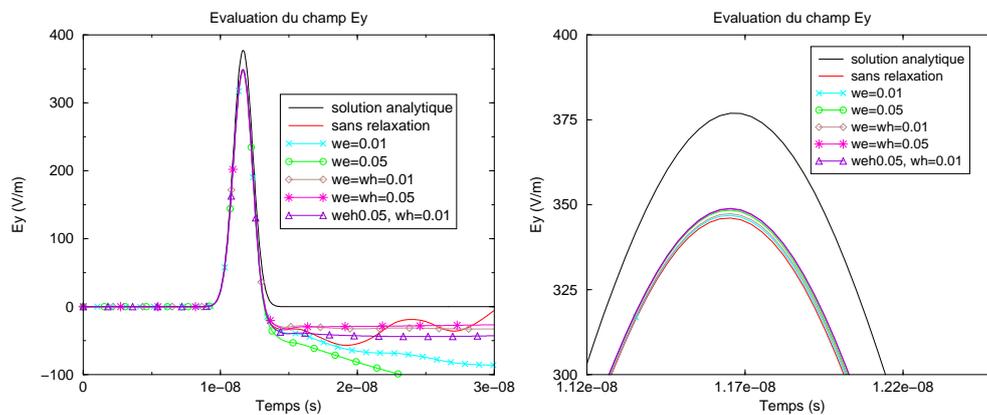


figure II.4.14 – Comparaison de la solution analytique et des solutions du champ  $H_z$  obtenues avec différentes valeurs de termes de relaxation pour une fonction polynomiale  $\chi$  de degré 1 et pour une épaisseur de zone tampon de 0.025m, dans le cas d'une hybridation FDTD/FDTD (à gauche) et un zoom (à droite).

En choisissant des valeurs différentes pour les termes de relaxation  $we$  et  $wh$ , nous obtenons les résultats décrits dans les figures II.4.13 et II.4.14 respectivement pour les champs  $H_z$  et  $E_y$ . Dans la figure II.4.13, les solutions obtenues pour le champ  $H_z$  sont nettement améliorées avec les différentes valeurs prises par  $we$  et  $wh$ , comparées aux solutions analytique et sans terme de relaxation. Dans ce cas, le meilleur choix semble être  $we = wh = 0.05$ . Cependant, la figure II.4.14 montre que les solutions obtenues pour le champ  $E_y$  ne sont pas améliorées de la manière dont on pouvait l'attendre. En effet, les solutions obtenues avec les différentes valeurs de termes de relaxation ne sont pas forcément plus précises mais ces valeurs permettent de stabiliser les solutions et de diminuer les oscillations, notamment pour  $we = wh = 0.01$  et  $we = wh = 0.05$ .

## Conclusion

Nous avons étudié l'influence de certains paramètres de la méthode hybride sur des configurations à inclusion de zones. Dans un premier temps, nous avons choisi une fonction  $\chi$  bilinéaire. Malheureusement, ce choix ne nous a pas permis d'obtenir

des solutions hybrides précises. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au choix d'une fonction  $\chi$  radiale qui donne une structure particulière au domaine de calcul global. Avec ce choix de fonction, nous voyons bien qu'en augmentant le degré de la fonction, nous obtenons une amélioration de la solution hybride. En particulier, nous réduisons les oscillations. De plus, ce choix de fonction est intéressant car il peut s'étendre plus facilement à d'autres configurations hybrides telles que les maillages n'ayant pas les mêmes axes et les maillages non structurés. Pour ces deux types de configuration, nous avons également testé l'ajout d'un terme de relaxation dans la méthode. De manière globale, ce terme diminue également l'amplitude des oscillations sur les solutions hybrides mais il reste difficile à fixer.

### 4.3 HYBRIDATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

#### 4.3.1 Introduction de la méthode PIC

Dans cette section, nous allons introduire la méthode PIC dans l'hybridation FDTD/FDTD étudiée ci-dessus. Pour cela, nous considérons les équations de mouvement décrivant la trajectoire des particules dans le plasma. En utilisant la méthode hybride étudiée, la trajectoire des particules est donnée par les positions et les vitesses des particules de la manière suivante :

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (\text{II.4.14a})$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (\text{II.4.14b})$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} [(\mathbf{E}_{x_1} + \mathbf{E}_{x_2}) + v_y \cdot (\mathbf{B}_{z_1} + \mathbf{B}_{z_2})] \quad (\text{II.4.14c})$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} [(\mathbf{E}_{y_1} + \mathbf{E}_{y_2}) - v_x \cdot (\mathbf{B}_{z_1} + \mathbf{B}_{z_2})] \quad (\text{II.4.14d})$$

où  $\mathbf{E}_{x_1}$ ,  $\mathbf{E}_{y_1}$  et  $\mathbf{B}_{z_1}$  (respectivement  $\mathbf{E}_{x_2}$ ,  $\mathbf{E}_{y_2}$  et  $\mathbf{B}_{z_2}$ ) sont les champs sur  $\Omega_1$  (respectivement  $\Omega_2$ ).

**Remarque 23** *Il n'est pas nécessaire de décomposer les positions et les vitesses des particules en deux composantes, l'une sur  $\Omega_1$  et la seconde sur  $\Omega_2$ . En effet, les positions et les vitesses ne sont pas liées aux grilles de maillages.*

De même, par la présence des particules chargées qui génèrent des densités de courant  $\mathbf{J}$  et de charge  $\rho$ , les équations de Maxwell doivent être modifiées. Ces équations sur  $\Omega_1$  s'écrivent alors :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = \chi \nabla \times \mathbf{H}_1 + \chi \nabla \times \mathbf{H}_2 - \chi \mathbf{J} \quad (\text{II.4.15a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = -\chi \nabla \times \mathbf{E}_1 - \chi \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (\text{II.4.15b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}|_{\Omega_1} = \frac{\rho|_{\Omega_1}}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.4.15c})$$

Et sur  $\Omega_2$ , nous obtenons :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} = (1 - \chi) \nabla \times \mathbf{H}_2 + (1 - \chi) \nabla \times \mathbf{H}_1 - (1 - \chi) \mathbf{J} \quad (\text{II.4.16a})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} = -(1 - \chi) \nabla \times \mathbf{E}_2 - (1 - \chi) \nabla \times \mathbf{E}_1 \quad (\text{II.4.16b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}|_{\Omega_2} = \frac{\rho|_{\Omega_2}}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.4.16c})$$

Comme cela a été mentionné dans la première partie de cette thèse, l'équation de conservation de la charge n'est pas vérifiée à cause des interpolations entre les champs et les particules de la méthode PIC. Pour garantir l'équation de continuité ou  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , nous appliquons une des corrections les plus utilisées dans les codes PIC basés sur un schéma FDTD, à savoir la correction de Boris. Nous rappelons ici le principe de cette méthode. Elle consiste à modifier la partie irrotationnelle du champ électrique  $\mathbf{E}$  par :

$$\mathbf{E}_{\text{corr}} = \mathbf{E} - \nabla \phi \quad (\text{II.4.17})$$

où  $\mathbf{E}_{\text{corr}}$  est le champ électrique et le potentiel  $\phi$  est donné par :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{corr}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \Delta \phi = \text{div} \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.4.18})$$

et

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\text{II.4.19})$$

avec  $\partial\Omega$  la frontière du domaine de calcul  $\Omega$ . Ceci entraîne la nécessité de résoudre un Laplacien à chaque itération.

Maintenant, il nous faut tenir compte de cette correction de Boris dans la méthode hybride. En effet, dans notre cas, les équations (II.4.15c) et (II.4.16c) ne sont pas vérifiées. En appliquant la méthode de Boris, nous devons résoudre deux Laplaciens. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de Schwarz. Nous obtenons ainsi deux systèmes à résoudre. Sur  $\Omega_1$ , nous avons :

$$\begin{cases} \Delta \phi_1^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{E}|_{\Omega_1} - \frac{\rho|_{\Omega_1}^n}{\varepsilon_0} \text{ sur } \Omega_1 \\ \phi_1^{n+1}|_{\Gamma_1} = \phi_2^n|_{\Gamma_1} \end{cases} \quad (\text{II.4.20})$$

et sur  $\Omega_2$  :

$$\begin{cases} \Delta \phi_2^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{E}|_{\Omega_2} - \frac{\rho|_{\Omega_2}^n}{\varepsilon_0} \text{ sur } \Omega_2 \\ \phi_2^{n+1}|_{\Gamma_2} = \phi_1^n|_{\Gamma_2} \end{cases} \quad (\text{II.4.21})$$

avec  $\Gamma_1$  (bord de  $\Omega_1$ ) et  $\Gamma_2$  (bord de  $\Omega_2$ ) les frontières de la zone de recouvrement.

**Remarque 24** *Chaque résolution de Laplacien se fait par une méthode itérative de type Gauss-Seidel.*

En appliquant l'équation (II.4.17), les deux composantes du champ électrique de notre système (II.4.15-II.4.16) se corrigent de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_{1,\text{corr}}^{n+1} = \mathbf{E}_1^{n+1} - \chi \nabla \phi_1^{n+1} \quad (\text{II.4.22})$$

$$\mathbf{E}_{2,\text{corr}}^{n+1} = \mathbf{E}_2^{n+1} - (1 - \chi) \nabla \phi_2^{n+1} \quad (\text{II.4.23})$$

### 4.3.2 Exemples numériques

#### Résolution d'un Laplacien par la méthode hybride

Avant de simuler un cas d'interaction plasma/micro-ondes, nous avons testé la méthode de Schwarz sur la résolution d'un Laplacien. Pour cela, nous souhaitons résoudre l'équation suivante :

$$\Delta\phi = \rho \text{ sur } \Omega$$

avec  $\rho$  une fonction gaussienne donnée. Tout d'abord, nous prenons  $\Omega = [0, 1.8] \times [0, 1]$  et nous cherchons les valeurs de  $\phi$  sans hybridation par la méthode de Schwarz. Enfin, nous décomposons  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1 = [0, 1.08] \times [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.72, 1.8] \times [0, 1]$  et nous appliquons la méthode hybride proposée pour résoudre l'équation ci-dessus.

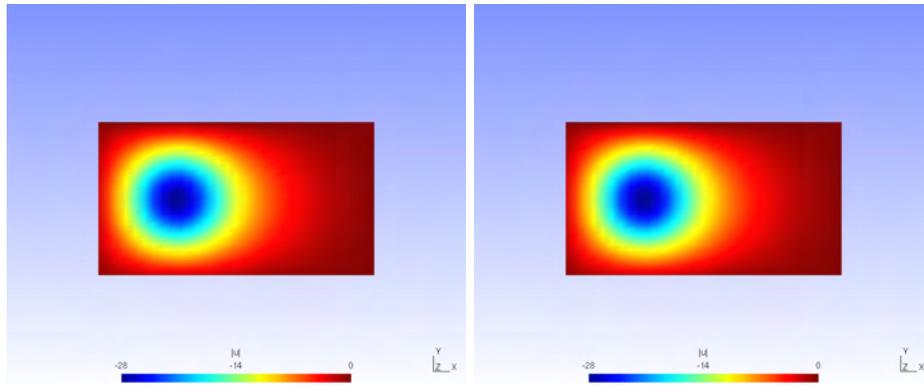


figure II.4.15 – Représentation de  $\phi$  dans  $\Omega$  sans hybridation (à gauche) et avec hybridation (à droite).

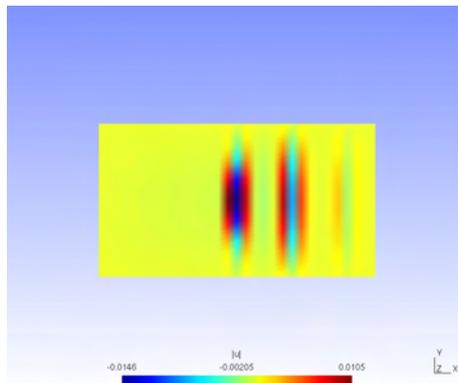


figure II.4.16 – Représentation de l'erreur commise entre les solutions de  $\phi$  obtenues avec et sans hybridation.

Nous observons un bon comportement de la solution hybride par rapport à la solution sans hybridation (figure II.4.15). Dans la figure II.4.16, nous évaluons l'erreur commise entre les solutions hybride et sans hybridation. Cette erreur est de l'ordre de  $10^{-2}$ , ce qui est relativement faible et ce qui nous conforte dans le choix de la méthode appliquée.

### Trajectoire d'une particule

Nous avons étudié le mouvement d'une particule chargée soumise à un champ magnétique uniforme égal à  $1000A.m^{-1}$ . Nous évaluons la trajectoire de la particule (un électron). Initialement, l'électron a une position de  $(0.5m, 0.5m)$  et une vitesse égale à  $(1.e7m.s^{-1}, 0)$ . Dans un premier temps, nous avons un domaine de calcul global  $\Omega = [0, 1.8] \times [0, 1]$  et nous n'utilisons aucune hybridation. Dans un second temps, nous considérons deux sous-domaines  $\Omega_1 = [0, 1.08] \times [0, 1]$  et  $\Omega_2 = [0.72, 1.8] \times [0, 1]$ . Dans cette configuration, nous appliquons la méthode hybride FDTD/FDTD et une correction de Boris résolue avec la méthode de Schwarz proposée.

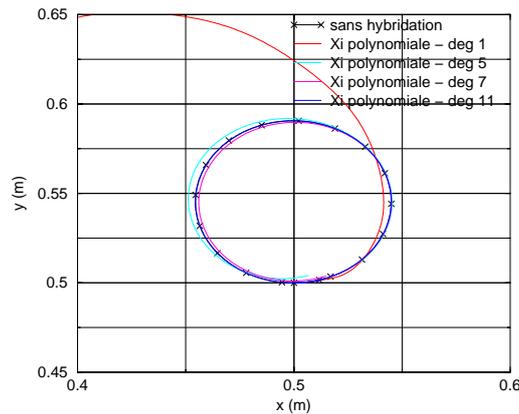


figure II.4.17 – Trajectoire d'un électron soumis à un champ magnétique uniforme en fonction de différents degrés de la fonction polynomiale  $\chi$  et du cas sans hybridation.

La figure II.4.17 représente la trajectoire de l'électron sans hybridation et pour différents degrés de la fonction polynomiale  $\chi$ . Nous pouvons observer que plus le degré de  $\chi$  est élevé, plus la trajectoire de l'électron s'approche de celle obtenue sans hybridation, qui est notre référence. La fonction polynomiale de degré élevé (d'ordre 11) améliore au mieux la trajectoire de l'électron tandis que celle avec un degré égal à 1 donne un mauvais résultat.

## 4.4 CONCLUSION SUR L'HYBRIDATION 2D

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'efficacité de la méthode hybride proposée sur un problème Maxwell 2D en mode TE. Pour des raisons de simplicité et de temps, nous avons choisi d'hybrider deux schémas numériques de type Différences Finies ; le but n'étant pas de refaire une étude numérique sur l'influence des différents paramètres de la méthode hybride, comme en 1D, mais d'introduire des particules et de modéliser l'interaction de ces dernières avec un champ électromagnétique. Dans un premier temps, différentes configurations ont été étudiées pour résoudre les équations de Maxwell 2D en mode TE. La première était une configuration avec deux zones à maillages décalés sur laquelle nous avons étudié l'influence de la discrétisation spatiale, la taille de la zone de recouvrement et le degré de la fonction polynomiale  $\chi$ . Nous avons montré des résultats satisfaisants qui nous ont confortés dans le choix de notre méthode d'hybridation. Dans la seconde configuration, nous avons considéré des inclusions de zones. Ce choix nous a permis d'étudier différentes formes de fonction  $\chi$  : fonctions bilinéaire et radiale. Le choix radial donne les

meilleurs résultats et semble être le plus judicieux à l'avenir pour d'autres couplages de schémas. De plus, l'ajout des termes de relaxation, qu'il soit sur les équations électriques et/ou magnétique, permet également d'améliorer la précision de la solution hybride mais cela est moins évident qu'en 1D. Cependant, ces termes de relaxation restent difficiles à déterminer, c'est pourquoi nous avons utilisé une fonction  $\chi$  radiale d'ordre élevé dans la méthode d'hybridation. A partir de ces études numériques faites sur le problème Maxwell 2D en mode TE, nous avons introduit, dans notre stratégie d'hybridation, l'équation de Vlasov par la méthode PIC. Pour cette étude, nous avons considéré une configuration à maillages décalés. Il a fallu modifier les équations de mouvement avec la prise en compte des deux composantes des champs électromagnétiques et celles de Maxwell avec l'ajout des densités de courant et de charge. Nous avons également adapté la correction de Boris pour corriger le champ électrique en introduisant la méthode de Schwarz. Après avoir validé la méthode de Schwarz pour la résolution du Laplacien, qui apparaît dans la correction de Boris, nous avons donné le résultat de la trajectoire d'une particule soumise à un champ magnétique par une méthode hybride pour différents degrés de la fonction  $\chi$  polynomiale. Encore une fois, il est important d'avoir un degré polynomial élevé pour  $\chi$  afin d'obtenir des résultats satisfaisants. La méthode d'hybridation proposée permet donc de résoudre le système de Maxwell-Vlasov en considérant un couplage de sous-domaines avec des maillages non conformes.

# CONCLUSION

L'objectif de cette seconde partie du mémoire a été d'appliquer la méthode hybride non conforme proposée dans le chapitre 2 pour résoudre le système Maxwell-Vlasov par une méthode PIC.

Dans le premier chapitre, nous avons fait un état de l'art sur les différentes méthodes de décomposition de domaines et, dans le chapitre 2, nous nous sommes orientés vers une méthode hybride basée sur la partition de l'unité que nous avons détaillée.

Nous avons alors développé notre approche hybride selon trois axes.

Premièrement, une étude numérique sur une problématique Maxwell 1D a permis d'établir un ensemble de critères pour assurer le bon fonctionnement de la méthode. Nous avons étudié le couplage de sous-domaines traités par différentes méthodes numériques (FDTD, FVTD et GD) et nous avons testé différents paramètres sur la précision de la solution hybride. Il en est ressorti que le choix de la fonction de transition  $\chi$  entre les sous-domaines était très important et que le plus judicieux était d'utiliser une fonction polynomiale d'ordre élevé. Cette étude a fait l'objet du chapitre 3.

Deuxièmement, nous avons mis en œuvre notre méthode d'hybridation pour la résolution d'un problème Maxwell 2D en mode TE avec un couplage de sous-domaines traités uniquement par un schéma FDTD. Nous nous sommes intéressés à des configurations avec deux zones à maillages décalés et des configurations à inclusion de zones. Comme dans le cas 1D, nous avons étudié l'influence des paramètres liés à l'hybridation par un certain nombre de résultats numériques et nous en avons tiré les mêmes conclusions. Ces travaux nous ont confortés dans le choix de notre méthode hybride qui nous a donné dans l'ensemble des résultats satisfaisants. Bien que cette étude 2D ait été réalisée à partir de schémas FDTD, nous pensons pouvoir facilement l'étendre à d'autres schémas pour le cas 2D.

Troisièmement, nous avons introduit la partie Vlasov par la méthode *Particle-In-Cell* pour un couplage de deux sous-domaines dont les maillages sont décalés et traités par un schéma FDTD. Dans une première approche, pour modéliser l'interaction plasma/micro-ondes, nous nous sommes limités à l'étude de la trajectoire d'une particule soumise à un champ magnétique uniforme dans la méthode hybride. L'étude numérique que nous avons menée montre, encore une fois, que la fonction polynomiale  $\chi$  d'ordre élevé joue un rôle majeur dans la méthode hybride et semble être le meilleur choix à adopter pour nos solutions hybrides.

Ces deux derniers axes ont fait, quant à eux, l'objet du chapitre 4.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Le contenu de ce mémoire concerne la modélisation de l'interaction plasma/micro-ondes dans le cas où le plasma étudié est peu dense. Rappelons que cette modélisation est régie par les équations de Maxwell décrivant les phénomènes électromagnétiques et par l'équation de Vlasov faisant évoluer les flots de particules chargées du plasma dans un environnement électromagnétique. Les travaux de cette thèse sont aussi le point de départ de la mise en œuvre d'un outil efficace pour modéliser un ensemble de géométries liées à l'étude de sources Micro-ondes de Forte Puissance.

Dans une première partie, nous avons proposé, étudié, développé et validé une méthode numérique pour la modélisation de l'interaction plasma/micro-ondes à l'aide d'une approche PIC, basée sur un schéma Galerkin Discontinu. Pour cela, nous avons focalisé notre attention sur une méthode Galerkin Discontinue particulière qui a été développée dans le cadre des équations de Maxwell, et nous avons adapté celle-ci au problème de Maxwell-Vlasov. L'intérêt majeur de ce schéma GD est d'avoir des solutions précises à très faibles coûts calculs et mémoire, sur des maillages spatiaux relativement "grossiers". Ceci s'explique par la possibilité de pouvoir monter en ordre spatial sans pour autant augmenter de manière importante le stockage lié à la matrice de rigidité et à la matrice inverse de masse. Un bref rappel du schéma et de ses propriétés est donné dans ce mémoire. Nous nous sommes, ensuite, intéressés au problème de Maxwell-Vlasov. En particulier, dans une approche PIC, nous savons qu'il est nécessaire de mettre en place une méthode de correction de la divergence. Dans l'optique de faciliter l'étude mathématique du schéma numérique, nous avons opté pour une correction hyperbolique. En effet, dans ce cas, nous pouvons raisonner sur le système  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \phi)$  comme cela a été fait, dans le cadre de Maxwell, pour définir une énergie et un critère de stabilité. Dans l'adaptation du système  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \phi)$  au schéma GD, il est nécessaire d'introduire des termes de saut. Pour les définir, nous avons étudié une approche Volumes Finis des équations dans lesquelles nous avons fait apparaître des termes constants le long des caractéristiques. En utilisant la propriété de conservation de ces termes et une intégration par parties du système  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \phi)$ , nous avons donné un formalisme Galerkin Discontinu du problème Maxwell-Vlasov corrigé. Nous avons alors proposé une généralisation de ce formalisme et comme dans le cas des équations de Maxwell, nous avons donné les critères nécessaires pour avoir une équivalence entre ce système et le problème initial. Après avoir défini l'espace d'approximation pour  $\phi$  et les discrétisations obtenues pour l'équation en  $\phi$ , nous nous sommes intéressés aux interpolations Champs/Particules dans la méthode. Deux méthodes ont été étudiées. La première consiste en une approche de type NGP où le champ calculé sur la particule est donné par la valeur du champ au degré de liberté le plus proche de celle-ci. En ce qui concerne les valeurs de densités de charge et de courant

générées par la particule, elles sont aussi affectées uniquement au degré de liberté dont la position est la plus proche de la particule. Dans la deuxième approche, notée CIC, les densités de charge et de courant liées aux particules sont approximées dans une base définie sur les nœuds du maillage. Nous lisons alors l'interaction d'une particule sur le champ à plusieurs cellules. Toutefois, dans cette dernière approche, le champ affecté à la particule pour évaluer son déplacement reste localisé au degré de liberté le plus près. Ces deux approches ont été confortées dans le cas d'un problème d'échauffement thermique. Même si, dans cet exemple, il apparaît que la solution CIC donne de meilleurs résultats, la question reste encore ouverte pour le cas général. Enfin, nous avons appliqué cette méthode sur quelques premières configurations simples. Les résultats obtenus ont été comparés à d'autres valeurs numériques provenant d'un code 2D FDTD axisymétrique dont dispose le CEA. La concordance entre les résultats des deux approches nous a permis de valider notre méthode. Il faut aussi noter que pour mener à bien ces simulations, il a été nécessaire de développer des sources électroniques et électromagnétiques particulières pour notre méthode. La modélisation de celles-ci a fait l'objet d'un paragraphe spécial.

Suite aux travaux effectués, il reste, néanmoins, d'autres perspectives envisageables pour améliorer la méthode numérique proposée. Parmi celles-ci, nous pensons à :

- l'introduction d'un formalisme de couches PML prenant en compte le terme correcteur. En effet, pour nos simulations, nous avons utilisé uniquement des conditions aux limites de type Silver-Muller qui s'appliquaient parfaitement bien à nos configurations (mode TEM dans des lignes coaxiales).
- la comparaison des deux approches d'interpolation proposées avec d'autres modèles d'interpolation, comme l'approche d'Hesthaven. Dans cette dernière approche, l'influence de la particule sur les champs électromagnétiques du domaine de calcul est portée par une sphère centrée sur la particule.

Dans une seconde partie, nous avons étudié la possibilité de coupler différentes méthodes pour résoudre le problème de Maxwell-Vlasov, dans le but de diminuer les coûts de calcul. En effet, le schéma GD proposé reste relativement coûteux en termes d'opérations par inconnue, par rapport à d'autres méthodes comme la méthode FDTD. Dans une géométrie, il existe une zone proche des objets et une zone éloignée que l'on peut considérer en espace libre. Il s'avère souvent intéressant d'utiliser un schéma moins précis, et par conséquent moins coûteux en temps de calcul et en espace mémoire, dans la zone d'espace libre. Il apparaît alors naturel d'utiliser une solution hybride. Après avoir effectué une bibliographie sur les méthodes d'hybridation existantes, nous avons, plus particulièrement, porté notre intérêt sur une méthode non conforme. Cette approche, relativement récente, n'a pas été encore adaptée à notre connaissance au problème de Maxwell. Nous l'avons donc, tout d'abord, appliquée et étudiée au problème de Maxwell 1D. Le principe général de la méthode consiste à décomposer le domaine de calcul en deux sous-domaines avec une zone de recouvrement. Chaque sous-domaine est alors relié grâce à la présence d'une fonction de transition spatiale comprise entre 0 et 1. Dans l'étude 1D menée, nous avons observé le comportement de la solution hybride à long terme pour différents couplages mettant en œuvre des méthodes FDTD, FVTD et GD. De plus, nous avons réalisé des études numériques portant sur l'influence de différents paramètres

de la méthode sur la solution. Parmi ces paramètres, nous avons principalement testé la taille de la zone de recouvrement, le pas de discrétisation de celle-ci, le choix de la fonction de transition et l'introduction d'un terme de relaxation. De ces études, nous avons tiré un certain nombre de conclusions dont les deux principales sont :

- le schéma hybride semble stable à long terme
- le choix le plus judicieux pour améliorer la précision de la solution, tout en gardant les avantages de la méthode hybride, est de prendre en compte une fonction de transition polynomiale d'ordre élevé.

Nous nous sommes, ensuite, focalisés sur un problème Maxwell 2D en mode TE pour une hybridation entre deux schémas FDTD. Pour cela, dans un premier temps, nous avons étudié une configuration à maillages décalés où le couplage se fait uniquement dans une direction. Ceci nous a permis de vérifier facilement que la prise en compte d'ondes planes et de couches PML dans l'approche hybride ne pose aucun problème particulier. Dans un second temps, nous avons testé la méthode dans une configuration à inclusion de zones où l'hybridation des deux sous-domaines se fait dans les deux directions. De manière générale, ces études numériques en 2D ont permis de nous conforter dans les conclusions tirées des études 1D. Enfin, l'équation de Vlasov a été introduite, dans cette approche hybride, pour une configuration à maillages décalés. Les équations de mouvement qui en résultent ne sont pas fondamentalement modifiées, si ce n'est la prise en compte des différents sous-domaines pour le calcul des termes  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . En ce qui concerne la correction de la divergence, nous avons choisi la correction de Boris, plus adaptée au schéma FDTD. Cette correction consiste à résoudre un problème de Poisson sur la réunion des deux sous-domaines. Pour cela, une méthode de Schwarz, qui fut spécifiquement développée pour ce type de problème, a été utilisée. Finalement, pour valider la méthode hybride, nous l'avons mise en œuvre dans un problème de trajectographie. L'exemple choisi s'est limité à la simulation d'une particule soumise à un champ magnétique uniforme. Dans cette configuration, le champ magnétique uniforme est obtenu en résolvant les équations de Maxwell pour une source de type onde plane particulière. Cette étude nous a également donné une solution hybride correcte pour une fonction de transition polynomiale d'ordre élevé.

A la suite de ces travaux, nous pensons qu'il serait intéressant d'approfondir certains axes de recherche sur la méthode hybride proposée, comme, par exemple :

- la généralisation de l'étude de la stabilité des schémas hybrides.
- l'hybridation des schémas numériques autres que le schéma de Yee, en 2D. Par exemple, il serait intéressant de coupler deux sous-domaines, l'un traité avec une méthode FDTD et le second avec un schéma FVTD ou GD.
- la poursuite de la validation de la méthode hybride pour la modélisation de l'interaction plasma/micro-ondes avec, par exemple, un faisceau d'électrons.
- l'extension de notre méthode hybride en 3 dimensions.



# ANNEXE

# A

## SOMMAIRE

A.1	APPROXIMATION SEMI-DISCRÈTE DE LA MÉTHODE GD . . . . .	179
A.2	MÉTHODE FVTD . . . . .	185
A.3	CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DE TYPE PML . . . . .	187
A.3.1	Couches absorbantes de type PML . . . . .	187
A.3.2	Reformulation des PML par Bérenger . . . . .	189
A.3.3	Formulation de Gedney . . . . .	191



## A.1 APPROXIMATION SEMI-DISCRÈTE DE LA MÉTHODE GD

Dans cette annexe, nous présentons l'approximation semi-discrète de la formulation GD pour la résolution des équations de Maxwell.

Dans une étude par ondes planes d'un problème 1D, S. Pernet présente les effets de dispersion et de dissipation en espace produits par ce type d'élément ; ce qui lui a permis de choisir une approximation judicieuse et avantageuse pour ses applications visées. Pour la suite, il en vient donc à considérer les relations suivantes :

- $\forall \Gamma = K \cap K' \in \mathcal{F}_h^i, \beta_\Gamma^K = \beta_\Gamma^{K'} = -\frac{1}{2} = \beta, \gamma_\Gamma^K = \gamma_\Gamma^{K'} = \frac{1}{2} = \gamma$  et  $\alpha = \delta = 0,$
- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^b, \alpha = \beta = \delta = 0, \gamma = 1$

Nous allons maintenant calculer les différentes matrices présentes dans le schéma semi-discret. Ce schéma semi-discret est donné par :

Trouver  $(\mathbf{E}_h(\cdot, t), \mathbf{H}_h(\cdot, t)) \in U_h \times U_h$  tels que :  $\forall K \in \mathcal{T}_h$  et  $\forall \boldsymbol{\phi}_{1h}, \boldsymbol{\phi}_{2h} \in \mathcal{B}_h^G$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K \underline{\underline{\epsilon}} \mathbf{E}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} dx - \int_K \nabla \times \mathbf{H}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} dx + \int_K \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} dx \\ + \int_K \mathbf{J}_{h,s} \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} dx = \int_{\partial K} \beta [\mathbf{H}_h \times \mathbf{n}_K]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.1a})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{2hK} dx + \int_K \nabla \times \mathbf{E}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{2hK} dx \\ = \int_{\partial K} \gamma [\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}_K]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{2hK} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.1b})$$

avec  $\mathbf{E}_{hK} = \mathbf{E}_h|_K, \mathbf{H}_{hK} = \mathbf{H}_h|_K, \boldsymbol{\phi}_{ihK} = \boldsymbol{\phi}_{ih}|_K$  pour  $i = 1, 2$  et  $\int_{\partial K}^G$  le calcul de l'intégrale via la formule de Gauss sur la face (de  $\hat{K}$  dont l'image par  $F_K$  est une partie de  $\partial K$ ), et où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\hat{K}} |J_K| \mathbf{u}_h \circ F_K \cdot \mathbf{v}_h \circ F_K d\hat{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\mathbf{l} \in \{1 \dots r+1\}^3} \omega_{\mathbf{l}} |J_K|(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{l}}) \mathbf{u}_h \circ F_K(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{v}_h \circ F_K(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{l}}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

### Calcul des termes de masse

Introduisons (I.3.18a) dans le terme de masse de l'équation (A.1a). Il vient :

$$\begin{aligned} \int_K \underline{\underline{\epsilon}} \mathbf{E}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} dx \\ = \int_{\hat{K}} |J_K| \underline{\underline{\epsilon}} \circ F_K \mathbf{E}_{hK} \circ F_K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1h} \circ F_K d\hat{x} \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1 \dots r+1\}^3} E_{K,\mathbf{l}}^i \int_{\hat{K}} |J_K| \underline{\underline{\epsilon}} \circ F_K D F_K^{*-1}(\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_1^i \cdot D F_K^{*-1}(\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\hat{x} \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1 \dots r+1\}^3} E_{K,\mathbf{l}}^i \int_{\hat{K}} |J_K| (D F_K^{-1} \underline{\underline{\epsilon}} \circ F_K D F_K^{*-1}(\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_1^i \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}) d\hat{x} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Nous supposons que la fonction de base  $\phi_{1h}$  est définie par  $\phi_{1hK} \circ F_K = DF_K^{*-1}(\phi^G)_{1_0}^{i_0}$ . Utilisons maintenant la formule de quadrature de Gauss sur  $\hat{K}$  pour le calcul de la dernière intégrale (A.3). Il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{K}}^G |J_K| (DF_K^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_0 F_K DF_K^{*-1} (\hat{\phi}^G)_1^i \cdot (\hat{\phi}^G)_{1_0}^{i_0}) d\hat{x} \\ &= \sum_{V \in \{1, \dots, r+1\}^3} \omega_V^G |J_K| (\xi_V) (DF_K^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_0 F_K DF_K^{*-1} (\hat{\phi}^G)_1^i (\xi_V)) \cdot (\hat{\phi}^G)_{1_0}^{i_0} (\xi_V) \\ &= \sum_{V \in \{1, \dots, r+1\}^3} \omega_V^G |J_K| (\xi_V) (DF_K^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_0 F_K DF_K^{*-1}) (\xi_V) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0} \delta_{IV} \delta_{1_0V} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En utilisant (I.3.14), le terme de masse de la première équation de (A.1) devient :

$$\int_K \underline{\underline{\epsilon}}_{hK} \cdot \phi_{1hK} dx = \sum_{i=1}^3 \omega_{1_0}^G E_{K,1_0}^i |J_K| (\xi_{1_0}) (DF_K^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_0 F_K DF_K^{*-1}) (\xi_{1_0}) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0} \quad (\text{A.5})$$

**Remarque 25** Les seules interactions non nulles entre les fonctions de base sont celles qui sont définies à un même point d'interpolation. Ainsi, nous obtenons une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs sont des matrices symétriques définies positives de taille  $3 \times 3$ . Nous obtenons les mêmes propriétés pour la matrice de masse liée au champ magnétique ainsi que pour celle du terme  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

### Calcul des termes de rigidité

Nous avons la propriété suivante :

$$\forall \mathbf{v}_h \in U_{h,0}^r, (\nabla \times \mathbf{v}_h) \circ F_K = \frac{1}{J_K} (DF_K \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{v}}_{h|K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (\text{A.6})$$

où

$$\hat{\mathbf{v}}_{h|K} = \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1, \dots, r+1\}} u_{K,1}^i (\hat{\phi}^G)_1^i \quad (\text{A.7})$$

et  $\hat{\nabla} \times$  représente le rotationnel associé aux variables  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ .

Explicitons maintenant le terme de rigidité de (A.1a). En utilisant la propriété (A.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_K \nabla \times \mathbf{H}_{hK} \cdot \phi_{1hK} dx \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1, \dots, r+1\}^3} H_{K,1}^i \int_K |J_K| \frac{1}{J_K} (DF_K \hat{\nabla} \times (\hat{\phi}^G)_1^i) \cdot DF_K^{*-1} (\hat{\phi}^G)_{1_0}^{i_0} d\hat{x} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Le terme de rigidité de l'équation (A.1a) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int_K \nabla \times \mathbf{H}_{hK} \cdot \phi_{1hK} dx \\ &= \text{signe}(J_K) \sum_{i=1}^3 \sum_{1 \in \{1, \dots, r_K+1\}^3} H_{K,1}^i \int_{\Omega} \hat{\nabla} \times (\hat{\phi}^G)_1^i \cdot (\hat{\phi}^G)_{1_0}^{i_0} d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Un calcul similaire donne le terme de rigidité de l'équation (A.1b) :

$$\begin{aligned} & \int_K^G \nabla \times \mathbf{E}_{hK} \cdot \boldsymbol{\phi}_{2hK} dx \\ &= \text{signe}(J_K) \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{1} \in \{1, \dots, r_{K+1}\}^3} E_{K,1}^i \int_{\Omega}^G \hat{\nabla} \times (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_1^i \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{1_0}^{i_0} d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pour calculer les termes de rigidité intervenant dans le système (A.1), il suffit de connaître le signe du Jacobien de  $F_K$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  et les intégrales de rigidité des fonctions de base sur  $\hat{K}$ .

### Calcul des termes de saut

Soit  $K \in \mathcal{T}_h$ . Nous découpons la frontière de  $K$ , notée  $\partial K$ , en six faces :

$$\partial K = \cup_{i=1}^6 \Gamma_{\rho(i,K)} \quad (\text{A.11})$$

où  $F_{K|\Gamma_{\rho(i,K)}}(\hat{\Gamma}_i) = \Gamma_{\rho(i,K)}$  avec  $\hat{\Gamma}_i \subset \partial \hat{K}$  pour  $i = 1, \dots, 6$  et l'application  $\rho$  est l'application qui à une face du cube unité  $i$  et à un élément  $K$  associe le numéro de la face  $F_{K|\Gamma_{\rho(i,K)}}(\hat{\Gamma}_i)$  (dans une numérotation globale des faces).

En utilisant (A.11), le terme de saut de la première équation de (A.1) devient :

$$\int_{\partial K}^G \llbracket H_h \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} d\sigma = \sum_{i=1}^6 \int_{\Gamma_{\rho(i,K)}}^G \llbracket H_h \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)}^K \rrbracket_{\Gamma_{\rho(i,K)}}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} d\sigma_{\rho(i,K)} \quad (\text{A.12})$$

où  $d\sigma_{\rho(i,K)}$  est l'élément de surface de la face  $\Gamma_{\rho(i,K)}$ .

Nous supposons dans la suite que la fonction de base  $\boldsymbol{\phi}_{1h}$  est définie par :

$$\text{supp}(\boldsymbol{\phi}_{1hK}) = K \text{ et } (\boldsymbol{\phi}_{1hK})_{oF_K} = DF_K^{*-1}(\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{1_0}^{i_0} \quad (\text{A.13})$$

Nous pouvons toujours définir les 6 faces de l'élément de référence  $\hat{K}$  de la façon suivante :  $\forall 1 \leq i \leq 6$

$$\hat{\Gamma}_i = \{\hat{\theta}_i = 0 \text{ ou } 1\} \quad (\text{A.14})$$

où  $\hat{\theta}_i = \hat{x}_1$  ou  $\hat{x}_2$  ou  $\hat{x}_3$ . Notons  $\hat{\eta}_i, \hat{\chi}_i$  les deux autres variables qui définissent la face  $\hat{\Gamma}_i$ . Par exemple, si  $\hat{\theta}_i = \hat{x}_2$ , alors nous avons  $\hat{\eta}_i = \hat{x}_1$  et  $\hat{\chi}_i = \hat{x}_3$ .

Pour calculer les différents termes de saut, un certain nombre de résultats techniques sont nécessaires. Le lemme qui suit va permettre le passage de la face "réelle" à la face de référence.

**Lemme 1**  $\forall i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ , nous avons :

$$d\sigma_{\rho(i,K)} = |J_{K|\hat{\Gamma}_i}| \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\| d\hat{\eta}_i d\hat{\chi}_i \quad (\text{A.15})$$

où  $\hat{\mathbf{n}}_i$  est la normale unitaire à  $\hat{\Gamma}_i$  sortante de  $\hat{K}$ .

La définition des fonctions de base donne la propriété suivante :

**Lemme 2** Soit  $\mathbf{u}_h \in U_h$ , on a  $\forall K \in \mathcal{T}_h$  et  $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$  :

$$(\mathbf{u}_h|_K \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)}^K) o_{F_{K|\hat{\Gamma}_i}} = \frac{1}{J_{K|\hat{\Gamma}_i} \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\|} DF_{K|\hat{\Gamma}_i}(\hat{\mathbf{u}}_{K|\hat{\Gamma}_i} \times \hat{\mathbf{n}}_i) \quad (\text{A.16})$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r_{K+1}\}^3} u_{K,\mathbf{l}}^i (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{\mathbf{l}'}^i \mathbf{n}_{\rho(i,K)}^K$  est la normale unitaire à  $\Gamma_{\rho(i,K)}$  sortante de  $K$  et  $\hat{\mathbf{n}}_i$  est la normale unitaire sortante de  $\hat{K}$  associée à la face de référence  $\hat{\Gamma}_i$ .

En utilisant les deux lemmes précédents, nous allons montrer la proposition suivante :

**Proposition 24** Si  $\Gamma_{\rho(i,K)} \in \mathcal{F}_h^b$ , on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\rho(i,K)}}^G \llbracket \mathbf{H}_h \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)} \rrbracket_{\Gamma_{\rho(i,K)}}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} d\sigma_{\rho(i,K)} \\ &= -\text{signe}(J_K) \int_{\hat{\Gamma}_i}^G (\hat{\mathbf{H}}_{K|\hat{\Gamma}_i} \times \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\hat{\eta}_i d\hat{\chi}_i \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Le calcul de l'intégrale sur  $\hat{\Gamma}_i$  donne alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Gamma}_i}^G (\hat{\mathbf{H}}_{K|\hat{\Gamma}_i} \times \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r_{K+1}\}^3} H_{K,\mathbf{l}}^i \sum_{\mathbf{l}'_1, \mathbf{l}'_2=1}^{r_{K+1}} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'_1} \hat{\omega}_{\mathbf{l}'_2} \hat{\phi}_{\mathbf{l}_1}^G(\hat{\xi}_{\mathbf{l}'_1}) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_0}^G(\hat{\xi}_{\mathbf{l}'_1}) \\ & \quad \hat{\phi}_{\mathbf{l}_2}^G(\hat{\xi}_{\mathbf{l}'_2}) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_0}^G(\hat{\xi}_{\mathbf{l}'_2}) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_3}^G(0) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_0}^G(0) (\vec{e}_i \times \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot \vec{e}_{i_0} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{l}_3=1}^{r_{K+1}} H_{K,\mathbf{l}_0,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3}^i \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{l}_3}^G(0) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_0}^G(0) (\vec{e}_i \times \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot \vec{e}_{i_0} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Nous obtenons le même type de résultats pour toutes les autres faces de référence. Nous remarquons que le calcul des termes de surfaces provenant d'une face extérieure nécessite un très faible stockage. En effet, seul le signe du Jacobien, auparavant stocké pour le calcul des termes de rigidité, doit être connu. Donc, aucun stockage supplémentaire n'est nécessaire pour le calcul de ces termes.

Intéressons nous, maintenant, au cas d'une face interne.

Soit  $\Gamma_{\rho(i,K)} \in \mathcal{F}_h^i$  où  $\Gamma_{\rho(i,K)} = K \cap K'$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\rho(i,K)}}^G \llbracket H_h \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)} \rrbracket_{\Gamma_{\rho(i,K)}}^K \cdot \boldsymbol{\phi}_{1hK} d\sigma_{\rho(i,K)} \\ &= \int_{\hat{\Gamma}_i}^G |J_{K|\hat{\Gamma}_i}| \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\| (\mathbf{H}_{hK'} \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)} - \mathbf{H}_{hK} \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)}) o_{F_{K|\hat{\Gamma}_i}} \cdot DF_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\phi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\hat{\eta}_i d\hat{\chi}_i \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Dans l'équation (A.19), le calcul de la partie intégrale contenant  $\mathbf{H}_{hK}$  s'effectue comme dans le cas d'une face extérieure. La proposition précédente s'applique donc

à ce cas et nous obtenons alors les mêmes conclusions. Nous allons donc uniquement nous intéresser au terme en  $\mathbf{H}_{h_{K'}}$ , c'est-à-dire :

$$I = \int_{\hat{\Gamma}_i}^G |J_{K|\hat{\Gamma}_i}| \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\| (\mathbf{H}_{h_{K'}} \times \mathbf{n}_{\rho(i,K)}) \cdot DF_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} d\hat{\eta}_i d\hat{\chi}_i \quad (\text{A.20})$$

Soit  $i' \in \{1, \dots, 6\}$  tel que  $F_{K'}(\hat{\Gamma}_{i'}) = F_K(\hat{\Gamma}_i) = \Gamma_{\rho(i',K')} = \Gamma_{\rho(i,K)}$ . Considérons le changement de variables suivant :

$$\mathcal{G}_{K' \rightarrow K} = F_{K|\Gamma_{\rho(i,K)}}^{-1} \circ F_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} : \hat{\Gamma}_{i'} \rightarrow \hat{\Gamma}_i \quad (\text{A.21})$$

Nous avons alors le lemme suivant :

**Lemme 3**  $\forall \hat{x}' \in \hat{\Gamma}_{i'}$ , nous avons :

$$(|J_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}}| \|DF_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_{i'}\|)(\hat{x}') = (|J_{K|\hat{\Gamma}_i}| \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\|) \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K}(\hat{x}') \quad (\text{A.22})$$

Nous avons également la propriété suivante :

**Proposition 25** Soit  $A = (V_1, V_2, V_3)$  une matrice inversible et  $B$  une matrice  $3 \times 3$  définie par trois vecteurs  $W_1, W_2, W_3$ . Soient  $k_1 \neq k_2 \in \{1, 2, 3\}$  et  $k'_1 \neq k'_2 \in \{1, 2, 3\}$ . Nous supposons que :

$$W_{k'_1} = \epsilon_1 V_{k_1} \quad (\text{A.23a})$$

$$W_{k'_2} = \epsilon_2 V_{k_2} \quad (\text{A.23b})$$

où  $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ . Nous avons alors :

$$A^{-1}B = (Z_1, Z_2, Z_3) \quad (\text{A.24})$$

avec

$$Z_{k'_1} = \epsilon_1 \vec{e}_{k_1} \quad (\text{A.25a})$$

$$Z_{k'_2} = \epsilon_2 \vec{e}_{k_2} \quad (\text{A.25b})$$

Le changement de variables (A.21) et (A.16) nous donne :

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\hat{\Gamma}_{i'}}^G (|J_{K|\hat{\Gamma}_i}| \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\|) \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} (\mathbf{H}_{h_{K'}} \times \mathbf{n}_{\rho(i',K')}) \circ F_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} \cdot \\ &\quad (DF_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}) \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\hat{\eta}_{i'} d\hat{\chi}_{i'} \\ &= - \int_{\hat{\Gamma}_{i'}}^G \frac{(|J_{K|\hat{\Gamma}_i}| \|DF_{K|\hat{\Gamma}_i}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_i\|) \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K}}{J_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} \|DF_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}}^{*-1} \hat{\mathbf{n}}_{i'}\|} DF_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} (\hat{\mathbf{H}}_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) \cdot \\ &\quad (DF_K^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0}) \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\hat{\eta}_{i'} d\hat{\chi}_{i'} \end{aligned}$$

En utilisant (A.20), le calcul de l'intégrale se simplifie par :

$$I = -\text{signe}(J_{K'}) \int_{\hat{\Gamma}_{i'}}^G (DF_K^{-1} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} DF_{K'}) (\hat{\mathbf{H}}_{K'} \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) \cdot (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^G)_{\mathbf{l}_0}^{i_0} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\hat{\eta}_{i'} d\hat{\chi}_{i'} \quad (\text{A.26})$$

Par ailleurs, il existe  $k_1 \neq k_2 \in \{1, 2, 3\}$  et  $k'_1 \neq k'_2 \in \{1, 2, 3\}$  tels que :

$$DF_K^{-1} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K}(\hat{x}') DF_{K'}(\hat{x}') = (Z_1, Z_2, Z_3) \quad (\text{A.27})$$

avec

$$Z_{k_1} = \epsilon_{K' \rightarrow K}^1 \vec{e}_{k_1} \quad (\text{A.28a})$$

$$Z_{k_2} = \epsilon_{K' \rightarrow K}^2 \vec{e}_{k_2} \quad (\text{A.28b})$$

où  $\hat{x}' \in \hat{\Gamma}_{i'}$  et  $\epsilon_{K' \rightarrow K}^i = \pm 1$  pour  $i = 1, 2$ .

Introduisons la matrice  $N_{K' \rightarrow K} = (N_1, N_2, N_3)$  où  $N_k$ ,  $1 \leq k \leq 3$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Nous définissons cette matrice par :

$$N_{k_1} = \epsilon_{K' \rightarrow K}^1 \vec{e}_{k_1} \quad (\text{A.29a})$$

$$N_{k_2} = \epsilon_{K' \rightarrow K}^2 \vec{e}_{k_2} \quad (\text{A.29b})$$

$$N_{k_3} = \vec{e}_{k_3} \quad (\text{A.29c})$$

Nous avons alors la propriété suivante :

$$DF_K^{-1} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K}(\hat{x}') DF_{K'}(\hat{x}') (\hat{\mathbf{H}}_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) = N_{K' \rightarrow K} (\hat{\mathbf{H}}_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) \quad (\text{A.30})$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I &= -\text{signe}(J_{K'}) \int_{\hat{\Gamma}_{i'}}^G (\hat{\mathbf{H}}_{K'|\hat{\Gamma}_{i'}} \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) \cdot N_{K' \rightarrow K}^* (\hat{\phi}^G)_{i_0} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\hat{\eta}_{i'} d\hat{\chi}_{i'} \quad (\text{A.31}) \\ &= -\text{signe}(J_{K'}) \sum_{j=1}^3 \sum_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r_{K'}+1\}^3} H_{K', \mathbf{l}}^j [(\vec{e}_j \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) \cdot N_{K' \rightarrow K}^* \vec{e}_{i_0}] \int_{\hat{\Gamma}_{i'}}^G \hat{\phi}_1^G \hat{\phi}_{i_0}^G \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\hat{\eta}_{i'} d\hat{\chi}_{i'} \end{aligned}$$

Pour calculer (A.31), il suffit de connaître la matrice  $N_{K' \rightarrow K}$  sur chaque face interne de  $\mathcal{T}_h$ . Pour la déterminer, nous calculons seulement  $DF_K^{-1} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} DF_{K'}$  en un point de face de référence.

Pour le calcul de l'intégrale sur  $\hat{\Gamma}_{i'}$  dans (A.31), deux situations sont possibles :

- $r_K = r_{K'}$  : dans ce cas, il existe  $l'_0 \in \{1, \dots, r_K\}^3$  tel que

$$\hat{\phi}_{i_0}^G \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} = \hat{\phi}_{l'_0}^G \quad (\text{A.32})$$

Nous obtenons alors le même nombre d'interactions que dans le cas des faces extérieures, c'est-à-dire  $r_K + 1$  interactions.

- $r_K \neq r_{K'}$  : dans ce cas, aucune interaction ne peut être éliminée. Ceci n'est pas forcément grave car le nombre de faces de ce type est en principe limité par rapport aux faces ayant des volumes de même degré.

Pour résumer, le schéma Galerkin Discontinu proposé dans les travaux de thèse de S. Pernet et permettant la résolution des équations de Maxwell 3D, a les propriétés suivantes :

- matrices de masse diagonales par blocs dont tous les blocs sont des matrices définies positives de taille  $3 \times 3$ .
- matrices de rigidité nécessitant un faible stockage. Seule la connaissance du signe du Jacobien par volume est nécessaire.
- matrices de sauts nécessitant un faible stockage et creuses.

## A.2 MÉTHODE FVTD

Dans cette annexe, nous détaillons les notions et les notations introduites dans le chapitre 3 de la première partie de ce mémoire. Le système des équations de Maxwell modifiées avec la correction hyperbolique (I.3.20) (sans  $\mathbf{J}$ ) s'écrit pour chaque composante, dans un système de coordonnées cartésiennes, de la manière suivante :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} + \chi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.33a})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial x} + \chi \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.33b})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} + \chi \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.33c})$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.33d})$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.33e})$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.33f})$$

$$\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \chi \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \chi \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.33g})$$

En posant  $\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \phi)^t$ , les sept équations (A.33) peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial F_3(\mathbf{U})}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$\text{avec } F_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \chi \phi \\ H_z \\ -H_y \\ 0 \\ -E_z \\ E_y \\ \chi E_x \end{pmatrix}, F_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -H_z \\ \chi \phi \\ H_x \\ E_z \\ 0 \\ -E_x \\ \chi E_y \end{pmatrix}, F_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} H_y \\ -H_x \\ \chi \phi \\ -E_y \\ E_x \\ 0 \\ \chi E_z \end{pmatrix}. F_1, F_2 \text{ et } F_3$$

sont des applications de  $\mathbb{R}^7$  dans  $\mathbb{R}^7$ .  $\alpha$  est une matrice de  $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7$  donnée par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 Id & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 Id & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}, \text{ où } Id \text{ est la matrice identité de } \mathbb{R}^3.$$

Nous pouvons alors introduire l'application  $F(\mathbf{U})$  définie par :

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \\ \mathbf{U} &\longrightarrow (F_1(\mathbf{U}); F_2(\mathbf{U}); F_3(\mathbf{U})) \end{aligned}$$

L'équation (A.34) s'écrit pour chaque composante  $i$  :

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_i + \text{div } F(\mathbf{U}) \Big|_i = 0 \quad i = 1, \dots, 7 \quad (\text{A.35})$$

De plus, l'équation (A.34) peut également s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\alpha^{-1} \left( \frac{\partial(\mathcal{A}_1 \mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{A}_2 \mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{A}_3 \mathbf{U})}{\partial z} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$= -\alpha^{-1} \left( \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.37})$$

où  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$  sont des matrices de  $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7$  définies par :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## A.3 CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DE TYPE PML

### A.3.1 Couches absorbantes de type PML

En 1994, Jean-Pierre Bérenger a proposé la technique des PML (*Perfectly Matched Layer*, couches parfaitement adaptées) pour décrire la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu fictif absorbant. Cette technique consiste à ajouter aux frontières du domaine de calcul, un ensemble de couches définissant un milieu absorbant sans réflexion dans le domaine de calcul.

Pour cela, nous définissons, dans chacune des couches, une conductivité électrique  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  et une conductivité magnétique  $\sigma^* = (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*)$  dépendant de la direction des couches et de la distance de la couche à l'interface vide/PML comme cela est indiqué sur la figure A.1. Par ailleurs, ces deux conductivités vérifient une condition d'adaptation pour chaque composante :

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon} = \frac{\sigma_x^*}{\mu}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon} = \frac{\sigma_y^*}{\mu}, \quad \frac{\sigma_z}{\varepsilon} = \frac{\sigma_z^*}{\mu}$$

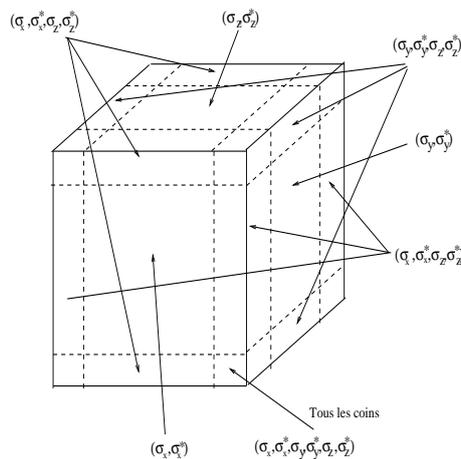


figure A.1 – Position des matériaux absorbants (PML).

Les champs électromagnétiques sont alors découplés en deux composantes telles que :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xy} + E_{xz} & H_x &= H_{xy} + H_{xz} \\ E_y &= E_{yx} + E_{yz} & H_y &= H_{yx} + H_{yz} \\ E_z &= E_{zx} + E_{zy} & H_z &= H_{zx} + H_{zy} \end{aligned}$$

Ce découpage des champs permet d'augmenter le degré de liberté du système et de contrôler l'absorption des champs dans toutes les directions, les deux composantes étant absorbées différemment dans les couches.

Les équations de Maxwell se réécrivent dans les couches sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} &= \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} & \mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} &= -\frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \\
\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} &= -\frac{\partial(H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} & \mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} &= \frac{\partial(E_{yx} + E_{yz})}{\partial z} \\
\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} &= \frac{\partial(H_{xy} + H_{xz})}{\partial x} & \mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} &= -\frac{\partial(E_{xy} + E_{xz})}{\partial x} \\
\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} &= -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial z} & \mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} &= \frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial z} \\
\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} &= \frac{\partial(H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} & \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} &= -\frac{\partial(H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} \\
\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} &= -\frac{\partial(H_{xy} + H_{xz})}{\partial y} & \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} &= \frac{\partial(E_{xy} + E_{xz})}{\partial y}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Les paramètres  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_x^*, \sigma_y^*$  et  $\sigma_z^*$  sont homogènes à des conductivités électriques et magnétiques. Si  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$  et  $\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma_z^*$ , le système précédent se réduit aux équations de Maxwell.

Par cette technique, J. P. Berenger a démontré que l'amortissement des ondes entrantes dans les couches est exponentiel et sans aucune réflexion faite dans le domaine de calcul. En effet, si les composantes des conductivités électrique et magnétique satisfont deux à deux les conditions suivantes :

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_z^*}{\mu_0}$$

alors nous obtenons les propriétés :

- l'impédance de l'onde  $Z = \frac{E}{H}$  dans les couches PML est égale à celle du vide (il n'y aura donc pas de réflexion à l'interface vide/milieu PML)
- les douze sous-composantes des équations de Maxwell se réécrivent sous la forme suivante :

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\omega(t - \frac{x \cos \eta_x + y \cos \eta_y + z \cos \eta_z}{c})} e^{-\frac{\sigma_x \cos \eta_x}{\varepsilon_0 c} x} e^{-\frac{\sigma_y \cos \eta_y}{\varepsilon_0 c} y} e^{-\frac{\sigma_z \cos \eta_z}{\varepsilon_0 c} z}$$

où  $\eta_x, \eta_y, \eta_z$  désignent les angles entre la normale au plan  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  et les axes de coordonnées.

Nous remarquons que la propagation de l'onde, comme dans le vide, à la vitesse  $c$ , perpendiculairement au plan  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  est régie par première exponentielle tandis que les trois autres exponentielles gouvernent l'atténuation.

J. P. Berenger a montré que l'utilisation de ce matériau artificiel absorbant décrit par les PML mène à un problème faiblement bien posé. Le problème PML est rendu bien posé avec le changement d'inconnues qu'il introduit dans les équations de Maxwell. Cependant, une instabilité polynomiale est présente mais il introduit la notion de "temps clair" : période de temps pendant laquelle on assure ne pas rencontrer d'instabilité. Cette période est déterminée par les paramètres associés aux PML ; à savoir le nombre de couches, la valeur de  $\sigma$  dans chaque couche et la progression de  $\sigma$  entre les couches. D'autre part, l'opérateur de Berenger étant faiblement hyperbolique (les valeurs propres de l'opérateur spatial sont toutes réelles mais non nécessairement distinctes) se traduit par une impossibilité de symétriser le système

et donc une impossibilité d'aborder le problème numérique par les méthodes d'approximation des systèmes symétriques de Friedrichs (schémas de type volumes finis, par exemple). Il s'est donc avéré nécessaire de reformuler le problème de façon à bien le poser en unicité et continuité et d'obtenir des schémas stables nécessaires à l'étude numérique.

### A.3.2 Reformulation des PML par Bérenger

La reformulation des PML par J. P. Bérenger nécessite, tout d'abord, la réécriture des équations de Maxwell sous forme fréquentielle par une transformation de Fourier-Laplace :

$$\begin{aligned}
j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} + \sigma_y\hat{E}_{xy} &= \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} & j\omega\mu_0\hat{H}_{xy} + \sigma_y^*\hat{H}_{xy} &= -\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial y} \\
j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} + \sigma_z\hat{E}_{xz} &= -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} & j\omega\mu_0\hat{H}_{xz} + \sigma_z^*\hat{H}_{xz} &= \frac{\partial\hat{E}_y}{\partial z} \\
j\omega\varepsilon\hat{E}_{yx} + \sigma_x\hat{E}_{yx} &= -\frac{\partial\hat{H}_z}{\partial x} & j\omega\mu_0\hat{H}_{yx} + \sigma_x^*\hat{H}_{yx} &= \frac{\partial\hat{E}_z}{\partial x} \\
j\omega\varepsilon\hat{E}_{yz} + \sigma_z\hat{E}_{yz} &= \frac{\partial\hat{H}_x}{\partial z} & j\omega\mu_0\hat{H}_{yz} + \sigma_z^*\hat{H}_{yz} &= -\frac{\partial\hat{E}_x}{\partial z} \\
j\omega\varepsilon\hat{E}_{zx} + \sigma_x\hat{E}_{zx} &= \frac{\partial\hat{H}_y}{\partial x} & j\omega\mu_0\hat{H}_{zx} + \sigma_x^*\hat{H}_{zx} &= -\frac{\partial\hat{E}_y}{\partial x} \\
j\omega\varepsilon\hat{E}_{zy} + \sigma_y\hat{E}_{zy} &= -\frac{\partial\hat{H}_x}{\partial y} & j\omega\mu_0\hat{H}_{zy} + \sigma_y^*\hat{H}_{zy} &= \frac{\partial\hat{E}_x}{\partial y}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Intéressons nous aux deux premières équations qui portent sur le champ  $\hat{E}_x$ . Les équations peuvent se réécrire :

$$\left(1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon}\right) j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} = \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \tag{A.40a}$$

$$\left(1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon}\right) j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} = -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \tag{A.40b}$$

En posant  $S_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon}$ ,  $S_y = 1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon}$ ,  $S_z = 1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon}$ , nous obtenons :

$$S_y j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} = \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \tag{A.41a}$$

$$S_z j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} = -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \tag{A.41b}$$

En sommant les deux équations, nous avons :

$$j\omega\varepsilon(\hat{E}_{xy} + \hat{E}_{xz}) = \frac{1}{S_y} \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} - \frac{1}{S_z} \frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \tag{A.42}$$

soit

$$j\omega\varepsilon\hat{E}_x = \frac{\partial_y}{S_y} \hat{H}_z - \frac{\partial_z}{S_z} \hat{H}_y \tag{A.43}$$

Les autres équations s'obtiennent de la même façon avec une permutation circulaire sur les indices. Le système de 12 équations se réécrit en un système équivalent de 6 équations :

$$j\omega\epsilon\hat{E} - \nabla_S \times \hat{H} = 0 \quad (\text{A.44a})$$

$$j\omega\mu_0\hat{H} + \nabla_S^* \times \hat{E} = 0 \quad (\text{A.44b})$$

où  $(\nabla_S \times)$  est l'opérateur défini par :

$$(\nabla_S \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{S_z}\partial_z & \frac{1}{S_y}\partial_y \\ \frac{1}{S_z}\partial_z & 0 & -\frac{1}{S_x}\partial_x \\ -\frac{1}{S_y}\partial_y & \frac{1}{S_x}\partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

et  $(\nabla_S^* \times)$  étant de la forme :

$$(\nabla_S^* \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{S_z^*}\partial_z & \frac{1}{S_y^*}\partial_y \\ \frac{1}{S_z^*}\partial_z & 0 & -\frac{1}{S_x^*}\partial_x \\ -\frac{1}{S_y^*}\partial_y & \frac{1}{S_x^*}\partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

où  $S_i^* = 1 + \frac{\sigma_i^*}{j\omega\mu_0}$ .

En appliquant la condition d'adaptation des milieux PML, soit  $\frac{\sigma_i^*}{\mu_0} = \frac{\sigma_i}{\epsilon}$ , il en vient :

$$S_i^* = S_i, \quad i = x, y, \text{ ou } z$$

et par conséquent :

$$(\nabla_S^* \times) = (\nabla_S \times)$$

**Remarque 26** L'opérateur  $(\nabla_S \times)$  n'est pas symétrique. Nous notons l'opérateur rotationnel par :

$$(\nabla \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

**Lemme 4** Soient  $M$  et  $N$  les matrices diagonales telles que :

$$M = S_x S_y S_z N = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} = S_x S_y S_z \begin{pmatrix} \frac{1}{S_y S_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_x S_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_x S_y} \end{pmatrix}$$

alors

$$(\nabla_S \times) = N(\nabla \times)M$$

Nous introduisons le résultat du lemme précédent dans le système (A.44). Il en résulte :

$$j\omega\epsilon\hat{E} - N(\nabla \times)M\hat{H} = 0 \quad (\text{A.45a})$$

$$j\omega\mu_0\hat{H} + N(\nabla \times)M\hat{E} = 0 \quad (\text{A.45b})$$

En appliquant le changement de variables  $\hat{H}' = M\hat{H}$  et  $\hat{E}' = M\hat{E}$ , nous obtenons :

$$j\omega\varepsilon M^{-1}\hat{E}' = N(\nabla \times)\hat{H}' \quad (\text{A.46a})$$

$$j\omega\mu_0 M^{-1}\hat{H}' = -N(\nabla \times)\hat{E}' \quad (\text{A.46b})$$

qui peut se réécrire encore :

$$j\omega\varepsilon N^{-1}M^{-1}\hat{E}' = (\nabla \times)\hat{H}' \quad (\text{A.47a})$$

$$j\omega\mu_0 N^{-1}M^{-1}\hat{H}' = -(\nabla \times)\hat{E}' \quad (\text{A.47b})$$

Ce système (A.47) a donné lieu à de nouvelles formulations de schémas numériques qui possèdent des propriétés de stabilité différentes mais que l'on ne connaît pas à priori, comme la formulation de S. D. Gedney et celle de P. Mazet. Nous ne parlerons pas de la formulation de P. Mazet car elle ne fait pas l'objet de cette thèse.

### A.3.3 Formulation de Gedney

Nous reprenons le système (A.47) de la partie précédente. La première équation peut se réécrire :

$$j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{S_y S_z}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_x S_z}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_x S_y}{S_z} \end{pmatrix} \hat{E}' = (\nabla \times)\hat{H}' \quad (\text{A.48})$$

Au lieu de décomposer la matrice  $N^{-1}M^{-1}$ , Gedney choisit de poser :

$$\begin{aligned} \hat{D}'_x &= \varepsilon \frac{S_z}{S_x} \hat{E}'_x & \hat{B}'_x &= \mu_0 \frac{S_z}{S_x} \hat{H}'_x \\ \hat{D}'_y &= \varepsilon \frac{S_x}{S_y} \hat{E}'_y & \hat{B}'_y &= \mu_0 \frac{S_x}{S_y} \hat{H}'_y \\ \hat{D}'_z &= \varepsilon \frac{S_y}{S_z} \hat{E}'_z & \hat{B}'_z &= \mu_0 \frac{S_y}{S_z} \hat{H}'_z \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Nous avons alors :

$$j\omega K_S \hat{D}' = (\nabla \times)\hat{H}' \quad (\text{A.50a})$$

$$j\omega K_S \hat{B}' = -(\nabla \times)\hat{E}' \quad (\text{A.50b})$$

avec  $K_S = \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix}$ .

Nous repassons alors dans le domaine temporel et compte tenu de la définition des  $S_i$ , le système A.50 devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} D' + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} D' = (\nabla \times) H' \quad (\text{A.51a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B' + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} B' = -(\nabla \times) E' \quad (\text{A.51b})$$

Ensuite, nous multiplions les équations (A.49) par  $M$ . Nous obtenons alors pour la première équation de la première ligne :

$$\left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon}\right) \hat{D}'_x = \varepsilon \left(1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon}\right) \hat{E}'_x \quad (\text{A.52})$$

Remultiplions les équations par  $j\omega$  puis passons dans le domaine temporel. Nous obtenons :

$$\frac{\partial D'_x}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} D'_x = \varepsilon \left( \frac{\partial E'_x}{\partial t} + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} E'_x \right) \quad (\text{A.53a})$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} B'_x = \mu_0 \left( \frac{\partial H'_x}{\partial t} + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} H'_x \right) \quad (\text{A.53b})$$

Ce dernier système nous fournit deux équations permettant de trouver, à chaque pas,  $E'$  et  $H'$  connaissant  $D'$  et  $B'$ . Cela va nous permettre de résoudre le système augmenté par  $D'$  et  $B'$  suivant :

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} D' = (\nabla \times) H' \quad (\text{A.54a})$$

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \sigma D' = \varepsilon \left( \frac{\partial E'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} E' \right) \quad (\text{A.54b})$$

$$\frac{\partial B'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} B' = -(\nabla \times) E' \quad (\text{A.54c})$$

$$\frac{\partial B'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \sigma B'_x = \mu_0 \left( \frac{\partial H'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} H' \right) \quad (\text{A.54d})$$

$$\text{où } K_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \text{ et } K_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Ce système constitue la Formulation de Gedney des PML spéciales.

# BIBLIOGRAPHIE

- Á. Arós, F. Rogier, et X. Ferrières. A discontinuous galerkin method preserving the gauss law in the numerical approximation maxwell's equations. (Cité pages 45 et 54.)
- F. Assous, P. Degond, E. Heintze, P. A. Raviart, et J. Segre. On a finite-element method for solving the three-dimensional maxwell equations. *Journal of Computational Physics*, 109(2) :222–237, 1993. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-45P11X4-7/2/beaeb6a65f31e4ceb1acbb5e7b002db3>. (Cité pages 22 et 35.)
- F. Assous, P. Degond, et J. Segré. Numerical approximation of the maxwell equations in inhomogeneous media by a pi-conforming finite element method. *Journal of Computational Physics*, 128 :363–380, 1996. (Cité page 22.)
- I. Babuska et J. M. Melenk. The partition of unity method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 40 :727–758, 1996. (Cité pages 114 et 117.)
- R. Barthelmé. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 2005. (Cité pages 33, 34, 76 et 78.)
- W. B. Bateson et D. W. Hewett. Grid and particle hydrodynamics : beyond hydrodynamics via fluid element particle-in-cell. *Journal of Computational Physics*, 144(2) :358–378, 1998. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-45J58Y6-3T/2/d8ef8432c7be4591367be25abeec48a6>. (Cité page 17.)
- H. BenDhia. Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Iib, Paris*, 326 :899–904, 1998. (Cité pages 114 et 117.)
- C. K. Birdsall et A. B. Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. Institute of Physics, 1991. (Cité pages 17 et 21.)
- P. Bonnet. *Résolution des équations de Maxwell stationnaires et harmoniques par une technique de volumes finis. Application à des problèmes de compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1998. (Cité pages 22, 45 et 113.)
- J. P. Boris. Relativistic plasma simulation - optimization of a hybrid code. Dans *Proceedings Fourth Conference on the Numerical Simulation of Plasma*, pages 3–67, 1970. (Cité page 34.)
- J. P. Boris et D. L. Book. Flux-corrected transport. iii. minimal-error fct algorithms. *Journal of Computational Physics*, 20(4) :397–431, 1976. ISSN 0021-9991.

- <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4DD1M90-16/2/6979aa441a6d0283c171dd4785077360>. (Cité page 17.)
- A. Bounaim. *Méthodes de Décomposition de domaine. Application à la résolution de problèmes de contrôle optimal*. PhD thesis, Université de Joseph Fourier-Grenoble I, 1999. (Cité page 113.)
- O. Buneman. Dissipation of currents in ionized media. *Phys. Rev.*, 115(3) :503–517, 1959. (Cité page 17.)
- A. C. Cangellaris et D. B. Wright. Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in fdt simulations of electromagnetic phenomena. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39 : 1518–1525, 1991. (Cité page 22.)
- N. Canouet, L. Fezoui, et S. Piperno. Discontinuous galerkin time-domain solution of maxwell's equations on locally-refined nonconforming cartesian grids. *COMPEL*, 24(4) :1381–1401, 2005. (Cité pages 23 et 113.)
- C. Z. Cheng et G. Knorr. The integration of the vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22(3) :330–351, 1976. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4DD1NWC-J6/2/59050994c101f0d4c1bd82d45b253cf2>. (Cité page 17.)
- G. Cohen, X. Ferrieres, et S. Pernet. A spatial high-order hexahedral discontinuous galerkin method to solve maxwell's equations in time domain. *Journal of Computational Physics*, 217(2) :340–363, 2006. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4JBGKMW-3/2/2af9faec9883079eefadb6d9cadcb772>. (Cité page 23.)
- F. Collino, T. Fouquet, et P. Joly. Conservative space-time mesh refinement methods for the fdt solution of maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 211 (1) :9–35, 2006. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4GWBWDR-1/2/ee4de1064b35a1118547ea6384f138fb>. (Cité page 114.)
- J. Cooper et A. Klimas. Boundary value problems for the vlasov-maxwell equation in one dimension. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75(2) :306–329, 1980. ISSN 0022-247X. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WK2-4CRMBV6-3TJ/2/05f3a92b3cde2bb3ebc2079d5dfa981a>. (Cité page 30.)
- J. M. Dawson. One-dimensional plasma model. *Physics of Fluids*, 5 :445–459, 1962. (Cité page 17.)
- P. Degond, G. Dimarco, et L. Mieussens. A moving interface method for dynamic kinetic-fluid coupling. *Journal of Computational Physics*, 227(2) :1176–1208, 2007. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4PN060R-2/2/918eba4337ae0e30db774b0daee310e6>. (Cité page 117.)
- P. Degond et S. Jin. A smooth transition model between kinetic and diffusion equations. *Journal on Numerical Analysis, SIAM*, 42(6) :2671–2687, 2005. <http://www.siam.org/journals/sinum/42-6/43041.html>. (Cité pages 115 et 117.)

- P. Degond, S. Jin, et L. Mieussens. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, 209(2) :665–694, 2005. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4G993CB-2/2/7ca91139124a3d7b6df6200c2b70e222>. (Cité pages 115 et 117.)
- J. L. Delcroix et A. Bers. *Physique des plasmas 1*. Edp Sciences, 1994. (Cité pages 6 et 15.)
- J. Denavit. Numerical simulation of plasmas with periodic smoothing in phase space. *Journal of Computational Physics*, 9(1) :75–98, 1972. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4DD1X7X-1K4/2/4c1777e78e68c0d7d6a3ecbc23648516>. (Cité pages 17 et 78.)
- G. Desquesnes, M. Terracol, E. Manoha, et P. Sagaut. On the use of a high order overlapping grid method for coupling in cfd/caa. *Journal of Computational Physics*, 220(1) :355–382, 2006. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4KBX4VG-1/2/ba9e8f64861117dcfd0e4062c7ade768>. (Cité page 113.)
- R. DiPerna et P. L. Lions. Global weak solutions of kinetic equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 46(3) :259–288, 1988. (Cité page 29.)
- R. DiPerna et P. L. Lions. Global weak solutions of vlasov-maxwell systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42 :729–757, 1989. ISSN 1097-0312. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160420603>. (Cité page 29.)
- V. Dolean, S. Lanteri, et R. Perrussel. A domain decomposition method for solving the three-dimensional time-harmonic maxwell equations discretized by discontinuous galerkin methods. *Journal of Computational Physics*, 227(3) :2044–2072, 2008. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4PX7BCV-2/2/5bf2573d8ef6364ae11b20064f4d3d78>. (Cité page 114.)
- B. Donderici et F. L. Teixeira. Improved ftd subgridding algorithms via digital filtering and domain overriding. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(9) :2938–2951, September 2005. ISSN 0018-926X. (Cité page 114.)
- F. Edelvik et G. Ledfelt. Explicit hybrid time domain solver for the maxwell equations in 3d. *Journal of Scientific Computing*, 15(1) :61–78, 2000. ISSN 0885-7474. (Cité page 114.)
- T. Zh. Esirkepov. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor. *Computer Physics Communications*, 135(2) :144–153, 2001. ISSN 0010-4655. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ5-42MN624-2/2/901300107b9ab686926d99acbedeed56>. (Cité page 34.)
- X. Ferrières, J. P. Parmentier, S. Bertuol, et R. Ruddle. Application of an hybride finite difference/finite volume method to solve an automatic emc problem. *IEEE Transactions on EMC*, 46 :624–634, 2005. (Cité page 114.)
- F. Filbet et E. Sonnendrücker. Comparison of eulerian vlasov solvers. *Computer Physics Communications*, 150(3) :247–266, 2003. ISSN 0010-4655. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ5-473HYF7-4/2/f1f6b09d458c998b7afd3bcee17b3236>. (Cité page 17.)

- F. Filbet, E. Sonnendrücker, et P. Bertrand. Conservative numerical schemes for the vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 172(1) :166–187, 2001. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-45BC280-3W/2/dc528a3656716be05607a97f7286b0e2>. (Cité page 17.)
- T. Fouquet. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*. PhD thesis, Université Paris IX-Dauphine, 2000. (Cité page 114.)
- R. Glassey et W. Strauss. Singularity formation in a collisionless plasma could only occur at high velocities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 92 :56–90, 1986. ISSN 1432-0673. (Cité page 30.)
- A. D. Greenwood, K. L. Cartwright, J. W. Luginsland, et E. A. Baca. On the elimination of numerical cerenkov radiation in pic simulations. *Journal of Computational Physics*, 201(2) :665–684, 2004. ISSN 0021-9991. (Cité page 22.)
- Y. Guo. Global weak solutions of the vlasov-maxwell system with boundary conditions. *Communications in Mathematical Physics*, 154(2) :245–263, 1993. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02096997>. (Cité page 30.)
- J. H. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2(1) :84–90, 1960. (Cité page 78.)
- J. M. Hammersley et D. C. Handscomb. *Monte Carlo Methods*. Methuen, 1964. (Cité page 78.)
- F. Hermeline. Two coupled particle–finite volume methods using delaunay-voronoi meshes for the approximation of vlasov-poisson and vlasov-maxwell equations. *Journal of Computational Physics*, 106(1) :1–18, 1993. ISSN 0021-9991. (Cité page 22.)
- J. Hesthaven et T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids : I. time-domain solution of maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 181(1) :186–221, 2002. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-46MJTDX-8/2/e86bcc5578e3267f2ff1f4fc722dec37>. (Cité page 113.)
- J.S. Hesthaven et T. Warburton. High-order accurate methods for time-domain electromagnetics, January 2000. (Cité page 23.)
- R. W. Hockney et J. W. Eastwood. *Computer simulations using particles*. MacGraw-Hill Inc, 1988. (Cité pages 17 et 33.)
- J. R. Hollahan et A. T. Bell. *Techniques and Applications of Plasma Chemistry*. Techniques and Applications of Plasma Chemistry, 1974. (Cité pages ix et 10.)
- R. Holland et L. Simpson. Finite-difference analysis of emp coupling to thin struts and wires. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, EMC-23(2) :88–97, May 1981. ISSN 0018-9375. (Cité page 89.)
- J. P. Holloway. Spectral velocity discretizations for the vlasov-maxwell equations. *Transport Theory and Statistical Physics*, 25(1) :1–32, 1996. ISSN 0041-1450. <http://www.informaworld.com/10.1080/00411459608204828>. (Cité page 17.)

- D. Issautier, F. Poupaud, J. P. Cioni, et L. Fezoui. A 2d vlasov-maxwell solver on unstructures meshes. Dans *Proceedings of the 3rd international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation (WAVES 95)*, pages 355–371, 1995. (Cité page 22.)
- G. B. Jacobs et J. S. Hesthaven. High-order nodal discontinuous galerkin particle-in-cell method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 214(1) :96–121, 2006. ISSN 0021-9991. (Cité page 23.)
- S. Klainerman et G. Staffilani. A new approach to study the vlasov-maxwell system. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 1(1) :103–125, 2002. (Cité page 30.)
- A. J. Klimas et W. M. Farrell. A method for overcoming the velocity space filamentation problem in collisionless plasma model solutions. *Journal of Computational Physics*, 68(1) :202–226, 1987. ISSN 0021-9991.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4DD1WHX-1C5/2/b156308b476c40fd39b382323f4c3888>. (Cité page 17.)
- A. J. Klimas et W. M. Farrell. A splitting algorithm for vlasov simulation with filamentation filtration. *Journal of Computational Physics*, 110(1) :150–163, 1994. ISSN 0021-9991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-45P0TV7-68/2/af5a0cfb3925fdc745d96177ec78f290>. (Cité page 17.)
- D. Lacour. *Etude du couplage d'une onde électromagnétique sur une structure complexe par décomposition en sous-domaines*. PhD thesis, Université Paris XI, 1999. (Cité page 114.)
- A. B. Langdon. On enforcing gauss' law in electromagnetic particle-in-cell codes. *Computer Physics Communications*, 70(3) :447–450, 1992. ISSN 0010-4655.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ5-46G8DV8-G9/2/a5686a4d994cff0b2cc1864f54833328>. (Cité page 35.)
- V. Lange. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un objet dissipatif*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1995. (Cité page 113.)
- I. Langmuir. Oscillations in ionized gases. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 14(8) :627–637, 1928.  
<http://www.jstor.org/stable/85270>. (Cité page 5.)
- B. Marder. A method for incorporating gauss' law into electromagnetic pic codes. *Journal of Computational Physics*, 68(1) :48–55, 1987. ISSN 0021-9991.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4DD1WHX-1BV/2/e9008947c2a367a0affc3c7cdc8c6c7d>. (Cité page 35.)
- E. Montseny, S. Pernet, X. Ferrières, et G. Cohen. Dissipative terms and local time-stepping improvements in a spatial high order discontinuous galerkin scheme for the time-domain maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 227(14) :6795–6820, 2008. ISSN 0021-9991.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4S6P26S-1/2/144b208b9f545d013844c13981fa9802>. (Cité page 129.)
- C. D. Munz, R. Schneider, E. Sonnendrücker, et U. Voss. Maxwell's equations when the charge conservation is not satisfied. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences -*

- Series I - Mathematics*, 328(5) :431–436, 1999. ISSN 0764-4442.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VJ2-3WSV24T-F/2/563182858385e91f4fcc8b6efee98d83>. (Cité page 36.)
- J. C. Nedelec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 35(3) :315–341, 1980. ISSN 0029-599X. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01396415>. (Cité page 22.)
- H. Neunzert et K. H. Petry. Ein existenzsatz für die vlasov-gleichung mit selbstkonsistentem magnetfeld. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2 : 429–444, 1980. (Cité page 30.)
- S. Pernet. *Etude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Paris dauphine-Paris IX, U.F.R Mathématiques de la Décision, 2004. (Cité pages 39, 56 et 113.)
- A. Pujols. *Equations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell : application au calcul de la surface équivalente radar*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1991. (Cité page 113.)
- G. Quinio. *Modélisation numérique de la génération d'un plasma d'air dans un écoulement aérodynamique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, 2005. (Cité page 6.)
- S. M. Rao et D. R. Wilton. Transcient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39 :56–61, 1991. ISSN 0018-926X. (Cité page 113.)
- G. Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles. Application à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. PhD thesis, Ecole centrale de Paris, 2003. (Cité pages 114 et 117.)
- P. Raviart et J. Thomas. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. Dans *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, volume 606 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 292–315. Springer Berlin / Heidelberg, 1977. <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0064470>. (Cité page 22.)
- G. Rein. Global weak solutions to the relativistic vlasov-maxwell system revisited. *Communications in Mathematical Sciences*, 2(2) :145–158, 2004. (Cité page 30.)
- M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*. PhD thesis, Ecole nationale des Ponts et Chaussées, 1999. (Cité pages 22, 54, 113 et 114.)
- J. Schaeffer et R. Glassey. On the one and one-half dimensional relativistic vlasov-maxwell system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 13(2) : 169–179, 1990. ISSN 1099-1476. <http://dx.doi.org/10.1002/mma.1670130207>. (Cité page 30.)
- H. A Schwarz. Über einige abbildungsaufgaben. *Ges. Math Abh.*, 11 :65–83, 1869. (Cité page 113.)

- E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, et A. Ghizzo. The semi-lagrangian method for the numerical resolution of vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 149(2) :201–220, 1998. ISSN 0021-9991.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-45N4M1T-P/2/33ccd197dc83781b3eeca522915cf31a>. (Cité page 17.)
- T. Tominaga T. Umeda, Y. Omura et H. Matsumoto. A new charge conservation method in electromagnetic particle-in-cell simulations. *Computer Physics Communications*, 156(1) :73–85, 2003. ISSN 0010-4655.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ5-49WPR5W-2/2/fd89ba408d2e25bb562680d27b498b09>. (Cité page 34.)
- I. Terrasse. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaire par une méthode des potentiels retardés*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1993. (Cité page 113.)
- J. Villasenor et O. Buneman. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers. *Computer Physics Communications*, 69(2-3) :306–316, 1992. ISSN 0010-4655. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ5-46G8DM8-FH/2/69001c21b1cc777b5ddd573b1ac2b9d6>. (Cité page 34.)
- S. Wollman. An existence and uniqueness theorem for the vlasov-maxwell system. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37(4) :457–462, 1984. ISSN 1097-0312. <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1994/2621.html>. (Cité page 30.)
- K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14 :302–307, 1966. (Cité page 21.)

**Titre** Etude d'un modèle *Particle-In-Cell* dans une approximation Galerkin Discontinue pour les équations de Maxwell-Vlasov. Recherche d'une solution hybride non conforme efficace.

**Résumé** Cette thèse présente l'étude et le développement d'un outil de simulation numérique efficace pour la modélisation de l'interaction plasma/micro-ondes, à partir d'un solveur électromagnétique basé sur une approximation Galerkin Discontinue (GD). Le travail est organisé en deux parties principales. Tout d'abord, nous développons un modèle *Particle-In-Cell* (PIC) approprié au schéma GD. Pour cela, d'une part, nous proposons un modèle de correction hyperbolique pour la prise en compte de la loi de conservation de la charge et, d'autre part, nous intégrons des modèles physiques propres au plasma tels que les sources micro-ondes de forte puissance, les surfaces d'émission de particules et les faisceaux d'électrons. Ensuite, nous nous orientons vers la recherche de performances optimales pour le couplage Maxwell-Vlasov afin d'augmenter l'efficacité et la taille des applications à traiter. Cette recherche conduit à l'étude d'une hybridation non conforme de méthodes pour résoudre le problème Maxwell-Vlasov. Dans un premier temps, nous travaillons sur une méthode hybride entre différents schémas numériques pour la résolution d'un problème Maxwell 1D sur des maillages non conformes. Dans un second temps, nous nous intéressons au cas d'un problème 2D en mode TE, dans l'optique d'introduire un modèle PIC. Finalement, nous réalisons une hybridation FDTD/FDTD sur deux maillages non coïncidents pour les équations Maxwell-Vlasov 2D.

**Mots-clés** équations de Maxwell-Vlasov, méthode Galerkin Discontinue, méthode PIC, hybridation non conforme de méthodes numériques

**Title** Study of a *Particle-In-Cell* model for a Discontinuous Galerkin approximation to solve the Maxwell-Vlasov equations. Proposition of an efficient non-conformal hybrid solution.

**Abstract** This thesis presents the study and the development of an efficient numerical simulation's tool for the modeling of plasma/microwave interaction in an electromagnetic software based upon a Discontinuous Galerkin (DG) scheme. This work is organized following two main steps. First, we develop a *Particle-In-Cell* (PIC) model appropriate for DG scheme. For this, on the one hand, we propose a hyperbolic corrector method to take into account the charge conservation law and, on the other hand, we integrate physical plasma models such as high power microwave sources, emission particles surfaces and electrons beams. Then, we propose also optimal performances for the coupling of Maxwell-Vlasov equations in order to increase the efficiency and the size of the applications to treat. This leads to study a non conformal hybridization of methods to solve the Maxwell-Vlasov problem. In the first time, we work on a hybrid method between different numerical schemes to solve a 1D Maxwell problem on non conformal meshes. In the second time, we interest in a 2D TE Maxwell problem, in order to introduce a PIC model. Finally, we realise a FDTD/FDTD hybridization on two non coincident meshes for the 2D Maxwell-Vlasov system.

**Keywords** Maxwell-Vlasov equations, Discontinuous Galerkin method, PIC method, non-conformal hybrid approach