

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
za gradbeništvo  
in geodezijo



Jamova cesta 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

**DRUGG** – Digitalni repozitorij UL FGG  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

V zbirki je izvirna različica izdajatelja.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University  
of Ljubljana  
Faculty of  
Civil and Geodetic  
Engineering



Jamova cesta 2  
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

**DRUGG** – The Digital Repository  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is a publisher's version PDF file.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Kuhar, M., Okorn, M., Stopar, B. 2010. Določitev odklonov navpičnic iz geoidnih višin. Geodetski vestnik, 54, 4: 595-605.

[http://www.geodetski-vestnik.com/54/4/gv54-4\\_595-605.pdf](http://www.geodetski-vestnik.com/54/4/gv54-4_595-605.pdf)

# DOLOČITEV ODKLONOV NAVPIČNIC IZ GEOIDNIH VIŠIN

DETERMINATION OF DEFLECTION OF THE VERTICAL FROM GEOID HEIGHTS

*Miran Kuhar, Marta Okorn, Bojan Stopar*

UDK: 528.242

## IZVLEČEK

*Model geoida je eden od sestavnih delov državnega koordinatnega sistema. Poleg dokaj razširjenega določanja nadmorskih višin na podlagi GNSS-izmere pa model geoida zagotavlja tudi kakovostno vključitev terestričnih geodetskih opazovanj v državni koordinatni sistem. Za GNSS-višinomerstvo je treba na podlagi modela geoida določiti geoidne višine, pri terestrični geodetski izmeri pa je poleg geoidnih višin treba določiti tudi vrednosti odklonov navpičnic. Določitev geoidne višine na podlagi modela geoida je v praksi zelo razširjena naloga, medtem ko se z določitvijo vrednosti odklonov navpičnice v praksi zelo redko srečamo. V prispevku predstavljamo metodo določitve vrednosti odklonov navpičnice z določitvijo lege tangencialne ravnine glede na ploskev geoida v točki. Lego tangencialne ravnine glede na elipsoid, s katerim je podan tudi odklon navpičnice v točki, izračunamo na podlagi interpoliranih geoidnih višin v neposredni okolici obravnavane točke. V prispevku smo kakovost računsko pridobljenih odklonov navpičnic primerjali z merjenimi in celoten postopek ovrednotili na praktičnem primeru.*

## KLJUČNE BESEDE

*geoid, odklon navpičnice, interpolacija, redukcija opazovanj, geoidna ravnina*

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.01

## ABSTRACT

*The geoid model represents part of the national coordinate system. It can be used for the purpose of GNSS-levelling, but the use of geoid heights also improves incorporation of terrestrial observations into the state coordinate system. In GNSS levelling tasks, geoid heights are obtained from the geoid model, but with terrestrial observations the deflection of the vertical is also needed. Determination of geoid heights from the geoid model is a simple engineering task; however, determination of deflection of the vertical is not so common in geodetic practice.*

*The purpose of this paper is to present the local method of establishing the deflections of vertical with the help of a plane, which is calculated on the basis of interpolated geoid heights. The coefficients of the plane give the deflection of the vertical in the point of gravity. This means that, given a known geoid, we can calculate the deflection of the vertical at any point in the region of Slovenia. Comparison of calculated deflections with the measured deflections was performed in order to estimate the accuracy of the proposed procedure. The procedure was tested in the geodetic network with four points.*

## KEY WORDS

*geoid, deflection of the vertical, interpolation, geoid plane, reduction of observations*

## 1 UVOD

Metode geodetske izmere GNSS (angl. Global Navigation Satellite System) omogočajo hitro in natančno določitev položaja v prostoru. Na podlagi izmere GNSS pridobimo koordinate točk, to je geodetsko širino  $\varphi$ , geodetsko dolžino  $\lambda$  in elipsoidno višino  $h$  glede na referenčni elipsoid terestričnega koordinatnega sistema. Horizontalni koordinati, tj. geodetska širina  $\varphi$  in geodetska dolžina  $\lambda$ , sta neposredno uporabni v geodetski praksi in v splošni rabi. Nasprotno pa elipsoidna višina  $h$  ni praktično uporabna, ker ni določena v težnostnem polju Zemlje. Za pridobitev praktično uporabne »nadmorske« višine ob znani elipsoidni višini točke potrebujemo geoidno višino točke. Geoidno višino poljubne točke pridobimo z ineterpolacijo modela geoida. Zadnji model geoida za območje Slovenije, ki je trenutno v praktični uporabi, je bil določen leta 2000 (Pribičević, 2000). Model geoida je podan v obliki pravilne celične mreže (grida), ki omogoča izračun geoidne višine katerekoli točke na območju Slovenije. Če poznamo elipsoidno višino  $h$  ter geoidno višino  $N$ , izračunamo nadmorsko višino  $H$  z uporabo zveze:

$$H = h + N \quad (1)$$

Z razvojem metod izmere GNSS so se postopki terenskih meritev poenostavili in se veliko uporabljajo v geodetski praksi. Kljub temu pa je uporaba klasičnih terestričnih opazovanj velikokrat nenadomestljiva. Terestrična opazovanja so opravljena v težnostnem polju Zemlje, kar pomeni, da se nanašajo na geoid. Za izračun koordinat točk na podlagi terestričnih opazovanj moramo opazovanja reducirati na referenčni elipsoid. To pomeni, da moramo klasična terestrična opazovanja reducirati na normalo ter na površino ploskve referenčnega elipsoida, ki jih opravimo z uporabo odklonov navpičnic in geoidnih višin točk. Tako s postopki terestrične geodetske izmere pridobimo koordinate točk, ki so enakovredne koordinatam, določenim na podlagi opazovanj GNSS (Featherstone, Rüger, 2000).

Z odklonom navpičnice in geoidno višino je podana lega geoida glede na elipsoid v točki. Odklon navpičnice v obravnavani točki podaja informacijo o horizontalnem gradientu (naklonu) ploskve geoida (Freedon, Schreiner, 2006). Postopek izračuna ploskve geoida iz odklonov navpičnice je znan kot astronomski nivelman (Hofmann-Wellenhof, Moritz, 2005). Nasprotnega postopka, tj. določitve odklonov navpičnic iz geoidnih višin, pa v literaturi nismo zasledili. Zato smo se odločili za računsko določitev odklona navpičnice s tangencialno ravnino na ploskev geoida v obravnavani točki. Z naklonskima kotoma tangencialne ravnine so podane tudi vrednosti komponent odklona navpičnice. Naklonski kot tangencialne ravnine v smeri sever-jug je enak komponenti odklona navpičnice v smeri meridiana, naklonski kot tangencialne ravnine v smeri vzhod-zahod pa komponenti odklona navpičnice v smeri prvega vertikala. Natančnost računsko pridobljenih odklonov navpičnic smo ocenili na točkah z izmerjenimi odkloni navpičnic z neposredno primerjavo merjenih in računsko pridobljenih odklonov. Na koncu smo računsko pridobljene odklone navpičnic uporabili pri praktičnem primeru terestrične geodetske izmere in skušali ugotoviti vpliv oblike ploskve geoida, to je odklonov navpičnic in geoidnih višin na izračunane koordinate točk.

## 2 GEOID IN ODKLON NAVPIČNICE

Naloga geodetske znanosti in stroke je enolično in nedvoumno lociranje pojavov in stanj v fizičnem prostoru Zemlje. Lego v prostoru opisujemo s koordinatami, referenčna podlaga za opis lege v prostoru pa je koordinatni sistem. Koordinate v koordinatnem sistemu določamo z opazovanji na fizičnem površju, nad ali pod njim. Ne glede na to, kje so opazovanja opravljena, so vedno obremenjena z vplivom težnostnega polja Zemlje. Pri opazovanjih GNSS so vplivi, ki imajo izvor v težnostnem polju Zemlje, upoštevani v okviru efemerid satelitov. Na podlagi opazovanj GNSS zato pridobivamo koordinate točk, ki so določene v prostoru, katerega geometrija ni obremenjena s težnostnim poljem Zemlje. Pri terestričnih opazovanjih pa vpliv težnostnega polja Zemlje na opazovanja upoštevamo z ustreznimi redukcijami. V tem prispevku obravnavamo redukcije opazovanj, ki izhajajo iz geometrijskih lastnosti težnostnega polja Zemlje in so pomembne za določitev horizontalnih koordinat.

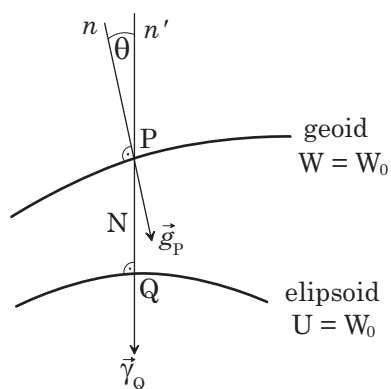
Težnostno polje Zemlje je konservativno vektorsko polje, zato ga lahko v celoti predstavimo s skalarnim poljem. Skalarno polje, ki vsebuje vse geometrijske lastnosti težnostnega polja Zemlje, je težnostni potencial. Težnostni potencial predstavimo z ekvipotencialnimi ploskvami, to je ploskvami konstantnega težnostnega potenciala. Najpomembnejša ekvipotencialna ploskev Zemljinega težnostnega polja je geoid. Po Gaussu je to ploskev potenciala telesa Zemlje, praktično ponazorjena s srednjo gladino svetovnih morij in podaljšana pod kontinente. Geoid je zaprta, zvezna ploskev, ki poteka delno znotraj, delno pa zunaj telesa Zemlje. Oblika ploskve geoida je precej povezana s topografijo zemeljskega površja in z razporeditvijo gostote mas v notranjosti Zemlje. Geoid ni primeren za reševanje geodetskih nalog, saj ga ni mogoče predstaviti z enostavnimi matematičnimi izrazi. Uporabljamo ga za obravnavo težnostnega polja Zemlje ter v praktičnem smislu za določanje višin, ki imajo fizikalen pomen.

Obliko ploskve geoida obravnavamo z relacijami:

- dejansko težnostno polje – normalno težnostno polje;
- dejanska ekvipotencialna ploskev (geoid) – normalna ekvipotencialna ploskev (elipsoid);
- dejanska težiščnica – normalna težiščnica;
- navpičnica – normala.

Redukcija opazovanj za vpliv geometrije težnostnega polja Zemlje pa je pravzaprav prenos opazovanj z navpičnice na normalo ter s fizične površine Zemlje prek geoida na referenčni elipsoid. Te redukcije lahko opravimo, če poznamo medsebojno lego geoida in elipsoida ter lego navpičnice in normale.

Smer vertikalne osi horizontiranega geodetskega instrumenta sovpada s smerjo navpičnice  $n$  v točki, ki pomeni smer, nasprotno smeri vektorja realne sile teže  $g$  (dejansko gre za tangento na ukrivljeno težiščnico, vendar se v praksi njena ukrivljenost zanemari). Navpičnica je pravokotna na ploskev geoida. Normala na elipsoid pomeni smer, ki je nasprotna smeri vektorja normalne sile teže  $\gamma$  in je pravokotna na elipsoid.



Slika 1: Odklon navpičnice

Odklon navpičnice ( $\theta$ ) je kot med vektorjema dejanske in normalne sile teže, geometrijsko pa je to kot med normalo in navpičnico (slika 1). Odklon navpičnice  $\theta$  je prostorski kot, zato ga razstavimo na dve pravokotni komponenti:  $\xi$  je naklon v smeri meridiana in  $\eta$  je naklon v smeri prvega vertikala.

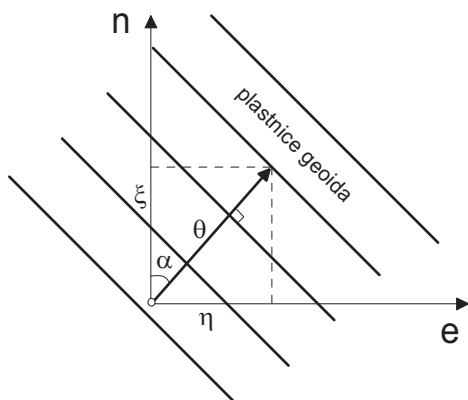
Komponenti odklona navpičnice pridobimo s primerjavo astronomskih geografskih koordinat v točki: astronomske širine  $\Phi$  in astronomske dolžine  $\Lambda$  ter geodetskih geografskih koordinat: geodetske širine  $\varphi$  in geodetske dolžine  $\lambda$ . Komponenti odklona navpičnice sta dani z zvezo (Hofmann-Wellenhof, Moritz, 2005):

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos\varphi\end{aligned}\quad (2)$$

Tako opredeljene odklone navpičnice imenujemo astrogeodetski odkloni. Oddaljenost med elipsoidom in geoidom vzdolž normale je geoidna višina ( $N$ ).

Primerjavo obeh vrst koordinat lahko opravimo v točki na površju Zemlje ali v točki na geoidu. Pri prvi gre za Helmertov odklon navpičnice, pri drugi pa za Pizzetijev odklon navpičnice. Razlika med njima izhaja iz vrednosti ukrivljenosti težiščnice, ki jo je v praksi težko izračunati, saj za izračun potrebujemo vrednosti drugih odvodov težnostnega potenciala.

Če zanemarimo vpliv ukrivljenosti težiščnice, vidimo, da astronomski koordinati ( $\Phi$ ,  $\Lambda$ ) ter geodetski koordinati ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) v točki na zemeljskem površju zagotavljata vse informacije o naklonu ploskve geoida v točki: smer odklona navpičnice sovpada s smerjo največjega naklona (gradienta) ploskve geoida; velikost odklona pa ustreza samemu gradientu ploskve geoida (slika 2).



Slika 2: Geometrični pomen komponent odklona navpičnice

Vrednost komponente  $\xi$  pomeni naklon geoida v smeri sever–jug in vrednost  $\eta$  naklon geoida v smeri vzhod–zahod. Če je geoid nagnjen proti severu, so vrednosti  $\xi$  pozitivne; če je nagnjen proti vzhodu, so vrednosti  $\eta$  pozitivne, in nasprotno. Očitno je, da se tako določen naklon nanaša na referenčni elipsoid, na katerega se nanašajo geodetske geografske koordinate. Če sta astronomski koordinati enaki geodetskima, je torej naklon geoida enak 0, ploskvi geoida in elipsoida sta v tej točki vzporedni.

### 3 MODELI GEOIDA SLOVENIJE

Za območje Slovenije so bili do sedaj izračunani trije modeli geoida. Prvi je bil model astrogeodetskega geoida, ki ga je za območje Jugoslavije izračunal profesor A. Muminagić iz Sarajeva (Muminagić, 1974). Ta geoid je nastal kot rezultat raziskav o orientaciji takratne jugoslovanske astrogeodetske mreže in se v praksi ni uporabljal. Prvi model geoida, ki je bil dejansko tudi praktično uporaben, je iz leta 1993 (Bašić, 1993). To je relativni geoid, izračunan glede na Besselov referenčni elipsoid, in ni uporaben pri geodetski izmeri GNSS. Model geoida, ki je uporaben z izmero GNSS, pa je bil določen leta 2000 (Pribičević, 2000). To je absolutni geoid, izračunan glede na GRS-80 referenčni elipsoid. Izračunan je s kolokacijo po metodi najmanjših kvadratov z uporabo tehnike »remove-restore«. V izračun je bilo vključenih 97 točk z merjenimi vrednostmi odklonov navpičnice, več kot štiri tisoč točkovnih anomalij težnosti ter okoli 100 točk z znanimi geoidnimi višinami, pridobljenimi iz elipsoidnih višin na podlagi GPS-izmere in nivelmana visoke natančnosti.

Model geoida je podan v obliki pravilne gridne mreže ( $1',0 \times 1',5$ ), ki omogoča izračun (interpolacijo) geoidne višine v poljubni točki znotraj območja modela geoida. Model zajema območje:

$$45^{\circ}15' < \varphi < 47^{\circ}00'$$

$$13^{\circ}15' < \lambda < 16^{\circ}45'$$

pri čemer so geoidne višine v gridu podane samo do meje Slovenije. Natančnost izračunanih geoidnih višin je v povprečju  $\pm 3$  cm, vendar je ta na območjih, kjer je bilo število točk z znanimi geoidnimi višinami večje, višja. Največja težava pri zadnjem modelu geoida so nadmorske višine točk, ki so bile uporabljene za višinsko orientacijo ploskve geoida, so pa po izračunu geoida spremenile svoje vrednosti. To pomeni, da so po preračunu nivelmanske mreže Slovenije (Koler in Vardjan, 2003) sedaj višine nekaterih točk, ki so bile uporabljene za izračun modela geoida, drugačne od uporabljenih za izračun geoida. To je eden od razlogov, da prihaja na nekaterih območjih tudi do večdecimetrskih razlik med nadmorskimi višinami in tistimi, ki jih izračunamo z merjenimi elipsoidnimi in interpoliranimi geoidnimi višinami, enačba (1).

## 4 IZRAČUN KOMPONENT ODKLONA NAVPIČNICE IZ MODELA GEOIDA

Model geoida je podan z vrednostmi geoidnih višin točk v celični (gridni) mreži. V okviru modela geoida nimamo nobenih vrednostih komponent odklonov navpičnic. Zato nas zanima, ali lahko iz razpoložljivih podatkov, to je iz običajnega modela geoida, izračunamo vrednosti odklonov navpičnic takšne kakovosti, da bi lahko bile uporabne za redukcije terestričnih opazovanj v vsakdanji geodetski praksi.

### 4.1 Izračun geoidne ravnine

Najpreprostejši način, s katerim lahko pridobimo vrednosti odklonov navpičnic, je aproksimacija ploskve geoida v obravnavani točki z ravnino. Na podlagi lege te »geoidne« ravnine v točki lahko pridobimo vrednosti odklonov navpičnice in geoidno višino.

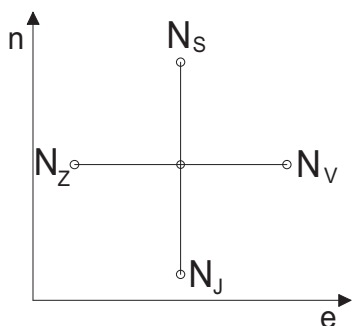
Na omejenem lokalnem območju, na primer na območju terestrične geodetske izmere, lahko geoidno ravnino zapišemo z enačbo:

$$N = Ae + Bn + C \quad (3)$$

pri čemer sta spremenljivki  $n$  in  $e$  ravninski koordinati točke v državnem koordinatnem sistemu. Če se koordinati nanašata na centralno točko območja izmere, imajo koeficienti geometrijski pomen. Koeficienta  $A$  in  $B$  pomenita naklon geoidne ravnine v smeri obeh koordinatnih osi:  $A$  v smeri vzhod–zahod,  $B$  v smeri sever–jug in koeficient  $C$  pomeni oddaljenost geoidne ravnine (3) od koordinatne ravnine  $e$ - $n$ . Koeficienta  $A$  in  $B$  sta torej komponenti odklona navpičnice, koeficient  $C$  je geoidna višina v obravnavani točki.

Za aproksimacijo oblike ploskve geoida z ravnino v točki grida modela geoida ( $N_G$ ) smo uporabili štiri točke, ki so od obravnavane točke enako oddaljene. Na sliki 3 prikazujemo razporeditev točk za določitev geoidne ravnine v obravnavani točki  $N_G$ . Štiri točke, ki so od obravnavane točke  $N_G$  enako oddaljene, imajo oznake v smeri severa  $N_S$ , juga  $N_J$ , vzhoda  $N_V$  in zahoda  $N_Z$ . V teh točkah smo iz modela geoida interpolirali geoidne višine. Želeli smo ugotoviti, na kakšnih oddaljenostih od obravnavane točke  $N_G$  morajo biti štiri točke  $N_S$ ,  $N_J$ ,  $N_V$  in  $N_Z$ , da pridobimo

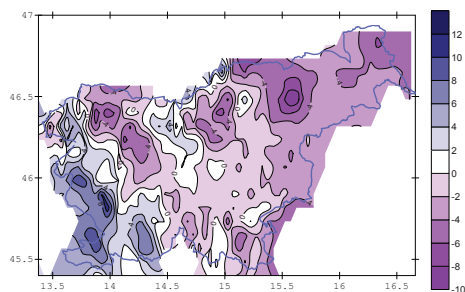
leže geoidnih ravnin ter vrednosti odklonov navpičnic, ki bodo najboljše možne kakovosti. Ocenjevali smo kakovost pridobljenih odklonov navpičnic na podlagi geoidne ravnine s točkami na oddaljenostih 10 m, 20 m in 30 m od obravnavane točke (slika 3).



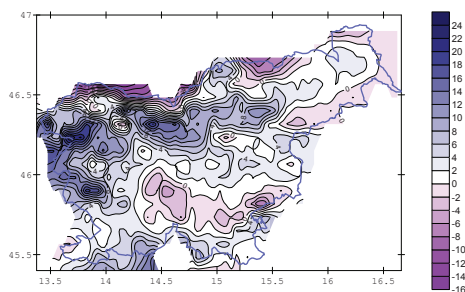
Slika 3: Določitev štirih točk, ki so enako oddaljene od gridne točke NG.

## 4.2 Izračun odklonov navpičnic v gridnih točkah modela geoida

Razgibanost geoida običajno prikazujemo z izolinijami geoidnih višin. Ker nas v okviru tega prispevka zanima tudi spremenljivost vrednosti odklonov navpičnic, prikazujemo razgibanost geoida z vrednostmi odklonov navpičnic. Za ta prikaz smo vrednosti odklonov navpičnic izračunali v vseh gridnih točkah modela geoida Slovenije ter po interpolaciji pridobili ploskve odklonov navpičnic po obeh komponentah, ki ju prikazujemo na slikah 4 in 5.



Slika 4: Vrednosti komponente  $\xi$  na območju Slovenije; v ["]



Slika 5: Vrednosti komponente  $\eta$  na območju Slovenije; v ["]

Vidimo, da je geoid na območju Slovenije precej razgiban, da dobro sledi topografiji in da je na območju SZ Slovenije izrazito nagnjen v smeri vzhod–zahod.



### 4.3 Točnost izračunanih odklonov navpičnic

Pred praktično uporabo računsko pridobljenih odklonov navpičnic smo hoteli oceniti točnost njihove določitve. Ocenili smo jo na točkah, na katerih imamo izmerjene astronomske geografske koordinate ter določene tako imenovane atrogeodetske odklone navpičnice. Astrogeodetski odkloni navpičnice za model geoida iz leta 2000 dosegajo natančnost okoli 0,3" (Pribičević, 2000), zato jih za oceno točnosti izračunanih odklonov navpičnice lahko obravnavamo kot prave vrednosti. Za merilo točnosti izračunanih odklonov navpičnice smo uporabili standardni deviaciji komponent odklonov navpičnice, ki ju izračunamo z zvezo:

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta \xi_i^2}{n-1}}, \quad \sigma_{\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta \eta_i^2}{n-1}} \quad (4)$$

kjer so:  $\Delta \xi = \xi_{\text{merjeno}} - \xi_{\text{izračunano}}$ ,  $\Delta \eta = \eta_{\text{merjeno}} - \eta_{\text{izračunano}}$  ter  $n$  število točk

Primerjavo smo izvedli na 59 točkah, ki so jim bile določene astronomske geografske koordinate. Primerjali smo odklone navpičnic, izračunane z geoidnimi ravninami, določenih na točkah na oddaljenostih 10 m, 20 m in 30 m od obravnavane točke. Iz odstopanj (največje odstopanje je znašalo nekaj več kot 4") lahko rečemo, da smo najboljše rezultate pridobili z geoidno ravnino, določeno iz točk, ki so od obravnavane točke oddaljene 20 m.

Točnost odklonov navpičnic, določenih iz točk, ki so od obravnavanih točk oddaljene 20 m, je podana v preglednici 1.

| $\sigma_{\xi}$ | $\sigma_{\eta}$ |
|----------------|-----------------|
| 1,804"         | 1,801"          |

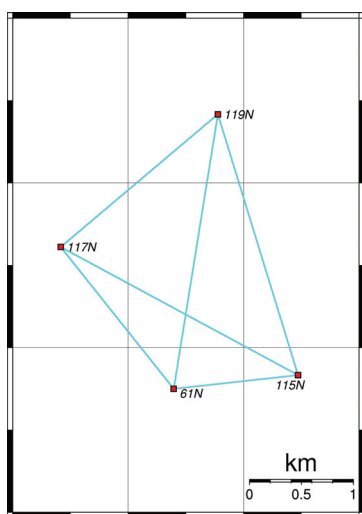
Preglednica 1: Točnost računsko pridobljenih odklonov navpičnic

Geoidne višine za izračun geoidnih ravnin smo interpolirali iz grida geoidnih višin, kar je najpreprostejši način za njihovo določitev, vendar ni najbolj natančen. Cilj naše raziskave je bila določitev vrednosti odklonov navpičnice s preprostim postopkom ter na podlagi primerjave z astrogeodetskimi odkloni ocena njihove točnosti in uporabnosti. Točnost določitve odklonov navpičnice, ki znaša približno 2", se na prvi pogled zdi nizka. V nadaljevanju zato predstavljamo uporabnost računsko pridobljenih odklonov navpičnic na praktičnem primeru.

### 5 PRIMER UPORABE ODKLONOV NAVPIČNIC

S praktičnim primerom želimo ugotoviti, kakšen vpliv ima uporaba odklonov navpičnic na redukcijo terestričnih opazovanj in kakšen je vpliv uporabe odklonov navpičnic na vrednosti koordinat točk. Vpliv vrednosti odklonov navpičnic na koordinate točk obravnavamo v geodetski mreži štirih točk, ki je del večje geodetske mreže, ki jo uporabljamo na terenskih vajah Fakultete

za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani na območju Strunjana. Na štirih točkah smo s klasično terestrično izmero opazovali dolžine, horizontalne smeri in zenitne razdalje. Opravili smo dve izravnavi opazovanj v geodetski mreži. Najprej smo izravnavali opazovanja, ki jih nismo reducirali za vrednosti vplivov izračunanih odklonov navpičnic, nato pa smo izravnavali še opazovanja, popravljena za vrednosti računsko določenih odklonov navpičnic. Izravnavo opazovanj smo za oba primera opravili v trirazsežnem prostoru, kjer smo geodetski datum geodetske mreže določili na podlagi privzetih znanih koordinat ene točke. Kot znane smo v izravnavah privzeli koordinate točke 61N (slika 6). Geoidne višine točk smo določili z interpolacijo iz modela geoida, odklone navpičnic  $\xi$  in  $\eta$  v točkah mreže pa z zgoraj opisanim postopkom. Izračunane vrednosti komponent odklonov navpičnic v točkah mreže znašajo med 2'' in 5''.



Slika 6: Točke mreže za izravnavo

Z izravnavo opazovanj v omenjeni mreži brez in z uporabo redukcij terestričnih opazovanj za vpliv odklonov navpičnic pridobimo različne rezultate. V preglednici 2 predstavljamo razlike koordinat točk v ravnini kartografske projekcije ter razlike višin točk, pridobljene z uporabo izračunanih odklonov navpičnic in brez nje. Vidimo, da razlike koordinat znašajo od 2 mm do 3,7 cm. Velikost obravnavane mreže je dokaj majhna, višinske razlike med točkami mreže so dokaj velike in vrednosti odklonov navpičnic so relativno majhne.

| Koordinata | Odstopanje koordinat točk geodetske mreže z in brez modela geoida [m] |        |        |
|------------|---|--------|--------|
|            | 115N  | 117N   | 119N   |
| $\Delta n$ | -0,021  | 0,014  | -0,010 |
| $\Delta e$ | 0,002   | 0,026  | 0,034  |
| $\Delta h$ | -0,037  | -0,028 | -0,016 |

Preglednica 2: Odstopanje ravninskih koordinat in elipsoidne višine z uporabo odklonov navpičnic in brez nje

Lahko sklepamo, da bi pri večji geodetski mreži, pri še večjih višinskih razlikah med točkami mreže ter še večjih vrednostih odklonov navpičnic, ki so v Sloveniji vsekakor prisotni, pridobili tudi večje razlike v vrednostih koordinat točk.

## 6 SKLEP

V prispevku smo pokazali, da neupoštevanje odklonov navpičnic v vsakdanji geodetski praksi vodi v določitev koordinat točk, ki niso pravilne. Pri tem pa se postavi vprašanje, ali so razlike v koordinatah točk, ki jih določimo brez uporabe odklonov navpičnic, prevelike za potrebe geodetske prakse. Na podlagi primera lahko vidimo, da so razlike koordinat zaradi neuporabe odklonov navpičnic pri manjših geodetskih mrežah okoli 2 cm. Zemljiškokatastrska izmera in geodetska izmera za potrebe gradnje manjših objektov zahtevata natančnost določitve koordinat točk  $\sigma_p = 4$  cm. Očitno je, da pri takih nalogah, ki jih opravljamo na manjšem območju, ki obsega ne najbolj razgiban teren, z upoštevanjem odklonov navpičnic ne bi bistveno izboljšali kakovosti določitve koordinat točk. Pri zahtevnejših meritvah, recimo predorih, viaduktih, drugih večjih objektih, izmeri na večjih nadmorskih višinah ali pri izmeri za potrebe določanja premikov in deformacij, kjer je zahtevana milimetrška natančnost koordinat točk, lahko zaradi neupoštevanja odklonov navpičnic pridobimo napačne rezultate. Težave bi bile posebej očitne, kjer bi koordinate točk določali hkrati z različnimi metodami geodetske izmere, na priemr s terestrično in GNSS-geodetsko izmero.

Odklone navpičnic lahko izračunamo na več načinov. Gravimetrične odklone izračunamo iz anomalij težnosti z integralom Vening-Meinesza, astrogeodetske odklone pridobimo iz astronomskih meritev, lahko pa jih izračunamo tudi z globalnim geopotencialnim modelom. V članku smo prikazali možnost izračuna komponent odklona navpičnice iz grida geoidnih višin z interpolacijsko ploskvijo oziroma z geoidnimi ravninami. Za izračun gravimetričnih odklonov bi potrebovali gosto mrežo točk z izmerjenimi vrednostmi težnosti in podatke o topografiji v širši okolici Slovenije. Odkloni navpičnic, ki jih določimo iz globalnih geopotencialnih modelov, ne dosegajo dovolj visoke točnosti na lokalni ravni. Za pridobitev astrogeodetskih odklonov pa potrebujemo posebne instrumente in dolgotrajne meritve. Iz naštetih razlogov je uporaba predstavljene metode smiselna, saj zahteva le model geoida za določeno območje, nadaljevanje pa je računski postopek, ki se ga lahko dokaj preprosto vgradi v programsko opremo za uporabo v vsakdanji geodetski praksi. Pri tem pa se postavi vprašanje, ali bi bila kakovost računsko določenih odklonov navpičnic dovolj visoka za vse potrebe. Čeprav nam ni uspelo objektivno določiti točnosti izračunanih odklonov navpičnic, vseeno menimo, da bi bila uporaba teh

odklonov boljša izbira, kot da jih sploh ne bi uporabljali. Pri tem je pomembna tudi kritičnost izvajalcev geodetske izmere, ki bi glede na izkušnje ocenili potrebnost in pomembnost uporabe računsko pridobljenih odklonov navpičnic v konkretnem primeru.

## Literatura in viri:

*Bašič, T. (1993). Izrada digitalnog modela geoida Republike Slovenije, elaborat, Ljubljana: MOP, Republiška geodetska uprava.*

*Featherstone, E. W., Rüger, M. J. (2000). The Importance of Using Deviations of the Vertical for Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum. The Australian Surveyor, 45(2): 46–59.*

*Freedon, W., Schreiner, M. (2006) Local multiscale modelling of geoid undulations from deflections of the vertical. Berlin. Journal of Geodesy. 79, 10–11: 641–651.*

*Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H. (2005). Physical Geodesy. Wien. Springer.*

*Koler, B., Vardjan, N. (2003). Analiza stanja nivelmanskih mrež Republike Slovenije. Ljubljana, Geodetski vestnik 47(3): 251–263.*

*Muminagić, A. (1974). Ispitivanje realnog geoida u Jugoslaviji. Zagreb, Geodetski list, 26(1): 6–12.*

*Pribičević, B. (2000). Uporaba geološko-geofizičnih in geodetskih baz podatkov za računanje ploskve geoida Republike Sloveniji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 179 str.*

**Prispelo v objavo: 17. avgust 2010**

**Sprejeto: 23. november 2010**

**doc. dr. Miran Kuhar, univ. dipl. inž. geod.**

UL FGG, Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana  
e-pošta: miran.kuhar@fgg.uni-lj.si

**Marta Okorn, univ. dipl. inž. geod.**

Geodetska uprava RS, Zemljemerska 12, SI-1000 Ljubljana  
e-pošta: marta.okorn@gov.si

**izr. prof. dr. Bojan Stopar, univ. dipl. inž. geod.**

UL FGG, Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana  
e-pošta: bojan.stopar@fgg.uni-lj.si