

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Podiplomski program Geodezija

Kandidat:

Oskar Sterle

Združevanje klasičnih geodetskih in GNSS opazovanj v geodinamičnih raziskavah

Magistrska naloga št. 45

Mentor:
prof. dr. Bojan Stopar

Ljubljana, 21. 9. 2007

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

Jamova 2, p.p. 3422
1115 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si



**PODIPLOMSKI
ŠTUDIJ GEODEZIJE**
*Magistrski študij:
Matematična in
fizikalna geodezija*

Kandidat:
OSKAR STERLE, univ.dipl.inž.geod.

**ZDRUŽEVANJE KLASIČNIH GEODETSKIH IN GNSS –
OPAZOVANJ V GEODINAMIČNIH RAZISKAVAH**

Magistrsko delo štev.: 45

**COMBINATION OF TERRESTRIAL AND GNSS
OBSERVATIONS FOR GEODYNAMIC RESEARCH**

Master of Science Thesis No.: 45

Komisija za zagovor:

Mentor:
izr.prof.dr. Bojan Stopar

Predsednik komisije:
izr. prof. dr. Bojan Stopar

Člana:
doc. dr. Tomaž Ambrožič

doc.dr. Miran Kuhar

Ljubljana, 21. september 2007

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **Oskar Sterle, univ. dipl. inž. geod.** izjavljam, da sem avtor magistrskega dela z naslovom: »**ZDRUŽEVANJE KLASIČNIH GEODETSKIH IN GNSS – OPAZOVANJ V GEODINAMIČNIH RAZISKAVAH**«.

Ljubljana, _____ 2007.

(podpis avtorja)

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

*Če stvari razumeš, so kakršne so.
Če stvari ne razumeš, so kakršne so.
(Zenovski koan)*

ZAHVALA

V času zaključevanja te naloge je čas za končno bilanco izvedenega dela in celotnega podiplomskega študija geodezije. V mislih imam tako strokovno plat zadnjih treh let študija in opravljanja službenih dolžnosti, kot tudi zasebno življenje. Obe plati sta bili neločljivo povezani in na srečo tudi pozitivno vplivali ena na drugo. V prvi vrsti se imam za to, da danes pišem to besedilo, zahvaliti mentorju in kolegu izr. prof. dr. Bojanu Stoparju, ki me je pred tremi leti sprejel kot mladega raziskovalca na katedro. Zahvala mu gre za celotno obdobje, za strokovno pomoč, usmerjanje in oporo.

V veliko pomoč, predvsem v zadnjih mesecih izdelave naloge, mi je bil doc. dr. Tomaž Ambrožič, z nasveti in njegovim razumevanjem postopka izravnave geodetskim mrež. Zahvaljujem se mu za sproščene pogovore o prednostih in tegobah programiranja geodetskih nalog.

Seveda so tu še ostali sodelavci na Oddelku za geodezijo, ki so mi bili v pomoč v različnih obdobjih skozi čas magisterija.

Zahvala gre tudi vsem domačim, ki so me vzpodbujali pri delu in mi na veliko načinov pomagali pri uresničevanju mojih želja. Hvala Saši, da mi je bila ob strani. Hvala staršem, da sta mi tekom odraščanja dala edino stvar, ki jo starši morajo dati otrokom, sposobnost kritičnega razmišljanja s svojo glavo.

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 528:551.2/.3:621.39(043.3)
Avtor: Oskar Sterle, univ. dipl. inž. geod.
Mentor: izr. prof. dr. Bojan Stopar
Naslov: Združevanje klasičnih geodetskih in GNSS-opazovanj v geodinamičnih raziskavah
Obseg in oprema: 118 str., 6 pregl., 33 sl., 134 en.
Ključne besede: deformacije, deformacijski tenzor, tenzor 2. reda, geodetski datum, datumski parametri, geodetska opazovanja, vektorji hitrosti, astrogeodetska mreža Slovenije

Izvleček

Osnovna količina deformacijske analize so pridobljeni vektorji hitrosti ali premikov obravnavanega deformabilnega telesa. Izračun vektorjev premikov je v geodetski praksi mogoče le na podlagi ponovljenih izmer geodetske mreže. Koordinate točk geodetske mreže v posamezni izmeri se izračuna na podlagi izvedenih opazovanj. Prikazane so datumske informacije določenih tipov opazovanj v ravnini projekcije in metode zagotavljanja datuma geodetske mreže. Vektorji hitrosti oz. premikov so ocenjeni na podlagi ponovljenih izmer, kjer so bile uporabljene različne merske tehnike. Izravnava se izvede v enem koraku za vse terminske izmere v 4R prostoru. Rezultat obdelave so ocenjene koordinate točk v referenčni epohi s pripadajočimi vektorji hitrosti. Vektorji hitrosti so obremenjeni s slabo določenim datumom geodetskih mrež v posameznih terminskih izmerah. Ti vektorji so datumsko odvisni, medtem ko je deformacijski tenzor translacijsko invarianten, a odvisen od merila mreže. Vektorje se analizira prisotnosti datumskih informacij in določi datumsko neodvisne vektorje, ki predstavljajo relativne premike točk v mreži. Cilj naloge je predstaviti metodo ocenjevanja vektorjev hitrosti ponovljenih geodetskih izmer, ki predstavljajo geometrijske premike in niso posledica prisotnosti spremembe datumska v posameznih izmerah.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC: 528:551.2/.3:621.39(043.3)
Author: Oskar Sterle, univ. dipl. ing. geod.
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bojan Stopar
Title: Combination of terrestrial and GNSS observations for geodynamic research
Notes: 118 p., 6 tab., 33 fig., 134 eq.
Key words: strain, strain tensor, 2. order tensor, geodetic datum, datum parameters, geodetic observations, velocity vectors, astrogeodetic net of Slovenia

Abstract

The basic quantity of strain are determined vectors of velocity or displacement of deformed body. Determination of displacements in geodetic practice is possible only with repeated survey of a geodetic net. Coordinates of points in geodetic net are estimated in each survey on a basis of observations. Thesis presents datum parameters of specific type of observation in projection plane and methods of datum assurance in geodetic nets. Velocity or displacement vectors are estimated from repeated surveys, where different survey techniques were used. Estimation is taking place in one step for all survey epochs in 4D space. Results are estimated coordinates of points in some reference epoch with corresponding velocity vectors. Velocity vectors are biased because of bad datum definitions in separate surveys. These vectors are datum dependent, while strain tensor is invariant to transformation, but dependent on scale of a net. Vectors are analyzed on datum alterations presence and datum independent velocity vectors are obtained, which represent relative displacements of points in geodetic net. Main purpose of this thesis is to present a method of velocity vectors estimation from repeated surveys, that represent geometric displacements and are not biased because of datum alterations in separated surveys.

Kazalo vsebine

1	UVOD	1
2	OPREDELITEV DEFORMACIJ TELESA	7
2.1	Tenzor velikih deformacij	9
2.2	Lastnosti tenzorjev 2. reda	11
2.3	Geometrijski pomen komponent tenzorja velikih deformacij	13
2.3.1	Specifična sprememba dolžine materialnih vlaken	13
2.3.2	Sprememba smeri materialnih vlaken	14
2.3.3	Sprememba pravega kota materialnih vlaken	15
2.4	Tenzor majhnih deformacij	16
2.5	Tenzor majhnih zasukov	17
2.6	Kompatibilnostni pogoji	18
2.7	Glavne normalne in glavne strižne deformacije	18
2.7.1	Glavne normalne deformacije	19
2.7.2	Glavne strižne deformacije	20
2.8	Opis deformacij s sfernimi koordinatami	21
2.9	Ravninsko deformacijsko stanje	24
2.9.1	Glavne normalne deformacije	25
2.9.2	Glavne strižne deformacije	26
2.9.3	Ravninsko deformacijsko stanje v polarnih koordinatah	27
2.9.4	Ravninsko deformacijsko stanje in 4-parametrična transformacija	28
3	GEODETSKI DATUM IN GEODETSKA OPAZOVANJA	31
3.1	Geodetski datum	31
3.1.1	Geodetski datum terestrično opazovane geodetske mreže	32
3.1.2	Geodetski datum mreže GNSS	34
3.2	Datumske informacije opazovanih količin v ravnini projekcije	34
3.2.1	Smerni koti	35
3.2.2	Opazovane smeri in koti	36
3.2.3	Opazovane horizontalne dolžine	37
3.2.4	Vektorji GNSS	38
3.2.5	Absolutni položaji točk GNSS	38
3.2.6	Opazovanja in geodetski datum - povzetek	39
3.3	Zagotovitev geodetskega datuma v geodetski mreži	40

3.3.1	Določitev datuma z zunanji opazovanji	40
3.3.2	Določitev datuma z minimalnim številom vezi	40
3.3.3	Določitev datuma z notranji vezi - prosta mreža	41
3.3.4	Določitev datuma s psevdopazovanji	41
4	DOLOČEVANJE DEFORMACIJ IZ OPAZOVANIH KOLIČIN	43
4.1	Princip homogenih deformacij	44
4.2	Določevanje deformacij iz merjenih kotov znotraj trikotnika	45
4.3	Določevanje deformacij iz merjenih dolžin med točkami	48
4.4	Določevanje deformacij iz ocenjenih vektorjev hitrosti	50
4.5	Primerjava metod	52
5	OBRAVNAVA GEODETSKIH OPAZOVANJ V RAZLIČNIH TERMIN- SKIH IZMERAH	55
5.1	Funkcionalni model izravnave	55
5.2	Enačbe popravkov opazovanj	57
5.2.1	Opazovani koti	58
5.2.2	Opazovane horizontalne dolžine	59
5.2.3	Absolutni položaj GNSS	60
5.3	Rešitev modela po MNK	60
5.3.1	Ocena samo koordinat točk geodetske mreže	61
5.3.2	Ocena vektorjev hitrost točk geodetske mreže	66
5.4	Ocenjeni vektorji hitrosti in geodetski datum	70
5.5	Deformacijski tenzor geodetskega četverokotnika	75
6	ASTROGEODETSKA MREŽA SLOVENIJE	79
6.1	Zgodovina astrogeodetske mreže (AGM) Slovenije	79
6.2	Oblika in velikost AGM Slovenije	80
6.3	Izvedena opazovanja na AGM Slovenije	80
6.3.1	Terestrična opazovanja na AGM Slovenije	81
6.3.2	Izmera GNSS na AGM Slovenije	82
6.4	Priprava opazovanj na AGM Slovenije za obdelavo	84
6.4.1	Obdelava opazovanj izmere EUREF GNSS	84
6.4.2	Redukcija terestričnih opazovanj	87
6.5	Ocena koordinat in vektorjev hitrosti točk AGM Slovenije	90
6.6	Ocena deformacijskih parametrov AGM Slovenije	97

7 ZAKLJUČKI	101
8 POVZETEK	105
9 SUMMARY	109
VIRI	113
PRILOGE	
A Rezultat obdelave opazovanj na AGM Slovenije	
B Redukcija vektorjev hitrosti za vpliv geodetskega datuma	

Kazalo preglednic

3.1	Geodetska opazovanja v ravnini in pripadajoče datumske informacije opazovanj	39
5.1	Ocenjene spremembe datumskih parametrov v a-priori in izravnanih vektorjih	75
5.2	Komponente tenzorja malih deformacij geodetskega četverokotnika	75
5.3	Glavne normalne in glavne strižne deformacije geodetskega četverokotnika .	76
6.1	Ocenjene spremembe datumskih parametrov v ocenjenih vektorjih na 33-tih točkah AGM	93
6.2	Parametri deformacij AGM Slovenije pri predpostavki o homogenih deformacijah cele mreže	97

Kazalo slik

2.1	Prikaz deformabilnega telesa v začetni in trenutni legi	8
2.2	Prikaz diferencialnega območja neke točke A v začetni in trenutni legi . . .	9
2.3	Prikaz obravnave spremembe smeri materialnih vlaken	14
2.4	Prikaz obravnave spremembe pravega kota med materialnimi vlakni	15
2.5	Razcep poljubnega vektorja deformacij na normalno in strižno komponento	20
2.6	Prikaz kartezičnih in sfernih koordinat	22
2.7	Deformiranje diferencialne enotske krožnice v elipso	26
2.8	Ravninske deformacije v polarnih koordinatah	27
4.1	Vektor premika v ravnini in sprememba smernega kota med vektorjem točke v začetnem in vektorjem točke v končnem položaju	46
4.2	Obravnava deformacij iz kotnih opazovanj v trikotniku	47
4.3	Sprememba dolžine in smernega kota med dvema točkama zaradi deformacij	49
5.1	Primerjava rezultatov proste mreže geodetskega četverokotnika (rdeče elipse) in rezultatov obdelave (modre elipse) z datumom definiranim preko psev- doopazovanj (črne standardne elipse velikosti 3 cm so a-priori natančnosti)	64
5.2	Primerjava rezultatov proste mreže (rdeče elipse) in rezultatov obdelave (modre elipse) z datumom definiranim preko psevdoopazovanj (črne elipse velikosti 3 cm so a-priori natančnosti) velike mreže	65
5.3	Vpliv različnih natančnosti približnih koordinat točk geodetske mreže na rezultate izravnave	66
5.4	Primer simulacije geodetskega četverokotnika z vektorji hitrosti točk (levo) in ocena samo koordinat točk mreže (desno)	68
5.5	Prikaz postopne ocene vektorjev hitrosti na točkah geodetskega četverokot- nika in primerjava ocenjenih vektorjev z a-priori vektorji (slika desno spodaj)	69
5.6	Prikaz postopne ocene vektorjev hitrosti, kjer premika na ostalih točkah ni	71
5.7	Komponente vektorjev hitrosti točk geodetske mreže in vpliv sprememb datumskih parametrov v vektorjih hitrosti	72
5.8	Reducirani vektorji hitrosti za vpliv datumskih informacij v primeru a- priori (zeleni vektorji) in ocenjenih (črni vektorji) vektorjev hitrosti	74
5.9	Prikaz glavnih normalnih in strižnih deformacij na primeru geodetskega četverokotnika	76
5.10	Prikaz vektorskega polja hitrosti, določenega preko deformacijskih parametrov ocenjenih iz vektorjev hitrosti na točkah geodetskega četverokotnika	77

6.1	Točke AGM Slovenije	81
6.2	Terestrična opazovanja izvedena na AGM Slovenije	83
6.3	Izmera EUREF GPS na AGM Slovenije	85
6.4	Rezultati obdelave izmer EUREF za točke AGM Slovenije in delu ozemlja Hrvaške	87
6.5	Ocenjene natančnosti koordinat točk AGM, ki se jim je ocenila tudi hitrosti, za referenčno epoho 1990.0	91
6.6	Ocenjene hitrosti in natančnosti hitrosti točk AGM	92
6.7	Reducirani vektorji hitrosti na 33-tih točkah AGM Slovenije s pripada- jočimi natančnostmi	94
6.8	Primerjava natančnosti ocenjenih koordinat točk AGM Slovenije kot proste mreže (rdeče standardne elipse) in preko psevdopazovanj (modre stan- dardne elipse)	95
6.9	Primerjava ocenjenih vektorjev hitrosti in vektorjev hitrosti pridobljenih preko popravkov proste mreže za 33 točk AGM	96
6.10	Prikaz vektorskega polja, določenega iz predpostavljenih homogenih defor- macij in ocenjenih vektorjev hitrosti AGM	98
6.11	Glavne normalne deformacije AGM Slovenije s pripadajočimi smermi in natančnostmi	99
6.12	Glavne strižne deformacije AGM Slovenije s pripadajočimi smermi in natančnos- tmi	100

1 UVOD

Različne znanosti in stroke se vedno bolj osredotočajo na odkrivanje in razumevanje naravnih in antropogenih pojavov, ki ogrožajo življenje ljudi. S ponavljajočimi dogodki, kot je bil potres v mestu Kobe na Japonskem (1995), tsunami v Indoneziji (2004), potres v Pakistanu (2005) ali Bovcu (1998, 2004), se poskuša spremljati tudi potresno ogrožena območja, ki se po pravilu nahajajo v bližini ali na območjih tektonskih prelomnic. Poleg spremljanja in lociranja potresov, ki so se že zgodili, se potresno ogrožena območja skuša spremljati tudi z deformacijsko analizo. Pri deformacijski analizi skušamo določiti strižne in normalne deformacije na nekem območju, ki nakazujejo na premike med tektonskimi ploščami. Osnova deformacijski analizi so spremembe položajev obravnavanih točk v določenem časovnem obdobju.

Osnovna naloga geodezije je vedno bila določevanje položajev točk glede na nek izbran (dogovorjen) koordinatni sistem. Položaj novih točk se določi na podlagi opazovanih količin med danimi in novimi točkami. Skozi čas sta bila tip in predvsem natančnost opazovanj (oz. položaja) pogojena z razvojem tehnologije in informatike. Še ne dolgo nazaj je bilo nemogoče spremljati stabilnosti točk na večjem, globalnem območju. Z razvojem tehnologije, predvsem satelitske tehnologije, pa se je pojavila možnost spremljanja relativnega položaja med točkami, ki so tudi nekaj 1000 km narazen. Prvi poskusi so bili z LLR¹ (merjenje razdalj do Lune), SLR² (merjenje razdalj do umetnih satelitov) ali VLBI³ (določevanje razdalj med točkami na Zemeljski obli na podlagi spremljanja valovanj kvazarjev), s čimer pa so se ukvarjali le na redkih inštitutih in observatorijih. Z razvojem GNSS⁴, predvsem ameriškega GPS⁵, pa se je odprla možnost številnim uporabnikom določevanja razdalje med dvema točkama na nivoju relativne natančnosti 1 ppb.

V sedanjosti je določevanje položajev točk, ki so več kakor 10 km narazen, stalna praksa uporabe GNSS. Natančnost določenega položaja je prešla mejo stabilnosti točk in položaj vsake točke se obravnava v štiri razsežnem (4R) prostoru. Četrta dimenzija (čas) predstavlja spremembo položaja v odvisnosti od časa. Položaj točke, določene z GNSS, je

¹angl. Lunar Laser Ranging

²angl. Satellite Laser Ranging

³angl. Very Long Baseline Interferometry

⁴angl. Global Navigation Satellite Systems

⁵angl. Global Positioning System

določen v stabilnem in kakovostnem koordinatnem sestavu ITRF⁶ in se nanaša na točno določeno epoho. Značilnosti položajev točk, določenih v ITRF preko GNSS, so visoka natančnost in isti geodetski datum. Ocenjeni vektorji hitrosti točk se nanašajo na spremembe položajev točke zaradi geodinamike in ne zaradi spremembe geodetskega datuma mreže.

Določevanje deformacijskih parametrov iz vektorjev hitrosti, določenih na podlagi GNSS v koordinatnem sestavu ITRF, se je začelo v začetku 90-tih let prejšnjega stoletja, ko je GPS postal popolnoma operativen. V strokovnih revijah je objavljeno veliko število del deformacijskih analiz iz ponovljenih opazovanj GNSS. Vendar pa je GPS v splošni in dovolj natančni uporabi le okoli 15 let. Dobljene deformacije se tako nanašajo na dokaj kratko časovno obdobje in opisujejo le kratkoročno geodinamiko obravnavanega območja. Za določevanje dolgoročne geodinamike moramo tako upoštevati tudi opazovanja, ki se nanašajo na klasične terestrične metode izmere. Ta opazovanja so predvsem opazovane smeri in dolžine med triangulacijskimi točkami starih mrež. Vendar je potrebno biti pri teh opazovanjih pazljiv, saj imajo tri lastnosti (Xu in sod., 2000a):

- slabo določeno merilo in orientacijo posameznih delov klasične geodetske mreže (Jenko, 1986; Stopar, 1995; Stopar in Kuhar, 2001; Xu in sod., 2000a),
- merilo in orientacija mreže se lahko spreminjata iz ene terminske izmere v drugo (Cong in Feigl., 1999; Hunstad in sod., 2003; Jenko, 1986),
- klasična opazovanja so ponavadi slabše natančnosti (Cong in Feigl., 1999; Fujii, 2003; Jenko, 1986; Prawirodirdjo in sod., 2000; Stopar, 1995; Sue in sod., 2000).

Uporaba starih podatkov je možna le ob visoki natančnosti sodobnih opazovanj in velikem časovnem intervalu med opazovanji, ki lahko znaša tudi 100 let (Calais in sod., 2000; Ferhat in sod., 1998; Fujii, 2003; Hunstad in sod., 2003; Hunstad in England, 1999).

Pri združevanju starih terestričnih in novih satelitskih opazovanj pa, poleg velike razlike v natančnosti opazovanj, naletimo tudi na problem geodetskega datuma. Geodetski datum določajo dane točke mreže, a za časovno razliko 50-ih let ne moremo nobene izmed točk vzeti kot stabilne. Največji problem združevanja opazovanj v različnih časovnih obdobjih je vzpostavitev geodetskega datuma mrež v različnih terminskih izmerah. Različni avtorji so se s tem problemom različno soočili. V splošnem lahko govorimo o štirih različnih

⁶angl. International Terrestrial Reference Frame

metodah.

V prvem primeru datuma ne poskušamo realizirati, ampak določimo deformacijske parametre neposredno iz ponovljenih opazovanj (Frank, 1966; Pearson, 1994). Število in tip ocenjenih deformacijskih parametrov nam narekuje količina datumskih informacij v opazovanjih. Ker so bila v preteklosti opravljena predvsem kotna opazovanja, dolžinska opazovanja pa so bila slabše natančnosti, lahko ocenimo le dva izmed treh deformacijskih parametrov (v ravnini), in sicer inženirsko in čisto strižno deformacijo. Pogoji so enaka ponovljena opazovanja v mreži.

Druga metoda je, da zagotovimo datumske informacije z danimi količinami oz. zunanji opazovanji. V delu Fujii (2003) je avtor primerjal stara kotna opazovanja na triangulacijski mreži in datum definiral z danimi položaji 4-ih triangulacijskih točk 1. reda v mreži. Položaj danih točk se je nanašal na vrednosti uradnih koordinat v času prvih izmer. V delih Hunstad in England (1999) ter Hunstad in sod. (2003) je bil datum vzpostavljen z dvema danima točkama, kjer so bile koordinate določene z izmero GPS. Deformacijski parametri so bili ocenjeni na podlagi primerjave izravnanih kotnih opazovanj, kot v primeru Frank (1966).

V primeru Bourne in sod. (1998) ter Sue in sod. (2000) je bil geodetski datum terestrične mreže realiziran na podlagi ene dane točke in enega danega azimuta. V obeh primerih so bila izvedena tudi dolžinska opazovanja, ki so zagotavljala merilo mreže. Deformacijski parametri so bili ocenjeni na podlagi določenih premikov točk med terestričnimi izmerami in izmero GNSS. Predpostavka je (pravilna), da je deformacijski tenzor neodvisen od orientacije in premika mreže. Ocenjeni premiki so le stranski produkt obdelave.

Zadnja izmed naštetih metod je opisana v Dong in sod. (1998) in je bila uporabljena v številnih aplikacijah (Calais in sod., 2000; Cong in Feigl., 1999; Ferhat in sod., 1998; Prawirodirdjo in sod., 2000). Postopek temelji na kombinaciji različnih tipov opazovanj v različnih terminskih izmerah z namenom ocene premikov točk v odvisnosti od časa. Opazovanja v različnih terminskih izmerah so obdelana ločeno z namenom ocene koordinat točk. Geodetski datum je vzpostavljen z a-priori natančnostmi danih količin (uvedba psevdopazovanj). Metoda deluje po postopku Kalmanovega filtra, kjer se opazovanja združijo na nivoju normalnih enačb.

Iz vseh štirih tipov obdelav geodetskih opazovanj je razvidno, da avtorji zelo različno obravnavajo opazovanja in geodetski datum mreže točk. V prvem primeru se geodetskega datuma ne obravnava, kar ima za posledico manjše število ocenjenih deformacijskih parametrov. V drugem in tretjem primeru obdelava terestričnih opazovanj temelji na predpostavki o določenih danih količinah (točka, azimut), ki so lahko napačne, in na predpostavki o invariantnosti tenzorja deformacij na datumske parametre (premik, zasuk). Četrta metoda najbolj sistematično obdela podatke, kjer se datum določi preko podanih psevdopazovanj.

V Sloveniji so bila na astrogeodetski mreži (AGM) ponovljena opazovanja treh različnih izmer. Prva izmera se je vršila v letih 1963 in 1965, kjer so bile opazovane smeri med točkami. V letih 1975 in 1982 je potekala izmera dolžin na določenih stranicah mreže, z namenom ugotovitve natančnosti AGM Slovenije. Leta 1995 pa je bila izvedena izmera EUREF⁷ z namenom vzpostavitve novega koordinatnega sestava na območju Slovenije. Kotna opazovanja so bila opazovana z natančnostjo med 0.4" in 0.7", dolžinska opazovanja z natančnostjo do 6 cm (Jenko, 1986; Stopar, 1995), medtem ko lahko položaje točk izmere EUREF določimo na vsaj 1 cm natančno (Berk in sod., 2003).

V pričujoči nalogi je predstavljena korektna obravnava geodetskih opazovanj in geodetskega datuma mrež v različnih obdobjih. Predpostavi se, da nobena izmed točk ni stabilna, še posebej v tako dolgem časovnem intervalu. Izpeljan je matematični model, v katerem se vsa opazovanja v različnih obdobjih obdelajo v enem koraku. Položaji točk, ki so opazovani v več terminskih izmerah, se modelirajo v odvisnosti od časa in se jim ocenjuje tudi vektor hitrosti (poleg koordinat). Končni rezultat naloge niso parametri deformacijskega tenzorja, ampak ocenjeni vektorji hitrosti, ki so rezultat pravilne obravnave tako opazovanj kot geodetskega datuma.

V uvodnem delu naloge je prikazan princip deformacij, izpeljava deformacijskega tenzorja za primer trdnega telesa in zveznih, odvedljivih ter regularnih premikov točk telesa. Prikazan je odnos tenzorja do datumskih količin in predstava tenzorja deformacij v različnih prostorih (3R, 2R) in različnih koordinatnih sistemih (pravokotni kartezični, sferni, polarni).

Geodetski datum in datumske informacije so opisane dokaj podrobno. Prikazane so da-

⁷angl. EUropean REference Frame

tumske informacije, ki jih vsebujejo določena opazovanja, in vzpostavitev geodetskega datuma za različne tipe mrež in opazovanj v mrežah. Opisane so tudi metode določevanja deformacijskih parametrov iz opazovanih količin v geodetski mreži. Podrobno je opisan tudi funkcionalni model ocenjevanja položajev in vektorjev hitrosti točk na podlagi različnih tipov opazovanj v različnih terminskih izmerah. Teoretični rezultati so prikazani praktično na simuliranem geodetskem četverokotniku in AGM Slovenije.

V nalogi nastopajo različne matematične in fizikalne količine. V 2. poglavju so opredeljene deformacije telesa. Oznake skalarjev in tenzorjev so zapisane poševno v navadni pisavi, kot npr. x , y za skalarje in ε za tenzor ali ε_{xx} za komponento tenzorja. Vektorske količine so zapisane poševno v navadni pisavi z dodanim vektorjem nad količino, kot npr. \vec{e}_x . V 5. poglavju je opisano postopek obravnave geodetskih opazovanj v različnih terminskih izmerah. V tem poglavju so zapisane tudi enačbe popravkov za posamezna opazovanja v matrični obliki. Matrike so zapisane krepko v obliki **I**. V celotni nalogi so preglednice in slike oštevilčene z dvema številoma, kjer prvo predstavlja zaporedno število glavnega poglavja in drugo zaporedno število preglednice oz. slike v tem poglavju, primer 5.1. Enačbe so oštevilčene na enak način, le da imajo predpono L- oz. P-, kot primer L-5.10 ali P-2.30. Predpona P- se nanaša na privzete enačbe, medtem ko se L- na lastne enačbe, plod našega dela.

2 OPREDELITEV DEFORMACIJ TELESA

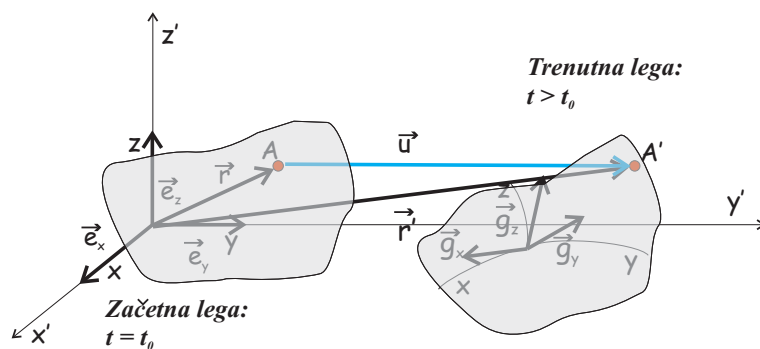
V nekem trenutku poljubno telo v prostoru zavzema neko lego in obliko. Če na telo deluje zunanja sila, se telo lahko premakne in zasuka. V takem primeru imamo drugačno lego telesa ob enaki obliki. Opis nove lege je možen preko kinematičnih enačb gibanja težišča in zasukov okoli težišča telesa. Če telo ne spremeni oblike, imenujemo telo *togo* ali *nedeformabilno*. V primeru, da zunanja sila ne vpliva le na lego telesa v prostoru, ampak tudi na obliko, potem govorimo o **deformacijah telesa** in telo označimo kot *deformabilno telo*. Več o lastnostih togih in deformabilnih teles v Srpčič (2003) ter Stanek in Turk (1998).

Gibanje in deformiranje obravnavanega telesa opišemo z dvema koordinatnima sistemoma (Stanek in Turk, 1998):

- *Mirujoči pravokotni kartezični koordinatni sistem* z osmi x' , y' in z' . Ta koordinatni sistem je prostorski koordinatni sistem in koordinate x' , y' in z' so prostorske koordinate.
- *Gibajoči in deformabilni pravokotni kartezični koordinatni sistem* z osmi x , y in z . Ta koordinatni sistem je telesni ali materialni koordinatni sistem in koordinate x , y in z so telesne ali materialne koordinate. Koordinatni sistem je na telo pričvrščen in se s telesom deformira.

Slika 2.1 predstavlja obravnavano telo v začetni ($t = t_0$) in trenutni legi ($t > t_0$). Prostorski koordinatni sistem je postavljen poljubno, medtem ko materialni koordinatni sistem izberemo tako, da le-ta v začetni legi sovпада s prostorskim koordinatnim sistemom. Tako za začetni trenutek t_0 velja $x = x'$, $y = y'$ in $z = z'$.

Ko spremljamo lego in obliko nekega delca A na površini ali v notranjosti telesa, ki se v nekem trenutku t premakne v točko A' , vidimo, da je materialni koordinatni sistem pravokoten le v začetnem trenutku, kasneje se deformira skupaj s telesom. V poljubnem času ($t > t_0$) se koordinatne osi x , y in z preoblikujejo v prostorske krivulje (niso več premice) x , y in z , ki medseboj niso pravokotne. Položaj točke A' se je v prostorskem koordinatnem sistemu spremenil, medtem ko pa ostaja v materialnem koordinatnem sistemu enak. Enotski in pravokotni vektorji \vec{e}_x , \vec{e}_y in \vec{e}_z se preoblikujejo v vektorje \vec{g}_x , \vec{g}_y in \vec{g}_z , ki niso več enotski in pravokotni. Imajo smeri tangent na krivulje x , y in z . Tako lahko materialne koordinate vzamemo za oznako delca in gibanje ter deformacije telesa



Slika 2.1: Prikaz deformabilnega telesa v začetni in trenutni legi
Figure 2.1: Deformed body in an initial and some arbitrary position

opišemo z **referenčnim opisom** (Stanek in Turk, 1998). Pri referenčnem opisu izberemo za neodvisne spremenljivke materialne koordinate telesa x , y in z ter čas t .

V začetni legi telesa ($t = t_0$) je položaj točke A podan preko prostorskih in materialnih koordinat in velja:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \vec{e}_{x'} & \vec{e}_y &= \vec{e}_{y'} & \vec{e}_z &= \vec{e}_{z'} \\ \vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{P-2.1})$$

Isti delec ima v poljubnem trenutku ($t > t_0$) položaj, ki je s prostorskimi koordinatami podan kot:

$$\vec{r}' = x' \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'} + z' \vec{e}_{z'} = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z \quad (\text{P-2.2})$$

Povezava med položajem delca v začetni (\vec{r}) in trenutni (\vec{r}') legi je podana preko vektorja premika (\vec{u}), kjer velja:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} \quad (\text{P-2.3})$$

Enačba P-2.3 predstavlja izhodiščno enačbo obravnave gibanja in deformiranja nekega telesa. Glede na referenčni opis gibanja in deformiranja telesa, lahko splošno enačbo gibanja telesa zapišemo kot:

$$\vec{r}' = f(x, y, z, t) = \vec{r}'(x, y, z, t) \quad (\text{P-2.4})$$

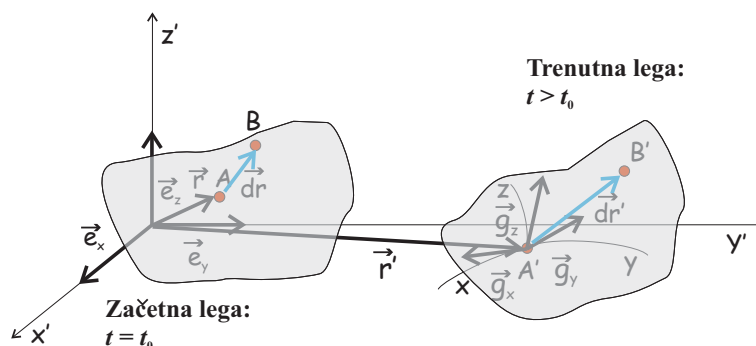
Vse komponente enačbe P-2.3 in enačbe P-2.4 so funkcije štirih argumentov, materialnih koordinat (x, y, z) in časa (t) , vendar je čas v enačbah izpuščen, saj predstavlja le začetno ali neko trenutno stanje. Če predpostavimo za funkcijo v enačbi P-2.4 zveznost, odvedljivost in regularnost, kjer se ohranja zveznost narave telesa (Šrpčič, 2003), potem

imamo deformacije trdnih teles, kjer so vse deformacije plastične in zvezne (Stanek in Turk, 1998).

V geodeziji se za potrebe določevanja deformacij določenega telesa (antropogenega objekta, naravnega objekta, tektonskih plošč. . .) vse morebitne premike točk določa glede na ničelno izmero. V tem primeru poznamo obliko nedeformiranega telesa in premike iščemo s ponovljenimi izmerami in primerjavo glede na ničelno izmero. Tak način opisa deformacij imenujemo **Lagrangev opis**⁸ (Srpčič, 2003).

2.1 Tenzor velikih deformacij

V primeru deformacije telesa se položaj poljubnega delca telesa A , ki je v začetni legi podan z radij vektorjem $\vec{r}(x, y, z)$, spremeni v položaj A' , ki se ga opiše z radij vektorjem $\vec{r}'(x, y, z)$. Slika 2.2 predstavlja položaj delca A in diferencialno območje delca A pred in po deformacijah.



Slika 2.2: Prikaz diferencialnega območja neke točke A v začetni in trenutni legi
 Figure 2.2: Presentation of infinitesimal region of a point A in initial and arbitrary position

Deformacije opišemo s spremembo razdalje delca B' od delca A' , glede na razdaljo med delcema A in B pred deformacijami (Srpčič, 2003). Delec B ima v začetni legi položaj določen z radij vektorjem $\vec{r}(x + dx, y + dy, z + dz)$. V trenutni legi spremeni svoj položaj v $\vec{r}'(x + dx, y + dy, z + dz)$. Razmerje med točkama A in B ter A' in B' lahko zapišemo preko popolnega diferenciala funkcije več spremenljivk. Za poljubno majhen vektor v začetnem

⁸Obstaja tudi t.i. Eulerjev opis, kjer izhajamo iz deformabilnega stanja telesa

in trenutnem stanju velja:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \\ d\vec{r}' &= \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}'}{\partial z} dz = \vec{g}_x dx + \vec{g}_y dy + \vec{g}_z dz \end{aligned} \quad (\text{P-2.5})$$

Glede na obliko enotskih vektorjev iz enačbe P-2.1 lahko drugi del enačbe P-2.5 zapišemo kot:

$$d\vec{r}' = \left(\vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) dx + \left(\vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right) dy + \left(\vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) dz \quad (\text{P-2.6})$$

Enačba P-2.6 je posledica enačbe P-2.3, ki povezuje trenutno stanje (\vec{r}') z začetnim stanjem (\vec{r}) preko vektorja premika (\vec{u}), kjer so bazni vektorji \vec{g}_i , $i = (x, y, z)$ enaki:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \quad (\text{P-2.7})$$

Deformiranje telesa se opiše z razliko skalarnih produktov deformiranih (\vec{g}) in nedeformiranih (\vec{e}) vektorjev (Stanek in Turk, 1998; Srpčič, 2003; Krishnaswamy, 2005) (razliko dolžin pred in po deformacijah). Ker obstajajo trije deformirani ($\vec{g}_x, \vec{g}_y, \vec{g}_z$) in trije nedeformirani vektorji ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), imamo tako $3 \cdot 3 = 9$ različnih možnosti. Tako za poljuben par lahko zapišemo:

$$\vec{g}_i \vec{g}_j - \vec{e}_i \vec{e}_j = \left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \right) \left(\vec{e}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial j} \right) - \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{u}}{\partial j} \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial j} \quad (\text{P-2.8})$$

Če označimo vrednost v enačbi P-2.8 z $2 E_{ij}$ in zapišemo skalarno, potem dobimo:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (\vec{g}_i \vec{g}_j - \vec{e}_i \vec{e}_j) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_x}{\partial i} \frac{\partial u_x}{\partial j} + \frac{\partial u_y}{\partial i} \frac{\partial u_y}{\partial j} + \frac{\partial u_z}{\partial i} \frac{\partial u_z}{\partial j} \right) \end{aligned} \quad (\text{P-2.9})$$

Oznake indeksov (i, j) predstavljajo koordinate (x, y, z). Tako obstaja 9 količin: $E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, E_{xy}, E_{xz}, E_{yx}, E_{yz}, E_{zx}$ in E_{zy} , za katere velja:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ E_{yy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ E_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = E_{yx} \end{aligned} \quad (\text{P-2.10})$$

$$E_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = E_{zx}$$

$$E_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = E_{zy}$$

Elementi, predstavljeni v enačbi P-2.10, predstavljajo 6 neodvisnih elementov tenzorja deformacij. Tako predstavljen tenzor predstavlja tenzor velikih deformacij, saj z njim lahko opišemo poljubne deformacije trdnih teles. Tenzor deformacij je simetričen in ima obliko:

$$E = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.11})$$

Pri obravnavi deformacij si telo predstavimo z modelom, ki ga obravnavamo kot trdno telo, in deformacije lahko predstavimo za vsako točko telesa. Deformacijsko stanje je tako podano s šestimi različnimi količinami, ki jih predstavimo v simetrični kvadratni matriki. Deformacijsko stanje opisuje matematična količina, ki jo določajo trije vektorji (9 skalarnih količin) in jo imenujemo **tenzor 2. reda** (ker je predstavljen s kvadratno matriko). Komponente, predstavljene v enačbah P-2.10, predstavljajo opis deformacij telesa neglede na obliko ali velikost deformacij. Zato tenzor P-2.11 upravičeno imenujemo tenzor velikih deformacij.

2.2 Lastnosti tenzorjev 2. reda

Matematično ali fizikalno količino T imenujemo tenzor reda (ranga) n ($n \geq 0$), če se v poljubnem koordinatnem sistemu K zapiše s 3^n elementi $t_{ijk\dots p}$ (število indeksov i, j, k, \dots, p je enako n in vsi tečejo od 1 do 3) in so neodvisni od premika koordinatnega sistema. Pri linearni ortogonalni transformaciji iz koordinatnega sistema K v koordinatni sistem \bar{K} v obliki $\bar{\chi} = A \cdot \vec{x}$ (A transformacijska matrika, $\det(A) = 1$) se elementi tenzorja $t_{ijk\dots p}$ transformirajo v obliki:

$$\tau_{\alpha\beta\dots\omega} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \cdots \sum_{p=1}^3 a_{\alpha i} \cdot a_{\beta j} \cdots a_{\omega p} \cdot t_{ijk\dots p} \quad (\text{P-2.12})$$

Količino T imenujemo tenzor reda (ranga) n in količine $t_{ijk\dots p}$, ki so skalarji, elemente ali komponente tenzorja (Bronštejn in sod., 1997, Vaniček, 1972).

Tako opisan tenzor se nanaša na $3\mathbb{R}$ prostor. Vsak tenzor se predstavi z matriko, kjer red tenzorja predstavlja dimenzijo matrike. Tenzorji tako opisujejo neko količino (fizikalno,

matematično), ki se s premikom in zasukom koordinatnega sistema ne spreminja. Tenzor 0. reda je skalar in predstavlja skalarno polje v prostoru. Primer takega polja je lahko temperatura v ozračju, gostota snovi in podobno. Ne glede na tip, izhodišče in orientacijo koordinatnega sistema, v katerem opisujemo npr. temperaturo, se le-ta ne spreminja v odvisnosti od koordinatnega sistema. Tenzor 1. reda je stolpična matrika ali vektor in predstavlja neko vektorsko polje v prostoru, kot npr. težnost, hitrost. . . Tudi težnost je neodvisna od izbire koordinatnega sistema. V različnih koordinatnih sistemih ima različne komponente, a smer in velikost vektorja v prostoru ostajata enaki. Transformacija tenzorja 1. reda poteka po enačbi P-2.12 in ima matrično obliko $\bar{\chi} = A \cdot \vec{x}$. Tenzor 2. reda (kot npr. deformacijski tenzor) je predstavljen s kvadratno matriko in se matrično transformira po enačbi:

$$\bar{T} = A \cdot T \cdot A^T \quad (\text{P-2.13})$$

Tako vidimo, da je tudi variančno-kovariančna matrika Σ , ki opisuje stohastične lastnosti skupno porazdeljenih slučajnih spremenljivk, tenzor 2. reda.

Tenzor se s premikom in zasukom koordinatnega sistema ne spremeni oz. se sama količina, ki jo opisuje tenzor, ne spremeni (glej poglavje 2.9.4). Neodvisnost tenzorja od premika se imenuje **translacijska invariantnost**, neodvisnost od zasuka **rotacijska invariantnost**, skupno pa se obe imenujeta **transformacijska invariantnost**. V primeru skalarja, ki je popolnoma neodvisen od koordinatnega sistema, se le-ta imenuje **invariantni tenzor** (Bronštejn in sod., 1997).

V primeru tenzorjev višjega reda se komponente tenzorja z zasukom in premikom koordinatnega sistema spremenijo, ne spremenijo pa se določene funkcije komponent tenzorjev. Te količine imenujemo **invariante tenzorja** (Bronštejn in sod., 1997, Stanek in Turk, 1998, Vaníček, 1972). V primeru tenzorja 2. reda, kot sta deformacijski tenzor ali variančno-kovariančna matrika, poznamo tri invariante tenzorja, ki jih označimo z I_1 , I_2 in I_3 in določajo (Bronštejn in sod., 1997; Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998; Vaníček, 1972):

- I_1 : sled tenzorja $sl(T)$ ostaja nespremenjena in predstavlja **prvo invarianto** tenzorja 2. reda,
- I_2 : vsota poddeterminant diagonalnih členov ostaja nespremenjena in predstavlja **drugo invarianto** tenzorja 2. reda,

- I_3 : determinanta tenzorja $\det(T)$ ostaja nespremenjena in predstavlja **tretjo invariante** tenzorja 2. reda.

2.3 Geometrijski pomen komponent tenzorja velikih deformacij

Geometrijski pomen tenzorja velikih deformacij lahko pokažemo preko treh sprememb, ki se pojavijo v telesu, podvrženemu deformacijam. Te tri količine so **specifična sprememba dolžine**, **sprememba smeri materialnih vlaken** in **sprememba pravega kota** (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998).

2.3.1 Specifična sprememba dolžine materialnih vlaken

Materialno vlakno lahko definiramo kot podmnožico materialnih delcev telesa, ki ležijo na poljubni gladki krivulji. Krivulja poteka skozi obravnavano točko (Srpčič, 2003). Pri obravnavi specifične spremembe dolžine vlaken, ki jo označimo z D_{ii} ($i = x, y, z$), obravnavamo diferencial vektorja $\vec{dr}_i = di \vec{e}_i$, ki se po deformaciji spremeni v vektor $\vec{dr}'_i = di \vec{g}_i$. Količino D_{ii} definiramo kot spremembo dolžine v smeri koordinate i glede na njeno začetno velikost:

$$D_{ii} = \frac{|\vec{dr}'_i| - |\vec{dr}_i|}{|\vec{dr}_i|} = \frac{di g_i - di}{di} = g_i - 1 \quad (\text{P-2.14})$$

Glede na enačbo P-2.9 lahko za velikost vektorja \vec{g}_i zapišemo:

$$g_i = \sqrt{\left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i}\right) \cdot \left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i}\right)} = \sqrt{1 + 2 E_{ii}} \quad (\text{P-2.15})$$

Tako se lahko specifična sprememba dolžin (D_{ii}) predstavi z odgovarjajočo diagonalno komponento (E_{ii}) tenzorja velikih deformacij (E):

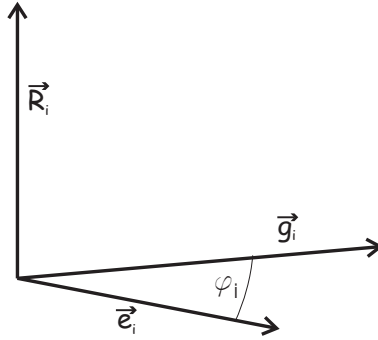
$$D_{ii} = \sqrt{1 + 2 E_{ii}} - 1 \quad \longrightarrow \quad E_{ii} = D_{ii} + \frac{D_{ii}^2}{2} \quad (\text{P-2.16})$$

Enačba P-2.16 predstavlja povezavo med diagonalno komponento tenzorja velikih deformacij in odgovarjajočo specifično spremembo dolžine materialnih vlaken. Tako lahko rečemo, da predstavljajo diagonalne komponente tenzorja velikih deformacij tudi eno od ustreznih meril specifičnih sprememb dolžine materialnih vlaken (Stanek in Turk, 1998). Po posameznih komponentah lahko enačbo P-2.16 zapišemo kot:

$$E_{xx} = D_{xx} + \frac{D_{xx}^2}{2} \quad E_{yy} = D_{yy} + \frac{D_{yy}^2}{2} \quad E_{zz} = D_{zz} + \frac{D_{zz}^2}{2} \quad (\text{P-2.17})$$

2.3.2 Sprememba smeri materialnih vlaken

Spremembo smeri materialnih vlaken, ki imajo v začetni legi smer enotskega vektorja \vec{e}_i ($i = x, y, z$), merimo s kotom φ_i med vektorjema \vec{e}_i in \vec{g}_i . Slika 2.3 predstavlja obravnavo spremembe smeri materialnih vlaken.



Slika 2.3: Prikaz obravnave spremembe smeri materialnih vlaken

Figure 2.3: Treatment of a change of direction of material fibre

Velikost kota φ_i se lahko določi preko vektorskega produkta enotskega vektorja \vec{e}_i in vektorja \vec{g}_i , saj velja:

$$\sin \varphi_i = \frac{|\vec{e}_i \times \vec{g}_i|}{|\vec{e}_i| |\vec{g}_i|} = \frac{|\vec{e}_i \times \vec{g}_i|}{|\vec{g}_i|} \quad (\text{P-2.18})$$

Kot φ_i predstavlja kot zasuka enotskega vektorja \vec{e}_i v \vec{g}_i , ko je telo podvrženo deformacijam. Smer zasuka se določi preko vektorskega produkta, ki nastopa v števcu enačbe P-2.18, ki se ga označi z \vec{R}_i in ima obliko:

$$\vec{R}_i = \vec{e}_i \times \vec{g}_i = \vec{e}_i \times \left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial i} \right) \quad (\text{P-2.19})$$

Glede na lastnosti vektorskega produkta in obliko vektorjev v enačbi P-2.19, lahko za vse tri spremembe smeri materialnih vlaken φ_x , φ_y in φ_z zapišemo:

$$\begin{aligned} \vec{R}_x &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \vec{e}_z \\ \vec{R}_y &= -\frac{\partial u_x}{\partial y} \vec{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial y} \vec{e}_x \\ \vec{R}_z &= -\frac{\partial u_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \vec{e}_y \end{aligned} \quad (\text{P-2.20})$$

Velikost spremembe smeri materialnih vlaken se lahko, glede na količine iz enačbe P-2.20 in enačbo P-2.16, zapiše kot:

$$R_i = |\vec{e}_i \times \vec{g}_i| \longrightarrow \sin \varphi_i = \frac{R_i}{g_i} = \frac{R_i}{1 + D_{ii}}, \quad g_i = |\vec{g}_i|, \quad \varphi_i \in [0, \pi] \quad (\text{P-2.21})$$

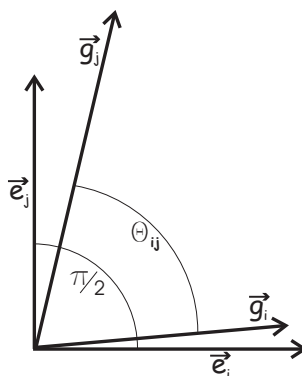
Iz enačbe P-2.21 je razvidno, da mera za spremembo smeri vlaken R_i ni neposredno mera za zasuk materialnega vlakna v obravnavani točki, a se sam zasuk lahko po tej enačbi izračuna (Srpčič, 2003).

2.3.3 Sprememba pravega kota materialnih vlaken

Spremembo pravega kota med materialnimi vlakni obravnavamo kot odstopanje kota med dvema vektorjema \vec{g}_i in \vec{g}_j , ($i, j = x, y, z$) od pravega kota, ki ga predstavljata odgovarjajoča nedeformirana enotska vektorja \vec{e}_i in \vec{e}_j . Spremembo pravega kota med materialnimi vlakni označimo z D_{ij} in definiramo kot:

$$D_{ij} = \frac{\pi}{2} - \theta_{ij} \quad (\text{P-2.22})$$

Enačbo P-2.22 grafično predstavlja spodnja slika 2.4.



Slika 2.4: Prikaz obravnave spremembe pravega kota med materialnimi vlakni

Figure 2.4: Treatment of rectangle alteration of material fibres

Spremembo pravega kota med materialnimi vlakni definiramo preko skalarnega produkta deformiranih vektorjev \vec{g}_i in \vec{g}_j , saj po enačbi P-2.9 velja:

$$\vec{g}_i \vec{g}_j = g_i g_j \cos \theta_{ij} = 2 E_{ij} \longrightarrow \cos \theta_{ij} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - D_{ij} \right) = \sin D_{ij} \quad (\text{P-2.23})$$

Ob upoštevanju lastnosti iz enačb P-2.14 in P-2.23 se lahko zapiše:

$$\begin{aligned} \sin D_{ij} &= \frac{2 E_{ij}}{(1 + D_{ii})(1 + D_{jj})} \\ 2 E_{ij} &= \sin D_{ij} + D_{ii} \sin D_{ij} + D_{jj} \sin D_{ij} + D_{ii} D_{jj} \sin D_{ij} \end{aligned} \quad (\text{P-2.24})$$

Na ta način lahko rečemo, da izvendiagonalni členi tenzorja velikih deformacij predstavljajo mero za spremembo pravega kota med materialnimi vlakni (Stanek in Turk, 1998).

Enačba P-2.24 se lahko za vse koordinate predstavi kot:

$$\begin{aligned} 2E_{xy} &= \sin D_{xy} + D_{xx} \sin D_{xy} + D_{yy} \sin D_{xy} + D_{xx} D_{yy} \sin D_{xy} \\ 2E_{xz} &= \sin D_{xz} + D_{xx} \sin D_{xz} + D_{zz} \sin D_{xz} + D_{xx} D_{zz} \sin D_{xz} \\ 2E_{yz} &= \sin D_{yz} + D_{yy} \sin D_{yz} + D_{zz} \sin D_{yz} + D_{yy} D_{zz} \sin D_{yz} \end{aligned} \quad (\text{P-2.25})$$

2.4 Tenzor majhnih deformacij

Tenzor velikih deformacij predstavlja poljubno obliko deformacij za neko telo. Vse predhodno zapisane enačbe veljajo za poljubno velike premike točk pri deformiranju. Kadar pa so deformacije majhne glede na telo oz. so vrednosti parcialnih odvodov majhne glede na enoto, torej gre za majhne raztezke, majhne zasuke in majhne spremembe pravih kotov, lahko enačbe P-2.10 zapišemo enostavneje, če zanemarimo produkte ali kvadrate parcialnih odvodov (Grant, 1990; Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998):

$$\begin{aligned} E_{xx} &\approx \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} & E_{xy} = E_{yx} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \\ E_{yy} &\approx \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} & E_{xz} = E_{zx} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \\ E_{zz} &\approx \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} & E_{yz} = E_{zy} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \end{aligned} \quad (\text{P-2.26})$$

Prav tako kot tenzor velikih deformacij, je tudi tenzor malih deformacij simetričen in ga določa 6 neodvisnih elementov, ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ in $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$. Tenzor majhnih deformacij označimo z ε in zapišemo kot:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.27})$$

Enako posplošitev glede produktov in kvadratov parcialnih odvodov izvedemo za vse tri geometrijske lastnosti komponent tenzorja deformacij in ugotovimo:

$$\begin{aligned} D_{ii} &\approx E_{ii} \approx \varepsilon_{ii} \\ D_{ij} &\approx 2 E_{ij} \approx 2 \varepsilon_{ij} \\ \varphi_i &\approx R_i \end{aligned} \quad (\text{P-2.28})$$

Specifične spremembe dolžin po koordinatnih smereh lahko tako obravnavamo neposredno preko diagonalnih elementov tenzorja ε , spremembe pravih kotov med koordinatnimi osmi

lahko predstavimo z dvakratno vrednostjo izvendiagonalnih členov tenzorja ε , velikost vektorja R_i pa predstavlja fizikalen zasuk materialnega vlakna v obravnavani točki (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998; Krishnaswamy, 2005).

2.5 Tenzor majhnih zasukov

Deformacije nekega telesa predstavljajo premik vsakega delca znotraj ali na površini tega telesa v skladu z lastnostmi te deformacije (v odvisnosti od funkcije \vec{u}). Ta premik se lahko dobi preko integracije diferenciala premika $d\vec{u}$ po poljubni krivulji med začetno točko T_0 in trenutno točko T (Stanek in Turk, 1998):

$$\int_{T_0}^T d\vec{u} = \vec{u}(T) - \vec{u}(T_0)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{u}(T) = \vec{u}(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz \right) \quad (\text{P-2.29})$$

Skalarno se enačbo P-2.29 zapiše s tremi členi in velja:

$$u_x(T) = u_x(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right)$$

$$u_y(T) = u_y(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \right) \quad (\text{P-2.30})$$

$$u_z(T) = u_z(T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right)$$

Parcialne odvode, ki nastopajo v enačbah P-2.30, lahko zapišemo kot vsoto dveh členov, kjer velja:

$$\frac{\partial u_j}{\partial i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} - \frac{\partial u_i}{\partial j} \right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (i, j = x, y, z) \quad (\text{P-2.31})$$

V enačbi P-2.31 predstavljajo količine ε_{ij} komponente tenzorja malih deformacij, medtem ko predstavljajo količine ω_{ij} :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial i} - \frac{\partial u_i}{\partial j} \right) = -\omega_{ji} \quad (\text{P-2.32})$$

komponente tenzorja majhnih zasukov ω (Grant, 1990, Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998), ki je antisimetričen. Iz enačbe P-2.32 je razvidno, da so diagonalni členi ω_{ii} enaki nič, tako da ima tenzor obliko:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{xz} & \omega_{yz} & 0 \end{bmatrix} = -\omega^T \quad (\text{P-2.33})$$

Vidno je, da vsebuje tenzor majhnih zasukov samo tri različne količine, ω_{xy} , ω_{xz} in ω_{yz} , ki pa se jih enostavneje zapiše kot:

$$\omega_{xy} = \omega_z \quad \omega_{zx} = \omega_y \quad \omega_{yz} = \omega_x \quad (\text{P-2.34})$$

Prvi del enačbe P-2.34 predstavlja zasuk okoli osi z , drugi del zasuk okoli osi y in zadnji del zasuk okoli osi x . Tenzor zasukov ima tako obliko:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} = -\omega^T \quad (\text{P-2.35})$$

Tenzor malih zasukov se lažje predstavi preko **vektorja zasukov** $\vec{\omega}$, ki ima obliko:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z \quad (\text{P-2.36})$$

2.6 Kompatibilnostni pogoji

Iz oblike tenzorja deformacij (tako velikih kot malih) je razvidno, da za 3R prostor potrebujemo 6 različnih količin, ki jih dobimo samo preko treh komponent vektorja premikov $\vec{u}(x, y, z)$ (enačbe P-2.10). Iz tega dejstva lahko sklepamo, da vse komponente tenzorja deformacij niso med seboj neodvisne. Določitev treh komponent premikov iz šestih komponent tenzorja deformacij ni enolična. Enoličnost določenih komponent premikov dobimo z veznimi enačbami v obliki:

$$\oint_{\vartheta} d\vec{\omega} = \vec{0} \quad \oint_{\vartheta} d\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{P-2.37})$$

Deformacije morajo zadoščati zgornjima dvema vektorskima pogojema, predstavljenima v enačbi P-2.37, kar pomeni enolično določitev zasukov in premikov. Enačbi P-2.37 predstavljata t.i. **kompatibilnostna pogoja** ali **pogoja geometrijske skladnosti deformacij** (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998). Krivuljna integrala II. vrste, predstavljena v enačbi P-2.37, predstavljata potreben in zadosten pogoj za enoličnost deformacij, torej za enoličnost določitve premikov in zasukov po neki poljubni zaključeni poti od točke T_0 nazaj do iste točke T_0 znotraj ali na površini območja telesa. Pogoja iz enačb P-2.37 predstavljata konzervativnost vektorskega polja premikov $\vec{u}(x, y, z)$ znotraj telesa in ϑ poljubno zaključeno zanko po tem območju.

2.7 Glavne normalne in glavne strižne deformacije

Deformiranje nekega telesa se dogaja neodvisno od koordinatnega sistema, v katerem te deformacije opišemo. Vendar pa je opis deformacij odvisen od koordinatnega sistema, zato

so tudi elementi tenzorja deformacij različni v različnih koordinatnih sistemih. Za neodvisno predstavitev deformacij se tako uporabljajo **glavne normalne** in **glavne strižne deformacije**. Glavne normalne deformacije predstavljajo ekstremne vrednosti normalnih deformacij, medtem ko glavne strižne deformacije predstavljajo ekstremne vrednosti strižnih deformacij.

2.7.1 Glavne normalne deformacije

Kadar obravnavamo nek poljuben tenzor deformacij ε , je le-ta v splošnem predstavljen s polno matriko. Če sedaj koordinatni sistem zasukamo tako, da se predstavi tenzor z diagonalno matriko (z oznako ε'), potem so nove koordinatne osi ravno smeri glavnih normalnih deformacij in vrednosti deformacij v novem tenzorju so vrednosti glavnih normalnih deformacij. Glavne normalne deformacije ε_G se poišče preko lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tenzorja deformacij z determinanto (Bronštejn in sod., 1997; Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998):

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_G) & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_G) & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_G) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{P-2.38})$$

Rešitev sistema je določena z rešitvijo karakterističnega polinoma, ki se ga razvije preko determinante iz enačbe P-2.38. Ta karakteristični polinom je tretje stopnje, ima tri realne rešitve in se ga da predstaviti z invariantami tenzorja deformacij. Rešitev so lastne vrednosti ε_{11} , ε_{22} in ε_{33} tenzorja in predstavljajo vrednosti glavnih normalnih deformacij. Smeri glavnih normalnih deformacij so določene s smermi lastnih vektorjev, ki se jih pridobi preko lastnih vrednosti. Glavne normalne deformacije in njihove pripadajoče smeri predstavljajo tri medseboj pravokotne smeri, kjer normalne deformacije matematično dosežejo ekstremne vrednosti. Pripadajoče strižne deformacije so enake nič. Če bi si izbrali koordinatni sistem, ki sovpada s smermi glavnih normalnih deformacij, potem bi bil tenzor deformacij predstavljen z diagonalno matriko oblike:

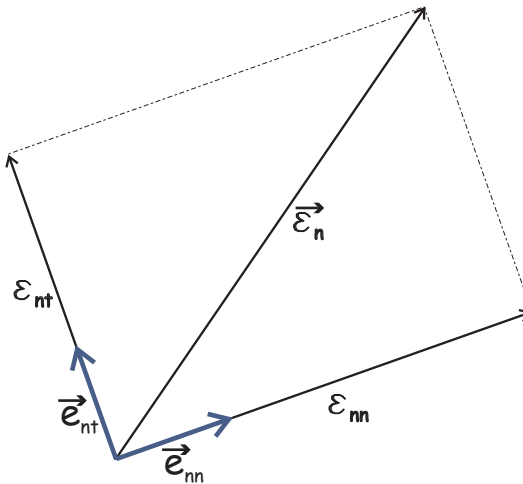
$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.39})$$

V splošnem pridobimo tri različne vrednosti glavnih normalnih deformacij, ki imajo smeri pravokotne ena na drugo. Kadar sta dve vrednosti enaki in tretja različna, potem ima tretja različna vrednost smer pravokotno na obe ostali in sta prvi dve poljubni smeri

v ravnini. Kadar sta dve glavni normalni deformaciji enaki, tvorita krožnico v ravnini deformacije, zato sta smeri poljubni, le da sta si medseboj pravokotni. Kadar pa so vse tri dobljene vrednosti glavnih normalnih deformacij enake, potem so smeri povsem poljubne, saj so tako deformacije lahko predstavljene s sfero (Srpčič, 2003; Stanek in Turk 1998).

2.7.2 Glavne strižne deformacije

Glavne strižne deformacije predstavljajo ekstremne vrednosti strižnih deformacij v določeni točki telesa. Pri iskanju glavnih strižnih deformacij si pomagamo z že določenimi smermi glavnih normalnih deformacij, kjer deformacije $\vec{\epsilon}_n$ v poljubni smeri \vec{e}_n izrazimo s smermi in velikostmi glavnih normalnih deformacij (Srpčič, 2003). Ta vektor deformacij lahko razstavimo na dve smeri, kjer ena predstavlja normalno ($\vec{\epsilon}_{nn}$) in druga strižno komponento ($\vec{\epsilon}_{nt}$) (slika 2.5).



Slika 2.5: Razcep poljubnega vektorja deformacij na normalno in strižno komponento

Figure 2.5: Splitting an arbitrary strain vector on normal and shear component

Strižno komponento vektorja deformacij $\vec{\epsilon}_{nt}$ lahko izrazimo kot razliko vektorja deformacij $\vec{\epsilon}_n$ in normalne komponente vektorja deformacij $\vec{\epsilon}_{nn}$ v poljubni smeri v prostoru. Končni cilj nam je poiskati tri komponente vektorja $\vec{\epsilon}_{nt}$, in sicer e_{ntx} , e_{nty} in e_{ntz} ter velikost največje strižne deformacije ϵ_{nt} . Zopet pridobimo tri vrednosti glavnih strižnih deformacij, ki imajo velikosti (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998):

$$\epsilon_{It} = \pm \frac{1}{2} (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{III} &= \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_{III} &= \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\end{aligned}\tag{P-2.40}$$

V enačbi P-2.40 so glavne normalne deformacije ε_{ii} označene po zaporedju velikosti, saj velja $\varepsilon_{11} \geq \varepsilon_{22} \geq \varepsilon_{33}$.

Vektorji v smereh ekstremnih strižnih deformacij so enaki (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998):

$$\begin{aligned}\vec{t}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \\ \vec{t}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_3 - \vec{e}_1) \\ \vec{t}_{III} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\end{aligned}\tag{P-2.41}$$

Iz oblike vektorjev v enačbi P-2.41 se preko skalarnih produktov posameznih vektorjev vidi, da le-ti med seboj niso pravokotni, ampak oklepajo kot 120° , saj velja (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998):

$$\vec{t}_{II} \cdot \vec{t}_{III} = \vec{t}_{III} \cdot \vec{t}_I = \vec{t}_I \cdot \vec{t}_{II} = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ\tag{P-2.42}$$

Za razliko od glavnih normalnih deformacij, kjer so odgovarjajoče strižne deformacije enake nič za vse pare smeri, pa pri glavnih strižnih deformacijah to ne drži. Normalne deformacije, ki nastopajo v ravninah glavnih strižnih deformacij, niso enake nič in imajo vrednosti (Srpčič, 2003; Stanek in Turk, 1998):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{In} &= \pm \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \varepsilon_{II} &= \pm \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_{III} &= \pm \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\end{aligned}\tag{P-2.43}$$

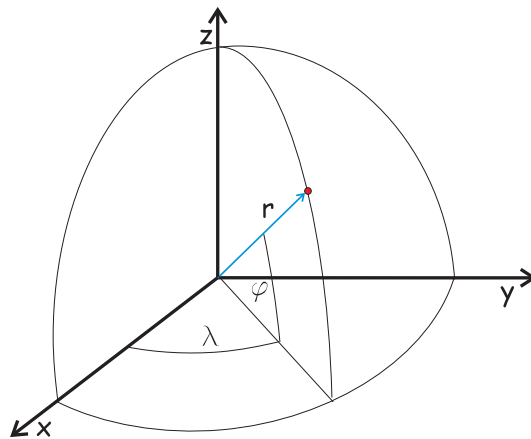
2.8 Opis deformacij s sfernimi koordinatami

Deformacije se običajno opiše v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu na način opisan v prejšnjih poglavjih. Pri določenih problemih pa je priročnejši in bolj nazoren opis deformacij v kakem krivočrtnem koordinatnem sistemu, kot sta sferni ali cilindrični. V sfernem ortogonalnem koordinatnem sistemu imamo tri koordinate (r, φ, λ) in so s

kartezičnimi koordinatami (x, y, z) povezane na način:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\z &= r \sin \varphi\end{aligned}\tag{P-2.44}$$

Razmerje med kartezičnim in sfernim koordinatnim sistemom prikazuje slika 2.6.



Slika 2.6: Prikaz kartezičnih in sfernih koordinat

Figure 2.6: Cartesian and spherical coordinate system

Položaj vsake točke je tako določen preko krajevnega vektorja $\vec{p}(x, y, z)$, ki se ga izrazi preko koordinatnih komponent $x(r, \varphi, \lambda)$, $y(r, \varphi, \lambda)$ in $z(r, \varphi, \lambda)$ iz enačbe P-2.44. Ortonormirana baza se lahko sestavi za vsako točko deformabilnega telesa in se jo pridobi preko parcialnih odvodov krajevnega radij vektorja $\vec{p}(x, y, z)$ po vseh treh krivočrtnih koordinatah, kjer se le-te tudi normira:

$$\begin{aligned}\vec{g}_r &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} \rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{g}_r}{|\vec{g}_r|} = \cos \varphi \cos \lambda \vec{e}_x + \cos \varphi \sin \lambda \vec{e}_y + \sin \varphi \vec{e}_z \\ \vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \rightarrow \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{g}_\varphi}{|\vec{g}_\varphi|} = -\sin \varphi \cos \lambda \vec{e}_x - \sin \varphi \sin \lambda \vec{e}_y + \cos \varphi \vec{e}_z \\ \vec{g}_\lambda &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial \lambda} \rightarrow \vec{e}_\lambda = \frac{\vec{g}_\lambda}{|\vec{g}_\lambda|} = -\cos \varphi \sin \lambda \vec{e}_x + \cos \varphi \cos \lambda \vec{e}_y\end{aligned}\tag{P-2.45}$$

Transformacijsko matriko R , pretvorbe koordinat med pravokotnimi kartezičnimi in krivočrtnimi sfernimi koordinatami, dobimo preko skalarnih produktov posameznih enotskih vektorjev v obeh sistemih. Matrika transformacije iz sfernega v kartezični koordinatni

sistem je tako določena kot:

$$R = [e_{i\alpha}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.46})$$

S transformacijsko matriko R lahko sedaj pretvorimo vsak vektor iz sfernih koordinat v kartezične in obratno. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_\lambda \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} u_r \cos \varphi \cos \lambda - u_\varphi \sin \varphi \cos \lambda - u_\lambda \cos \varphi \sin \lambda \\ u_r \cos \varphi \sin \lambda - u_\varphi \sin \varphi \sin \lambda + u_\lambda \cos \varphi \cos \lambda \\ u_r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{P-2.47})$$

Tenzorji se transformirajo po enačbi P-2.12. Tenzor deformacij v sfernih koordinatah ε_S ima obliko:

$$\varepsilon_S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{r\lambda} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{\varphi\lambda} \\ \varepsilon_{r\lambda} & \varepsilon_{\varphi\lambda} & \varepsilon_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.48})$$

Tenzor se pretvori po enačbi P-2.12 preko transformacijske matrike v enačbi P-2.46. Na ta način pridobimo zapis komponent tenzorja deformacij ε_{ij} , ($i, j = x, y, z$) z elementi tenzorja, zapisanega v sfernih koordinatah, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ($\alpha, \beta = r, \varphi, \lambda$) iz enačbe P-2.48. Za določitev oblike elementov tenzorja deformacij v sfernih koordinatah potrebujemo še zapis transformacije parcialnih odvodov, ki nastopajo na levi strani enačb P-2.26. Parcialni odvodi se transformirajo s pomočjo Hamiltonovega operatorja (∇) (Bronštejn in sod., 1997; Srpčič, 2003) v obliki:

$$\frac{\partial}{\partial i} = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial i} \quad (i = x, y, z; \alpha = r, \varphi, \lambda) \quad (\text{P-2.49})$$

Transformacija parcialnih odvodov iz enačbe P-2.49 poteka simbolno preko inverzije transponirane Jakobijeve matrike koordinatne transformacije iz enačb P-2.44. Torej velja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi \cos \lambda & -\frac{1}{r} \sin \varphi \sin \lambda & \frac{1}{r} \cos \varphi \\ -\frac{1}{r \cos \varphi} \sin \lambda & \frac{1}{r \cos \varphi} \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.50})$$

Komponente tenzorja deformacij v kartezičnih koordinatah lahko sedaj izrazimo preko transformacije tenzorja iz enačbe P-2.12 in enačbe P-2.48. Po drugi strani pa lahko vsako

komponento tenzorja deformacij v kartezičnih koordinatah predstavimo s transformiranimi parcialnimi odvodi iz enačbe P-2.50 in transformiranimi premiki iz enačbe P-2.47. Komponente tenzorja deformacij v sfernih koordinatah se določi iz teh dveh enakosti in imajo vrednosti (Srpčič, 2003; Surfaces and Contact Mechanics URL):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
 \varepsilon_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_\varphi}{r} \tan \varphi + \frac{u_r}{r} \\
 \varepsilon_{\varphi\lambda} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \varphi} - u_\lambda \tan \varphi \right) + \frac{1}{2r \cos \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \lambda} \\
 \varepsilon_{r\lambda} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} - \frac{u_\lambda}{r} \right) \\
 \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{P-2.51}$$

Premikanja tektonskih plošč na velikem območju ali na celi Zemlji lahko obravnavamo samo sferično, torej da se zemeljsko površje ne deformira v višinski smeri. Tako vse premike in deformacije obravnavamo samo na nivoju površine krogle, na neki oddaljenosti R_Z od središča Zemlje. V takem primeru so elementi tenzorja deformacij, kjer nastopa vrednost r kot spremenljivka, enaki nič ($\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\lambda} = 0$). Ostanejo nam trije elementi v obliki:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R_Z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
 \varepsilon_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{R_Z \cos \varphi} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_\varphi}{R_Z} \tan \varphi \\
 \varepsilon_{\varphi\lambda} &= \frac{1}{2R_Z} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \varphi} - u_\lambda \tan \varphi \right) + \frac{1}{2R_Z \cos \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \lambda}
 \end{aligned} \tag{L-2.52}$$

2.9 Ravninsko deformacijsko stanje

V nekaterih primerih pa nas zanimajo deformacije v samo dveh razsežnostih. Take deformacije se pojavljajo pri objektih, kjer je ena razsežnosti veliko manjša od ostalih dveh. Kadar obravnavamo premike na Zemeljskem površju na lokalnem območju, predpostavimo, da so premiki v smeri težiščnice ali normale minimalni ali zanemarljivi (Grant, 1990). Tako določujemo samo deformacijsko stanje v ravnini. Vektor premikov \vec{u} ima tako

obliko:

$$\vec{u}(x, y) = u_x(x, y) \vec{e}_x + u_y(x, y) \vec{e}_y + c \vec{e}_z \quad (\text{P-2.53})$$

Iz enačbe P-2.53 je razvidno, da je premik posamezne točke odvisen le od horizontalnih koordinat in nič od višine točke. Tako deformacijsko stanje se imenuje **ravninsko deformacijsko stanje**. Glede na enačbe P-2.26 lahko definiramo ravninski deformacijski tenzor, ki je velikosti 2×2 in ima obliko:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{P-2.54})$$

Na enak način lahko definiramo tenzor majhnih zasukov, kjer, glede na enačbe P-2.31, ostane le še en člen, in sicer $\omega_{xy} = \omega_z$, ki ima obliko:

$$\omega_{xy} = \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{P-2.55})$$

Opis deformacij določenega telesa pa ne poteka samo s komponentami tenzorja deformacij, ampak lahko tudi s pomočjo izpeljanih parametrov, kot so (Frank, 1966; Grant, 1990; Grenerczy, 2000; Krishnaswamy, 2005):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} && \text{čista strižna deformacija,} \\ \gamma_2 &= 2 \varepsilon_{xy} && \text{inženirska strižna deformacija,} \\ s_{2D} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) && \text{raztezanje (sprememba ploskovnega merila).} \end{aligned}$$

Nadalje se lahko izpelje še dodatne količine, ki predstavljajo ekstremne vrednosti deformacij in pripadajoče smeri (Frank, 1966; Grant, 1990; Grenerczy, 2000):

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (= 2\gamma_I) && \text{totalna strižna deformacija,} \\ \varepsilon_{G1} &= s_{2D} + \frac{\gamma}{2} && \text{maksimalna normalna deformacija,} \\ \varepsilon_{G2} &= s_{2D} - \frac{\gamma}{2} && \text{minimalna normalna deformacija,} \\ \tan 2\alpha_{G1} &= \frac{\gamma_2}{-\gamma_1} && \text{azimut smeri } \varepsilon_{G1}, \\ \tan 2\alpha_{G2} &= \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} && \text{azimut smeri } \varepsilon_{G2}, \\ \tan 2\alpha_{G\gamma} &= \frac{-\gamma_1}{\gamma_2} && \text{azimut smeri } \gamma. \end{aligned}$$

2.9.1 Glavne normalne deformacije

Glavne normalne deformacije se določijo na enak način kot v primeru prostorskih deformacij, torej preko ničelne determinante matrike iz enačbe P-2.38, le da je tu matrika

velikosti 2×2 oblike:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_G) & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_G) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{P-2.56})$$

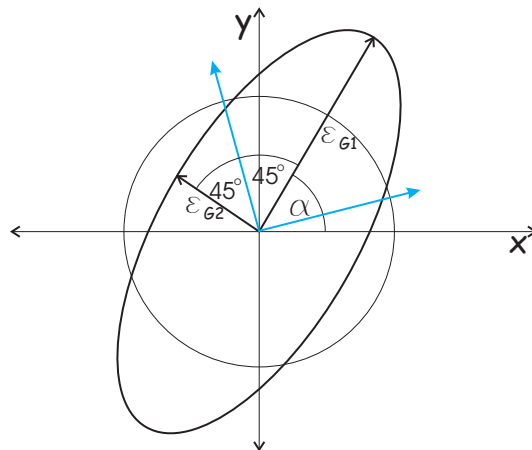
Lastni vrednosti zgornje determinante imata obliko:

$$\varepsilon_{G1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (\text{P-2.57})$$

Smeri glavnih normalnih deformacij sta si pravokotni ena na drugo, kjer smer večje izmed glavnih normalnih deformacij dobimo po enačbi (izračunan kot predstavlja matematični kot):

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \quad (\text{P-2.58})$$

Slika 2.7 prikazuje deformiranje neskončno majhne krožnice v elipso, ki ima za polosi velikosti glavnih normalnih deformacij. Pripadajoče strižne deformacije glavnima normalnima deformacijama so enake nič, $\varepsilon_{12} = 0$.



Slika 2.7: Deformiranje diferencialne enotske krožnice v elipso

Figure 2.7: A unit differential circle deforming into ellipse

2.9.2 Glavne strižne deformacije

Glavne strižne deformacije nastopajo pri kotu:

$$\tan 2\alpha = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2 \varepsilon_{xy}} \quad (\text{P-2.59})$$

Kot glavnih strižnih deformacij je za 45° različen od smeri glavnih normalnih deformacij. Na sliki 2.7 sta z modro smerjo prikazani smeri glavnih strižnih deformacij.

Vrednosti obeh ekstremnih strižnih deformacij sta določeni preko kota, podanega v enačbi P-2.59, in imata obliki:

$$\gamma_{I,II} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (\text{P-2.60})$$

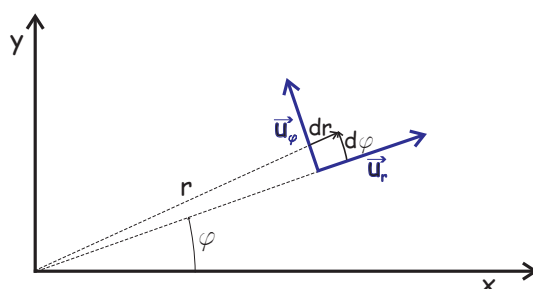
Tudi v primeru ravninskega deformacijskega stanja, vrednosti normalnih deformacij v smeri glavnih strižnih deformacij nista enaki nič, ampak imata vrednost:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \quad (\text{P-2.61})$$

Normalne deformacije v smeri ekstremnih strižnih deformacij bi bile enake nič samo ob pogoju $\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy}$.

2.9.3 Ravninsko deformacijsko stanje v polarnih koordinatah

Obnavo deformacij v polarnem koordinatnem sistemu prikazuje slika 2.8.



Slika 2.8: Ravninske deformacije v polarnih koordinatah
Figure 2.8: Horizontal strain described with polar coordinates

Položaj neke točke se v polarnih koordinatah (r, φ) predstavi kot:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad (\text{P-2.62})$$

Komponente tenzorja malih deformacij v kartezičnem koordinatnem sistemu se v polarnih koordinatah izrazijo kot (po pravih transformacij tenzorjev 2. reda iz enačbe P-2.12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{rr} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - 2 \varepsilon_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{rr} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + 2 \varepsilon_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_{xy} &= (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon_{r\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (\text{P-2.63})$$

Količine levih strani enačb P-2.63 se da enako kot za primer sfernih koordinat (poglavje 2.8) predstaviti preko transformiranih parcialnih odvodov po enačbi P-2.49 in transformiranih vektorjev premikov. Za vrednost deformacije ε_{xx} v smeri osi x tako lahko zapišemo:

$$\varepsilon_{xx} = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi) \quad (\text{P-2.64})$$

Če sedaj izenačimo oba izraza za ε_{xx} iz enačbe P-2.64 in enačbe P-2.63 ter enačbo preuredimo, pridemo do končnega rezultata:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \cos^2 \varphi + \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \sin^2 \varphi + \\ \left(-2 \varepsilon_{r\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (\text{P-2.65})$$

Iz enačbe P-2.65 je razvidno, da je enakost enačbe za poljubne vrednosti kota φ dosežena le v primeru, ko so vsi izrazi znotraj oklepajev enaki nič. Tako lahko sedaj izrazimo elemente tenzorja malih deformacij v polarnih koordinatah kot:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{P-2.66})$$

2.9.4 Ravninsko deformacijsko stanje in 4-parametrična transformacija

V ravnini je podobnostna transformacija določena preko štirih transformacijskih parametrov; premika (t_x, t_y) , zasuka (ω) in merila (s) . Povezava med predstavitvijo položaja neke točke v obeh koordinatnih sistemih je tako dana z:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.67})$$

Deformacijski tenzor ε' se nanaša na koordinatni sistem s koordinatami x' in y' in je določen z:

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} \end{bmatrix} \quad (\text{P-2.68})$$

Glede na obliko transformacije iz enačbe P-2.67 nas zanima oblika deformacijskega tenzorja ε , ki se nanaša na koordinate x in y . Izpeljavo izvedemo povsem enako kot za primer polarnih koordinat oz. sfernih koordinat. Zopet določimo obliko enotskih vektorjev, ki

v obeh koordinatnih sistemih določata ortonormirano bazo in transformiramo tenzor ε' v bazo x in y . S pomočjo Hamiltonovega operatorja transformiramo parcialne odvode in premike. Glede na enačbo P-2.65, dobimo za primer 4-parametrične podobnostne transformacije enačbo:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{s} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cos^2 \omega + \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{s} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \sin^2 \omega - \\ \left(2 \varepsilon_{xy} - \frac{1}{s} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) \sin \omega \cos \omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{L-2.69})$$

Izraz bo zopet v splošnem enak nič, če bodo vsi elementi znotraj oklepajev enaki nič. Tako dobimo končne enačbe za komponente deformacijskega tenzorja ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{s} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{s} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2s} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{L-2.70})$$

Iz oblike komponent tenzorja ε je razvidno, da je tenzor resnično invarianten na zasuk in premik koordinatnega sistema. Po drugi strani pa se sprememba merila neposredno kaže v komponentah transformiranega tenzorja. Vpliv merila je obratno sorazmeren, saj če se koordinatni sistem poveča, se tenzor deformacij zmanjša. Merilo koordinatnega sistema je neposredno vezano na razdalje v koordinatnem sistemu. Tako je velikost tenzorja deformacij odvisna od velikosti območja pri istih deformacijah. Razmerja med komponentami ostajajo ista.

3 GEODETSKI DATUM IN GEODETSKA OPAZOVANJA

V zgodovini geodezije so se v večini primerov, zaradi obsežnih računskih obdelav, opazovanja obdelovala po postopkih pogojne izravnave. Pogojna izravnava poteka po metodi najmanjših kvadratov (MNK), kjer nastopajo v pogojnih enačbah le opazovanja in konstante. Pogojne enačbe so sestavljali na podlagi geometrijskih lastnosti modela, v katerem so bila izvedena opazovanja, kot npr. zapiranje figur v geodetski mreži. Iskane količine, npr. koordinate točk v geodetski mreži, so se določile naknadno na podlagi izravnanih opazovanj. Z razvojem računalniške tehnologije nismo več omejeni z računskimi sposobnostmi, zato je v ospredje prišla posredna izravnava po MNK. V enačbah popravkov posredne izravnave tako nastopajo opazovanja (ena enačba eno opazovanje), konstante in dodatno še neznanke. Te neznanke so različnih vrst, v primeru geodetske mreže največkrat koordinate točk, ki se nanašajo na nek vzpostavljen koordinatni sistem (lokalni geodetski, lokalni astronomski, geodetski, naravni, nebesni . . .), opazovanja pa so v splošnem neodvisna od privzetega koordinatnega sistema. Ocena koordinat je tako nemogoča, če nimamo datumskih informacij, parametrov, ki določajo datum geodetske mreže.

3.1 Geodetski datum

Beseda datum izhaja iz angleške besede *datum = (množina data) navedeno dejstvo, podatek* in predstavlja niz datumskih parametrov. Ti parametri definirajo povezavo med poljubnim terestričnim pravokotnim kartezičnim koordinatnim sistemom (osi xyz), s pripadajočim referenčnim elipsoidom s krivočrtnimi geodetskimi koordinatami ($\varphi\lambda h$), in globalnim terestričnim pravokotnim kartezičnim koordinatnim sistemom (osi XYZ) oz. telesom Zemlje (Heiskanen in Moritz, 1996; Pelzer, 1980; Stopar, 1995; Torge, 1991; Vaníček in Krakiwsky, 1986). Datumski parametri morajo enolično določati povezavo med elipsoidom in globalnim terestričnim koordinatnim sistemom in določajo velikost, obliko, položaj in orientacijo elipsoida (Pelzer, 1980; Stopar, 1995). Referenčno ploskev elipsoida določata dva parametra (a - velika polos, b - mala polos) in jo imenujemo **datum** (Stopar, 1995). Za datum se lahko uporabi tudi kakšna druga ploskev, kot npr. ravnina konformne kartografske projekcije (Vaníček in Krakiwsky, 1986).

V splošnem je poleg velikosti in oblike elipsoida potrebno zagotoviti dodatno še 6 parametrov, za enolično povezavo med elipsoidom in globalnim terestričnim koordinatnim

sistemom (telesom Zemlje), in sicer tri parametre premika (t_x, t_y, t_z) in tri parametre zasuka ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$). Če je izhodišče elipsoida poljubno glede na težišče Zemlje in je elipsoid orientiran tako, da se na nekem območju najbolj prilega geoidu, potem govorimo o astrogeodetskem datumu (Heiskanen in Moritz, 1996; Stopar, 1995). Če središče elipsoida sovpada s težiščem Zemlje, pa govorimo o absolutnem datumu (Stopar, 1995).

Datumske parametre lahko dobimo iz niza določenih parametrov, v odvisnosti od željene realizacije datuma in uporabljenega tipa koordinatnega sistema. Vklon elipsoida glede na globalni terestrični koordinatni sistem je lahko zagotovljen s položajem izhodiščne točke ($\varphi_0, \lambda_0, h_0$) ali (X_0, Y_0, Z_0). Dodatni parametri so lahko odklon navpičnice in geoidna ondulacija v točki (ξ_0, η_0, N_0) z vsaj enim opazovanim azimutom do poljubne točke, kjer morata za te parametre veljati razširjeni Laplacejevi enačbi (Stopar, 1995). Dodatno so lahko ostali trije parametri parametre zasuka osi elipsoida ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) (Pelzer, 1980). Z določeno obliko in velikostjo elipsoida hkrati določimo tudi merilo koordinatnega sistema. Pri transformaciji dveh kartezičnih koordinatnih sistemov, je merilo dodaten parameter.

3.1.1 Geodetski datum terestrično opazovane geodetske mreže

Geodetski datum terestrično opazovane geodetske mreže je določen z danimi količinami v mreži. V vsaki mreži je možno enostavno določiti defekt datuma mreže, ki predstavlja število potrebnih danih količin za enolično določitev koordinat nove točke na podlagi terestričnih opazovanj. V splošnem naj bi bil geodetski datum določen tako, da je število danih količin enako defektu datuma (Stopar, 1995), datum naj ne bi bil predoločen in ne poddoločen. Z določenim datumom nimamo napetosti v mreži, kar pomeni, da z danimi količinami ne posegamo v geometrijo mreže.

3R geodetske mreže

Terestrična opazovanja, s katerimi želimo določiti relativni položaj nove točke glede na dane točke v prostorski 3R mreži, so:

- Φ, Λ - astronomska dolžina in širina,
- ΔH - ortometrična višinska razlika,
- α, β - astronomski azimut, opazovana smer,
- z - zenitna razdalja,

- d - prostorska dolžina.

Transformacija med dvema pravokotnima kartezičnima prostorskima koordinatnima sistemoma je podana s 7-parametrično podobnostno transformacijo v obliki (Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + s R_3(\omega_z)R_2(\omega_y)R_1(\omega_x) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{P-3.1})$$

Za enolično transformacijo je tako potrebnih 7 parametrov:

- t_x, t_y, t_z - trije parametri premika,
- $\omega_z, \omega_y, \omega_x$ - trije parametri zasuka (R_i - kardanska rotacijska matrika),
- s - parameter merila.

V splošnem ne poznamo transformacijskih parametrov, tako da je za enoličen vklop mreže v koordinatni sistem potrebno zagotoviti 7 danih količin. Premik lahko zagotovimo z eno dano točko (x_0, y_0, z_0) , zasuk okoli osi z z enim opazovanim astronomskim azimutom ali smerjo, zasuka okoli osi x in y pa z dvema opazovanima zenitnima razdaljama. Merilo zagotovimo z eno opazovano dolžino, v primeru, da ne opazujemo dolžin, pa privzamemo eno razdaljo med dvema poljubnima točkama kot dano. Tako definiran datum seveda ni nujen za vsak primer, dane količine so lahko povsem poljubne, le da geodetski datum ni predoločen ali poddoločen.

2R geodetske mreže

Horizontalni položaj se lahko nanaša na površino elipsoida ali na ravnino kartografske projekcije. Opazovanja, ki se izvajajo v ravnini, so opazovane smeri (β), astronomski azimuti (α) in opazovane horizontalne dolžine (d). Transformacija je podana s štirimi parametri in je podana z enačbo P-2.67.

Geodetski datum ravninske mreže zagotovimo s štirimi danimi količinami, eno dano točko, eno opazovano smerjo ali azimutom in eno opazovano dolžino.

1R geodetske mreže

V primeru višinske mreže imamo opazovane ortometrične višinske razlike (ΔH) in dva datumska parametra (premik t_H in merilo s). V praksi imamo z višino ene dane točke

geodetski datum določen, saj merjene višinske razlike vsebujejo informacije o merilu.

3.1.2 Geodetski datum mreže GNSS

V primeru obdelave opazovanj GNSS datum ni tako enostavno določljiv kot v primeru terestrično opazovane geodetske mreže. Geodetski datum mreže GNSS je določen na dveh nivojih. Prvi nivo predstavlja služba IGS⁹ (IGS URL) s svojimi 10 analiznimi centri, ki obdelujejo podatke permanentnih postaj vsega sveta v aktualnem ITRF (ITRF URL). V obdelavi se ocenjuje položaj permanentnih postaj, orbite satelitov, parametre rotacije Zemlje, parametre atmosfere. . . Postopki obdelave niso standardizirani in se spreminjajo od enega analiznega centa do drugega. Geodetski datum je v večini primerov predoločen, saj se v obdelavo vzame več danih točk, kolikor jih je za enolično določitev neznank nujno potrebno.

Drugi nivo pa predstavlja uporabnika, ki privzame določene položaje permanentnih postaj in satelitov GNSS s strani IGS kot dane. Na ta način je datum določen preko položajev permanentnih postaj in satelitov. V izračunu položajev novih točk lokalne mreže se dane količine upoštevajo kot psevdopazovanja (Brockmann, 1996), da se prepreči vpliv danih količin na geometrijo mreže.

3.2 Datumske informacije opazovanih količin v ravnini projekcije

V ravnini kartografske projekcije je geodetski datum določen s štirimi parametri, kar se v praksi zagotovi z danimi količinami. Za prikaz datumskih informacij v različnih opazovanjih si pomagamo z enačbo 4-parametrične transformacije v ravnini projekcije:

$$\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_y \\ t_x \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad (\text{P-3.2})$$

Datumske informacije v določenem tipu opazovanj nam predstavljajo odvisnost opazovane količine od parametrov transformacije (premik (t_y, t_x) , zasuk (ω) in merilo (s)). V ravnini lahko opazujemo naslednje količine:

- ν - smerni kot (oz. astronomski azimut na površini elipsoida),
- β, θ - smer, kot,

⁹angl. International GNSS Service

- d - horizontalna dolžina,
- $\Delta \vec{r}^G$ - vektor GNSS,
- $r^{\vec{G}}$ - položaj, dobljen z opazovanji GNSS.

Prisotnost datuma v določenem tipu opazovanja se kaže z razmerjem predstavitve opazovanja v sistemu $y'x'$ in sistemu yx . V primeru, da je modeliranje opazovanja neodvisno od 4-parametrične transformacije iz enačbe P-3.2, govorimo o neodvisnosti opazovanja od datuma oz. opazovanje ne vsebuje nobene datumske informacije. Enačbo P-3.2 lahko skalarno zapišemo po komponentah:

$$\begin{aligned} y' &= t_y + s \cos \omega y - s \sin \omega x \\ x' &= t_x + s \sin \omega y + s \cos \omega x \end{aligned} \quad (\text{L-3.3})$$

Za nadaljnje izračune označimo z $\Delta y_{ij} = y_j - y_i$, $\Delta x_{ij} = x_j - x_i$ (koordinatni sistem yx), kjer sta i in j dve točki v ravnini in enako za koordinatni sistem $y'x'$, kjer velja:

$$\begin{aligned} \Delta y'_{ij} &= y'_j - y'_i = s \cos \omega \Delta y_{ij} - s \sin \omega \Delta x_{ij} \\ \Delta x'_{ij} &= x'_j - x'_i = s \sin \omega \Delta y_{ij} + s \cos \omega \Delta x_{ij} \end{aligned} \quad (\text{L-3.4})$$

3.2.1 Smerni koti

Smerni kot ν'_{ij} v koordinatnem sistemu $y'x'$ (ν_{ij} v koordinatnem sistemu yx) s točke i na točko j predstavlja kot med smerjo proti kartografskemu severu in smerjo proti točki j . Smerni kot ima smer urinega kazalca in vrednost v mejah $[0^\circ, 360^\circ)$. Smerni kot v geodetskem koordinatnem sistemu $y'x'$ in sistemu yx modeliramo kot (s pomočjo enačbe L-3.4):

$$\begin{aligned} \nu_{ij} &= \arctan \left(\frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}} \right) \\ \nu'_{ij} &= \arctan \left(\frac{\Delta y'_{ij}}{\Delta x'_{ij}} \right) = \arctan \left(\frac{\cos \omega \Delta y_{ij} - \sin \omega \Delta x_{ij}}{\sin \omega \Delta y_{ij} + \cos \omega \Delta x_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (\text{L-3.5})$$

Če v oklepaju na desni strani spodnje enačbe v enačbi L-3.5 tako imenovalc kot števec delimo s $\cos \omega \Delta x$, dobimo izraz, ki ga lahko glede na lastnosti inverznih trigonometričnih funkcij (Bronštejn in sod., 1997) poenostavimo kot:

$$\nu'_{ij} = \arctan \left(\frac{\cos \omega \Delta y_{ij} - \sin \omega \Delta x_{ij}}{\sin \omega \Delta y_{ij} + \cos \omega \Delta x_{ij}} \right) = \arctan \left(\frac{\frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}} - \tan \omega}{1 + \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}} \cdot \tan \omega} \right) = \nu_{ij} - \omega \quad (\text{L-3.6})$$

Enostavno se pokaže, da je enakost smernega kota ($\nu'_{ij} = \nu_{ij}$) samo v primeru ene izmed spodnjih enakosti:

$$\omega = 0 \quad \wedge \quad \Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 = 0 \quad (\text{L-3.7})$$

Smerni kot je neodvisen od datuma, ko ni zasuka med koordinatnima sistemoma, ali ko je razdalja med točkama i in j enaka nič. Tako lahko vidimo, da opazovan smerni kot (oz. azimut na površini elipsoida) vsebuje informacije o orientaciji mreže in ni datumsko neodvisna količina. Če imamo v mreži opazovan en smerni kot, imamo definiran zasuk mreže in se defekt datuma mreže zmanjša za 1.

3.2.2 Opazovane smeri in koti

Opazovana smer β'_{ij} (oz. β_{ij}) s točke i na točko j predstavlja postavitve horizontalnega kroga teodolita v času izmere. Smer β'_{ij} (β_{ij}) se vedno nanaša na ničelno smer $\beta'_{i0} = 0$ (β_{i0} - smer proti ničli horizontalnega kroga), ki je v poljubni smeri v ravnini. Opazovani kot θ'_{ijk} (θ_{ijk}) na točki i med smerema proti točki j in k predstavlja razliko smeri β'_{ik} in β'_{ij} (β_{ik} in β_{ij}).

Opazovano smer v ravnini kartografske projekcije modeliramo (koordinatna sistema $y'x'$ in yx) preko smernega kota ν'_{ij} (ν_{ij}) in orientacijske neznanke o'_i (o_i), ki je vezana na stojišče i :

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \nu_{ij} - o_i \\ \beta'_{ij} &= \nu'_{ij} - o'_i \end{aligned} \quad (\text{P-3.8})$$

Glede na lastnosti smernega kota v odvisnosti od spremembe datuma v enačbi L-3.6 in ob dejstvu, da je orientacijska neznanke dopolnitev smernega kota ničelne smeri do polnega kota, lahko za opazovano smer zapišemo:

$$\beta'_{ij} = \nu'_{ij} - o'_i = \nu_{ij} - \omega - o_i + \omega = \beta_{ij} \quad (\text{L-3.9})$$

Opazovana smer tako nima nobene datumске informacije in je neodvisna od koordinatnega sistema. V enačbi P-3.8 se spremeni le vrednost orientacijske neznanke, ki pa se jo s sestavo kotov odstrani iz enačb popravkov.

Opazovan kot θ'_{ijk} (θ_{ijk}) modeliramo kot razliko dveh smeri β'_{ik} in β'_{ij} (β_{ik} in β_{ij}), kar pa se glede na enačbo P-3.8 izkaže, da je merjen kot θ'_{ijk} (θ_{ijk}) dejansko razlika dveh smernih

kotov¹⁰ ν'_{ik} in ν'_{ij} (ν_{ik} in ν_{ij}):

$$\theta'_{ijk} = \nu'_{ik} - \nu'_{ij} = \arctan\left(\frac{\Delta y'_{ik}}{\Delta x'_{ik}}\right) - \arctan\left(\frac{\Delta y'_{ij}}{\Delta x'_{ij}}\right) \quad (\text{P-3.10})$$

Glede na lastnost inverznih trigonometričnih funkcij (Bronštejn in sod., 1997), se zgornja razlika lahko zapiše kot:

$$\theta'_{ijk} = \arctan\left(\frac{\frac{\Delta y'_{ik}}{\Delta x'_{ik}} - \frac{\Delta y'_{ij}}{\Delta x'_{ij}}}{1 + \frac{\Delta y'_{ik}}{\Delta x'_{ik}} \cdot \frac{\Delta y'_{ij}}{\Delta x'_{ij}}}\right) \quad (\text{L-3.11})$$

Če zgornji izraz v enačbi L-3.11 poenostavimo in razlike koordinat v koordinatnem sistemu $y'x'$ predstavimo kot koordinatne razlike v koordinatnem sistemu yx (enačba L-3.4), dobimo enakost:

$$\theta'_{ijk} = \arctan\left(\frac{\frac{\Delta y'_{ik}}{\Delta x'_{ik}} - \frac{\Delta y'_{ij}}{\Delta x'_{ij}}}{1 + \frac{\Delta y'_{ik}}{\Delta x'_{ik}} \cdot \frac{\Delta y'_{ij}}{\Delta x'_{ij}}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}} - \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}}}{1 + \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}} \cdot \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}}}\right) = \theta_{ijk} \quad (\text{L-3.12})$$

Opazovan kot je povsem neodvisen od koordinatnega sistema, v katerem je modeliran in tako popolnoma neodvisen od datuma mreže. Drugače povedano, opazovane smeri in koti nimajo nobene datumske informacije, zato je defekt datuma v triangulacijski mreži enak štiri.

3.2.3 Opazovane horizontalne dolžine

Opazovana horizontalna dolžina d'_{ij} (d_{ij}) predstavlja evklidsko razdaljo med točko i in točko j v ravnini projekcije. Evklidska razdalja se v ravnini projekcije predstavi s Pitagorovim izrekom:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sqrt{\Delta y_{ij}^2 + \Delta x_{ij}^2} \\ d'_{ij} &= \sqrt{\Delta y'_{ij}{}^2 + \Delta x'_{ij}{}^2} \\ &= s\sqrt{(\cos\omega \Delta y_{ij} - \sin\omega \Delta x_{ij})^2 + (\sin\omega \Delta y_{ij} + \cos\omega \Delta x_{ij})^2} \end{aligned} \quad (\text{L-3.13})$$

S preureditvijo desne strani spodnje enačbe v enačbi L-3.13, ob upoštevanju lastnosti trigonometričnih funkcij \sin in \cos (Bronštejn in sod., 1997), tako lahko ugotovimo:

$$d'_{ij} = s d_{ij} \quad (\text{L-3.14})$$

¹⁰Z razliko dveh smeri se odpravi orientacijska neznanka, ki je skupna za vse smeri na stojišču.

Enačba L-3.14 nam pove, da dolžina vsebuje informacijo o merilu oz. z vključitvijo opazovanih dolžin v geodetsko mrežo definiramo merilo mreže in tako zmanjšamo defekt datuma mreže za 1. Dejansko je merilo mreže definirano z modulacijsko valovno dolžino merskega valovanja, ki ga razdaljemer uporabi za izračun geometrične razdalje med dvema točkama.

3.2.4 Vektorji GNSS

Z opazovanji GNSS vzpostavimo prostorsko mrežo tako, da je vsak izravnani vektor dejansko prostorski vektor, lahko pa se ga s primerno transformacijo pretvori v ravnino projekcije. Vsak vektor GNSS $\Delta \vec{r}'_{ij}{}^G$ ($\Delta \vec{r}_{ij}{}^G$) med točkama i in j v ravnini lahko zapišemo kot vektor koordinatnih razlik:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}_{ij}{}^G &= \begin{bmatrix} \Delta y_{ij} \\ \Delta x_{ij} \end{bmatrix} \\ \Delta \vec{r}'_{ij}{}^G &= \begin{bmatrix} \Delta y'_{ij} \\ \Delta x'_{ij} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos \omega \Delta y_{ij} - \sin \omega \Delta x_{ij} \\ \sin \omega \Delta y_{ij} + \cos \omega \Delta x_{ij} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{L-3.15})$$

Iz enačbe L-3.15 neposredno izhajata občutljivost opazovanih vektorjev GNSS v ravnini na merilo in zasuk mreže.

3.2.5 Absolutni položaji točk GNSS

Položaj stojiščne točke i je podan z vektorjem $r_i^{\vec{G}}$ ($r_i^{\vec{G}}$), ki predstavlja radij vektor opazovane točke. Za položaj točke velja:

$$\begin{aligned} r_i^{\vec{G}} &= \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix} \\ r_i^{\vec{G}} &= \begin{bmatrix} y'_i \\ x'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_y \\ t_x \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{L-3.16})$$

Razliko obeh vektorjev $\Delta \vec{r}_i = r_i^{\vec{G}} - r_i^{\vec{G}}$ (s prenosom vektorja premika $[t_y \ t_x]^T$ na levo stran) lahko zapišemo:

$$\Delta \vec{r}_i = \begin{bmatrix} y'_i - y_i - t_y \\ x'_i - x_i - t_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cos \omega - 1 & -s \sin \omega \\ s \sin \omega & s \cos \omega - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix} \quad (\text{L-3.17})$$

Če izračunamo dolžino vektorja $\Delta \vec{r}_i$ in to dolžino izrazimo z desno stranjo enačbe L-3.17, dobimo:

$$|\Delta \vec{r}_i| = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)(s^2 - 2s \cos \omega + 1)} \quad (\text{L-3.18})$$

V primeru, da med obema koordinatnima sistemoma ($y'x'$ in yx) ni spremembe merila ($s = 0$) in ni zasuka ($\omega = 0$), potem absolutni položaj vsebuje informacijo o premiku mreže, saj je dolžina iz enačbe L-3.18 tako kar dolžina vektorja $[t_y \ t_x]^T$ in razlika koordinat v obeh sistemih enaka vektorju premika. V splošnem pa ni zagotovljena vzporednost in enakost meril med koordinatnimi sistemi, tako da absolutno določeni položaj točke zmanjša defekt datuma mreže za 2, vendar ni neposredne povezave med vektorjem premika in izmerjenim položajem točke. V primeru dveh podanih položajev točk GNSS v geodetski mreži, pa imamo geodetski datum popolnoma definiran.

Pogosto se v praksi opazovan položaj ene točke v mreži v obdelavi izkoristi za določitev položaja mreže (npr. terestrično opazovane mreže) glede na koordinatni sistem, ostale parametre pa je potrebno določiti preko drugih opazovanih (dolžina, smerni kot, vektor GNSS) ali danih količin (dodatno dana točka).

3.2.6 Opazovanja in geodetski datum - povzetek

Preglednica 3.1 prikazuje povzetek podpoglavij 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 in 3.2.5. Razvidno je, da sama terestrična opazovanja ne zagotavljajo datuma in je vedno potrebno definirati vsaj 2 datumska parametra. V preteklosti se je tako opazovalo tudi astronomske koordinate točk v mreži za lociranje mreže v ravnini projekcije (na površini elipsoida). V primeru satelitskih opazovanj pa le-ta vsebujejo vse datumske informacije.

Preglednica 3.1: Geodetska opazovanja v ravnini in pripadajoče datumske informacije opazovanj

Table 3.1: Geodetic observations and datum information of observations in horizontal plane

	t_x	t_x	ω	s
ν	-	-	+	-
β, θ	-	-	-	-
d	-	-	-	+
$\Delta \vec{r}_{ij}^G$	-	-	+	+
\vec{r}_i^G	+	+	-	-

3.3 Zagotovitev geodetskega datuma v geodetski mreži

V postopku določevanja položajev točk v geodetski mreži na podlagi terestričnih opazovanj se nam defekt datuma kaže v singularnosti sistema normalnih enačb v postopku posredne izravnave po MNK (Brockmann, 1996; Pelzer, 1980; Pelzer, 1985; Zhong, 1997). Problem datuma se lahko pojavi v primerih, ko vključujemo opazovanja, ki so bolj natančna kot položaji danih točk v mreži (Stopar, 1995), ko sploh nimamo podatka o danih točkah ali imamo samo približne položaje točk v mreži. V takih primerih je primerneje vse točke v mreži obravnavati kot nove in zagotoviti datum na drugačen način.

3.3.1 Določitev datuma z zunanjimi opazovanji

Zunanja opazovanja so običajno opazovanja, ki omogočajo določitev položaja v globalnem terestričnem koordinatnem sistemu, torej glede na telo Zemljo in so astronomska ali satelitska opazovanja. Določitev datuma z zunanjimi opazovanji je bilo za različne tipe mrež napisano v poglavju 3.1.1. Za razliko od zunanjih opazovanj pa lahko z notranjimi opazovanji določimo le relativne položaje točk v mreži. Datumske informacije notranjih opazovanj za ravninsko mrežo so bile predstajene v poglavju 3.2, kjer je pokazano, da določena opazovanja vsebujejo datumske informacije. Geodetski datum so v preteklosti največkrat določevali z zunanjimi opazovanji, kot npr. astrogeodetski datum, ki je povsem določen iz zunanjih opazovanj. Slabost tako določenega datuma je v tem, da so lahko zunanja opazovanja draga in velikokrat nenatančna.

3.3.2 Določitev datuma z minimalnim številom vezi

Druga možnost, ki jo imamo, je, da med neznane količine uvedemo določene vezi, ki jih morajo neznanke izpolnjevati. Datumske parametre lahko tako parametriziramo kot funkcijo približnih koordinat točk v mreži (Vaníček in Krakiwsky, 1986). Število veznih enačb je enako defektu datuma, saj želimo geodetski datum določiti tako, da z njim ne posegamo v notranjo geometrijo mreže. Vezi, ki jih sestavimo, so lahko absolutne ali relativne. Defekt geodetskega datuma odstranimo z modeliranjem datumskih parametrov ali opazovanj z veznimi enačbami. Premik mreže odstranimo tako, da določimo eno izmed točk kot dano, kar uresničimo z vezjo, da morajo biti popravki te točke enaki nič. Zasuk mreže lahko odstanimo z vezjo, da se določena smer (opazovana ali ne) po izravnavi ne sme spremeniti. V primeru, da ne opazujemo dolžin, merilo zagotovimo tako, da nastavimo vez, da se določena razdalja med dvema točkama po izravnavi ne sme spremeniti.

3.3.3 Določitev datuma z notranjimi vezi - prosta mreža

V določenih primerih ne moremo zagotoviti stabilnosti nobene točke, tako da ne moremo privzeti nobene točke kot dane. Enako lahko rečemo za določeno smer in dolžino. Pri določitvi datuma z notranjimi vezmi se nanašamo na neko namišljeno točko, neko namišljeno smer in neko namišljeno dolžino. Če povežemo približne koordinate in izravnane koordinate točk s 4-parametrično transformacijo (Brockmann, 1996; Pelzer, 1980), tako postavimo tri pogoje, ki morajo veljati za ocenjene popravke:

- težišče mreže po izravnavi se ne sme spremeniti (definiramo položaj mreže),
- mreža se po izravnavi ne sme zasukati (definiramo zasuk mreže),
- merilo mreže se po izravnavi ne sme spremeniti (definiramo merilo mreže).

Mreža, obdelana z naštetimi tremi vezmi, se imenuje prosta mreža (Brockmann, 1996; Stopar, 1995; Pelzer, 1980; Pelzer, 1985). V prosti mreži nimamo problema z danimi količinami, saj vse koordinate privzamemo kot nove, zagotoviti moramo le dobre približne vrednosti neznank (posledica linearizacije). V primeru opazovanih dolžin je merilo določeno, zato v obdelavi upoštevamo le pogoja o težišču in zasuku mreže. Rezultate proste mreže lahko transformiramo na dane točke s S-transformacijo¹¹ (Pelzer, 1985; Zhong, 1997). Rezultat proste mreže je numerično enak obdelavi z uporabo Moore-Penrose psevdoinverzije, kar dejansko določa minimalno vrednost druge norme vektorja popravkov neznank (Pelzer, 1980; Pelzer, 1985; Vaníček in Krakiwsky, 1986).

3.3.4 Določitev datuma s psevdopazovanji

Naslednja možnost določitve datuma je uvedba t.i. psevdopazovanj. Psevdopazovanja predstavljajo približne vrednosti neznank (koordinat točk mreže), ki jim pripišemo stohastične lastnosti (Brockmann, 1996; Vaníček in Krakiwsky, 1986). Psevdopazovanja predstavljajo absolutne ali relativne vezi med neznankami (poglavje 3.3.2), razlika je le v tem, da vezi predstavljajo enačbe popravkov, ki se nanašajo na variančno-kovariančno matriko psevdopazovanj. Vrednosti neznank ali funkcije med neznankami, ki jih v izravnavi predstavimo kot opazovanja, lahko določimo na podlagi približnih vrednosti neznank, katere moramo poznati v obdelavi, ali na podlagi predhodno izvedene izravnave, ki je potekala na podlagi istega matematičnega modela z drugimi opazovanji (Vaníček in Krakiwsky, 1986). V primeru terestrične geodetske mreže, lahko geodetski datum

¹¹angl. "Similarity" transformacija oz. podobnostna transformacija

vzpostavimo, če izvedemo izmero GNSS na določenem številu točk mreže (na vsaj dveh točkah). Koordinate teh točk v obdelavi terestričnih opazovanj vzamemo, s pripadajočimi standardnimi odkloni, kot psevdopazovanja.

4 DOLOČEVANJE DEFORMACIJ IZ OPAZOVANIH KOLIČIN

V poglavju 2 je prikazan način izpeljave obravnave deformacij telesa, ki zaradi različnih razlogov skozi čas spreminja svojo obliko. Pri definiranju deformacijskega tenzorja in njegovih komponent, sta podani dve predpostavki, na podlagi katerih so deformacije določene. Prva predpostavka je obstoj in poznavanje tako prostorskega ($x'y'z'$) kot tudi materialnega (xyz) koordinatnega sistema. Druga predpostavka se nanaša na poznavanje vektorja premika vsake točke telesa, ki se izraža v odvisnosti od položaja točke; torej gre za heterogene deformacije (Grant, 1990).

V geodeziji določujemo koordinate točk geodetske mreže na podlagi izvedenih opazovanja med posameznimi točkami. Koordinate se nanašajo na nek koordinatni sistem, ki je v času meritev dostopen in definiran. Opazovanja definirajo notranjo geometrijo mreže, medtem ko je vklop v mrežo mogoč le na podlagi poznavanja geodetskega datuma mreže (glej poglavje 3). S ponovljenimi opazovanji v različnih terminskih izmerah lahko na enak način kot v prvi terminski izmeri določimo koordinate točk v isti mreži. V poglavju 3 je bilo prikazano, da določena opazovanja definirajo določene datumske parametre. Datum je v praksi v dveh različnih terminskih izmerah enak le v primeru enake geometrije mreže, enake izmere (tip in število opazovanj), enakih inštrumentih, enakih atmosferskih pogojih, enakem postopku obdelave, enakih vrednostih danih količin. . . Zagotovitev enakosti datuma je tako zahtevna (skoraj nemogoča) naloga (Xu in sod., 2000a; Xu in sod., 2000b). V geodetski praksi prva predpostavka torej redko kdaj drži.

Vektorsko polje premikov na obravnavanem območju (geodetski mreži) pridobimo z različno položajev (koordinat), določenih v dveh različnih terminskih izmerah. Vektorsko polje tako ni zvezna, odvedljiva in regularna funkcija (poglavje 2), ampak diskreten niz vektorjev, podan na točkah mreže. Tako tudi druga predpostavka v geodetski praksi ni uresničena. Vektorsko polje in željene lastnosti le-tega dobimo z raznimi načini interpolacije. Največkrat se za določena območja predpostavi homogenost deformacij (Grant, 1990), kjer so komponente deformacijskega tenzorja in tenzorja majhnih zasukov konstante na tem območju.

V tem poglavju bodo prikazani načini določevanja deformacij iz opazovanih količin. Poglavje

bo opisovalo vpliv nepoznavanja druge predpostavke v geodetski praksi in kako preko različnih tipov opazovanj pridemo do željenih rezultatov. Vpliv spremembe datuma bo predstavljen kasneje.

4.1 Princip homogenih deformacij

Pri homogenih deformacijah na nekem območju predpostavimo, da so deformacije in zasuki tega območja konstantni ($\varepsilon_{ij} = konst$, $\omega_i = konst$, $(i, j = x, y, z)$). Vektor premikov $\vec{u}(x, y, z)$ je pri konstantnih deformacijah zvezen, odvedljiv in regularen, zato obstaja totalni diferencial funkcije $\vec{u}(x, y, z)$ in ima obliko:

$$d\vec{u} = \nabla \vec{u} d\vec{r} \quad (\text{P-4.1})$$

Enačba P-4.1 ima po komponentah obliko:

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\ du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\ du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (\text{P-4.2})$$

Z integracijo enačb P-4.2 na levi strani dobimo $\int du_i = u_i - u_{i0}$, pri desnih straneh pa upoštevamo, da so deformacije konstantne, tako da se parcialni odvodi lahko predstavijo kot vsota (razlika) ε_{ij} in ω_i (enačba P-2.31) s konstantnimi vrednostmi in integriramo po odgovarjajočih spremenljivkah. Tako lahko premik predstavimo kot:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x0} + \varepsilon_{xx} x + (\varepsilon_{xy} + \omega_z) y + (\varepsilon_{xz} - \omega_y) z \\ u_y &= u_{y0} + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) x + \varepsilon_{yy} y + (\varepsilon_{yz} + \omega_x) z \\ u_z &= u_{z0} + (\varepsilon_{xz} + \omega_y) x + (\varepsilon_{yz} - \omega_x) y + \varepsilon_{zz} z \end{aligned} \quad (\text{P-4.3})$$

Če pri zgornjih enačbah definiramo $u_i = i' - i$ in enačbo predstavimo matrično, lahko zapišemo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \\ u_{z0} \end{bmatrix} + (\varepsilon + \omega + \mathbf{I}_{3 \times 3}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{L-4.4})$$

Oblika enačbe L-4.4 je podobna enačbi P-3.1, ki opisuje 7-parametrično transformacijo v prostoru med dvema koordinatnima sistemoma ($\mathbf{I}_{3 \times 3}$ je enotska matrika). Razlika se nahaja v tenzorju deformacij; z enačbo L-4.4 ocenjujemo tudi deformacije telesa, ne samo

premika, zasuka in merila (merilo je zastopano v diagonalnih komponentah ε). Pri homogenih deformacijah telesa enačba L-4.4 opisuje postopek afine transformacije (Grant, 1990; Tsenkov in Gospodinov, 2002). Pri afini transformaciji se poleg spremembe merila, premika in zasuka ocenjuje tudi stopnjo strižnosti (spremembo pravega kota, glej poglavje 2.3.3) med koordinatnimi osmi.

4.2 Določevanje deformacij iz merjenih kotov znotraj trikotnika

V primeru triangulacijske mreže imamo merjene samo smeri, iz katerih lahko sestavimo kote na posameznih stojiščih. Ker merjene smeri in koti nimajo nobene informacije o datumu mreže, so ocenjene koordinate točk triangulacijske mreže (na podlagi merjenih smeri ali kotov) popolnoma odvisne od danih količin. Določitev vektorjev premikov je tako lahko obremenjeno z napačnim datumom (datum lahko definira nestabilna točka), kar ima lahko za posledico napačno določene komponente tenzorja deformacij. Druga težava se pojavlja pri velikih mrežah, saj izmera cele mreže lahko traja veliko časa in so tako deformacije na začetku meritev manjše kot na koncu, na drugi strani mreže (Frank, 1966). V izogib podobnim težavam je bila razvita metoda določevanja parametrov deformacij iz ponovljenih kotnih meritev.

V triangulacijski mreži lahko zaradi neodvisnosti opazovanj od datuma, predpostavimo, da ni zasuka in premika mreže (za homogene deformacije) ter da ni spremembe merila mreže. Vektor premika $\vec{u}(x, y)$ je glede na enačbe P-4.2 v ravnini enak:

$$\vec{u}(x, y) = (\varepsilon_{xx} x + \varepsilon_{xy} y) \vec{e}_x + (\varepsilon_{xy} x + \varepsilon_{yy} y) \vec{e}_y \quad (\text{L-4.5})$$

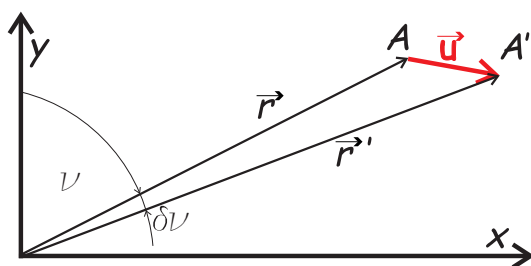
Poljubna točka spremeni lego le zaradi deformacij, prav tako pa se radij vektorju te točke spremeni tudi smerni kot za $\delta\nu$. Za spremembo smernega kota velja:

$$\begin{aligned} |(\vec{r} + \vec{u}) \times \vec{r}| &= |\vec{r} + \vec{u}| |\vec{r}| \sin \delta\nu \\ (\vec{r} + \vec{u}) \cdot \vec{r} &= |\vec{r} + \vec{u}| |\vec{r}| \cos \delta\nu \end{aligned} \quad \rightarrow \tan \delta\nu = \frac{|\vec{u} \times \vec{r}|}{r^2 + \vec{r} \cdot \vec{u}} \quad (\text{P-4.6})$$

Slika 4.1 prikazuje opisano situacijo.

Če v enačbi P-4.6 za spremembo smernega kota $\delta\nu$ predpostavimo, da so premiki \vec{u} točke A v A' v primerjavi z vektorjem \vec{r} majhni, potem je tudi sprememba smernega kota majhna in lahko enačbo zapišemo kot:

$$\tan \delta\nu \approx \delta\nu = \frac{xy(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xy}(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2} =$$



Slika 4.1: Vektor premika v ravnini in sprememba smernega kota med vektorjem točke v začetnem in vektorjem točke v končnem položaju

Figure 4.1: Horizontal displacement vector and alteration of azimuth between a vector in initial and final position

$$= \lambda_1 \lambda_2 (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xy} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \quad (\text{L-4.7})$$

V enačbi L-4.7 imata vrednosti količin λ_1 in λ_2 obliko:

$$\lambda_1 = \sin \nu = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \lambda_2 = \cos \nu = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Če označimo še vrednosti parcialnih odvodov premika po komponentah z:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}, \\ \gamma_2 &= 2 \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (\text{P-4.8})$$

lahko sedaj zapišemo končno enačbo za opis spremembe smernega kota v odvisnosti od parcialnih odvodov premika po komponentah. Ta ima obliko:

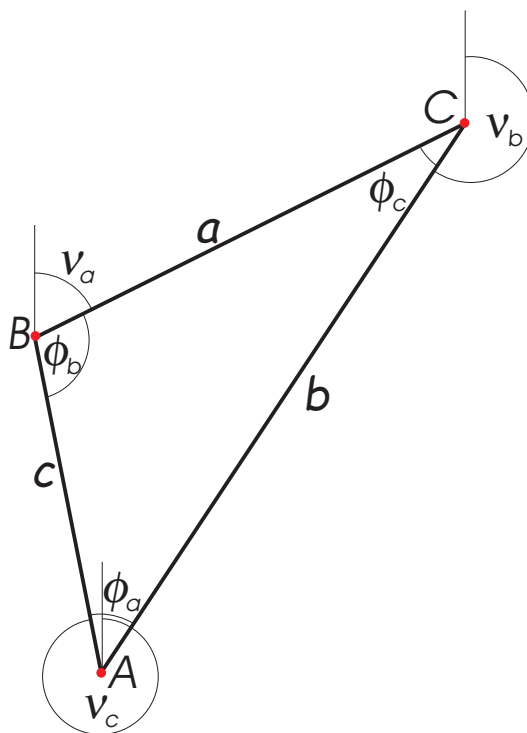
$$\delta \nu = \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 - \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \gamma_2 \quad (\text{L-4.9})$$

V enačbi P-4.8 je razvidno, da se majhna sprememba smernega kota v enačbi L-4.9 lahko predstavi v odvisnosti od čiste strižne deformacije γ_1 in od pripadajoče inženirske strižne deformacije γ_2 (poglavje 2.9).

Kot je bilo pričakovati, lahko s kotnimi opazovanji izrazimo le razlike normalnih deformacij (ni podatka o merilu mreže) in strižne deformacije. γ_1 predstavlja razliko normalnih

deformacij v smereh obeh koordinatnih osi. Pozitivna vrednost parametra γ_1 pomeni raztezanje v smeri prve koordinatne osi, krčenje v smeri druge koordinatne osi ali kombinacijo obeh deformacij. Pozitivna vrednost parametra γ_2 pa predstavlja desnosučno strižno deformacijo v smeri prve koordinate ali levo sučno deformacijo v smeri druge koordinate. Iz vrednosti obeh strižnih deformacij lahko določimo ekstremne vrednosti strižnih deformacij in pripadajoče smeri (poglavje 2.9).

Vzemimo za primer trikotnik na sliki 4.2, ki je določen s tremi točkami A , B in C , v katerem so notranji koti trikotnika ϕ_a , ϕ_b in ϕ_c ter smerni koti posamezne stranice ν_a , ν_b in ν_c .



Slika 4.2: Obravnava deformacij iz kotnih opazovanj v trikotniku
Figure 4.2: Strain analysis of angle observations in triangle

Iz slike 4.2 je razvidno, da lahko notranje kote trikotnika izrazimo s smernimi koti, kakor tudi majhne spremembe notranjih kotov z majhnimi spremembami zunanjih kotov (Frank, 1966):

$$\phi_a = \nu_b - \nu_c + 180^0 \quad \rightarrow \quad \delta\phi_a = \delta\nu_b - \delta\nu_c$$

$$\begin{aligned}\phi_b &= \nu_c - \nu_a + 180^0 & \rightarrow & \delta\phi_b = \delta\nu_c - \delta\nu_a \\ \phi_c &= \nu_a - \nu_b + 180^0 & \rightarrow & \delta\phi_c = \delta\nu_a - \delta\nu_b\end{aligned}\quad (\text{P-4.10})$$

V primeru homogenih deformacij lahko glede na enačbo L-4.9 majhne spremembe notranjih kotov dobimo kot razliko majhnih sprememb zunanjih kotov, ki pa se zapišejo v odvisnosti od parametrov γ_1 in γ_2 ter tako dobimo:

$$\begin{aligned}\delta\phi_a &= (\lambda_{1b} \lambda_{2b} - \lambda_{1c} \lambda_{2c}) \gamma_1 - \frac{1}{2} (\lambda_{1b}^2 - \lambda_{2b}^2 - \lambda_{1c}^2 + \lambda_{2c}^2) \gamma_2 \\ \delta\phi_b &= (\lambda_{1c} \lambda_{2c} - \lambda_{1a} \lambda_{2a}) \gamma_1 - \frac{1}{2} (\lambda_{1c}^2 - \lambda_{2c}^2 - \lambda_{1a}^2 + \lambda_{2a}^2) \gamma_2\end{aligned}\quad (\text{P-4.11})$$

Kljub temu, da imamo v enačbi P-4.10 predstavljene tri količine, lahko sestavimo samo dve enačbi, kot je to v enačbah P-4.11, saj enačbe niso med seboj neodvisne, ker velja $\delta\phi_a + \delta\phi_b + \delta\phi_c = 0$. Na ta način imamo dve enačbi za določitev dveh neznank, γ_1 in γ_2 . Če zgornji enačbi P-4.11 malo preuredimo v skladu z vrednostmi parametrov λ_i , ($i = 1, 2$) na strani 46, dobimo končni enačbi za določitev parametrov γ_1 in γ_2 :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\sin(\nu_c + \nu_a) \frac{\delta\phi_a}{\sin\phi_a} - \sin(\nu_c + \nu_b) \frac{\delta\phi_b}{\sin\phi_b}}{\sin\phi_c} \\ \gamma_2 &= \frac{\cos(\nu_c + \nu_a) \frac{\delta\phi_a}{\sin\phi_a} - \cos(\nu_c + \nu_b) \frac{\delta\phi_b}{\sin\phi_b}}{\sin\phi_c}\end{aligned}\quad (\text{P-4.12})$$

Deformacije na podlagi opazovanih sprememb kotov se v neki mreži lahko izračuna na podlagi trikotnikov ali večkotnikov. Trikotniki so v večini primerov določeni na podlagi Delaunayeve triangulacije, ki v neki mreži točk¹² skonstruira optimalno trikotniško mrežo. V primeru trikotnikov imamo določen problem, torej so deformacije določene enolično. Kadar računamo deformacije v večkotniku, imamo predoločen problem in deformacije ocenjujemo po MNK.

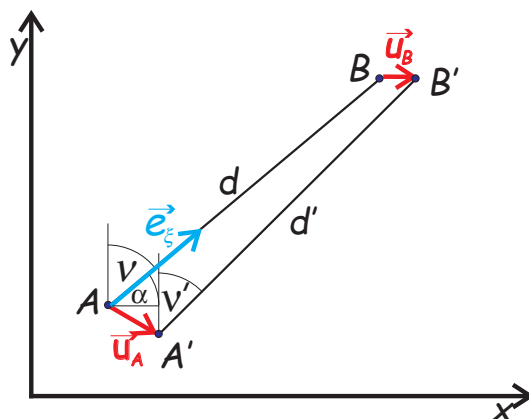
Prednost metode je predvsem v tem, da nam ni potrebno računati sprememb koordinat točk mreže. Slabost se pojavi, ko v različnih izmerah ne opazujemo točno isto kombinacijo kotov, ali ko se spremeni metoda in tehnologija izmere (Grant, 1990).

4.3 Določevanje deformacij iz merjenih dolžin med točkami

Kadar imamo namesto kotnih opazovanj med točkami opazovane dolžine, lahko elemente deformacijskega tenzorja določimo nedvoumno, torej poleg strižnih deformacij tudi normalne deformacije, saj dolžine vsebujejo informacijo o merilu mreže (poglavje 3.2.3).

¹²v ravnini ali v prostoru

Imamo dve točki, A in B , med katerima je bila izmerjena dolžina d . Po nekem času sta se točki zaradi deformacij premaknili v A' in B' . Na novo izmerjena dolžina je tako d' . Prav tako se smerni kot ν točke A na točko B spremeni v ν' (s točke A' na točko B'). Situacijo predstavlja slika 4.3.



Slika 4.3: Sprememba dolžine in smerne kota med dvema točkama zaradi deformacij
Figure 4.3: Length and azimuth alteration based on strain

Opazovano dolžino d se vektorsko predstavi z enotskim vektorjem \vec{e}_ξ , ki se ga določi v smeri koordinatnih osi preko smerne kota ν ali kota $\alpha = 90^\circ - \nu$:

$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= \sin \alpha = \cos \nu & \rightarrow & \quad \vec{e}_\xi = e_{\xi x} \vec{e}_x + e_{\xi y} \vec{e}_y & \quad (P-4.13) \\ e_{\xi y} &= \cos \alpha = \sin \nu \end{aligned}$$

Specifično spremembo dolžine med dvema točkama zapišemo kot razmerje med spremembo dolžine in dolžino med točkama v začetnem stanju, kot to opisuje enačba P-2.14. V skladu s prvo enačbo v enačbah P-2.29 (geometrijska lastnost diagonalnih členov tenzorja majhnih deformacij) lahko za vsako dolžino zapišemo:

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{d' - d}{d} \quad (P-4.14)$$

Enačba P-4.14 opisuje povprečno vrednost specifične spremembe dolžine in povprečne vrednosti normalnih deformacij med točkama A in B (Srpčič, 2003). V primeru vsaj treh opazovanih dolžin (s ponovljenimi izmerami) lahko določimo komponente deformacijskega tenzorja ε_{xx} , ε_{yy} in ε_{xy} . Opazovane dolžine ne vsebujejo informacije o zasuku mreže, zato ne moremo oceniti komponente ω_z tenzorja zasuka. Če za vsako merjeno dolžino d_i lahko določimo specifično spremembo dolžine in njeno orientacijo glede na druge opazovane

dolžine, potem lahko za vsako dolžino zapišemo povezavo normalnih deformacij v smeri enotskega vektorja \vec{e}_ξ in smereh osi koordinatnega sistema \vec{e}_x in \vec{e}_y kot (Kontogianni in sod., 2004; Srpčič, 2003):

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx} e_{\xi x}^2 + 2 \varepsilon_{xy} e_{\xi x} e_{\xi y} + \varepsilon_{yy} e_{\xi y}^2 \quad (\text{P-4.15})$$

Enačba P-4.15 je posledica lastnosti transformacije tenzorja drugega reda, ki je opisana z enačbo P-2.12. Komponente smernih vektorjev se lahko zapiše tudi s pomočjo smernih kotov ν ali kotov α :

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha + 2 \varepsilon_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + \varepsilon_{yy} \sin^2 \alpha \quad (\alpha = \pi - \nu) \quad (\text{P-4.16})$$

Na podlagi vsaj treh opazovanih dolžin v treh različnih smereh, s pripadajočimi spremembami dolžin, lahko določimo deformacijski tenzor, če predpostavimo homogene deformacije. V primeru treh dolžin je tenzor določen enolično, v primeru več kot treh dolžin, tenzor ocenimo po MNK.

V enačbi P-4.16 nastopajo poleg specifičnih sprememb dolžine tudi smerni koti ν oz. koti α , ki opazovanim dolžinam določijo orientacijo. Ti koti so lahko določeni na podlagi približnih koordinat točk mreže, ali pa smer enega izmed enotskih smernih vektorjev (v smeri izbrane dolžine) določimo kot referenčno smer, na katero se nanašajo vse ostale smeri. Smer referenčnega vektorja tako določa eno izmed osi in relativna sprememba dolžine, na katero se nanaša referenčna smer, predstavlja kar normalne deformacije te osi. Rezultat obdelave so povprečne vrednosti elementov tenzorja deformacij za območje, ki ga določajo opazovane dolžine.

4.4 Določevanje deformacij iz ocenjenih vektorjev hitrosti

V začetku 90-tih let prejšnjega stoletja je bil sistem GPS dograjen do te mere, da je na celi Zemlji zagotavljal v poljubnem trenutku sprejem signala z vsaj štirih satelitov hkrati. Za večja območja je določevanje položaja z GNSS povsem nadomestilo terestrične metode (triangulacija in trilateracija), predvsem zaradi večje natančnosti, manjših stroškov izmere, krajših izmer. . . Uporabnost sistemov GNSS se je še povečevala z razvojem neprofitnih služb kot IGS in IERS (IGS URL, IERS URL). Pomen obeh služb je za uporabnika predvsem v kakovostno določenem geodetskem datumu, v katerem se obdeluje opazovanja GNSS. Vsi položaji, določeni preko GNSS, so določeni v enem globalnem koordinatnem sistemu, ki se s časom izredno malo spreminja. Določeni položaji in vektorji

GNSS tako vsebujejo vse informacije o datumu mreže (poglavje 3.2.4 in 3.2.5).

Določevanje deformacij preko ocenjenih vektorjev premikov na posameznih točkah mreže lahko poteka na dva načina. Prvi način je opisan v poglavju 4.1, v enačbi P-4.3, kjer ustrezeni premik lahko določimo kot $u_i = v_i \Delta t$. Druga možnost pa je ta, da na eni izmed točk mreže predpostavimo, da ni spremembe položaja in delamo samo z razlikami vektorjev. Postopek je opisan v nadaljevanju.

Komponente deformacijskega tenzorja se izpelje preko skalarnih produktov vektorjev pred in po deformiranju, kot to prikazuje enačba P-2.8. Izhodišče so opisi spremembe posameznega vektorja z vektorjem premika $\vec{u}(x, y, z)$. Tako je bilo v enačbi P-2.1 in enačbi P-2.3 zapisano:

$$\vec{r}'(x, y, z) = (x + u_x) \vec{e}_x + (y + u_y) \vec{e}_y + (z + u_z) \vec{e}_z \quad (\text{P-4.17})$$

Sprememba vektorja za neko malo vrednost vseh argumentov $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ se tako lahko preko Taylorjeve vrste funkcije več spremenljivk zapiše kot:

$$\vec{r}'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \vec{r}'(x, y, z) + \Delta \vec{r}'(x, y, z) \quad (\text{L-4.18})$$

Prirastek funkcije se lahko simbolno zapiše kot polinomska vsota, kjer so argumenti polinoma prirastki komponent vektorja položaja določene točke:

$$\Delta \vec{r}'(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \Delta z \right)^i \frac{\vec{r}' + \vec{u}}{i!} \quad (\text{L-4.19})$$

Če se predpostavi, da so deformacije znotraj nekega območja konstantne, torej se ne spreminjajo s spremembo položaja, potem lahko vrednost prirastka funkcije iz enačbe L-4.19 zapišemo kot linearno funkcijo (zanemarimo člene višjih redov), kjer velja:

$$\Delta \vec{r}'(x, y, z) = \left(\vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right) \Delta y + \left(\vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) \Delta z \quad (\text{P-4.20})$$

Po komponentah x , y in z se enačba P-4.20 tako lahko zapiše (Griffiths in Johnson, 2006):

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{u_x}{\partial y} \Delta y + \frac{u_x}{\partial z} \Delta z \\ \Delta y' &= \frac{u_y}{\partial x} \Delta x + \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \Delta y + \frac{u_y}{\partial z} \Delta z \\ \Delta z' &= \frac{u_z}{\partial x} \Delta x + \frac{u_z}{\partial y} \Delta y + \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Delta z \end{aligned} \quad (\text{P-4.21})$$

Enačba P-4.21 je podobna enačbi P-4.2 (poglavje 4.1), razlika nastaja pri dodani vrednosti 1 v enačbi P-4.21. Vzrok razlike je v tem, da tu operiramo z razlikami koordinat, medtem ko v enačbi P-4.2 operiramo s koordinatami. Spremembe začetnih koordinat, ki nastopajo v enačbi P-4.21, Δi ($i = x, y, z$) lahko predstavimo kot $\Delta i = i_j - i_k$, ($j, k = 1, \dots, n$), kjer je n število vseh točk. Spremembe končnih koordinat $\Delta i'$ pa lahko zapišemo preko vektorjev hitrosti in pretečenega časa med opazovanji Δt z $\Delta i' = i'_j - i'_k = \Delta v_i \Delta t + \Delta i$. Splošno za nek par točk j in k velja:

$$\begin{aligned}\Delta v_x \Delta t &= \varepsilon_{xx} \Delta x + (\varepsilon_{xy} + \omega_z) \Delta y + (\varepsilon_{xz} - \omega_y) \Delta z \\ \Delta v_y \Delta t &= (\varepsilon_{xy} - \omega_z) \Delta x + \varepsilon_{yy} \Delta y + (\varepsilon_{yz} + \omega_x) \Delta z \\ \Delta v_z \Delta t &= (\varepsilon_{xz} + \omega_y) \Delta x + (\varepsilon_{yz} - \omega_x) \Delta y + \varepsilon_{zz} \Delta z\end{aligned}\tag{P-4.22}$$

V enačbi P-4.22 imamo tako 9 neznanih parametrov, 6 komponent tenzorja deformacij (ε_{ij} $i, j = x, y, z$) in tri komponente tenzorja malih zasukov (ω_i $i = x, y, z$). Tako moramo sestaviti 9 enačb, za kar potrebujemo 4 točke z določenimi vektorji hitrosti. V ravnini imamo le 4 neznane parametre, tako da potrebujemo le 3 točke, preko katerih sestavimo 4 enačbe.

4.5 Primerjava metod

Metode določevanja parametrov deformacij so bile razvite v skladu z razvojem takratnega časa. Določevanje deformacij iz ponovljenih kotnih opazovanj se je v veliki meri nanašalo na obstoječe triangulacijske mreže. Z uporabo elektrooptičnih razdaljemerov se je pojavila možnost izboljšanja triangulacijskih mrež, predvsem v smislu homogene natančnosti mreže (Jenko, 1986; Stopar, 1995). Obe metodi imata možnost določitve deformacij neposredno iz opazovanj, brez potrebe po izravnavi in določitvi koordinat točk v mreži. Metode, kjer se deformacije določi neposredno na podlagi ponovljenih opazovanj, se imenujejo metode razlik opazovanj (Grant, 1990). Problem se seveda pojavi v primeru različnih tipov opazovanj, različnega scenarija opazovanj, različnega inštrumentarija in podobno.

V primeru določitve vektorjev premikov (ali vektorjev hitrosti) na podlagi izravnanih koordinat v različnih terminskih izmerah pa govorimo o metodah koordinatnih razlik (Grant, 1990). Vektorji premikov ali koordinate točk v posameznih izmerah tako nastopajo kot opazovanja v postopku izravnave parametrov deformacij. Metoda lahko temelji na poljubnih opazovanjih, ne le na podlagi opazovanj GNSS, potrebna je le pravilna obravnava

geodetskega datuma mreže. Prednost metode je predvsem v tem, da imamo v postopku izravnave možnost kontrole opazovanj za prisotnost grobih in sistematičnih pogreškov. V primeru, da imamo opazovanja v več terminskih izmerah, kjer je datum dobro določen, predstavljajo ocenjene koordinate točk v mreži za posamezne izmere in izračunane razlike koordinat dejanske spremembe položaja točk med terminskimi izmerami. V tem primeru so izračunani vektorji hitrosti smiselni in so eden izmed rezultatov obdelave. Kadar pa je težko določiti datum v vsaj dveh terminskih izmerah, predstavljajo pridobljeni vektorji hitrosti (ali razlike koordinat) relativne spremembe položajev, ki so vezani na obliko določenega datuma v obdelavi. V tem primeru ocenjene spremembe koordinat niso merilo premikov točk in predstavljajo stranski produkt obdelave (Grant, 1990).

Ne glede na uporabljeno metodo za izračun deformacij geodetske mreže, vse zgoraj opisane metode zagotavljajo enake rezultate (na nivoju natančnosti) z enako natančnostjo.

5 OBRAVNAVA GEODETSKIH OPAZOVANJ V RAZLIČNIH TERMINSKIH IZMERAH

V prejšnjem poglavju (4) je bila prikazana obravnava in določanje deformacijskih parametrov za različne tipe opazovanj v geodetski mreži. Poudarek je bil na določevanju vektorjev premikov (oz. hitrosti) točk geodetske mreže iz opazovanih količin. Geodetski datum se je obravnaval kot dana količina v različnih izmerah. V praksi pa geodetski datum ni dana količina, ampak odvisna od opazovanj, inštrumentarija, metode izmere. . . V splošnem so izračunani vektorji premikov in posledično vektorji hitrosti obremenjeni z datumom opazovanj v različnih terminskih izmerah (Xu in sod., 2000a; Xu in sod., 2000b).

Ne glede na dejstvo, da vse metode določevanja deformacij (poglavja 4.2, 4.3 in 4.4) zagotavljajo enake rezultate, pa smo se v nalogi odločili za določevanje deformacij iz vektorjev hitrosti točk mreže. Vzrok za to odločitev je predvsem dejstvo, da imamo pri obdelavi opazovanj, z namenom ocene koordinat točk mreže z MNK, orodje za kontrolo opazovanj za prisotnost grobih pogreškov. Vendar pa je potrebno pazljivo vrednotiti koordinate točk in izračunane vektorje hitrosti, predvsem zaradi nepoznavanja datuma v različnih terminskih izmerah. Cilj tega poglavja je tako izpeljava in prikaz modela za oceno koordinat točk mreže in pripadajočih vektorjev hitrosti ter pravilno ovrednotenje teh hitrosti.

5.1 Funkcionalni model izravnave

Funkcionalni model predstavlja poenostavitev nekega realnega stanja s stališča matematične oz. fizikalne predstavitve (matematični model), kot tudi s stališča statistične predstavitve realnosti (stohastični model) (Mikhail in Ackermann, 1976). Matematični model predstavlja matematične povezave med opazovanimi količinami (smeri, koti, dolžine. . .) in neznankami, ki jih vrednosti skušamo oceniti (koordinate, vektorji hitrosti. . .). V splošnem nimamo neposredno opazovanih neznank, ampak lahko sestavimo nelinearne zveze med opazovanimi količinami in neznankami (Collier in sod., 1988; Dermanis in Rossikopoulos, 1988; Dong in sod., 1998):

$$\hat{\mathbf{I}}(t) = F(\hat{\mathbf{x}}(t), W(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{b}, t)) \quad (\text{P-5.1})$$

Elementi enačbe P-5.1 so:

$\hat{\mathbf{I}}(t)$ časovno odvisen vektor opazovanj velikosti $n \times 1$,

- $\hat{\mathbf{x}}(t)$ časovno odvisen vektor neznank velikosti $u \times 1$,
- $W(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{b}, t)$ časovno in prostorsko odvisen težnostni potencial, kjer vektor \mathbf{b} modelira časovne spremembe potenciala,
- F nelinearna funkcija, ki operira nad $\hat{\mathbf{x}}(t)$ in $W(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{b}, t)$ ter določi izhodno količino, opazovanja $\hat{\mathbf{I}}(t)$.

Enačba P-5.1 opisuje nelinearno povezavo med opazovanji in neznankami v zemeljskem težnostnem polju (3R prostor) v odvisnosti od časa. Zaradi (v splošnem) slabo določene višinske komponente položaja (GNSS, trigonometrično višinomerstvo), je določevanje višin točk (geometrični nivelman) ločeno od določevanja horizontalnega položaja (Stopar, 1995). Določevanje deformacij je tako ločeno na horizontalno ravnino in višinsko komponento (Grant, 1990), zato model P-5.1 lahko zapišemo za ravnino. V primeru redukcij opazovanj iz fizičnega prostora (površje Zemlje) v računski prostor (ravnina projekcije) moramo upoštevati vpliv težnosti na opazovanja (odklon navpičnice, geoidna višina), tako da iz modela P-5.1 lahko eliminiramo vpliv težnostnega potenciala. Položaj parametriziramo linearno preko referenčnega položaja $\hat{\mathbf{x}}_0$ v neki referenčni epohi t_0 in pripadajočega vektorja hitrosti $\hat{\mathbf{v}}$ v obliki:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{v}} (t - t_0) = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{v}_x \end{bmatrix} (t - t_0) \quad (\text{L-5.2})$$

Enačbo P-5.1 lahko na koncu zapišemo kot:

$$\hat{\mathbf{I}}(t) = F(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{v}} (t - t_0)) \quad (\text{L-5.3})$$

Funkcija F v je v splošnem nelinearna, zato je potrebno za oceno neznank po MNK enačbo linearizirati. Linearizacija poteka po opazovanjih in neznankah v okolici opazovanih vrednosti ($\mathbf{I}(t)$) s prirastkom popravkov opazovanj ($\mathbf{r}(t)$) in približnih vrednosti neznank ($\mathbf{x}_0(t_0)$, \mathbf{v}_0) s prirastkom popravkov približnih vrednosti neznank ($\delta_{\mathbf{x}_0}(t_0)$, $\delta_{\mathbf{v}}$). Vzroki linearizacije so trije, in sicer:

- kompliciranost nelinearnega modela,
- rešitev nelinearnega modela po MNK lahko poišče lokalni in ne globalni minimum vsote kvadratov popravkov opazovanj,
- stohastični model se lahko enostavno reši po postopku zakona o prenosu varianc in kovarianc (transformacija tenzorja 2. reda - poglavje 2.2).

Posledica linearizacije je nujno poznavanje dobrih približnih vrednosti neznank ali izračun ocenjenih vrednosti neznank na podlagi iterativnega postopka. Lineariziran model lahko zapišemo v obliki:

$$\mathbf{r}(t) + \mathbf{B}_x \delta_{\mathbf{x}_0}(t_0) + (t - t_0) \mathbf{B}_v \delta_{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r}(t) + \mathbf{B} \Delta(t) = \mathbf{f}(t) \quad (\text{L-5.4})$$

Členi enačbe L-5.4 so:

- $\mathbf{r}(t)$ vektor popravkov opazovanj velikosti $n \times 1$ ($\hat{\mathbf{l}}(t) = \mathbf{l}(t) + \mathbf{r}(t)$),
- $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_v$ matriki koeficientov enačb popravkov, v odvisnosti od vrednosti približnih koordinat oz. približnih vrednosti komponent vektorja hitrosti (velikosti $n \times u_x$ in $n \times u_v$, kjer je u_x število koordinatnih neznank in u_v število neznank hitrosti), $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_x \quad \mathbf{B}_v]^T$,
- $\delta_{\mathbf{x}_0}(t_0), \delta_{\mathbf{v}}$ vektorja popravkov približnih vrednosti koordinat in hitrosti ($\Delta = [\delta_{\mathbf{x}_0}(t_0) \quad \delta_{\mathbf{v}}]^T$, velikosti $(u_x + u_v) \times 1$),
- $\mathbf{f}(t)$ vektor odstopanj enačb popravkov velikosti $n \times 1$ ($\mathbf{f}(t) = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0)) - \mathbf{l}(t)$).

Vektor neznank (Δ) vsebuje popravke koordinat in hitrosti. Koordinate se nanašajo na neko referenčno epoho t_0 , medtem, ko so hitrosti neodvisne od časa. V smislu Gauss-Markovega modela (Brockmann, 1996) lahko enačbo L-5.4 zapišemo v obliki:

$$E(\mathbf{l}(t)) = \mathbf{B} \Delta \quad D(\mathbf{l}(t)) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{P-5.5})$$

V enačbi P-5.5 količine predstavljajo:

- $E(\cdot)$ operator pričakovane vrednosti,
- $D(\cdot)$ operator razpršenosti,
- σ_0^2 referenčna varianca a-priori,
- \mathbf{P} matrika uteži opazovanj.

5.2 Enačbe popravkov opazovanj

Enačbe popravkov sestavimo za različne tipe opazovanj glede na enačbe, predstavljene v koordinatnem sistemu yx (glej poglavje 3.2). V nadaljnje bodo predstavljene enačbe popravkov za tri tipe opazovanj, in sicer opazovan kot θ_{ijk} (razlika dveh opazovanih smeri) na stojiščni točki i med točkama j in k , opazovana horizontalna dolžina d_{ij} s stojišča i na točko j ter absolutni položaj GNSS $r_i^{\vec{G}}$ na stojišču i . V enačbah popravkov nastopajo

za vse elemente (razen za konstante) tri količine za neznane količine ζ in opazovanja ξ . Pri neznankah imamo izravnano vrednost neznanke $\hat{\zeta}$, približno vrednost neznanke ζ_0 in popravek neznanke δ_ζ . V primeru opazovanj imamo izravnano opazovanje $\hat{\xi}$, opazovanje ξ in popravek opazovanj r . Tak način označevanja bo v primeru vseh tipov opazovanj, ko gre za enačbe popravkov. Povezava med tremi količinami opazovanj je $\hat{\xi} = \xi + r$, med tremi količinami neznank pa $\hat{\zeta} = \zeta_0 + \delta_\zeta$. Enačbe popravkov so osnovna količina posredne izravnave po MNK. Vsaka enačba popravkov vsebuje le eno opazovanje, en popravek opazovanja, vsaj eno neznanko in poljubno število konstant.

Enačbe popravkov (nelinearne in linearizirane) se sestavi iz enačb, prikazanih v poglavju 3.2. Razlika je v tem, da koordinate niso konstantne, ampak se spreminjajo s časom (enačba L-5.2). Za prikaz odvisnosti opazovanja od koordinat točk potrebujemo koordinatni razliki, ki sta:

$$\begin{aligned}\Delta y_{ij}(t) &= y_{j0} - y_{i0} + (t - t_0)(v_{yj} - v_{yi}) = \Delta y_{ij0} + \Delta t \Delta v_{yij} \\ \Delta x_{ij}(t) &= x_{j0} - x_{i0} + (t - t_0)(v_{xj} - v_{xi}) = \Delta x_{ij0} + \Delta t \Delta v_{xij}\end{aligned}\tag{L-5.6}$$

5.2.1 Opazovani koti

V postopku terestrične izmere se opazuje smeri s stojišča i proti točkam j, k, \dots, p . Ker v enačbi P-3.8 za modeliranje smeri nastopa orientacijska neznanka o_i , sestavimo kote med sosednjimi smermi. Na ta način na vsakem stojišču sestavimo $n_\beta - 1$ kotov (n_β predstavlja število smeri) in tako eliminiramo orientacijske neznanke na stojiščih. Model opazovanega kota je podan v enačbi P-3.10, kjer pa so sedaj položaji točk odvisni od trenutka izmere (enačba L-5.2). Nelinearna enačba popravkov za opazovan kot se v skladu z enačbo P-3.10 in definiranimi koordinatnimi razlikami v enačbi L-5.6 zapiše kot:

$$\hat{\theta}_{ijk} - \left(\arctan \left(\frac{\Delta \hat{y}_{ik0} + \Delta t \Delta \hat{v}_{yik}}{\Delta \hat{x}_{ik0} + \Delta t \Delta \hat{v}_{xik}} \right) - \arctan \left(\frac{\Delta \hat{y}_{ij0} + \Delta t \Delta \hat{v}_{yij}}{\Delta \hat{x}_{ij0} + \Delta t \Delta \hat{v}_{xij}} \right) \right) = 0 \tag{L-5.7}$$

V enačbi L-5.7 nastopa 12 neznank, in sicer 6 koordinatnih neznank ($\hat{y}_{i0}, \hat{x}_{i0}, \hat{y}_{j0}, \hat{x}_{j0}, \hat{y}_{k0}, \hat{x}_{k0}$) in 6 neznank hitrosti koordinat ($\hat{v}_{yi}, \hat{v}_{xi}, \hat{v}_{yj}, \hat{v}_{xj}, \hat{v}_{yk}, \hat{v}_{xk}$). Linearizirana enačba popravkov za opazovan kot ima obliko:

$$\begin{aligned}r_{\theta_{ijk}} &+ a_k \delta_{y_k} + b_k \delta_{x_k} + a_j \delta_{y_j} + b_j \delta_{x_j} + a_i \delta_{y_i} + b_i \delta_{x_i} + \\ &+ \Delta t (a_k \delta_{v_{y_k}} + b_k \delta_{v_{x_k}} + a_j \delta_{v_{y_j}} + b_j \delta_{v_{x_j}} + a_i \delta_{v_{y_i}} + b_i \delta_{v_{x_i}}) \\ &= \theta_{ijk0} - \theta_{ijk}\end{aligned}\tag{L-5.8}$$

V enačbi L-5.8 predstavljajo koeficienti a_m parcialne odvode enačbe L-5.7 po spremenljivki y_m , koeficienti b_m parcialne odvode po x_m in θ_{ijk0} vrednost kota, izračunanega iz približnih vrednosti neznank ($m = i, j, k$). Parcialne odvode za vektorje hitrosti pridobimo z množenjem koeficientov a_m in b_m s faktorjem Δt . Koeficienti imajo obliko (d_0 - približna vrednost dolžine med točkama):

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{\Delta y_{ik}(t)}{(d_{ik0}(t))^2} & b_k &= \frac{\Delta x_{ik}(t)}{(d_{ik0}(t))^2} \\ a_j &= \frac{\Delta y_{ij}(t)}{(d_{ij0}(t))^2} & b_j &= -\frac{\Delta x_{ij}(t)}{(d_{ij0}(t))^2} \\ a_i &= -(a_k + a_j) & b_i &= -(b_k + b_j) \end{aligned} \quad (\text{L-5.9})$$

V splošnem so lahko vse tri točke opazovanjega kota nove in se vsem lahko oceni vektor hitrosti, tako da vse točke dobijo popravke približnih vrednosti koordinat in hitrosti. V primeru, da je katera izmed točk dana, ne pridobi popravkov koordinat in hitrosti, zato je potrebno iz enačbe popravkov v L-5.8 izvzeti ustrezne člene.

Izračun koordinat točk na podlagi opazovanih smeri ali kotov je enak le v primeru pravilne obravnave variančno-kovariančne matrike ($\Sigma_{\theta\theta}$) opazovanih kotov. Izkaže se, da moramo upoštevati koreliranost sosednjih kotov za skupno smer, tako da je $\Sigma_{\theta\theta}$ sestavljena dva kota ($\theta_{ijk}, \theta_{ikl}$) iz treh smeri ($\beta_{ij}, \beta_{ik}, \beta_{il}$) s pripadajočimi standardnimi odkloni ($\sigma_{ij}, \sigma_{ik}, \sigma_{il}$) enaka:

$$\Sigma_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ik}^2 & -\sigma_{ik}^2 \\ -\sigma_{ik}^2 & \sigma_{ik}^2 + \sigma_{il}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{L-5.10})$$

Lastnost, opisana v enačbi L-5.10, je neposredno pridobljena preko prenosa varianc in kovarianc, kjer matrično obravnavamo povezavo med opazovanimi smerni in koti. Neupoštevanje diagonalnih členov sosednjih kotov lahko bistveno spremeni rezultate, saj za kote sestavljene iz opazovanih smeri z enakimi natančnostmi σ velja:

$$\Sigma_{\theta\theta} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{L-5.11})$$

5.2.2 Opazovane horizontalne dolžine

Glede na enačbo L-3.13 in enačbo L-5.6 v primeru položajev točk, ki se spreminjajo s časom, je za horizontalno dolžino d_{ij} med stojiščem i in točko j nelinearna enačba popravkov podana kot:

$$\hat{d}_{ij} - \sqrt{(\Delta \hat{y}_{ij0} + \Delta t \Delta \hat{v}_{yij})^2 + (\Delta \hat{x}_{ij0} + \Delta t \Delta \hat{v}_{xij})^2} = 0 \quad (\text{L-5.12})$$

Z linearizacijo okoli opazovanja ($\hat{d}_{ij}(t) = d_{ij}(t) + r_{d_{ij}}(t)$) in neznank ($\hat{y}_{i0}, \hat{x}_{i0}, \hat{y}_{j0}, \hat{x}_{j0}, \hat{v}_{y_i}, \hat{v}_{x_i}, \hat{v}_{y_j}, \hat{v}_{x_j}$) sestavimo linearizirano enačbo popravkov, ki ima obliko:

$$\begin{aligned} r_{d_{ij}} + c_i \delta y_i + d_i \delta x_i + c_j \delta y_j + d_j \delta x_j + \\ + \Delta t (c_i \delta v_{y_i} + d_i \delta v_{x_i} + c_j \delta v_{y_j} + d_j \delta v_{x_j}) = d_{ij0} - d_{ij} \end{aligned} \quad (\text{L-5.13})$$

Koeficienti c_m predstavljajo parcialne odvode enačbe L-5.12 po spremenljivki y_m , d_m parcialne odvode po x_m in d_{ij0} približno vrednost dolžine, izračunane iz približnih vrednosti koordinat ($m = i, j$). Koeficienti imajo obliko:

$$c_i = \frac{\Delta y_{ij}(t)}{d_{ij0}(t)} = \sin \nu_{ij} \quad d_i = \frac{\Delta x_{ij}(t)}{d_{ij0}(t)} = \cos \nu_{ij} \quad c_j = -c_i \quad d_j = -d_i \quad (\text{L-5.14})$$

5.2.3 Absolutni položaj GNSS

Vključitev rezultatov obdelave opazovanj GNSS v geodetsko mrežo, kjer so bila izvedena terestrična opazovanja, pomeni uvedbo psevdopazovanj v funkcionalni model (Brockmann, 1996; Pelzer, 1980). Enačbi popravkov psevdopazovanj (\hat{y}_i^G in \hat{x}_i^G) za določeno točko i sta linearni in izhajata iz oblike:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i^G - \hat{y}_{i0} - \Delta t \hat{v}_{y_i} &= 0 \\ \hat{x}_i^G - \hat{x}_{i0} - \Delta t \hat{v}_{x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{L-5.15})$$

Z upoštevanjem popravkov opazovanj in približnih vrednosti, lahko enačbi L-5.15 zapišemo v končni obliki:

$$\begin{aligned} r_{y_i} - \delta_{y_{i0}} - \Delta t \delta v_{y_i} = y_{i0} + \Delta t v_{y_{i0}} - y_i^G \\ r_{x_i} - \delta_{x_{i0}} - \Delta t \delta v_{x_i} = x_{i0} + \Delta t v_{x_{i0}} - x_i^G \end{aligned} \quad (\text{L-5.16})$$

V primeru podanih vektorjev GNSS med dvema točkama i in j , enačbo popravkov za opazovan vektor sestavimo z ustrezno razliko enačb popravkov za absolutne položaje, pridobljene z GNSS. Razvidno je, da lahko na ta način podajamo vezi med neznankami z določenimi natančnostmi.

5.3 Rešitev modela po MNK

Oceno neznank se določi po posredni izravnavi po MNK na podlagi enačb popravkov, zapisanih v poglavju 5.1. Matrično model zapišemo enako kot v primeru enačbe L-5.4 oz.

glede na enačbo P-5.5. Za naš primer Gauss-Markov model zapišemo kot:

$$E(\mathbf{l}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_G \\ \mathbf{B}_\theta \\ \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{x}_0} \\ \delta_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad D(\mathbf{l}(t)) = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}_G^{-1} & & 0 \\ & \mathbf{P}_\theta^{-1} & \\ 0 & & \mathbf{P}_d^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{L-5.17})$$

V enačbi L-5.17 se indeks G nanaša na psevdoopazovanja GNSS, θ na opazovane kote in d na opazovane dolžine. Časovno gledano so lahko opazovanja istega tipa izvedena večkrat in v poljubnih izmerah. V primeru ocene vektorjev hitrosti za vsaj eno točko, morajo biti opazovanja na določeni točki izvedena v vsaj dveh terminskih izmerah.

Iz enačbe L-5.17 je razvidno, da opazovanja GNSS v matematičnem modelu upoštevamo na nivoju že obdelanih podatkov in pridobljenih vrednosti koordinat in pripadajočih standardnih odklonov. Skupna obdelava opazovanj GNSS (fazna opazovanja) in terestričnih opazovanj se v praksi ne izvaja. Problem nastaja zaradi dejstva, da se opazovanja GNSS nanašajo na referenčni elipsoid in normalo (geometrični prostor), medtem ko se terestrična opazovanja nanašajo na geoid (telo Zemlje) in težiščnico (fizični prostor). Povezava je mogoča le z redukcijo terestričnih opazovanj na referenčno ploskev. Združitev obeh tipov se največkrat izvaja tako, da že ocenjene vektorje ali položaje izmere GNSS s pripadajočimi standardnimi odkloni vklopimo v matematični model terestričnih opazovanj. Druga možnost je primerjava rezultatov ločenih obdelav s pomočjo metod transformacij.

Neznanke Gauss-Markovega modela so nanizane v vektorju Δ in predstavljajo koordinate in hitrosti točk mreže. V splošnem imamo glede števila in tipa neznank dokaj proste roke, vendar skušamo izvesti obdelavo tako, da s številom in tipom neznank ne vplivamo na rezultate obdelave. Z obliko vektorja neznank (s številom neznank) določimo datum mreže, kjer pa le-tega poskušamo določiti enolično. Zato smo se odločili, da vedno ocenjujemo popravke koordinat vseh točk, vektorje hitrosti pa na poljubnih točkah. Tako imamo dve možni varianti obdelave. V prvi varianti ne ocenjujemo nobenega vektorja hitrosti, v drugi varianti pa ocenjujemo vektor hitrosti na vsaj eni točki.

5.3.1 Ocena samo koordinat točk geodetske mreže

Kadar imamo situacijo, ko ocenjujemo samo popravke približnih vrednosti koordinat točk geodetske mreže, imamo klasično obdelavo horizontalne geodetske mreže. Položaji vseh točk so neodvisni od epohe izvedenih opazovanj, zato vsi členi v enačbah popravkov opazovanj (enačbe L-5.8, L-5.13, L-5.16) v odvisnosti od časa odpadejo, saj so vse vrednosti

hitrosti enake nič. Gauss-Markov model tako postane:

$$E(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_G \\ \mathbf{B}_\theta \\ \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \delta_{\mathbf{x}_0} \quad D(\mathbf{l}) = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}_G^{-1} & & 0 \\ & \mathbf{P}_\theta^{-1} & \\ 0 & & \mathbf{P}_d^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{L-5.18})$$

V modelu L-5.18 imamo tri tipe opazovanj; položaje GNSS, kote in dolžine. Glede na datumske informacije posameznih tipov opazovanj (poglavje 3.2) vidimo, da nimamo defekta datuma, saj imamo merilo definirano preko opazovanih dolžin, poleg tega pa imamo v primeru vsaj dveh točk, opazovanih z GNSS, določene vse štiri datumske parametre. Problem datuma je v tem primeru trivialen, ker v primeru, ko ne ocenjujemo vektorjev hitrosti točk, pomenijo enačbe popravkov GNSS neposredno opazovane neznanke; torej je matematični model občutljiv na neznanke. Datumski parametri so tako vsi vključeni v opazovanja, a ker koordinate GNSS niso neposredno opazovane količine (so že rezultat obdelave opazovanj GNSS), jih označimo kot psevdopazovanja. Datum je v modelu L-5.18 določen z uvedbo psevdopazovanj.

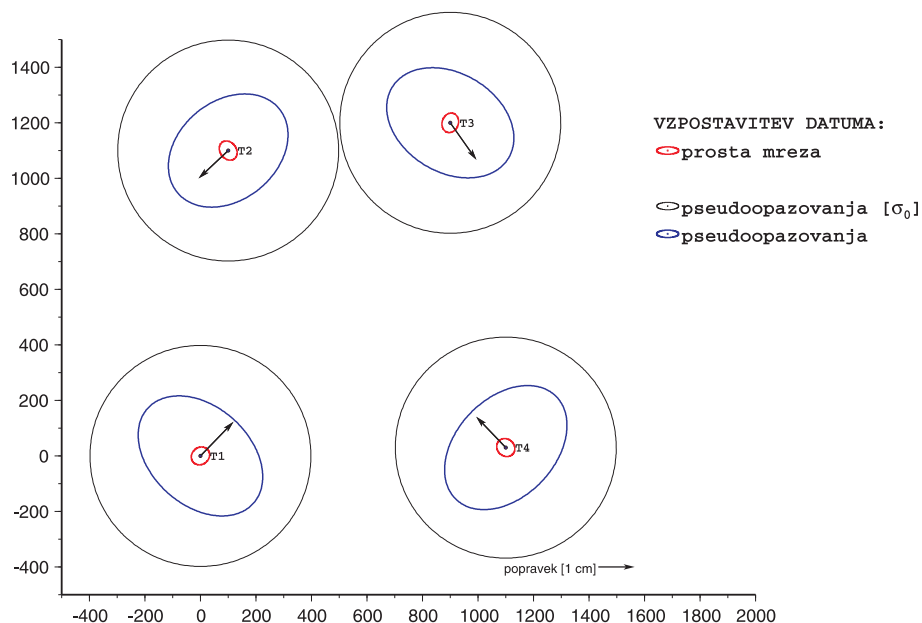
Geodetski datum je v modelu, kjer imamo vse tri tipe opazovanj v splošnem predoločen. Zasuk mreže in merilo sta določena z vsaj dvema točkama GNSS ter premik z vsaj eno točko GNSS. Kotna opazovanja nimajo datumskih informacij, dolžine pa vsebujejo informacijo o merilu mreže. Merilo je v primeru opazovanj GNSS določeno preko svetlobne hitrosti ali gravitacijske konstante (orbita satelita) (Stopar, 1995), kjer se merilo dodatno lahko spremeni z analizo vpliva atmosfere na opazovanja (Dach in sod., 2007). V primeru opazovanih dolžin pa je merilo določeno preko modulacijske valovne dolžine merskega valovanja, ki ga razdaljemer uporabi za izračun dolžine. Obe merili v splošnem nista enaki. Predoločenost datuma se tako v primeru združevanja terestričnih opazovanj in opazovanj GNSS neposredno odraža le pri (v splošnem) različnem merilu opazovanih dolžin in koordinat določenih preko GNSS. Združevanje obeh tipov opazovanj je neodvisno od premika in zasuca mreže, saj je stanje orientacije in lokacije geodetske mreže v času kotnih in dolžinskih opazovanj nepoznano, zato se ta dva parametra nastavita s približnimi koordinatami (koordinate GNSS) in pripadajočimi standardnimi odkloni koordinat.

Psevdoopazovanja kot definicija geodetskega datuma

Pri uvedbi psevdoopazovanj v funkcionalni model imamo dve možnosti. Prva možnost je uvedba psevdoopazovanj zgolj zaradi odprave defekta datuma. Defekt datuma odpravimo tako, da podamo standardne odklone približnim vrednostim koordinat za določene točke geodetske mreže (sestavimo enačbo popravkov za to koordinato s pripadajočim standardnim odklonom). Število podanih standardnih odklonov je lahko od defekta datuma mreže do števila vseh koordinat točk mreže. Z velikostjo standardnega odklona določene koordinate točke določimo velikost popravka, ki ga lahko dobi ta koordinata po izravnavi. Danim točkam tako predpostavimo visoko natančnost približnih koordinat (npr. 0.1 mm), novim točkam pa nizko natančnost (npr. 5 cm) ali pa sploh ne sestavimo enačbe popravkov. Če za določeno koordinato ne sestavimo enačbe popravkov, tej koordinati ne omejimo velikost popravka. Tak primer je definicija datuma v primeru obdelave opazovanj GNSS v programskem paketu Bernese GPS Software (Brockmann, 1996).

V primeru, da pa ne vemo katera točka je stabilna in katera ne, imamo možnost, da vsem točkam dodamo enake standardne odklone, s čimer dosežemo, da lahko vsaka točka dobi enako velikost popravka. Popravek je tako odvisen samo od natančnosti in tipa opazovanj ter geometrije geodetske mreže. Če hočemo zagotoviti, da so popravki koordinat samo posledica opazovanj in ne tudi podanih natančnosti približnih koordinat, potem moramo natančnost približnih koordinat podati za faktor slabše, kot bi bila natančnost koordinat, pridobljena samo z opazovanji. Podane natančnosti približnih koordinat se prenesejo na ocenjene natančnosti izravnanih koordinat, velikost vpliva pa je odvisna od števila točk. Manj kot je točk (npr. četverkotnik), manjši je vpliv podanih natančnosti približnih koordinat točk in obratno.

Slika 5.1 prikazuje vpliv psevdoopazovanj na rezultate obdelave terestričnih opazovanj v geodetskegem četverkotniku. Vrednosti popravkov koordinat so povsem iste tako za prosto mrežo kot za mrežo določeno preko psevdoopazovanj. Popravki obeh obdelav tako zadostujejo pogojem popravkov proste mreže (glej poglavje 3.3.3). Očitna razlika je le v natančnosti izravnanih koordinat (na sliki prikazane standardne elipse pogreškov). Ocenjene natančnosti koordinat proste mreže vsebujejo samo vpliv pogreškov opazovanj. Natančnosti ocenjenih koordinat mreže, definirane s psevdoopazovanji, pa so obremenjene dodatno še z natančnostmi psevdoopazovanj. Enako situacijo kot slika 5.1 prikazuje slika 5.2, le da je tu v mreži 64 točk. Vidne so razlike v ocenjenih popravkih koordinat,



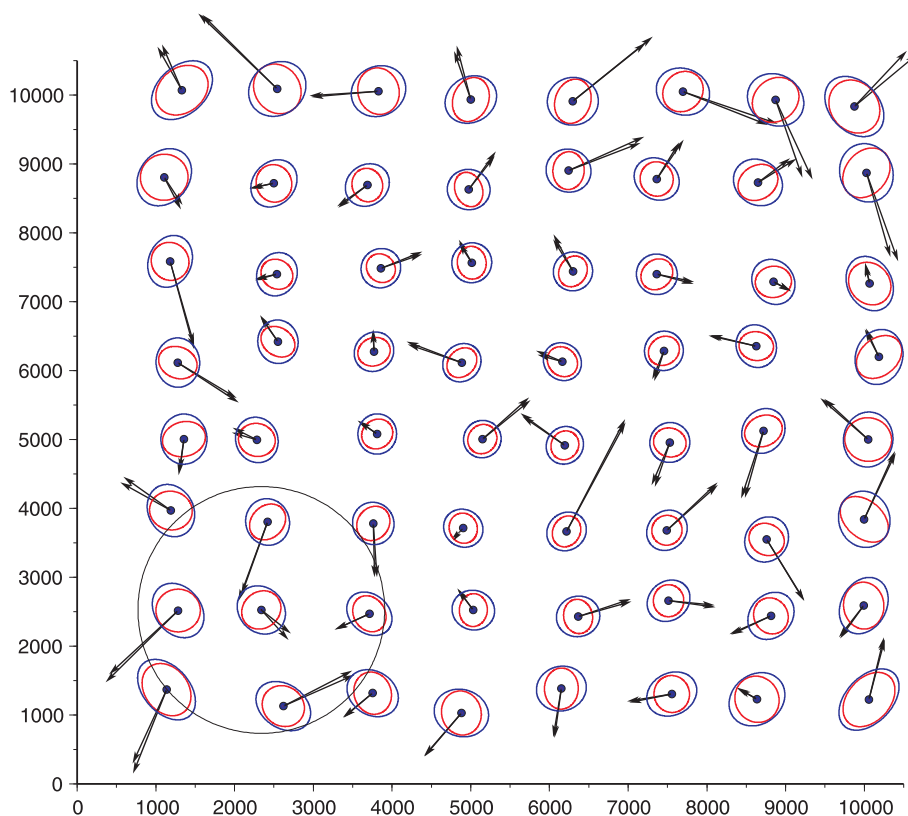
Slika 5.1: Primerjava rezultatov proste mreže geodetskega četverokotnika (rdeče elipse) in rezultatov obdelave (modre elipse) z datumom definiranim preko psevdopazovanj (črne standardne elipse velikosti 3 cm so a-priori natančnosti)

Figure 5.1: Comparison on estimation results between free-net solution of a quadrilateral (red ellipses) and solution (blue ellipses) based on pseudoobservation datum definition (black standard ellipses are a-priori accuracies 3 cm big)

ki so posledica števila točk v mreži. Enake popravke obeh tipov obdelav bi dobili, če bi približnim koordinatam dodelili standardne odklone velikosti 20 cm po koordinatni osi (uporabljene vrednosti so 3 cm). Natančnosti ocenjenih koordinat so zelo podobne, razlika nastaja predvsem v orientaciji elips pogreškov. Če bi uporabili 20 cm standardne odklone približnih koordinat, bi bile ocenjene natančnosti koordinat na nivoju 3-4 cm.

Iz obeh slik (slika 5.1 in 5.2) je razvidno, da je velikost standardnih odklonov, ki jih želimo določiti za definiranje geodetskega datuma, odvisna od števila točk v mreži. Več točk kot imamo v mreži, večje vrednosti moramo podati, da z njimi ne posegamo v geometrijo mreže. Tako je v primeru, ko želimo vsem točkam mreže dati enake uteži v obdelavi z namenom definiranja geodetskega datuma mreže, bolje geodetski datum definirati z notranjimi opazovanji oz. mrežo definirati kot prosto mrežo.

Pri prosti mreži imajo vse točke enako utež, velikost popravka na določeni točki je odvisna



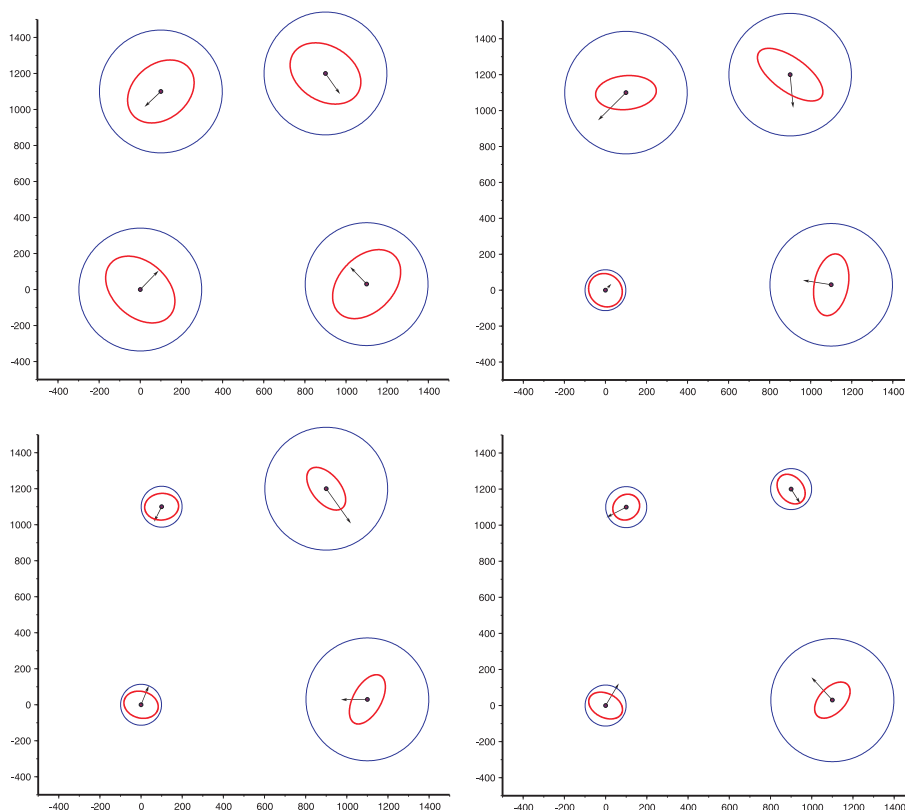
Slika 5.2: Primerjava rezultatov proste mreže (rdeče elipse) in rezultatov obdelave (modre elipse) z datumom definiranim preko psevdopazovanj (črne elipse velikosti 3 cm so a-priori natančnosti) velike mreže

Figure 5.2: Comparison on estimation results between free-net solution of a big net (red ellipses) and solution (blue ellipses) based on pseudoobservation datum definition (black standard ellipses are a-priori accuracies 3 cm big)

samo od pogreškov opazovanj, vrste opazovanj ter geometrije mreže. V primeru samo določenega števila točk, ki definirajo geodetski datum mreže, lahko nastavimo pogoje proste mreže samo za te točke. V primeru proste mreže imamo tako za posamezno točko samo dve možnosti. Ali točka definira datum ali pa ne.

Kadar pa želimo samo določenim točkam dodati višjo natančnost, vpliv določene točke večati (ne samo dodati na seznam danih točk), moramo datum definirati preko psevdopazovanj. Kot druga možnost je torej situacija, ko želimo točkam določiti različne uteži. V tem primeru z natančnostmi psevdopazovanj uravnavamo maksimalno velikost popravka na točkah. Slika 5.3 prikazuje geodetski četverokotnik za 4 različne situacije. V vseh primerih je datum določen s psevdopazovanji, kjer je zgornja leva slika (na sliki 5.3)

enaka sliki 5.1. Pri ostalih pa postopoma zmanjšujemo a-priori natančnosti na točkah s 3 na 1 cm. Popravki koordinat ne zadostujejo več zahtevam proste mreže (kadar so različne vrednosti natančnosti na točkah), zato pride do zasuka, premika in spremembe merila cele mreže. Količine na sliki 5.3 so iste kot na obeh prejšnjih slikah (slika 5.1 in 5.2).



Slika 5.3: Vpliv različnih natančnosti približnih koordinat točk geodetske mreže na rezultate izravnave

Figure 5.3: Influence of different a-priori accuracy on estimation results of geodetic net

5.3.2 Ocena vektorjev hitrost točk geodetske mreže

Funkcionalni model (oz. matematični model), predstavljen v poglavju 5.1, je bil definiran predvsem za oceno vektorjev hitrosti točk geodetske mreže. Model omogoča oceno poljubnega števila vektorjev hitrosti, od nobenega do vseh vektorjev hitrosti. V primeru, da ne ocenjujemo nobenega vektorja hitrosti (glej poglavje 5.3.1), se dodana pseudoopazovanja nanašajo neposredno na neznanke modela, zato določajo geodetski datum.

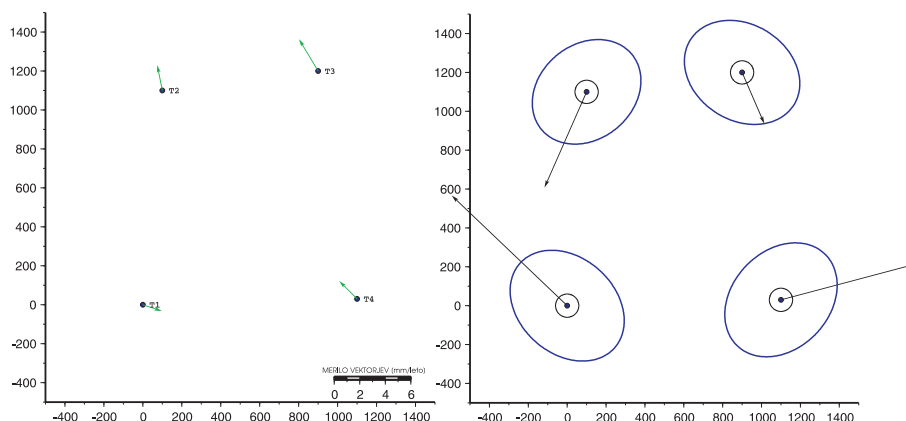
V primeru ocene vektorjev hitrosti, pa je vektor neznanek določen z dvema tipoma neznanek,

in sicer s koordinatami v referenčni epohi in z vektorji hitrosti točk. Položaj točke je v vsakem trenutku določen preko enačbe L-5.2. Psevdoopazovanja, ki predstavljajo položaje določenih točk (lahko samo nekaterih) v terminski izmeri s pripadajočimi natančnostmi, pa se ne nanašajo več neposredno na neznanke, so pa v linearni zvezi z neznankami in so povsem običajna opazovanja v matematičnem modelu. Obravnava opazovanj, neznank ter geodetskega datuma je tako povsem enaka kot v primeru klasične obdelave geodetske mreže (ocena samo koordinat) na podlagi približnih koordinat mreže točk (prosta mreža). Problem datuma mreže za koordinate ni problematičen (določen je s psevdoopazovanji), v primeru vektorjev hitrosti pa je problematičen. Tako vidimo, da je datum v primeru ocenjevanja koordinat in hitrosti točk mreže določen z osmimi parametri. Koordinate točk mreže imajo štiri datumske parametre (dva premika, zasuk in merilo), hitrosti pa ostale štiri, in sicer časovne spremembe datumskih parametrov koordinat, torej spremembo premika po obeh koordinatnih oseh, spremembo zasuka in spremembo merila.

Defekt datuma se pojavi le v primeru, ko imamo opazovane položaje GNSS samo v eni izmeri, v ostalih izmerah pa samo terestrična opazovanja. Če bi imeli določene položaje GNSS v več terminskih izmerah, defekta seveda ni. Če imamo v kateri izmed izmer opazovane dolžine, se defekt datuma zmanjša za ena (na tri), saj imamo preko obeh meril v različnih epohah določeno spremembo merila. Z opazovanimi dolžinami v eni terminski izmeri in opazovanimi položaji GNSS v drugi, lahko ocenimo to spremembo merila (razširjanje ali krčenje geodetske mreže). Ker terestrična opazovanja nimajo informacije o zasuku in premiku mreže, je to razširjanje določeno glede na težišče mreže, hkrati pa nimamo določenih sprememb premikov in zasuka geodetske mreže. Defekt datuma mreže odpravimo z vzpostavitev datuma z notranjimi opazovanji oz. mrežo obdelamo kot prosto mrežo. Prosta mreža povzroči, da so ocenjene hitrosti najmanjše možne in v vektorjih ni prisotnosti zasuka in premika (spremembe zasuka in premikov med mrežami). Zasuk se nanaša na zasuk mreže, določene s terestričnimi opazovanji, glede na mrežo, določeno preko GNSS. Enako velja za premik. Realizacija proste mreže je izvedena z Moore-Penroseovo psevdoinverzijo (Pelzer, 1980; Pelzer, 1985). Izračun psevdoinverzije poteka preko razcepa na singularne vrednosti.

Glede na razmerje opazovanj (tudi psevdoopazovanj), neznank modela in datuma geodetske mreže imamo tri variante obdelave. Prva varianta je pridobitev samo koordinat točk mreže. Tu je datum določen s psevdoopazovanji. Druga možnost je ocena vektorjev hitrosti na vseh razen na dveh točkah mreže. Geodetski datum vektorjev hitrosti določata

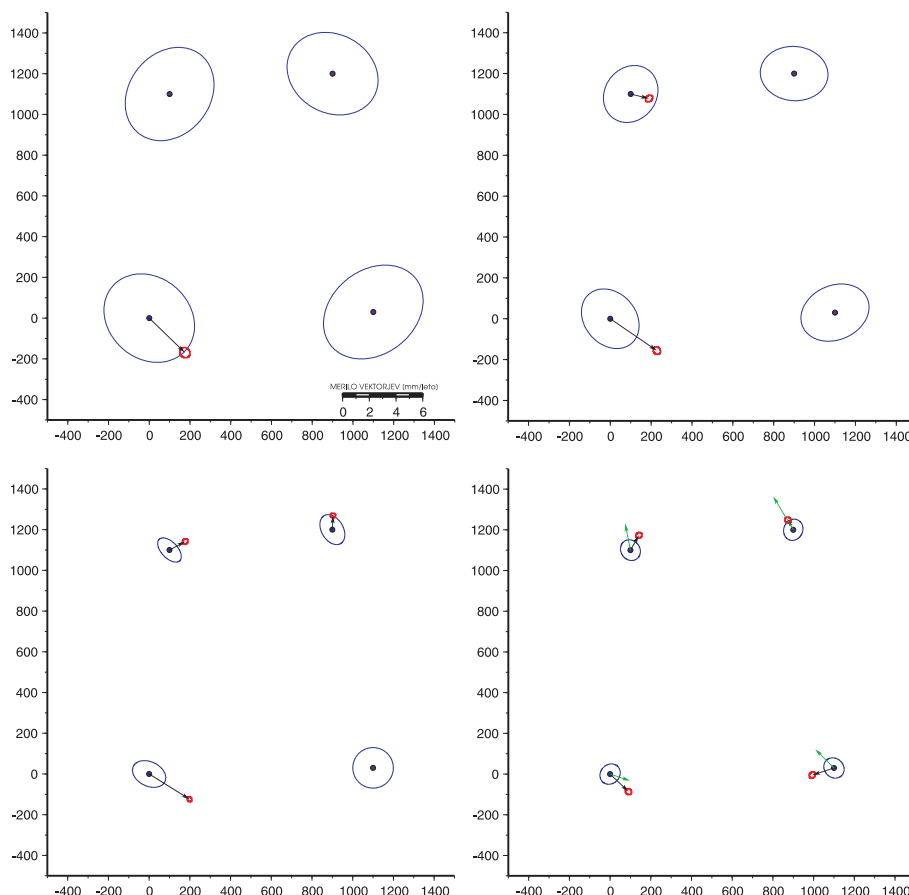
ti dve točki, medtem ko geodetski datum koordinatam določajo psevdopazovanja. Tretja varianta je ocena hitrosti na vseh točkah geodetske mreže. Tu je geodetski datum vektorjev hitrosti definiran s prosto mrežo, koordinatam pa se določi preko psevdopazovanj. Pogoji proste mreže (poglavje 3.3.3) se prenesejo na vektorje hitrosti in so pogojeni s spremembami zasuka, merila in premikov.



Slika 5.4: Primer simulacije geodetskega četverokotnika z vektorji hitrosti točk (levo) in ocena samo koordinat točk mreže (desno)

Figure 5.4: Simulation of geodetic quadrilateral with velocity vector (left) and estimation of coordinates of points in net only (right)

Vzemimo geodetski četverokotnik, kot je prikazan na levi sliki 5.4. V tem četverokotniku smo predpostavili a-priori vektorje hitrosti (velikost približno 1-3 mm/leto), kot so prikazani na levi strani slike (5.4). Za primer treh terminskih izmer smo simulirali opazovanja, in sicer triangulacijske izmere (epoha t), trilateracijske izmere (epoha $t + 10$) in izmere GNSS (epoha $t + 20$). V vsaki epohi izmere smo predpostavili približno 1.5 mm natančnost opazovanih količin; za smeri $0.3''$, za dolžine $1.0 \text{ mm} + 1.0 \text{ ppm}$ in 1.5 mm za koordinate določene preko GNSS. V 10 časovnih enotah bi bil premik točke okoli 1-3 cm, vsaka izmera bi dala mm natančnost ocenjenih položajev, tako da so spremembe položajev očitne. Desna stran slike (5.4) prikazuje rezultate obdelave (datum definiran preko psevdopazovanj), če v mreži ne ocenjujemo vektorjev hitrosti, ampak samo koordinate. Kljub visoki natančnosti opazovanih količin, je dobljena slaba natančnost (prikazane standardne elipse pogreškov) in veliki popravki ocenjenih koordinat. Razmerje a-posteriori in a-priori referenčne variance (globalni test) je 50. Rezultat je pričakovan, saj je eden od razlogov zavrnitve globalnega testa tudi napačni matematični model.



Slika 5.5: Prikaz postopne ocene vektorjev hitrosti na točkah geodetskega četverokotnika in primerjava ocenjenih vektorjev z a-priori vektorji (slika desno spodaj)
 Figure 5.5: Demonstration of gradual velocity vector estimation on point in geodetic quadrilateral and a comparison made to a-priori vectors

Zanima nas, kaj se zgodi, če postopoma ocenjujemo vektorje hitrosti. Slika 5.5 prikazuje postopno oceno vektorjev hitrosti simulirane mreže. Modre standardne elipse prikazujejo natančnosti ocenjenih koordinat točk v referenčni epohi ($t + 15$), ocenjeni vektorji hitrosti so prikazani s črnimi vektorji in z rdečimi standardnimi elipsami (natančnost določenih vektorjev hitrosti). Natančnost in točnost rezultatov se povečujeta, saj je matematični model vedno bolj podoben simuliranemu stanju. Spodnja desna slika prikazuje slučaj, ko ocenjujemo vse vektorje hitrosti (črni vektorji) in vse koordinate točk. V tem primeru je bil defekt datuma tri in je rešitev podana preko psevdoinverzije (singularni razcep) sistema normalnih enačb. Zeleni vektorji predstavljajo a-priori vektorje hitrosti. Prva ocena na podlagi slike 5.5 je, da je očitna razlika med ocenjenimi in a-priori vektorji. Druga

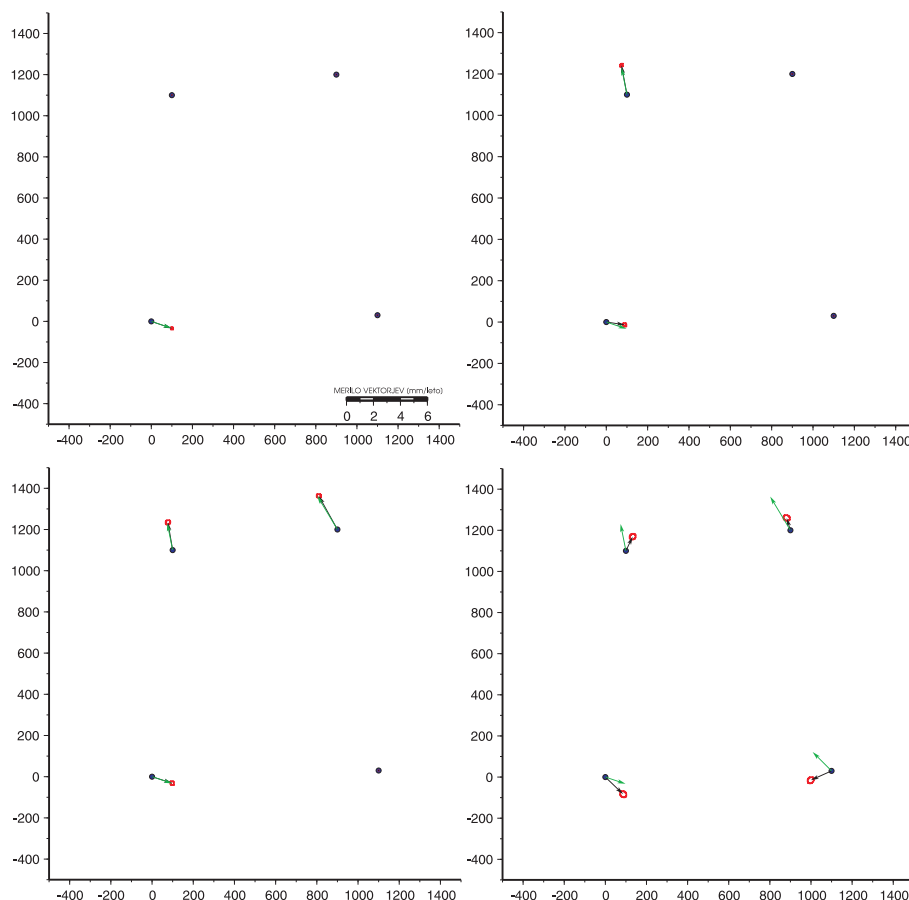
ocena je, da so elipse pogreškov določenih koordinat zelo podobne tistim iz slike 5.1 za rešitve proste mreže (modre elipse).

Edina logična razlaga za razliko a-priori in ocenjenih vektorjev je v datumu mrež posameznih izmer. Ker kotna in dolžinska opazovanja nimajo informacij o premiku in zasuku mreže, so ocenjeni vektorji hitrosti posledica relativnih premikov med točkami in spremembe merila. Elipse pogreškov določenih koordinat so podobne rezultatom proste mreže samo zato, ker so tudi te elipse rezultat proste mreže, kljub opazovanjem GNSS. Slika 5.5 prikazuje dejstvo, da so v oceni samo koordinat mreže opazovanja GNSS psevdopazovanja, v oceni vektorjev hitrosti pa samo običajna opazovanja.

Vsi vektorji hitrosti iz slike 5.5 so različni od a-priori podanih vektorjev, tako da izgleda, kot da metoda ne oceni pravih vrednosti vektorjev. Za prikaz pravilnosti matematičnega modela je potrebno simulirati opazovanja tako, da postopoma dodajamo na točkah vektorje hitrosti in obravnavamo ostale točke kot stabilne. Slika 5.6 prikazuje oceno vektorjev hitrosti, kjer je poleg ocenjene hitrosti posamezne točke (črni vektor) prikazan tudi a-priori vektor hitrosti. Iz zgornjih dveh slik je razvidno, da je ocenjeni vektor dejansko enak a-priori vektorju. Razlika je le zaradi pogreškov opazovanj (če pogreškov ni, so vektorji identični). Pri spodnji levi sliki, ko ocenjujemo vektorje hitrosti za tri točke, je defekt datuma mreže dejansko ena. Geodetska mreža je določena kot prosta mreža. Na spodnji desni sliki, pa je defekt datuma 3, zasuk in premiki vektorjev niso določeni, zato tudi taka velika razlika med a-priori in ocenjenimi vektorji. Iz vseh štirih slik na sliki 5.6 je razvidno, da je metoda ocene vektorjev hitrosti prava.

5.4 Ocenjeni vektorji hitrosti in geodetski datum

V poglavju 5.3.2 je bilo prikazano, da metoda ocene vektorjev hitrosti da prave rezultate v primeru, ko ni defekta datuma geodetske mreže oz., ko vektorjev ne ocenjujemo na vsaj dveh točkah v mreži. V primeru ocene vseh vektorjev hitrosti, pa se le-ti bistveno razlikujejo od pravih vektorjev (a-priori podanih na sliki 5.6). Razlika se pojavi zaradi definiranja geodetskega datuma proste mreže, ki povzroči minimalno vrednost norme vektorja popravkov približnih vrednosti neznank (Vaníček in Krakiwsky, 1986). Pogoji proste mreže, zapisani v poglavju 3.3.3, se nanašajo samo na popravke vektorjev hitrosti točk, saj je geodetski datum za ocenjene koordinate podan s psevdopazovanji. S številom ocenjenih vektorjev se spreminjajo samo vrednosti vektorjev, na ocenjene koordinate pa

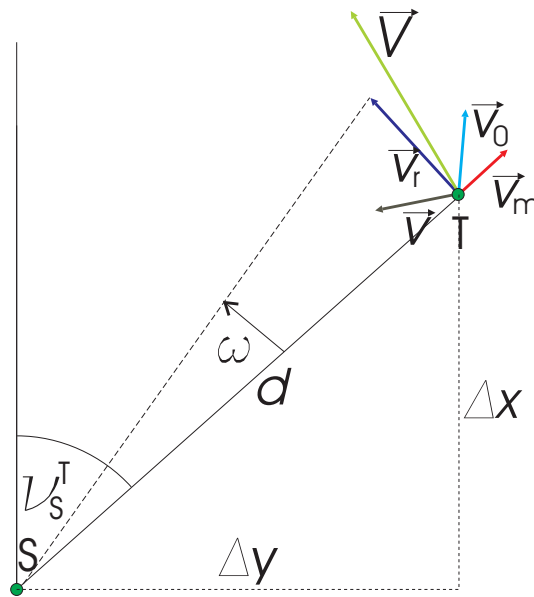


Slika 5.6: Prikaz postopne ocene vektorjev hitrosti, kjer premika na ostalih točkah ni
 Figure 5.6: Gradual estimation of velocities, where no velocities are present on other
 points

to nima vpliva. Razlika oz. povezava med ocenjenimi vektorji in pravi vektorji, ko ocenjujemo vse vektorje, je v prisotnih datumskih informacijah v pravih vektorjih. Pravi vektorji imajo poleg relativnih premikov točk glede na ostale točke prisotno tudi neko skupno hitrost (\vec{v}_0), enako vsem vektorjem v mreži, neko rotacijsko vektorsko polje glede na težišče mreže (\vec{v}_r) in neko radialno vektorsko polje glede na težišče mreže - vpliv merila (\vec{v}_m).

Slika 5.7 prikazuje sestavo vseh vektorjev v mreži. Vektor \vec{V} predstavlja pravi vektor in \vec{v} vektor, ki določa samo relativno hitrost glede na druge vektorje. Točka S predstavlja težišče mreže in d oddaljenost točke T od težišča mreže. Tako lahko zapišemo:

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{v}_m \quad (\text{L-5.19})$$



Slika 5.7: Komponente vektorjev hitrosti točk geodetske mreže in vpliv sprememb datumskih parametrov v vektorjih hitrosti

Figure 5.7: Velocity vectors components and influence of datum alteration in those vectors

Vektor zasuka in spremembe merila sta medseboj pravokotna, tako da se lahko izrazita preko smerne kota ν (s težišča S na obravnavano točko T) in oddaljenosti d . Po komponentah tako lahko zapišemo kot:

$$V_y = v_y + v_{y0} + v_{yr} + v_{ym} = v_y + v_{y0} - d\omega \cos \nu + d s \sin \nu \quad (\text{L-5.20})$$

$$V_x = v_x + v_{x0} + v_{xr} + v_{xm} = v_x + v_{x0} + d\omega \sin \nu + d s \cos \nu$$

V enačbi L-5.20 je ω sprememba zasuka celotne mreže oz. rotacijsko vektorsko polje med koordinatnimi sistemi posameznih izmer, s pa sprememba merila oz. radialno vektorsko polje. Glede na obliko izračuna smerne kota (odvisnost od dolžine), pa enačbo L-5.20 lahko poenostavimo:

$$V_y = v_y + v_{y0} - \omega \Delta x + s \Delta y \quad (\text{L-5.21})$$

$$V_x = v_x + v_{x0} + \omega \Delta y + s \Delta x$$

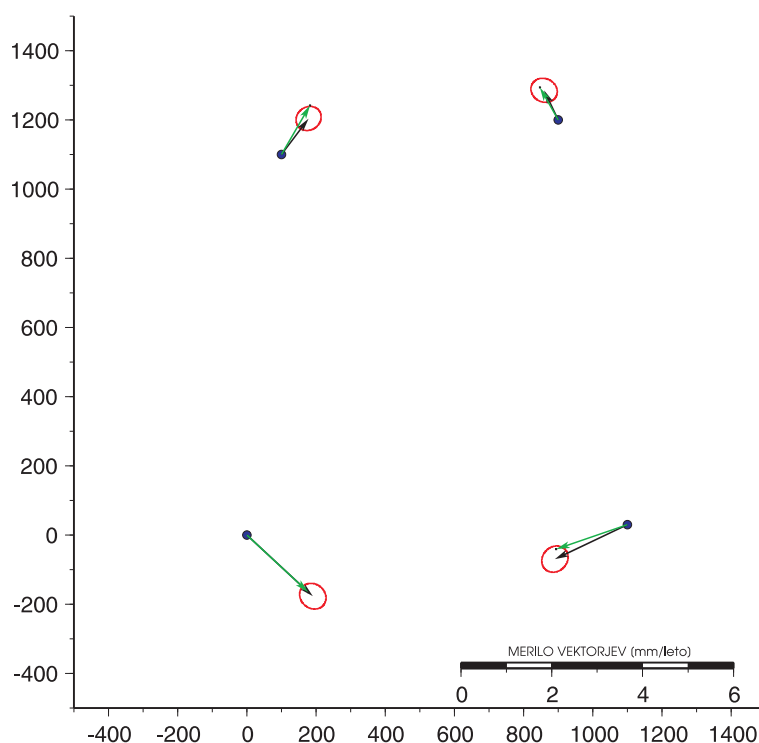
Enačba L-5.21 predstavlja, kako je sestavljen vsak vektor hitrosti (\vec{V}) v geodetski mreži, če se skozi čas mreža deformira (\vec{v}), poleg tega pa med zaporednimi izmerami celo mrežo premikamo (\vec{v}_0), sučemo (\vec{v}_r) in raztegujemo ali krčimo (\vec{v}_m). Prisotnost vektorjev \vec{v}_0 , \vec{v}_r in

\vec{v}_m je samo zaradi spremembe geodetskega datuma med različnimi terminskimi izmerami. Da zagotovimo prave vrednosti vektorjev hitrosti, ki opisujejo samo relativno spremembo položaja točke glede na druge točke, moramo vsak vektor reducirati za datumske spremembe. Komponente vektorjev hitrosti, ki so posledica sprememb datumskih parametrov, ocenimo na podlagi posrednega modela izravnave po MNK, kjer enačbe popravkov sestavimo iz enačb L-5.21.

Izračun prisotnosti datumskih sprememb v izravnanih vektorjih hitrosti točk geodetske mreže v odvisnosti od težišča mreže se nanaša predvsem na rezultate obdelave proste mreže. Pri prosti mreži se parametri geodetskega datuma nanašajo na težišče mreže. Izbira koordinatnega sistema v enačbi L-5.21 pa je povsem trivialna, saj je gibanje točke neodvisno od izbranega koordinatnega sistema. Tako je povsem vseeno, ali računamo datumske informacije v vektorjih hitrosti (\vec{v}_0 , \vec{v}_r in \vec{v}_m) v enem ali v drugem koordinatnem sistemu. V obeh primerih nam enako določi datumske vektorje, ki so izračunani na podlagi različnih vrednosti sprememb merila, zasuka in premika.

Vzemimo primer določenih vektorjev hitrosti iz slike 5.6, in sicer spodnjo desno sliko. A-priori vektorji (zeleni vektorji) so bili vhodni podatek za simulacijo opazovanj v različnih epohe. V postopku izravnave so bile poleg koordinat ocenjene tudi koordinatne komponente vektorjev hitrosti vseh štirih točk mreže (črni vektorji). Vektorji hitrosti so bili ocenjeni na podlagi treh izmer (glej poglavje 5.3.2, stran 68). Prva izmera je bila triangulacijska (opazovani koti), druga trilateracijska (opazovane dolžine) in tretja izmera GNSS (opazovani položaji točk). Triangulacijska mreža nima datumskih informacij, trilateracijska mreža vsebuje informacijo o merilu mreže, mreža GNSS pa vsebuje vse datumske informacije. Ocenjeni vektorji hitrosti so, poleg relativnih sprememb položajev točk, obremenjeni tudi s spremembami datumskih parametrov med izmerami. Edini datumski parameter, ki nastopa v vsaj dveh izmerah je tako merilo. Trdimo lahko torej, da so ocenjeni vektorji hitrosti obremenjeni samo s spremembo merila med trilateracijsko izmero in izmero GNSS. Slika 5.8 prikazuje reducirane a-priori in ocenjene vektorje hitrosti točk. Glede na spodnjo desno sliko na sliki 5.6 vidimo veliko večjo podobnost med a-priori in ocenjenimi vektorji. Razlika je samo še zaradi prisotnosti slučajnih pogreškov v opazovanjih, saj je v primeru odsotnosti slučajnih pogreškov rezultat redukcije ocenjenih in a-priori vektorjev povsem enak.

Preglednica 5.1 prikazuje ocenjene vrednosti datumskih parametrov obeh tipov vektorjev



Slika 5.8: Reducirani vektorji hitrosti za vpliv datumskih informacij v primeru a-priori (zeleni vektorji) in ocenjenih (črni vektorji) vektorjev hitrosti

Figure 5.8: Velocity vectors reduced for datum alteration in case of a-priori (green vectors) and estimated (black) velocity vectors

iz slike 5.8. Iz preglednice je razvidno, da so vsi ocenjeni datumski parametri pri a-priori vektorjih različni od nič. A-priori vektorji so pravi vektorji in vsebujejo vse datumске informacije, kar je iz preglednice razvidno. Ocenjeni vektorji hitrosti pa so ocenjeni na podlagi proste mreže, kjer je bil defekt datuma 3 (zasuk in oba premika), merilo je bilo določeno preko opazovanj (dolžine, položaji GNSS). Zato je bilo pričakovati, da bo edina datumška informacija v ocenjenih vektorjih sprememba merila. Spodnja preglednica to potrjuje, vrednosti različne od nič za premika in zasuk pa so posledica prisotnosti slučajnih pogreškov v simuliranih opazovanjih. Če slučajnih pogreškov ne bi bilo, bi bile prve tri vrednosti v preglednici za ocenjene vektorje enake nič.

Preglednica 5.1: Ocenjene spremembe datumskih parametrov v a-priori in izravnanih vektorjih

Table 5.1: Estimated datum parameters alteration in a-priori and estimated vectors

Datumski parameter	A-priori vektorji	Izravnani vektorji
Δt_y [mm/leto]	-0.4 ± 0.0	0.0 ± 0.1
Δt_x [mm/leto]	1.4 ± 0.0	0.2 ± 0.1
$\Delta \omega$ ["/leto]	0.2218 ± 0.0014	-0.0023 ± 0.0347
Δs [ppm/leto]	0.0502 ± 0.0067	0.1638 ± 0.1368

5.5 Deformacijski tenzor geodetskega četverokotnika

Oceno komponent deformacijskega tenzorja se lahko prikaže na primeru geodetskega četverokotnika iz slike 5.8. V obdelavo vzamemo reducirane vektorje hitrosti, kjer (glede na poglavje 5.4) ni prisotnosti zasuka in premikov po koordinatnih oseh. Enačbe popravkov nastavimo glede na enačbo L-4.4, kjer predpostavimo homogene deformacije na območju celega četverokotnika. V obdelavi ocenimo samo komponente tenzorja malih deformacij in pripadajoče natančnosti ($u_{x0} = u_{y0} = \omega_z = 0$). Komponente deformacijskega tenzorja se nanašajo na časovno dobo 20 časovnih enot, saj je bil časovni interval med prvo in zadnjo simulirano izmero 20. Rezultate ocene komponent tenzorja malih deformacij s posredno izravnavo po MNK predstavlja preglednica 5.2.

Preglednica 5.2: Komponente tenzorja malih deformacij geodetskega četverokotnika

Table 5.2: Strain tensor components of small deformation of geodetic quadrilateral

Komponenta tenzorja	ε [10^{-6}]	σ_ε [10^{-6}]
ε_{xx}	-43.6	8.3
ε_{yy}	30.9	6.7
ε_{xy}	2.6	5.0

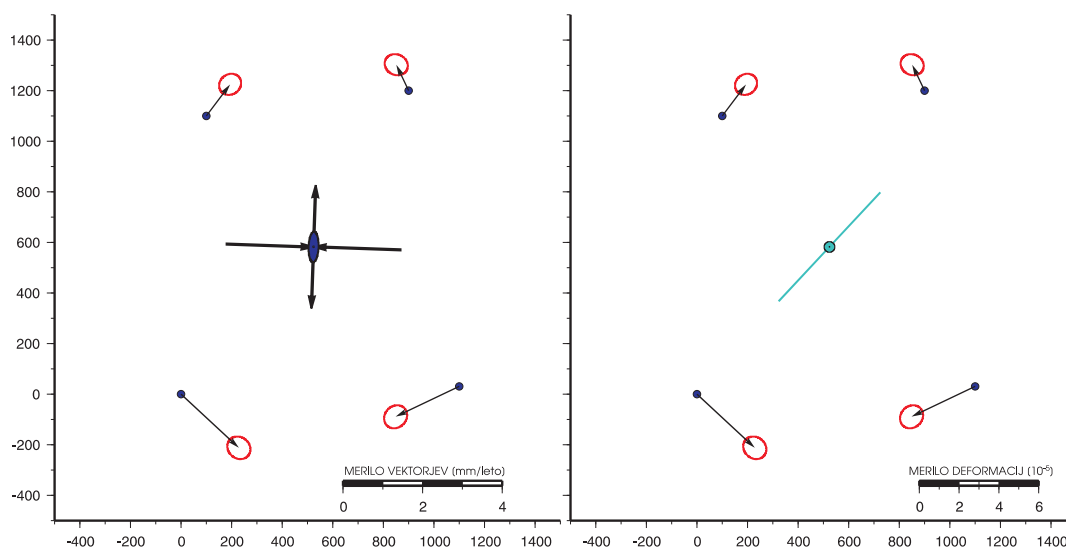
Glavne normalne in glavne strižne deformacije s pripadajočimi smermi in natančnostmi se računajo po enačbah iz poglavij 2.9.1 in 2.9.2. Preglednica 5.3 prikazuje glavne normale in glavne strižne deformacije, ki so bile izračunane iz deformacijskega tenzorja,

predstavljenega v preglednici 5.2. Natančnosti glavnih normalnih in strižnih deformacij s pripadajočimi smermi so izračunane po zakonu o prenosu varianc in kovarianc.

Preglednica 5.3: Glavne normalne in glavne strižne deformacije geodetskega četverkotnika

Table 5.3: Principal strain, directions and principal shear strain of geodetic quadrilateral

Glavne normalne deformacije		Glavne strižne deformacije	
ε_{G1}	$31.0 \pm 2.4 [10^{-6}]$	γ_I	$37.3 \pm 2.6 [10^{-6}]$
ε_{G2}	$-43.7 \pm 7.6 [10^{-6}]$	γ_{II}	$-37.3 \pm 2.6 [10^{-6}]$
α_{G1}	$88.0 \pm 0.0 [^\circ]$	α_{γ_I}	$43.0 \pm 0.0 [^\circ]$



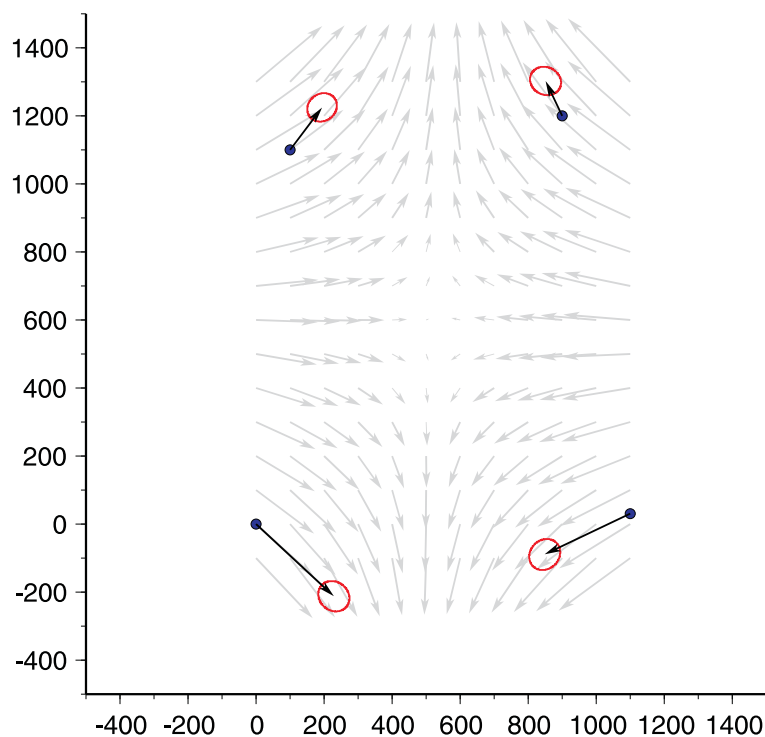
Slika 5.9: Prikaz glavnih normalnih in strižnih deformacij na primeru geodetskega četverkotnika

Figure 5.9: Principal strain and directions and principal shear strain on a case of geodetic quadrilateral

Slika 5.9 prikazuje glavne normalne (leva slika) in glavne strižne (desna slika) deformacije, pridobljene na podlagi vseh vektorjev hitrosti geodetskega četverkotnika, ki so predstavljene glede na težišče četverkotnika. V primeru glavnih normalnih deformacij predstavljajo pravokotni vektorji smeri in velikosti obeh glavnih normalnih deformacij. Če je vektor usmerjen stran od centra elipse, potem gre v tej smeri za raztegovanje, če je pa

usmerjen v center elipse, pa gre v smeri vektorja za krčenje. Elipsa prikazuje natančnost določenih glavnih deformacij, s stopnjo zaupanja 0.4. Strižne deformacije so predstavljene na desni sliki, kjer je velikost glavne strižne deformacije podana s polovico dolžine daljice. Smer glavnih strižnih deformacij je podana z naklonom daljice in natančnost s standardno elipso pogreškov.

Obravnavane deformacije, komponente tenzorja deformacij iz preglednice 5.2 s pripadajočimi natančnostmi in ekstremne vrednosti deformacij iz preglednice 5.3, se nanašajo na akumulirane premike v obdobju 20 let. Glede na enačbo L-4.4 lahko za homogene deformacije določimo vektorsko polje hitrosti premika na območju geodetskega četverkotnika. Vektorsko polje je predstavljeno na sliki 5.10. Vidno je, da se ocenjeni vektorji dokaj dobro prilegajo ocenjenemu polju vektorjev hitrosti.



Slika 5.10: Prikaz vektorskega polja hitrosti, določenega preko deformacijskih parametrov ocenjenih iz vektorjev hitrosti na točkah geodetskega četverkotnika

Figure 5.10: Velocity vector field derived from estimated strain parameters based on velocity vectors in points in geodetic quadrilateral

6 ASTROGEODETSKA MREŽA SLOVENIJE

6.1 Zgodovina astrogeodetske mreže (AGM) Slovenije

Astrogeodetska mreže Slovenije, kot jo poznamo danes, izhaja še iz leta 1808, ki jo je v okviru Avstroogrške monarhije začel razvijati Cesarski in kraljevi vojaško-geografski inštitut iz Dunaja. Opazovanja v mreži so bila obdelana v ravnini in niso bila strogo izravnana, tako je bila zaradi nenatančnosti kmalu neuporabna. Mrežo so v letih 1867 in 1884 ponovno izmerili v okviru Srednjeevropskih gradusnih merjenj. Opazovanja so bila izravnana po MNK na Besselovem elipsoidu. Leta 1917 je bila mreža preračunana v Gauss-Kruegerjevo projekcijsko ravnino (Stopar, 1995).

Po I. svetovni vojni je mrežo podedovala Kraljevina SHS in nanjo navezala mreže Srbije, Makedonije in na novo razvito mrežo Bosne in Hercegovine. V AGM Slovenije ni bilo nobene astronomsko določene trigonometrične točke, zato so mrežo naslonili na eno izmed avstroogrških trigonometričnih točk 1. reda, ki je bila določena na podlagi izhodiščne osnovne točke Hermannskogel pri Dunaju, za katero pa je bilo kasneje ugotovljeno, da ima napačne astronomske koordinate. Kraljevina SHS je na podlagi na novo izračunanih koordinat točk na območju Srbije začela z obnovo AGM Slovenije na zahodu z novimi izmerami in preračuni. Dela na območju Slovenije so se začela leta 1939 a se zaradi II. svetovne vojne niso končala. Po vojni so dela in izračune zaključili, mreža pa je končno obliko dobila v letih 1947 in 1948, ko se je dokončno določila meja z Italijo. Leta 1948 je bila mreža dokončno preračunana (Stopar, 1995). Koordinate preračuna so še vedno uradne koordinate AGM Slovenije, z oznako Datum 48. Vendar pa je položaj mreže na referenčnem Besselovem elipsoidu napačen, mreža ni homogene natančnosti in ima velike napake merila (Jenko, 1986).

V letih 1949 in 1965 se je začela snovati nova AGM na področju bivše Jugoslavije in tako posledično tudi na področju Slovenije. Dela so bila izvedena na dveh področjih, in sicer na spremembi oblike mreže in na novih stabilizacijah točk. Mreža se je spremenila predvsem na mejnem območju z Italijo, saj določene točke ležijo na območju italijanskega ozemlja (177 Opčine, 178 Oglej in 221 Videm). Točke so nadomestili z novimi na slovenskem ozemlju (518 Korada, 519 Kremenjak). Nove stabilizacije so bile povezane predvsem zaradi dotrajanosti betonskih stebrov in so bile izvedene na položajih ali v bližini starih točk. Vsaka točka je bila dodatno opremljena tudi s tremi do štirimi bočnimi zavarovanji.

Z novo stabilizacijo se je v večini primerov spremenila nadmorska višina točk (Jenko, 1986).

V letih 1963 in 1965 so se izvedla kotna opazovanja na vseh točkah mreže in mikrotriangulacijske določitve bočnih zavarovanj točk (Jenko, 1986). Izmerjenih je bilo 222 smeri, ki so bile stojiščno izravnane. Leta 1965 sta bili s telurometrom izmerjeni tudi radovljiška in zagrebška baza ter še nekaj stranic v mreži (Jenko, 1986).

Po letu 1974 se je v okviru raziskovalnega projekta “Sistem geodetskih osnov v SRS” in v okviru raziskovalne naloge “Temeljne triangulacijske mreže v SRS” začela sanacija AGM Slovenije. Večina opravljenega dela se je nanašala na izmero velikega števila stranic v mreži za določitev merila mreže. Skupno je bilo izmerjenih 49 dolžin z dvema razdaljemeroma, in sicer AGA Geodimeter M8 in AGA Geodimeter 710. V sklopu naloge so določili tudi več kot 20 nadmorskih višin točk (Jenko, 1986). Rezultat projekta je bila stroga izravnava vseh opazovanj smeri in izmerjenih dolžin po MNK. Vendar pa ima mreža zaradi nepoznavanja geoida na območju Slovenije dve pomanjkljivosti, in sicer neupoštevanje odklonov navpičnice pri smereh in redukcije dolžin na referenčno ploskev z nadmorskimi višinami namesto z elipsoidnimi (Stopar, 1995).

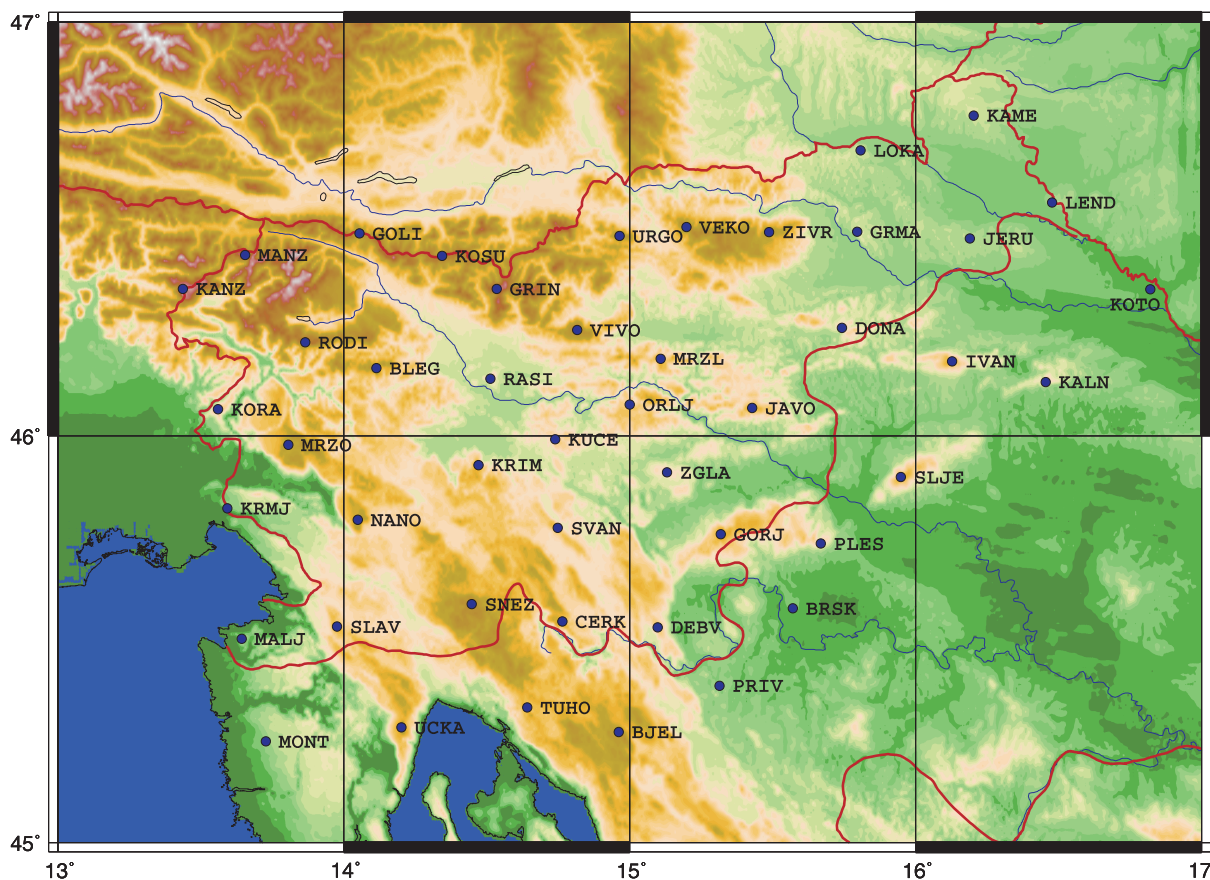
6.2 Oblika in velikost AGM Slovenije

Celotna AGM Slovenije na območju Republike Slovenije in delu Republike Hrvaške obsega 46 trigonometričnih točk, ki skupaj tvorijo 66 trikotnikov. Zaradi zahtev terestrične geodezije, je mreža triangulacijska mreža, kjer so točke stabilizirane z betonskimi stebri na vrhovih visokih vzpetin. Celotna mreža pokriva območje velikosti 260×180 km, kjer so stranice med točkami velikosti od 20 do približno 50 km (Stopar, 1995).

Samo na območju Slovenije je stabiliziranih 34 točk, ki pokrivajo ozemlje velikosti 230×140 km in sestavljajo 46 trikotnikov (Stopar, 1995). V AGM Slovenije smo vključili tudi trigonometrično točko 1. reda Gorjanci, ki se nahaja na hrvaškem ozemlju, a dejansko ni del AGM Slovenije. Slika 6.1 prikazuje triangulacijske točke 1. reda AGM Slovenije.

6.3 Izvedena opazovanja na AGM Slovenije

V okviru pričujoče naloge smo imeli na razpolago opazovanja iz treh različnih terminskih izmer. Prva so kotna opazovanja v letih 1963 in 1965, druga so dolžinska opazovanja v



Slika 6.1: Točke AGM Slovenije

Figure 6.1: Points in astrogeodetic net of Slovenia

letih 1975 in 1982 ter zadnja opazovanja GNSS leta 1995 (izmera EUREF na območju Slovenije) za potrebe vzpostavitve novega koordinatnega sistema.

6.3.1 Terestrična opazovanja na AGM Slovenije

Kotna opazovanja so bila izvedena v letih 1963 in 1965 s teodolitom Wild T4, kjer je bilo opazovanih 222 smeri. Razen vrednosti opazovanih smeri in védenja, da so bila opazovanja stojiščno izravnana (zapiranje smeri na stojišču v polni krog), nimamo nobenih zapisov o izmeri.

Z začetkom raziskovalnega projekta “Sistem geodetskih osnov v SRS” in v okviru le-tega raziskovalne naloge “Temeljne triangulacijske mreže v SRS”, se je začela sanacija SGM Slovenije. Namen raziskovalne naloge je bil raziskati natančnost obstoječe AGM Slovenije in metode sanacije AGM Slovenije. Obe nalogi sta bili izvedeni z opazovanimi dolžinami

stranic mreže (Jenko, 1986).

Oktobra leta 1975 sta ekipi Geodetskega Zavoda SRS in Vojnogeografskega inštituta izmerili 18 dolžin med točkami AGM Slovenije z elektronskim razdaljemerom AGA Geodimeter M8, takrat v lasti Vojnogeografskega inštituta. Od 18-tih opazovanih dolžin je bilo 16 stranic in 2 diagonali. V naslednjih dveh letih (1976 in 1977) so z namenom zgostitve opazovanih dolžin dodatno izmerili še 8 dolžin z elektronskim razdaljemerom AGA Geodimeter 710. Leta 1978 je bila izvedena izravnava z vsemi opazovanimi smermi in 24-imi opazovanimi dolžinami. Popravki dolžin niso bili večji kot 5 cm (Jenko, 1986).

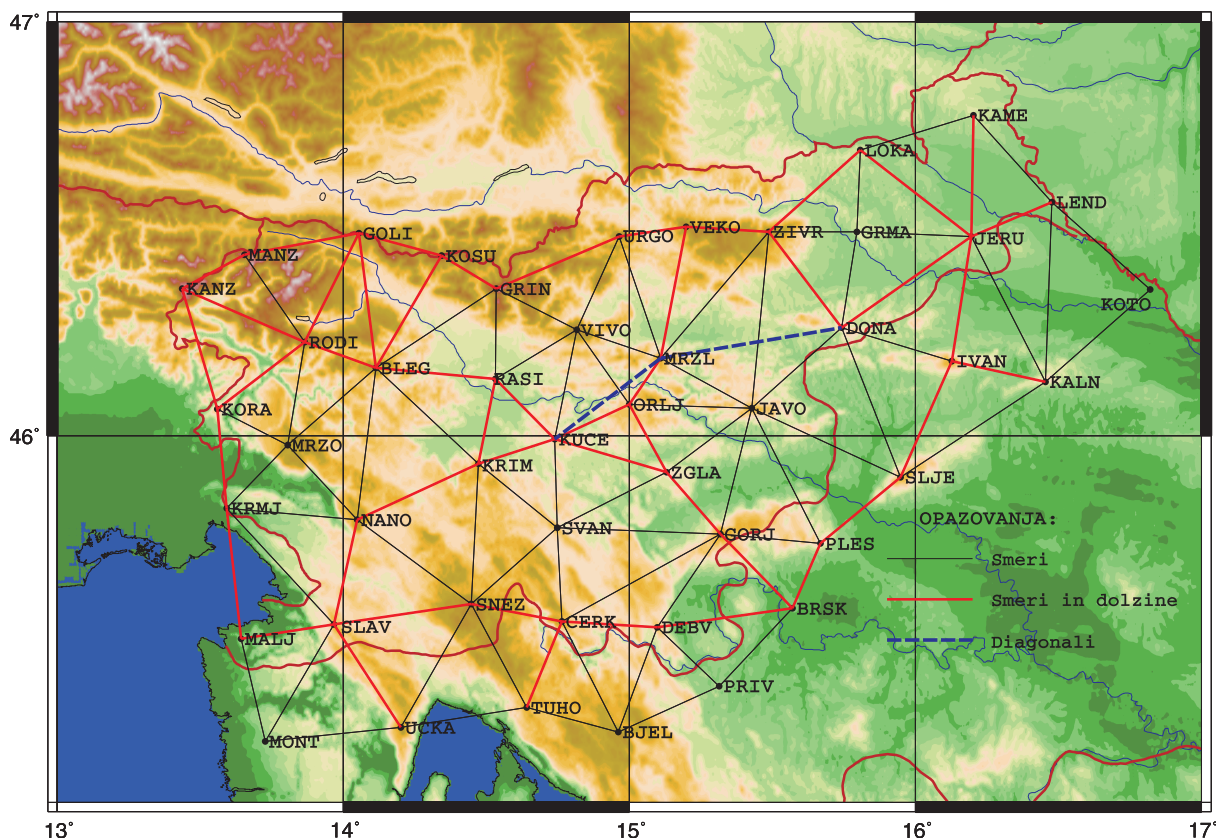
V letih 1980 in 1981 je bilo, predvsem zaradi uspešno realizirane izravnave iz leta 1978, izmerjenih dodatno še 25 stranic, večino z AGA Geodimetrom M8. Skupno je bilo tako izmerjenih 47 stranic mreže AGM Slovenije in dodatno dve diagonali mreže. Izmed vseh 111 stranic je bilo tako izmerjenih 42% stranic. Na celotnem območju AGM Slovenije je bilo tako le 5 točk, ki niso bile opazovane z dolžinami (Jenko, 1986).

Leta 1982 je bila mreža ponovno izravnana, tokrat z vsemi kotnimi in dolžinskimi opazovanji. V nalogi je bila mreža tudi približno orientirana glede na referenčni elipsoid na podlagi Laplacejevih in geoidnih točk (Jenko, 1986). Mreža je bila izravnana kot kombinirana triangulacijska in trilateracijska mreža v lokalnem koordinatnem sistemu v ravnini projekcije. V izravnavi je bila ena točka dana, in sicer Zglavnica, dodatno je bila s fiktivno točko 599 (točka Kucelj) dana tudi opazovana smer proti točki Kucelj. Četrtri datumski parameter so zagotovile opazovane dolžine. Vrednosti referenčnih standardnih odklonov a-priori sta bili ocenjeni kot $\sigma_{\beta_0} = 0.45''$ in $\sigma_{d_0} = 0.038$ m (Jenko, 1986). V kasnejših raziskavah, se je z a-posteriori oceno izkazalo, da sta ti dve vrednosti nekoliko drugačni in za potrebe te naloge smo privzeli vrednosti $\sigma_{\beta_0} = 0.4197''$ in $\sigma_{d_0} = 0.06612$ m (Stopar, 1995). Slika 6.2 prikazuje izvedena terestrična opazovanja na AGM Slovenije.

6.3.2 Izmera GNSS na AGM Slovenije

EUREF predstavlja podkomisijo komisije X “Kontinentalne mreže”, ki je bila ustanovljena leta 1987 na zasedanju generalne skupščine IAG¹³ (IAG URL) v Vancouvru. Glavni namen podkomisije EUREF je bil vzpostavitev najnatančnejše 3R geodetske mreže, ki

¹³angl. International Association of Geodesy



Slika 6.2: Terestrična opazovanja izvedena na AGM Slovenije

Figure 6.2: Terrestrial observation carried out on astrogeodetic net of Slovenia

bo predstavljala osnovo za praktično realizacijo novega terestričnega koordinatnega sestava na območju Evrope. Novi koordinatni sistem naj bi temeljil na satelitskih tehnikah geodezije. Koordinatni sistem podkomisije EUREF se imenuje ETRS89 in sovpada z koordinatnim sistemom ITRS za leto 1989, kar je bilo določeno v Resoluciji 1 na skupščini v Firencah leta 1990. Posebnost koordinatnega sistema ETRS89 je, da je pričvrščen na evrazijsko litosfersko ploščo (Stopar in Kuhar 2001).

Z namenom navezave AGM Slovenije na koordinatni sistem ETRS so se na območju Slovenije izvedle tri kampanje EUREF GPS. Prva kampanja je bila izvedena leta 1994 z imenom EUREF SLO-CROV '94, v kateri je bilo opazovanih 8 točk na območju Slovenije. Druga kampanja je bila izvedena leto kasneje (1995) z imenom SLOVENIA '95, predvsem z namenom zgostitve mreže točk EUREF na območju Slovenije. V izmero je bilo vzetih vsega 57 točk, od tega vse točke AGM Slovenije. V letu 1996 se je izvedla še tretja izmera CROREF-CRODYN '96, ki pa je imela namen zgostitve mreže točk EUREF na območju

Hrvaške in vzdolž jadranske obale. V tretji izmeri je bilo opazovanih 5 točk na območju Slovenije (Berk in sod., 2003; Stopar in Kuhar, 2001). Rezultat vseh treh izmer so objavljeni položaji točk, vključenih v izmero v koordinatnem sestavu ETRF89, kjer so bili položaji točk uradno verificirani z dokumentom Berk in sod. (2003).

Na območju Slovenije je bilo opazovanih 49 točk v vseh treh kampanjah EUREF. Opazovanja so bila izvedena na vseh točkah AGM Slovenije in dodatno še na 12-ih točkah; na trigonometričnih točkah drugega reda ali geodinamičnih točkah. Pet točk, ki so bile opazovane že leta 1995 (Kucelj, Korada, Donačka gora, Malija in Velika Kopa), je dobilo oznako uradne točke EUREF statusa B, kar pomeni centimetrsko natančnost položaja v koordinatnem sestavu ETRF89. V izmerah EUREF so bile opazovane tudi vse točke AGM Slovenije na hrvaškem ozemlju.

Leta 2006 se je ponovno izvedla izmera EUREF, katere namen je bil predvsem določitev sprememb položajev uradnih 5-ih točk EUREF zaradi tektonike in navezave permanentnih postaj omrežja SIGNAL na koordinatni sestav ETRF89. V tej izmeri sta bili dodatno opazovani še točki Mangart in Kanin na podzemnem centru starih točk AGM Slovenije.

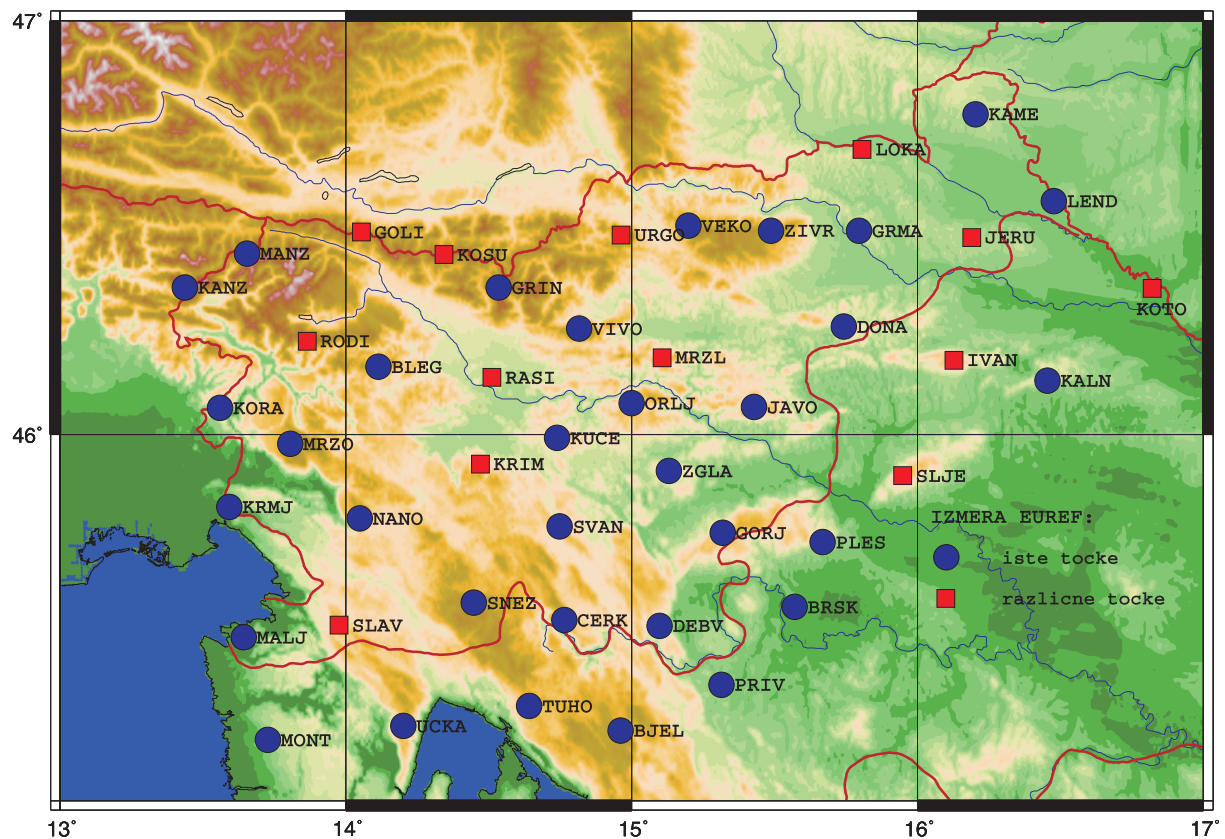
Zaradi poškodovanih ali uničenih betonskih stebrov na 13-tih točkah AGM Slovenije, je bila izmera EUREF na teh točkah izvedena na drugih lokacijah (druga stabilizacija točke) kot obe terestrični izmeri (poglavje 6.3.1). Slika 6.3 prikazuje opazovane točke mreže AGM Slovenije v izmeri EUREF in točke, ki so bile identične v vseh treh izmerah.

6.4 Priprava opazovanj na AGM Slovenije za obdelavo

Opazovanja so bila obdelana z namenom določitve vektorjev hitrosti točk AGM. Ti vektorji so bili pridobljeni na podlagi vseh treh izmer iz poglavja 6.3 po postopku, opisanem v poglavju 5. Imamo torej tri tipe opazovanj v treh različnih izmerah, kjer obdelava temelji na obdelavi terestričnih opazovanj v geodetski mreži z uvedbo psevdopazovanj v model (poglavje 5). Kot prvo je bilo potrebno pridobiti koordinate točk izmere EUREF s pripadajočimi natančnostmi.

6.4.1 Obdelava opazovanj izmere EUREF GNSS

Obdelava opazovanj izmere EUREF je potekala že leta 2003 (Berk in sod., 2003) in rezultati obdelave so uradne koordinate točk AGM Slovenije v koordinatnem sestavu ETRF89.



Slika 6.3: Izmera EUREF GPS na AGM Slovenije

Figure 6.3: EUREF GPS campaign on astrogeodetic net of Slovenia

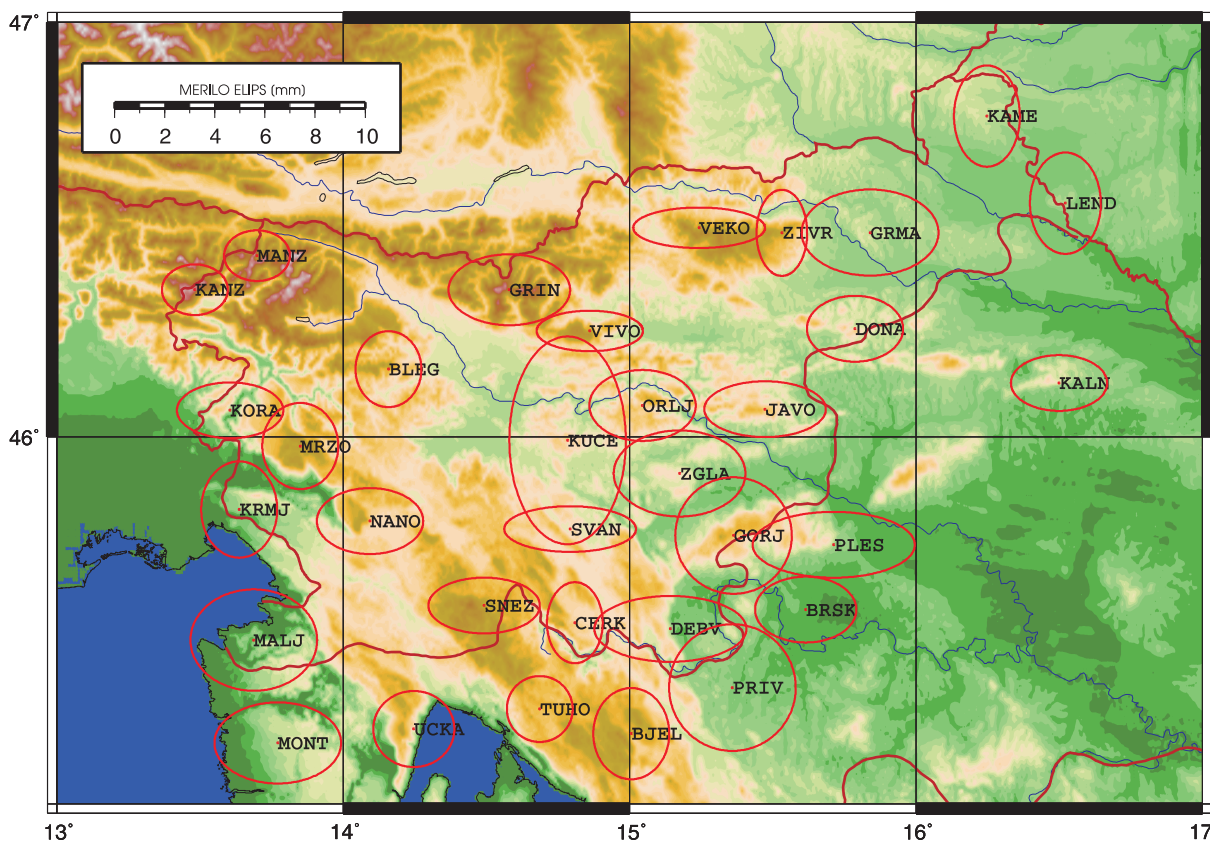
Kljub že izvedeni obdelavi in rezultatom, smo se odločili opazovanja za leto 1995 obdelati še enkrat. Vzrok za novo obdelavo je predvsem uporaba novejšje različice programskega paketa Bernese GPS Software, in sicer verzije 5.0, namesto starejšje verzije 4.2.

Obdelava je potekala v koordinatnem sestavu ITRF2005 po korakih in priporočilih, kot je to prikazano v Dach in sod. (2007) ter EUREF URL. Obdelava je potekala na podlagi dvojnih faznih razlik, sestavljenih iz L_3 linearne kombinacije opazovanj na nosilnih valovanjih. Položaji satelitov so bili določeni na podlagi preciznih efemerid, kjer so bili upoštevanji še parametri rotacije Zemlje, popravki ur satelitov, modeli atmosfere. . . (Dach in sod., 2007). Datum mreže GNSS je bil določen s poznanimi položaji permanentnih postaj v okolici Slovenije v koordinatnem sestavu ITRF2005, pridobljenih s spletne strani ITRF URL. Kriteriji izbire točk so bili predvsem natančnosti določenih položajev in hitrosti v ITRF2005, oddaljenost od Slovenije, čas operativnosti točke, izotropna razporeditev točk in podobno.

Obdelava je potekala v 4-ih korakih. Prvi korak predstavlja uvoz vseh podatkov, pomembnih za obdelavo, in pregled ter čiščenje opazovanj. Pregleda se tako kodna kot tudi fazna opazovanja. V tem koraku se nastavijo neznana števila celih valov, sinhronizira se čas sprejemnikov s časom GPS in odstrani grobo pogrešena opazovanja. V drugem koraku se na podlagi prečiščenih opazovanj določi t.i. realno rešitev. Realna rešitev pomeni oceno koordinat točk mreže in parametrov troposfere na podlagi realnih vrednosti neznanih števil celih valov. Realna rešitev se v tretjem koraku uporabi za oceno neznanih števil celih valov v območju celih števil. Pomembno je, da se v območju celih števil določi čim več neznanih števil celih valov, kar zagotavlja najvišjo natančnost iskanih položajev točk. Cele vrednosti neznanih števil celih valov se v četrtem koraku uporabijo za končno oceno položajev točk in parametrov troposfere. V vseh korakih je datum geodetske mreže GNSS določen s psevdopazovanji, kjer se predpostavi natančnost a-priori koordinat danih točk mreže na nivoju 1 cm. Končni vklop v sestav ITRF2005 se je izvršil s Helmertovo transformacijo ocenjenih položajev z danimi položaji točk IGS. Velikost odstopanj med danimi in transformiranimi koordinatami točk je merilo kakovosti obdelave. V našem primeru so bila odstopanja velikosti okoli 3-4 mm v horizontalni ravnini in do 6-7 mm po višini. Rezultati kažejo na kakovostno obdelavo podatkov.

Končni rezultat obdelave so tako položaji točk, pridobljeni v koordinatnem sestavu ITRF-2005 s pripadajočimi standardnimi odkloni. Izmere EUREF potekajo tako, da je vsaka točka opazovana vsaj tri dni, torej za vsako točko pridobimo tri različne položaje, saj izmere obdelamo za vsak dan posebej. Končni položaj je utežena sredina treh ocenjenih položajev in razpršenost, pridobljena iz odstopanj posameznih položajev od srednjega. Princip obdelave opazovanj GPS je podrobno opisan v Dach in sod. (2007) in ni tema te naloge. Slika 6.4 predstavlja ocenjene natančnosti položajev točk mreže, določenih iz izmer EUREF.

Prehod iz ITRF2005 v ETRF89 se opravi s transformacijo, opisano v Boucher in Altamimi (2007). Transformacija se opravi za primere kampanj GNSS, ko ne poznamo vektorjev hitrosti točk v koordinatnem sestavu ITRF. Položaji vseh točk so se določili glede na epoho opazovanj, torej epoho 1995.75, razen za točki Mangart in Kanin (epoha 2006.71). Koordinate točk, pridobljene v ETRF89 v epohah izmer s pripadajočimi natančnostmi, so služile kot psevdopazovanja v obdelavi terestričnih opazovanj. Za točke, ki niso skupne pri terestrični izmeri in izmeri EUREF, smo vzeli položaj iz dela Jenko (1986) in ga



Slika 6.4: Rezultati obdelave izmer EUREF za točke AGM Slovenije in delu ozemlja Hrvaške

Figure 6.4: Estimation results of EUREF campaign on astrogeodetic net in Slovenia and a part of territory in Croatia

transformirali v koordinatni sestav ETRF89. Natančnost teh položajev je bila nastavljena na 20 cm po koordinatni osi.

6.4.2 Redukcija terestričnih opazovanj

Funkcionalni model obdelave terestričnih opazovanj z dodanimi psevdopazovanji je prikazan v poglavju 5.1. Obdelava poteka v ravnini, torej je potrebno rezultate obdelave izmer EUREF in terestrične podatke reducirati v ravnino kartografske projekcije. Pri redukciji smo uporabili GRS80¹⁴ globalni referenčni elipsoid, saj se koordinatni sestav ETRF (in ITRF) nanaša na ta elipsoid.

¹⁴angl. Geodetic Reference System 1980 (Heiskanen in Moritz, 1996)

V primeru določevanja položaja točke v 3R prostoru, opazovanj ne reduciramo, izjema so le meteorološki popravki in pogreški inštrumentov. Ko določamo horizontalni položaj, pa moramo opazovanja reducirati na referenčno ploskev in po želji naprej v kartografsko projekcijo. Opraviti je potrebno dva tipa redukcij, in sicer redukcije zaradi vpliva težnostnega polja na opazovanja ter redukcije zaradi geometrije elipsoida (Featherstone in Rüeger, 2000; Heiskanen in Moritz, 1996; Kogoj, 2002; Sideris, 1990; Stopar, 1995; Torge, 1991; Vaníček in Krakiwsky, 1986).

Redukcija opazovanih smeri

Kotna opazovanja s stojiščne točke na vizirane točke se nanašajo na težiščnico v stojiščni točki, opazovanja so izvedena v lokalnem astronomskem koordinatnem sistemu. Naš cilj je predstaviti opazovane smeri v ravnini kartografske projekcije.

Pri redukciji opazovanih smeri upoštevamo odklon navpičnice pri dveh popravkih, ki jih imenujemo popravek zaradi odklona navpičnice in predstavljata razširjeno Laplacejevo enačbo za popravek astronomskega azimuta (Heiskanen in Moritz, 1996; Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986; Torge, 1991). Označimo ju s C_1 in C_2 . Popravek C_1 je na stojišču za vse smeri enak in je odvisen le od geodetske širine stojišča in odklona navpičnice v smeri severa. Kadar imamo v matematičnem modelu opazovane kote, se ta popravek eliminira. Drugi popravek C_2 je odvisen od odklona navpičnice, azimuta opazovane smeri in zenitne razdalje do vizirane točke. Velikost popravka lahko znaša tudi do $0.5''$, z večanjem višinskega kota pa hitro narašča.

Reducirane smeri v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu oz. Laplacejeve smeri, moramo sedaj reducirati še na geodetsko krivuljo med stojiščem in vizirano točko. Popravkom smeri zaradi geometrije elipsoida pravimo geometrijski popravki opazovanj (Heiskanen in Moritz, 1996; Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986; Torge, 1991). Prva redukcija je zaradi višine vizirane točke oz. zaradi dvojnosti normalnih presekov. Popravek označimo s C_3 in je odvisen predvsem od višine vizirane točke nad elipsoidom. Velikost popravka lahko doseže tudi okoli $0.15''$. Zadnji popravek je zaradi nesovpadanja med geodetsko krivuljo in normalnim presekom. Popravek je za AGM Slovenije zanemarljiv, saj je velikostnega reda $10^{-4}''$. Za poljubno opazovano smer β in reducirano smer na

elipsoidu β^E tako lahko zapišemo (Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986):

$$\beta^E = \beta + C_1 + C_2 + C_3 \quad (\text{P-6.1})$$

Reduciran kot θ^E je tako razlika dveh reduciranih smeri, kjer odpade člen C_1 :

$$\theta^E = \theta + \Delta C_2 + \Delta C_3 \quad (\text{P-6.2})$$

Redukcija opazovanih dolžin

Opazovano dolžino med dvema točkama v prostoru nad elipsoidom prvo popravimo za vse meteorološke in inštrumentalne popravke, ter dolžino reduciramo na nivo točk na terenu oz. na dolžino kamen-kamen (Kogoj, 2002). Dolžino kamen-kamen je potrebno reducirati na ničelni nivo, na tetivo na elipsoidu (Heiskanen in Moritz, 1996; Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986; Torge, 1991). V večini primerov se ta redukcija opravi na podlagi elipsoidnih višin točk, torej je potrebno na točkah poznati elipsoidno višino, ali pa ortometrično in geoidno višino (Heiskanen in Moritz, 1996; Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986; Torge, 1991). Druga možnost je redukcija s pomočjo opazovanih zenitnih razdalj (Kogoj, 2002). Popravek dolžine je odvisen od velikosti dolžine in višine obeh točk. Pri daljših dolžinah je nujna redukcija na osnovi elipsoidnih višin, saj v primeru uporabe ortometričnih višin lahko pride do spremembe merila mreže. Iz tetive na površini elipsoida je potrebno dolžino reducirati še na geodetsko krivuljo na površini elipsoida (Stopar, 1995; Vaníček in Krakiwsky, 1986).

Redukcija opazovanj v Gauss-Kruegerjevi projekciji

Obdelava opazovanj se lahko izvrši na površini elipsoida, lahko pa opazovanja reduciramo v ravnino projekcije in mrežo izravnamo v ravnini. Ob pretvorbi geodetske mreže v ravnino projekcije se geodetske krivulje ne preslikajo v ravne črte, zveznice med točkami. Redukcija opazovanj v ravnini projekcije pomeni redukcijo merjenih smeri, kotov in dolžin na daljico med točkama v ravnini projekcije (Vaníček in Krakiwsky, 1986). Ob reduciranih opazovanjih bi morali upoštevati tudi natančnost redukcij na natančnost opazovanih količin, a se v praksi to ne upošteva (Stopar, 1995).

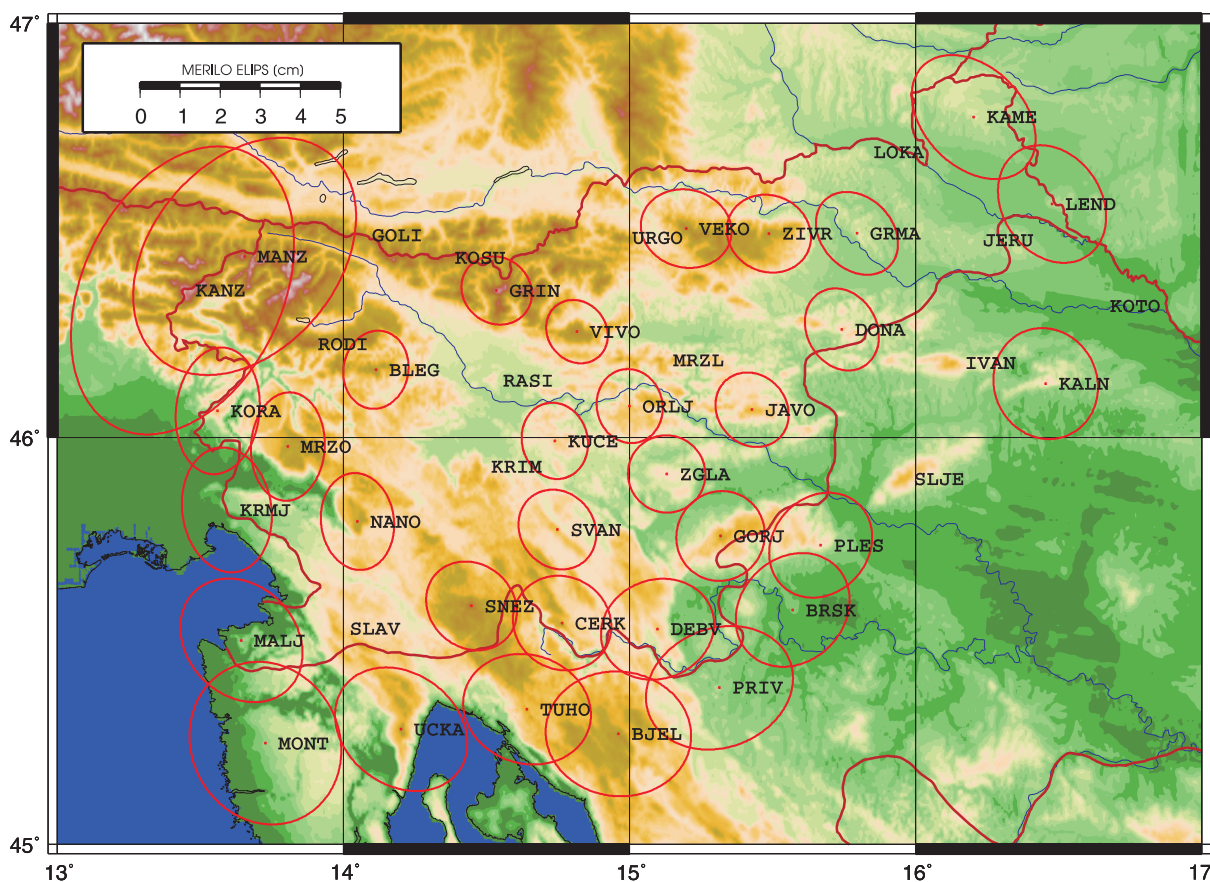
6.5 Ocena koordinat in vektorjev hitrosti točk AGM Slovenije

Reducirana opazovanja so sedaj pripravljena za obdelavo. V model tako vnesemo koordinate točk mreže na referenčnem elipsoidu, pretvorjene v Gauss-Kruegerjevo projekcijo, s pripadajočimi natančnostmi, in reducirane opazovane kote in dolžine med točkami. V obdelavi je 46 točk, kjer se 33-tim točkam oceni vektor hitrosti. Ostalim 13-im točkam se določi položaj glede na terestrična opazovanja.

Obdelava opazovanj poteka enako kot v primeru geodetskega četverkotnika v poglavju 5.3.2. V primeru AGM Slovenije ne ocenjujemo vseh vektorjev hitrosti na točkah, zato nimamo defekta datuma mreže. Geodetski datum koordinatam določijo uporabljene ocenjene koordinate izmere EUREF (psevdoopazovanja), geodetski datum vektorjem hitrosti pa določijo vektorji hitrosti na točkah, kjer le-teh ne ocenjujemo. S tem predpostavimo, da so enaki nič (dane količine) in ne dobijo popravka. Referenčna epoha koordinat je določena z izmero EUREF (1995.74 oz. 2006.71 za Mangart in Kanin), opazovanim kotom smo priredili referenčno epoho 1964 (sredina opazovanj), prav tako tudi opazovanim dolžinam (epoha 1978). Referenčna epoha (t_0) ocenjenih koordinat je bila izbrana za leto 1990. Slika 6.5 predstavlja ocenjene natančnosti koordinat v referenčni epohi $t_0 = 1990.0$ za točke, katerim se je ocenjevala hitrost. Točke, ki se jim hitrost ni ocenjevala, imajo natančnosti na nivoju 5 do 10 cm.

Na sliki 6.5 je razvidna veliko slabša natančnost za točki Mangart in Kanin. Vzrok je predvsem v nepoznavanju vrednosti odklona navpičnice na teh dveh točkah. Problem se pojavi pri redukciji smeri opazovanih s teh dveh točk, saj je ortometrična višina obeh točk nad 2000 m, torej popravka C_2 in C_3 nista zanemarljiva. V nalogi smo poskušali interpolirati vrednosti komponent odklona navpičnice, a ta interpolacija ni bila zanesljiva. Obe točki sta mejni točki območja, tako da je prišlo do ekstrapolacije. Natančnost interpoliranih odklonov navpičnice smo ocenili na 2-4" in s tem lahko zaključimo, da je interpolacija nezanesljiva. Druga moteča količina je časovna razlika izmere EUREF za ti dve točki. Med letoma 2006 in 1995 je 11 let, kar lahko v primeru koordinatnega sestava ETRF pomeni tudi do 3 cm premika zaradi lokalne geodinamike. Geodetski datum točk, predvsem za vektorje hitrosti točk, ni ETRF, zato je lahko del slabših natančnosti tudi v tem razlogu.

Na splošno so rezultati obdelave dobri. Natančnost ocenjenih koordinat je nekaj cen-



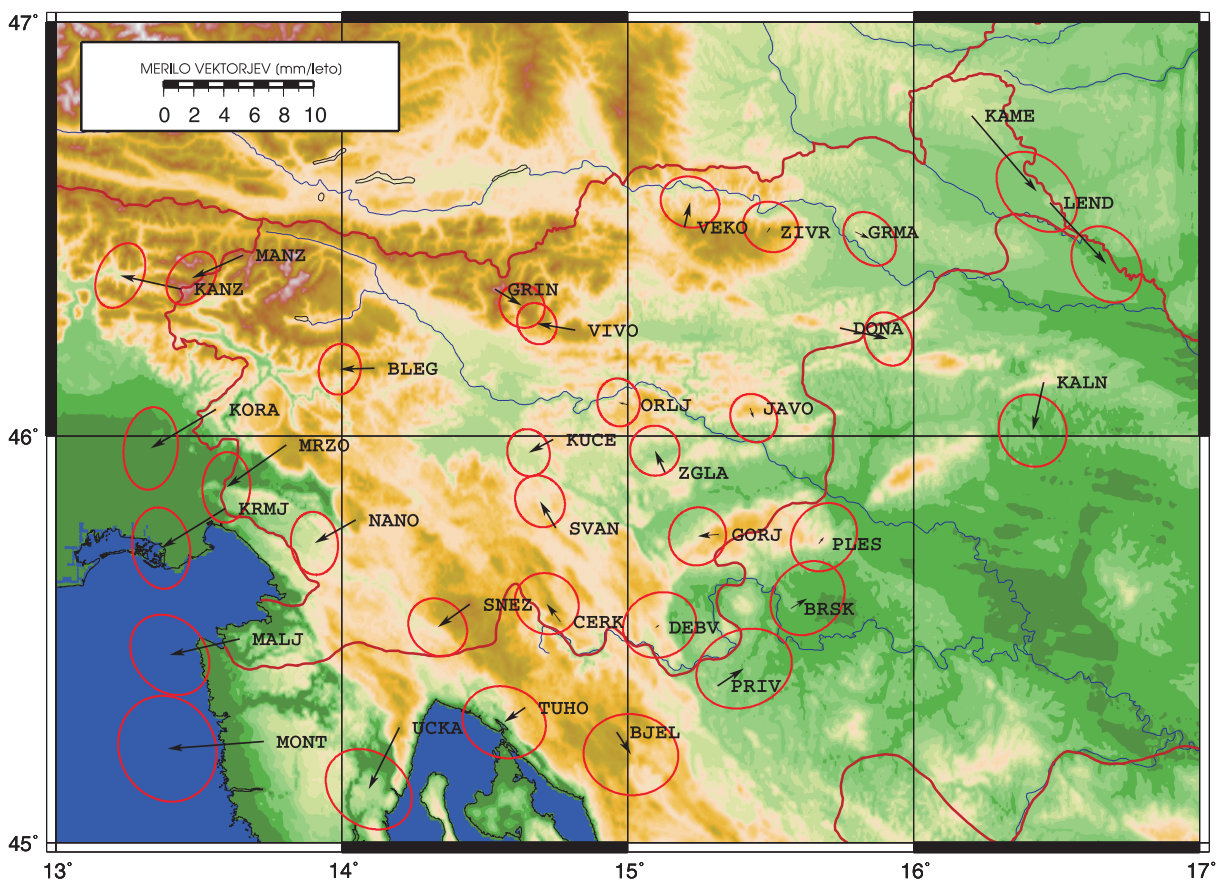
Slika 6.5: Ocenjene natančnosti koordinat točk AGM, ki se jim je ocenila tudi hitrosti, za referenčno epoho 1990.0

Figure 6.5: Estimated accuracy of coordinates of points in astrogeodetic net of Slovenia, where also velocities have been estimated

timetrov, medtem ko so natančnosti ocenjenih vektorjev hitrosti do nekaj milimetrov. Ocenjene natančnosti izravnanih kotov so v mejah od 0.2" do 0.4", popravki pa pri približno 7-ih kotih presegajo tudi 1", v povprečju pa okoli 0.4". Natančnost izravnanih dolžin ni slabša od 4 cm, medtem ko so popravki dolžin v povprečju okoli 3 do 4 cm, največji 9 cm. Standardizirani popravki za dolžine ne presegajo vrednosti 2, medtem ko so v primeru opazovanih kotov nekateri standardizirani popravki več kot 2, največji 3.2 s stojišča Mangart (nepoznavanja odklona navpičnice v točki). Zanimiv je podatek, da koordinate, ki se jim je ocenjevala tudi hitrost, dobijo popravke na nivoju desetink mm.

Ocenjene hitrosti so temeljile na dveh osnovah. Prva so vrednosti hitrosti za točke, ki se jim le-te niso ocenjevale, saj s tem določimo njihove vrednosti na nič. Druga osnova so

seveda opazovanja v različnih terminskih izmerah. Slika 6.6 prikazuje ocenjene vektorje hitrosti točk AGM Slovenije s pripadajočimi standardnimi elipsami pogreškov. Iz slike je razvidno, da so ocenjene natančnosti določene z dokaj visoko natančnostjo. Hitrosti so pridobljene iz premikov točk, določenih preko položajev v treh izmerah. A ker je dolžinskih opazovanj manj kot koordinat točk, gre dejansko samo za dva položaja za vsako točko. Prvi položaj je določen za leto 1964, kjer je merilo določeno iz dolžinskih opazovanj za leto 1978, drugi položaj pa je položaj GNSS iz leta 1995 (2006). Hitrost je torej določena enolično, zato tudi tako majhni popravki koordinatam točk iz izmere GNSS (pseudopazovanjem). Natančnost hitrosti je določena preko natančnosti položaja točk v letu 1964 in položajev GNSS.



Slika 6.6: Ocenjene hitrosti in natančnosti hitrosti točk AGM

Figure 6.6: Estimated velocities and velocity accuracy of points in astrogeodetic net in Slovenia

Ocena neznank je temeljila na sistemu nesingularnih normalnih enačb, saj nismo ocenili vseh vektorjev hitrosti. Zaradi tega lahko v ocenjenih komponentah vektorjev hitrosti

pričakujemo spremembe datumskih parametrov med posameznimi izmerami. Če ocenimo vrednost datumskih parametrov v ocenjenih vektorjih hitrosti, kot je to opisano v poglavju 5.4, dobimo parametre, ki so podani v preglednici 6.1.

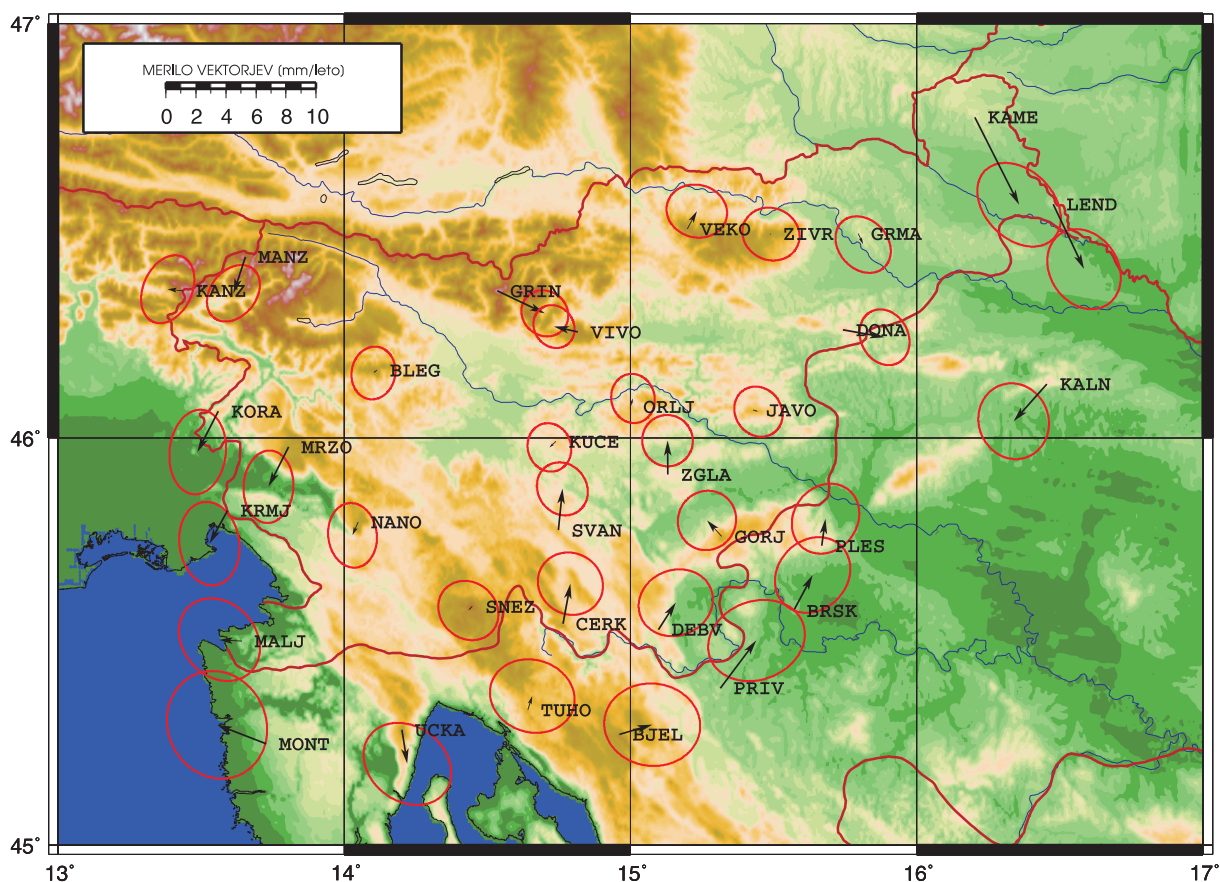
Preglednica 6.1: Ocenjene spremembe datumskih parametrov v ocenjenih vektorjih na 33-tih točkah AGM

Table 6.1: Estimated datum parameters alteration on 33 estimated velocity vectors in astrogeodetic net in Slovenia

Δt_y	-1.1 ± 0.3 [mm/leto]
Δt_x	-0.6 ± 0.3 [mm/leto]
$\Delta \omega$	-0.0009 ± 0.0011 ["/leto]
Δs	0.0198 ± 0.0041 [ppm/leto]

Iz preglednice 6.1 je razvidno, da je vpliv sprememb datumskih parametrov dokaj majhen. Vsi parametri se nanašajo na eno leto, tako da lahko vidimo, da je sprememba merila med opazovanimi dolžinami in položaji GNSS med letoma 1978 in 1995 (razlika 17 let) majhna in velikosti 0.34 ppm. Reducirani vektorji so končni rezultat obdelave in so prikazani na sliki 6.7. Ti vektorji hitrosti prikazujejo relativne spremembe položajev točk AGM Slovenije, ki so določljivi iz terestričnih opazovanj in položajev GNSS. Pri vektorjih hitrosti smo predpostavili, da je sprememba merila posledica spremembe geodetskega datuma in ne posledica deformiranja Slovenije (raztegovanja Slovenije).

Primerjavo metode lahko naredimo z rezultati izravnave proste mreže točk AGM Slovenije na podlagi približnih koordinat, ki imajo enake vrednosti kot ocenjene koordinate GNSS, uporabljene za oceno hitrosti. Primerjava je možna za ocenjene natančnosti koordinat točk mreže, kakor tudi za ocenjene vektorje hitrosti točk mreže, dobljene iz popravkov približnih vrednosti koordinat. V obdelavi proste mreže predpostavljamo, da so točke stabilne oz. ne spreminjajo položaja linearno in je obdelava za kotna in dolžinska opazovanja neodvisna od časa, a nobena izmed točk ni dana. Pri prosti mreži imamo manj opazovanj (za število psevdopazovanj), a tudi manj neznank (za število koordinatnih komponent ocenjenih vektorjev hitrosti). Primerjavo lahko naredimo le na primeru, ko z našo metodo določimo koordinate točk s pripadajočimi natančnostmi za epoho 1971, ki je srednja epoha terestričnih opazovanj. Slika 6.8 prikazuje standardne elipse pogreškov ocenjenih koordinat točk AGM Slovenije proste mreže (rdeče standardne elipse) in ob-

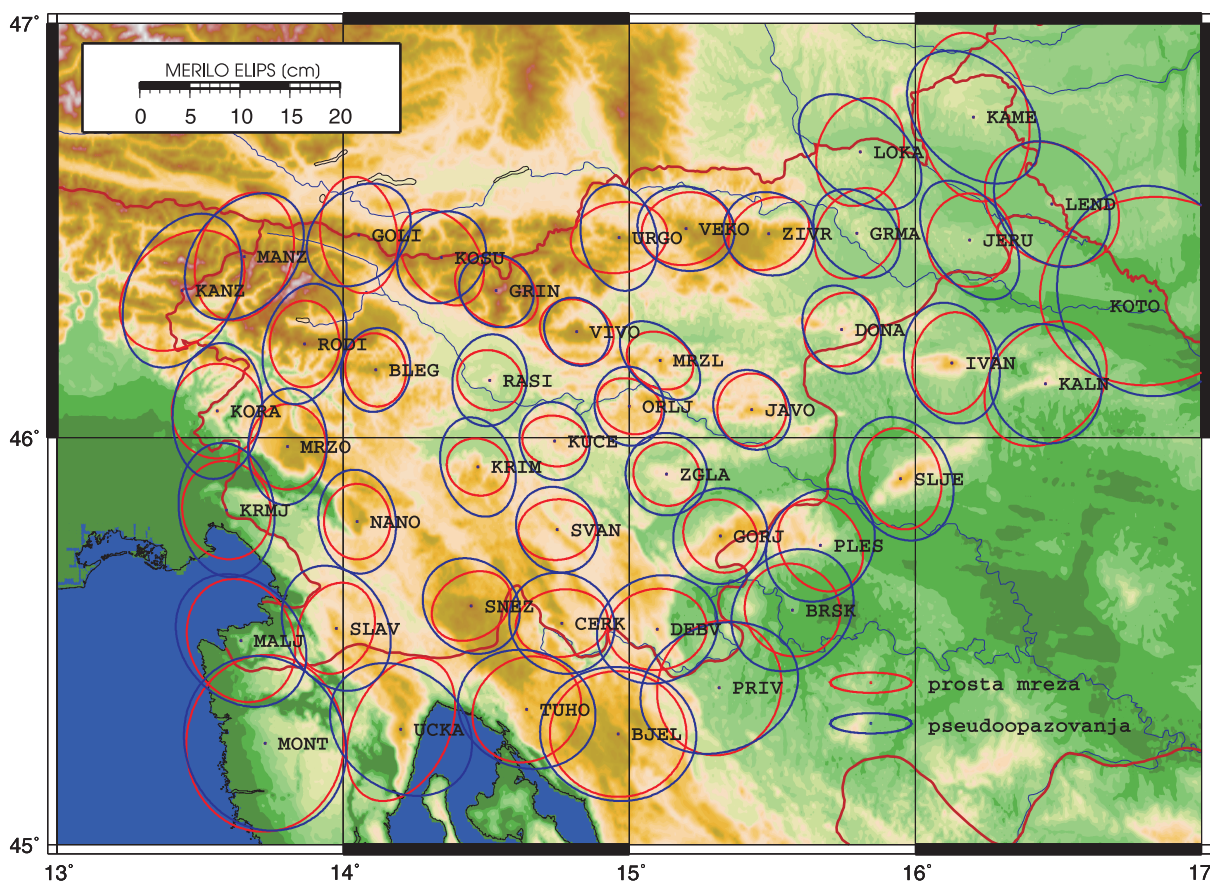


Slika 6.7: Reducirani vektorji hitrosti na 33-tih točkah AGM Slovenije s pripadajočimi natančnostmi

Figure 6.7: Reduced velocity vectors on 33 points in astrogeodetic net in Slovenia, with corresponding accuracies

delave naše metode (modre standardne elipse).

Koordinate točk so v primeru datuma, definiranega preko psevdopazovanj, določene s slabšo natančnostjo. Vzrok je v natančnostih psevdopazovanj, ki prispevajo delež v variančno-kovariančno matriko neznank (glej poglavje 5.3.1). Pri primerjanju vrednosti koordinat pa naletimo na velike razlike (tudi do 8 cm po komponenti). Problem nastane zaradi drugačnega matematičnega modela proste mreže in obdelave z oceno vektorjev hitrosti. Ker ocenjujemo vektorje hitrosti samo na določenih točkah, s temi točkami določimo datum vektorjev hitrosti. V matematičnem modelu tako odstopanja med opazovanji in približnimi koordinatami razlagamo kot spremembo položaja, ki jo je potrebno modelirati z vektorjem hitrosti, ali pa kot pogrešek približnih koordinat točk. Zato

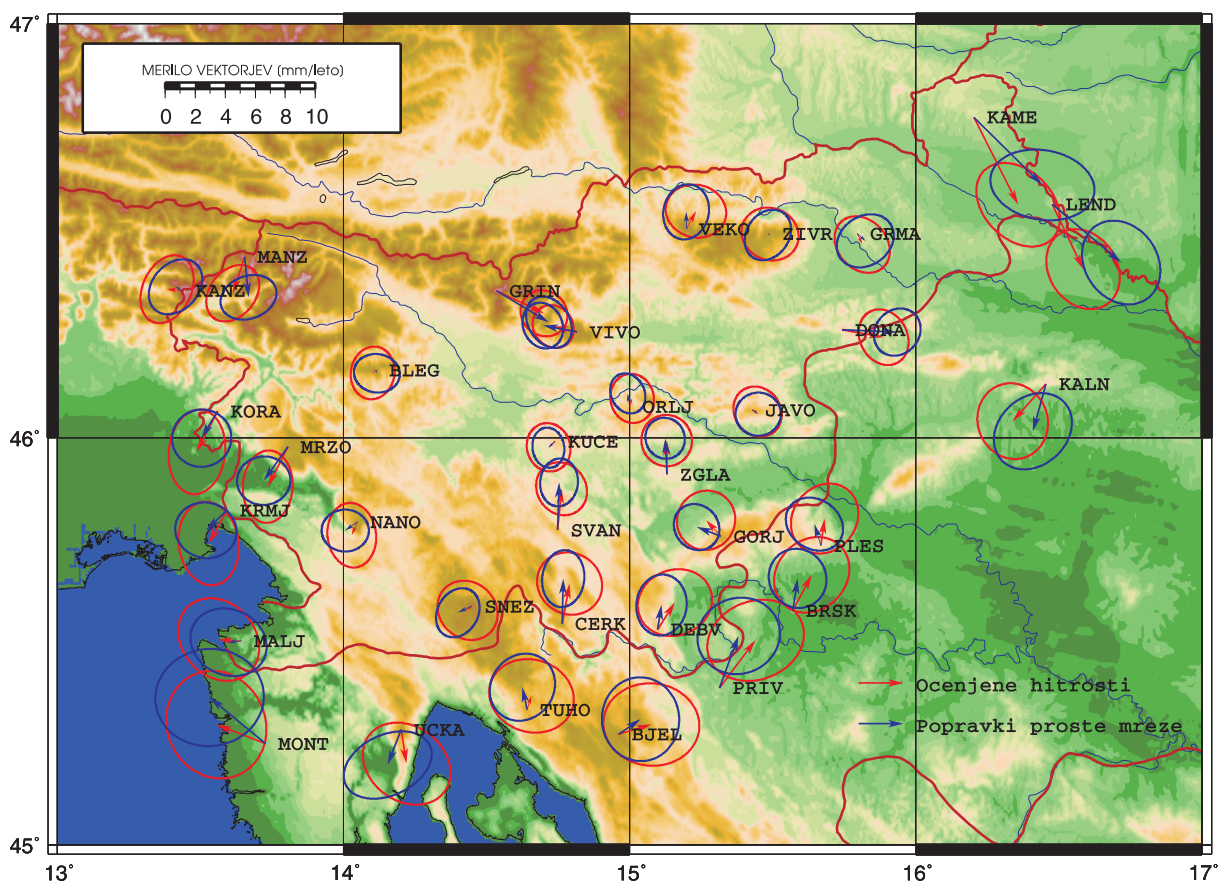


Slika 6.8: Primerjava natančnosti ocenjenih koordinat točk AGM Slovenije kot proste mreže (rdeče standardne elipse) in preko psevdopazovanj (modre standardne elipse)
Figure 6.8: Comparison of estimated coordinate accuracies of astrogeodetic net in Slovenia, obtained from free-net estimation (red standard ellipses) and upon pseudoobservations (blue standard ellipses)

moramo točkam, katerim ne ocenjujemo vektorjev hitrosti, dati nizke natančnosti približnih koordinat (standardni odkloni velikosti 20 cm), da se neskladje med opazovanji in koordinatami ne prelije v ocenjene vektorje hitrosti.

Druga možna primerjava je primerjava ocenjenih hitrosti in hitrosti določenih preko popravkov koordinat izravnave AGM Slovenije kot proste mreže. Glede na to, da so približne vrednosti koordinat izravnane vrednosti izmere GNSS, so popravki koordinat dejansko negativne vrednosti premika točke. Če za vsako točko popravke delimo z negativno časovno razliko med sredino terestričnih opazovanj (1971) in časom izmere EU-REF (1995.75 ali 2006.71), dobimo vektor hitrosti spremembe položaja. Vektorje hitrosti

smo računali samo za točke, ki so bile opazovane tudi v izmeri GNSS, torej za 33 točk. Tako določene vektorje hitrosti smo nato še reducirali za prisotnost sprememb datumskih parametrov različnih terminskih izmer. Slika 6.9 prikazuje primerjavo obeh metod določitve vektorjev hitrosti.



Slika 6.9: Primerjava ocenjenih vektorjev hitrosti in vektorjev hitrosti pridobljenih preko popravkov proste mreže za 33 točk AGM

Figure 6.9: Comparison of estimated velocities and velocities derived through estimated coordinates corrections of free-net estimation on 33 point in astrogeodetic net in Slovenia

Iz slike je vidna visoka stopnja podobnosti, saj bi lahko rekli, da so vektorji hitrosti statistično enaki. Rezultat je seveda pričakovan, saj gre za podobna postopka in iste podatke. Rezultati so skoraj identični tudi v primeru ocenjevanja sprememb datumskih parametrov v obeh načinih pridobljenih vektorjih hitrosti (razlike med ocenjenimi spremembami datumskih parametrov so minimalne). Vendar pa v primeru proste mreže ne ocenjujemo vektorjev hitrosti ločeno, ampak na podlagi popravkov koordinat, ki pa se računajo na

vseh točkah skupaj in ne samo za določene točke, kot v primeru ocene hitrosti. Popravki koordinat so tako obremenjeni s pogreški cele mreže, medtem ko so ocenjeni vektorji ločeni od ocenjenih popravkov koordinat.

6.6 Ocena deformacijskih parametrov AGM Slovenije

V primeru ocene deformacijskih parametrov mreže, kot je bil primer geodetskega četverokotnika (poglavje 5.5 in slika 5.9), imamo enostavno odločitev. Predpostavimo homogene deformacije na območju ocenjenih vektorjev hitrosti in določimo komponente deformacijskega tenzorja. V primeru AGM, pa imamo območje velikosti okoli 200×150 km in 33 ocenjenih vrednosti vektorjev. Predpostavka o homogenosti deformacij območja tu ne drži. V primeru homogenih deformacij pridobimo vrednosti deformacij, kot jih prikazuje preglednica 6.2.

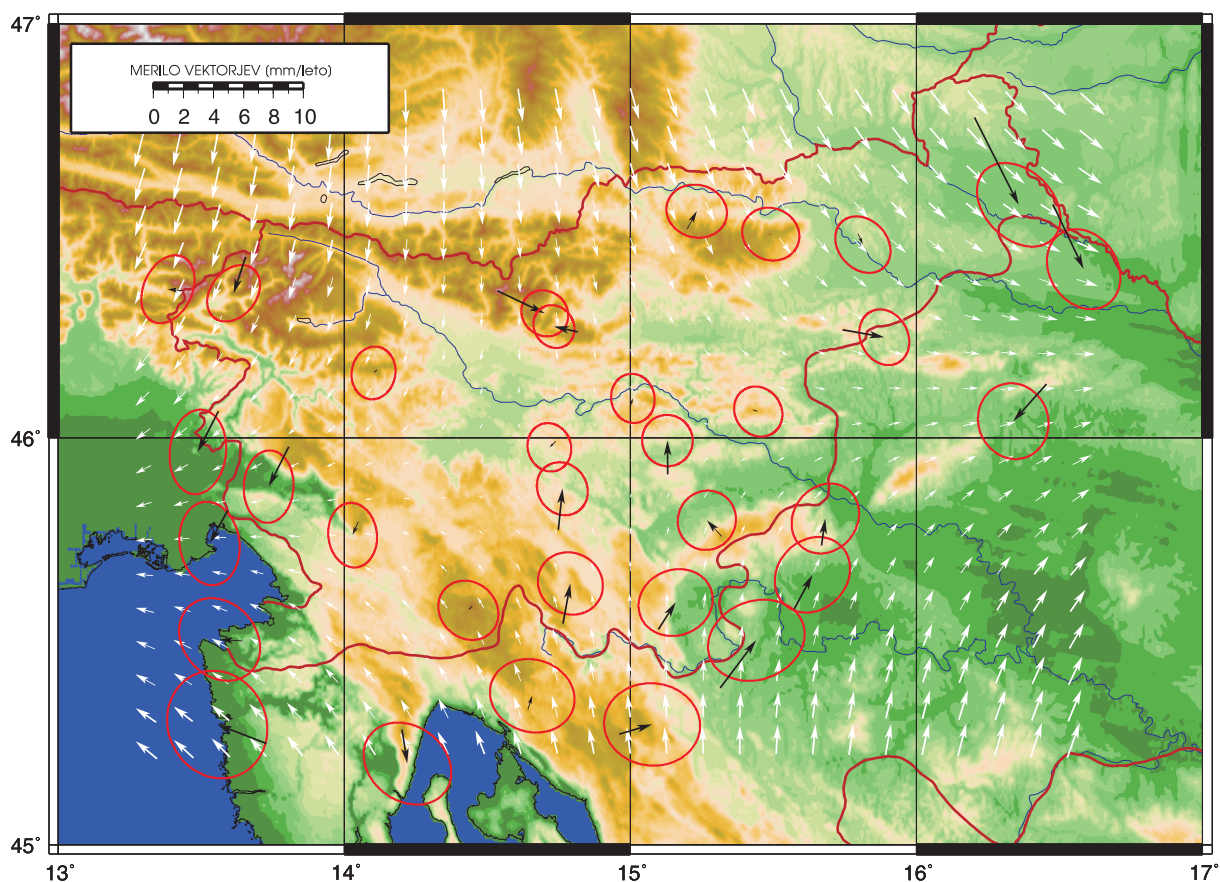
Preglednica 6.2: Parametri deformacij AGM Slovenije pri predpostavki o homogenih deformacijah cele mreže

Table 6.2: Parameters of homogeneous strain in astrogeodetic net in Slovenia

Komponente tenzorja		Glavne normalne deformacije		Glavne strižne deformacije	
ε_{yy}	$0.3 \pm 0.1 [10^{-6}]$	ε_{G1}	$0.3 \pm 0.2 [10^{-6}]$	γ_I	$0.5 \pm 0.1 [10^{-6}]$
ε_{xx}	$-0.6 \pm 0.2 [10^{-6}]$	ε_{G2}	$-0.7 \pm 0.1 [10^{-6}]$	γ_{II}	$-0.5 \pm 0.1 [10^{-6}]$
ε_{xy}	$0.1 \pm 0.1 [10^{-6}]$	α_{G1}	$8.5 \pm 0.0 [^\circ]$	α_γ	$143.5 \pm 0.0 [^\circ]$

Iz preglednice 6.2 je razvidno, da so vrednosti zelo majhne in neizrazite. Tak rezultat je povsem pričakovan, saj matematični model (homogene deformacije) ne ustreza realnemu stanju (rezultat je podoben, kot če bi razgibano krivuljo poskušali aproksimirati s premico). Primerjava med izpeljanim vektorskim poljem homogenih deformacij in ocenjenih vektorjev je prikazana na sliki 6.10. Ocenjeni vektorji se samo delno skladajo z obliko vektorskega polja. Skladnost je vidna samo za smeri pri nekaterih vektorjih, medtem ko za velikosti vektorjev ni skladnosti.

Druga možnost, ki se nam ponuja, pa je ocena deformacijskih parametrov na podobnejših AGM. Deformacijski parametri se v geodetski praksi določujejo za območja, kjer se predpostavlja stike tektonskih plošč. Iz oblike deformacij se nato sklepa na obliko relativnega gibanja ene plošče do druge. Pomembne so predvsem velikosti strižnih deformacij,



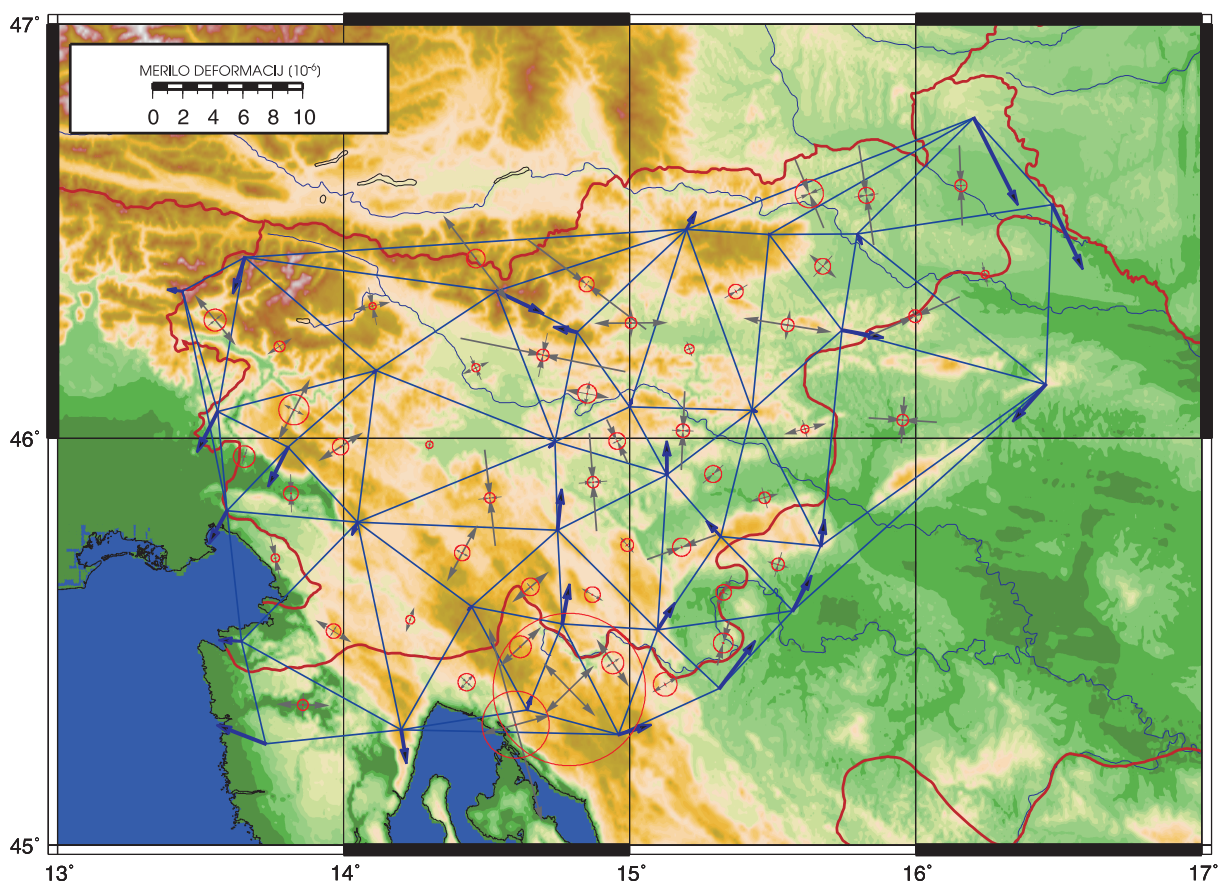
Slika 6.10: Prikaz vektorskega polja, določenega iz predpostavljenih homogenih deformacij in ocenjenih vektorjev hitrosti AGM

Figure 6.10: Derived vector fields on a basis of homogeneous deformations and estimated velocity vectors in astrogeodetic net in Slovenia

ki kažejo na možne zdrse plošč. Območja tektonskih prelomov so posebej občutljiva na potrese in analiza deformacijskih parametrov je eden od postopkov ugotavljanja potresne ogroženosti določenega območja. Deformacijske parametre najlažje določimo preko trikotnikov, saj lahko s postopkom Delaunayeve triangulacije sestavimo optimalne trikotnike v mreži. V vsakem trikotniku lahko ocenimo deformacijske parametre, a ker nimamo reduciranih vektorjev hitrosti za vsak trikotnik, moramo oceniti 6 parametrov deformacij. V tem primeru imamo določen problem in enolično rešitev ter natančnost določeno preko prenosa varianc in kovarianc in ne na podlagi popravkov opazovanj.

Slika 6.11 prikazuje glavne normalne deformacije po posameznih trikotnikih, sestavljenih preko Delaunayeve triangulacije. Vse deformacije se nanašajo na težišče trikot-

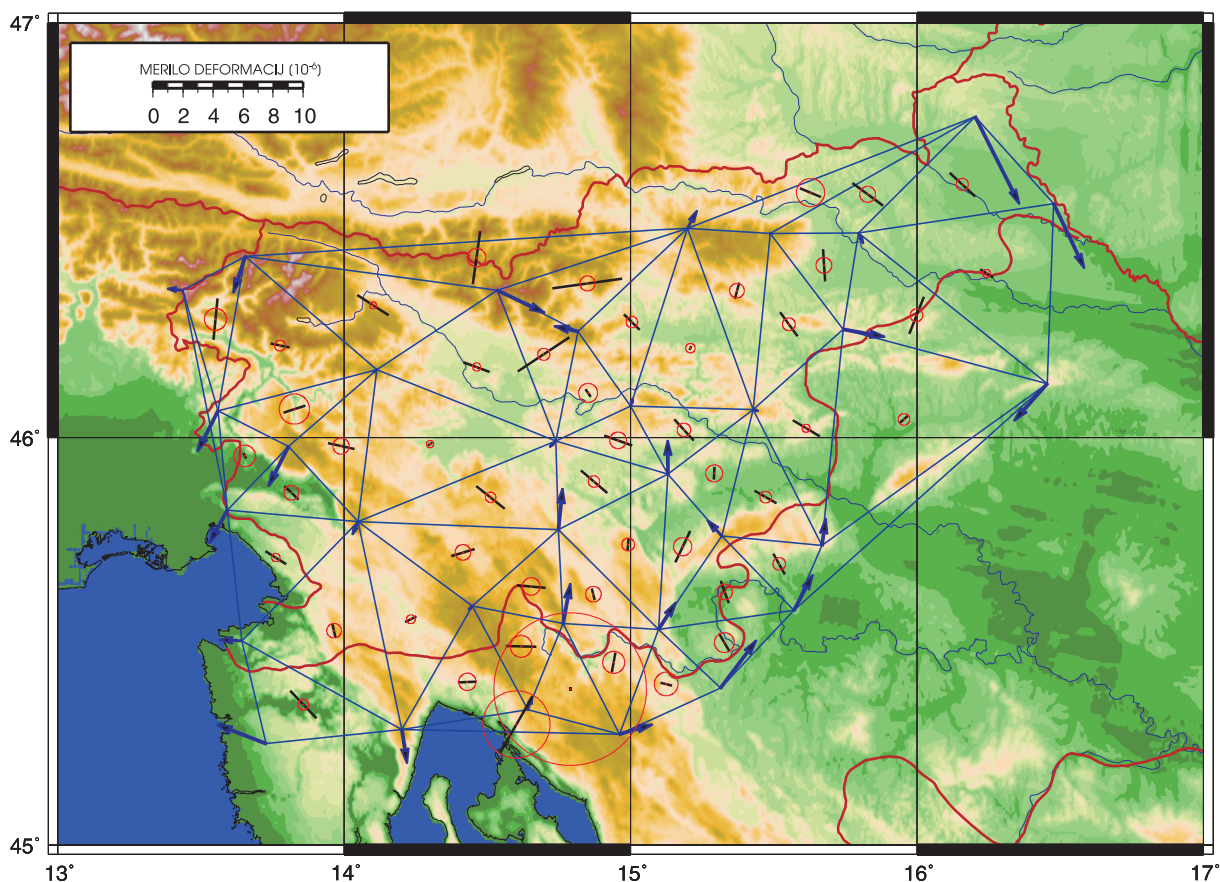
nika. Glavne normalne deformacije so predstavljene z dvema vektorjema, kjer velikost posameznega vektorja predstavlja veliko oz. malo polos glavnih normalnih deformacij. Naklon večjega od vektorjev predstavlja smer glavne normalne deformacije. Predstavljene elipse predstavljajo natančnost določitve glavnih normalnih deformacij s stopnjo zaupanja 0.95. Velikosti elips so dokaj majhne, saj temeljijo na prenosu varianc in kovarianc.



Slika 6.11: Glavne normalne deformacije AGM Slovenije s pripadajočimi smermi in natančnostmi

Figure 6.11: Principal strain, direction and accuracies in astrogeodetic net in Slovenia

Pri glavnih strižnih deformacijah iščemo smeri, velikosti in natančnosti glavnih strižnih deformacij. Slika 6.12 predstavlja glavne strižne deformacije za trikotnike. Parametri so postavljeni v težišče trikotnikov. Velikost “palčke” predstavlja dvakratno vrednost velikosti strižne deformacije, naklon pa smer glavne strižne deformacije. Elipse so predstavljene s stopnjo zaupanja 0.95 in so zopet dobljene preko prenosa varianc in kovarianc.



Slika 6.12: Glavne strižne deformacije AGM Slovenije s pripadajočimi smermi in natančnostmi

Figure 6.12: Principal shear strain, directions and accuracies in astrogeodetic net in Slovenia

Deformacijske parametre tako lahko ocenjujemo na treh ali več točkah. Priporoča se ocena na več kot treh točkah, saj tako lahko ocenimo tudi natančnost in zanesljivost določenih deformacijskih parametrov. Natančnost se določi na podlagi popravkov opazovanj (ocenjenih vektorjev hitrosti točk mreže).

7 ZAKLJUČKI

Ocenjevanje deformacijskih parametrov iz geodetskih podatkov za potrebe geotektonike se je masovno začelo izvajati vzporedno s satelitskimi sistemi GNSS, predvsem z GPS. Vendar pa so GNSS v splošni uporabi z zadovoljivo natančnostjo manj kot dve desetletji, zato je potrebno za določevanje dolgoročnih geotektonskih procesov vzeti v obzir tudi starejša terestrična opazovanja. Kombinacija starih klasičnih opazovanj in novih opazovanj GNSS pa prinaša nekatere probleme. Prvi med njimi so nepoznavanje geodetskega datuma in nehomogena natančnost klasičnih geodetskih mrež ter ponavadi veliko slabša natančnost klasičnih opazovanj. V nalogi so predstavljene vse komponente določevanja deformacij na podlagi kombiniranih geodetskih mrež v več terminskih izmerah. Opisane so deformacije s stališča mehanike in problemi takega opisa z geodetskega stališča. Podrobno je opisan geodetski datum in datumske informacije v določenih tipih geodetskih opazovanj. Prikazane so metode določevanja deformacij iz kombiniranih mrež in vpliv oz. način obravnave geodetskega datuma. Iz dejstva, da so osnova določenim deformacijam vektorji premikov oz. hitrosti točk, je na koncu prikazana metoda ocenjevanja hitrosti točk v ponovljenih izmerah geodetske mreže z različnimi tipi opazovanj. Ocenjene vektorje hitrosti se ustrezno obravnava, z namenom pridobitve datumsko neodvisnih vektorjev hitrosti.

Tenzor deformacij je izpeljan na osnovi dveh količin, in sicer na osnovi poznavanja koordinatnih sistemov obravnave gibanja in deformiranja ter poznavanja vektorskega polja premikov obravnavanega telesa. Deformacije telesa se opiše s tenzorjem 2. reda, za katerega se izpelje transformacijsko invariantnost. V primeru geodetskih mrež je transformacija v $3\mathbb{R}$ prostoru podana s 7 parametri, tremi parametri premika, tremi parametri zasuka in spremembo merila. Tenzorska invariantnost se nanaša samo na 6 parametrov (premiki in zasuki), torej na ortogonalno transformacijo. V poglavju 2.9.4 je prikazana odvisnost deformacijskega tenzorja od spremembe merila med dvema koordinatnima sistemoma.

Ugotovljeno je bilo, da deformacijski tenzor ni povsem neodvisen od sprememb geodetskega datuma v terminskih izmerah, osnova izračuna pa so spremembe položajev točk med terminskimi izmerami. Kot osnovno količino naloge smo vzeli ocenjene vektorje premikov oz. hitrosti točk geodetske mreže. Ugotovljeno je bilo, da je ocena koordinat točk v posamezni terminski izmeri na podlagi različnih opazovanj datumsko odvisna in posledično tudi spremembe koordinat točk mreže. Datumske informacije zagotovimo z da-

nimi količinami, določena opazovanja pa vsebujejo določene datumske informacije. Tako je bilo pokazano, da so opazovane smeri in koti datumsko neodvisne količine, opazovana dolžina pa vsebuje informacijo o merilu mreže. V splošnem ima terestrična geodetska mreža defekt datuma. Opazovane koordinate ali opazovani vektorji s sistemom GNSS pa vsebujejo vse datumske informacije. V ponovljenih izmerah lahko preko različnega tipa opazovanj zagotovimo različne realizacije datuma, kar se pokaže v ocenjenih premikih točk. Datumsko obremenjeni premiki točk so vodili v različne metode določevanja deformacij iz ponovljenih opazovanj. Vse te metode obravnavajo vektorje premikov oz. hitrosti le kot stranski produkt obdelave in v večini primerov se deformacije določi na podlagi slabo določenega matematičnega modela kombiniranja različnih tipov opazovanj. Cilj naloge je tako obravnavati različnih tipov opazovanj, z namenom ocene vektorjev hitrosti točk mreže, ki so datumsko neodvisni. Datumsko neodvisni vektorji hitrosti kažejo le na relativne spremembe položajev točk glede na druge točke, torej samo na deformacije geodetske mreže.

V nalogi je predstavljena metoda ocene koordinat in vektorjev hitrosti točk mreže na podlagi ponovljenih izmer geodetske mreže. Funkcionalni model predstavlja $4R$ obravnavo celotne mreže, kjer se predpostavi premo spreminjanje položajev točk v mreži. Opazovanja v modelu lahko razdelimo na dva dela, in sicer terestrična opazovanja (opazovane smeri in dolžine) in psevdopazovanja, ki predstavljajo rezultat obdelave opazovanj GNSS, t.j. koordinate točk s pripadajočimi natančnostmi. V primeru ocene samo koordinat točk mreže, imajo psevdopazovanja vlogo definiranja datuma geodetske mreže, saj se neposredno nanašajo na neznanke. Geodetski datum je za položaje točk določen s štirimi parametri v ravnini. Natančnosti psevdopazovanj vplivajo na velikost popravkov na točkah in na natančnost ocenjenih koordinat točk mreže. V primeru ocene tudi hitrosti točk mreže, pa se nam število datumskih parametrov podvoji, saj moramo določiti tudi spremembe datumskih parametrov skozi čas. Tako imamo štiri datumske parametre za koordinate točk in štiri spremembe datumskih parametrov za hitrosti točk. Psevdopazovanja postanejo navadna opazovanja, a še vedno določajo datum koordinatam. Vektorjem hitrosti določata datum dva znana vektorja hitrosti točk mreže, kar realiziramo tako, da na dveh točkah hitrosti ne ocenjujemo (predpostavimo $v_x = v_y = 0$). Kadar ocenjujemo vektorje hitrosti vsem točkam mreže, imamo v splošnem defekt datuma in mrežo ocenimo kot prosto mrežo.

Ocenjeni vektorji hitrosti so obremenjeni z datumskimi informacijami v odvisnosti od tipa

opazovanj v različnih terminskih izmerah. Vektorji hitrosti so neodvisni od izbire datuma samo v primeru enolične določitve datumskih parametrov v vseh terminskih izmerah. Primer take mreže je izmera GNSS na strogo triagulacijski mreži. Kombinacija položajev GNSS in merjenih smeri, kjer ocenjujemo vse vektorje hitrosti s prosto mrežo, zagotovi datumsko neodvisne vektorje. Kakršnakoli predoločenost geodetskega datuma zagotovi datumsko odvisne vektorje hitrosti, kadar je ponovljeni datumski parameter različen v terminskih izmerah. Primer je kombinacija položajev GNSS in trilateracijske ali kombinirane geodetske mreže, ali kadar geodetski datum zagotovimo z zunanjimi opazovanji.

Ocenjeni vektorji hitrosti so geometrijsko smiselni le v primeru, ko so datumsko neodvisni. Takrat le-ti predstavljajo deformacije telesa in premike točk glede na ostale točke. V poglavju 5.4 je prikazana analiza vektorjev hitrosti točk mreže za prisotnost sprememb datumskih parametrov v različnih izmerah. Gibanje sistema točk je neodvisno od izbire koordinatnega sistema, zato lahko vpliv datuma v vektorjih hitrosti ocenimo glede na težišče geodetske mreže. V ravnini se tako lahko oceni spremembo zasuka, merila in premika mreže glede na težišče mreže. Z odstranitvijo vpliva datuma v vektorjih hitrosti pridobimo končni rezultat: geometrijsko predstavljive vektorje hitrosti. Tako lahko zaključimo, da lahko ne glede na uporabljen tip opazovanj v različnih izmerah, ocenimo vektorje hitrosti, ki kažejo na geometrijske premike točk skozi čas.

V Sloveniji so bile v zadnjih 50-tih letih izvedene tri kakovostne izmere na AGM Slovenije. V letih 1963 in 1965 se je izvedla triangulacijska izmera, kjer je bilo opazovanih 222 smeri s povprečno natančnostjo okoli 0.5". V letih 1975 in 1982 se je z namenom ocene kvalitete AGM izvedla izmera 49 dolžin med točkami AGM, kjer je bilo 47 izmerjenih stranic trikotnikov in dve diagonali. Povprečna natančnost izmerjenih dolžin je bila okoli 6 cm. Povezava AGM Slovenije z evropskim prostorskim koordinatnim sestavom ETRF89 se je izvedla leta 1995 v kampanji EUREF z izmero GPS. Natančnost ocenjenih položajev je bila na nivoju do 0.5 cm po koordinati v ravnini. Terestrična izmera se je nanašala na 46 točk, medtem ko je bila izmera GPS izvedena samo na 33 istih točkah. Ostalih 13 točk je bilo zaradi uničenih stabilizacij točk prestavljenih. Cilj je bilo oceniti koordinate vseh 46 točk glede na ocenjene položaje iz kampanje EUREF in ocena vektorjev hitrosti 33-tih skupnih točk mreže. Geodetski datum koordinatam je bil določen z ocenjenimi koordinatami točk v izmeri EUREF, geodetski datum vektorjem hitrosti pa je bil določen s 13 točkami, kjer se vektorji hitrosti niso ocenjevali. Iz števila in tipov opazovanj na AGM Slovenije lahko vidimo, da se vektorji hitrosti ocenijo le na podlagi dveh izmer in so

zato enolično določeni. Natančnost ocenjenih koordinat je odvisna od referenčne epohe, za katero ocenjujemo položaje točk. Bližje kot smo terestrični izmeri v časovnem smislu, imamo horizontalno natančnost tudi do 12 cm, medtem ko v času izmere EUREF le do 1 cm. Točke, ki se jim ne oceni vektor hitrosti, imajo, neodvisno od referenčne epohe, horizontalno natančnost do 10 cm. Vektorji hitrosti so določeni z natančnostjo do nekaj mm/leto. Kakovost opazovanj ocenimo le za terestrična opazovanja, na podlagi velikosti popravkov opazovanj. Ti so za opazovane kote okoli $0.4''$, za nekaj kotov znašajo tudi $1''$. Natančnosti izravnanih kotov so v mejah od $0.2''$ do $0.4''$. Popravki opazovanih dolžin so v velikosti okoli 3 do 4 cm, največji 9 cm, natančnost izravnanih dolžin pa ni slabša od 4 cm. Standardizirani popravki za opazovane dolžine niso večji od 2, medtem ko je za opazovane kote nekaj standardiziranih popravkov večjih od 2, največji 3.2 na stojišču Mangart, kjer je problem nepoznavanje odklona navpičnice v točki. Ocenjene vektorje hitrosti je bilo potrebno reducirati za vpliv sprememb datumskih parametrov. Največji vpliv ima sprememba merila geodetske mreže ($\Delta s = 0.0198 \pm 0.0041$ ppm/leto), kar je pričakovano. Merilo je bilo določeno z opazovanimi dolžinami in ocenjenimi položaji preko GNSS. Prisotne so tudi ostale spremembe datumskih parametrov, iz dveh razlogov, prisotnih slučajnih pogreškov in določitvev geodetskega datuma vektorjev hitrosti s 13-timi "mirujočimi" točkami, ki se jim je stabilizacija spremenila med terestričnimi izmerami in izmero GNSS.

Pridobljeni vektorji hitrosti prikazujejo relativne spremembe položajev točk glede na ostale točke, kjer seveda ne moremo oceniti, ali gre tu dejansko za premik točke, kot posledice geodinamike, ali za lokalni premik točke. Deformacijska analiza za vso Slovenijo je bila izvedena na podlagi Delaunayeve triangulacije in deformacijski tenzor ocenjen za vsak trikotnik posebej.

V nalogi je bilo prikazano, da je, kljub transformacijski invariantnosti tenzorja deformacij, potrebno korektno obravnavati geodetska opazovanja in geodetski datum. Cilj geodetskega pristopa reševanja takih nalog so pravilno ocenjeni položaji točk v posameznih terminskih izmerah in naknadno pravilno ocenjeni vektorji premikov oz. hitrosti točk mreže. Z ustrezno obravnavo geodetskega datuma odpravimo navidezna gibanja točk mreže, ki so le posledica sprememb datumskih parametrov med izmerami. Ocenjujemo, da rezultati naloge zadoščajo ciljem naloge, določitvi postopka pridobitve vektorjev hitrosti točk geodetske mreže, neodvisno od datuma posameznih geodetskih izmer, torej tudi neodvisno od opravljenih opazovanj v geodetski mreži.

8 POVZETEK

Obravnava telesa, ki je podvrženo deformacijam, je v sklopu zvezne mehanike in deformabilnih teles matematično dosledna in enolična. V poglavju 2 je dokaj nazorno in podrobno prikazana teorija deformacij telesa, ki se jih določi na podlagi obravnave deformabilnega telesnega koordinatnega sistema glede na prostorski stabilen oz. mirujoč koordinatni sistem. Osnovna količina, iz katere se definira deformacije, je vektorsko polje premikov točk telesa. Prikazane so komponente deformacijskega tenzorja, tako velikih kot malih deformacij, v različnih koordinatnih sistemih. Za primer ortogonalne transformacije je izbira koordinatnega sistema trivialna, tenzor je transformacijsko invarianten. V primeru podobnostne transformacije, kjer je prisotna tudi sprememba merila med koordinatnimi sistemi, pa je bilo prikazano, da deformacijski tenzor ni odvisen od merila koordinatnega sistema (poglavje 2.9.4). Sprememba merila se neposredno prenese na vse komponente deformacijskega tenzorja.

V geodetski praksi v splošnem nimamo zagotovljenega stabilnega koordinatnega sistema. Stabilnost koordinatnega sistema predstavlja stabilnost geodetskega datuma, ki se v splošnem spreminja skozi čas. Zagotovitev geodetskega datuma je možna preko danih količin ali izvedenih opazovanj in predstavlja niz stabiliziranih geodetskih točk, med katerimi opravljamo opazovanja. Z različnimi tipi opazovanj vzpostavimo različne datumske parametre. Poglavje 3 prikazuje, katera opazovanja vsebujejo določene datumske parametre. S terestričnimi opazovanji lahko določimo le orientacijo (opazovan azimut) ali merilo (opazovane dolžine) geodetske mreže. Astronomskih koordinat točk (absolutni položaj mreže) se ne opazuje več, predvsem zaradi cenejših in bolj kakovostnih satelitskih tehnik, kot npr. tehnike GNSS, ki zagotavljajo vse datumske parametre. S kombinacijo različnih opazovanj v različnih obdobjih tako realiziramo različne datumske parametre.

Različne realizacije datuma skozi različne izmere in tehnike izmer so narekovale različne metode določevanja parametrov deformacij. Poglavje 4 prikazuje metode ocenjevanja deformacijskih parametrov iz različnih tipov opazovanj. Število določenih deformacijskih parametrov je tako odvisno od datumskih informacij v opazovanjih, s katerimi ocenjujemo deformacije. Edina metoda, ki zagotovi vse deformacijske parametre glede na stabilen koordinatni sistem, je ocena deformacij preko vektorjev hitrosti. V praksi so ti vektorji kakovostno določeni le v primeru ponovljenih izmer GNSS. Ponovljene terestrične ali kombinirane (terestrične izmere in izmere GNSS) izmere ne zagotavljajo istega datuma

v vseh izmerah, zato so vektorji hitrosti obremenjeni s spremembami geodetskega datuma med izmerami.

V nalogi je bila tako prikazana metoda, ki omogoča oceno vektorjev hitrosti iz ponovljenih izmer različnih tipov opazovanj (poglavje 5). Med opazovanji morajo biti tudi psevdopazovanja, ki predstavljajo približne vrednosti položajev točk s pripadajočimi natančnostmi. Psevdopazovanja so v našem primeru predstavljala rezultate obdelave izmere GNSS. Matematični model predstavlja geodetska mreža, v kateri se opazuje kote, dolžine in položaje točk, ocenjuje pa položaje in vektorje hitrosti teh točk. Koordinate se oceni za vse točke, medtem ko se hitrosti ocenjujejo za poljubne (izbrane) točke. V primeru kombiniranja izmere GNSS in terestrične izmere imamo dve možnosti: ali ocenimo vektorje hitrosti ali pa ne.

V primeru, da ne ocenjujemo vektorjev hitrosti, datum 2R mreže definirajo psevdopazovanja in imamo v splošnem 4 datumske parametre. Vpliv psevdopazovanj je opisan v poglavju 5.3.1, kjer je bilo ugotovljeno, da je geodetski datum predoločen, ko imamo na voljo položaje GNSS in opazovane dolžine. V ocenjenih popravkih točk se tako skriva sprememba merila med izmerama. V primeru, ko pa ocenjujemo vektorje hitrosti, pa se nam število datumskih parametrov podvoji (4+4), saj so dodatno prisotne še spremembe datumskih parametrov koordinat skozi čas. Geodetski datum položajem določijo psevdopazovanja, ki so v tem primeru običajna opazovanja in se ne nanašajo neposredno na neznanke. Geodetski datum vektorjev hitrosti ni določen, če določamo vektorje hitrosti vsem točkam. V tem primeru moramo mrežo izravnati kot prosto mrežo. Rezultat so ocenjene vrednosti vektorjev hitrosti, ki so neodvisni od zasuka in premika mreže, vsebujejo pa spremembo merila med dolžinami in položaji GNSS. Če ne ocenjujemo vseh vektorjev, datum določijo točke, na katerih se vektor ne oceni (predpostavimo $v_x = v_y = 0$). Na ta način vektorji hitrosti vsebujejo vpliv spremembe zasuka, premika in merila mreže, določenega z vektorji hitrosti na teh točkah. V splošnem lahko zaključimo, da se v vektorje hitrosti prenese vsaj sprememba merila, ob predpostavki tako dolžinskih, kotnih opazovanj in opazovanj GNSS.

Končni rezultat naloge so vektorji hitrosti, ki bi kazali samo na relativne spremembe točk med seboj. Poglavje 5.4 prikazuje obravnavo ocenjenih vektorjev hitrosti in datumske informacije, ki jih vsebujejo. V splošnem lahko vektorji hitrosti vsebujejo vse, nekaj ali nobene spremembe datumskih parametrov. Opisan je postopek redukcije vektorjev

hitrosti, ki loči prisotne datumske spremembe med izmerami in premike točk relativno na druge točke. Vektorje hitrosti se reducira glede na težišče mreže, saj datumske spremembe predstavljajo gibanje celotne mreže točk, ki pa je neodvisno od uporabljenega koordinatnega sistema.

V literaturi je nakazano, da v primeru kombinacije različnih tipov opazovanj in določevanju deformacij na podlagi ocenjenih vektorjev hitrosti, ti vektorji hitrosti predstavljajo le stranski ali prehodni produkt, preko katerih se določa deformacije. V nalogi prikazana metoda korektno obravnava opazovanja in geodetski datum. S pravilno obravnavo datumskih informacij v vektorjih hitrosti lahko določimo vektorje, ki imajo geometrijski smisel, prikazujejo relativne premike točk v odnosu do ostalih točk mreže.

Predlagana metoda je bila prikazana na simuliranem geodetskem četverokotniku, kjer se je izkazalo, da pravilno oceni vektorje hitrosti točk v mreži. Z redukcijo a-priori vektorjev in ocenjenih vektorjev hitrosti smo pridobili dva identična niza vektorjev. Enak postopek smo uporabili v primeru AGM Slovenije. Tipi opazovanj in izmer so opisani v poglavju 6. Rezultati so bili primerjani z rezultati obdelave proste mreže terestričnih opazovanj z enakimi približnimi vrednostmi koordinat točk. Primerjava natančnosti ocenjenih koordinat točk je bila možna le ob oceni koordinat točk naše metode za isto epoho kot ocenjenih koordinat proste mreže (1971). Primerjava je pokazala identične rezultate kot primerjava obeh metod na geodetskem četverokotniku. Natančnosti proste mreže so nekoliko višje, a rezultati so si podobni. Primerjava vektorjev hitrosti, določenih preko popravkov izravnave proste mreže, in ocenjenih vektorjev hitrosti, kaže na visoko stopnjo ujemanja, tako s stališča velikosti in smeri kot s stališča natančnosti ocenjenih vektorjev hitrosti.

Na koncu je prikazan tudi postopek ocene deformacijskih parametrov na primeru geodetskega četverokotnika in AGM. V primeru geodetskega četverokotnika lahko za celo območje predpostavimo homogene deformacije. Pokazano je bilo ujemanje med ocenjenimi vektorji hitrosti in vektorskim poljem, določenim iz deformacij območja. V primeru AGM Slovenije pa ne moremo poenostaviti deformacij celotnega območja Slovenije kot homogenih deformacij. Izpeljano vektorsko polje, preko ocenjenih deformacijskih parametrov homogenih deformacij, potrjuje to dejstvo, saj ni skladno z ocenjenimi vektorji hitrosti. Prikazan je bil princip določevanja deformacij po trikotnikih, določenih na podlagi Delaunayeve triangulacije.

9 SUMMARY

Dealing with deformable bodies in sense of continuum mechanics and deformation analysis is mathematically well defined. Chapter 2 describes theory of deformation in solid body in detail, which are determined upon deformable body coordinate system with respect to stable or still space coordinate system. Main quantity of strain is vector field of displacement of deformable body. Chapter describes components of strain tensor in case of small and also large deformations in various coordinate systems. In case of orthogonal transformation, the choice of coordinate system is trivial, while strain tensor is invariant to transformation. It has been shown in case of similarity transformation, where also scale parameter is included, that strain tensor is not invariant to scale alteration. Strain tensor components are directly dependent on scale change.

In general geodetic practice we do not have an assurance of stable coordinate system. Stability of coordinate system is represented by stability of geodetic datum, which is in general variable with time. Definition of geodetic datum is possible with some known parameters or with performed observations, and is represented with a set of stabilized geodetic sites, among which observations are carried out. Different type of observations assure different geodetic datum parameters. Chapter 3 describes, which observations are able to define different datum parameters. Terrestrial observations are able to define orientation (observed azimuth) and scale (observed distances) of geodetic net. Astronomical coordinates (location of geodetic net) are not performed, mainly because of inexpensive and more qualitative satellite methods as GNSS, which is able to define all geodetic datum parameters. Combination of different survey techniques in different epochs gives us different geodetic datum realizations.

Different datum realizations in different surveys with various techniques have led to different methods of strain parameters determination. Chapter 4 describes some methods of strain estimation from various types of observations. Number of estimated strain parameters is dependent upon the number of datum parameters defined by observations. All strain parameters are estimated only with estimated velocity vectors. High quality velocity vectors are in geodetic practice estimated only from repeated GNSS surveys. Repeated terrestrial or combined (GNSS and terrestrial) surveys do not establish equal geodetic datum in all surveys, therefore are estimated velocity vectors biased by datum change between epochs.

Method for velocity vectors estimation from repeated surveys with different observation types is presented in this thesis (chapter 5). Among observations, carried out in the field, pseudoobservations must be included. Pseudoobservations are approximate values of coordinates with corresponding accuracies. In our case, pseudoobservations were a result of GNSS data processing. Mathematical model describes geodetic net, where angles, distances and coordinate are observed and station coordinates and velocities are estimated. Coordinates are estimated for each site in net, while velocities are estimated only for selected sites. In case of combination of terrestrial and GNSS survey, we have a choice to estimate velocities or not to estimate velocities.

In case, where velocities are not estimated, geodetic datum of a net has in general 4 parameters and is defined by pseudoobservations. Influence of pseudoobservations is described in chapter 5.3.1 and it has been determined, that geodetic datum is overdetermined in case of GNSS and distance observations. Estimated corrections of coordinates are biased for scale change in both surveys. When we estimate velocities, number of datum parameters doubles up (4+4), while there are additional alterations of datum parameters in surveys. Geodetic datum is for coordinates established by pseudoobservation, which are just common observations velocity estimation model and are not directly referred to unknowns in model. Geodetic datum of velocities is not determined, if we estimate velocities for all sites in net. In this case a free-net estimation must be applied. As a result velocity vectors are obtained, that are free of orientation and translation, but biased for scale alteration between observed directions and GNSS coordinates. If not all velocity vectors are estimated, than geodetic datum for velocities is determined with velocities, that are not estimated (presumption $v_x = v_y = 0$). Those estimated velocity vectors are biased for all datum parameters, determined on sites where velocities are not estimated. In general we can conclude, that velocity vectors are biased at least for scale alteration, where distances are observed among GNSS.

Final result of this thesis are determined velocity vectors, that describe only relative displacements of sites with respect to other sites. Chapter 5.4 describes estimated velocity vectors and datum information, contained in those velocities. In general, velocity vectors could be biased for all, some or none of geodetic datum parameter alteration. A procedure for velocity vectors reduction is described with a purpose to separate movement of a site and datum alteration. Vectors are reduced with respect to geometric center of sites,

while datum alterations represent motion of a whole net, which is independent of used coordinate system.

It was pointed out in some science literature that in case of combination of various survey techniques and determination of strain parameters, based on velocity vectors, that those vectors were only a by-product of estimation. Proposed method in this thesis treats observations and geodetic datum correctly. Correct treatment of datum alteration in velocity vectors could result in velocity vectors, that have geometric sense and present displacement of sites with respect to other sites in geodetic net.

The proposed method was demonstrated on simulated geodetic quadrilateral and it was shown, that correct velocity vectors were obtained. Reducing a-priori and estimated velocity vectors identical sets of vectors were obtained. Same procedure was applied to astrogeodetic net in Slovenia. Observation types used and surveys performed are described in chapter 6. Result of processing were compared to results of free-net estimation, based on same approximate coordinates. Comparison of accuracies of estimated coordinates could be only done when reference epoch was same for both estimations (1971). Comparison gave same results as for geodetic quadrilateral. Accuracies of free-net estimation are a bit higher, while results are very similar. Comparison of velocity vectors obtained from proposed method and free-net estimation show high level of similarity, from size and from direction of vectors point of view.

At the end of thesis also a procedure to estimate strain parameters in case of geodetic quadrilateral and AGM is shown. In case of geodetic quadrilateral a homogeneous strain was presumed. High level of match is evident from estimated velocities and derived velocity field from strain parameters. In case of AGM, presumption for homogeneous strain could not be done and derived velocity field from homogeneous strain confirms this fact. A method for strain parameters deformation based on Delaunay triangulation is performed for AGM.

VIRI

Altamimi, Z., Sillard, P., Boucher, C., 2002. ITRF2000: a new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications. *Journal of Geophysical Research*, 107 (B10), 2214, 19 str. doi: 10.1029/2001JB00561.

Berk, S., Komadina, Ž., Marjanović, M., Radovan, D., Stopar, B., 2003. The Recomputation of EUREF GPS Campaigns in Slovenia. Končno poročilo, predstavljeno na simpoziju IAG, podkomisije EUREF, Toledo, junij 4-7, 2003.

<http://www.euref-iag.net/symposia/book2003/4-02-Berk.zip> (15.09.2007)

Boucher, C., Altamimi, Z., 2007. Memo: Specification for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign.

<http://lareg.ensg.ign.fr/EUREF/> (20.08.2007).

Bourne, S. J., Árnadóttir, T., Beavan, J., Darby, D. J., England, P. C., Parson, B., Walcott, R. I., Wood, P. R., 1998. Crustal deformation of the Marlborough fault zone in the South Island of New Zealand: Geodetic constraints over the interval 1982-1994. *Journal of Geophysical Research*, 103(B12): Pages 30, 147-30,165.

Brockmann, E., 1996. Combination of Solutions for Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System (GPS). Doktorska disertacija. Bern, Švica, Astronomski inštitut Univerze v Bernu.

Bronštejn, I., N., Semendjajew, K., A., Musiol, G, Mühlig, H., 1997. Matematični priročnik. Ljubljana, Tehniška založba Slovenije.

Calais, E., Galisson, L. Stéphan, J. -F., Delteil, J., Deverchère, J., Larroque, C., Mercier de Lépinay, B., Popoff, M., Sosson, M, 2000. Crustal strain in the Southern Alps, France, 1948-1998. *Tectonophysics* 318: 1-17.

Collier, P. A., Eissfeller, B., Hein, G. W., Landau, H., 1988. On a four-dimensional integrated geodesy. *Bull. Géod.* 62: 71-91.

Cong, D. C., Feigl, K. L., 1999. Geodetic measurement of horizontal strain accross the

Red River fault near Thac Ba, Vietnam, 1963-1994. *Journal of Geodesy* 73: 298-310.

Dach, R., Hugentobler, U., Fridez, P., Meindl, M., 2007. Bernese GPS Software, Version 5.0. Bern, Švica, Astronomski Inštitut Univerze v Bernu.

Dermanis, A., Rossikopoulos, D. 1988. Modelling Alternatives in Four-dimensional Geodesy. Sopron, Hungary, International Symposium, Instrumentation, Theory and Analysis for Integrated Geodesy, May 16 - 20., pp. 115-145.

Dong, D., Herring, T. A., King, R. W., 1998. Estimating regional deformation from a combination of space and terrestrial geodetic data. *Journal of Geodesy* 72: 200-214.

Featherstone, W. E., Rieger J. M., 2000. The importance of using deviations of the vertical for the reduction of survey data to a geocentric datum. *The Australian Surveyor* 45(2): 46-61.

Ferhat, G., Feigl, K. L., Ritz, J. -F., Souriau, A., 1998. Geodetic measurement of tectonic deformation in the southern Alps and Provence, France, 1947-1994. *Earth and Planetary Science Letters* 159: 35-46.

Frank, F. C., 1966: Deduction of Earth strains from survey data. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 56 (1): 35-42.

Fujii, Y., 2003. Detailed horizontal crustal movements associated with the 1923 Kanto earthquake as deduced from network adjustment of old data including the third order triangulation stations. *Journal of Geodynamics* 35: 457-469.

Grant, D., B., 1990. Combination of terrestrial and GPS data for Earth deformation studies. Doktorska disertacija. New South Wales, Univerza New South Wales, UNISURV S-32,1990, Reports from School of Survey.

Grenerczy, G., 2000. Present-day tectonics of the Pannonian basin and its surroundings inferred from space geodesy. Doktorska disertacija. Budimpešta, Loránd Eötvös University of Science, Faculty of Natural Science.

Griffiths, J. H., Johnson, A. M., 2006. Method of detecting strike-shear zones. *Tectonophysics*, 422: 129-148.

Heiskanen, W. A., Moritz, H., 1996. *Physical Geodesy*. Graz, Austria, Institute of Physical Geodesy, Technical University.

Hunstad, I., England, P., 1999. An upper bound on the rate of strain in the Central Apennines, Italy, from triangulation measurements between 1869 and 1963. *Earth and Planetary Science Letters* 169: 261-267.

Hunstad, I., Selvaggi, G., D'Agostino, N., England, P., Clarke, P., Pierozzi, M., 2003. Geodetic strain in peninsular Italy between 1875 and 2001. *Geophysical Research Letters*, 30(4), 1181, doi: 10.1029/2002GL016447.

Jenko, M., 1986. Dela na astronomsko - geodetski mreži v letih 1975 - 1982. Raziskovalni projekt: Sistem geodetskih osnov SR Slovenije, Raziskovalna naloga: Temeljne triangulacijske mreže v SR Sloveniji. Ljubljana, Inštitut Geodetskega zavoda SRS.

Kogoj, D., 2002. Merjenje dolžin z elektronskimi razdaljemerji. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Kontogianni, V. A., Roumanis, M., Psimoulis, P. A., Sfeikos, A., Stiros, S. C., 2004. Estimation of the strain tensor in tunnel sections, based on geometry (geodetic etc.) data. *Bulletin of Geological Society of Greece XXXVI*: 1918-1924.

Krishnaswamy, S., 2005. Characterization of geometry of deformation – displacement @ strain.

http://www.cqe.northwestern.edu/sk/sk_profile.html (15.11.2005).

Marjanović, M., 2002. Izjednačenje i analiza EUREF i CROREF GPS kampanja u Republici Hrvatskoj. Magistrska naloga. Zagreb, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

Mikhail, E. M., Ackermann, F. E., 1976. *Observation and Least Squares*. New York, Harper & Row.

Pearson, C., 1994. Geodetic strain determinations from the Okarito and Godley-Tekapo regions, central South Island, New Zealand. *New Zealand Journal of Geology and Geophysics* 37: 309-318:

Pelzer, H., 1985. *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II*. Studgart, Verlag Konrad Wittwer KG.

Pelzer, H., 1980. *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung*. Studgart, Verlag Konrad Wittwer KG.

Pietrantonio, G, Riguzzi, F., 2004. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications. *Journal of Geodynamics* 38: 1-18.

Prawirodirdjo, L, Bock, Y., Genrich, J. F., Puntodewo, S.S.O., Rais, J., Subarya, C., Sutisna, S., 2000. One century of tectonic deformation along the Sumatran fault from triangulation and Global Positioning System surveys. *Journal of Geophysical Research* 105(B12): 343-361.

Radovanovic, R. S., El-Sheimy, N., Richert, T., Teskey, W. F., 2004. Local datum definition and geodetic network positioning using global navigation satellite systems. *Journal of Geodesy* 78: 283-294.

Sideris, M. S., 1990. The role of geoid in one-, two-, and three-dimensional network adjustments. *CISM Journal ACSGC* 44: 9-18.

Srpčič, S., 2003. *Mehanika trdnih teles*. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Stanek, M., Turk, G., 1998. *Osnove mehanike trdnih teles*. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Stopar, B. 1995. *Sanacija astrogeodetske mreže v Sloveniji z GPS meritvami*. Doktorska disertacija, Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani.

Stopar, B., Kuhar, M., 2001. *Moderni geodetski koordinatni sistemi in astrogeodetska*

mreža Slovenije. Ljubljana, Geodetski vestnik, 45: 11-26.

Sue, C., Martinod, J., Tricart, P., Thouvenot, F., Gamond, J. -F., Fréchet, J., Marinier, D., Glot, J. -P., Grasso, J. -R., 2000. Active deformation in the inner western Alps inferred from comparison between 1972-classical and 1996-GPS geodetic surveys. *Tectonophysics* 320: 17-19.

Teunissen, P. J. G., Kleusberg (Eds.), A., 1998. *GPS for Geodesy*, 2nd edition. Berlin, Springer-Verlag Heidenberg.

Torge, W., 1991. *Geodesy*, 2nd Edition. Berlin - New York, Walter de Gruyten.

Tsenkov, T., Gospodinov, S., 2002. Determination of 2D-tectonic deformations using affine transformation. *ZFV (Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement)* 127, Heft 4.

Vaniček, P., 1972. *Tensors, Lecture Notes 27*. New Brunswick, Canada, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick.

Vaniček, P., Krakiwsky, W., 1986. *Geodesy: the Concepts*, druga izdaja. Amsterdam, Elsevier.

Wessel, P., Smith, W. H. F., 2004. *The Generic Mapping Tool GMT, Version 4.0*. Manoa, Havaji, Technical Reference and Cookbook, SOEST/NOAA.

Wolf, H., 1981. Objectives of geodetic networks and future plans. München, International symposium on geodetic networks and computations of IAG, 31. avg-5. sept, 8:15.

Xu, P., Shimada, S., Fujii, Y, Tanaka, T., 2000a. Geodynamical value of historical geodetic measurements: A theoretical analysis. *Earth Planets Space*, 52: 993-997.

Xu, P., Shimada, S., Fujii, Y, Tanaka, T., 2000b. Invariant geodynamical information in geometric geodetic measurements. *Geophysical Journal International*, 142: 586-602.

Zerbini, S., Richter, B., Rocca, F., van Dam, T., Matonti, F., 2007. A Combination of

Space and Terrestrial Geodetic Techniques to Monitor Land Subsidence: Case Study, the Southeastern Po Plain, Italy. *Journal of Geophysical Research*, 112(B05401), 12 str., doi: 10.1029/2006B004338.

Zhong, D, 1997. Datumsprobleme und stochastische Aspekte beim GPS-Nivellement für lokale Ingenieurnetze. Doktorska disertacija. München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München.

Surfaces and Contact Mechanics URL

<http://frictioncenter.siu.edu/course/file13.html> (16.08.2007)

IGS URL

<http://igs.cb.jpl.nasa.gov/> (20.08.2007)

ITRF URL

<http://itrf.ensg.ign.fr/> (20.08.2007)

ETRF89 URL

<http://lareg.ensg.ign.fr/EUREF/> (20.08.2007)

IERS URL

<http://hpiers.obspm.fr/> (20.08.2007)

EUREF URL

<http://www.epncb.oma.be/> (20.08.2007)

IAG URL

<http://www.gfy.ku.dk/iag/> (20.08.2007)

PRILOGE

A Rezultat obdelave opazovanj na AGM Slovenije

KOORDINATE IN HITROSTI:

Referenčna epoha:

1990.00

TC	X[m]	Y[m]	A[m]	B[m]	TH[deg]
	VX[m/lt]	VY[m/lt]	A[m/lt]	B[m/lt]	TH[deg]
BJEL	-3047.1536	15347.4693	0.0180	0.0154	174.0
	0.0009	-0.0015	0.0031	0.0027	174.1
BLEG	-68466.4157	114788.4705	0.0097	0.0080	79.6
	-0.0023	-0.0001	0.0017	0.0014	79.5
BRSK	44505.9597	49404.7953	0.0152	0.0128	44.7
	0.0011	0.0007	0.0026	0.0022	45.1
CERK	-18404.7722	45692.0841	0.0124	0.0114	148.7
	-0.0009	0.0012	0.0022	0.0020	149.4
DEBV	7635.4403	43985.0852	0.0142	0.0122	20.3
	0.0003	0.0002	0.0025	0.0021	21.5
DONA	57230.5680	125554.9366	0.0106	0.0086	120.0
	0.0032	-0.0007	0.0018	0.0015	119.5
GOLIB	-72580.6465	151147.4719	0.0571	0.0443	43.8
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
GORJ	24753.8246	69434.0074	0.0112	0.0108	56.5
	-0.0014	-0.0001	0.0019	0.0019	56.7
GRIN	-35756.2896	135884.5667	0.0090	0.0081	143.1
	0.0018	-0.0011	0.0016	0.0014	140.1
GRMA	61035.6799	151436.7654	0.0114	0.0088	133.9
	0.0010	-0.0005	0.0020	0.0015	132.7
IVANB	87031.8339	116869.5302	0.0609	0.0456	108.1
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0

JAVO	33141.7205	103703.7315	0.0097	0.0085	130.9
	0.0002	-0.0007	0.0017	0.0015	128.0
JERUB	91365.3670	150017.9116	0.0654	0.0398	123.8
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
KALN	112415.7741	111707.3446	0.0139	0.0127	113.9
	-0.0007	-0.0032	0.0024	0.0022	113.1
KAME	91871.9931	182958.9917	0.0178	0.0123	134.8
	0.0043	-0.0051	0.0031	0.0021	135.0
KANZ	-120247.6305	136971.3480	0.0376	0.0247	64.5
	-0.0040	0.0009	0.0023	0.0015	64.5
KORA	-111369.7724	104311.4828	0.0157	0.0103	83.5
	-0.0044	-0.0026	0.0027	0.0018	83.6
KOSUB	-50414.8255	144901.6494	0.0476	0.0416	52.7
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
KOTOB	140103.4074	137256.4916	0.1042	0.0916	98.9
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
KRIMB	-41023.6180	88277.2626	0.0502	0.0358	107.8
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
KRMJ	-109381.3355	77417.2275	0.0155	0.0110	98.2
	-0.0043	-0.0026	0.0027	0.0019	98.2
KUCE	-20231.6892	95224.8261	0.0095	0.0081	104.0
	-0.0016	-0.0009	0.0016	0.0014	107.9
LEND	113233.3289	160047.5875	0.0155	0.0122	124.5
	0.0038	-0.0041	0.0027	0.0021	124.8
LOKAB	61724.5981	173258.3172	0.0707	0.0438	138.8
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
MALJ	-106022.8086	41828.8530	0.0167	0.0135	133.3
	-0.0047	-0.0011	0.0029	0.0023	133.0

MANZ	-103389.9159	145816.0461	0.0329	0.0231	50.3
	-0.0034	-0.0015	0.0020	0.0014	50.3
MONT	-99924.9664	13587.2271	0.0205	0.0183	116.1
	-0.0064	-0.0005	0.0036	0.0032	115.6
MRZLB	8295.6728	116935.1970	0.0475	0.0289	136.3
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
MRZO	-92552.5425	94346.2301	0.0134	0.0091	86.6
	-0.0040	-0.0028	0.0023	0.0016	86.6
NANO	-73928.4122	73754.8142	0.0120	0.0090	97.1
	-0.0028	-0.0016	0.0021	0.0015	97.0
ORLJ	41.1480	104606.7719	0.0092	0.0081	102.5
	-0.0006	0.0001	0.0016	0.0014	102.0
PLES	51995.9041	67092.3988	0.0138	0.0118	48.5
	0.0003	0.0004	0.0024	0.0020	50.8
PRIV	24623.4719	28009.1029	0.0186	0.0147	20.9
	0.0018	0.0012	0.0032	0.0025	20.9
RASIB	-37697.7766	111737.5314	0.0456	0.0366	79.6
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
RODIB	-87540.8569	122022.7695	0.0608	0.0397	74.2
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
SLAVB	-79990.8009	44790.1903	0.0648	0.0502	118.4
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
SLJEB	73569.1067	85390.6072	0.0634	0.0494	115.8
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
SNEZ	-43106.5796	50495.2349	0.0118	0.0103	139.5
	-0.0021	-0.0015	0.0020	0.0018	138.0
SVAN	-19626.7477	71174.8638	0.0103	0.0091	128.8
	-0.0010	0.0018	0.0018	0.0016	125.4

TUHO	-28083.8189	22156.8111	0.0160	0.0134	162.5
	-0.0014	-0.0010	0.0028	0.0023	162.5
UCKA	-62609.9058	16920.7783	0.0176	0.0138	143.4
	-0.0020	-0.0041	0.0031	0.0024	143.3
URGOB	-2765.5391	150004.5718	0.0532	0.0371	102.8
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
VEKO	15202.1303	152425.5505	0.0113	0.0096	165.8
	0.0004	0.0017	0.0020	0.0017	165.1
VIVO	-14165.2620	124715.6219	0.0082	0.0072	128.8
	-0.0026	0.0004	0.0014	0.0012	125.9
ZGLA	10075.5175	86227.1663	0.0096	0.0095	133.8
	-0.0007	0.0015	0.0017	0.0016	117.2
ZIVR	37394.6141	151163.1450	0.0106	0.0094	155.0
	0.0002	0.0004	0.0018	0.0016	155.9

B Redukcija vektorjev hitrosti za vpliv geodetskega datuma

OENJENE NEZNAKE:

```
-----  
TREND_X : VX0 =      -0.0011   +-   0.0003 m/leto  
TREND_Y : VY0 =      -0.0006   +-   0.0003 m/leto  
ZASUK   :   W =      -0.0009   +-   0.0011 ''/leto  
MERILO  :   S =       0.0198   +-   0.0041 ppm/leto  
-----
```

VEKTORJI HITROSTI:

TC	VY [mm/lt]	VX [mm/lt]	A [mm/lt]	B [mm/lt]	TH [deg]
BJEL	2.1855	0.6498	3.1636	2.7118	174.16
BLEG	-0.2163	-0.1830	1.7451	1.4364	79.88
BRSK	1.2584	2.3609	2.6769	2.2713	45.58
CERK	0.4935	2.6583	2.1863	2.0062	149.49
DEBV	1.1526	1.7978	2.4844	2.1527	21.46
DONA	2.7661	-0.4955	1.9088	1.5540	118.46
GORJ	-0.9704	1.0678	1.9759	1.8936	58.87
GRIN	3.1525	-1.4990	1.6045	1.4504	140.03
GRMA	0.3377	-0.7258	2.0426	1.6088	132.11
JAVO	0.3549	-0.0990	1.7188	1.5144	126.53
KALN	-2.2123	-2.4740	2.5209	2.2930	110.08
KAME	2.9469	-5.8186	3.1721	2.2524	134.79
KANZ	-1.0308	0.1056	2.3463	1.5987	65.25
KORA	-1.3831	-2.7070	2.7931	1.8539	83.75
KRMJ	-1.2118	-2.2067	2.7617	1.9676	98.01
KUCE	-0.4185	-0.4035	1.6102	1.4205	107.46
LEND	2.0488	-4.3122	2.7939	2.2297	123.62
MALJ	-1.5117	0.0849	2.9561	2.4008	132.29
MANZ	-0.7931	-2.4309	2.0564	1.5020	51.19
MONT	-3.2658	1.2583	3.6124	3.2252	115.37
MRZO	-1.3399	-2.6424	2.3867	1.6375	86.71
NANO	-0.3822	-0.8852	2.1335	1.5992	96.80
ORLJ	0.1571	0.5337	1.6281	1.4276	101.66
PLES	0.2559	1.7983	2.4255	2.0824	51.73

PRIV	2.3960	3.1873	3.2598	2.5762	20.90
SNEZ	-0.2651	-0.2686	2.0881	1.8329	137.74
SVAN	0.2744	2.7383	1.8126	1.6017	124.95
TUHO	0.2906	0.9178	2.8238	2.3780	162.68
UCKA	0.3576	-2.2644	3.0981	2.4564	143.43
VEKO	0.6406	1.1841	2.0087	1.7285	165.26
VIVO	-1.5898	0.3629	1.4693	1.2896	125.69
ZGLA	-0.0101	2.2505	1.6926	1.6602	112.68
ZIVR	0.0709	-0.0074	1.9129	1.7023	155.75
